

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DISCURSO INAUGURAL

DEL AÑO ACADÉMICO 1975-1976

LEIDO EN LA SESION CELEBRADA EL DIA 12 DE NOVIEMBRE DE 1975

POR EL ACADÉMICO NUMERARIO

EXCMO. SR. D. DARIO MARAVALL CASESNOVES



M A D R I D
DOMICILIO DE LA ACADEMIA
VALVERDE, 22.—TELEFONO 221-25-29
1 9 7 5

ISBN: 84-600-6775-0

Depósito Legal: M 35.578-1975

TALLERES GRÁFICOS VDA. DE C. BERMEJO.— J. GARCIA MORATO, 122.— TEL. 233-06-19. — MADRID

**LAS ESTRUCTURAS SUGERIDAS POR LA MECANICA
CUANTICA Y SU INTERPRETACION FISICA**

LAS ESTRUCTURAS SUGERIDAS POR LA MECÁNICA CUÁNTICA Y SU INTERPRETACIÓN FÍSICA

La Real Academia de Ciencias me ha hecho el honor de encomendarme el discurso de apertura de este curso. He pensado que un tema que podría ser apropiado es el que le da título, porque durante el curso anterior la Academia organizó un ciclo de conferencias conmemorativo del primer cincuentenario de la mecánica cuántica, en el que tomé parte activa pronunciando las que tuvieron lugar en las sesiones de apertura (15 de enero) y de clausura (7 de mayo). La segunda de estas conferencias estaba dedicada a algunos aspectos matemáticos y filosóficos de la mecánica cuántica, y ya en ella anunciaba que en otra posterior completaría las investigaciones entonces iniciadas. Puede considerarse la conferencia de hoy como una prolongación de aquella, a la que a lo largo de la actual designaremos con la abreviatura A. M. F.

En A. M. F. hacíamos un análisis crítico de las relaciones de incertidumbre de Heisenberg (R. I. H.) y de los experimentos imaginarios diseñados por este ilustre físico para establecer las bases del indeterminismo de la mecánica cuántica. También analizábamos las consecuencias físicas y filosóficas que se desprenden de los experimentos de difracción de partículas por una y dos rendijas e indicábamos cómo, a nuestro juicio, existe un nuevo tipo de dependencia y convergencia estocásticas en la mecánica cuántica distintos de los de las probabilidades clásicas, y cómo fracasa el teorema de Bayes de las probabilidades de las causas o de las hipótesis en la nueva física. Introducíamos el concepto de raíz cuadrada compleja (r. c. c.) de una función de frecuencias (f. f.) o de un vector de probabilidad (v. p.), mostrando así la irreducibilidad de la ecuación de Schrödinger (E. S.) a cualquier tipo

de movimiento browniano, porque en la primera lo que evoluciona en el tiempo es una r. c. c. de una f. f., mientras que en los fenómenos clásicos de propagación del calor, de la difusión o del movimiento browniano lo que evoluciona en el tiempo es una f. f.

Prosiguiendo en el análisis del aparato matemático de la mecánica cuántica y en su interpretación física, en esta conferencia nos hemos visto conducidos a plantear y resolver probabilidades en cadena en los espacios euclídeos y de Hilbert, reales o complejos, a distinguir entre indeterminismo de primera y de segunda especie, a introducir vectores de estado (v. e.) o de onda (v. o.) aleatorios, la operación de superposición de vectores en un espacio de Banach, la asociación de medidas definidas sobre una σ -álgebra a un espacio vectorial dando nacimiento a espacios de Hilbert contenidos unos en otros y que dan origen a estadísticas no bayesianas. Analizamos las relaciones de implicación entre la E. S., las R. I. H. y las interferencias de probabilidades (I. P.) Introducimos el concepto de cuadrado interno de una matriz, de casihemiticidad y de r. c. c. de vectores y funciones de densidad, que aplicamos a la descripción de fenómenos de interferencia de poblaciones (I. Pb.), apropiado a la mecánica cuántica relativista.

Concretando a la mecánica cuántica, vamos a aplicar estos resultados matemáticos abstractos a hechos fundamentales de la misma, como son : a) la reducción o contracción del paquete de ondas ; b) las tres célebres paradojas de Einstein, Podolsky y Rosen (E. P. R.), del «gato» de Schrödinger y del «amigo» de Wigner.

La mecánica cuántica, tras una larga crisis de la física, que duró aproximadamente un cuarto de siglo, ha logrado asentarse muy sólidamente, y hoy parece que su reinado va a durar muchos años, tal es la perfección de sus formalismos matemáticos, la coherencia lógica interna de que la ha dotado la interpretación física y filosófica «ortodoxa» de la escuela de Copenhague (E. C.), y sobre todo los éxitos prácticos conseguidos no sólo en los laboratorios, sino también en la industria. En A. M. F. comparábamos la revolución científica que trajo la mecánica cuántica, con la que tuvo lugar en los siglos XVI y XVII y dio origen a la ciencia moderna, acabando con las físicas aristotélica y medieval. Hoy la compararemos con la crisis que sacudió a la física hacia la segunda mitad del siglo XIX, menos conocida, o al menos de menor

impacto sobre el gran público, pero no por ello de menor importancia.

Ya de por sí la palabra crisis científica ha dado lugar a muchas polémicas. En lenguaje vulgar la palabra crisis tiene carácter peyorativo, se refiere a algo malo; así, por ejemplo, cuando se habla de crisis económica o de crisis de los valores morales. Sin embargo, una crisis científica, aun cuando también es deseo general el superarla o salir de ella, no tiene consecuencias tan desastrosas o regresivas. Algunos filósofos se niegan a hablar de crisis científicas, y así Lenin, en la primera década de nuestro siglo, habla de fases de transición en vez de crisis, y más recientemente otro importante filósofo marxista, Althusser, en su *Cours de philosophie pour scientifiques*, publicado en 1967, escribe: «En sentido estricto no hay crisis científica, sino recomposiciones internas de una o varias ciencias, que plantean problemas a los hombres de ciencia.»

A pesar de los sorprendentes éxitos en la práctica de la mecánica cuántica, no todo está resuelto por ella, aun dejando de lado ciertas partes de la física, como la de las partículas elementales que requieren algo más que mecánica cuántica, todavía quedan muchos enigmas por aclarar, muchos «ignorabimus» y, lo que es mucho más grave, contradicciones internas, que seguirán haciendo correr ríos de tinta. La existencia de contradicciones internas parece que es algo de lo que no puede librarse ninguna doctrina científica o sistema filosófico, si se hace excepción de la matemática pura, y aun eso habría que discutirlo. En la física clásica, un edificio teóricamente tan lógico y perfecto, aun antes de entrar en crisis había junto a enigmas inexplicados, tales como naturaleza y materia de la fuerza, origen del movimiento (*), el origen de las inmensas cantidades de energía liberadas por las estrellas, etc., contradicciones internas tales como la existencia del electrón —¿cómo es posible que puedan existir cargas eléctricas del mismo signo tan concentradas, sin que exploten como consecuencia de las fuerzas repulsivas coulombianas?—. la existencia del éter como un fluido imponderable, sumamente sutil y rígido, y además inestable, en definitiva tan lleno de propiedades contradictorias entre sí.

(*) Señalado por Du Bois Reymond en 1872 en su célebre discurso del «ignorabimus».

La existencia de estas contradicciones internas ocultas en la física o en la filosofía, parecen ser uno de los motores de su constante progreso y evolución, y al ponerse de manifiesto, al salir a la luz, producen la crisis científica, fase de transición, recomposición interna o como quiera llamarse, que de vez en cuando aparecen en la historia de la ciencia. Habría que distinguir en la ciencia (*) entre las fuerzas productoras del conocimiento (**) científico, que no permanecen estáticas, van desarrollándose en el tiempo, son esencialmente dinámicas y las relaciones ideológicas que en la mente humana regulan el proceso de adquisición de nuevos conocimientos científicos, de modo que llega un momento en que el desarrollo de las fuerzas productoras del conocimiento desborda o rompe el marco que se les ha quedado estrecho de las relaciones productivas del conocimiento, y cuando esto sucede tiene lugar la crisis científica, cuyo resultado es crear unas nuevas relaciones productivas y ponerlas en línea con las fuerzas productoras. Esto podría ser, a mi juicio, el bosquejo de una interpretación dialéctica de la historia de la ciencia, de un transporte del materialismo histórico a la historia de la ciencia, considerada ella misma como una ciencia.

Los físicos cuánticos tienen a su disposición una enorme cantidad de conocimientos que no tenían los físicos clásicos, pero no solamente de conocimientos, sino también de nuevos problemas planteados; de aquí que su filosofía sea mucho más rica tanto en cuestiones de fondo como de detalle que lo era la de la filosofía clásica. Pero hay cuestiones que ya preocupaban al físico clásico y que siguen todavía preocupando al físico cuántico, porque son, pudiéramos decir, que eternas, entre ellas las relativas al significado que hay que atribuir a palabras tales como existencia, realidad, comprender, etc.; por ejemplo, el libro de Jordan, *Der Naturwissenschaftler vor der religiösen Frage*, publicado en 1968, contiene un capítulo que lleva por título ¿Existen los átomos en realidad?, que cierra unos problemas, pero abre otros relativos a ¿qué es existir?; arranca de la polémica que hacia 1900 enfrentó a importantes científicos sobre la existencia real de los átomos, y concluye diciendo: «... tenemos hoy día la posibilidad de demostrar que los átomos existen realmente». Pero fijémonos

(*) Algo parecido a lo que sucede en economía.

(**) Las que en otra ocasión he denominado fuerzas intelectomotrices.

en los electrones, unos son libres y otros intraatómicos ; los primeros tienen carga eléctrica, masa, spin, siempre los mismos ; unas veces siguen las leyes de la mecánica clásica (*), como lo prueban las fotografías de sus trayectorias en la cámara de Wilson ; otras las de la mecánica cuántica u ondulatoria, como prueban las fotografías de difracción electrónica por los cristales. Pero en cuanto a los electrones intraatómicos parece que nunca siguen las leyes de la mecánica clásica, que a éstos únicamente se les puede asignar niveles de energía, solamente son susceptibles de saltos cuánticos, pero carecen de trayectorias, no tiene sentido atribuirles velocidades y posiciones. Cabría preguntarse si es que realmente los electrones intraatómicos son iguales que los electrones libres o no lo son, qué sentido hay que dar a la palabra igualdad, si en el electrón intraatómico no existen muchas propiedades que tiene el electrón libre, se puede decir que son iguales, si en el momento en que un electrón libre es captado por un átomo ionizado, aquél pierde sus propiedades físicas o al menos varias de ellas, se puede decir que sigue siendo un electrón. La pregunta que se nos echa encima es si la igualdad entre electrones libres y electrones intraatómicos es una realidad o es solamente una hipótesis de trabajo. La intuición, facultad humana a nivel macroscópico, nos dice que si un individuo sale de un sitio, es porque antes de salir estaba en ese sitio, y así cuando el personaje bíblico Jonás sale vivo de dentro de la ballena, ello lleva implícito que se supone, o mejor dicho que se admite, que antes de salir estaba vivo en el interior de la ballena. Si los electrones salen del interior del átomo, al ionizarse éste se supone que es que antes de salir estaban como tales electrones dentro del átomo. Pero ya el físico cuántico no admite este razonamiento intuitivo basado en lo que sucede a nivel macroscópico, cuando considera el electrón que abandona un núcleo atómico en el fenómeno de la desintegración radiactiva, aquí ya no se admite que el electrón estaba en el interior del núcleo antes de su desintegración. Apparentemente parece lo anterior un problema filosófico, sin repercusión directa sobre la ciencia propiamente dicha, pero no es así : la aceptación de la existencia de electrones en el interior del núcleo atómico es ni más ni menos que la hipótesis abandonada por con-

(*) Modificada por la relatividad cuando la velocidad del electrón es lo suficientemente grande.

tradicción de la constitución protonoelectrónica de los núcleos, que hace tiempo fue sustituida por la de la constitución protononeutrónica. Pero hay más ; vamos a ver cómo se puede llegar a una contradicción lógica, independientemente de la física, con esta manera de razonar. Cuando el neutrón se transforma en protón emitiendo un electrón, no se admite que sea razón suficiente para que el electrón existiese en el neutrón antes de su emisión, porque entonces por razón de simetría, cuando un protón se transforma en neutrón emitiendo un positrón, el positrón existiría en el protón antes de su emisión ; tendríamos, pues, que el neutrón estaría formado por un protón y un electrón, pero a su vez este protón estaría formado por un neutrón y un positrón, el cual neutrón a su vez estaría también formado por un protón y un electrón, y así sucesivamente hasta el infinito, lo que pone de manifiesto el absurdo lógico a que nos llevaría en lo cuántico admitir cómo un axioma que si un individuo sale de un sitio, es porque previamente estaba en ese sitio antes de su salida. El absurdo lógico está basado en la realidad del doble fenómeno de la transformación de un neutrón en un protón y de un protón en un neutrón con emisión de un electrón o de un positrón, respectivamente. Creemos que este absurdo lógico no había sido señalado todavía por los físicos cuánticos.

Incluso a nivel macroscópico hay una disimetría, una diferencia muy clara entre la entrada y la salida, cuando un individuo entra en un sitio no lleva implícito que después de su entrada permanezca él mismo allí dentro, porque en ese sitio donde entra puede sufrir una transformación que lo convierta en algo distinto.

Contrariamente a lo anterior, los físicos clásicos acostumbran a admitir, de acuerdo con nuestra intuición, que si un sistema se descompone en dos subsistemas, éstos existían previamente en el sistema antes de su descomposición, creencia muy reforzada si además el sistema primitivo se podía recomponer a partir de la unión de los dos subsistemas en que se había descompuesto. Esta era al menos la forma de razonar de la química clásica. Sin embargo, un ilustre fisicoquímico, Ostwald, a fines del siglo XIX, antes de que no se supiera ni una palabra de mecánica cuántica, expuso en forma muy clara sus dudas sobre esto, planteando esta cuestión trascendental, que a mi juicio queda resuelta con el ejem-

plo del neutrón y del protón antes expuesto, que niega la veracidad de lo que era evidente para los clásicos.

Mach y Ostwald fueron dos de los más ilustres representantes de la energética y por tanto adversarios del atomismo en la crisis que agitó a la física en la segunda mitad del siglo XIX, y a sus escritos nos vamos a referir ampliamente. En 1895, en la *Revue Générale des Sciences*, tuvo lugar una interesante polémica entre científicos de las dos escuelas antecitadas, iniciada por la publicación de un artículo de Ostwald, profesor por aquel entonces de fisicoquímica en la Universidad de Leipzig, traducida al francés con el título de *El fracaso del atomismo contemporáneo*, aun cuando el título en alemán era *La superación del materialismo científico* (*Die Überwindung der wissenschaftlichen Materialismus*), que levantó una gran indignación por su contenido y lo pretencioso del título francés, extremo éste del que no era responsable Ostwald, sino su traductor Lamotte. En la misma revista contestaron al artículo Le Cornú, vicepresidente de la Academia de Ciencias de París, en tono fuertemente agresivo, y Brillouin, profesor en la Escuela Normal Superior, en tono muy cortés y comedido; el artículo de este último llevaba por título *En favor de la materia*. Ostwald, en la misma revista, no contestó a Le Cornú, pero sí a Brillouin (*). Antes de entrar en la exposición de los hechos vamos a situar históricamente la cuestión.

