REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

RELACIONES ENTRE LAS ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES Y LA FISICA

DISCURSO

LEIDO EN EL ACTO DE SU RECEPCION
POR EL

RVDO. P. ALBERTO DOU MASDEXEXÁS, S. J.

Y

CONTESTACION

DEL

EXCMO. SR. D. ALFONSO PEÑA BOEUF

EL DIA 12 DE JUNIO DE 1963

MADRID
DOMICILIO DE LA ACADEMIA: VALVERDE, 22
TELEFONO 221-25-29
1963

Depósito Legal M. 8.172-1963

Talleres Gráficos Vda C. Bermejo.—J. García Morato, 122.—Teléf. 233-06-19.—Madrid

DISCURSO

DEL

RVDO. P. ALBERTO DOU MASDEXEXÁS, S. J.

TEMA:

RELACIONES ENTRE LAS ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES Y LA FISICA

Excmo. Sr. Presidente,
Excmos. Sres. Académicos,
Señoras, señores:

Sea la primera palabra de agradecimiento a los miembros de esta docta Corporación, por haber pensado en mí y haberme llamado, deseando mi colaboración en sus tareas científicas.

Dos géneros de razones me fuerzan íntimamente a una rendida gratitud por vuestro llamamiento. Se basan las primeras en la calidad de los valores, de los que vuestra actividad toma continuamente nuevas fuerzas, pues, dejando aparte el valor religioso en realidad más divino que natural, es el más alto de los valores humanos el que da vida y satisfacción a vuestras tareas, ya que el valor científico, el goce de la verdad clara y de la verdad nueva sacia la más radical, duradera y pura de las apetencias humanas.

Así como las razones apuntadas se refieren al valor del objeto de vuestras tareas, el segundo género de razones considera la forma en que he sido incorporado a colaborar en las mismas. Pues, sin duda, tanto más se fuerza a la gratitud y se estimula la cooperación, cuanto más humana es la incorporación y mayores muestras de confianza se dan en la misma. En dos centros de enseñanza superior se desarrollan las tareas científicas del que os habla: al primero cronológicamente fui llamado, tras solicitud, por la libre elección de la mayoría del Claustro. Al segundo me incorporé en virtud de laboriosa oposición y podría haber entrado como un extraño. Bien comprenderéis cuánto más, al menos por razones sicológicas que refiero al modo de agregación y a las que ningún mortal escapa, me empujaba hacia una honrada colaboración la benévola elección del Claustro del primer Centro, que el raro método seguido para la incorporación al segundo. Pues, ¿qué decir de mi actual estado de ánimo hacia vosotros si vuestra benevolencia y cortesia me avasallan y me obligan a fuer de agradecido a colaborar incondicionalmente en vuestras altas y honrosas tareas?

Después de haber manifestado mi gratitud a aquéllos que me han llamado a esta noble Corporación, deseo también expresar mi agradecimiento a la Compañía de Jesús, pues, en cuanto humanamente se puede juzgar de los futuros contingentes, cierto que jamás hubiera ocupado este puesto si no fuera porque un día, con ardiente caridad, me admitió en su seno.

No incurriré en la vacuidad de proclamar mi imposibilidad de seguir y superar la obra de mi predecesor. Cuando serenamente considero la obra y figura de don Julio Rey Pastor, siento como si el suelo temblase a mis pies. Honroso destino, pero que deja entrever un fracaso, el de suceder al más importante de los matemáticos españoles de la Edad Contemporánea.

Nunca me correspondió ni tuve la oportunidad, mejor diría la suerte, de haberle escuchado en sus clases o cursillos. Pero nunca se borrarán de mi memoria el hechizo y la embriaguez que me produjo el estudio del *Análisis Algebraico*, cuando recién terminado el bachillerato este histórico libro cayó en mis manos.

La grandiosidad de su figura y la importancia de su obra me ha parecido me obligaban, a semejanza de lo que él mismo hizo en esta misma situación con su predecesor, don Eduardo Torroja Caballé, a dedicar a su biografía toda la primera parte de este discurso.

I. El ilustre Académico, cuyo sillón me corresponde ocupar, tuvo una de las carreras más brillantes, si no la que más, entre todos los científicos españoles de su tiempo, y muy en particular entre los matemáticos.

Después de haber obtenido sendos premios extraordinarios en la Licenciatura y en el Doctorado, don Julio Rey Pastor gana las oposiciones para la cátedra de Análisis Matemático de la Universidad de Oviedo en 1911 a los veintidós años de edad, y vuelve a opositar dos años más tarde, obteniendo la misma cátedra en la Universidad Central, como entonces se llamaba a la de Madrid.

Con la presentación en 1912 del volumen *Teoría Geométrica de la Polaridad* gana el Concurso ordinario convocado por esta Real Academia, y a los dos años presenta el maduro y largo trabajo *Fundamentos de la Geometría Proyectiva Superior*, con el que logra el premio del Concurso extraordinario convocado por esta misma Academia y patrocinado por el Duque de Alba.

En 1917 es elegido por la Institución Cultural Española de Buenos Aires entre los tres propuestos por la Junta para Ampliación de Estudios para ocupar la cátedra de la Institución, en su segundo año de existencia. Lleva a cabo su cometido en dos series de conferencias con éxito extraordinario y a plena satisfacción de la Institución Cultural.

Ingresa en esta docta Corporación en 1918 como miembro electo, a los treinta años de edad, habiendo sido probablemente el académico de Ciencias más joven de todos los tiempos, incluso más que Echegaray, que fue elegido cuando contaba treinta y dos años.

En este primer período de su vida pública Rey Pastor hace ya gala de sus cualidades excepcionales. Ante todo se manifiesta como un profesor consumado: era lógico en la estructuración de sus lecciones, claro, riguroso y equilibrado en la explicación de sus demostraciones y de una facilidad y galanura de expresión envidiables; y lo más importante, ponía fuego de pasión en su docencia de modo que lograba entusiasmar a sus alumnos. A estas extraordinarias cualidades de su magisterio, hay que añadir la de su inmensa magnitud, pues duró más de cincuenta años sin interrupciones, se extendió a dos continentes y tuvo lugar en innumerables centros de enseñanza superior.

Este magisterio oral con ser tan enorme no cede en nada a su magisterio escrito, cuya alta calidad se muestra ya en los textos publicados en este primer período, que evolucionarán en ediciones sucesivas hasta los incomparables textos clásicos del *Análisis Algebraico* y de la *Teoría de Funciones*.

El magisterio oral y escrito de Rey Pastor irá mejorando aún y perdurará a lo largo de toda su vida. Para valorarlo globalmente no puede prescindirse de otros aspectos de su obra, en especial de su labor investigadora. Entendiéndolo así puede afirmarse que sólo el fruto de su magisterio le constituye en el matemático hispanoamericano más importante de la Edad Contemporánea.

El trabajo de investigación más profundo de este primer periodo geométrico es la voluminosa Memoria: *Fundamentos de la Geometría proyectiva superior*, impregnada toda ella de purismo sintético. El historiador de la Geometría, F. Amodeo, en la obra *Origine e sviluppo de la Geometria proiettiva*, premiada por la Real Academia de Italia el año 1938, le atribuye un mérito en verdad excepcional.

He aquí el juicio que de esta misma obra hace L. Bieberbach en el *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik:*

«Bajo el nombre de Geometría proyectiva superior comprende el autor los fundamentos axiomáticos de la Geometría proyectiva, la teoría de los elementos imaginarios y la teoría de las transformaciones que pueden estudiarse partiendo de las colineaciones. El autor, partiendo del Programa de Erlangen y mediante métodos puramente sintéticos, da un brillante resumen de las ideas y métodos fundamentales en este campo. Con frecuencia da nuevos resultados y en muchos casos nuevos métodos de demostración. Ha logrado con especial éxito una exposición comparativa de las diversas teorías de los elementos imaginarios. Además hace progresar la teoría de las colineaciones con un cálculo vectorial proyectivo. Introduce en la Geometría proyectiva muchos conceptos del análisis, como curvas analíticas, superficies de Riemann, representación conforme. Deseo todavía señalar la bella demostración del principio de correspondencia de Chasles-Jonquières.»

Concluyamos esta esquemática visión del período geométrico de la vida de Rey Pastor enunciando un resultado interesante dado a conocer en 1917 en Buenos Aires y publicado en los Anales de la Institución Cultural Española. El teorema dice así: *En una geometría del triángulo no euclídea para que el ortocentro, el baricentro y el circuncentro estén en línea recta es condición necesaria y suficiente que el triángulo sea isósceles.*

II. Con ocasión de su incorporación a la Academia pronuncia mi predecesor un memorable discurso, que constituye un importante documento para la historia de la Matemática en España. Resulta patente que en esos años se opera un cambio profundo en la mentalidad de Rey Pastor. He aquí sus palabras:

«Ecuchad esta triste confesión. Consagrar los mejores años de la juventud a levantar el edificio de la propia cultura; triunfar en oposiciones, oir el elogio de los maestros; sentir el halago de todos los premios y distinciones; procrear en noches de vigilia, hijos de la inteligencia; y, de pronto, al arribar a otras playas, contra el consejo de muchos profesores, para saciar la curiosidad de saber, impulsado por íntimo descontento interior, presagio del rudo desengaño, sentir, al violento contraste con la realidad de la Ciencia, que aquella ficticia riqueza se disipa y la familia creada se pierde, y el edificio levantado se derrumba.»

«Encontrarse indigente en los umbrales de la Ciencia, llorando la juventud perdida, verse obligado a ocultar el título ganado a costa de tantas torturas, y tener que rehacer a marchas forzadas una nueva vida... Sólo quien haya sufrido análogo tormento está capacitado para comprender este dolor.»

Lejos de sucumbir al desaliento, Rey Pastor rehace una nueva vida y empieza como investigador matemático un nuevo período relegando sus investigaciones sintéticas de geometría a un segundo lugar y dedicándose con heroica tenacidad a nuevas investigaciones en el campo del Análisis.

Desde 1915, en que Rey Pastor fue nombrado primer Director del Laboratorio Matemático perteneciente a la Junta para Ampliación de Estudios, se dedica activamente a la formación de un grupo de matemáticos, al mismo tiempo que publica sus *Lecciones de Análisis Matemático* (1915 y 1916) y los *Elementos de Análisis Algebraico* (1917). Estas dos actividades, constitución de una Escuela mediante la formación de un considerable número de discípulos, algunos de los cuales están aquí presentes, y publicación de textos tan definitivos como el *Análisis Algebraico* y *Teoría de Funciones*, se prolongan durante cerca de dos décadas. Ambas actividades son llevadas a cabo con tanto éxito por Rey Pastor que juntas constituyen un acontecimiento, que por su importancia y significación divide en dos períodos la historia de la Matemática española en la Edad Contemporánea.

Simultáneamente con esta excelente tarea en la Universidad de Madrid lleva a cabo otra análoga en la Universidad de Buenos Aires. Gracias a la diferencia de hemisferio de ambas Universidades, varios años de su vida transcurren sin verano, pero con dos inviernos, en cada uno de los cuales desarrolla sendos cursos en las dos ciudades. También se desarrolla cierto forcejeo en ambas Universidades por conservarle como Profesor numerario.

La libertad con que firma los contratos con la Universidad bonaerense le proporciona allí excelentes condiciones de trabajo. También expresa su satisfacción por los alumnos de nuestra Universidad, pero no encuentra aquí las facilidades que deseaba; consigue ordenar una biblioteca, pero es para comprobar que es inservible. La Sección de Matemáticas propone en 1932 una solución viable, pero la rígida institución ministerial la rechaza; finalmente en 1935, ante una nueva difícil situación, Rey Pastor pide la excedencia, que le es concedida, quedando separado de la Universidad madrileña. La guerra civil le sorprende en la Argentina. Terminada la Cruzada, por orden de 1.º de diciembre de 1939 reingresa en el Cuerpo de catedráticos numerarios de Universidad, aunque de hecho no se reintegra hasta pasados algunos años.

Este segundo período en la vida de nuestro biografiado es el más fecundo de su carrera científica. Su actividad como profesor, escritor e investigador es asombrosa, hasta tal punto que parece increíble. Merecen mencionarse, sin que por otra parte destaquen muy singularmente, el año 1929 con varios libros y un total de 25 publicaciones, y, sobre todo, el año 1928, en el que da a luz unas 35 publicaciones, de las cuales 19 son estrictamente científicas, otras dos son cursos dados en la Universidad de Madrid y las restantes son libros elementales en colaboración, reseñas, conferencias, etc.

Los principales temas en que se ocupa son: cuestiones topológicas, funciones de variable compleja, transformación conforme y sobre todo contribuciones a la sumación de series, donde logra brillantes resultados que culminan en la publicación de la excelente monografía *Teoría de los algoritmos lineales de convergencia y de sumación*, publicada en Buenos Aires.

Damos a continuación un interesante resultado en este campo. Como afirman J. Babini, A. González Domínguez y L. A. Santaló, «este elegante teorema, que bien merece el nombre de teorema de Rey Pastor, da idea de la estatura matemática de D. Julio y basta para asignarle lugar permanente entre los cultores de nuestra ciencia». Se trata de un resultado publicado en los *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* (1931) con el título «Un método de sumación de series». El método consiste en tomar como función sumatriz correspondiente a la serie potencial $\Sigma a_k z^k$ dada, la función σ_n,

$$\sigma_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \binom{n}{k} k!\, n^{-k} z^k,$$

de modo que podemos definir como método de sumación, según Rey Pastor:

$$(\mathrm{R\,P}) \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \lim_{n\to\infty} \sigma_n(z).$$

El teorema que Rey Pastor demuestra puede enunciarse así: *La serie geométrica* Σz^k *es sumable por este método en el abierto acotado cuya frontera sea la rama exterior de la curva*

$$\left| z \cdot e^{-\frac{1}{z}} \right| = e,$$

y sólo en los puntos de este abierto.

III. Recién terminada la conflagración mundial, mi predecesor vuelve a Madrid, donde nuevamente desarrolla múltiples actividades. Merecen mencionarse su conferencia sobre «Problemas náuticos del quinientos» y las que en años sucesivos dio en la Escuela de Ingenieros de Caminos. A principios de 1951 es nombrado Director del Seminario de Física y Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid, en el que forma un reducido número de selectos estudiantes.

En 1953 la British Astronomical Association pone el nombre de Rey Pastor a un cráter lunar entre los de Faraday y Cuvier. En 1954 es nombrado miembro de la Real Academia Española y en 1956 se le concede por unanimidad el primer premio March de Ciencias.

En este último período de su vida la temática de Rey Pastor se abre hacia horizontes científicos más vastos. Hay un cierto cansancio matemático y una desviación hacia disciplinas más humanas, como la Cartografía, la Historia y la Filosofía de la Ciencia; esta clase de desviaciones se ha dado con frecuencia en grandes matemáticos. Pero no deja de apreciarse en estos nuevos afanes la permanencia de un valor auténticamente científico, y de muchos quilates, en particular en su obra cartográfica, que culmina con la publicación del libro *Cartografía Mallorquina*, de forma pequeña, pero verdaderamente enciclopédico y monumental.

También lleva a cabo una valiosa obra científica como historiador de la Ciencia, y en especial como historiador de la Matemática española. Ya en 1913, a los veinticinco años de edad, en el discurso de apertura de curso en la Universidad de Oviedo da a conocer un importante y original trabajo sobre los matemáticos españoles del siglo XVI. Por sus relevantes méritos en esta disciplina es nombrado, en 1938, miembro de la Académie Internationale d'Histoire des Sciences, con sede en París.

Esta preocupación histórica, que Rey Pastor sintió desde joven y de la que han brotado agudas y eruditas páginas todos los años de su vida, nos lleva a considerar otra importante faceta de su actividad científica: a saber, el estudio de la Filosofía de la Ciencia y muy en particular el problema de la Ciencia española. Captó como pocos, quizá como ninguno, la realidad del problema, lo sintió vivamente en su misma persona y a su comprensión y solución dedicó lo mejor de toda su vida.

Trata de ello en numerosas publicaciones, atendiendo no sólo a su aspecto histórico, sino también a la interna dialéctica del problema. Le apasiona especialmente el papel que desempeñan las Matemáticas en el ancho espectro que va desde las ciencias más puras hasta las prácticas aplicaciones del técnico y aun del capataz.

Ya Menéndez y Pelayo, citado por Rey Pastor (1), afirma que «hay que convencer a los españoles de la sublime utilidad de la Ciencia inútil». En efecto, el auge de las Matemáticas ayuda de manera singular a la formación de un ambiente apto para toda investigación científica: da el calor necesario y crea la comprensión y el estímulo tan convenientes por parte de la sociedad. Además, dada la íntima conexión entre las Matemáticas y las demás ciencias positivas, un incremento o decremento en el índice matemático de una nación repercute inmediatamente en un respectivo aumento o disminución en todas las demás ciencias; piénsese, por ejemplo, cuán importante es para que haya vocaciones de científicos y de técnicos una competente enseñanza de las Matemáticas en el bachillerato, lo que requiere a su vez que haya abundantes y excelentes profesores de esta misma disciplina en el nivel universitario. Pero aún hay mucho más: las Matemáticas constituyen lo más radical de toda ciencia, que sea tal en un sentido muy estricto; suministran así mismo lo más profundo, porque entretejen la estructura lógica que forma la médula de toda ciencia; y, finalmente, las Matemáticas son también lo más difícil de toda ciencia porque sólo avanzan mediante la

---

(1) Véase el magnífico discurso pronunciado por Rey Pastor con motivo del centenario de Menéndez Pelayo, 14 de enero de 1956, titulado *Menéndez Pelayo y la Ciencia española,* y publicado por la Universidad de Madrid. Véase también en relación con el tema la conferencia: *Ciencia abstracta y Filosofía natural,* pronunciada por Rey Pastor en Madrid, 1928.

intuición y creación de nuevos conceptos, estructuras y razonamientos que han de cristalizar en rigurosas demostraciones deductivas.

