Decoraciones de monumentos islámicos como recurso para ilustrar ideas matemáticas

Antonio F. Costa

acosta@mat.uned.es

Académico Correspondiente de la RAC
Departamento de Matemáticas
Fundamentales, U.N.E.D. Madrid

Palabras clave: simetría, isometría, grupo, grupo cristalográfico, teselación.

RESUMEN:

La belleza de las decoraciones en azulejos, estucos y celosías deleita a muchos de los visitantes de los monumentos islámicos. Una de las características principales es el orden matemático que posee y transmite su estructura. Matemáticos de la talla de G. Polya o H. Weyl observaron este atractivo y utilizaron este arte para ilustrar ideas matemáticas.

Hoy en día siguen apareciendo investigaciones sobre aspectos matemáticos relacionados con monumentos islámicos que sirven tanto para divulgar las matemáticas como para apreciar y entender mejor estas manifestaciones artísticas. En este artículo se indican algunas investigaciones sobre relaciones entre este arte y algunos conceptos matemáticos. Entre los aspectos matemáticos que se tratan están el estudio de la simetría cristalina bidimensional y más recientemente la detección de patrones aperiódicos o cuasicristales.

Finalmente se exponen brevemente otros conceptos donde se han utilizado ejemplos de decoraciones islámicas: los espacios de posiciones de teselaciones y deformaciones y los espacios de módulos.

ABSTRACT:

The beauty of tile, stucco and lattice decorations delights many visitors to Islamic monuments. One of the main characteristics is the mathematical order that their structure possesses and conveys. Mathematicians such as G. Polya and H. Weyl noted this attraction and used this art to illustrate mathematical ideas.

Today, research on mathematical aspects of Islamic monuments continues to emerge, both to popularize mathematics and to better appreciate and understand these masterpieces. This article presents some research on the relationship between this art and some mathematical concepts. Among the mathematical aspects discussed are the study of two-dimensional crystal symmetry and more recently the detection of aperiodic patterns or quasicrystals.

Finally, other concepts are briefly presented where examples of Islamic decorations have been used: the spaces of tessellation positions, the spaces of deformations of tillings and moduli spaces.

imágen: The famous Louvre museum of the French architect. © Jean Nouvel - panoramic view from the tribune.ingusk - stock.adobe.com

1. INTRODUCCIÓN HISTÓRICA: EL ARTE ISLÁMICO COMO MEDIO DE EJEMPLIFICACIÓN DE LA SIMETRÍA CRISTALINA BIDIMENSIONAL.

Arte y Geometría han tenido un desarrollo paralelo a lo largo de toda su historia y el arte islámico, por sus características diferenciales disfruta de una relación especial. Las decoraciones de interiores o exteriores en monumentos islámicos tienen un carácter fundamentalmente abstracto a causa del aniconismo en el Islam. Por este motivo las decoraciones islámicas proporcionan un bello soporte para aproximarse a algunos conceptos matemáticos que comparten con ellas su abstracción.

El uso del arte musulmán no es novedad, y grandes matemáticos se han servido de él como medio de ejemplificación. Las ornamentaciones islámicas proporcionan bellos ejemplos de simetría cristalina bidimensional y así aparecen en obras de matemáticos del siglo XX tan influyentes como George Polya o Hermann Weyl.

Los grupos cristalográficos planos son los grupos de simetría de diseños planos tales que su subgrupo de traslaciones está generado por dos traslaciones cuyos vectores no son paralelos. Fueron clasificados en 17 tipos por Evgraf Fedorov en 1891 (Fedorov, 1971), en el mismo trabajo donde encontró los 230 grupos cristalográficos tridimensionales, descubrimiento esencial para el conocimiento de la estructura molecular de los cristales de minerales naturales (en el hallazgo y clasificación de los grupos cristalográficos tridimensionales se debe siempre mencionar, además de a Fedorov, al matemático Arthur Moritz Schoenflies y al geólogo W. Barlow).

Figura1. Evgraf Fedorov.