Hasta 1850, más o menos, el mecanicismo se había impuesto en física, y así Abel Rey, en su libro *Theorie de la Physique chez les physiciens contemporains*, escribe: «La física clásica hasta el período contemporáneo tendía a ser una prolongación de la mecánica analítica de Lagrange... La mecánica racional establecía, por tanto, las condiciones necesarias y suficientes de la explicación física.» Y en otro pasaje de la misma obra: «Una mecánica definitiva, la mecánica analítica de Lagrange y una física completamente construida sobre la mecánica.» Pero hacia 1850, con el abandono de la teoría del calórico y la formulación del segundo principio de la termodinámica, el mecanicismo sufre un duro golpe, porque la irreversibilidad de los fenómenos de transformación del calor en trabajo y la degradación de la energía, es decir, la disminución de energía utilizable no encuentra explicación dentro

(*) En su contestación Ostwald dice que hubiera preferido para su artículo el título *La reforma de la Física general*.

del marco de la mecánica racional. Hasta el umbral del siglo XIX los físicos ante el problema de ¿qué es el calor? se dividen en dos grandes grupos: los partidarios del calor-materia, o del calórico, que son la mayoría, y los del calor-movimiento, entre los que figuran Davy y Rumford; pero el nuevo derrotero de la física lo marca la publicación en 1824 de la memoria de Carnot, *Sobre la potencia motriz del fuego y sobre las máquinas capaces de desarrollar esta potencia*, en la que hay que ver la fundación de la termodinámica. Esta memoria permaneció casi olvidada durante veinte años, hasta que William Thomson (lord Kelvin) en 1848 llamó la atención sobre la misma, diciendo: «En todo el dominio de la ciencia no hay nada más grande que la obra de Sadi Carnot.» A pesar de que Carnot no abandonó la teoría del calórico y expuso sus ideas en forma defectuosa, de acuerdo con la terminología errónea de su época, estableció en esta memoria las bases del segundo principio de la termodinámica, llegando a conclusiones fundamentales, como son que el calor no produce trabajo si no pasa de un foco caliente a otro frío, fundamento de las máquinas térmicas, y que el rendimiento de una máquina térmica no puede ser mayor que el de una máquina ideal de ciclo reversible (el ciclo de Carnot) constituido por dos isotérmicas y dos adiabáticas, siendo independiente de la sustancia utilizada en el ciclo. No obstante, el segundo principio de la termodinámica, casi descubierto por Carnot, fue formulado correctamente por Clausius hacia 1854 al mismo tiempo que definía la entropía, demostrando que mientras en las transformaciones reversibles la entropía permanece constante, por el contrario, en las transformaciones reales irreversibles la entropía aumenta; de aquí toda la filosofía relativa a la degradación de la energía y la muerte térmica del universo. En el interregno entre la memoria de Carnot y los trabajos de Clausius, Mayer hacia 1840 descubre el primer principio de la termodinámica, que es una extensión del principio de conservación de la energía. Aun cuando los fundadores de la termodinámica —Mayer, Carnot, lord Kelvin— no fueron energetistas, el nacimiento de la termodinámica y el descubrimiento de las transformaciones de una forma de energía en otra es el origen de la energética, que pretende reducir la física al estudio de las transformaciones de energía, de modo que la materia desaparece o al menos su papel se limita al de simple contenedor de la energía.

Entre los más importantes energetistas se encuentran ilustres científicos, como Rankine, a quien se debe el nombre de energética ; Hertz, Kirchhoff, Mach, Ostwald, Duhem, etc. ; dentro de esta línea de pensamiento está la antecitada memoria de Ostwald, que tuvo, como ya dijimos, una gran repercusión sobre el mundo científico de fines del XIX ; en esta memoria junto a sus aspectos concretos inmediatos, que hoy día han perdido gran parte del interés que despertó en su momento, contiene otros aspectos generales que conservan todo su vigor.

Ostwald define el materialismo científico (el mecanicismo) como la doctrina que tiende a explicar los fenómenos naturales mediante los conceptos de materia y movimiento ; considera que la investigación física se centra en buscar invariantes, es decir magnitudes físicas que permanecen invariables, cuando las demás magnitudes varían, y así la masa es uno de esos invariantes, pero al mismo tiempo considera que con el tiempo los físicos han ampliado, cometiendo con ello un error, el concepto de masa, llegando a confundirlo con el nuevo de materia que es el ente portador de todas las propiedades físicas indisolublemente ligadas a la masa, y de esta forma la ley de conservación de la masa se ha convertido en la ley de conservación de la materia. Señala que esta manera de actuar es completamente metafísica, textualmente escribe : «cada vez que se ha buscado una representación de estos fenómenos (se refiere a los físicos) se ha terminado por tropezar con una contradicción. Esta contradicción puede mantenerse oculta un tiempo más o menos largo, pero tarde o temprano estalla a plena luz y de la teoría solo quedan pedazos». Compárese esta cita de un energetista, de un químico alineado en el idealismo filosófico, con la versión de una historia de la ciencia, de acuerdo con los supuestos del materialismo dialéctico que hemos dado al principio de este discurso.

Analiza Ostwald las dificultades que encierra el hipotético éter para la explicación de los fenómenos electromagnéticos y supone que Hertz renuncia a la hipótesis del éter, que lo sustituye por un sistema de seis ecuaciones diferenciales, no hay pues necesidad de buscar un sustrato material al simbolismo matemático, no hace falta ninguna imagen de la realidad, las únicas realidades existentes son las magnitudes medibles, y lo que interesa, lo que hay que investigar es la forma de deducir los valores numéricos de unas

ciertas magnitudes físicas cuando se nos dan los de otras. Obsérvese lo próxima que está esta actitud filosófica con la de muchos tratados modernos de mecánica cuántica.

Escribe también Ostwald : «La materia es una invención, bastante imperfecta por otra parte, que nos hemos forjado para representar lo que hay de permanente en todas las vicisitudes. La realidad efectiva, vale decir la que tiene efecto sobre nosotros, es la energía». Consideran todos estos físicos que las sensaciones son nuestra vía de acceso al mundo exterior, nuestro único medio de lograr el conocimiento de este mundo. A mi entender tendrían que haber ampliado estas sensaciones directas que experimentan los órganos de nuestros sentidos, con lo que pudiéramos llamar sensaciones indirectas que son las lecturas de las indicaciones de nuestros aparatos de medida, que son los efectos que en los mismos deja el mundo exterior (sus sensaciones) ; para los energetistas, de lo único que queda constancia es de intercambios de energía entre el exterior y nuestros sentidos o nuestros aparatos de medida ; no sentimos la materia, solamente sentimos cambios de energía, como decía Pierre Curie : «yo veo la energía» (*).

Otro problema importante que plantea Ostwald es de si por ejemplo el oxígeno y el hierro que se combinan para formar el óxido férrico, todavía existen como tal oxígeno y hierro en el compuesto químico, después de perder todas sus propiedades organolépticas y textualmente escribe : «¿no resulta pues un contrasentido, o poco menos, pretender que una sustancia definida todavía existe, sin poseer ninguna de sus propiedades?» Compárese esta pregunta con nuestras anteriores reflexiones sobre la identidad de los electrones libres y de los intraatómicos.

Por aquella época se habla mucho de que la materia ha desaparecido, la termodinámica ha arruinado el mecanicismo en física, y, por tanto, es preciso abandonar el concepto de materia y reconstruir el de movimiento. Aparte del texto antecitado por Ostwald, Poincaré, en su libro *La Ciencia y la Hipótesis*, pone por título a su último capítulo *El fin de la materia* que comienza así : «Uno de los descubrimientos más asombrosos que los físicos hayan anun-

(*) La opinión diametralmente opuesta es la de Lord Kelvin: «Si puedo hacer un modelo mecánico comprendo ; mientras no pueda hacer un modelo mecánico no comprendo», expresión del más puro mecanicismo.

ciado estos últimos años es el de que la materia no existe. Apresurémonos a decir que este descubrimiento no es definitivo». La argumentación de Poincaré se basa en considerar la masa como la propiedad física esencial de la materia, y esta masa se hace nula (la masa real) para los electrones, según las experiencias de Kaufman y los cálculos de Abraham, se observa la tendencia a confundir masa y materia; y más adelante cita un texto de Langevin: «la materia sería éter licuado que ha perdido sus propiedades; cuando la materia se desplaza no sería esta masa licuada la que caminaría a través del éter, sino que la liquefacción se extendería progresivamente a nuevas porciones de éter, mientras que detrás las partes licuadas volverían a tomar su estado primitivo. Al moverse la materia no conservaría su identidad». Obsérvese que para que algo exista se le impone la conservación de su identidad, los individuos se definen por lo que permanece constante en relación con lo que cambia.

Estos ataques a la materia suscitaron una viva reacción. Como ya dijimos, Brillouin replicó a Ostwald, para él la ley de conservación de la materia es de origen experimental y más general que la ley de conservación de las masas. Tomando el ejemplo del óxido férrico, afirma que las propiedades del oxígeno y del hierro no desaparecen tan completamente como quiere Ostwald, pero lo que es más importante para asegurar la conservación de los elementos simples en el compuesto químico, es que siempre que se trata de descomponer una misma masa de óxido férrico en hierro y oxígeno se obtienen las mismas masas de estos elementos. Compárese la argumentación última de Brillouin con lo que dijimos anteriormente sobre la existencia del electrón en el núcleo atómico y los absurdos a que conduce. El artículo de Brillouin no solamente va dirigido en favor de la materia, sino también en favor de la libertad de creación de hipótesis, lo que le aproxima a la posición de Poincaré, para quien lo importante no es que exista ésta o la otra cosa, sino que todo ocurre como si existiera, al mismo tiempo que suponer que una cosa existe facilite la explicación, la haga más clara, es la teoría de la comodidad de las hipótesis. Una hipótesis aunque pueda ser sacrificada, no se sacrifica si hace la exposición más clara (*).

(*) Compárese con la doctrina de la economía de pensamiento de Mach, de reducción drástica de hipótesis y con la navaja de Occam de eliminación de entes no estrictamente necesarios.

De la réplica de Le Cornu creo oportuno recoger un pasaje : a un texto de Ostwald que dice : «tratar de dar cuenta por medio de la mecánica de todos los fenómenos físicos conocidos es una empresa vana que ha fracasado ante toda experiencia seria» contraponen la afirmación totalmente contraria : «... en cada rama de ciencia en vías de transformación, se mide el grado de avance y la marcha del progreso por la proporción de hechos representados por las concepciones mecánicas», lo que le aproxima sustituyendo la geometría por la mecánica a esa tendencia científica que se caracteriza por la nostalgia por la geometría sentida por las ciencias que quieren ser deductivas.

Los filósofos idealistas creyeron ver en la energética un duro golpe al materialismo filosófico, porque desde antiguo se atribuyó un carácter materialista, incluso ateo al atomismo, y así Gassendi (1592-1655) al resucitar el atomismo griego creyó conveniente reconciliarlo con la ideología cristiana, trató de cristianizar a Demócrito al igual que Santo Tomás de Aquino había cristianizado a Aristóteles. Los filósofos materialistas reaccionaron o bien enfrentándose a la energética, o bien como sucedió en Rusia con un grupo importante, tratando de conciliar el materialismo dialéctico con el «machismo» (de Mach, un energetista) ; ello fue el motivo principal que incitó a Lenin a tomar partido en filosofía y a publicar en 1908 su *Materialismo y Empiriocriticismo* ; con anterioridad a él, Engels había escrito : «con cada nuevo descubrimiento, el materialismo debe asumir un nuevo aspecto», y esta directriz siguió sin duda alguna Lenin en su libro antecitado. Trata de demostrar que es imposible conciliar el machismo y el marxismo, distingue entre materia como concepto científico, transitorio y sujeto a los accidentes asociados a la evolución en el tiempo de los conocimientos científicos y materia como categoría filosófica eterna e inmutable, de modo que al confundir el concepto científico de materia y en concreto una forma superada del mismo con la categoría filosófica de materia, es cuando se llega con los empiriocriticistas a la conclusión, para él errónea, de que la oposición entre idealismo y materialismo está superada, y a la conclusión también errónea de que la materia ha desaparecido.

Para Lenin como para Engels, los sistemas filosóficos se dividen en dos grandes grupos : idealistas y materialistas, lo que les distingue es la solución que dan al problema fundamental de las:

relaciones del ser con el pensamiento, así como la subordinación de esta cuestión a la objetividad del conocimiento ; Mach pondría en primer lugar esta segunda cuestión y como subordinada a ella proclama a lo sumo la identidad entre ser y pensamiento ; por el contrario, los materialistas auténticos conceden la primacía al ser sobre el pensamiento y subordinan a esta primera cuestión de las relaciones del ser con el pensamiento la de la objetividad del conocimiento como cuestión secundaria. Concretamente escribe Lenin en *Materialismo y Empiriocriticismo* : «¿ Hay que ir de las cosas a la sensación y al pensamiento ? ¿ O bien del pensamiento y de la sensación a las cosas ? Engels se mantiene en la primera línea, es decir en la materialista. La segunda, es decir la idealista, es la que sigue Mach ». No hay que olvidar que dentro de una y otra escuela, idealismo y materialismo, caben muchos matices y variantes ; los filósofos marxistas (leninistas o no) han sometido a un profundo análisis las ideas filosóficas de Lenin, expuestas en su libro antecitado y en sus *Cuadernos Filosóficos*, obra posterior, encontrando contradicciones entre uno y otro, y algunos acusan a su primera filosofía de sensualismo, corregida posteriormente por él mismo. Desde luego como ya hemos señalado anteriormente es difícil no encontrar contradicciones en un sistema filosófico o dentro de la obra escrita de un mismo filósofo.

Para hacer más clara la oposición entre empiriocriticismo y materialismo a continuación reproducimos dos textos, el primero de Mach de su *Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt* y el segundo de Lenin ; dice Mach : « Las sensaciones no son símbolos de las cosas », más bien la « cosa es un símbolo mental para un complejo de sensaciones relativamente estable », es la doctrina de que los cuerpos son complejos de sensaciones, de que la materia es algo impensable e incognoscible, que está fuera de los límites de nuestro conocimiento, la materia es lo desconocido, la nada. Escribe Lenin : « el materialismo consiste precisamente en admitir que la teoría es un calco, una copia aproximada de la realidad », es la célebre teoría del pensamiento como reflejo de las cosas, de acuerdo con la primacía del ser sobre el pensamiento, la materia es una realidad objetiva que nos es dada por nuestras sensaciones, para Lenin lo desconocido es lo todavía no conocido.

Hoy día las viejas discusiones entre energetistas y atomistas

están casi olvidadas, el progreso de la ciencia después de una época de florecimiento de la energética, especialmente debida a sus éxitos en termodinámica (*), pareció dar la razón a los atomistas con las innumerables pruebas convincentes de la existencia real de los átomos, y con ello a los mecanicistas. Posteriormente la mecánica cuántica ha supuesto el fin de la física mecanicista, como lleva por título una publicación de Philipp Frank. Si las hemos resucitado es porque si en sus aspectos concretos han perdido interés, en sus aspectos más generales siguen planteando cuestiones candentes (**), aunque hoy se discuta con el empleo de otra terminología. Por otra parte creemos que la lectura de las anteriores páginas puede suscitar el interés por las posibles interpretaciones marxistas de la historia de la ciencia como un proceso dialéctico de contradicciones en la adquisición de nuevos conocimientos científicos y de ideologías determinadas que van quedando caducas, y que para ser superadas requieren el nacimiento de nuevas ideologías. Los métodos de adquisición del conocimiento y las ideologías en que se encuadran desempeñan papeles, que como ya dijimos anteriormente, recuerdan los de las fuerzas y las relaciones de producción en economía.