IV. Mi predecesor fue en verdad un hombre extraordinario por muchos títulos: como profesor, como investigador, orador, escritor, cartólogo, historiador, dotado de gran sentido crítico, aguda inteligencia y voluntad a toda prueba. Las siguientes coplas de Jorge Manrique, que le han sido aplicadas por los autores antes citados, le describen en varios de sus rasgos fundamentales:

¡Qué amigo de sus amigos!
¡Qué señor para criados
y parientes!

¡Qué enemigo de enemigos!
¡Qué maestro de esforzados
y valientes!

¡Qué seso para discretos!
¡Qué gracia para donosos!
¡Qué razón!

¡Qué benigno a los sujetos!
¡A los bravos y dañosos
qué león!

Para comprender debidamente la obra de Rey Pastor hay que poner de relieve lo que fue el objetivo último de su actividad. Lo expresó con resolución y claridad en este mismo lugar y con igual ocasión; he aquí sus palabras: *Puse toda mi alma en la empresa de la renovación matemática de España.* Esta fue su empresa, y la renovación matemática de España la obra de toda su vida. El primer precio que pagó por ella fue el «dolor insufrible para quien lleva en la sangre el orgullo legendario de la raza» de «sentir en el propio rostro los latigazos del desprecio».

Encuadrados en esta empresa cobran pleno sentido sus lecciones, sus libros, sus investigaciones, sus creaciones y fundaciones.

En este noble y grandioso propósito siguió el ejemplo que había recibido de su maestro don Zoel García de Galdeano y de su predecesor en este mismo sillón don Eduardo Torroja Caballé. El, con su gigantesca personalidad y su prodigiosa actividad, ha contribuido más que ningún otro a elevar el nivel matemático de todo el mundo iberoamericano. La total y apasionada dedicación a esta empresa durante muchos años, a pesar de las contradicciones, sinsabores y dificultades innumerables, es la lección suprema, la lección de toda una vida, lección admirable que nos ha legado Rey Pastor. Lección muy oportuna, pues de ella está muy necesitada España.

La ejemplaridad y oportunidad de la obra de Rey Pastor no pueden encarecerse debidamente. Por desgracia su lección dista mucho de haber sido suficientemente asimilada por la mentalidad política, cultural o económica española. Perduran las mismas poderosas corrientes contra las que se estrelló Rey Pastor. No se acaba de darse al valor de las Matemáticas, pues no se aprecia debidamente su repercusión en todo el ámbito de la Ciencia y de la Técnica. A lo más se especula sobre nuestra situación en Matemáticas, y si ya no como Unamuno, tampoco con ánimo de poner manos a la obra. Un ejemplo entre muchos: La enseñanza de la matemática en España ni es dada ni ha sido organizada por matemáticos, sino por otros grupos más poderosos. ¡Qué distinto sería si la pasión que sentía Rey Pastor hubiera prendido en muchos! En estos últimos cincuenta años el nivel matemático de España ha subido mucho; así es y en buena parte debido a hombres como Echegaray, Galdeano, Torroja, Rey Pastor; pero a pesar de todo continuamos siguiendo a remolque. Es decir que si progreso se ha dado en España, mayor se da en los otros países, de modo que, si se ordenan las naciones según su cultura matemática, España sigue pasando lenta, pero continuamente, a lugares más atrasados.

En este marco la obra de Julio Rey Pastor cobra todavía mayor relieve.

Obra que puede sintetizarse así: Luchó más de cincuenta años con preclara inteligencia, asombrosa elocuencia e incansable tesón por elevar el nivel de las Matemáticas, de donde se derivaría una patria más cómoda, más culta y más digna. Lo que le impulsó constantemente en esta empresa fue una pasión por la Ciencia, en especial por la Ciencia por excelencia, y lo que en definitiva le movió fue un noble y grande amor a España, Argentina e Iberoamérica.

RELACIONES ENTRE LAS ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES Y LA FISICA

INTRODUCCIÓN

Cuando se habla como matemático se hace especialmente difícil el no abusar de hecho de la benevolencia de los presentes, pues las Matemáticas se prestan poco en el nivel científico actual a amenas y elevadas conferencias de tipo general que sean apropiadas a un público relativamente heterogéneo como el presente. Ello viene agravado por la imposibilidad de utilizar encerado o proyecciones, lo que excluye el empleo de figuras y prácticamente también el de fórmulas, lo que a su vez no deje de ser quizá una sabia limitación.

El tema del discurso es «Relaciones entre las Ecuaciones en derivadas parciales y la Física». La Teoría de Ecuaciones en derivadas parciales ha adquirido una enorme extensión y el ritmo actual de su crecimiento sólo es comparable al ritmo mismo del progreso técnico, con el que guarda una muy estrecha relación. Es además una Teoría, cuyo interés va continuamente en aumento y cuya profundidad corre paralelamente a su interés.

Hoy día está justificado, tratándose de casi cualquier disciplina, apelar a su vasta extensión. Precisamente por ello me permitiréis que precise un poco más mi anterior afirmación. Para tomar un criterio objetivo he recurrido a la revista de reseñas *Mathematical Reviews*, que publica sistemáticamente resúmenes de todo lo que se publica con valor científico en el ámbito de la Matemática y de la Física Matemática. Pues bien, en el índice de las reseñas de artículos científicos, incluidas en el volumen 23, año 1961, se han dividido estas contribuciones científicas en 58 secciones. Ocupan los tres primeros puestos, por el número de contribuciones científicas reseñadas, Mecánica de los Fluidos, Mecánica cuántica y Elasticidad. Si pasamos a las estrictamente matemáticas, ocupan los primeros lugares, por orden, Análisis funcional, Geometría diferencial, Estadística, Ecuaciones diferenciales ordinarias, Ecuaciones en derivadas parciales, Funciones de variable compleja y Métodos numéricos.

Sólo de la sección Ecuaciones en derivadas parciales y en el volumen 22 correspondiente al año 1961 figuran reseñados 420 artículos; entre los cuales no se cuentan los que figuran en las secciones de Ecuaciones diferenciales ordinarias, Teoría del potencial, Ecuaciones en diferencias y funcionales, Ecuaciones integrales e íntegrodiferenciales y Cálculo de variaciones, pues todas estas materias constituyen otras tantas secciones separadas. Si a estos 420 artículos se juntasen los incluidos en las secciones de Métodos numéricos, de Mecánica de los fluidos y de Elasticidad que directa y sustancialmente sean estudios matemáticos de Ecuaciones en derivadas parciales, resultaría que esta materia sería de las más extensas, si no la que más, de aquéllas en las que actualmente suele dividirse toda la matemática.

Esta disciplina goza además de un interés perenne desde su nacimiento hace poco menos de tres siglos. Newton es el primero que plantea y resuelve Ecuaciones diferenciales, y desde entonces el interés por las mismas ha ido siempre en aumento, porque ha sido la Naturaleza misma, a través de físicos y técnicos, la que ha suministrado de continuo problemas llenos de sentido y contenido, cuya resolución matemática ha constituido a su vez la más auténtica interpretación científica de esta misma Naturaleza. No son raras las brillantes teorías matemáticas que llamaron poderosamente la atención durante un corto período, pero cuya huella casi ha desaparecido. Por lo contrario, la Teoría de Ecuaciones diferenciales, lejos de perder su interés, cada día lo incrementa por razón de su íntima conexión con el mundo físico, del que surgen los problemas que se plantea y del cual da la más científica de las interpretaciones.

Esa perennidad en el estudio de las Ecuaciones diferenciales trae consigo otra consecuencia: la de su no-trivialidad, o si se quiere positivamente, la de su profundidad científica como, por ejemplo, de un modo eminente sucede con la Teoría de números. Incluso dentro de la Matemática, pero sobre todo fuera de las Ciencias representadas en esta Corporación, nacen hoy día de continuo nuevas disciplinas, para las cuales 420 artículos anuales han de parecer un número harto pequeño; pero esa fecundidad literaria que provocan algunas ciencias de nuevo cuño, apenas merece el calificativo de científica, por encontrarse casi al nivel de la trivialidad. No es que se quiera parvificar el interés humano, cultural o económico, a veces extraordinario, que ofrecen tales estudios; pero es probablemente verdad que cualquiera de las 30 subsecciones en que *Mathematical Reviews* divide la sección de Ecuaciones en derivadas parciales supera en contenido estrictamente científico, es decir formalizado, a cualquiera de estas recientes disciplinas.

Finalmente estimo que no puede objetarse en contra de la afirmación acerca de la extensión, perenne interés y profundidad de la Teoría de Ecuaciones en derivadas parciales el hecho de que apenas exista en nuestra patria una docencia ordinaria de esta disciplina. Ello es más bien debido, me parece, a la inmensa extensión que han adquirido también otras ramas de la Matemática; a que conservamos todavía una tradición más geométrica que analista; a que es difícil cambiar las inertes o rígidas estructuras de nuestra Universidad, y a la fuerza de los intereses que espontáneamente se desarrollan en estas circunstancias.

Me he propuesto en este discurso, contando con vuestra bien conocida benevolencia, y atento al mismo tiempo a no abusar de esta vuestra eminente virtud, desarrollar algunos aspectos de tan vasta disciplina. Ciertamente es imposible en el tiempo de que dispongo, aparte de que también me faltaría competencia, poder dar sistemáticamente una idea siquiera de los problemas con denso contenido matemático que son tratados en una Teoría de Ecuaciones en derivadas parciales. Tampoco me parece viable dar una información sistemática de todas las obras o contribuciones más importantes que hayan aparecido, digamos en estos últimos diez años. Precisamente porque es tan extensa no podré dar más que una visión parcial y esquemática de la misma, y para evitar caer en una superficialidad sin contenido me detendré con algún mayor detalle en algunas cuestiones especiales que me parecen particularmente importantes y representativas de problemas muy generales. Pondré empeño en poner de manifiesto la relación de las cuestiones que trate con su valor físico, es decir con el valor que puedan tener como contribución a la interpretación de ese mundo que en su ser contingente existe independiente de la mente humana y la trasciende. Quizás de este modo cobren estas páginas algún mayor interés.

He aquí los puntos cuyo desarrollo me ha parecido más oportuno y a los que me limitaré. En una primera Sección, § 1, me ocuparé de los Espacios funcionales, como elementos esenciales para una correcta formulación de los problemas que plantea una Ecuación diferencial. Me limitaré a los espacios más básicos, que son también los más simples y aquéllos cuyo sentido físico es más interesante. En una segunda Sección, § 2, trataré exclusivamente de los tipos más importantes de operadores diferenciales y, en particular, de los de tipo hiperbólico, de cuyas ecuaciones daré una visión general. En una última Sección, § 3, me ocuparé de las Ecuaciones de la Elasticidad, que ofrecen un excelente modelo de los sistemas fuertemente elípticos.

§ 1. *Espacios funcionales.*

1. Para poder precisar correctamente en términos matemáticos un problema cualquiera relativo a una ecuación diferencial es imprescindible fijar previamente cuál es el conjunto o universo lógico en el que deba entenderse el signo igual que figura en dicha ecuación, así como el signo igual que figura en las condiciones auxiliares, sean iniciales o sean de contorno, impuestas a la solución. Dicho más explícitamente, hace falta fijar los conjuntos a los que exclusivamente queremos limitar la consideración de los datos y de las soluciones. Estos conjuntos deben estar dotados de una topología para que pueda definirse en ellos una noción de convergencia y tenga sentido hablar de aplicaciones continuas en relación con ellos. Unicamente así se podrá llegar a problemas bien planteados matemáticamente y cargados de sentido físico. Se les suele llamar espacios, y más concretamente espacios de funciones permisibles, aunque desde hace unos quince años se emplean con frecuencia espacios permisibles de distribuciones o funciones ideales, que sólo por abuso de lenguaje se llaman espacios funcionales.

Si la ecuación o sistema diefrencial es en n variables independiente, los espacios funcionales que interesará considerar serán en general espacios de funciones definidas en un dominio Ω del espacio euclídeo de n dimensiones reales, $\Omega \subset E_n$. Interesa, naturalmente, que estos espacios sean lo más manejables posible, es decir, que sean estables o cerrados respecto de algunas operaciones básicas, las cuales deben ser además operaciones continuas. Por ello, se adoptan exclusivamente espacios vectoriales topológicos; y aun dentro de éstos, se eligen únicamente los localmente convexos. pues solamente en éstos puede siempre definirse su topología mediante un conjunto de seminormas, lo que lleva consigo apreciables ventajas.

En los problemas lineales, que constituyen la casi totalidad de los que hoy tienen aplicación en la Física o en la Técnica, es esencial que tanto el espacio de definición o de origen como el espacio de valores o del rango sean espacios vectoriales. No obstante es manifiesto que ello no responde a la situación física: por ejemplo para estudiar el operador de la elasticidad —las ecuaciones de Navier— se supone que los diversos estados de los desplazamientos o corrimientos matemáticos permisibles forman un espacio vectorial, cuando en realidad los estados físicamente permisibles forman únicamente un germen o pequeño entorno del estado llamado natural. Todavía es más digno de notarse que los estados físicamente permisibles, por ejemplo, del mismo vector desplazamiento o del tensor elástico en Elasticidad lineal, en realidad forman un espacio afín y no un espacio vectorial. Es decir, que en tanto tiene sentido hablar de un cuerpo deformado o pretensado en cuanto más o menos arbitrariamente se ha fijado previamente un estado al que se ha llamado natural; sería razonable llamar estado natural al estado de un sólido elástico cuando está en almacén, aunque hubiera salido de fábrica con el nombre de «pretensado». Desde el punto de vista de las relaciones entre la Matemática y la Física lo único que cambia es el subconjunto o germen de estados permisibles en los que cobren simultáneamente sentido los conceptos matemáticos y los físicos. Desde el punto de vista matemático, por comodidad, se habla siempre de espacios permisibles que sean espacios vectoriales y no afines; ello está justificado por la elección más o menos arbitraria, pero siempre cómoda, de un estado natural o neutro al que se le asigna el vector o tensor cero.

2. Es natural que los primeros espacios funcionales considerados hayan sido los de funciones continuas y en general los $C^m(\Omega)$, es decir, los espacios de funciones definidas en Ω y con m derivadas continuas en dicho abierto. Es natural que como espacio de definición de un operador diferencial se tome $C^m(\Omega)$ con m igual al

orden del operador y como espacio de valores del mismo operador se tome el espacio de funciones continuas $C(\Omega)$ en el mismo abierto, dado el carácter local de todo operador diferencial de orden finito; con ello se asegura de una manera sencilla la existencia y continuidad del operador. Desde luego la continuidad es una propiedad importante y un antiguo axioma dice *Natura non facit saltus*. Con ello se pretende garantizar una concordancia entre el tratamiento matemático y la realidad física. Para introducir una topología es corriente introduir $\overline{\Omega}$ compacto, sea tomando la adherencia de Ω acotado, sea tomando un compacto contenido en Ω, y normar $C^m(\overline{\Omega})$ mediante la norma del máximo o de la convergencia uniforme.

$$f \in C^m(\overline{\Omega}), \ \|f\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leqq m} \left(\max_{x \in \overline{\Omega}} \left| D^\alpha f(x) \right| \right),$$

siendo $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y donde α es una n-upla de números naturales: $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n. \ D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Con ello se obtiene un espacio normado completo, o sea, un espacio de Banach. Otra norma con que puede normarse $C^m(\Omega)$ es la norma integral:

$$\|f\|_p = \left(\int |f(s)|^p \, ds \right)^{1/p}, \ 1 \leqslant p \leqq \infty,$$

y también puede considerarse la topología débil o de la convergencia puntual, pero en ninguno de estos dos casos $C^m(\Omega)$ es completo.

Fue precisamente poco tiempo después de la aparición de la integral de Lebesgue cuando la compleción de los espacios $C^m(\Omega)$ normados con la norma integral introdujo en el análisis, y muy en particular en la disciplina que nos ocupa, los espacios de Lebesgue $L_p(\Omega)$, isométricos en virtud de un célebre teorema a los l_p de sucesiones de potencia p-ésima sumable. Así como de los espacios de funciones continuas $C(\Omega)$ se pasa, naturalmente, a los $C^m(\Omega)$ de funciones con m derivadas continuas, de manera análoga, de los espacios de funciones de potencia p-ésima sumable $L_p(\Omega)$ se pasa a los espacios $L_p^{(m)}(\Omega)$ de funciones cuyas derivadas de orden igual o inferior a m son todas de potencia p sumable. Entonces $f \in L_p^{(m)}(\Omega)$ si existe y es finita la norma

$$\|f\|_{p,m} = \Big(\sum_{|\alpha| \leqq m} \| D^\alpha f \|_p^2 \Big)^{1/2}.$$

En esta definición de los espacios $L_p^{(m)}(\Omega)$ ha de entenderse la derivada en un sentido generalizado, que es el que resulta de considerar las funciones como distribuciones y de modo que las derivadas así obtenidas sean identificables con funciones de potencia p-ésima sumable. Más interesantes y útiles que los espacios $C^m(\Omega)$ y $L_p^{(m)}(\Omega)$ suelen ser ciertos subespacios de los mismos, elegidos de tal manera que la pertenencia a ellos implica ya que la función elemento cumpla ciertas condiciones de contorno requeridas en la solución de la ecuación diferencial. Supongamos, por ejemplo, que descomponemos la frontera de Ω, $\dot{\Omega}$, en dos conjuntos D y N disjuntos, $D \cap N = \emptyset$, y cuya unión sea Ω, $D \cup N = \Omega$. Se obtienen, en particular, los importantes espacios de Hilbert,

$$L_{2,D}^{(m)}(\Omega) \equiv H_D^{(m)}(\Omega)$$

Este espacio $H_D^{(m)}(\Omega)$ es un subespacio topológico de $H^{(m)}(\Omega) = L_2^{(m)}(\Omega)$ y se define como la adherencia en $H^{(m)}(\Omega)$ de las funciones pertenecientes a $H^{(m)}(\Omega)$ y que se anulen en un entorno de $D \subset R^n$. En una primera aproximación puede decirse que si $u \in H_D^{(m)}(\Omega)$, u queda caracterizada por pertenecer a $H^{(m)}(\Omega)$ y además por anularse ella y sus derivadas hasta las de orden $m - 1$ inclusive en los puntos de $\dot{D}$.