Los grupos cristalográficos planos fueron redescubiertos por R. Fricke y F. Klein en 1897 en (Fricke, 1897). En el año 1924 el matemático George Polya publicó un artículo (Polya, 1924), donde clasificaba de nuevo los 17 grupos cristalográficos planos y ejemplificaba los tipos de simetría utilizando motivos geométricos, algunos provenientes de monumentos musulmanes (ver figura 2). Parece que Polya tuvo como motivación para este trabajo su labor como docente en Zürich, en la escuela de arquitectura, donde consultando la biblioteca quedó fascinado por este tipo de decoración. George Polya fue un matemático muy influyente en distintas áreas de las matemáticas y son muy conocidas sus obras sobre estrategias para la resolución de problemas. Más adelante el popular artista gráfico M.C. Escher, estudió y se inspiró en las figuras del artículo de Polya, como se ha podido verificar en algunos cuadernos del artista (Schattschneider, 1987). El artículo de Polya se complementa en el mismo número de la revista con el del cristalógrafo, también de la ETH de Zürich, Paul Niggli, quien se interesó por los grupos de simetrías bidimensionales a raíz del trabajo de Polya.

En 1927 el algebrista Andreas Speiser, también en Zürich, publica la segunda edición de su conocido libro sobre grupos finitos (Speiser, 1927). En esta edición aparece un capítulo sobre grupos cristalográficos planos, donde siguiendo la notación de Polya y Niggli, ejemplifica las simetrías usando motivos egipcios. En 1944 dirige la tesis de Edith Müller, en la Universidad de Zürich, cuyo título es: "Gruppentheorische und Strukturanalytische Untersuchungen der Maurischen Ornamente aus der Alhambra in Granada" (Investigación sobre Teoría de Grupos y Análisis Estructural de los Ornamentos Musulmanes de la Alhambra de Granada). Edith Müller fue una astrofísica suiza que nació en Madrid, aunque su vida profesional se desarrolló en Estados Unidos y Suiza. Fue secretaria general de la International Mathematical Union, asociación encargada de la organización del Congreso Internacional de Matemáticos, evento donde se conceden las medallas Fields. En su tesis realiza la primera búsqueda y estudio de los grupos cristalográficos en las decoraciones de la Alhambra.

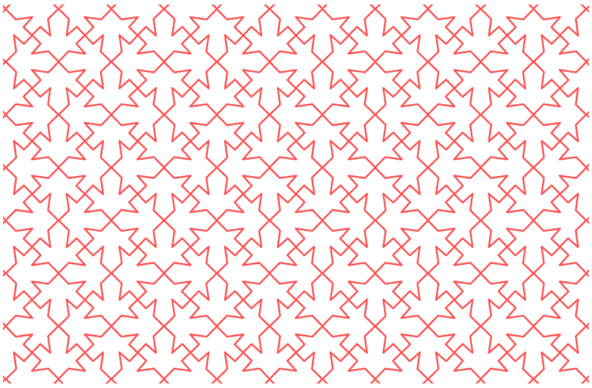


Figura 2. Reconstrucción de una figura del artículo de G. Polya y de una parte de la figura 66 del libro de H. Weyl.

El matemático estadounidense Donald W. Crowe, experto en temas de simetría, afirma que "el capítulo sobre los grupos cristalográficos planos del libro de Speiser combinado con la tesis de Edith Müller, así como otros escritos culturales de Speiser, persuadieron a muchos estudiosos de que los diseñadores de los ornamentos de tiempos antiguos tenían al menos un conocimiento subconsciente de las ideas básicas de la teoría de grupos. Speiser fue, a los ojos de muchos, el primero en hacer esta conexión" (O'Connor, 2016).

Hermann Weyl es de sobra conocido por sus contribuciones sobresalientes en matemáticas y física. Su último libro, titulado Simetría (Weyl, 1952), tiene por objetivo poner de relieve la gran importancia de la simetría en la ciencia y en el arte. Esta obra fue "su canto del cisne", según sus propias palabras, y en ella leemos la siguiente frase:

> "Los más grandes maestros del arte geométrico de la ornamentación fueron los árabes. La riqueza de adornos de estuco que decoran las paredes de edificios de origen árabe como la Alhambra de Granada es simplemente abrumadora" (Weyl, 1952, p. 109)

Como es natural utiliza figuras del arte islámico para ofrecer ejemplos de simetría cristalina plana (ver figuras 2 y 3). Además aparece en su libro alguna fotografía de los alicatados de los baños de la Alhambra y un dibujo de una ventana de una mezquita de El Cairo, aunque tal diseño también se puede contemplar en muros del Alcázar de Sevilla.

Figura 3. Segunda parte de la figura de la página 66 del libro Symmetry de Hermann Weyl. Diseño en una yesería de la sala de los reyes de la Alhambra.