Es preocupación fundamental de la E. C. eliminar los inobservables y con ellos toda imagen metafísica de la física, existe pues una fuerte vinculación entre esta filosofía y la del positivismo lógico del círculo de Viena, y ambas se pueden considerar como herederas directas del empiriocriticismo, porque ya en Mach y demás representantes de esta doctrina se manifiesta el deseo de ser antimetafísico, se acusa precisamente al materialismo de metafísico, algunos llegan a considerar la materia como un resto de realismo medieval; Pearson, un energetista, escribe en su *Grammar of Science*, publicada en 1892, «la realidad de la ciencia es simbólica», forma de pensar muy parecida a la de un Eddington o un Heisenberg, se observa entre ellos como en la E. C. la tendencia a disolver «la cosa en sí» de Kant y de los filósofos agnósticos en símbolos, en puras sombras, la realidad se refugia en las matemáticas,

(*) No hay que olvidar que Maxwell, Boltzmann y Gibbs también hicieron progresar notablemente la termodinámica sobre una base atomista, estableciendo la mecánica y la termodinámica estadísticas clásicas. Pero más que los éxitos teóricos obtenidos con la hipótesis atómica, han sido las experiencias de laboratorio las que han convencido a los físicos de la existencia real de los átomos.

(**) Algo parecido a lo que sucede con la modernización de las viejas discusiones medievales entre realistas y nominalistas, la disputa de los universales.

frente a la tendencia de transformar «la cosa en sí» en «la cosa para nosotros» de Engels y el materialismo dialéctico. Vamos a reproducir un texto de Born (de la E. C.) que recuerda otro de Ostwald a que antes hicimos referencia, dice Born en un artículo sobre *La realidad física* (en *Philosophy Quaterly*, 1953): «Los invariantes son los conceptos de los que la ciencia habla de la misma forma que el lenguaje corriente habla de las «cosas», y a los que asigna nombres». Obsérvese como para todos, la palabra metafísica tiene un sentido peyorativo. Como por otra parte la existencia de los átomos, aunque para algunos sean poco más que ecuaciones diferenciales, es básico en la nueva física, de acuerdo con una dialéctica hegeliana, podríamos decir que mecanicismo y energética son la tesis y la antítesis, y que la síntesis de ambas, su superación, es la filosofía que nos ha traído la mecánica cuántica.

Desde luego Bohr y Heisenberg (la E. C. en definitiva) creen haber logrado su objetivo de construir una física desprovista de metafísica, y en muchos aspectos parece conseguido este logro, aunque a veces con el sacrificio de negar la existencia de los problemas que no pueden resolverse dentro de su óptica filosófica. Sin embargo, muchos físicos y filósofos de nuestros días no creen lo mismo, consideran que Heisenberg nos ha transmitido una imagen metafísica del mundo (Landé; Popper), y como obviamente no puede desecharse las matemáticas de las R. I. H. han tratado de, conservando éstas, modificar su interpretación física y su alcance filosófico; para Popper, a pesar de que Heisenberg quiere ser un antimetafísico, su filosofía sería una mezcla de positivismo y trascendentalismo. Véase a estos aspectos A. M. F.

Uno de los hechos que más sorprenden al estudiar la mecánica cuántica es el uso abusivo de experimentos imaginarios (Gedanken en alemán, thought en inglés) por físicos tan antimetafísicos como Einstein, Bohr y Heisenberg (*). Popper, en su *Logic of Scientific Discovery* (1958), titula uno de sus capítulos: «Sobre el uso y abuso de experimentos imaginarios, especialmente en la teoría cuántica», donde hace un profundo análisis de esta clase de experimentos, distingue entre lo que él denomina empleo crítico, heurístico y apologetico del experimento imaginario; considera legítimos

(*) En A. M. F. hemos analizado los diseñados por Heisenberg para establecer sus relaciones de incertidumbre, y aquí más adelante analizaremos otros experimentos imaginarios.

e incluso importantes los dos primeros, pero pone en guardia frente al uso del tercero y considera que ha sido utilizado por los físicos cuánticos. En mi opinión el experimento imaginario es un inobservable puro, es algo que no está al alcance nuestro, que no puede realizarse, por lo que discutir sobre sus resultados es discutir no sólo sobre algo que no se sabe sino que nunca podrá saberse, es reintroducir encubiertamente la metafísica en la física. Popper pone como modelo del empleo crítico del experimento imaginario legítimo y lo considera como uno de los más importantes en la historia de la filosofía natural, el utilizado por Galileo en sus *Discorsi intorno a due nove scienze* (1638) para rebatir la doctrina aristotélica del movimiento, pero a mí me parece que no se trata de un experimento imaginario (*), sino de un razonamiento estrictamente lógico y totalmente correcto, porque más o menos el experimento imaginario de Galileo consiste en lo siguiente : si se unen dos móviles A y B, que se mueven con velocidades distintas, la de A mayor que la de B, se obtiene un nuevo móvil C, cuya velocidad es intermedia entre las de A y B, porque A más rápido acelera a B más lento, o lo que es lo mismo, B frena a A ; pero la masa de C (suma de las masas de A y B) es mayor que la de A, de donde se sigue que C es más lento que A, a pesar de tener más masa que él, lo cual prueba la falsedad de la doctrina aristotélica del movimiento, que afirma que la velocidad es proporcional a la masa. Obsérvese que lo que se ha hecho es partir de premisas contradictorias para llegar a una conclusión absurda, lo que es pura lógica, es una consecuencia de las leyes del pensamiento y no de la experiencia ; se admite : a) que la velocidad es proporcional a la masa (doctrina de Aristóteles), b) que la masa es una propiedad aditiva, es decir que la masa de C, unión de A y B, es la suma de las masas de B y C, c) que la velocidad (como otras muchas propiedades físicas, la temperatura por ejemplo) es una propiedad «en media», es decir que la velocidad de C es intermedia entre las de sus componentes B y C ; se sigue (lógica pura) que una propiedad en media (la velocidad) nunca puede ser proporcional a una propiedad aditiva (la masa) y que, por tanto, la doctrina aristotélica del movimiento encierra una contradicción interna que la invalida. Obsérvese también que este experimento pretendidamente imaginario, como

(*) Porque puede realizarse, con lo que deja de ser imaginario para transformarse en real.

ya dijimos anteriormente es real ; en otro pasaje de sus *Discorsi*, Galileo describe su realización, que consiste en observar la caída de cuerpos de masas muy distintas desde una gran altura y comprobar que llegan al suelo casi al mismo tiempo, lo que sí es una comprobación experimental directa de que la velocidad no es proporcional a la masa, pero no sólo Galileo sino que unos mil años antes el sabio bizantino Juan Filopón ya hacía esta crítica de Aristóteles, y unos cincuenta años antes que Galileo, el holandés Stevin, en 1586, hacía otro tanto.

Se puede demostrar a partir de la E. S., las R. I. H. y a partir de éstas las I. P., de acuerdo con el siguiente esquema :

$$E. S. \Rightarrow R. I. H. \Rightarrow I. P. \quad (1)$$

pero vamos a demostrar que este esquema no es irreversible, es decir que los anteriores signos de implicación no pueden ser sustituidos por signos de equivalencia ; vamos a ver cómo se pueden construir álgebras de probabilidades en que se cumplan I. P., y no existan R. I. H. ; y después otras en que se cumplan las R. I. H., haya I. P. y sin embargo no tengan ninguna relación con la E. S.

Sea E un espacio vectorial dotado de producto interno (producto escalar de vectores), por tanto normado, definido bien sea sobre R (cuerpo de los números reales) o sobre C (cuerpo de los números complejos), el cuerpo de base de E es indiferente, así como el número de dimensiones, por lo que en lo sucesivo supondremos que E es un espacio de Hilbert complejo y separable ; entonces a todo vector x de E de norma la unidad (normalizado) y a todo operador hermítico (autoadjunto) A de E, completo, de espectro discreto y sin valores propios múltiples, se puede hacer corresponder una distribución discreta (*) de probabilidades $\{p_n\}$ definida por :

$$p_n = |c_n|^2 = |\langle x, y_n \rangle|^2 \quad (2)$$

(*) Si el espectro es continuo, la teoría es casi igual, la distribución de probabilidades es continua. Si el espectro tiene valores propios múltiples (degenerados) la teoría se puede rehacer con una ligera modificación.

siendo los y_n los vectores propios normalizados de A , los cuales como es sabido forman un sistema ortonormal completo, y por tanto se cumple que :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = 1. \quad (3)$$

Dos operadores A y B conmutativos dan origen a la misma distribución de probabilidad, por tener los mismos vectores propios. Por tanto, E y $\mathcal{A}$ conjunto de todos los operadores de E de la naturaleza antes especificada, son tales que todo vector unitario de E y todo elemento del espacio cociente $\mathcal{A}/\mathcal{R}$ respecto a la relación de equivalencia :

$$A \mathcal{R} B \iff A B = B A \quad (4)$$

definen un conjunto de distribuciones de probabilidad. Si x varía en el tiempo, permaneciendo normalizado, se define de esta manera un proceso estocástico ; pero también A puede depender del tiempo y si varía con el tiempo permaneciendo en $\mathcal{A}$, a todo vector normalizado de E se puede asociar una distribución de probabilidades, con lo que se tiene una segunda forma de definir un proceso estocástico. Consideraremos la primera.

Ahora bien, a A y x podemos asignar un variable aleatoria (v. a.) ξ cuyos valores numéricos sean los valores propios (reales) α_n de A , correspondientes a las probabilidades p_n del mismo subíndice. Se tiene entonces para los valores medios las expresiones

$$\bar{\xi} = \bar{A} = \langle x, A x \rangle = \langle \sum c_n y_n, \sum \alpha_n c_n y_n \rangle = \sum \alpha_n |c_n|^2 \quad (5)$$

y también

$$\bar{A}^n = \langle x, A^n x \rangle; \quad \sigma^2 = \bar{A}^2 - (\bar{A})^2 \quad (6)$$

la última expresión para la varianza σ^2 .

Como hemos supuesto E complejo, de la desigualdad de Schwartz se sigue que

$$\sigma_A \sigma_B \geq \frac{1}{2} | [A \overline{B}] | \quad (7)$$

siendo

$$[A B] = A B - B A. \quad (8)$$

La demostración la omitimos, porque es la misma que se expone en muchos tratados de mecánica cuántica, cuando se toma por E el espacio L^2 de las funciones complejas de cuadrado sumable, ya que la demostración depende de la forma general de la antecitada desigualdad de Schwartz, y no de la forma particular que toma esta desigualdad para L^2 . Ahora sí hemos de destacar que la (7) no se cumple para un E real.

Si x , vector que define el proceso estocástico varía en el tiempo de modo que el valor medio de $[A B]$ permanezca constante, entonces también el primer miembro de (7) permanece constante, siendo condición suficiente que se cumpla la

$$A B - B A = r i I \quad (9)$$

en donde I es el operador unidad ($I A = A I = A$), e i la unidad imaginaria. En este caso se cumple que

$$\sigma_A \sigma_B \geq \frac{r}{2} \quad (10)$$

que son unas relaciones de indeterminación de las del tipo de Heisenberg. Insistimos, pues, que para que existan R. I. H. es preciso que el cuerpo de base de E sea C ; si es R no hay R. I. H.

Si tomamos como vector x un vector propio de A , entonces la v. a. correspondiente se ha transformado en un número cierto, que es el valor propio de A correspondiente a dicho vector propio, porque, por ejemplo, si es el y_1 , por (2) se tiene que

$$p_1 = | \langle y_1, y_1 \rangle |^2 = 1 \quad (11)$$

y en este caso se cumple por (10) la

$$\sigma_A = 0 \implies \sigma_B = \infty \quad (12)$$

la última exige que el espectro de B tenga un número infinito de valores propios, porque una distribución de probabilidades discreta finita tiene también varianza finita. Se sigue que en un espacio vectorial de producto interno y dimensión finita no hay R. I. H. ; pero aún hay más y es que si el conjunto de valores propios de A y B (que da la dimensión de E) es infinito numerable (A y B son matrices), entonces se puede demostrar directamente, como haremos a continuación, que no puede cumplirse la (9) ; se tiene, pues, que para que sean posibles R. I. H., E ha de ser un espacio de Hilbert (o prehilbertiano al menos), y solamente se cumplen para operadores de espectro continuo, por tanto en espacios euclídeos, aunque sean complejos, no hay R. I. H.

Se puede dar una demostración directa que es como sigue : supongamos ahora que E es un espacio euclídeo complejo, A y B matrices hermiticas ; vamos a demostrar que la (9) conduce a una contradicción ; se tiene que por ser A hermitica, existe una matriz unitaria U, tal que la matriz $U^+ A U$ es diagonal (U^+ es la adjunta de U, que por ser unitaria es también su inversa), por tanto de (9) se sigue que

$$U^+ (A B - B A) U = r i U^+ I U = r i I \quad (13)$$

pero el primer miembro se puede escribir

$$U^+ A U U^+ B U - U^+ B U U^+ A U = D B' - B' D = r i I \quad (14)$$

en donde por D representamos una matriz diagonal. Vamos a ver cómo esta última (14) es imposible ; se escribe

$$\begin{vmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b'_{11} & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b'_{11} & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (15)$$

o lo que es lo mismo

$$\left\| \begin{array}{c} \alpha_1 b'_{11} - b'_{11} \alpha_1 \dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\| \neq r i I \quad (*) \quad (16)$$

porque el primer elemento diagonal (todos los elementos diagonales) son nulos. Lo que demuestra directamente la imposibilidad de R. I. H. en espacios euclídeos complejos, y como la demostración anterior es independiente de las dimensiones del espacio, se sigue que la demostración es válida para matrices u operadores de espectro discreto en el espacio de Hilbert.

Por la importancia de la cuestión, vamos a dar una segunda demostración directa de la no existencia de R. I. H. en los casos anteriores. Vamos a demostrar que si escogemos como vector x un vector propio de A (estado puro), por ejemplo el y_1 , entonces se cumple que

$$[\overline{A B}] = \langle y_1, (A B - B A) y_1 \rangle = 0 \quad (17)$$

si escogemos como sistema de referencia en el espacio euclídeo (ejes coordenados) los vectores propios de A , se tiene

$$B A y_1 = \alpha_1 B y_1 = \alpha_1 \left\| \begin{array}{c} b_{11} \dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} y_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\| = \alpha_1 \left\| \begin{array}{c} b_{11} y_1 \\ b_{21} y_1 \\ \vdots \\ b_{n1} y_1 \end{array} \right\| \quad (**). \quad (18)$$

siendo α_1 el valor propio de A correspondiente a y_1 . Por otra parte es

$$\begin{aligned} A B y_1 &= A \left\| \begin{array}{c} b_{11} \dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \vdots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} y_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\| = A \left\| \begin{array}{c} b_{11} y_1 \\ b_{21} y_1 \\ \vdots \\ b_{n1} y_1 \end{array} \right\| = \\ &= \left\| \begin{array}{ccc} \alpha_1 & 0 & \dots\dots 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots\dots 0 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 0 & 0 & \dots\dots \alpha_n \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} b_{11} y_1 \\ b_{21} y_1 \\ \vdots \\ b_{n1} y_1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \alpha_1 b_{11} y_1 \\ \alpha_2 b_{21} y_1 \\ \vdots \\ \alpha_n b_{n1} y_1 \end{array} \right\| \quad (19) \end{aligned}$$

(*) y (**) Las α son los valores propios de A .

y de aquí al restar

$$\left\| \begin{array}{c} 0 \\ (\alpha_2 - \alpha_1) b_{21} y_1 \\ \vdots \\ (\alpha_n - \alpha_1) b_{n1} y_1 \end{array} \right\| \quad (20)$$

que al multiplicar escalarmente por el vector y_1

$$\| y_1 0 \dots 0 \| \quad (21)$$

se obtiene 0, lo que demuestra (17) y por tanto la no existencia de R. I. H. en espacios euclídeos complejos, y como también ahora la demostración es independiente del número de dimensiones del espacio, se sigue que para operadores discretos en el espacio de Hilbert tampoco existen R. I. H.; nos parece que estas demostraciones y conclusiones nos son propias y no las hemos encontrado en la literatura cuántica. Hemos representado por la misma letra el vector y_1 y su componente porque no hay confusión en ello.