Es inútil entrar en más detalles que podrían multiplicarse indefinidamente, pero sí vamos a hacer alguna consideración sobre el valor físico de tales espacios. Observemos únicamente, para terminar, que todos ellos son espacios de Banach y en particular para $p = 2$ se obtienen espacios de Hilbert. Estos espacios, sobre todo con $p = 2$, o sea los de Hilbert, son probablemente los más útiles, pues el aparato de Análisis que permiten emplear es mucho mayor que el que permite cualquiera otra clase de espacios; resulta en particular muy fecunda la aplicación del teorema espectral (Morrey, Garnir recientemente, aparte de otros muchos anteriores).

Las funciones que pertenecen a tales espacios no tienen por qué ser continuas, pues pueden muy bien tener discontinuidades tanto de primera como de segunda especie. ¿Estas funciones, con tales discontinuidades pueden responder a la realidad física? Estimo que la contestación es la misma esencialmente que la que puede darse cuando se trata de funciones continuas. De hecho puede haber soluciones discontinuas que constituyan una buena aproximación de la realidad física; el que sólo sea una aproximación es debido a que toda solución matemática es siempre algo ideal, lo cual sucede también cuando la solución es continua. Mucho más necesarios son tales espacios en los casos de ecuaciones no lineales. Parece entonces imprescindible permitir soluciones discontinuas, cuya existencia puede ir acompañada de un fenómeno de notable trascendencia física, a saber, la pérdida de la unicidad de la solución. Si, por ejemplo, hubiera soluciones discontinuas de las ecuaciones de la mecánica de los fluidos que respondieran matemáticamente al fenómeno físico de la turbulencia y que llevaran consigo la pérdida de una unicidad en otro caso existente, nos encontraríamos ante un caso extraordinario de indeterminación y de azar. He aquí una problemática, presente a nuestro tiempo, que pone de manifiesto la importancia decisiva que una teoría matemática puede tener para la admisión y establecimiento de un hecho físico, o mejor dicho de su interpretación científica; pues la admisión del hecho en sí pertenece a la física empírica y experimental.

3. En la definición de los espacios funcionales interviene también el conjunto o subconjunto en que están definidas las funciones elementos. Como hemos indicado, este subconjuntno o subespacio suele ser un dominio Ω (o su adherencia $\overline{\Omega}$ si es compacta, o un compacto contenido en él) del espacio euclídeo de n dimensiones. Aunque un dominio —subconjunto abierto y conexo— es ya por sí harto regular, todavía los hay que pueden ser demasiado irregulares, incluso cuando el número de dimensiones no sea más que dos. Vamos a analizar a continuación dos casos bien sencillos y que no obstante originan a veces dificultades.

Como ejemplo del primer caso sea Ω formado por los puntos interiores a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y quitando todos los puntos del semieje de las abscisas negativas Para excluir tales abiertos suele requerirse que la frontera de Ω sea simple, es decir, que no presente ningún punto como el $(-1{,}0)$ del ejemplo mencionado; o que sea continua, es decir, de clase cero; o que tenga tangente continua, es decir, de clase uno; etc.

Como ejemplo del segundo caso sea un dominio Ω, cuya frontera tenga un punto cuspidal con la cúspide apuntando hacia el exterior de Ω. Entonces, prefijado un triangulito todo lo pequeño que se quiera, hay puntos de Ω cercanos al punto cuspidal que no pueden ser vértices de un triangulito igual al prefijado y que esté todo contenido en Ω, lo cual origina a veces dificultades. Para evitarlas se requiere que Ω goce de la propiedad del triangulito o del cono, si se trata de más de dos dimensiones.

Es fácil construir dominios bastante más irregulares, como, por ejemplo, los que pueden obtenerse mediante los puntos interiores a un cuadrado de lado dos y quitando infinitos segmentos de longitud unidad, sin que el conjunto resultante deje de ser un dominio. O bien, cualquiera de los dominios comprendidos entre dos espirales logarítmicas concéntricas; y este último caso es tanto más notable cuanto que se trata de dominios de clase cero, es decir de frontera continua.

En relación con la lisura de los dominios son interesantes los subconjuntos abiertos de E. Gagliardo (1958); mediante ellos puede recubrirse un dominio que tenga la propiedad del cono, pero que no sea de frontera simple, de modo que los abiertos del recubrimiento tengan uniformemente la propiedad del cono y sean todos de frontera simple. Esta técnica aplicada simultáneamente con una partición de la unidad puede permitir soslayar las dificultades originadas por la aspereza de las fronteras de algunos dominios.

4. Volvamos a los espacios funcionales, y antes de mencionar otros más recientes señalemos una importante relación, llamada desigualdad de S. L. Sobolev (1938, 1950), que relaciona los espacios de $L_2^{(m)}(\Omega)$, de que hemos hablado, con los espacios de funciones con q derivadas continuas $C^q(\Omega)$. Supongamos que Ω sea acotado y que goce de la propiedad del cono. Sea $f(x)$ una función escalar o vectorial del vector n-dimensional $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que pertenezca a $L_2^{(m)}(\Omega)$, siendo $m - \left|\frac{n}{2}\right| - 1 = q \geqq 0$. Sea $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = q$.

Entonces el lema de Sobolev asevera que $f(x)$ —o mejor dicho, un representante de la clase $f(x)$— es continua, así como sus q primeras derivadas en $\overline{\Omega}$, y más concretamente que

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} \left| \frac{\partial^q f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right|^2 \leqq M \left[\sum_{\beta_1 + \ldots + \beta_n = m} \left\| \frac{\partial^m f(x)}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}} \right\|_{L_2}^2 + \|f\|_{L_2} \right],$$

donde la constante M depende del dominio Ω, pero no de la función f que se elija de las pertenecientes a $L_2^{(n)}(\Omega)$. Esencialmente la desigualdad o lema de Sobolev garantiza que una función que tenga derivadas, en el sentido de la teoría de distribuciones, de orden m de cuadrado sumable en Ω ha de tener también derivadas ordinarias continuas de orden q en la adherencia de Ω. Constituye una relación fundamental entre los espacios $L_2^{(m)}(\Omega)$ y los $C^{(q)}(\overline{\Omega})$. Desde el punto de vista físico, el lema de Sobolev expresa que si se perimten soluciones discontinuas que admitan derivadas discontinuas hasta del orden m, estas soluciones, si $m \geqq \left[\frac{n}{2}\right] + 1$, tendrán que ser continuas y con derivadas continuas hasta el orden q.

Es obvio que la desigualdad de Sobolev tiene un enorme interés como instrumento técnico en el cálculo con espacios $L_2^{(m)}(\Omega)$. Es característico de la moderna teoría de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales la frecuencia e importancia que ha adquirido el empleo de desigualdades, especialmente de las desigualdades *a priori*, es decir, de aquellas que tienen únicamente en cuenta el espacio funcional de funciones admisibles, al que ha de pertenecer la solución de la ecuación diferencial, y prescinden del hecho de que la función que figura como argumento en la desigualdad sea o no de hecho solución de la ecuación. En particular, las desigualdades de tipo energético son útiles para probar la unicidad de la solución. Algunas de ellas tienen también considerable interés por sí mismas, o sea, por la importancia de la acotación que suministran. Mencionemos únicamente la desigualdad de Aronszain para operadores elípticos que cumplan determinadas condiciones, que son siempre satisfechas, por ejemplo, por el operador de la elasticidad. Para este operador y empleando el espacio $H_D^{(1)}(\Omega)$ antes mencionado y suponiendo que la parte N de la frontera de Ω es suficientemente regular, la desigualdad de Aronszain se convierte en

$$\|u\|_{H^{(1)}(\Omega)}^2 \leqq K \left[\sum_{i,j=1}^{3} \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right],$$

para todo $u \in H_D^{(1)}(\Omega)$, y donde K es una constante independiente de u, que es la llamada desigualdad de A. Korn. En esta fórmula $u(x)$ son los desplazamientos y se supone que satisfacen, por consiguiente, las ecuaciones de Navier.

5. Hay una gran variedad de tipos de espacios más o menos análogos a los que hemos mencionado, y que de una manera sistemática pueden verse estudiados en los libros de *Análisi funcional*, como los ya clásicos de Banach, F. Riesz y B. Sz. Nagy, y Zaanen; en el texto más moderno, *Linear Operators* (1958), de N. Dunford y J. Schwartz, se encuentran tabulados, junto con sus propiedades más importantes, treinta tipos de espacios; casi todos ellos son espacios de Banach y son los de más frecuente uso actualmente en el análisis y varios de ellos de uso continuo en el estudio de ecuaciones en derivadas parciales.

En los últimos diez años los espacios funcionales empleados en la resolución de ecuaciones diferenciales, en particular de las de tipo hiperbólico, se han multiplicado extraordinariamente y se han hecho también mucho más complicados. Como ejemplo mencionamos los introducidos por L. Gårding para demostrar la existencia y unicidad de la solución del problema de Cauchy para una ecuación lineal de tipo hiperbólico de cualquier orden y de coeficientes variables sujetos sólo a condiciones muy generales. Siguiendo a A. Calderón los llamaremos $\mathcal{L}_p$ y definiremos como espacios de funciones complejas $f(x, t)$, definidas para $x \in E_n$, $t \in R$, tales que exista y sea finita la forma

$$\left\| f \right\|_{\mathcal{L}_p} = \left\| \| f(x, t) \|_{L_2(E_n)} \right\|_{L_p(R)},$$

donde la norma interior se ha de entender respecto de $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, de modo que resulte función medible de t, a la que se aplica la norma de $L_p(R)$. Y análogamente pueden definirse los $\mathcal{L}_p^{(m}$ con la norma

$$\left\| f \right\|_{\mathcal{L}_p^{(m)}} = \sum_{|\alpha| \leq m} \left\| D^\alpha f \right\|_{\mathcal{L}_p}$$

6. Pasemos a la segunda de las grandes clases de espacios funcionales. Su introducción y divulgación en la teoría de ecuaciones diferenciales es en gran parte obra de L. Schwartz, mediante sus

dos volúmenes titulados *Théorie des distributions* (1950-51, primera edición; 1957-59, la segunda).

El primer objetivo fue generalizar la noción de derivada. Algo así como las soluciones débiles de las ecuaciones diferenciales eran generalizaciones de las soluciones fuertes, las cuales admitían tantas derivadas usuales como el orden de la ecuación. Para ello hay que introducir espacios de funciones de prueba (testing functions). Para la introducción de las distribuciones este espacio ha sido el $\mathfrak{D}(E_n)$ de funciones indefinidamente diferenciales en E_n y de soporte compacto. Este espacio es suficientemente rico en elementos, por ejemplo es denso en todos los espacios $L_p^{(m)}(E_n)$, $m \in N$, $1 \leqslant p < \infty$. Al mismo tiempo es un espacio cuyos elementos son funciones muy particulares que gozan de notables propiedades, y provisto de una topología muy fina da lugar a un dual $\mathfrak{D}'$ que es el espacio de distribuciones.

También son útiles los espacios $\mathfrak{D}^{(m)}(E_n)$, siendo m un número natural, de funciones de soporte compacto y con derivadas hasta las de orden m inclusive continuas en E_n; su intersección es precisamente $\mathfrak{D}(E_n)$. Asimismo los espacios $\mathfrak{D}(K)$, siendo K cualquier compacto de E_n de funciones indefinidamente diferenciables y de soporte contenido en K; estos espacios son subespacios de $\mathfrak{D}(E_n)$, y la topología inducida en ellos por este último espacio los convierte en espacios de Fréchet; en estos espacios $\mathfrak{D}(K)$ se tiene por definición que $f_k(x) \to g(x)$ sólo y cuando $f_k(x)$ y todas sus derivadas convergen uniformemente hacia $g(x)$ y sus derivadas respectivas. De aquí se deduce que una distribución es por definición un funcional definido en $\mathfrak{D}(E_n)$, cuya restricción al subespacio $\mathfrak{D}(K)$ es un funcional continuo, cualquiera que sea el compacto K contenido en E_n.

Todas las funciones localmente sumables pueden identificarse con una distribución. Pero además, todas estas funciones, consideradas como distribuciones, son indefinidamente derivables y además la derivación en $\mathfrak{D}'$ no sólo es siempre posible, sino que es una aplicación continua de $\mathfrak{D}'$ en sí mismo. Resulta también que el espacio $\mathfrak{D}(E_n)$ de las funciones de prueba, consideradas como distribuciones, es denso en el espacio de distribuciones $\mathfrak{D}'(E_n)$.

Las consecuencias de estos teoremas, a la par tan simples y tan universales, son notables. Por ejemplo: considerando para mayor sencillez funciones de una sola variable independiente, es elemental construir una sucesión de funciones indefinidamente diferenciables $H_\varepsilon(x)$,

$$H_\varepsilon(x) = \begin{cases} = 0, \text{ para } x \leqq -\varepsilon \\ = \dfrac{1}{2}\left(1 + \operatorname{Th} \dfrac{x}{\varepsilon^2 - x^2}\right), \text{ para } -\varepsilon \leqq x \leqq \varepsilon \\ = 1, \text{ para } x \geqq \varepsilon, \end{cases}$$

que en el espacio de distribuciones tienden, cuando $\varepsilon \to 0$, hacia la función de Heaviside $H(x)$ o función escalón, es decir, la función $H(x) = 0$ para $x < 0$, $H(x) = 1$ para $x > 0$.

Resulta, por consiguiente, sin más, que en el espacio de distribuciones se tiene con pleno sentido

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{d\, H_\varepsilon(x)}{d\, x} = \delta(x),$$

donde $\delta(x)$ es la delta de Dirac, que no es una función, pero que si la quisiéramos imaginar como tal diríamos que es cero en todos sus puntos, excepto para $x = 0$, donde $\delta(o) = \infty$, de modo que $\int_{-a}^{a} \delta(x)\, d\, x = 1$, para todo $a > 0$. Análogamente,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{d^2\, H_\varepsilon(x)}{d\, x^2} = \sigma(x)$$

donde $\sigma(x)$ es el doblete, o par unidad, o dipolo; etc.

Quizás podría temerse que las funciones indefinidamente diferenciables que constituyen el fundamento mismo de la teoría de distribuciones fueran demasiado artificiosas y difíciles de manejar. Para hacer frente a este tipo de dificultades, K. O. Friedrichs introdujo la técnica de los *mollifiers*, alisadores o suavizadores, $\mu_\varepsilon(x)$, funciones pertenecientes a $\mathfrak{D}(E_n)$, cuyo soporte es la esfera sólida de centro x y radio ε, y que aplicados como factores de un producto de convolución a una función continua $f(x)$ la transforman en $\mu_\varepsilon(x) * f(x)$, que es *indefinidamente diferenciable*, casi con el mismo soporte que $f(x)$ y tal que con frecuencia puede demostrarse que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\mu_\varepsilon(x) * f(x)\right) = f(x),$$

según, naturalmente, el espacio topológico de que se trate.

Con sólo lo dicho acerca del espacio de distribuciones ya se desprende que es un espacio muy adecuado por muchos conceptos para ser tomado como espacio de funciones permisibles para soluciones de una ecuación diferencial.

Juntamente con el espacio de distribuciones $\mathfrak{D}'(E_n)$ merecen mencionarse algunos de sus subespacios por su especial importancia. En primer lugar, resulta especialmente útil desde el punto de vista de ecuaciones diferenciales el espacio $S'(E_n)$ de distribuciones de crecimiento lento, subespacio topológico de $\mathfrak{D}'(E_n)$ y dual del espacio $S(E_n)$ de funciones indefinidamente diferenciables de decrecimiento rápido en el infinito; es decir, $\psi(x) \in S(E_n)$ si tanto $\psi(x)$ como todas sus derivadas, para $|x| \to \infty$, tienden hacia cero más rápidamente que $|x|^{-q}$ para todo $q \in N$; o sea, si

$$\lim_{|x| \to \infty} x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n} \frac{\partial^{|\alpha|} \psi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = 0,$$

cualesquiera que sean los números naturales $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$.

La sucesión $\psi_n(x) \to 0$ en $S(E_n)$, por definición, si $x^\beta \cdot D^\alpha \psi(x)$ tiende uniformemente hacia cero en E_n, como acabamos de indicar, es decir, para todo $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ y todo $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$. El espacio $S(E_n)$ así definido es un espacio de Fréchet y de Montel.

La importancia de $S(E_n)$ está en que su dual $S'(E_n)$ es, por así decirlo, el espacio natural de la transformación de Fourier F. Se tiene, en efecto, que la transformación de Fourier F y su conjugada F definen dos isomorfismos recíprocos entre $S'_x(E_n)$ y $S'_\xi(E_n)$. Como muestra de los resultados obtenidos por la consideración de estos espacios, mencionemos una generalización de la fórmula de Paley-Wiener, que a su vez da lugar a interesantes resultados relativos a la regularidad de las soluciones de sistemas diferenciales de tipo elíptico.

En el texto mencionado de L. Schwartz sobre distribuciones se estudian unos cuarenta tipos distintos de espacios topológicos en relación fundamental con $\mathfrak{D}(E_n)$ y con $\mathfrak{D}'(E_n)$, todos ellos interesantes para diversos problemas planteados por ecuaciones diferenciales. Pero dejemos ya de considerar más espacios funcionales.

Nos queda todavía una última cuestión en relación con todos estos espacios y subespacios de distribuciones.

¿Cuál es el valor físico del espacio de distribuciones? De otro modo, ¿las distribuciones cuando se obtienen como resultado de la integración de una ecuación diferencial son aptas para interpretar el mundo físico? El espacio de distribuciones es muy vasto, tanto que incluye como subconjuntos todos los espacios previamente mencionados. Por tanto, la cuestión se centra en aquellas distribuciones que no pueden ser identificadas con funciones. Tales distribuciones, medidas singulares o distribuciones de orden igual o mayor que uno son en verdad entidades singulares consideradas desde el punto de vista físico. Un ejemplo típico es la $\delta(x)$ de Dirac, que es una medida singular, y como distribución se obtiene derivando la función de Heaviside $H(x)$, como ya hemos indicado. La derivada de la delta de Dirac, $\delta'(x)$, o doblete o dipolo, es la distribución más simple no identificable con una medida Una realización mecánica de $\delta'(x)$ puede ser un momento unidad aplicado en un punto de un sólido elástico.