En los trabajos (Montesinos, 1987a) y (Montesinos, 1987b) el académico José María Montesinos Amilibia muestra ejemplos, obtenidos en decoraciones de la Alhambra de Granada, para todos los 17 grupos cristalográficos planos. Es importante señalar la colaboración en este tema del profesor Rafael Pérez Gómez de la escuela de Arquitectura de la Universidad de Granada (ver (Pérez, 1987)). En (Montesinos, 1987a) se utiliza la teoría de **orbifolds** para clasificar los 17 grupos usando argumentos esencialmente topológicos. La teoría de orbifolds se comenzaba a introducir en los años 80 por el topólogo W. Thurston y las ideas de Thurston (Thurston, 1980) han sido y son esenciales para el estudio y desarrollo de la topología de las variedades (espacios) tridimensionales desde entonces. Por otra parte, en (Montesinos, 1987b) se estudian variedades tridimensionales que parametrizan las posiciones de decoraciones con simetría cristalina bidimensional en las tres geometrías planas: esférica, euclidiana e hiperbólica.

Sin embargo, en el año 2006, con motivo de la celebración en Madrid del Congreso Internacional de Matemáticos, el experto en teselaciones y simetría bidimensional B. Grünbaum (autor entre otros del libro (Grünbaum, 1987)) ha mostrado cierto criticismo hacia la afirmación de la presencia de diseños en la Alhambra correspondientes a todos los grupos cristalográficos, ver (Grünbaum) y también (Jaworski, 2013). Es de justicia decir que los ejemplos presentados en (Montesinos, 1987a), (Montesinos, 1987b), ver también (Montesinos, 2002) y (Montesinos, 2008), no dejan lugar a dudas de que hay ejemplos en los alicatados, estucos, celosías y decoraciones de la Alhambra para todos los grupos cristalográficos planos (ver también las figuras 10a y 10b). Pero hay muchos otros conceptos y resultados matemáticos que se pueden acercar al público de una forma atractiva y bella por medio de la ornamentación islámica y mostrar algunos es el objetivo del resto de este artículo.

Hay que destacar un nuevo florecimiento del estudio e investigación de las decoraciones islámicas desde un punto de vista matemático o científico y fruto de ello son las publicaciones recientes sobre el tema incluidas en la bibliografía (por ejemplo (Aboufadil, 2020), [Bonner, 2017], (Makovicky, 2016), (Makovicky, 2020), (Thalal, 2018)). Incluso aún hay, estudios recientes sobre la cuestión de los grupos cristalográficos presentes en la Alhambra, ver por ejemplo (Bodner, 2013) y (Emparán, 2019).

Siendo éste un trabajo de divulgación científica, más que de historia del Arte, no pretendemos ser exhaustivos en las citas bibliográficas; y siendo éstas muy numerosas en lengua española es muy difícil citar algunas obras en español sobre las decoraciones geométricas islámicas sin caer en omisiones importantes. Sin duda no podemos dejar de mencionar los tratados históricos del siglo XVII sobre los artesonados y decoraciones en madera de Diego López de Arenas ((López, 1633) y (López, 1727)) y fray Andrés de san Miguel (ver (Báez, 2007)). El arquitecto E. Nuere ha conseguido recuperar los métodos tradicionales tras el estudio de estos tratados (ver (Nuere, 1998) y (Nuere, 2014)), también hemos de mencionar la obra "El arte de la lacería" del ingeniero A. Prieto y Vives de 1904 y que se ha reeditado en 2021 (Prieto, 2021). Hay muchos autores españoles que combinan ideas matemáticas con arte islámico, un ejemplo es el número de la revista Epsilon dedicado a la Alhambra (SAEM Thales, Granada 1995); por otro lado, un ejemplo de concepto geométrico surgido del estudio del arte hispano-musulmán es la llamada proporción cordobesa, introducida por el arquitecto Rafael de la Hoz Arderius, (de la Hoz, 1996), y que se define como la razón entre el lado y el radio de la circunferencia circunscrita a un octógono regular.

2. LA SIMETRÍA CRISTALINA DE LOS DISEÑOS DEL PLANO.

Con el objeto de hacer accesible este artículo a un público general se presenta ahora brevemente como se analiza la simetría de una figura del plano.