Vamos a ver cómo incluso en espacios euclídeos complejos se pueden obtener I. P., a pesar de que en ellos no hay R. I. H.; sean x e y dos vectores normalizados de E ; llamamos superposición de x e y a su suma seguida de renormalización, es decir, al vector

$$\frac{x + y}{\| x + y \|} \quad (22)$$

el cual, evidentemente, es también normalizado. La superposición se puede extender a cualquier número de vectores y además afectar a éstos de pesos de superposición complejos, de modo que el conjunto de vectores $x_1, \dots, x_m$, dotados de los pesos $c_1, \dots, c_m$, les corresponde, por superposición, el vector normalizado

$$\frac{c_1 x_1 + \dots + c_m x_m}{\| c_1 x_1 + \dots + c_m x_m \|} \quad (23)$$

Este concepto matemático de superposición es el que física-

mente se traduce en I. P., porque, por ejemplo, para el valor medio del operador A (5), el vector (22) da

$$\frac{1}{\|x + y\|^2} \langle x + y, A(x + y) \rangle \quad (24)$$

obviamente distinto del que da la media aritmética de los valores medios de A para x e y , que es

$$\frac{1}{2} (\langle x, A x \rangle + \langle y, A y \rangle). \quad (*) \quad (25)$$

Vamos a demostrar que la superposición es la adición de un grupo conmutativo (abeliano) G que vamos a construir ahora. Sea E' el conjunto de los vectores normalizados de E , que como es sabido no es un subespacio vectorial; sea θ el vector nulo de E y hagamos el convenio de que θ/θ sigue siendo θ ; sea R^+ el conjunto de los números reales positivos, entonces el conjunto G , que es el producto cartesiano directo $R^+ \cup \{0\} \times E' \cup \{\theta\}$ con el convenio anteriormente adoptado para θ , tiene estructura de grupo para la adición definida por

$$(a, x) + (b, y) = \left(\|ax + by\|, \frac{ax + by}{\|ax + by\|} \right) \quad (26)$$

si consideramos equivalentes entre sí todos los elementos de la forma (a, θ) para a cualquier número real positivo o el cero. El elemento neutro de G es el (a, θ) (***) porque

$$(a, \theta) + (b, y) = \left(\|by\|, \frac{by}{\|by\|} \right) = (b, y) \quad (27)$$

yá que

$$\|by\| = b\|y\| = b. \quad (28)$$

(*) Véase A. M. F.; ahí reside la diferencia entre superposición y mezcla de estados cuánticos.

(**) Y también el (θ, x) siendo x cualquier vector de E' .

Se cumplen los cuatro axiomas del grupo, porque I) es cerrado, ya que el segundo miembro de (26) pertenece a G; II) la ley de composición es asociativa porque

$$(a, x) + (b, y) + (c, z) = \left(\|ax + by\|, \frac{ax + by}{\|ax + by\|} \right) + \\ + (c, z) = \left(\|ax + by + cz\|, \frac{ax + by + cz}{\|ax + by + cz\|} \right) \quad (29)$$

III) existe elemento neutro que es el (a, θ) (*), como hemos demostrado anteriormente en (27); IV) existe el elemento inverso del (a, x) que es el $(a, -x)$ porque

$$(a, x) + (a, -x) = \left(\|ax - ax\|, \frac{ax - ax}{\|ax - ax\|} \right) = \\ = \left(0, \frac{0}{\|0\|} \right) = (0, \theta) \quad (30)$$

por el convenio de equivalencia que hicimos anteriormente. De (29) se sigue que G es abeliano. Obsérvese que todos los elementos de G tienen una representación única salvo el elemento neutro, que es el $(R^+ \cup \{0\}, \theta)$ y el $(0, E')$.

Hay la posibilidad de introducir otro concepto matemático distinto al de superposición, que es el de mezcla. Si al conjunto de vectores normalizados $x_1, \dots, x_m$ le asignamos los pesos $q_1, \dots, q_m$, que son las componentes de un vector de probabilidad,

$$q_1 \geq 0, \dots, q_m \geq 0; \quad q_1 + \dots + q_m = 1 \quad (31)$$

a cada operador A de E, perteneciente a $\mathcal{A}$, se le puede asociar una distribución de probabilidades $\{p_n\}$ definida por

$$p_n = q_1 p_{n1} + \dots + q_m p_{nm} \quad (32)$$

en la que cada una de las p con dos subíndices del segundo miembro son las definidas en (2) para A y cada uno de los vectores

(*) Y el $(0, x)$ siendo x cualquier vector de E' .

$x_1, \dots, x_m$. Por ejemplo, el valor medio $\bar{A}$ para la mezcla de estos valores vale

$$\bar{A} = q_1 \langle x_1, A x_1 \rangle + \dots + q_m \langle x_m, A x_m \rangle. \quad (*) \quad (33)$$

Así como la superposición de vectores de E da un nuevo vector de E también normalizado, por el contrario, la distribución de probabilidades resultante de una mezcla no puede obtenerse como resultante de la distribución de probabilidades correspondiente a un solo vector, resultado éste muy importante que distingue esencialmente entre sí las dos operaciones matemáticas de superposición y de mezcla, así como su significación física. Obsérvese que la superposición, tal como la hemos definido, depende de la norma y no del producto interno, por lo que esta operación y sus consecuencias (existencia del grupo G) puede extenderse a cualquier espacio vectorial normado y por tanto a un espacio de Banach; por el contrario, la mezcla depende de los productos internos y solamente se puede definir en espacios en los que existan éstos, como es el caso de los de Hilbert.

En las probabilidades clásicas el concepto de mezcla tiene una interpretación bien definida, mientras que son desconocidas para ellas el concepto de superposición. El comportamiento en lo macroscópico es análogo al de las mezclas, mientras que en la microfísica se da uno u otro caso (superposición o mezcla), según que existan o no interacciones entre las poblaciones que se funden en una sola, existan o no I. P.

Estos hechos son debidos a que en los procesos estocásticos macroscópicos (propagación del calor, fenómenos de difusión física, emigración de una población viva, evolución en el tiempo de una epidemia) las ecuaciones matemáticas que los rigen determinan la evolución en el tiempo de un v. p. o de una f. f. (caso continuo), mientras que en las nuevas matemáticas que estamos considerando, lo que evoluciona en el tiempo es la r. c. c. de un v. p. o de una f. f. (véase A. M. F.).

Recordamos que llamamos en A. M. F. r. c. c. de un vector

(*) Y lo mismo para cualquier momento o para la varianza.

de probabilidad p , de componente $\{p_n\}$ a un vector q de C^n , cuyas componentes $\{q_n\}$ son definidas por

$$q = \sqrt{p} \iff |q_1|^2 = p_1; \dots; |q_n|^2 = p_n \quad (34)$$

mientras que las amplitudes de las q están bien definidas, sus fases quedan indeterminadas.

Llamamos raíz cuadrada real (r. c. r.) de p , a un vector q de componentes reales, tales que

$$q_1^2 = p_1; \dots; q_n^2 = p_n \quad (35)$$

las cuales quedan indeterminadas respecto al signo. Son ejemplos de componentes de la r. c. r. de un v. p. las coordenadas de un punto de una circunferencia o esfera ordinarias de radio la unidad, y en general de una esfera de radio la unidad en un espacio euclídeo o incluso de Hilbert reales; si los espacios anteriores son complejos, las antedichas coordenadas son las componentes de la r. c. c. de un v. p.

Se tiene entonces que si un punto se mueve sobre una circunferencia o sobre una esfera de radio la unidad con un movimiento que bien sea cierto o aleatorio (movimiento browniano) define un proceso estocástico asociado a la evolución en el tiempo de una r. c. c. de un v. p.; los cuadrados de las proyecciones del móvil sobre un par de diámetros rectangulares definen una distribución de probabilidades binomial que varía con el movimiento del punto. Si consideramos la familia de todas las cónicas concéntricas con la circunferencia (excluidas las circunferencias) para cada posición del móvil y para cada subfamilia de cónicas coaxiales se hace corresponder una distribución de probabilidades binomial cuyos términos son los cuadrados de las proyecciones del móvil sobre los ejes comunes a todas las cónicas de la subfamilia, y a cada cónica se puede asociar una v. a., cuya distribución de probabilidades es la antedicha, siendo los valores numéricos los de los semiejes por ejemplo. Si sustituimos la circunferencia por una esfera, entonces la distribución de probabilidades es trinomial, sus términos son los cuadrados de las proyecciones del móvil sobre un triedro trirectángulo, y el papel de la familia de cónicas concéntricas lo desempeñan las cuádricas concéntricas (excluidas

las de revolución) y el de la subfamilia de cónicas coaxiales lo desempeña el de cuádricas coaxiales. Estos procesos estocásticos tienen, pues, lugar en cualquier número de dimensiones, el papel de las cónicas y cuádricas es similar al de los operadores hermíticos A de $\mathcal{H}$ antes considerados, y se excluyen circunferencias y cuádricas de revolución por corresponder al caso de valores propios múltiples de los A .

La superposición de puntos sobre la circunferencia o la esfera consiste en la suma geométrica de los mismos, es decir, la adición de los vectores que unen el centro con los puntos, considerados como libres y localizada la resultante en el centro, seguido de la determinación de la intersección de esta resultante con la circunferencia o la esfera, que da el resultado de la superposición (*); si se añade al conjunto de puntos de la circunferencia o de la esfera su centro como elemento neutro en la superposición, se define el grupo que antes llamamos G para la superposición así definida como adición.

Se tiene un modo de visualizar hasta en el plano o en el espacio ordinario procesos estocásticos sin R. I. H. y con I. P., como consecuencia de la superposición, pero también se pueden imaginar modelos de procesos estocásticos muy concretos que gozan de las mismas propiedades, que son las que he denominado probabilidades en cadena en los espacios euclídeos o de Hilbert, complejos (o reales); si se multiplica la r. c. c. (o la r. c. r.) de un v. p. por una matriz unitaria (u ortogonal), como este producto conserva el módulo (la norma) del vector, se obtiene otra r. c. c. (o r. c. r.) de un v. p.; que denominamos probabilidad en cadena, que tiene propiedades muy distintas de las de Markov; por de pronto carecen de la propiedad ergódica y por superposición pueden haber I. P., cosa que no sucede nunca con las de Markov; las matrices unitarias (u ortogonales) desempeñan aquí el papel de las estocásticas en las de Markov.

Si

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{i}{r} H x \quad (36)$$

es una ecuación diferencial abstracta en un espacio complejo de

(*) Asociando este radio vector al módulo de la resultante.

Hilbert, en la que H es una matriz hermítica, se conserva el módulo (la norma) del vector x , es decir :

$$\|x\|_0 = 1 \implies \|x\|_t = 1 \quad (37)$$

luego se conserva constantemente como r. c. c. de un v. p., como vamos a demostrar ahora. Multipliquemos internamente a la derecha y a la izquierda por x , ambos miembros de (36), se obtienen las

$$\left\langle \frac{dx}{dt}, x \right\rangle = \left\langle -\frac{i}{r} H, x \right\rangle; \quad \left\langle x, \frac{dx}{dt} \right\rangle = \left\langle x, -\frac{i}{r} H x \right\rangle \quad (38)$$

y sumando miembro a miembro se obtiene

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dx}{dt}, x \right\rangle + \left\langle x, \frac{dx}{dt} \right\rangle &= \frac{d}{dt} \langle x, x \rangle = \frac{d}{dt} \|x\|^2 = \\ &= \left\langle -\frac{i}{r} H x, x \right\rangle + \left\langle x, -\frac{i}{r} H x \right\rangle = -\frac{i}{r} \langle H x, x \rangle + \\ &\quad + \frac{i}{r} \langle x, H x \rangle = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

por ser H hermítico, lo que prueba (37).

La E. S. es un caso particular de (36) cuando el espacio de Hilbert es L^2 , H el hamiltoniano, $r = h/2\pi$ (h constante de Planck) y la diferencial del primer miembro una derivada parcial.

Obsérvese cómo nuestra demostración anterior es mucho más general que la particular de la E. S., tal como viene expuesta en los tratados de mecánica cuántica.

En el caso de (36) llamamos integral primera a un operador hermítico A de $\mathcal{A}$ cuyo valor medio se conserva constante en el tiempo, es decir, para el que se cumple que

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = 0 \quad (40)$$

si A depende del tiempo (puede no depender), la (40) se escribe

$$\frac{d \bar{A}}{d t} = \frac{d}{d t} \langle x, A x \rangle = \left\langle \frac{d x}{d t}, A x \right\rangle + \left\langle x, \frac{d A}{d t} x \right\rangle + \left\langle x, A \frac{d x}{d t} \right\rangle \quad (41)$$

y en virtud de (36) se deduce de la anterior la que sigue :

$$\frac{d \bar{A}}{d t} = \frac{-i}{r} \langle H x, A x \rangle + \frac{\overline{d A}}{d t} + \frac{i}{r} \langle x, A H x \rangle \quad (42)$$

y de aquí la

$$\frac{d \bar{A}}{d t} = \frac{\overline{d A}}{d t} + \frac{i}{r} \langle x, (A H - H A) x \rangle = \frac{\overline{d A}}{d t} + \frac{i}{r} [\overline{A}, \overline{H}] \quad (*) \quad (43)$$

que si A es independiente del tiempo se simplifica en la

$$\frac{d \bar{A}}{d t} = \frac{i}{r} [\overline{A}, \overline{H}] \quad (44)$$

por tanto la nulidad del segundo miembro de (43), o (44)), en caso de que A es independiente del tiempo (no depende explícitamente del tiempo) es la condición necesaria y suficiente para que A sea una integral primera.

Si A y H conmutan y A es independiente del tiempo, es

$$[A, H] = 0 \implies \frac{d \bar{A}}{d t} = 0 \quad (45)$$

y como también conmutan cualquier potencia de A y H , se sigue que en ese caso particular todos los momentos de la v. a. asociada a A permanecen constantes, esto es, la distribución de probabilidades asociada a A y x es independiente del tiempo.

(*) Se deduce que la derivada respecto al tiempo del valor medio de A (primer miembro de (43)) es distinta del valor medio de la derivada (primer sumando del segundo miembro de (43)).

En el caso en que el tiempo es una variable discreta (probabilidad en cadena en el espacio de Hilbert) en vez de la (36) se tiene la ecuación abstracta en diferencias finitas :

$$x_n = H x_{n-1} \quad (46)$$

siendo H una matriz unitaria si el espacio de Hilbert es complejo (ortogonal si es real), y la definición de integral primera, invariancia en el tiempo del valor medio de A se escribe

$$\langle x_n, A x_n \rangle = \langle H x_{n-1}, A H x_{n-1} \rangle = \langle x_{n-1}, H^+ A H x_{n-1} \rangle \quad (47)$$

cuya constancia en el tiempo se cumple si

$$A = H^+ A H \quad (48)$$

y como H^+ es la inversa de H, multiplicando a la derecha por H^+ se obtiene

$$A H^+ = H^+ A \quad (*) \quad (49)$$

que es la condición necesaria y suficiente para que A sea una integral primera, es decir, que A conmute con la adjunta de H y en ese caso conmuta también cualquier potencia de A.