Parece que respecto del valor físico de las distribuciones hay que decir lo mismo que lo que anteriormente hemos expresado acerca del valor físico de las funciones discontinuas. Una fuerza unidad concentrada en un punto de la superficie de un sólido ofrece una realización idealmente perfecta de la delta de Dirac. Como entidad matemática, $\delta(x)$ es tan razonable como $\sqrt{2}$. Como entidad física, $\delta(x)$ corresponde, por ejemplo, a una carga unidad concentrada, lo cual, tomado formalmente como suena, es algo manifiestamente absurdo desde un punto de vista físico, pero muy cómodo como buena aproximación; algo así, me parece, como $\sqrt{2}$ es igualmente absurdo desde un punto de vista físico, si suponemos que estamos en un mundo discreto, pero resulta muy cómodo y práctico al hablar sobre la diagonal del cuadrado unidad.

La introducción del espacio de distribuciones, o de los subespacios $L_2^{(-m)}(\Omega)$, permitirá aplicar con comodidad y con rigor una serie de técnicas matemáticas a situaciones físicas, que idealizadas corresponden, en efecto, a distribuciones que con frecuencia serán abruptas no sólo en puntos aislados, sino en soportes lineales y aun superficiales. Por ejemplo, multipolos, capas múltiples, soldaduras, líneas de propagación de discontinuidades, capas límites de zonas de turbulencia, etc.

Por consiguiente, aun sin salirnos de la Ingeniería y de la Física, es fácil conjeturar que así como desde los pitagóricos los irracionales han ido encontrando plena aceptación para la interpretación de la Naturaleza, algo análogo pasará con las distribuciones, que espontáneamente irán ocupando cada día mayor espacio en los libros de texto de nuestras Facultades de Ciencias y Escuelas Técnicas Superiores. Decididamente estamos ya lejos del *natura non facit saltus* de los antiguos. Ahora resulta que nuestra técnica tiene que abordar con frecuencia situaciones de discontinuidad, y lo que es aún más insólito, las introducimos a menudo incluso donde no las hay, porque el tratamiento matemático resulta así más cómodo y desde luego suficientemente aproximado. Todo ello, hemos dicho, sin salirnos la Física; pues no causaría asombro que en el futuro las distribuciones encontrasen aplicación en ciencias más difíciles de formalizar, tanto más cuanto que todas las disciplinas, incluyendo Biología y Sicología, tienden a matematizarse. El que os dirige la palabra abriga además la secreta presunción, que apenas se atreve a formular, de que llegará un día en que este mundo de entidades ideales, tan extrañas, encontrarán su aplicación casi exacta a realidades de la vida espiritual humana, sin duda mucho más compleja y discontinua. Porque ¿qué interpretación formalizada puede darse de una iluminación mental, de un susto, de la muerte o de una conversión?

2. *Tipos de Operadores diferenciales y de condiciones accesorias.*

1. La variedad y complejidad de operadores en derivadas parciales es actualmente mayor que nunca y sigue en aumento con ritmo creciente, en parte por el natural desarrollo de la ciencia pura propio de nuestra época, y en mayor parte por la incensante presión de la Técnica que plantea continuamente nuevos problemas y urge su resolución. De donde resulta que los clásicos tipos de operadores diferenciales, hiperbólicos, parabólicos y elípticos, se subdividen según diversos matices, y a medida que se van complicando los problemas se van alargando y afinando las definiciones de los distintos tipos y subtipos; aparecen además nuevos tipos de operadores, por ejemplo los hipoelípticos y los de tipo principal, como consecuencia del descubrimiento de nuevas e importantes propiedades de algunas ecuaciones.

Falta una clasificación completa y adecuada de los operadores en derivadas parciales, aunque todos los operadores más o menos estudiados están encuadrados en algún tipo o subtipo general. En principio puede decirse que los operadores matriciales, que dan lugar a sistemas de ecuaciones en derivadas parciales, se estudian y clasifican dentro de tipos de operadores escalares, y gozan ordinariamente de propiedades análogas a las de estos prototipos escalares. Mas difícil es el estudio de los operadores no lineales, que suele intentarse mediante el empleo de operadores casi lineales, cuyo estudio se procura reducir a su vez al de los operadores lineales, que tanto por esta razón de medio, como por el interés que tienen en sí mismos siguen siendo con mucho los más importantes.

Todavía se hace una última reducción, tanto para su definición como sobre todo para su estudio, de los operadores escalares lineales en derivadas parciales con coeficientes variables a los de coeficientes constantes. Ahora bien, las ecuaciones con coeficientes constantes de cualquier orden ofrecen dos notables ventajas, entre otras muchas, para su estudio: la primera es que todas admiten soluciones fundamentales. Es decir, para todo operador escalar o matricial $K\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ con coeficientes constantes operando en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, $\frac{\partial}{\partial x}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$, existe siempre una solución escalar o matricial, respectivamente, $E(x, y)$, $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $y=(y_1, \ldots, y_n)$ tal que

$$K\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)[E(x,y)]=\delta(x-y) . I,$$

siendo $\delta(x-y)$ la medida de Dirac con soporte en el punto $y \in \mathbb{R}^n$, y siendo I la matriz unidad que se reduce a 1 cuando K sea escalar.

La segunda comodidad que ofrecen las ecuaciones con coeficientes constantes de cualquier orden es que en ellas puede resolverse siempre el problema de Cauchy mediante cuadraturas, lo que permite obtener explícitamente la solución (J. Hadamard (1917), G. Herglotz, I. G. Petrovski en el campo real, y L. Fantappiè en el complejo (1940-1950)). Naturalmente, esta resolución se refiere al caso de un operador de tipo hiperbólico, pues sólo en este caso el problema de Cauchy es un problema bien planteado, es decir, que para unos datos variando en un determinado espacio topológico de datos exista siempre una solución única en un determinado espacio topológico de soluciones y que esta solución dependa continuamente de los datos. De una manera precisa y tomando como espacios topológicos básicos los $\mathcal{E}_{(x)}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{E}_{(x,t)}(\mathbb{R}^{n+1})$ de funciones indefinidamente diferenciables en todo el espacio euclídeo de n y $n+1$ dimensiones respectivamente, dotados de la topología de la convergencia uniforme en todo compacto para las funciones y para cada una de sus derivadas, he aquí el enunciado de un importante resultado en esta línea.

Sea el sistema S lineal kovalevskiano con coeficientes constantes:

$$(S): \qquad (L[u])_i \equiv \frac{\partial^{m_i} u_i}{\partial t^{m_i}} - \sum_{j=1}^{q} \sum_{\substack{\pi_0 + |\pi| \leqq m_j \\ \pi_0 < m_j}} a^{ij}_{\pi_0 \pi} \frac{\partial^{\pi_0 + |\pi|} u_j}{\partial t^{\pi_0} \partial x^{\pi}} = 0,$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_u) \quad \pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n), \quad u = (u_1, u_2, \ldots, u_q), \quad i = 1, 2, 3, \ldots, q$$

y sean los correspondientes datos de Cauchy (C) o estados iniciales del vector incógnita $u(t, x)$

$$(C): \qquad \frac{\partial^k u_i(o, x)}{\partial t^k} = h_{ik}(x), \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, q. \\ k = 1, 2, \ldots, m_i - 1. \end{array}$$

Supongamos que cada una de $h_{ik}(x)$ varía en el espacio $\mathcal{E}_{(x)}(\mathbb{R}^n($ y que para cada una de las componentes de la solución $u(t, x)$ el espacio de estados o funciones permisibles sea el $\mathcal{E}_{(x,t)}(\mathbb{R}^{n+1})$.

Entonces, una condición necesaria y suficiente para que el problema de Cauchy del sistema (S) y condiciones (C) sea un problema bien planteado, es que el sistema (S) sea hiperbólico.

También se conoce un resultado parecido al de la integración explícita para las ecuaciones lineales, cuyos coeficientes sean funciones lineales de las variables independientes. En efecto, para estas ecuaciones se puede resolver el problema de Cauchy reduciéndolo a la resolución de un sistema diferencial ordinario, además de cuadraturas.

2. El teorema a que hemos hecho referencia relacionando el buen planteamiento del problema de Cauchy con la hiperbolicidad del sistema es de gran trascendencia desde el punto de vista de las relaciones entre la Matemática y la Física. Con objeto de poder establecer mejor estas relaciones es conveniente volver a la ecuación escalar de segundo orden, en donde tienen su origen, y en la que se ilustran muy bien los importantes tipos clásicos de operadores hiperbólicos, ultrahiperbólicos, parabólicos en sentido amplio y en

sentido estricto, y, finalmente, elípticos. Los operadores prototipos se definen para coeficientes constantes; y en el caso de coeficientes variables se definen y estudian para cada punto, con lo que se reducen al caso anterior; y para la ecuación no lineal se estudian para cada solución procurando reducirlos así a los casos anteriores. Por tanto, para los problemas regulares y también desde el punto de vista de las conexiones entre la Matemática y la Física, el caso de coeficientes constantes tiene un carácter fundamental; y dentro del mismo son los tres tipos clásicos de operador hiperbólico, parabólico (en sentido estricto o de Petrovski) o elíptico los que descuellan entre todos los demás tipos. La particular importancia de estos tres tipos de operadores sigue en aumento a pesar de la mayor variedad actual y radica precisamente en que las ecuaciones que definen, juntamente con las correspondientes condiciones de contorno, logran interpretar propiedades primarias de numerosos fenómenos y procesos físicos. Vamos a continuación a señalar estas propiedades primarias para el operador de ondas o dalambertiano, para el del calor y para el laplaciano, en la inteligencia de que las propiedades que indicamos son precisamente, por lo menos en principio, las peculiares de los operadores de orden superior, esclares o matriciales, lineales o no lineales de los tipos hiperbólicos, parabólicos y elípticos, respectivamente.

Sea en primer lugar una ecuación lineal de tipo hiperbólico con coeficientes variables en forma general, aunque se los supone continuamente diferenciables un suficiente número de veces en un dominio Ω del espacio-tiempo $(n + 1)$-dimensional; y sea en particular la ecuación de ondas, que es el prototipo de estas ecuaciones:

$$\mathrm{L}\left(t, x; \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)[u] \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

La variable t representa el tiempo, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ son las coordenadas espaciales de un punto, y $u = u(t. x)$ es la función incógnita que representa el estado de una cierta magnitud física. Este estado es un estado de movimiento y lo es tan característicamente que, como hemos visto y volveremos a ver en el número siguiente, se ha llegado a identificar los estados de movimiento con los estados regidos por ecuaciones de tipo hiperbólico. El enorme y moderno progreso en las ecuaciones de tipo hiperbólico empieza con Hadamard (1917) y continúa con E. Goursat, I. G. Petrovski,

G. Herglotz, F. John, K. O. Friedrichs, L. Gårding, J. Leray, P. Lax, A. Calderón, S. L. Sobolev, Ph. Dionne y otros muchos, entre los cales figura un buen grupo de profesores de la Universidad de Barcelona.

Sea $P\left(t, x; \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ la parte principal del operador L, es decir, la que se obtiene tomando únicamente los términos de orden máximo que se obtiene tomando únicamente los términos de orden máximo y que en el caso del dalambertiano coincide con L. Que L sea hiperbólico quiere decir que para todo punto $(t_0, x^0) \in \Omega$ existen direcciones formando un cono, tales que el polinomio característico $P(t_0, x^0; \tau, \xi)$, considerado como ecuación en τ, $P(\tau, \xi) = 0$, tiene todas sus raíces reales y distintas, cualquiera que sea $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$. Se llaman temporales en el punto (t_0, x^0) las direcciones en el espacio-tiempo contenidas en el interior del cono dual del cono mencionado; y se llaman espaciales las hipersuperficies, cuyas normales sean temporales. Esta terminología está tomada de la teoría de la relatividad.

La ecuación en derivadas parciales de primer orden, homogénea y de grado igual al orden de L,

$$P\left(t, x; \frac{\partial g}{\partial t}, \frac{\partial g}{\partial x}\right) = 0,$$

se llama ecuación característica; y las hipersuperficies del espacio-tiempo $g(t, x) = 0$, soluciones de esta ecuación, se llaman hipersuperficies características del operador L. Las bandas características de la ecuación característica, o sea, las soluciones del sistema diferencial ordinario

$$\frac{\partial \tau}{\dfrac{\partial P}{\partial t}} = \frac{d\xi_1}{\dfrac{\partial P}{\partial x_1}} = \ldots = \frac{d\xi_n}{\dfrac{\partial P}{\partial x_n}} = -\frac{dt}{\dfrac{\partial P}{\partial \tau}} = -\frac{dx_1}{\dfrac{\partial P}{\partial \xi_1}} = \ldots = -\frac{dx_n}{\dfrac{dP}{\partial \xi_n}},$$

siendo $P(t, x; \tau, \xi) = 0$, y por tanto,

$$\tau\, dt + \xi_1\, dx_1 + \ldots + \xi_n\, dx_n = 0,$$

se llaman las bicaracterísticas del operador L.

Las propiedades primarias de gran significación física, de los operadores lineales hiperbólicos, pueden resumirse de la manera siguiente:

Para determinar unívocamente una solución de la ecuación de ondas hay que dar dos condiciones iniciales (y en general tantas como el orden de la ecuación):

$$u(t_0, x), \frac{\partial u(t_0 x)}{\partial t},$$

con soporte en un dominio del hiperplano $t = t_0$, o con soporte en una hipersuperficie espacial. Por ejemplo, si $u(t, x)$ representa la elongación, respecto de su posición en reposo, de un punto de una membrana vibrante, entonces los datos iniciales representan respectivamente la posición y la velocidad para el tiempo $t = t_0$ de cada uno de los puntos de la membrana. Dicho de otra manera: el problema de Cauchy es un problema bien planteado.

Existen soluciones débiles. de modo que pueden darse soluciones con pleno sentido físico y que no sean dos veces continuamente diferenciables en sentido ordinario en puntos interiores de su dominio de existencia.

La ecuación no acusa diferencia relativamente al sentido del tiempo; más aún, dadas las dos condiciones iniciales en todo el hiperplano $t = t_0$, hay estricta *determinación* o *causalidad física* tanto hacia el futuro como hacia el pasado.

Esta determinación física existe en un tiempo suficientemente corto, tanto hacia el futuro como hacia el pasado, para todo punto interior al dominio de los datos iniciales, cualquiera que sea este dominio contenido en el hiperplano $t = t_0$ o en una hipersuperficie espacial. Ello equivale a decir que la influencia o acción de la causalidad se propaga con velocidad finita; en el caso de la ecuación canónica que nos ocupa, la onda se propaga precisamente con la velocidad c.

Terminemos esta enumeración enunciando una propiedad que en cierta forma las incluye casi todas y que es también característica de todas las ecuaciones lineales de tipo hiperbólico. En lugar de considerar la ecuación homogénea, considerémosla con un segundo miembro $p(t, x)$ de soporte compacto K en el espacio-tiempo:

$$\mathbf{L}\left(t, x; \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)[u] \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = p(t, x);$$

$p(t, x)$ puede representar una perturbación local y pasajera. Esta perturbación provoca en el espacio-tiempo una emisión que parte de

K. La traza o huella de la emisión en el espacio es una expansión, cuya superficie exterior es el frente de onda de que se habla en Física. La frontera de la emisión en el espacio-tiempo es precisamente una superficie característica, o sea, una solución de la ecuación característica, engendrada por bicaracterísticas, o sea, por bandas características de la ecuación característica. La traza de las bicaracterísticas en el espacio son precisamente los rayos, sean rayos luminosos, sonoros, etc. Estos resultados, para el caso general mencionado, son debidos fundamentalmente a Petrovski, y luego fueron completados por L. Gårding y J. Leray.

Para el caso particular del dalambertiano podemos mencionar todavía dos propiedades muy interesantes: que es invariante frente a las transformaciones del grupo de Lorentz; y que presenta una notable disparidad según que el número de variables espaciales sea par o sea impar mayor que uno, lo que da lugar al principio de Huygens estudiado por Hadamard, y cuya generalización es todavía un problema en buena parte abierto.

Las ecuaciones de tipo hiperbólico son probablemente las que han sido mejor estudiadas y, por consiguiente, son también aquéllas de las que se tiene un conocimiento más sistemático y profundo, incluyendo, por ejemplo, numerosos estudios sobre sus singularidades. Existe también un teorema de existencia y unicidad para ecuaciones casi lineales de tipo hiperbólico y bajo condiciones muy generales (Gårding) y recientemente se ha dado un teorema análogo para ecuaciones no lineales (Dionne, 1962).

3. Antes de pasar a otros tipos de operadores queremos dar todavía otra presentación de estos resultados característicos de los operadores hiperbólicos, debida a P. Lax, con numerosos elementos nuevos y muy sugestiva especialmente desde el punto de vista de las relaciones entre la Matemática y la Física.

En el número anterior se ha considerado el caso de una ecuación hiperbólica con coeficientes variables. En éste vamos a considerar un sistema lineal de q ecuaciones, puesto en forma normal

$$(\Sigma): \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathrm{I} - \mathrm{G}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)[u] = 0,$$

siendo I la matriz unidad de dimensión q, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, donde u es vectorial, $u = (u_1, \ldots, u_q)$, y G es matricial, $q \times q$. Supondremos que los coeficientes son constantes (reales). Hacemos también la hipótesis de que $\frac{\partial}{\partial t} \mathrm{I} - \mathrm{G}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ sea hiperbólico, es decir, que cumpla las condiciones siguientes:

1) El polinomio secular

$$\mathrm{S}(\tau, \xi) \equiv \det\left(\tau \mathrm{I} - \mathrm{G}(\xi)\right)$$

sea de grado q.

2) Las raíces $\tau = \tau(i\xi)$ de la ecuación en τ: $\mathrm{S}(\tau, i\xi) = 0$, verifiquen la condición llamada de hiperbolicidad,

$$|\text{parte real de } \tau(i\xi)| \leq \text{constante},$$

para todo ξ real.