De (7) y (44), aplicada la primera a H y a una integral primera A, se sigue que

$$\left| \frac{\frac{\sigma_A}{d\bar{A}}}{dt} \right| \sigma_H \geq \frac{r}{2} \quad (50)$$

en donde el cociente que figura en su primer miembro tiene las dimensiones de un tiempo ; su significado es el tiempo que tarda en variar A en σ_A cuando su velocidad de cambio es constante e igual al primer miembro de (44). De (50) se sigue que

$$\sigma_H = 0, \sigma_A < \infty \implies \frac{d\bar{A}}{dt} = 0. \quad (51)$$

(*) Multiplicando en (48) a la izquierda por H se demuestra que A y H conmutan.

Vamos a ver cómo se pasa de lo discreto (46) a lo continuo (36); si en (46) hacemos los cambios

$$n \longrightarrow t; \quad n + 1 \longrightarrow t + dt; \quad H = I + M dt \quad (52)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} x(t + dt) &= (I + M dt) x(t) = x(t) + M x(t) dt \implies \\ &\implies \frac{dx}{dt} = M x(t) \end{aligned} \quad (53)$$

pero la inversa de $I + M dt$ es $I - M dt$ porque en su producto se desprecia el término en dt^2 por ser un infinitésimo de segundo orden. Ahora bien, la adjunta de la primera de ellas es $I + M^+ dt$, y como son matrices unitarias, la inversa y la adjunta han de ser iguales, lo que exige que

$$I + M^+ dt = I - M dt \implies M^+ = -M \implies M = iH \quad (54)$$

siendo H hermitica, lo que muestra cómo el paso de lo discreto a lo continuo lleva de (46) a (36). En ambas, la H puede depender o no del tiempo.

Si el espacio de Hilbert es real en vez de complejo (*), entonces hay ligeros cambios; la ecuación diferencial abstracta que rige la evolución en el tiempo del vector normalizado x en vez de la (36) es la

$$\frac{dx}{dt} = Hx \quad (55)$$

siendo H una matriz antisimétrica para asegurar la invariancia de x ; porque entonces multiplicando internamente a la izquierda y a la derecha ambos miembros de (55) por x y sumando se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle x, x \rangle &= \frac{d}{dt} \|x\|^2 = \langle Hx, x \rangle + \langle x, Hx \rangle = \\ &= \langle x, (H^t + H)x \rangle = 0 \end{aligned} \quad (56)$$

(*) Recordemos que en el campo real la hermiticidad es simetría.

porque por ser H antisimétrica es igual a su traspuesta H^t cambiada de signo. Tanto la demostración de la invariancia de $\bar{A}$ como el paso de lo discreto a lo continuo es igual para espacios reales que complejos. Se sigue que un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales reales, de matriz antisimétrica, define un proceso estocástico en el que las probabilidades son los cuadrados de las soluciones del sistema. Insistimos de nuevo que en los espacios reales no hay R. I. H. por la imposibilidad de que se cumplan las (7), pero sí I. P.

Para poner en línea las teorías matemáticas anteriores con el lenguaje de la mecánica cuántica, a los vectores normalizados x les llamaremos indiferentemente vectores de estado (v. e.) o vectores de onda (v. o.).

Un hecho sorprendente de la nueva física es la reducción o contracción del paquete de ondas. Consiste en que bruscamente por el hecho de realizar una observación sobre un sistema microscópico, de medir una variable física de operador A , la función de onda (el v. e.) pasa a ser un vector propio de A y el valor de la medida de A es el valor propio correspondiente. Inmediatamente después de la medida, el nuevo v. e. vuelve de nuevo a evolucionar en el tiempo de acuerdo con la E. S. ; es como si el tiempo se comenzara a medir a partir del instante de la medida, siendo ahora el valor inicial del v. e. el del dicho vector propio de A . Sobre el significado de la reducción del paquete de ondas se ha discutido mucho ; supone una modificación instantánea de todo el sistema microscópico, modificación que se propaga con velocidad infinita, superior a la velocidad de la luz, lo que parece estar en contradicción con los resultados de la teoría de la relatividad. Algunos físicos, entre ellos Heisenberg, trata de evitar esta contradicción diciendo que esta velocidad de propagación de la perturbación del sistema microscópico no es susceptible de transmitir una señal física, a diferencia de lo que sucede con la de la luz, por lo que aunque sea una velocidad supralumínica no entra en contradicción con la relatividad, porque no modifica la estructura del espacio-tiempo implícito en la relatividad. Otros físicos opinan que esta velocidad infinita que lleva consigo la reducción del paquete de ondas se refiere a la de un proceso mental mediante el cual adquirimos conocimiento o in-

formación sobre el sistema. Incluso algunos físicos llevan muy lejos esta categoría subjetiva de la reducción del paquete de ondas, creen que no hay tal reducción, hasta que los resultados de la observación han entrado en la conciencia del observador ; así. opina, por ejemplo, Wigner, no sin levantar ásperas críticas por parte de algunos físicos como, por ejemplo, Landé en su libro *New Foundations of Quantum Mechanics*. No hay duda alguna de que la introducción de la conciencia en la filosofía mecano-cuántica vuelve de nuevo a introducir palabras cuyo significado no está del todo preciso y a resucitar viejas polémicas ; ya Engels en su *Anti-Dühring*, en torno a la pregunta de ¿qué es la conciencia?, escribe : «Ahora el idealismo ha sido desbancado de su último reducto, la filosofía de la historia ; es ahora cuando una concepción materialista de la historia ha sido propuesta, y el método descubierto es explicar la conciencia del hombre por su ser, en lugar de como se hacía hasta ahora, su ser por su conciencia», poniendo así de manifiesto por primera vez las profundas diferencias que separan al materialismo dialéctico de las restantes escuelas filosóficas respecto a esta cuestión. Avenarius, un importante empiriocriticista. a fines del siglo XIX, daba gran importancia al papel de la conciencia humana en la teoría del conocimiento.

El cambio instantáneo, propagándose con velocidad infinita, de las condiciones de un sistema físico no es exclusivo de la microfísica, existía ya en la macrofísica, todos los fenómenos de tipo impulsivo, por ejemplo las vibraciones en placas o varillas por efecto de una percusión, los cambios instantáneos de velocidad de los sólidos en movimiento por efecto de un choque, son ejemplos de fuerzas que obran durante intervalos de tiempo infinitesimales con intensidades infinitamente grande ; como caso límite transmiten un impulso mecánico finito en un tiempo cero. Bajo este aspecto, en mi opinión. la reducción del paquete de ondas es de la misma naturaleza ; la diferencia más profunda entre la microfísica y la macrofísica consiste en que en la primera la reducción del paquete de ondas es efecto de la observación, que en virtud de ella el observador pasa a ser actor del fenómeno físico, en vez de ser sólo espectador, que el ejercicio de la función de conocer perturba aquello que va a ser conocido ; ahora bien, es el ejercicio de esta función de conocer lo que causa perturbación y no el conocimiento mismo quien produce la deformación del

mundo físico que nos rodea, que nos es conocido, no es la acción de la mente humana lo que deforma la realidad, la idea la que obra sobre la cosa, sino que es la manera física mediante la cual se adquiere el conocimiento del mundo físico lo que lo deforma, es un proceso físico y no un proceso mental quien obra sobre lo que existe; son cosas (nuestros medios de observación) las que interactúan con cosas (los sistemas observados) y no ideas las que actúan sobre las cosas. Creemos que de este modo se puede intentar conciliar los supuestos del materialismo dialéctico con las concepciones mecanocuánticas.

Discutían los físicos clásicos si los colores de la luz blanca preexistían en ésta antes de ser descompuesta espectralmente por un prisma, y discuten ahora los físicos cuánticos sobre si el valor de una variable física es anterior a la medida, o se produce en el acto de la medida; análogamente a lo que discutíamos antes sobre si el electrón liberado en un átomo por ionización preexistía en el átomo antes de la colisión que lo ionizó o si se crea en el mismo momento de su liberación. En parte estas discusiones son de carácter un poco metafísico; lo esencial es que la medida del valor de una variable física modifica las probabilidades de los valores que se obtendrán en la medida posterior de otra variable física y que a su vez esta modificación de probabilidades depende del resultado concreto de la medida de la primera variable. En lo macroscópico hay una neta diferencia entre las dos operaciones físicas de medir y de seleccionar, las medidas se realizan directamente, en lo microscópico las medidas son indirectas y las experiencias tienen lugar sobre fenómenos masivos, en los que intervienen gran número de partículas, ya que las experiencias individuales sobre partículas son en términos macroscópicos desde el momento en que dejan huella sobre nuestros sentidos; si somos sensibles a ellas es porque son a nuestra escala de dimensiones.

Como ya hemos dicho, se abusa de los experimentos imaginarios, que son inobservables y que por tanto debieran de ser eliminados del razonar físico, al menos dentro del marco ortodoxo de la mecánica cuántica, si se quiere ser consecuente con una actitud integralmente antimetafísica. No tiene sentido hablar de experimentos en los que las partículas materiales o los fotones inciden sobre una pantalla por ondas de intensidad tan débil, que se

puede admitir que llegan uno a uno a la pantalla, y entonces las franjas de interferencia serían consecuencia de la continuación muy prolongada en el tiempo del experimento, como si una partícula pudiera interferir consigo mismo. En la mecánica clásica de fluidos una molécula individual es una partícula y muchas moléculas son un medio continuo, una pluralidad en la que se ha borrado, ha desaparecido el individuo ; se pasa así de lo discreto a lo continuo sin saber cómo, pero también sin ambigüedad en los cálculos matemáticos, cuando los fenómenos físicos se rigen por ecuaciones diferenciales o en derivadas parciales el medio es continuo, y cuando se rigen por los métodos de la mecánica o la termodinámica estadísticas el medio es discreto, está formado por un número enormemente grande de partículas. Asimismo, podríamos decir que una partícula cuántica individual es una partícula y que muchas partículas son una onda ; sin embargo, el dualismo onda-partícula nos indica que ni las partículas son partículas, ni las ondas son ondas al estilo que nos es familiar, sin que abogemos por esa abstracción híbrida de la «ondícula» ; las partículas tienen una propiedad en lo cuántico que no tienen las clásicas y es la que se deduce de las I. P., es el hecho de que partículas sobre partículas pueden dar nada, que es el equivalente de la física clásica de que luz más luz puede dar oscuridad. Por otra parte, las ondas que algunos físicos no interpretan como entes materiales, susceptibles de recibir un puntapié como dirá Landé, recordando la refutación por el Dr. Johnson del idealismo de Berkeley, cuando demostraba la existencia de una piedra dándola un puntapié, han de ser desde luego interpretadas como ondas de probabilidad, de acuerdo con la hipótesis estadística de Born, pero no son funciones de probabilidad como las clásicas, porque pueden interferir entre ellas, pueden reaccionar entre sí, la fusión de poblaciones cuánticas puede hacerse por superposición de las funciones de onda (cuando hay interacciones entre las poblaciones) y entonces existen I. P., o por mezcla (cuando no hay interacciones entre las poblaciones), mientras que las poblaciones clásicas solamente se funden entre sí, no sólo con conservación del tamaño de la población, sino también de la individualidad anterior de sus miembros, respetando sus orígenes de procedencia ; como ya señalamos en A. M. F la estadística cuántica no es bayesiana, mientras que la clásica sí lo es. En lo clásica

sico, si dos partículas procedentes de distintas fuentes inciden por separado en un mismo lugar del espacio, también inciden cuando lo hacen conjuntamente, mientras que en lo cuántico ya no sucede esto; las probabilidades de presencia en el espacio no se medían entre sí, sino que unas veces se refuerzan y otras se debilitan hasta poder anularse, son las I. P.

Junto a la solución ecléctica «ortodoxa» de la E.C. condensada en el principio de complementariedad que sintetiza ondas y partículas, está a un lado la teoría que solamente reconoce la realidad de las ondas y para la que las partículas son meras apariencias (Schrödinger), y al otro la teoría para la que las partículas son las únicas realidades y las ondas no son más que listas bien ordenadas de probabilidades (Landé). Para Landé hay una neta disimetría entre materia y radiación; para él los campos electromagnéticos son lo real y los fotones lo aparente, mientras que las partículas son lo real y las ondas de probabilidad carecen de existencia real, no son susceptibles de recibir un puntapié. En mi opinión no es así; las ondas son entes reales, si por ente real o por cosa entendemos lo que modifica o puede ser modificado por las cosas; las ondas de probabilidad no se asemejan a las tablas de mortalidad de una compañía de seguros como opina Landé, porque mientras que la muerte de un asegurado no produce un colapso de la tabla de mortalidad, lo que le pasa a las partículas sí influye sobre la onda de probabilidad; cuando las partículas inciden sobre una pantalla provista de una serie de rendijas estrechas y paralelas, las figuras de difracción que se obtienen difieren según se tapen o no algunas rendijas, se ejerce como una acción a distancia entre rendijas, las partículas que atraviesan una rendija no pueden ignorar en su comportamiento al difractarse, a las que han atravesado otras rendijas, al tapar o destapar rendijas estamos propinando puntapiés a las ondas de probabilidad, al igual que hacemos con las partículas cuando las obligamos a atravesar campos eléctricos o magnéticos o a colisionar unas con otras (véase A. M. F.). En lo macroscópico se pueden comprobar experimentalmente distribuciones de probabilidad repitiendo en el tiempo un gran número de sucesos individuales, mientras que en lo microscópico no existe esta posibilidad de verificación de sucesos individuales; las distribuciones de probabilidad han de comprobarse realizando sucesos colectivos

en que interviene un gran número de individuos, es algo parecido a la diferencia que existe entre echar un solo dado un gran número de veces y echar un gran número de dados una sola vez, con el efecto además de que los dados interfieren entre sí (I. P.). Existe una neta diferencia entre los conceptos clásico y cuántico de partícula; por eso dijimos anteriormente que las partículas cuánticas no se comportan como las que nos son familiares.

El indeterminismo de la mecánica cuántica es atenuado porque la distribución de probabilidades evoluciona en forma determinista, su r. c. c. sigue una ecuación en derivadas parciales que es la E. S., mientras que el comportamiento de las partículas es aleatorio (indeterminado) porque está asociado a la f. f. cuya r. c. c. es la función de onda. Podríamos calificar este indeterminismo como de primera especie, porque junto al indeterminismo que existe siempre asociado a la probabilidad, hay determinismo para la probabilidad. Pero puede imaginarse también un indeterminismo más fuerte, que llamaremos de segunda especie cuando también la distribución de probabilidades (el v. e.) evoluciona en forma indeterminada de acuerdo con un proceso estocástico. Es el caso, por ejemplo, de un punto que se mueve sobre una circunferencia o una esfera de radio la unidad (*) con un movimiento aleatorio (por ejemplo, un movimiento browniano); entonces la distribución de probabilidades binomial o trinomial, cuyos términos son los cuadrados de las coordenadas cartesianas ortogonales del móvil, evolucionan probabilísticamente, es decir, la propia probabilidad evoluciona en el tiempo de acuerdo con un proceso estocástico. Otro ejemplo interesante sería el siguiente: supongamos seis matrices unitarias y un vector normalizado de un espacio eucléo complejo de n dimensiones; cada una de las seis matrices define una probabilidad en cadena (ecuación (46)), de modo que los términos de la distribución de probabilidades multinomial asociada son los cuadrados de los módulos de las componentes del dicho vector, que evoluciona en cuanto a la probabilidad en forma determinista, pero si en cada transición (paso de $n - 1$ a n en el subíndice de la (46)) se escoge la matriz unitaria de entre las seis al azar, por ejemplo arrojando un dado y

(*) El número de dimensiones del espacio eucléo puede ser cualquiera, y puede ser complejo.

escogiendo la matriz que lleva el mismo número de orden que la puntuación del dado que ha salido, entonces la probabilidad evoluciona en forma indeterminada. Son ejemplos de indeterminismo de segunda especie.

Vamos a ver cuál es el significado de la reducción del paquete de ondas en el ejemplo anterior del proceso estocástico asociado al movimiento de un punto sobre una esfera. A medida que el punto se mueve de forma continua, el v. e. (la distribución de probabilidades) va evolucionando en el tiempo de forma continua, pero en un instante dado, el equivalente al de la medida en mecánica cuántica el móvil salta de su posición sobre la esfera a otra bruscamente, se produce una discontinuidad en el movimiento y a partir del salto el móvil sigue moviéndose en forma continua de acuerdo con la misma ley del movimiento que llevaba; a un observador le parecería que el móvil se mueve sobre la esfera con un movimiento continuo salpicado de discontinuidades, de saltos bruscos e instantáneos de posición, que son las sucesivas reducciones del paquete de ondas. El v. e. es el radio cuyo extremo es el móvil.

Cuando hacia la segunda mitad del siglo XIX se introdujo el concepto de entropía, se la calificó de un no sé qué, porque no hiere nuestros sentidos, como por ejemplo lo hacen la luz el sonido o el calor; pero adquirió carta de naturaleza por poseer la cualidad esencial para que un concepto físico se admita, y es el de que represente una magnitud mensurable, se supo que en las transformaciones irreversibles en un sistema cerrado la entropía va aumentando; realmente todo lo que es mensurable ejerce acción sobre nuestros sentidos, tiene capacidad de producir sensaciones, y así la entropía es algo tangible o visible, cuando sentimos la tendencia a uniformizarse las temperaturas en el contacto de focos fríos y calientes, o a homogeneizarse las mezclas entre sí. Hoy la entropía es un concepto que ha saltado de la física a otras ciencias, es lo opuesto a la cantidad de información, cuanto más entropía menos información, es una medida del desorden, cuanto menos orden menos información. Hay fenómenos distintos de los de la termodinámica o de la difusión, en los que la entropía no va en aumento, sino que puede disminuir con el tiempo, el paso del tiempo va aumentando la cantidad de información, son los siguientes: en un proceso regido por una cadena de Markov en virtud

de la propiedad ergódica, cualquiera que sea la distribución final de probabilidades, se tiende asintóticamente en el tiempo a una distribución final de probabilidades que es siempre la misma, independiente por tanto de la inicial; si la matriz de las probabilidades de transición es biestocástica entonces la distribución final de probabilidades es uniforme (entropía máxima), la entropía va aumentando con el tiempo. Si la matriz es biestocástica las sumas de los elementos de cualquier fila o columna son iguales a la unidad, y como ambas tienen un elemento común, resulta que las sumas de los elementos de cualquier fila o columna, excluido el elemento que les es común, son iguales, cuyo significado probabilístico es que las probabilidades de salida y entrada del sistema en cualquier estado son iguales; esta es pues, en mi opinión, la condición para que un sistema probabilístico markoviano evolucione en el tiempo con aumento de la entropía, un caso particular es cuando la matriz de Markov es simétrica y entonces la probabilidad de transición de un estado a otro es igual a la del segundo estado al primero, cualesquiera que sean éstos. Es sabido que en caso de matriz no biestocástica, la distribución final de probabilidades no es uniforme, por tanto el sistema puede evolucionar con disminución de la entropía.

Decíamos anteriormente que lo importante no era discutir sobre si los valores de las variables mecanocuánticas preexisten antes de ser medidas, o si se producen en el acto de la medida, sino el hecho de que medir estos valores, preexistan o no, perturba instantáneamente el sistema medido, reduce el paquete de ondas, es decir cambia bruscamente la función de onda de lo que era antes de la medida a ser el vector propio correspondiente al valor propio que ha puesto de relieve la medida. Esta reducción del paquete de ondas se puede efectuar en todas las estructuras matemáticas que nos han sido sugeridas por la mecánica cuántica, y cuya teoría más general hemos expuesto en las páginas anteriores. Es obvio que el sistema se halla extendido espacialmente, y que la perturbación se ha extendido por todo el espacio ocupado por el sistema con una velocidad infinita, pero en nuestra opinión esta propagación instantánea de la perturbación es en lo que a su rapidez se refiere análoga a la de la iniciación de las vibraciones de una placa o membrana cuando recibe una percusión, o al cambio de velocidad de una pelota cuando choca con la pared. En lo cuántico medir y seleccionar

tienden a confundirse como operaciones físicas ; cuando se obliga a unas partículas a pasar por una rendija practicada en una pantalla, se está seleccionando a las partículas, pero al mismo tiempo se está midiendo su posición con un cierto error experimental que es el de la anchura de la rendija. Lo que sucede es que si de una población de partículas que tienen una distribución estadística en cuanto a los posibles valores que nuestros aparatos de medida pueden dar para un conjunto de variables físicas (hay convergencia en probabilidad de las curvas representativas de la f. f. de la probabilidad y de la función estadística de repartición empírica, cuando el número de partículas tiende a infinito), se escoge una muestra, una subpoblación (los valores del número de partículas de estas subpoblaciones son también muy grandes) de acuerdo con un criterio de selección definido por una cierta distribución estadística del valor de una sola variable física, automáticamente quedan determinadas las distribuciones estadísticas de las restantes variables físicas, de acuerdo con las reglas de reducción del paquete de ondas y de las R. I. H., es decir que si por ejemplo escogemos la subpoblación que pasa a través de una rendija (selección en la posición) hemos efectuado al mismo tiempo una selección en cuanto al momento, de acuerdo con este nuevo tipo de dependencia estocástica que a mi juicio ha introducido la mecánica cuántica y que era desconocido en la clásica (véase A. M. F.) ; no se puede seleccionar arbitrariamente en cuanto a dos subpoblaciones simultáneamente respecto a dos variables físicas (a menos que sus operadores sean conmutativos), y si en el ejemplo anterior, después de haber seleccionado respecto a la posición (paso a través de la rendija), seleccionásemos respecto al momento, volveríamos a hacer de nuevo una selección respecto a la posición (por el hecho de haber seleccionado respecto al momento) totalmente independiente de la que hicimos primero, es decir las selecciones o las medidas (reducciones de los paquetes de ondas) son con pérdida de memoria. Pero hay más, si se realizan dos selecciones de subpoblaciones por separado, se obtienen resultados que fundidos al estilo clásico, arrojan un resultado distinto de si se realizan conjuntamente las dos selecciones, es decir se realiza una selección simultánea de las dos subpoblaciones, y en ese caso las partículas seleccionadas se olvidan de a cuál de las dos subpoblaciones pertenecían, que es la causa de las I. P. y del carácter no bayesiano de esta estadística

nada familiar (véase A. M. F.). En resumen si se selecciona respecto a una variable física se selecciona respecto a las restantes, es decir si se selecciona respecto a la posición, se selecciona respecto al momento y viceversa.

Si $A, B, C, \dots$, son operadores hermíticos de E , pertenecientes a $\mathcal{A}$, cada par de ellos, A y B , define una matriz unitaria a partir de sus vectores propios $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, cuyo término general es el :

$$(A, B) = \parallel \langle y_i, x_j \rangle \parallel \quad (57)$$

se tiene que :

$$(A, A) = I; \quad (A, B) = (B, A)^+; \quad (A, C) = (A, B) (B, C). \quad (58)$$

En el caso del espacio ordinario las matrices (57) son las de las transformaciones de coordenadas cartesianas ortogonales, es decir sus términos son los cosenos directores de los ejes.

Llamamos cuadrado interno de una matriz a otra matriz cuyos términos son los cuadrados de los módulos de los términos de la primera, y las representamos por un exponente 2 en la parte superior derecha. Se tiene que :

$${}^2(A, B) = \parallel \parallel \langle y_i, x_j \rangle \parallel^2 \parallel = {}^2(B, A)^t \quad (59)$$

debido a la segunda (58). Además :

$${}^2(A, C) \neq {}^2(A, B) {}^2(B, C) \quad (60)$$

es decir el cuadrado interno del producto de dos matrices es distinto del producto de los cuadrados internos de los factores.

Se cumple la igualdad simbólica :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (A, B) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (61)$$

porque las componentes de los vectores columnas, son vectores, se trata pues de vectores columna simbólicos.

Las matrices (59) son biestocásticas, por ser (57) unitarias, hay por tanto probabilidades en cadena de Markov asociadas a las (59)

cuya significación física es la siguiente : el término general de (59) es la probabilidad de que habiendo una medida del operador A, dado el valor propio α_j correspondiente al vector propio x_j , una medida posterior de la variable física representada por el operador B dé como resultado el valor propio β_i correspondiente al vector propio y_i . De la última (58) y de (60) se sigue que las medidas de la variable física representada por el operador C después de haber medido la representada por el operador A y el B sucesivamente no se calculan de acuerdo con las reglas de las cadenas markovianas. Obsérvese que como consecuencia de (59) hay simetría entre las probabilidades de transición de los estados puros de A a los de B y de los de B a los de A. es decir que es igual la probabilidad de que una medida de B de el valor β_i después de que la medida de A haya dado el valor α_j , a la probabilidad de que una medida de A de el valor α_j después de que una medida de B haya dado el valor β_i .

Existe la posibilidad de considerar v. e. aleatorios en vez de ciertos, que para los valores medios (no para las fluctuaciones) tienen el mismo efecto que la mezcla de v. e. ; supongamos m vectores normalizados $x_1, \dots, x_m$ que obedecen a ecuaciones del tipo (36) con los H iguales o distintos para algunos $H_1, \dots, H_m$, podemos considerar que el v. e. tiene las probabilidades $q_1, \dots, q_m$ de ser uno de los x anteriores, entonces para los valores medios se obtiene la misma expresión que para la mezcla (33) ; pero hay una notable diferencia con el caso anterior, porque antes se mezclaban los efectos de todos los x , mientras que ahora actúa solamente un x , pero como v. a., se trata de una v. a. bivalente formada por una v. a. que con las probabilidades q corresponde a cuál de los v. e. x es el v. e. de la evolución del sistema, y la otra v. a. es la específica de las distribuciones de probabilidades asociadas a este v. e. del sistema y a los operadores A de E pertenecientes a $\mathcal{A}$; hay por tanto una mayor riqueza de problemas, relativos a probabilidades condicionales, inversas, etc., propios de las v. a. bivariantes. Vamos a ver un ejemplo de este campo más vasto de posibilidades ; supongamos dos v. e. x e y , y dos sistemas U y V, tales que existe la probabilidad $1/2$ de que U sea descrito por x y V por y , y la probabilidad también $1/2$ del caso contrario de que U sea descrito por y , y V por x ; entonces si existe un medio para comprobar si U es descrito por ejemplo por x ,

automáticamente se tiene la certeza de que V es descrito por y , se puede adquirir información sobre V (información restringida a cuál es su v. e.) mediante manipulaciones con U que conduzcan a la determinación de su v. e., por tanto sin manipular V , pero como todo esto únicamente atañe a la aleatoriedad de los v. e., a la primera componente de la v. a. bivalente a que antes hicimos referencia, no suponen en ningún caso reducción del paquete de ondas, que solamente tiene lugar cuando se opera sobre los A de $\mathcal{A}$, que son la segunda componente de la v. a. bivalente. Esta introducción de v. e. aclara en mi opinión la E. P. R., que vamos a analizar a continuación.

Hay un tipo de paradojas muy importante en la mecánica cuántica como son la de Einstein, Podolsky y Rosen publicada en *Physical Review* en 1935, y rebatida o al menos contestada por Bohr en el mismo año y en la misma revista, la del «gato» de Schrödinger publicada también en 1935 en *Naturwissenschaften*, y la del «amigo» de Wigner en 1962 en «The Scientist Speculates». Estas tres paradojas han hecho correr ríos de tinta, y no van contra el carácter verdadero de la mecánica cuántica sino contra su carácter de teoría completa. Las de Schrödinger y Wigner introducen elementos no físicos como son la muerte o supervivencia de un ser vivo la primera y la conciencia la segunda, la E. P. R. parece ser más importante y solamente hace referencias a consideraciones estrictamente físicas.

La paradoja de Schrödinger consiste en que un gato se encierra en una cámara de gas, con la indicación de que debe de ser protegido contra su propia interferencia, en un contador Geiger se introduce una cantidad muy pequeña de sustancia radiactiva de modo que al cabo de una hora haya iguales probabilidades de que se desintegre o no un átomo; si al cabo de la hora se desintegra un átomo se pone en funcionamiento la cámara de gas y el gato muere, la función de onda del sistema se expresa por partes iguales de gato vivo o muerto; lo que realmente se persigue es que un suceso cuántico (microfísico) desencadene un proceso clásico (macrofísico) directamente observable, y de aquí por la observación directa de lo macrofísico, sin perturbar al sistema microfísico, se obtiene información sobre él mismo, pero en mi opinión lo que se está haciendo es una observación, una medida, sobre el sistema microfísico, indirecta como todas ellas, porque la acción ejercida

por el suceso cuántico, si tiene lugar, sobre el sistema macrofísico, perturba al sistema microfísico ; la puesta en marcha de la cámara de gas desempeña el papel de un aparato de medida, la visión de la muerte o supervivencia del gato es como la lectura en un aparato de medida, no es nunca la lectura lo que perturba, que en definitiva es la entrada en la conciencia del observador de la información, la adquisición de un conocimiento por la mente humana, sino que lo que perturba al objeto observado es el medio que se utiliza para que el aparato de medida señale esa lectura, para adquirir ese conocimiento o información.

Einstein, Podolsky y Rosen comienzan por afirmar su creencia en una realidad física que no depende de nuestra observación, que a priori nos es desconocida, y que precisamente la misión de la ciencia es averiguar cuáles son sus propiedades ; reconocen que no es fácil dar una definición significativa (operacional) de la realidad física, pero que sin embargo sí se pueden reconocer sin ambigüedad algunos elementos de la realidad física y para ello proponen el siguiente criterio : «Si sin perturbar de ninguna manera un sistema se puede predecir con certidumbre el valor de una magnitud física del mismo, entonces existe verdaderamente un elemento de la realidad física, que corresponde a esta magnitud». Criterio que aplican al siguiente caso concreto : sea una partícula de spin 0, que en un instante dado se desintegra en dos partículas U y V, con conservación del spin, entonces si una de ellas tiene el spin $1/2$ la otra tendrá — $1/2$; transcurrido suficiente tiempo para que las dos partículas estén suficientemente alejadas en el espacio, y por ende puedan ser consideradas como independientes (sin interacciones), entonces si un observador mide el spin de V y halla por ejemplo el valor $1/2$, con su medida perturba el estado de V, pero no el de U, que es independiente de V, pero por la conservación del spin, puede predecir con toda exactitud que el resultado de la medida del spin de U ha de arrojar necesariamente el valor — $1/2$, con lo que se puede afirmar que existe un sustrato real para el spin de ambas partículas antes de toda medida, y deducen el carácter incompleto de la mecánica cuántica, la cual no proporciona una descripción completa de la realidad física de los sistemas individuales, sino que solamente describe las propiedades estadísticas de los conjuntos de sistemas.