Respecto de la primera condición obsérvese que es suficiente que G sea de primer orden para que se cumpla, pero ello no es necesario; por ejemplo, la ecuaciónn de ondas es equivalente al sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = u_2 \\[2ex] \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = c^2 \Delta u_1 \end{cases}$$

que es hiperbólico según la definición que acabamos de dar, y que no obstante no es de primer orden.

Respecto de la segunda condición se tiene lo siguiente: sea $\mathrm{P}(\tau, \xi)$ el polinomio característico del operador que nos ocupa, es decir, el conjunto de términos de grado q en $\mathrm{S}(\tau, \xi)$. Entonces para que se verifique la condición 2) de hiperbolicidad es necesario que las raíces de la ecuación característica $\mathrm{P}(\tau, \xi) = 0$ sean reales, y es suficiente que sean reales y distintas; por tanto, puede decirse en cierto sentido que esta condición de hiperbolicidad es un poco menos restrictiva que la que hemos dado en el número anterior.

Vamos a considerar el sistema (Σ) que nos ocupa como definiendo una aplicación $\mathcal{F}$ del espacio $\mathcal{E}^q_{(x)}(\mathbb{R}^n)$ de las funciones vectoriales de x indefinidamente diferenciables en $\mathbb{R}^n$ en el espacio $\mathcal{E}^q_{(x,t)}(\mathbb{R}_{n+1})$ de las funciones vectoriales de (x, t) indefinidamente diferenciables en $\mathbb{R}^{n+1}$. A toda función vectorial $g(x) \in \mathcal{E}^q_{(x)}(\mathbb{R}^n)$, $g = (g_1 \ldots g_q)$ el sistema (Σ) le hace corresponder una función vectorial

$$\mathcal{F}(g) = u(x, t) \in \mathcal{E}^q{}_{(x,t)}(\mathbb{R}^{n+1}),\ u = (u_1, \ldots, u_q),$$

definida unívocamente de la manera siguiente: $u(x, t)$ satisface el sistema (Σ) y $u(x, 0) = g(x)$.

Todo sistema hiperbólico (Σ) define una aplicación continua $\mathcal{F}$, y esta aplicación goza de las siguientes propiedades:

1) $\mathcal{F}$ es lineal por serlo (Σ), es decir,

$$\mathcal{F}(c_1 g^1 + c_2 g^2) = c_1 \mathcal{F}(g^1) + c_2 \mathcal{F}(g^2).$$

2) $\mathcal{F}$ es estrictamente causal, en el sentido de que dado $g(x) = u(x, 0)$, entonces $u(x, t)$ está unívocamente determinado para todo t, $-\infty < t < \infty$.

3) Se puede demostrar que las señales o perturbaciones se propagan con velocidad finita, es decir, que si el soporte de $g(x)$ está contenido en la bola de centro x^0 y radio ρ, existe una constante c tal que $\mathcal{F}(g) = u(x, t)$ considerada como función de x, para $t = t_0$, tiene su soporte contenido en una bola de centro x^0 y radio $c\, t_0 + \rho$.

4) Si $u(x, t)$ está en el rango de $\mathcal{F}$ se tiene que $u(x, t - t_0)$, cualquiera que sea $t_0 \in \mathbb{R}$ está también en el rango de $\mathcal{F}$. Ello es una consecuencia inmediata de que los coeficientes de (Σ) sean independientes del tiempo.

5) Análogamente, que los coeficientes de (Σ) sean independientes de x implica evidentemente que si $u(x, t)$ está en el rango de $\mathcal{F}$, se tiene $u(x - x^0, t)$, para todo $x^0 \in \mathbb{R}^n$ está también en el rango de $\mathcal{F}$.

Supongamos ahora que, viceversa, se tiene un operador $\mathcal{F}$ que aplica $g \in \mathcal{E}^q_{(x)}(\mathbb{R}^n)$ en $\mathcal{F}(g) = u(x, t) \in \mathcal{E}^q_{(\bar{x}, t)}(\mathbb{R}^{n+1})$ y tal que $u(x, 0) = g(x)$. Consideremos $g(x)$ como un *estado inicial* de un cierto medio físico continuo, al que el operador $\mathcal{F}$ hace corresponder una función $u(x, t)$ que define el estado del medio físico para todo tiempo t, $-\infty < t < \infty$. Diremos que $u(x, t)$ es un *movimiento estacionario en un medio físico continuo homogéneo*, o bien que $\mathcal{F}$ es un *operador de movimiento estacionario en un medio físico continuo homogéneo* sólo y cuando satisfaga las cinco propiedades, condiciones o postulados que acabamos de explicar. La primera condición equivale a decir que para $\mathcal{F}$ ha de valer el principio de superposición, es decir, que si u^1, u^2 son dos movimientos, también $c_1 u^1 + c_2 u^2$ ha de ser un movimiento. La segunda condición equivale a que $\mathcal{F}$ sea estrictamente causal tanto hacia el futuro como hacia el pasado. La tercera equivale a decir que la acción causal debida a $g(x^0) \neq 0$ se propaga a lo largo del tiempo con velocidad finita. La cuarta dice que $u(x, t)$ es estacionario, y la quinta que el medio es homogéneo.

Hemos dicho antes que a todo sistema hiperbólico (Σ), definido por un operador hiperbólico $\frac{\partial}{\partial t} \mathrm{I} - \mathrm{G}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ podríamos hacer corresponder otra aplicación u operador $\mathcal{F}$ que gozaba de las cinco propiedades mencionadas. Pues bien, he aquí un interesante teorema que constituye un recíproco de este resultado:

A todo operador de movimiento estacionario en un medio físico continuo homogéneo $\mathcal{F}$ corresponde un único operador hiperbólico $\frac{\partial}{\partial t} \mathrm{I} - \mathrm{G}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ tal que el operador definido por el sistema

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \mathrm{I} - \mathrm{G}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)[u] = 0$$

sea precisamente el operador dado $\mathcal{F}$.

Este resultado da una muy interesante formulación matemática de uno de los fenómenos más importantes de la mecánica de los medios continuos, a saber, de los movimientos estacionarios en los medios continuos.

4. Los operadores parabólicos tienen como prototipo el de la ecuación del calor,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)[u] = 0,$$

siendo Δ el laplaciano, y $u = u(x, t)$ la función (temperatura) incógnita. Petrovski ha dado una definición general de operadores lineales parabólicos de parabolicidad $2m$, cuyo caso particular más sencillo es

$$(\Pi): \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{M}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right)[u] = 0,$$

donde M se supone definido y suficientemente regular en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, lineal, independiente de t, y de orden $2m$; además, llamando $\mathrm{P}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ la parte principal o sea, la de orden $2m$ de M, se ha de tener

$$(-1)^m \mathrm{P}(x, \xi) > 0,$$

para todo $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$.

Para determinar la existencia y unicidad de una solución, incluso locamente para un tiempo todo lo pequeño que se quiera, hace falta, a diferencia de lo dicho al hablar de las ecuaciones de tipo hiperbólico, que se den condiciones de contorno, las cuales, al igual que las que eventualmente se den en las ecuaciones de tipo hiperbólico, son análogas a las propias de las ecuaciones de tipo elíptico, y para las ecuaciones de segundo orden se reducen a las de Dirichlet, Neumann o mixtas, como se verá en la sección siguiente. En cuanto a las condiciones iniciales es necesario y suficiente dar una sola condición inicial, a saber, dar $g(x)$ tal que $u(x, 0) = g(x)$, lo cual discrimina también notablemente estas ecuaciones de las de tipo hiperbólico; y tanto éstas como las parabólicas difieren bajo este aspecto totalmente de las elípticas, pues en éstas no interviene el tiempo y por tanto tampoco cabe considerar con sentido físico condiciones iniciales. Las ecuaciones de tipo hiperbólco son de tipo kovalevskiano respecto del tiempo o reducibles a él y en ellas el problema de Cauchy es un problema bien planteado con pleno sentido físico: las de tipo parabólico no son kovalevskianas respecto del tiempo; las de tipo elíptico son kovalevskianas, pero en ellas el problema de Cauchy no es un problema bien planteado y carece de sentido físico.

La ecuación del calor y en general las de tipo parabólico mencionadas no se comportan igual respecto de las dos direcciones del tiempo. Si se cambia el signo de t en la ecuación, deja de ser de tipo parabólico. Así, pues, la ecuación refleja el carácter físico y cotidiano de la irreversibilidad del tiempo. Y naturalmente, las soluciones acusan de una manera bien patente esta misma irreversibilidad, pues mientras que la única solución existente en las condiciones mencionadas corresponde a un problema bien planteado con pleno sentido físico respecto del futuro, esta misma solución no responde a un problema bien planteado ni tiene sentido físico respecto del pasado. Puesto que para una ecuación parabólica determinada, por ejemplo la del calor, un pequeño error en el estado inicial $g(x)$, error siempre existente desde un punto de vista físico, modifica poco el valor de la solución $u(x, t)$, si $t > 0$, pero puede cambiar todo lo que se quiera el valor de $u(x, t)$ para $t < 0$.

Todo lo dicho hasta aquí está bien de acuerdo con las ideas que tenemos sobre el cambio de temperatura en los cuerpos, tanto más cuanto que en buena parte estas ideas tienen su origen precisamente en los resultados que acabamos de mencionar. He aquí por el contrario una propiedad de la ecuación del calor, que no raramente suele sorprender. Sea, por ejemplo, una barra indefinida de plata, es decir, un sólido continuo de dimensión uno, $n = 1$. La conducción del calor a lo largo de la barra, según se desprende elementalmente de la ecuación del calor, no se hace con un frente de onda, sino que, por así decirlo, se propaga con velocidad infinita; es decir, las soluciones $u(x, t)$ de las ecuaciones de tipo parabólico no son «movimientos», ya que la influencia del estado de un punto en el estado de otro no se propaga con velocidad finita. Haciéndonos eco de la *actio in distans*, la conducción del calor puede ser llamada *actio instantanea*, y queda desde luego abierta la cuestión de la objetividad de esta consecuencia de la ecuación del calor. Desde el punto de vista físico esta consecuencia puede parecer harto curiosa, pero desde el punto de vista matemático no parece ofrecer gran cosa de particular, sino que son más bien las soluciones de las ecuaciones de tipo hiperbólico las que se presentan como funciones muy poco elementales.

Cualquiera que sea el contenido físicamente verdadero de estas consideraciones nos parece experimentar cuán difícil se hace interpretar matemáticamente, siquiera con un poco de objetividad, fenómenos físicos ordinarios al parecer elementales y sencillos. Cuando se aplica todo el aparato matemático a la interpretación y consiguiente dominio de la naturaleza, no puede uno menos de tener la sensación, no sólo de que ello es muy difícil y requiere largos años de tanteos y trabajo, sino también de que es muy arriesgado y ofrece grandes peligros, pues las hipótesis fundamentales que se hacen no pueden responder adecuadamente a la realidad y no sabemos cuánto puede repercutir en las soluciones un pequeño error en las hipótesis. No obstante, es también bien patente que es principalmente este aparato matemático, a pesar de su dificultad, onerosidad e inseguridad, el que fundamentalmente ha hecho posible que la Humanidad haya alcanzado una era nuclear.

Guardan conexión con estas cuestiones otras propiedades de las ecuaciones parabólicas, como, por ejemplo, la analiticidad de las soluciones (S. Mizohata, entre otros). Y también las soluciones de ecuaciones de tipo más general, como las de evolución: tipo de ecuaciones en las que figura el tiempo como variable independiente, pero que no ha sido aún bien definido y del que se ocupa largamente J. Lions, entre otros muchos.

Las ecuaciones parabólicas (II) que hemos mencionado pueden resolverse mediante la descomposición espectral del operador M. Muy recientemente, M. I. Vishik ha demostrado, mediante el método de Galerkin, un teorema de existencia y unicidad y con soluciones dependiendo continuamente de los datos, para un tipo general de ecuaciones de tipo parabólico casi lineales; más concretamente, para ecuaciones de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha| \leqq m} (-1)^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha}} A_{\alpha}\left(t; x, \frac{\partial^{|\gamma|} u}{\partial x^{\gamma}}\right) = p(t, x), x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, t \in [0, T],$$

siendo α y γ n-uplas de números naturales, $|\gamma| \leqq m$, y donde el operador implicado en el segundo sumando del primer miembro cumple ciertas condiciones generales de elipticidad. Las condiciones accesorias consisten en una condición inicial y m condiciones de contorno impuestas a la función $u(x, t)$ y a sus $m-1$ primeras derivadas, para $x \in \dot{\Omega}$.

5. Los operadores lineales de tipo elíptico, tanto escalares como matriciales, se definen imponiendo la condición de que el polinomio característico sea una forma definida positiva, lo que equivale a decir que no hay superficies características reales, todo en el mismo sentido que el dado en el número 2 de esta sección. Su prototipo es el laplaciano, y la ecuación correspondiente es la del potencial

$$\Delta u = 0.$$

Para el caso de la ecuación lineal de segundo orden de tipo elíptico hay varios métodos de solución y Ch. Morrey ha dado recientemente un método particularmente simple y potente basándose en el teorema espectral para el caso de un operador compacto.

La ecuación completa con un operador de tipo elíptico de orden $2m$ y autoadjunto y con m condiciones autoadjuntas, que son los casos más interesantes, puede resolverse teóricamente de una manera enteramente similar a como se resuelven los problemas de contorno para una ecuación diferencial ordinaria. También aquí cabe distinguir entre problema regular, que da lugar a un espectro discreto, y problema singular, que da lugar a un espectro continuo, según que el dominio Ω sea de adherencia compacta o no. Esta problemática es particularmente importante para abordar los problemas de movimientos vibratorios.

Muy recientemente M. I. Vishik ha demostrado un teorema de existencia y unicidad y con soluciones dependientes continuamente de los datos para sistemas de ecuaciones casi lineales de tipo elíptico. Más concretamente para sistemas de la forma

$$\sum_{|\alpha| \leqq m} (-1)^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha}} A_{\alpha} \left(x, \frac{\partial^{|\gamma|} u}{\partial x^{\gamma}} \right) = p(x), x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

siendo $u = (u_1, \ldots, u_q)$; α, γ son n-uplas de números naturales y las funciones A_α cumplen una condición de elipticidad y condiciones muy generales de regularidad. Las condiciones accesorias se reducen a m condiciones de contorno que se imponen a $u(x)$, y a sus primeras derivadas para $x \in \dot{\Omega}$, condiciones que son del tipo de las de Dirichlet.

No vamos a entrar en la discusión de las propiedades de las soluciones de las ecuaciones de tipo elíptico, pues en la tercera y última sección de este discurso nos ocupamos de un sistema, el de la elasticidad, que es típicamente elíptico Unicamente mencionaremos la gran regularidad de las soluciones, porque es sin duda una de las propiedades más importantes y porque nos llevará a hablar de los operadores de tipo hipoelíptico.

He aquí uno de los resultados más simples y más generales acerca de la regularidad de las soluciones de una ecuación de tipo elíptico. Sea L un operador lineal de tipo elíptico de cualquier orden y cuyos coeficientes sean funciones analíticas de $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ Sea $g(x)$ una función analítica. Entonces se tiene que toda solución $u = u(x)$ de la ecuación

$$L[u] = g(x), \text{ para todo } x \in \Omega \text{ abierto,}$$

ha de ser necesariamente función analítica de x, de modo que no existen propiamente soluciones débiles. El significado físico de este resultado es bastante intuitivo. En efecto, supongamos tanto en una ecuación de tipo hiperbólico cual la de ondas, como en una ecuación de tipo parabólico cual la del calor, que a lo largo del tiempo la solución se vaya convirtiendo (asintóticamente en teoría, pero rápidamente de hecho) en una solución estacionaria representando, por ejemplo, un estado o régimen uniforme, de modo que pueda hacerse

$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. Entonces, automáticamente, la ecuación de tipo hiperbólico o parabólico se convierte en una ecuación de tipo elíptico. y parece harto natural que las soluciones que responden a un estado estacionario sean regulares en grado sumo, más aún, parece razonable que hayan de ser analíticas, pues el tiempo necesario para llegar a este estado se ha cuidado de alisar todas las asperezas que pudieran presentar los estados intermedios.

Esta propiedad de la regularidad de las soluciones resulta tan importante que ha dado lugar al estudio sistemático de un nuevo tipo de operadores, llamados *operadores hipoelípticos*, introducidos por L. Schwartz, y para los cuales el espacio de soluciones permisibles es el espacio de distribuciones. La regularidad que se exige puede ser la analiticidad o la diferenciabilidad indefinida. Nos referiremos a esta última, que resulta más interesante.

Sea $M\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, un operador diferencial lineal escalar cuyos coeficientes sean funciones indefinidamente diferenciables en un dominio $D \in R^n$. Sea Ω un abierto cualquiera contenido en D y sea T una distribución arbitraria. Se dice que $M\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ es hipoelíptico en D si se tiene que cuando $M\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ T es indefinidamente diferenciable en Ω, entonces T es una función indefinidamente diferenciable en Ω.

Naturalmente, todos los operadores elípticos son también hipoelípticos. También lo son todos los operadores parabólicos en el sentido de Petrovski y en particular, por tanto, los (Π) definidos en el número anterior. Se conocen numerosos resultados relativos a condiciones de suficiencia y otras propiedades de los operadores hipoelípticos, aunque no se conoce todavía una caracterización totalmente satisfactoria. He aquí parcialmente un resultado debido a L. Hörmander que caracteriza muy bien los operadores hipoelípticos con coeficientes constantes. Para que $M\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ lineal escalar y con coeficientes constantes sea hipoelíptico, es condición necesaria y suficiente que cuando el punto $\xi + i\eta = (\xi_1 + i\eta_1, \ldots, \xi_n + i\eta_n)$ se mueve en la variedad $M(\xi + i\eta) = 0$ de modo que $|\xi + i\eta| \to \infty$, también se tenga $|\eta| \to \infty$.