La refutación hecha por Bohr es una modificación de los con-

ceptos tradicionales de la filosofía natural, basada más bien en una preferencia por unos puntos de vista dotados de posibilidad lógica, pero en modo alguno es totalmente convincente, y Einstein, aun admitiendo la posibilidad lógica y la coherencia interna de la argumentación de Bohr, se reafirma en sus propias creencias en la realidad física opuestas a las de la E. C. ; hasta la E. P.R., los experimentos imaginarios sobre una partícula habían llevado a la necesidad de soldar entre sí, formando un todo indiviso, observador y sistema observado, dando realidad a este todo y negándosela a sus partes separadas, pero la E. P. R. es un experimento imaginario sobre dos partículas en vez de una, y no basta con la anterior actitud, sino que la E. C. se ve obligada a radicalizar más su actitud, ya no solamente hay que soldar observador y sistema observado, ya no basta con considerar que la observación vuelve borroso a lo observado, sino que también se vuelve borroso (desenfocada la imagen) el marco de referencia o sistema de coordenadas en que el observador encaja la representación que él se hace de la realidad física, o sino se quiere emplear esta palabra, de los fenómenos. Bohr, refiriéndose a la E. P. R. en la revista antes citada, reconoce que no hay perturbación mecánica del sistema (partícula) U cuando se efectúa la medición sobre V, pero hay «una influencia sobre las condiciones mismas que definen los tipos posibles de predicciones relativas al comportamiento futuro del sistema», y prosigue «... estas condiciones constituyen un elemento inherente a la descripción de todo fenómeno al cual el término de «realidad física» pueda ser dado», y de aquí deduce que el argumento de los autores de la E. P. R. no justifica su conclusión. Obsérvese pues como Bohr tiende a formar la realidad física a base de fenómenos y soldar en un todo observador, objeto observado y marco en que se encuadra todo ello, y que estos últimos (no sólo el objeto observado como ocurría en el experimento del microscopio de Heisenberg) se vuelven borrosos por el acto de la observación. Algunos físicos y filósofos creen que Bohr escamotea los problemas

En mi opinión la E. P. R. hay que enfocarla mediante el empleo de v. e. aleatorios y la subsiguiente introducción de la v. a. bivalente a que hicimos referencia anteriormente, tanto U como V no son descritos por v. e. ciertos o por mezclas de v. e., sino por v. e. aleatorios, de modo que si U tiene el spin $1/2$ su v. e.

es x^+ y V tiene entonces spin $-1/2$ y v. e. x^- , siendo x^+ y x^- independientes, y si U tiene el spin $-1/2$, entonces tiene el v. e. x^- y V el spin $1/2$ y el v. e. x^+ . No hay, por tanto, reducción del paquete de ondas transmitiéndose de la medida del spin de V a U, sino certeza en cuál es el spin de U cuando se mide el spin de V, consecuencia de la conservación del spin y del origen común de U y V como subsistemas resultantes de la fragmentación de un sistema que los reunía y cuyo spin era 0. No es lo mismo medir el spin, que la posición o el momento; no es lo mismo una mezcla de v. e., que la aleatoriedad de los v. e. requeridos para la descripción de sistemas físicos; el sistema U y el V no son descritos por la mezcla de dos v. e. en iguales proporciones, sino por este nuevo concepto de v. e. aleatorio, es decir por un solo v. e. que puede tomar con igual probabilidad dos valores distintos de v. e.

La E. P. R. ha sido planteada también cuando lo que se mide no es el spin, sino otra variable física como por ejemplo la posición o el momento; es tema sobre el que ha insistido varias veces Einstein, entre ellas en sendas cartas hechas públicas a Popper en noviembre de 1935 y a Born en abril de 1948, en la que le incluye un artículo sobre «Mecánica Cuántica y Realidad», la argumentación es más o menos en los siguientes términos: se considera un sistema que consta de dos subsistemas U y V, los cuales interactúan entre sí durante un tiempo limitado, después se separan y se independizan; la ecuación de Schrödinger da la función de onda del sistema total antes y después de la interacción, y si después de la interacción se efectúa una medida de la posición o del momento del subsistema V, la ecuación de Schrödinger nos da la función de onda del subsistema U, la cual será distinta según que hayamos medido bien sea la posición o el momento de V; supone Einstein como, por lo que él llama «principio de contigüidad» (*), el estado físico de U ha de ser independiente de la elección hecha de la variable física de V que ha sido medida, se sigue que al mismo estado físico de U pertenecen dos funciones de onda distintas, y puesto que para que una descripción de un estado físico sea completa debe de ser única, se sigue que la función de onda no es una descripción completa. Einstein considera incompatibles el principio de con-

(*) El principio de contigüidad expresa la independencia entre dos objetos físicos muy alejados en el espacio, o lo que es lo mismo que la influencia externa sobre uno de ellos no tiene influencia directa sobre el otro.

tigüidad que para él es un axioma, porque su negación equivale a negar la existencia de sistemas cerrados o casi cerrados y en consecuencia la postulación de leyes físicas verificables por la experiencia, con la tesis de la mecánica cuántica de que una partícula no tiene ni momento ni posición bien definidas antes de la medida, y que los valores exactos de estas variables físicas se producen en el acto de su medida como consecuencia de la interacción desconocida entre la partícula y el aparato de medida; Einstein se siente inclinado a creer que la descripción de la realidad por la mecánica cuántica es incompleta e indirecta y proclama su esperanza de que algún día será reemplazada por otra descripción completa y directa.

Born ha rebatido el razonamiento de Einstein, en carta también publicada, negando el principio de contigüidad como verdad evidente, definiendo la coherencia como la propiedad que tienen los objetos separados en el espacio de no ser independientes si han tenido un origen común, y aduce un ejemplo claro y convincente extraído de la óptica clásica, relativo a que cuando un rayo de luz se divide en dos (por reflexión, doble refracción, etc.), que siguen distintos caminos, se puede deducir que las direcciones de polarización de ambos rayos son perpendiculares entre sí, y, por tanto, de una medición efectuada en una parte del espacio se puede deducir el estado físico en otra parte muy alejada del primero.

En mi opinión existe una diferencia entre medir el spin, o medir la posición o el momento; en el primer caso (el spin es un operador de espectro discreto con solo dos valores propios) se aclara la E. P. R. mediante la introducción de los v. e. aleatorios, como explicamos anteriormente; en el segundo caso (operadores de espectro continuo), el criterio de independencia entre dos sistemas microscópicos no se basa en la distancia que los separa en el espacio, ni en el tiempo transcurrido desde la desintegración del sistema total primitivo (o de cualquier otra interacción entre los subsistemas parciales, por ejemplo un choque) del que los actuales son los fragmentos en que se desintegró, sino de la estructura del v. e. que describe el sistema total (conjunto de los dos sistemas), siempre que una medida sobre el uno dé información sobre el otro, es que sigue subsistiendo tal interacción, por separados que estén en el espacio. La interacción entre sistemas en lo cuántico es consecuencia del v. e. que describe el estado físico; por ejemplo el principio de exclusión de Pauli, según el cual es imposible que dos par-

tículas de spin impar (fermiones) tengan los mismos números cuánticos, es consecuencia de la interacción entre ellas, expresada en este caso por la antisimetría de la función de onda, es la forma que en lo cuántico toma el principio de la impenetrabilidad de los cuerpos.

Hay otro experimento imaginario, que a mi juicio es aclarado por la introducción de v. e. aleatorios ; consiste en un espejo semi-transparente que refleja parte de la luz y deja pasar a su través (transmite al otro lado del espejo) otra parte, de modo que las probabilidades de que un fotón atravesase el espejo o sea reflejado por él son iguales. Si un fotón llega al espejo, antes de que se sepa si es o no reflejado las posibilidades de que esto suceda o no valen $1/2$; si experimentalmente se comprueba que ha sido reflejado, instantáneamente y de modo discontinuo estas probabilidades pasan a ser 1 y 0 (reducción del paquete de ondas). Heisenberg analiza este experimento en su libro *Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie*, y textualmente dice : «Mediante el experimento (esto es la medición por la cual encontramos el fotón reflejado) se ejerce cierto tipo de acción física (una reducción del paquete de ondas) desde el lugar que se ha encontrado la mitad reflejada del paquete ondas a otro lugar, todo lo distante que queramos, en que acontece estar la otra mitad del paquete», más adelante agrega que esta acción física se propaga con velocidad superior a la de la luz, pero que como no puede ser utilizada para la transmisión de señales no contradice a la teoría de la relatividad. Para unos físicos esta reducción del paquete de ondas es un proceso mental que se produce con la velocidad del pensamiento, porque para ellos la palabra «estado» significa estado de conocimiento de un observador, las ondas de probabilidad son para ellos ondas de expectativas ; para otros físicos la reducción del paquete de ondas es un proceso físico propagándose por el espacio ; para ellos, «estado» significa estado físico de un objeto ; algunos llegan a materializar la función de onda como describiendo un medio material continuo en el espacio y el tiempo (Schrödinger), o como un fluido en el que habría fuerzas cuánticas hipotéticas que determinan su movimiento (Bohm). En mi opinión la materialización de las ondas de probabilidad no hay que buscarla en un retorno al cartesianismo o al mecanicismo, sino en su capacidad de modificar y ser modificadas por las cosas, modificaciones que tienen capacidad de producir sensaciones sobre nuestros aparatos de medida.

Respecto a este experimento imaginario del espejo semitransparente, en mi opinión hay que describir el estado físico mediante v. e. aleatorios, porque el ser o no ser reflejado es un operador de espectro discreto con dos valores propios (como el spin), que son ser reflejado y ser transmitido, no hay pues para ellos reducción del paquete de ondas, porque el v. e. que describe el fotón no es la mezcla en partes iguales de los v. e. x^+ (ser transmitido) y x^- (ser reflejado), sino un v. e. aleatorio que puede tomar los valores x^+ y x^- con probabilidades iguales, el experimento que permite comprobar que el fotón ha sido reflejado transforma el v. e. aleatorio en un v. e. cierto (el x^-), da a la v. e. ser o no ser reflejado (que no es una v. a. cuántica como lo es la posición o el momento) un valor preciso.

La mecánica cuántica relativista plantea nuevos problemas, entre ellos el de la propia existencia de una partícula debido a la posibilidad de la transformación recíproca entre energía y materia; la existencia es una propiedad física, como pueda serlo la posición o la velocidad; deja de ser un elemento estable y permanente, como lo son la masa, la carga o el spin. Existen para las partículas relativistas y en especial para los fotones, fenómenos de interferencias de poblaciones (I. Pb.) que son algo diferentes de las I. P., de que nos hemos ocupado hasta ahora, propias de todas las partículas cuánticas.

Llamamos función de densidad (f. d.) a una función real de variable real no negativa, e integrable (pertenece pues a L), masa asociada, al valor de la integral y r. c. c. de la f. d. a una función tal que el cuadrado de su módulo es igual a la anterior (su amplitud está unívocamente determinada y su fase queda indeterminada), se sigue que toda función de cuadrado sumable (perteneciente a L^2) es la r. c. c. de una f. d.; las I. Pb. consiste en que la suma de dos r. c. c. de dos f. d. es la r. c. c. de una f. d. que no es la suma de las dos f. d. anteriores, con lo que el tamaño de la población pierde su carácter de aditividad cuando se pasa de lo clásico a lo cuántico relativista. Obsérvese la diferencia entre la adición y la superposición de funciones de cuadrado sumable, operación ésta última específica de la mecánica cuántica no relativista; la primera produce I. Pb. y la segunda solamente I. P.; las definiciones anteriores son también válidas para lo discreto, llamamos vector de densidad (v. d.) a un vector de R^n , cuyas componentes

son no negativas, y masa asociada al v. d. a la suma de todas sus componentes ; la r. c. c. de un v. d. es un vector de C^n , tal que el cuadrado del módulo de cualquiera de sus componentes es igual a la componente del mismo nombre del v. d. ; el producto de v. d. por matrices estocásticas conserva la masa, y transforma al v. d. en otro v. d., mientras que el producto de la r. c. c. de un v. d. por matrices unitarias da nuevos r. c. c. de v. d. con conservación de las masas de éstos. Respecto a esta curiosa aritmética de los fotones, remitimos al lector a mi libro *Grandes Problemas de la Filosofía Científica*.

Cuando el espacio de Hilbert es L^2 no solamente a cada vector normalizado de L^2 y a cada operador hermítico A de L^2 perteneciente $\mathcal{A}$, hay asociada una distribución de probabilidades como vimos anteriormente, sino también a x , que ahora es una función de cuadrado sumable normalizada, hay asociada una distribución de probabilidades, cuya f. f. es esta función. Esta propiedad se pierde cuando consideramos un espacio de Hilbert distinto de L^2 , pero se puede recuperar si se puede proceder de la siguiente manera : sea E un espacio vectorial, F un conjunto, $\mathcal{F}$ una σ -álgebra de partes de F , para todo miembro de F_i de $\mathcal{F}$ se puede definir un producto interno de E , que denotamos por :

$$\forall x, \forall y \in E: \langle x, y \rangle_{F_i} \quad (*) \quad (62)$$

(con lo que E es seminormado al menos), que goce de la σ -aditividad respecto a los miembros de $\mathcal{F}$, es decir que :

$$\forall i, \forall j \in N / F_i \cap F_j = \phi: \langle x, y \rangle_{\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, y \rangle_{F_n} \quad (63)$$

y además (62) para F hace de E un espacio de Hilbert ; en ese caso todo vector x de E normalizado define una distribución de probabilidad en $\mathcal{F}$ y una v. a. ξ tales que :

$$\text{Prob}(\xi \in F_i) = \|x\|_{F_i}^2 : \|x\|_F^2 = 1 \quad (64)$$

(*) En realidad debíamos llamarle semiproducto interno porque sustituimos el axioma

$$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta \text{ (elemento neutro)} \quad (63a)$$

por el

$$x = \theta \Rightarrow \langle x, x \rangle = 0. \quad (63b)$$

el caso particular de L^2 es cuando $\mathcal{F}$ es la σ -álgebra de los borelianos en R , y (62) la integral

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi^*(x) dx \quad (65)$$

siendo $f(x)$ y $\varphi(x)$ funciones de cuadrado sumable.

En mi memoria : «La convergencia integral en la mecánica cuántica y la generalización de los espacios de Hilbert» (publicada en la revista de la Academia en 1969), ya expuse mi opinión de que la fundamentación de la mecánica cuántica requiere ampliar el espacio de Hilbert completándolo con la topología de la convergencia integral allí definida (y también en mi libro *Diccionario de Matemática Moderna*). La convergencia integral consiste en lo siguiente : si $\mathcal{B}$ es la σ -álgebra de los borelianos en R , $f(x)$ pertenece a L^2 , así como la sucesión $\{f_n(x)\}$, se dice que esta sucesión converge integralmente a $f(x)$ si se cumple que :

$$\forall E \in \mathcal{B}, \forall \varepsilon > 0; \exists N/\forall n > N: \left| \int_E (|f(x)|^2 - |f_n(x)|^2) dx \right| < \varepsilon. \quad (66)$$

La topología de la convergencia integral se extiende sin más a cualquier L^p , y también a l^p ; por ejemplo para l , si $\{x_i\}$, así como la sucesión de sucesiones $\{x_{i_n}\}$ pertenecen a l , se dice que la última converge integralmente a la primera si se cumple que :

$$\forall m, \forall \varepsilon > 0, \exists N/\forall n > N: \left| \sum_{i=1}^m x_i - x_{i_n} \right| < \varepsilon. \quad (67)$$

Lo anterior es independiente del número de variables, y de si el espacio es real o complejo, igual que lo que vamos a exponer a continuación, pero para mayor facilidad tipográfica nos limitaremos a funciones complejas de una sola variable real y omitiremos los límites de la integral. Si la sucesión de funciones $\{\varphi_n(x)\}$ es tal que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \varphi_n^*(y) = \delta(x - y) \quad (68)$$

en donde la δ es la distribución delta de Dirac, entonces bajo condiciones muy generales una función $f(x)$ es desarrollable en serie de las φ , porque :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f(y) \delta(x-y) dy = \int f(y) \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \varphi_n^*(y) dy = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \end{aligned} \quad (69)$$

siendo

$$a_n = \int f(y) \varphi_n^*(y) dy \quad (70)$$

aun cuando las φ no sean ortogonales ni normalizadas ; la $f(x)$ no tiene porque ser de cuadrado sumable. Si :

$$\int \varphi_n(x) \varphi_m^*(x) dx = \delta_{nm} \quad (71)$$

en donde las deltas son los símbolos de Kronecker, se cumple que :

$$\int |f(x)|^2 dx = \int \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \right|^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \quad (72)$$

o lo que es lo mismo ser $f(x)$ de cuadrado sumable y ser convergente la última serie son proposiciones equivalentes.