6. En todo lo que llevamos dicho en esta sección puede comprobarse cómo el desarrollo de la teoría de Ecuaciones en derivadas

parciales ha sido fundamentalmente guiado de una manera heurística por la intuición física. El solo hecho de que un problema matemático pretenda responder a un fenómeno físico y de que la solución del problema pretenda predecir algo acerca del desarrollo del mismo fenómeno, garantiza ya sin más la existencia de una solución si el problema matemático interpreta formalmente el fenómeno físico con un mínimo de objetividad.

Se comprende, por consiguiente, la novedad que supone la aparición de ecuaciones lineales completas que, a pesar de ser de coeficientes indefinidamente diferenciables y segundo miembro también indefinidamente diferenciable, no admiten solución alguna en el vasto espacio de distribuciones.

El primer ejemplo lo dio H. Lewy (1957) y después L. Hörmander ha dado toda una clase de tales ecuaciones sin soluciones. Parece obvio que tales ecuaciones, que pueden ser con coeficientes reales, no pueden responder a fenómeno físico alguno; por lo menos a ninguno de aquéllos que se estudian actualmente en el campo de la Física matemática, pues no sabemos las sorpresas que el futuro de la Física nos puede deparar y sería temerario quererlas parvificar. Hoy por hoy la relación de estas ecuaciones con la Física es por contraste.

Como consecuencia del descubrimiento de esta sorprendente clase de ecuaciones sin solución, L. Hörmander ha introducido un nuevo tipo de operadores diferenciales lineales, a saber: los *operadores de tipo principal,* así llamados porque las ecuaciones a que dan lugar no pueden carecer de soluciones locales.

Sea $L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ un operador lineal de coeficientes indefinidamente diferenciables y de orden m:

$$L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)[u] = \sum_{|\alpha| \leqq m} a_\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x^\alpha}, \quad \begin{array}{l} x = (x_1, \ldots, x_n) \\ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \end{array}$$

Sea $P(x, \xi)$ el polinomio característico:

$$P(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) \cdot \xi^\alpha, \; \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha} \ldots \xi_n^{n}.$$

Entonces se dice que L es de tipo principal en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si para todo x^0, $x^0 \in \Omega$, el sistema de ecuaciones algebraicas en $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$:

$$\frac{\partial P(x^0, \xi)}{\partial \xi_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

carece de solución real, excepto la trivial $\xi = 0$.

La ecuación lineal de segundo orden, supuesta no parabólica, reducida a forma canónica en un punto

$$a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + a_s \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} - a_{s+1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2_{s+1}} - \ldots - a_n \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0,$$

$$a_j > 0, j = 1, 2, \ldots, n,$$

cuando $n > 3$, además de los tipos hiperbólico y elíptico puede presentar el tipo ultrahiperbólico; es inmediato comprobar que estos tres tipos de ecuaciones, incluso suponiendo los coeficientes variables, son también de tipo principal, de modo que los operadores de tipo principal pueden considerarse como una generalización de los elípticos, hiperbólicos y ultrahiperbólicos

He aquí un importante teorema debido a L. Hörmander en relación con la unicidad y la existencia de soluciones de ecuaciones con estos operadores. Sea $L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ un operador de tipo principal en Ω. Entonces para todo $x \in \Omega$ existe un entorno abierto G de x, $x \in G \subset \Omega$, para el cual valen estos dos resultados: supongamos que $u(x)$ sea una solución de la ecuación

$$L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)[u] = 0$$

y que su soporte esté contenido en G. Entonces ha de ser necesariamente $u(x) = 0$ para todo $x \in \Omega$.

Supongamos que $h(x)$ sea de cuadrado sumable en G: $h \in L_2(G)$. Entonces la ecuación

$$L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)[u] = h(x)$$

admite por lo menos una solución $u(x)$ para todo $x \in G$ y tal que $u \in L_2(G)$.

§ 3. *Ecuaciones de la elasticidad.*

1. El operador diferencial de la elasticidad constituye uno de los ejemplos más típicos e interesantes de los operadores matricia-

les fuertemente elípticos, y a él voy a dedicar el resto de este discurso.

Se llama así al operador G que aplicado a la función vectorial $u(x)$, que representa los desplazamientos de un punto del sólido elástico, da lugar a las ecuaciones de Navier, básicas en la teoría de la elasticidad. Es decir,

$$G[u] \equiv \frac{-1}{2}(\mu\,\Delta + (\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div})\,[u] = F(x)$$

donde λ, μ son las constantes de Lamé, o bien en forma matricial y suponiendo el espacio euclídeo ordinario de tres dimensiones, $x = (x_1, x_2, x_3)$,

$$G[u] = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} \mu\,\Delta + (\lambda + \mu)\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} & (\lambda+\mu)\dfrac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_2} & (\lambda+\mu)\dfrac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_3} \\ (\lambda+\mu)\dfrac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_2} & \mu\,\Delta + (\lambda+\mu)\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} & (\lambda+\mu)\dfrac{\partial^2}{\partial x_2\,\partial x_3} \\ (\lambda+\mu)\dfrac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_3} & (\lambda+\mu)\dfrac{\partial^2}{\partial x_2\,\partial x_3} & \mu\,\Delta + (\lambda+\mu)\dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

El operador de la elasticidad G se llama fuertemente elíptico porque puede descomponerse, poniendo

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right),$$

de la manera siguiente:

$$G \equiv G(D) = A^{+}(-D).\,A(D),$$

donde A^{+} es el traspuesto de A, y donde A (D) es un operador elíptico. Para G, A (D) viene dado, para el caso de tres dimensiones, por

$$A(D) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2\lambda}\,\dfrac{\partial}{\partial x_1} & \sqrt{2\lambda}\,\dfrac{\partial}{\partial x_2} & \sqrt{2\lambda}\,\dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ 2\sqrt{\mu}\,\dfrac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{\mu}\,\dfrac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{\mu}\,\dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \sqrt{2\mu}\,\dfrac{\partial}{\partial x_3} & \sqrt{2\mu}\,\dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ \sqrt{2\mu}\,\dfrac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \sqrt{2\mu}\,\dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \sqrt{2\mu}\,\dfrac{\partial}{\partial x_2} & \sqrt{2\mu}\,\dfrac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{pmatrix}$$

resultando de esta descomposición que el cuadrado de la norma euclídea o valor absoluto de A $[u]$ es precisamente la energía potencial elástica del sólido por unidad de volumen W (x),

$$\left| A [u] \right|^2 = W(x),$$

de donde $\int |A[u]|^2 \, dx$ extendida a todo el sólido, da la energía elástica total del sólido.

Este sistema de las ecuaciones de Navier es en su forma general prácticamente inabordable. Pero a veces conviene hallar soluciones particulares del sistema homogéneo, es decir, siendo $F = 0$, y a estos efectos puede ayudar la forma general de la solución, que damos a continuación. Es fácil deducir, cuando $F = 0$, que cada una de las componentes u_i, $i = 1, 2, 3$, del vector desplazamiento ha de satisfacer la ecuación biarmónica

$$\Delta^2 u_i = 0.$$

Ahora bien, toda solución u_i de la ecuación biarmónica puede ponerse en la forma

$$u_i = \varphi_i + x_1 \psi_i, \text{ siendo } \Delta \varphi_i = \Delta \psi_i = 0,$$

y lo mismo podría ponerse x_2 o x_3 en lugar de x_1.

Finalmente, si $u = (u_1, u_2, u_3)$ es una solución de las ecuaciones de Navier homogéneas, entonces existen cuatro funciones armónicas de (x_1, x_2, x_3), $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi$, tales que

$$u = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) + x_k \operatorname{grad} \psi,$$

pudiéndose tomar arbitrariamente $k = 1, 2, 3$. En cierta manera, esta descomposición del vector desplazamiento u en cuatro funciones armónicas viene a reducir la integración del sistema de Navier a la ecuación de Laplace, aunque esto no es en realidad tan sencillo, pues en general las condiciones de contorno no pueden descomponerse paralelamente a la descomposición del vector incógnita.

Precisamente las dificultades de la teoría de la elasticidad no sólo obedecen a la complejidad del operador elástico, sino también al hecho de que las condiciones de contorno son con frecuencia mixtas, es decir, en una parte del contorno se dan los desplazamientos y en la parte restante se dan los esfuerzos.

Es particularmente importante el caso en que se conocen los esfuerzos para todos los puntos del contorno, pues entonces será en general preferible dejar las ecuaciones de Navier y emplear en su lugar las ecuaciones fundamentales de la elasticidad juntamente con las condiciones de compatibilidad, de modo que se obtiene un conjunto de ecuaciones que es equivalente al sistema de Navier y viene dado en términos de los esfuerzos.

Las ecuaciones fundamentales de la elasticidad

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3}+F_1(x)=0 \\[2mm] \dfrac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial \tau_{23}}{\partial x_3}+F_2(x)=0 \\[2mm] \dfrac{\partial \tau_{31}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial \tau_{32}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3}+F_3(x)=0, \end{array}\right.$$

donde $\tau = ((\tau_{ij}))$ es el tensor de esfuerzos, y $F = (F_1, F_2, F_3)$ las fuerzas de volumen, presentan la apreciable ventaja de una notable simplicidad. Por el contrario, el sistema de compatibilidad, formado por las seis condiciones de compatibildad

$$\Delta \tau_{ik} - \frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2(\tau_{11}+\tau_{22}+\tau_{33})}{\partial x_i\,\partial x_k} = \frac{-\delta_{ik}\,\sigma}{1-\sigma}\operatorname{div} F -$$

$$-\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}+\frac{\partial F_k}{\partial x_i}\right), \; i=1,2,3; \quad k=1,2,3,$$

donde σ es el coeficiente de Poisson, y δ_{ik} son las deltas de Kronecker, es un sistema fuertemente elíptico y muy complicado. Naturalmente, para encontrar las seis funciones incógnitas que constituyen el tensor de esfuerzos de un sólido, cuando se conocen los esfuerzos en el contorno, se toman como base las tres ecuaciones fundamentales, y entonces tres de las condiciones de compatibilidad son consecuencia de las otras tres unidas a las tres fundamentales.

Este conjunto de nueve ecuaciones en los esfuerzos son esencialmente equivalentes a las tres de Navier en los desplazamientos y el lazo de unión son, por ejemplo, las relaciones

$$\tau_{ik} = \delta_{ik}\,\lambda \operatorname{div} u + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right), \; i=1,2,3; \quad k=1\;2\;3,$$

que ligan los esfuerzos con los desplazamientos.

2. Me propongo hacer a continuación algunas consideraciones relativas a la elasticidad plana y al principio de Saint-Venant para vigas. Más concretamente se supondrá que se trata de un sólido elástico que tenga la forma de un cilindro hueco. Es decir, que nos referimos a un cilindro recto B, cuyo eje sea el eje z o x_3 y cuya sección recta S situada en el plano (x, y) sea un anillo circular limitado por dos circunferencias concéntricas, C_0 la circunferencia exterior de radio unidad y C_1 la interior de radio ρ, $0 < \rho < 1$. Parece obvio que lo que se dirá a continuación es fácilmente generalizable a un cilindro recto cualquiera, con tal que su sección sea también acotada y doblemente conexa. A menos que se diga explícitamente lo contrario se supondrá que la superficie lateral del cilindro, tanto la exterior como la interior, es libre de fuerzas de superficie, lo que no implica restricción alguna si se admite que pueda haber fuerzas de volumen. Asimismo se supone que el cilindro no está solicitado a torsión y que, aunque esta hipótesis no es esencial, tampoco está solicitado a flexión, de modo que las fuerzas superficiales exteriores actúan simétricamente en ambas bases exclusivamente, paralelamente al eje del cilindro, traccionándolo o comprimiéndolo, sin torsionarlo ni flectarlo, de modo que las dos resultantes de las cargas aplicadas a las dos bases del cilindro son iguales, de signo contrario y contenidas en el eje del cilindro. Finalmente, se supone que, si hay fuerzas de volumen, éstas no dependen de x_3 ni tienen componente según el mismo eje x_3, es decir, que

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_3} \equiv \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \equiv F_3 \equiv 0.$$

Todas las hipótesis que se han mencionado son bastante naturales cuando el cilindro trabaja como columna; si además se permitieran momentos flectores, lo que no modificaría esencialmente el problema, las hipótesis serían bastante naturales para un cilindro que trabajara también a flexión. Desgraciadamente todas estas hipótesis apenas simplifican el cálculo de la solución exacta, pues la resolución del sistema diferencial sigue siendo prácticamente inabordable. La hipótesis que corrientemente se hace para tratar este problema, y que ciertamente lo simplifica mucho, es admitir un estado de deformación plana, con lo que el problema se sitúa en la elasticidad bidimensional. Esencialmente esta hipótesis puede formularse en términos de los esfuerzos por las condiciones

$$\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_3} = \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_3} = \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_3} = \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_3} = \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 \tau_{33}}{\partial x_3^2} = 0,$$

es decir, postulando que el tensor de esfuerzos no dependa de x_3, excepto τ_{33} que puede depender linealmente de x_3. En términos de los desplazamientos la hipótesis de elasticidad plana puede formularse

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0,\ u_3 = (a_1 x_3 + b_1)\, x_1 + (a_2 x_3 + b_2)\, x_2 + a_3 x_3 + b_3.$$

Por comodidad, y sin restricción alguna, se supondrá, como suele hacerse, que $\frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3} = u_3 = 0$, para todos los puntos del cilindro.

Las simplificaciones que se siguen de la hipótesis de elasticidad plana son las siguientes: las ecuaciones de Navier son las mismas, pero con dos variables independientes x, y en vez de tres. Las ecuaciones fundamentales y la única de compatibilidad forman el sistema (Σ) de elasticidad plana

$$(\Sigma) \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{12}}{\partial y} & & = -\, F_1 (x, y) \\[2ex] & \dfrac{\partial \tau_{12}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{22}}{\partial y} & = -\, F_2 (x, y) \\[2ex] \Delta\, \tau_{11} & + \Delta\, \tau_{22} & = \dfrac{-1}{1 - \sigma} \operatorname{div} F, \end{array} \right.$$

al que hay que adjuntar las correspondientes condiciones de contorno, que son análogas a las de la elasticidad tridimensional y que determinan las componentes τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} del tensor de esfuerzos bidimensional. Para las restantes componentes del tensor tridimensional se tiene

$$\tau_{13} = \tau_{23} = 0,\ \tau_{33} = \sigma (\tau_{11} + \tau_{22}).$$

Nos hemos detenido en la exposición de estos detalles, aparte del interés que por sí mismos puedan tener, para poder formular el resultado que sigue y sacar del mismo un interesante ejemplo que esclarece las relaciones entre la disciplina que nos ocupa y la Física.

Como es sabido, se puede reducir, introduciendo la función de

Airy, el sistema (Σ) de la elasticidad plana homogéneo a la ecuación biarmónica, adjuntándole las correspondientes condiciones de contorno. Teniendo en cuenta las fórmulas antes mencionadas en relación con esta ecuación, es posible hallar en términos explícitos la solución general de la ecuación biarmónica con las correspondientes condiciones de contorno para el caso en que el dominio sea un anillo circular. De esta solución se deduce sin dificultad la forma en términos explícitos del tensor bidimensional Z solución del sistema (Σ) homogéneo, es decir, con $F = 0$.

El resultado es que se obtienen tres tensores bidimensionales ζ^1, ζ^2, ζ^3, soluciones del sistema (Σ) homogéneo, linealmente independientes y que los tres se anulan en todos los puntos de las dos circunferencias que forman el contorno del anillo circular. La solución general Z de (Σ) homogéneo, es decir, con $F = 0$, y que se anule en el contorno es por tanto de la forma

$$Z = k\,\zeta^1 + q\,\zeta^2 + c\,\zeta^3,$$

para todo $(x, y) \in S$, con $\zeta^1(x, y) = \zeta^2(x, y) = \zeta^3(x, y) = 0$ para todo (x, y) perteneciente al contorno de la sección anular S; k, q, c, son constantes arbitrarias. Por consiguiente, dadas unas fuerzas de volumen $F = (F_1, F_2)$ arbitrarias y dados los valores del tensor

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{12} & \tau_{22} \end{pmatrix}$$

en el contorno de S existe una solución de (Σ) que depende exactamente de tres constantes arbirarias.

Si no fuera porque estamos en el secreto del significado físico del tensor τ, la aparición de estas tres constantes arbitrarias tendría que parecer extraordinariamente curiosa e inconjeturable. Pero basta tener en cuenta las relaciones antes mencionadas que ligan los desplazamientos con los esfuerzos y considerar que el dominio S no es simplemente conexo, para ver que había precisamente que esperar que surgieran de algún sitio tres constantes arbitrarias que permitieran al integrar los esfuerzos, a lo largo de un ciclo no reducible, obtener unos desplazamientos que fueran uniformes, pues los no uniformes parece intuitivamente claro que carecen de sentido físico. Las tres constantes aparecen, efectivamente, en escena al imponer las condiciones de contorno correspondientes a la ecuación biarmónica, precisamente en la *segunda* circunferencia que limita el anillo circular: y la trinidad de las constantes corresponde, en efecto, a la necesidad de poder hacer uniformes los desplazamientos debidos a cada una de las tres posibles solicitaciones independientes entre sí, a saber: la de tracción, que corresponde a una resultante en el eje x_3; la de flexión, correspondiente a un par resultante en el plano (x_2, x_3), y otra de flexión, debida a un par en el plano (x_1, x_3).

Parece hay que admitir que esta global explicación que acabamos de dar, tan consistente, es demasiado complicada para poder ser intuida *a priori* con seguridad. Incluso si se supone que hubiera precedido una larga experimentación, de sólo ésta no podría seguirse una explicación estrictamente científica, universal y necesitante, como es toda explicación deductiva o formalizada. El hecho físico de un estado elástico siempre existente de una manera única recibe su carácter de verdad estrictamente científica sólo después que se ha dado una explicación, es decir demostración, rigurosamente matemática. La intuición *a priori*, incluso precedida de experimentación, da sólo un conocimiento desconexo, desorgánico y esencialmente impreciso y oscuro. Por otra parte, la concurrente demostración matemática es incapaz de agotar el fenómeno físico y de comunicarle la misma universalidad y necesidad de que goza ella misma; lo que sí hace es encasillarlo más estrechamente y conferir al hecho empíricamente científico la categoría superior de un hecho estrictamente científico.