Si en vez de una sucesión discreta de φ como antes, se trata de una sucesión continua $\varphi(x, \alpha)$, con α variando de $-\infty$ a $+\infty$ entonces si se cumple la :

$$\int \varphi(x, \alpha) \varphi^*(y, \alpha) d\alpha = \delta(x-y) \quad (73)$$

una función $f(x)$ bajo condiciones muy generales es desarrollable en integral de la φ , porque :

$$f(x) = \int f(y) dy \int \varphi(x, \alpha) \varphi^*(y, \alpha) d\alpha = \int a(\alpha) \varphi(x, \alpha) d\alpha \quad (74)$$

siendo :

$$a(x) = \int f(y) \varphi^*(y, x) dy \quad (75)$$

es decir, la integral (74) es invertible.

Si además se cumple que :

$$\int \varphi(x, \alpha) \varphi^*(x, \beta) dx = \delta(\alpha - \beta) \quad (76)$$

(que es la equivalente en el caso continuo de las (71) (*), entonces se cumple que :

$$\begin{aligned} \int |f(x)|^2 dx &= \int dx \left[\int a(\alpha) \varphi(x, \alpha) d\alpha \int a^*(\beta) \varphi^*(x, \beta) d\beta \right] = \\ &= \iint a(\alpha) a^*(\beta) d\alpha d\beta \int \varphi(x, \alpha) \varphi^*(x, \beta) dx = \\ &= \iint a(\alpha) a^*(\beta) \delta(\alpha - \beta) d\alpha d\beta = \int |a(\alpha)|^2 d\alpha \end{aligned} \quad (77)$$

ser $f(x)$ y $a(\alpha)$ de cuadrado, sumable son proposiciones equivalentes, así como estar las dos normalizadas. Además se demuestra en forma parecida que :

$$\int f(x) g^*(x) dx = \int a(\alpha) b^*(\alpha) d\alpha \quad (78)$$

Por tanto, $\varphi(x, \alpha)$ y $\varphi^*(x, \alpha)$ transforman funciones de cuadrado sumable en funciones de cuadrado sumable con conservación de la norma y del producto interno, transforman pues un sistema ortonormal completo en un sistema ortonormal completo. Si se cumplen (73) y (76) a las funciones φ las llamamos r. c. c. de la distribución delta de Dirac (véase mi *Diccionario de Matemática Moderna*). Obsérvese que :

$$\varphi(x, \alpha) = \varphi(\alpha, x) \implies [(73) \iff (76)] \quad (79)$$

(*) (73) es la equivalente en el caso continuo de la (68).

es decir la simetría de la φ implica la equivalencia entre (73) y (76). Si se cumple la (73) y la (76) no, entonces son válidas las fórmulas (74) y (75), no hace falta que $f(x)$ sea de cuadrado sumable.

Puede ocurrir que :

$$\int |\varphi(x, \alpha)|^2 dx \begin{cases} < \infty \\ = \infty \end{cases} \quad (80)$$

en el primer caso se puede normalizar la φ multiplicándola por el oportuno coeficiente de normalización, las $\varphi(x, \alpha)$ pertenecen a L^2 y forman una base continua de dicho espacio. Si se cumple la segunda (80) las $\varphi(x, \alpha)$ no pertenecen a L^2 , pero siguen formando una base continua de dicho espacio, es decir las funciones de L^2 son desarrolladas en integral (combinación lineal de una base continua) de la $\varphi(x, \alpha)$. Este cálculo simbólico con integrales adquiere rigor matemático con la teoría constructiva que hemos dado de la distribución delta de Dirac.

Estos resultados los habíamos obtenido en memorias publicadas en la revista de la Academia (véase también mi *Física Matemática*), pero ahora vamos a ver cómo nos llevan al concepto que denominamos de casihermiticidad que se presenta en L^2 y en la mecánica cuántica. En ésta, dos operadores fundamentales son la multiplicación por la misma variable real x (posición de la partícula) y el :

$$-\frac{h}{2\pi i} \frac{d}{dx} \quad (81)$$

(momento de la partícula).

El espectro del operador x es continuo, su función propia es la $\delta(x - a)$ y su valor propio a , la cual no pertenece a L^2 por no cumplir la primera (80), pero forma una base continua de L^2 por cumplir (73) y (76).

El espectro del operador (81) es continuo, siendo su valor propio p y su función propia

$$e^{-\frac{2\pi i}{h} p x} \quad (82)$$

donde c es un coeficiente que asegura el cumplimiento de (73) y (76), no pertenece a L^2 porque no cumple la primera (80), pero sí forma una base continua. De la relación :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(x-y)\alpha} d\alpha = 2\pi \delta(x-y) \quad (*) \quad (83)$$

se sigue que el cumplimiento de (73) y (76) por parte de (82) exige que c valga $1/\sqrt{h}$. La función de onda $\psi(x)$ puede desarrollarse en integral de la función (82) con el anterior valor de c :

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{h}} \int e^{-\frac{2\pi i}{h} p x} \varphi(p) dp \quad (84)$$

integral que es invertible :

$$\varphi(p) = \frac{1}{\sqrt{h}} \int e^{\frac{2\pi i}{h} p x} \psi(x) dx \quad (85)$$

por lo visto anteriormente. Se sigue pues que

$$|\varphi(p)|^2 \quad (86)$$

es la f. f. del momento de la partícula, mientras que

$$|\psi(x)|^2 \quad (87)$$

lo es de la posición, porque el desarrollo de $\psi(x)$ en integral de la función propia del operador x es :

$$\psi(x) = \int \psi(\alpha) \delta(x-\alpha) d\alpha. \quad (**) \quad (88)$$

Obsérvese que las f. f. de la posición y del momento son transformadas de Fourier una de otra, y por tanto las R. I. H. se pueden demostrar directamente a partir de las propiedades mate-

(*) Véase la demostración en mi libro *Ecuaciones diferenciales y matrices*.

(**) Estos resultados son válidos para funciones de varias variables.

máticas de estas transformadas como se hace en la teoría de la información con la anchura de la banda espectral y la duración de la emisión de una señal, sin necesidad de recurrir a la no conmutabilidad de los operadores. fórmulas (7) a (10); como ya indicamos en A. M. F., en uno de los célebres experimentos imaginarios de Heisenberg para establecer sus R. I. H., se hace un uso tácito de esta incertidumbre de la teoría de la información.

Obsérvese también como los dos operadores de multiplicación por x y de derivación no están definidos en todo L^2 , porque :

$$f(x) \in L^2 \Rightarrow \begin{cases} x f(x) \in L^2 \\ \frac{d f(x)}{d x} \in L^2 \end{cases} \quad (89)$$

como por ejemplo sucede con las dos funciones :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \in L^2; \quad e^{-x} x^{-1/4} \in L^2 \quad (90)$$

para las que :

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \notin L^2; \quad \frac{d}{d x} (e^{-x} x^{-1/4}) \notin L^2 \quad (91)$$

y además como vimos anteriormente sus funciones propias no pertenecen a L^2 . Por esta razón a los operadores multiplicación por x y (81) propongo llamarlos casihermíticos, de acuerdo con la siguiente definición de casihemiticidad para un espacio abstracto de Hilbert H : si H es a su vez un subespacio vectorial del espacio vectorial E , y si A es un operador lineal definido en E o al menos en H con valores en E , si se cumple que :

$$\forall x, \forall y \in H / A x, A y \in H: \langle x, A y \rangle = \langle A x, y \rangle \quad (92)$$

entonces le llamamos casihermítico. Se distingue de un operador hermítico B en H , en que para este último se cumple que :

$$\forall x \in H: B x \in H \quad (93)$$

los vectores propios de un operador hermítico completo pertene-

cen a H y los de uno casihermítico no, porque sino sería hermítico, ya que al poder expresarse todo vector de H como combinación lineal de vectores propios del dicho operador, todo vector de H se transformaría en otro vector de H, por la aplicación del operador.

Volviendo de nuevo a (36), en el caso en que H que es hermítico es independiente del tiempo, y la ecuación diferencial es ordinaria o en derivadas parciales, es solución de la misma el v. e. :

$$x = v_m e^{-i w_m t/r} \quad (94)$$

siendo v_m y w_m un vector propio de H y su correspondiente valor propio. Si H es completo y no degenerado, la solución más general de (36) es la :

$$x = \sum \lambda_m v_m e^{-i w_m t/r} \quad (95)$$

siendo las v y las w los vectores y los valores propios de H, omitimos los límites en la sigma, porque es independiente del número finito o infinito numerable de dimensiones del espacio. Comparando (95) con (3) y con el mismo significado para las letras que allí se tiene que :

$$c_n = \langle x, y_n \rangle = \sum \lambda_m \langle v_m, y_n \rangle e^{-i w_m t/r}. \quad (96)$$

Pasando a los complejos conjugados, y teniendo en cuenta las definiciones y propiedades de las (57), a (96) se le puede dar la forma vectorial :

$$c^* = (A, H) \lambda^* e^{i w t/r} \implies \lambda^* e^{i w t/r} = (H, A) c^* \quad (97)$$

que expresan las relaciones entre las coordenadas del v. e. x en los sistemas de referencia de los vectores propios de A (c) y de H (λ). El conocimiento de las c determina en cada instante el de las λ y viceversa.

En (36) adoptamos para x la representación en el sistema de referencia de los vectores propios de H, lo denotaremos por x_H , si denotamos por x_A su representación en A, por (61) se tiene que :

$$x_H = (A, H) x_A \implies x_A = (H, A) x_H. \quad (98)$$

Supongamos que A es independiente del tiempo, sustituyendo la primera (98) en (36) se obtiene :

$$\begin{aligned} \frac{d x_H}{d t} &= (A, H) \frac{d x_A}{d t} = - \frac{i}{r} H (A, H) x_A \implies \\ \implies \frac{d x_A}{d t} &= - \frac{i}{r} (H, A) H (A, H) x_A. \end{aligned} \quad (99)$$

La matriz del segundo miembro es hermitica, por serlo H , y por ser adjuntas las dos matrices que multiplican a H a la izquierda y a la derecha. Los valores propios de la matriz del segundo miembro de la última (99) son los mismos que los de H , por ser inversas (ya que son unitarias) los dos factores de H . En cuanto al valor medio $\bar{A}$ (5) se obtiene :

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \langle x_H, A x_H \rangle = \langle (A, H) x_A, A (A, H) x_A \rangle = \\ &= \langle x_A, (H, A) A (A, H) x_A \rangle. \end{aligned} \quad (*) \quad (100)$$

Este método es extensible a (46) y (55).

Obsérvese que en estas estructuras matemáticas, que engloban a la E. S. como un caso particular, los números complejos juegan un papel muy importante, porque lo que evoluciona en el tiempo no son magnitudes reales sino complejas, no evolucionan f. f. o v. p., sino r. c. c. de f. f. o v. p., y en el caso de las partículas relativistas, evolucionan en el tiempo r. c. c. de f. d. y no f. d.; en la física clásica los números complejos intervienen a veces, pero siempre como auxiliares en el cálculo, como es bien sabido por los ingenieros electricistas, otro ejemplo distinto del muy conocido de la electrotecnia, es en la teoría matemática de la polarización de la luz, donde los números complejos sirven para distinguir la luz reflejada de la refractada; pero en física cuántica los números complejos están en la esencia del fenómeno físico son los responsables de las R. I. H. y de las I. P. y I. Pb. (aun cuando estas dos últimas se podrían producir en un espacio real, no complejo).

Hemos procurado condensar al máximo nuestras investigaciones sobre las estructuras matemáticas relativas a procesos estocás-

(*) Por ser adjuntas las matrices (H, A) y (A, H) .

ticos en espacios de Hilbert, que nos han sido sugeridas en un intento de generalizar las específicas de la mecánica cuántica, y entre otras cosas, mostrar cómo se puede materializar en movimientos sobre esferas problemas probabilísticos con propiedades de I. P. ; el desarrollo de esta conferencia nos llevaría a redactar toda una monografía, que de momento nos vemos obligados a aplazar, ya que al no pertenecer a la plantilla de ningún centro de investigación, otras ocupaciones llenan nuestro tiempo ; no obstante no renunciamos a volver sobre estos temas cuando nos sea posible.

En resumen en la mecánica cuántica en la descripción de los fenómenos físicos no solamente fallan nuestras representaciones en el espacio-tiempo, sino también nuestras ideas sobre la probabilidad y la inferencia estadística, como consecuencia de las I. P. la probabilidad pierde su propiedad «en media». No se pueden negar los grandes éxitos de la mecánica cuántica en la teoría y en la práctica de la física, su riqueza en problemas filosóficos y matemáticos, sus enormes posibilidades de aprovechamiento en química, biología, etc. ; pero no se debe de olvidar que contiene enigmas, encierra contradicciones internas que cuando salgan a la superficie harán estallar la teoría en pedazos, como antes ocurriera con la física clásica, consecuencia del proceso dialéctico del pensamiento, que va haciendo cada vez más fiel el reflejo en la mente humana del mundo externo de la materia, que va transformando la «cosa en sí» misteriosa y casi inaccesible en la «cosa para nosotros» práctica y manejable.

SIGNIFICADO DE LAS ABREVIATURAS

- R. I. H. : relaciones de incertidumbre de Heisenberg.
- I. P. : interferencias de probabilidades.
- I. Pb. : interferencias de poblaciones.
- v. a. : variable aleatoria.
- f. f. : función de frecuencia.
- f. d. : función de densidad.
- v. p. : vector de probabilidad.
- v. d. : vector de densidad.
- v. e. : vector de estado.

- v. o. : vector de onda.
- r. c. c. : raíz cuadrada compleja.
- r. c. r. : raíz cuadrada real.
- E. S. : ecuación de Schrödinger.
- E. C. : escuela de Copenhague.
- A. M. F. : mi conferencia titulada «Algunos aspectos matemáticos y filosóficos de la Mecánica Cuántica».

BIBLIOGRAFÍA

Los libros del autor en relación con este tema son los siguientes:
para los aspectos filosóficos:

- A) *Filosofía de las Matemáticas.*
- B) *Teoría de la Investigación Matemática.*
- C) *Didáctica y Dialéctica Matemáticas.*
- D) *Grandes Problemas de la Filosofía Científica.*

los tres primeros editados por Dossat, y el cuarto por Editora Nacional.

Para los aspectos físicos:

- E) *Física Matemática.*
 - F) *Física Fundamental.*
 - G) *Mecánica y Cálculo Tensorial.*
 - H) *Problemas de Mecánica* (dos tomos)
- los cuatro editados por Dossat.

Para los aspectos matemáticos:

- I) *Ecuaciones Diferenciales y Matrices*, editado por Dossat.
- J) *Diccionario de Matemática Moderna*, editado por la Editora Nacional.

Para los aspectos estadísticos:

- K) *Cálculo de Probabilidades y Procesos Estocásticos*, editado por Paraninfo.
- L) *Líneas de investigación en los Procesos Estocásticos y el Movimiento Browniano*, editado por el Instituto de España.
- LL) *Estadística Teórica y Aplicada*, en colaboración con el Dr. Juan Miguel Soler, editado por la Universidad Nacional de Educación a Distancia.

Respecto a la conferencia varias veces citada en el texto: *Algunos aspectos matemáticos y filosóficos de la Mecánica Cuántica*, está incluida en el volumen dedicado al cincuentenario de la Mecánica Cuántica, publicado por la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.