He aquí cómo se expresa el eminente físico A. Einstein a este respecto:

«Estoy convencido de que la construcción matemática pura nos capacita para descubrir los conceptos y las leyes que los relacionan, que a su vez nos dan la clave para comprender los fenómenos de la Naturaleza. La experiencia puede guiarnos, desde luego, en la elección de conceptos matemáticos aprovechables, pero no puede ser en manera alguna la fuente de donde éstos procedan; la experiencia nos proporciona el criterio para estimar la utilidad de la construcción matemática en materia de física, pero el verdadero principio creador reside en la Matemática» *.

(*) Tomado del libro de CHARLES DE KONINCK: *The Hollow Universe*, Oxford, University Press, 1960. Traducido por Rialp, Madrid, con el título de *El Universo vacío*.

Avanzando otro paso, uno se siente impelido a afirmar algo todavía más radical: todo conocimiento estrictamente científico de la realidad física, en cuanto ésta es independiente de la mente humana, ha de ser afirmado mediante un teorema matemático.

3. Hemos visto cómo la hipótesis de Elasticidad plana simplifica al cálculo del estado elástico del cilindro B, conocidas las fuerzas de volumen y las condiciones de contorno. Ahora bien, la aplicación práctica del principio de Saint-Venant equivale precisamente a la admisión de la hipótesis de Elasticidad plana para el cálculo del estado elástico del cilindro, juntamente con la esperanza de que el estado elástico así calculado será, excepto en los extremos del cilindro y supuesto que éste sea suficientemente largo, todo lo aproximado que se quiera del verdadero estado elástico, estado debido a las fuerzas de volumen F y a las cargas que actúen en ambas bases del cilindro. Como hemos indicado ya antes, estas cargas, que supondremos iguales y opuestas en ambas bases y representaremos por $q = q(x, y)$, actúan paralelamente al eje del cilindro y tienen su resultante en el mismo eje.

Que la esperanza que acabamos de mencionar sea razonable, lo prueba un siglo de ingeniería en el que sistemáticamente se ha aplicado dicho principio; que esta esperanza no pueda fallar en algún caso, quizá muy particular, es algo que no es estrictamente científico, y con ello queremos decir que no se ha dado todavía una demostración matemática del principio de Saint-Venant para el cilindro que nos ocupa.

He aquí una aplicación concreta de dicho principio. Supongamos que el cilindro está en un campo niutoniano atractivo creado por una masa uniformemente distribuida a lo largo del eje del cilindro, desde menos infinito a más infinito, de manera que las fuerzas de volumen que se originan en el cilindro tienden a comprimirlo. Estas fuerzas derivan de un potencial armónico $\beta \log (x^2 + y^2)$, siendo β una constante real positiva.

Es evidente que, si no hay otras fuerzas exteriores, el cilindro estará esencialmente en un estado de elasticidad plana, aunque se alargará algo, y por cierto se alargarán más las generatrices de la superficie lateral interior que las de la exterior.

Ahora bien, si suponemos el cilindro suficientemente largo y prescindimos de los extremos, la admisión del Principio de Saint-Venant equivale a decir que el estado elástico del cilindro no depende, o por decirlo más gráficamente, no se entera de cuáles son las cargas superficiales $q(x, y)$ en las bases del cilindro, salvo un aumento de tracción o compresión uniforme en toda la sección. Por ejemplo, cualesquiera que sean las cargas en las bases del cilindro, si el radio interior es pequeño respecto del exterior y prescindiendo de un sumando independiente ρ que se anula para $\sigma = \frac{1}{2}$, las presiones longitudinales en las dos superficies laterales del cilindro están entre sí en razón inversa al cuadrado de sus radios, de modo que mientras la compresión en la periferia exterior tiende a ser constante y mínima cuando el radio interior ρ tiende a cero, la compresión en la periferia interior tiende logarítmicamente hacia infinito.

Así, pues, si se supone que se comprime longitudinalmente el cilindro con cargas superficiales uniformes de p unidades (Kg/cm²) aplicadas en las bases, estas presiones no se transmiten uniformemente a lo largo del cilindro, sino que a medida que se alejan de las bases se concentran hacia el centro de la sección, como acudiendo a la conveniencia de obstaculizar el mayor alargamiento de las generatrices interiores producido por el campo niutoniano. Por tanto hay que guardarse de suponer que presiones uniformes aplicadas a las bases se propaguen siempre uniformemente a lo largo del cilindro *.

Todas estas consideraciones coducen a dos nuevas formulaciones del Principio de Saint-Venant. La primera es que dicho principio será siempre verdadero con tal que lo sea para los casos en que tanto las fuerzas de volumen como las resultantes de las cargas aplicadas en ambas bases sean nulas. Suponiendo que las cargas aplicadas en ambas bases son iguales y opuestas, y suponiendo en virtud de la formulación que precede que tanto las fuerzas de volumen como las resultantes son nulas, la segunda formulación dice que el principio de Saint-Venant es verdadero sólo y cuando la derivada segunda del tensor de esfuerzos respecto de x_3 dos veces puede hacerse uniformemente tan pequeña como se quiera para todo punto del cilindro

(*) Esta propagación no uniforme de las cargas explica por qué en los experimentos que realizó Volterra, la flecha verdadera, medida, de 0,35 mm. resultó inferior a la flecha de 0,53 mm., calculada, suponiendo una propagación uniforme de las presiones. Esta discrepancia se confirma también mirando las fotografías de las figuras 8 y 9, en las que la parte central del cilindro carece de curvatura apreciable. Véase la magnífica Memoria (1907) citada en la Bibliografía al final.

suficientemente alejado de las bases; es decir el principio de Saint-Venant es equivalente a suponer que para cualesquiera cargas prefijadas en las bases se tiene en los puntos de la sección central del cilindro que

$$\left|\frac{\partial^2 \tau_{11}}{\partial x_3^2}\right| + \left|\frac{\partial^2 \tau_{22}}{\partial x_3^2}\right| + \left|\frac{\partial^2 \tau_{33}}{\partial x_3^2}\right| + \left|\frac{\partial^2 \tau_{12}}{\partial x_3^2}\right| + \left|\frac{\partial^2 \tau_{23}}{\partial x_3^2}\right| + \left|\frac{\partial^2 \tau_{31}}{\partial x_3^2}\right| \to 0,$$

cuando la longitud del cilindro tiende hacia infinito.

Como comentario desde el punto de vista de las relaciones entre la Física y la Matemática observemos únicamente que llama la atención la sencillez del principio Saint-Vernant, considerado como principio de Elasticidad aplicada, comparada con las dificultades que ofrece su justificación matemática.

4. Los espacios de distribuciones ofrecen un amplio campo de aplicación al operador de la Elasticidad. Un ejemplo elemental que ya hemos indicado lo da un par aplicado en un punto de una barra apoyada o empotrada en sus extremos. Vamos a continuación a dar un ejemplo de estado elástico del mismo cilindro B que nos ocupa y en el cual intervengan fuerzas de volumen con soporte plano, es decir fuerzas que llamamos de volumen, porque son exteriores y están aplicadas a puntos interiores del cilindro, pero que únicamente actúan sobre puntos situados en un mismo plano. Hemos elegido un ejemplo que parece particularmente simple, y desde luego sería fácil complicarlo más haciendo intervenir otros momentos de volumen con soporte plano, mediante la introducción de distorsiones de Volterra o de soldaduras y consiguiendo incluso que los desplazamientos fueran únicos y continuos. Es un ejemplo de Elasticidad bidimensional que se refiere al mismo cilindro B, y cuyo equilibrio elástico ha sido comprobado mediante las Ecuaciones de Navier escritas en coordenadas polares (r, ω), en cuyo caso toman la forma:

$$\left\{\begin{aligned} & 2(1-\sigma)\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_\omega}{\partial r\,\partial\omega} + \frac{1-2\sigma}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial\omega^2} + \frac{2-2\sigma}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \\ & -\frac{3-4\sigma}{r^2}\frac{\partial u_\omega}{\partial\omega} - \frac{2-2\sigma}{r^2}u_r + \frac{2\sigma}{\lambda}F_r = 0 \\ & (1-2\sigma)\frac{\partial^2 u_\omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\,\partial\omega} + \frac{2-2\sigma}{r^2}\frac{\partial^2 u_\omega}{\partial\omega^2} + \frac{3-4\sigma}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\omega} + \\ & + \frac{1-2\sigma}{r}\frac{\partial u_\omega}{\partial r} - \frac{1-2\sigma}{r^2}u_\omega + \frac{\sigma}{\lambda}F_\omega = 0, \end{aligned}\right.$$

donde σ, λ, μ son el módulo de Poisson y las constantes de Lamé, donde $F_r(r, \omega)$, $F_\omega(r, \omega)$ son las componentes de las fuerzas de volumen y siendo las incógnitas $u_r(r, \omega)$, $u_\omega(r, \omega)$ las componentes de los desplazamientos. Las fuerzas de superficie o esfuerzos en las caras laterales del cilindro, T_{rr}, $T_{r\omega}$, vienen dadas por

$$T_{rr}(r, \omega) = \frac{\lambda(1-\sigma)}{\sigma} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} \left(\frac{\partial u_\omega}{\partial \omega} + u_r \right)$$

$$T_{r\omega}(r, \omega) = \frac{\mu}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \omega} + r \frac{\partial u_\omega}{\partial r} - u_\omega \right).$$

Pues bien, mediante las fórmulas que preceden (y cuya lectura hemos omitido) es inmediato comprobar la exactitud del siguiente estado elástico o deformado del cilindro B. Supongamos que las fuerzas de volumen que actúan sobre el cilindro sean

$$\left\{ \begin{array}{l} F_r(r, \omega) = \dfrac{\mu \pi \varepsilon}{\eta(\pi - \eta)} \dfrac{p(r)}{r^2} \left(\delta'(\omega - \pi + \eta) - \delta'(\omega - \pi - \eta) \right) \\[2ex] F_\omega(r, \omega) = \dfrac{\mu \pi \varepsilon}{\eta(\pi - \eta)} \dfrac{q(r)}{r^2} \left(\delta(\omega - \pi + \eta) - \delta(\omega - \pi - \eta) \right) \\[2ex] 0 \leqq \omega < 2\pi, \rho \leqq r \leqq 1, \end{array} \right.$$

siendo η una constante cualquiera con tal que $0 < \eta < \pi$, siendo ε pequeño, y siendo

$$p(r) = \left[\frac{(1-2\sigma)\rho^2 \log \rho^2}{4(1-\sigma)(1-\rho^2} - \frac{1}{2} \right] r + \frac{\rho^2 \log \rho^2}{4(1-\sigma)(1-\rho^2)} \cdot \frac{1}{r} + \frac{1-2\sigma}{2-2\sigma} r \log r,$$

$$q(r) = \left[\frac{2\rho^2 \log \rho^2}{1-\rho^2} + \frac{1}{1-\sigma} \right] r + \frac{\rho^2 \log \rho^2}{(1-\sigma)(1-\rho^2)} \cdot \frac{1}{r} + 4 r \log r.$$

O sea, que las fuerzas de volumen son nulas en todos los puntos del cilindro, excepto aquellos en los que $\omega = \pi - \eta$ o bien $\omega = \pi + \eta$; en los puntos de estos dos semiplanos están aplicadas las fuerzas de volumen F_r, que son momentos concentrados (es decir, por unidad de superficie en los semiplanos $\omega = \pi \pm \eta$, y F_ω, que son fuerzas concentradas de una manera análoga.

Supongamos también que en la superficie lateral del cilindro estén aplicadas las siguientes fuerzas de superficie:

Para $r = 1,\ 0 \leqq \omega < 2\pi$,

$$\begin{cases} T_{rr}(1,\omega) = 0 \\ T_{r\omega}(1,\omega) = \dfrac{\mu\pi\varepsilon}{\eta(\pi-\eta)}\left(\dfrac{1}{2\rho} - \dfrac{\rho\log\rho}{1-\rho^2}\right)[\delta(\omega-\pi+\eta) - \delta(\omega-\pi-\eta)]; \end{cases}$$

Para $r = \rho,\ o \leqq \omega < 2\pi$,

$$\begin{cases} T_{rr}(\rho,\omega) = 0 \\ T_{r\omega}(\rho,\omega) = \dfrac{\mu\pi\varepsilon}{\eta(\pi-\eta)}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\log\rho}{1-\rho^2}\right)[\delta(\omega-\pi+\eta) - \delta(\omega-\pi-\eta)]. \end{cases}$$

O sea, que se supone que la superficie lateral del cilindro está libre de fuerzas exteriores, excepto cuatro fuerzas concentradas (por unidad lineal de generatriz en las cuatro generatrices $r = 1$ o $r = \rho$, $\omega = \pi \pm \eta$), que se aplican tangencialmente al cilindro en estas cuatro generatrices con $\omega = \pi \pm \eta$ y que tienden a comprimir el sector de cilindro tal que $\pi - \eta \leqq \omega \leqq \pi + \eta$, suponiendo $\varepsilon > 0$.

Finalmente, se supone que en las bases del cilindro están aplicadas las fuerzas unívocamente determinadas que mantienen al cilindro en estado de deformación plana.

Entonces se tiene que el estado deformado del cilindro viene dado en términos de los desplazamientos por la solución única

$$\begin{cases} u_r(r,\omega) = g'(\omega) \,.\, p(r) \\ u_\omega(r,\omega) = g(\omega) \,.\, r, \end{cases}$$

donde $p(r)$ es la función analítica anteriormente mencionada al definir F_r y siendo $g(\omega)$ la función continua:

$$g(\omega) = \frac{\varepsilon\,\omega}{\pi-\eta} - \frac{\pi\varepsilon}{\eta(\pi-\eta)}[(\omega-\pi+\eta)\,.\,H(\omega-\pi+\eta) -$$
$$- (\omega-\pi-\eta)\,.\,H(\omega-\pi\eta)],\ 0 \leqq \omega < 2\pi,$$

donde H es la función de Heaviside y siendo $g'(\omega)$ la derivada en el sentido de distribuciones de $g(\omega)$, es decir, $g'(\omega)$ es una función escalonada que toma únicamente dos valores. Resulta, pues, que en el estado deformado lo que antes eran radios que cortaban ortogonalmente al eje del cilindro, siguen siendo radios que cortan ortogonalmente al eje del cilindro; y toda circunferencia situada en un plano perpendicular al eje y de centro en el mismo eje se ha transformado en dos arcos en el mismo plano y con el mismo centro, uno un poquitín más largo y el otro un poquitín más corto, de modo que sus dos deformaciones longitudinales se compensan.

El ejemplo que acabamos de describir, a pesar de su relativa sencillez, dista mucho de ser intuitivamente claro, ni siquiera en su aspecto cualitativo; y no parece probable que con seguridad pudiera haberse conjeturado esta deformación ni siquiera cualitativamente.

5. Para terminar damos el enunciado de un teorema de existencia y unicidad relativo a las mismas ecuaciones de Navier de que estamos tratando y para un sólido elástico que ocupa un dominio Ω del espacio euclídeo ordinario de tres dimensiones.

Como hemos dicho al empezar esta última sección, las ecuaciones de Navier se escriben abreviadamente

$$G(D)[u] \equiv \frac{-1}{2}(\mu\Delta + (\lambda + \mu)\operatorname{grad}\operatorname{div})[u] = F(x),$$

siendo G el operador de la elasticidad, que puede descomponerse en la forma

$$G(D) = A^*(-D) \cdot A(D),$$

siendo A tal que $|A[u]|^2$ representa la energía elástica por unidad de volumen.

No hay inconveniente en que Ω no sea acotado, pero sí se supone que las fuerzas de volumen $F(x)$ actúan exclusivamente a distancia finita, de modo que el soporte de F sea compacto. También se supone que las fuerzas $F(x)$ satisfacen las condiciones que sean necesarias para que el sólido esté en equilibrio estático. En cuanto a la clase de fuerzas de volumen permisibles supondremos que $F(x)$ es una función vectorial de cuadrado sumable:

$$F \in L_2(\Omega).$$

Respecto del espacio de funciones permisibles como soluciones, o sea, para los desplazamientos $u(x)$, se requiere que sean de cuadrado sumable localmente:

$$u \in L_2(K), \text{ para todo compacto, } K \subset \Omega;$$

y además, lo que es una condición más fuerte, que la energía elástica total del sólido sea finita:

$$A[u] \in L_2(\Omega).$$

Puesto que se supone el sistema de Navier completo, o sea, no homogéneo —ya que se permiten fuerzas de volumen, aunque no en una región no acotada—, no implica apenas restricción alguna de generalidad suponer condiciones de contorno homogéneas. Más concretamente, hacemos respecto del contorno las hipótesis siguientes:

Se supone que la frontera de Ω se descompone en dos conjuntos disjuntos D y N tales que

$$\mathrm{D} \cup \mathrm{N} = \dot{\Omega}, \ \mathrm{D} \cap \mathrm{N} = \emptyset,$$

sin que se excluya que D o N sea vacío; en D se supone que se han de satisfacer las condiciones de Dirichlet, o sea, que los desplazamientos han de ser nulos o, de una manera más general y precisa, que $u(x)$ ha de pertenecer al espacio $H^1_D(\Omega)$, de que se ha hablado en la primera sección del primer capítulo; en N, que se supone que es de clase uno, o que tiene plano tangente en todos sus puntos, se suponen las condiciones de Neumann, lo que equivale a decir que en N la superficie ha de estar libre de fuerzas superficiales.

Planteadas en estos términos las ecuaciones de Navier, puede afirmarse que existe una solución y sólo una, salvo quizás un movimiento rígido del sólido, que pertenece a $H^1_D(\Omega)$ y que satisface en N las condiciones de Neumann. Esta solución depende continuamente de los datos en el sentido de que si $F(x) \to 0$ en $L_2(\Omega)$, entonces las soluciones correspondientes $u(x)$ tienden también a cero en $L_2(\Omega)$ (o equivalentemente tienden hacia un movimiento rígido).

El teorema de existencia, unicidad y dependencia continua de los datos que acabamos de enunciar, responde sin duda a la idea que los físicos e ingenieros tienen de las ecuaciones de la elasticidad, por lo menos si se prescinde de algunos detalles más precisos, como la pertenencia a $H^1_D(\Omega)$, caso de que Ω sea algo irregular. Desgraciadamente, parece que este teorema deja abiertos muchos problemas interesantes, en particular los relativos al principio de Saint-Venant.

He dicho.

Nota bibliográfica

Para la primera parte véanse las publicaciones que siguen, las cuales ofrecen además copiosa bibliografía: el artículo de A. Dou da una lista de escritos sobre Julio Rey Pastor y las otras tres publicaciones ofrecen bibliografías de los escritos de Rey Pastor.

Beppo Levi: *Publicaciones del Instituto de Matemática de la Facultad de Ciencias Matemáticas, etc., de la Universidad Nacional del Litoral.* Rosario (Argentina), vols. V y VI (1945-1946), publicados bajo la dirección del profesor Beppo Levi, en homenaje a Rey Pastor con ocasión de sus bodas de plata de su magisterio en la Argentina. Escriben sobre Rey Pastor: Cortés Plá, Esteban Terradas y Fausto I. Toranzos. Escriben sobre temas científicos, en homenaje a Rey Pastor: Babini, Balanzat, Barral, Birkhoff, Blaschke, Capelli, Corominas, Cotlar, De Cicco, Dufresnoy, Ferrari, Fréchet, Frenkel, Frucht, Fubini, García, García de Zúñiga, Gaspar, González, González Domínguez, González Quijano, Hadamard, Julia, Kasner, Kervor, Korn, Levi, Lifschitz, Losada, Massera, Mieli, Montel, Mossin, Palacios, Pascali, Pi Calleja, Plá, Polya, Rafael, Raimondi, Reppetto, Ríos, Rosenthal, San Juan, Santaló, Sanvisens, Sispanov, Terracini, Terradas, Toranzos, Uspensky, Valeiras, Vallarta, Vigil y Würschmidt.

J. Babini, A. González Domínguez y L. A. Santaló: *Julio Rey Pastor.* «Revista de la Unión Matemática Argentina». Buenos Aires, 21 (1962), 3-22. Todo el número 1 en que figura este excelente artículo constituye el homenaje de la U. M. A. a su fundador J. Rey Pastor.

A. Dou, S. J.: *Julio Rey Pastor.* «Razón y Fe». Madrid, 167 (1963), 133-146; 273-282.

R. San Juan: *Julio Rey Pastor, su vida y su obra vista por un discípulo.* «Revista Matemática Hispanoamericana», 22 (1962), 60-93. Todo este número en el que figura el documentado artículo de San Juan constituye el homenaje de la Real Sociedad Matemática Española a su fundador J. Rey Pastor.

Para la segunda parte daremos únicamente referencias de algunas bibliografías bastante completas y fácilmente asequibles y de aquellas publicaciones a las que se alude en el discurso y que no sean obvias.

§ 1. *Espacios funcionales.*

Véanse las obras generales citadas en el texto y en particular

N. DUNFORD-J. SCHWARTZ: *Linear Operators*, vol. 1: *General Theory*. New York, Interscience, 1958. Esta obra contiene además una copiosa bibliografía.

Otras referencias

A. P. CALDERÓN: *Integrales singulares y sus aplicaciones a ecuaciones diferenciales hiperbólicas*. Universidad de Buenos Aires, Departamento de Matemáticas, 1960.

E. GAGLIARDO: *Propieta di alcune classi di funzioni in più variabili.* «Ric. di Mat.», 7 (1958), 102-137.

§ 2. *Tipos de operadores diferenciales.*

Textos de carácter general con abundante bibliografía:

R. COURANT and D. HILBERT: *Methods of Mathematical Physics*, vol. II, Interscience, New York, 1962.

P. C. ROSENBLOOM: *Linear Partial Differential Equations*, John Wiley, New York, 1958.

Otras referencias

PH. A. DIONNE: *Sur les problèmes de Cauchy hyperboliques bien posés*. «Journal d'Analyse Mathématique». Jerusalén, 1962-63.

L. GÅRDING: *Cauchy's Problem for Hyperbolic Equations*, Universidad de Chicago, 1958.

— — *Problème de Cauchy pour les systèmes quasi-linéaires d'ordre un strictament hyperboliques*, presentado al Coloquio sobre Ec. en deriv. parciales. París, 1962.

L. HÖRMANDER: *Differential Equations without Solutions*, cap. VIII del curso dado en Stanford University, California, 1960. Véase también «Acta Mathem.», 1955.

P. LAX: Apuntes ciclostilados del curso sobre Ecuaciones en derivadas parciales. New York University, 1960.

CH. B. MORREY: *Lectures Notes on the Theory of Elliptic Partial Differential Equations*, Universidad de Chicago, 1960.

F. TRÈVES: *Distributions and General Theory of Differential Operators*, University of California, 1960.

— — *The equation* $(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + (x^2 + y^2)\, \partial/\partial t)^2 u + \partial^2 u/\partial t^2 = f$, *with real coefficients, is without solutions*. «Bulletin of the Amer. Math. Soc.», 68 (1962), 332.

M. I. VISHIK: *Sur les problèmes aux limites pour des équations quasi-linéaires elliptiques et paraboliques d'ordre supérieur*, presentado al Coloquio sobre Ec. en deriv. parciales. París, 1962.

§ 3. *Ecuaciones de la Elasticidad.*

A. DOU, S. J.: *El teorema de unicidad en Elasticidad plana*. Madrid, «Rev. Mat. H.-A.», 22 (1962), 5-30.

— — *El principio de Saint-Venant en las vigas*. Madrid, «Ingeniería Aeronáutica», 13 (1951), 32-41.

J. GOBERT: *Opérateurs matriciels de dérivation elliptiques et problèmes aux limites*. Liège, «Mémoires de la Societé R. des Sciences», VI (1961), fasc. 2.

V. VOLTERRA: *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes*. París, «Annales de l'École Normale Superieur», 24 (1907), 401-517.

DISCURSO DE CONTESTACION

POR EL PRESIDENTE DE LA ACADEMIA

EXCMO. SR. D. ALFONSO PEÑA BOEUF

«Señores Académicos; señoras y señores:

Acabamos de oir el discurso pronunciado por el padre Don Alberto Dou, Académico que ha sido propuesto para su ingreso en esta Corporación por virtud de los exaltados méritos que bien pueden apreciarse.

Por la historia largamente conseguida por nuestro nuevo Académico se tiene una idea de la labor desarrollada, a pesar de su relativa juventud, en bien aprovechado tiempo, pues de un modo muy brillante terminó la carrera de Ingeniero de Caminos, en la que se le concedió el premio extraordinario «Manuel Becerra», y de un modo casi simultáneo la licenciatura de Matemáticas en la Universidad de Barcelona, con otro premio extraordinario.

Y a estos méritos de su primera juventud siguiera, desde luego, los que se produjeron siendo enviado por el Seminario Matemático como becario en la Universidad de Hamburgo, después de asistir al notable curso de geometría diferencial del profesor Blaschke.

Siguieron a estos pronunciamientos los de obtener el doctorado en Madrid y el premio extraordinario en ese doctorado, después de haber desempeñado el cargo de ayudante de las prácticas en la Universidad de Barcelona.

Buena cuenta del aprovechamiento conseguido en esas actuaciones se desprende de los resultados obtenidos con los comunicados presentados en el Congreso Internacional de Matemáticas de Amsterdam y de las comunicaciones formuladas en las reuniones que se celebraron en la ciudad de Madison (Estados Unidos).

Muchos más acontecimientos podrían también añadirse a esta seleccionada relación de méritos, por los que puede apreciarse que la llegada de nuestro querido compañero a la Real Academia de Ciencias es mérito que ha sido logrado después de brillante actuación.

El discurso que presenta a este efecto es una prueba del profundo conocimiento que tiene de las ciencias matemáticas en la totalidad de sus extensísimas aplicaciones, y más particularmente por haber dedicado su atención últimamente al estudio de la mecánica en la forma matemática, para la que tiene una amplia preparación, por virtud de la cual ha sido muy bien designado profesor de las enseñanzas de matemáticas en la Escuela de Ingenieros de Caminos.

En su discurso puede apreciarse que el tema elegido es de una inmensa extensión, pues hoy día la Física matemática es de tal complejidad que abarca, realmente, todos los órdenes científicos del conocimiento humano.

Ha sido preciso que dentro de ese amplio criterio se restrinja un poco el punto de enfoque, y en tal sentido fije sólo su atención en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales, y más concretamente las que se refieren a algunas aplicaciones de la teoría de la elasticidad.

Pero, aun así, ya se comprende, por la relación que ha hecho de las reseñas de «Matematical Reviews», que el conjunto de las materias modernamente publicadas por la revista son de tan inmensa extensión que casi puede decirse consumen una vida entera en la actuación de cualquier persona que a ello pueda dedicarse.

Realmente, la Física matemática, que hasta mediados del siglo pasado tenía una acción posiblemente abarcable, desde finales de ese siglo, y principalmente en el presente, ha sido tal el progreso arrollador a que ha llegado que hoy día sería preciso una biblioteca entera para contener sus casi infinitas aplicaciones.

Cuando en los primeros años del siglo se tuvo el acierto por la Universidad de Madrid de nombrar catedrático de Física matemática a don José Echegaray, que anteriormente había ocupado varias cátedras en la Escuela de Ingenieros de Caminos, viendo ya el ilustre profesor que se tenían índices de enseñanzas empezadas a exponer de tan complejas y extensas cuestiones comprendió desde el primer momento que era imposible contener en un curso la enseñanza global de esas diversas materias, razón por la que ya en el año 1904 indicó el propósito de formular en años sucesivos una biblioteca con los distintos puntos de vista cada año, y que dieron lugar durante dieciséis años a unas publicaciones, hechas por la Academia de Ciencias, que forman un interesantísimo repertorio de conocimientos sobre Física matemática, tan prodigiosamente redactado en forma de divulgación que incluso constituyen un modelo de amenísima literatura científica.

Con tan autorizado criterio ampliado y reseñado en forma magistral durante esos tres lustros de tiempo hizo don José Echegaray un magnífico conjunto de volúmenes matemáticos, cuyo recuerdo forma una grata evocación en los que tuvimos la suerte algunos años de ser sus discípulos, ya tristemente lejanos.

Y allí decía don José que eran susceptibles de ver vulgarizadas todas las enseñanzas científicas por elevadas que fueran, e incluso comentando algunas publicaciones de historia de las matemáticas hechas por una mujer decía que también a ellas podía hablarse hasta de lo que llamaba entonces «bello y elegante teorema de Sturm», que por su exposición era lo más árido y desabrido que se presentaba en la Ciencia, pero siempre que fuera hecho con cierto gracejo, ya que es lo que posiblemente debía tener el profesor conferenciante.

Precisamente por el conocimiento de la complejidad de asuntos que entonces, y con más motivo posteriormente, tuvo la Física matemática, se consideraba como elemento indispensable para su comienzo el estudio de la teoría de la elasticidad, por cuanto que las demás teorías que luego fueron desarrolladas tenían su base, y principalmente punto de desarrollo, en la manera de enfoque que se hacía para el planteamiento de las teorías elásticas. Esa fue la causa por la que dentro de esa enciclopedia citada dedicó don José nada menos que tres cursos al estudio de la elasticidad, presentando los mismos asuntos desde tres puntos de vista que caracterizaba en los maestros Cauchy, Lamé y Poincaré, que trataban la materia de modo diverso, con materia de exposición en forma diferente, aunque, como es natural, concordante en la resolución final. Había considerado Echegaray que el estudio de la elasticidad era básico en el conjunto de la Física matemática no sólo por las materias que podían ser concernientes a su doctrina, sí que también porque formaban escuela en la exposición general de planteamiento de los problemas matemáticos dentro de la Física. Y ésa fue la causa por la que con tanta extensión dedicó a la elasticidad la primera parte del conjunto enciclopédico, al que siguieron después las materias desarrolladas durante un período sucesivo de más de quince años.

* * *

El tema del discurso del profesor Dou a que estamos haciendo mención ya se indica en su contenido, que se refiere a las relaciones entre las ecuaciones en derivadas parciales y la física, siendo, desde luego, como hemos dicho, un tema de enorme dimensión, por cuanto que dentro de él se encaja un inmenso orden de conocimientos que se refieren a la situación actual de la Física, con sus inmensas posibilidades.

Aun restringiendo en la forma que acabamos de decir, el tema del discurso tiene tan grandes aplicaciones que no sería posible poder hacer ni siquiera un bosquejo de la totalidad de su conocimiento en el marco estrecho que corresponde a un discurso de presentación en la Academia. Y esto es motivo por el que debemos apreciar la extensa cultura que tiene el nuevo Académico por haberse ocupado de modo tan explícito en numerosas publicaciones.

En la primera parte del discurso habéis oído la narracion que se ha hecho de los espacios funcionales, en los que se atribuye la formulación de los problemas que plantea una ecuación diferencial, aún limitándose a las que son más simples y de sentido físico más interesantes.

No ha olvidado el autor a esos efectos de descripción de los operadores diferenciales, a los que dedica una atención preferente, los de tipo hiperbólico, de tan fecundas aplicaciones, y por otro capítulo se hace la descripción y exposición de las ecuaciones de elasticidad, por decir que ofrecen un excelente modelo de los sistemas que califica el autor de fuertemente elípticos, que presentan notables ventajas para la resolución.

Precisamente por la especial actuación de su cátedra en la Escuela de Caminos, el profesor padre Dou dedica el mayor entusiasmo en la exposición y desarrollo de las típicas ecuaciones de elasticidad, a las que da todo el carácter muy moderno de su forma expositiva y el amplio concepto que pueden ofrecer las aplicaciones para otras ramas de la Ciencia.

Como consecuencia y grado de simplificación, se hace muy especial mención en el discurso del nuevo Académico a consideraciones relativas a la elasticidad plana y los principios formulados por Saint-Venant para viga y cilindros, en el que, como aplicación más concreta, se refiere al cilindro hueco e incluso adaptable también al macizo, que tiene tantos caracteres de aplicación en la industria moderna y que ha sido problema que ha tratado también posteriormente, y en época casi reciente, el matemático italiano Volterra, con grandes desarrollos de su forma explícita de resolución completa en sus muchas aplicaciones industriales.

El profesor padre Dou ha tratado estos problemas con la extensión que merecen dentro de un cuadro de aplicaciones que es muy interesante siempre en el estudio de la elasticidad, a la que ha dado un carácter de gran generalidad.

* * *

Muy de tener en cuenta en el estudio que hace aplicación a las ciencias que con ella tiene relación, es saber el campo de extensión en el que pueden aplicarse, pues es la base sobre la que han de sentarse los cálculos que pueden fijar las dimensiones en las condiciones de resistencia deseable.

A tal efecto, al manejar las ecuaciones de elasticidad debe saberse de antemano el valor que tienen los parámetros que definen de un modo concreto el sentido físico de ellas. Así, en las frecuentes aplicaciones de las teorías elásticas a la ingeniería aparecen casi exclusivamente en las ecuaciones los parámetros que relacionan las cargas internas con las deformaciones y puede decirse que se admiten como simplificación perfectamente tolerable el de asignar un valor constante a la relación entre ellas.

Y de ese modo se consideran los que ordinariamente se llaman coeficientes de elasticidad, que, en realidad, son muy distintos en diferentes casos. Se comprende, por tanto, que cuando se hace intervenir la experimentación, al tratar de hacer comparaciones, se encuentren cifras tan separadas que sólo dan una idea del orden de magnitud, muy en contradicción aparente con el rigor científico que supone el planteo lógico del problema.

Hablar por ejemplo del coeficiente de elasticidad, considerándole como una constante física en las ecuaciones, es una ambigüedad que sólo tiene sentido con muchas restricciones.

Y es que en muchos casos no puede considerarse su aplicación como un coeficiente, ya que, en realidad, por el contrario, es una función física que encierra varias variables y que sólo por grosera simplificación puede tener un valor probable.

Nadie puede dudar que la materia tiene un estado cambiable con varias actuaciones que sobre ella se hagan y que el comportamiento, desde el punto de vista físico, es dependiente de aquellas circunstancias. Es, pues, su estado físico y más bien elástico una función de esas variables. El llamado coeficiente de elasticidad debe tener el carácter de una función y no un coeficiente, que encierra implícitamente a veces multitud de variaciones. Así, en el campo de la elasticidad surge como más general la plasticidad, dentro de la cual el estado elástico es, en realidad, un caso singular y accidental. No hay duda ninguna que un acero bien fabricado es un ejemplo de una muy admisible constancia en la elasticidad aplicable para muchos efectos de resistencia y, sin embargo, basta cambiar las condiciones de una sola variable, la temperatura, para que pase a deformación plástica su anterior condición elástica. Y no sólo por variación de esa acción térmica cambia la elasticidad ya que tan interesantes, aunque no sean tan enérgicos, hay los efectos de otras variables de posible actuación, como son en otros casos la higrometría, el estado de efectos anteriores de carga e incluso la reiteración. Y también las dimensiones de los cuerpos hacen variar el comportamiento elástico, pues es bien singular el hecho de que en la naturaleza es uno de los más típicos ejemplos de ausencia elástica las masas de terrenos como las arenas y arcillas desprovistas de aparente cohesión y, sin embargo, se comprueba en los terremotos y en los seísmos que las grandes masas de esos terrenos se comportan como suficientemente elásticos, y así se propagan las vibraciones transversales como masas elásticas.

Es, pues, un conjunto o función de varias variables lo que definen esos antiguos coeficientes casi perfectos.

La plasticidad es también de mayor generalidad que la elasticidad clásica y todavía no se precisan los caracteres de una teoría establecida desde un punto de vista perfectamente establecido, aunque se señalan los principios energéticos como los de posible desarrollo a esos efectos. Ahora bien, es aún un campo en el que queda mucho terreno por recorrer.

* * *

Agradecemos al padre Dou su valiosa cooperación en este discurso de ingreso y felicitamos también a la Real Academia por la presencia del nuevo compañero.