Supongamos que tenemos una figura en una hoja de papel. Situamos otra hoja de papel transparente encima de la primera. Al deslizar la hoja transparente sobre la primera nos define una transformación del plano, explicaremos a continuación que queremos decir. Supongamos que Q es un punto de la hoja transparente que se encuentra bajo un punto P de la hoja original. Al realizar el deslizamiento de la hoja transparente el punto Q se sitúa encima de otro punto P' de la hoja original. De este modo decimos que P se transforma o se corresponde con P', y análogamente la correspondencia se extiende a todos los demás puntos del plano. Es importante observar que si dos puntos P_1 y P_2 están a una determinada distancia d, sus transformados P'_1 y P'_2 también se encuentran a distancia d, por esto, una transformación del plano de este tipo, se llama en matemáticas una **isometría.** También podríamos, además de deslizar la hoja transparente sobre la página de la figura, dar la vuelta a la hoja transparente y después deslizar, la transformación del plano resultante también es una isometría (conserva las distancias) pero ahora las figuras se transforman en sus imágenes especulares, se dice que es una isometría inversa.

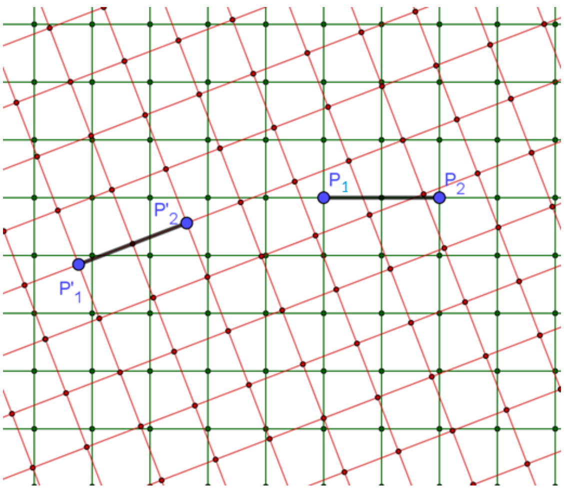


Figura 4. Ejemplo de isometría del plano.

Esta forma de ejemplificar las isometrías del plano usando hojas o papeles transparentes se debe al premio Nobel de Química Wilhelm Ostwald (Ostwald, 1925).

Hay cinco tipos de isometrías del plano:

- **traslaciones** (deslizamientos de la hoja trasparente evitando rotaciones, todos los puntos "se mueven"una distancia, dirección y sentido fijados en un haz de rectas paralelas),

- **rotaciones** (bien conocidas, con un punto fijo y todos los demás rotan un ángulo dado)

- la **identidad** (isometría que deja todo donde estaba),

- **reflexiones** respecto a una recta llamada eje de reflexión (isometría que sucede al situar un espejo perpendicular al plano del papel y sobre el eje de reflexión),

- y reflexiones seguidas de traslaciones paralelas al eje de reflexión (reflexiones sesgadas o reflexiones con deslizamiento),

las dos últimas son isometrías inversas y las tres primeras isometrías directas. Esta clasificación se estudia en los cursos elementales de geometría y los tipos de transformaciones son ampliamente conocidos (basta consultar Wikipedia o si se prefiere un libro de texto, por ejemplo ver el capítulo 3 de (Buser & Costa, 2019)).

Consecuencia de la clasificación anterior es el fenómeno que explicamos a continuación. Dibujemos una figura en el plano y a continuación calquemos dicha figura en un papel transparente que deslizamos arbitrariamente sobre el plano. Al unir puntos originales con sus deslizados se producen segmentos que o bien son todos paralelos o bien sus mediatrices se cortan en un punto, esto es consecuencia de que una isometría directa tiene que ser una traslación o una rotación. Si además de deslizar damos la vuelta a la hoja transparente, el fenómeno que observamos es que todos los puntos medios de los segmentos cuyos extremos son un punto de la figura original y su correspondiente en la hoja transparente, están alineados. La recta donde están todos estos puntos medios es el eje de reflexión o de la reflexión con deslizamiento que es la isometría que produce el deslizamiento con volteo de la hoja transparente.

A continuación podemos ya introducir el importante concepto de simetría de una figura. Supongamos que en una hoja de papel hay dibujada una figura, que podemos considerar un conjunto de puntos del plano. Tal figura se transforma en otra al llevar a cabo una isometría del plano, la figura transformada conserva las mismas medidas (de longitudes y de ángulos) que tenía la figura original. Hay algunas figuras en las que sucede un fenómeno muy particular, sometidas a una isometría globalmente no detectamos ningún cambio mientras que casi todos sus puntos se han desplazado. Una isometría tal se dice que es una simetría de la figura. En la figura 5(a) aparece un ejemplo de objeto con simetría rotacional. En figura 5(b) se ilustra cómo, después de realizar una copia en verde del objeto y rotar 120º, el objeto queda globalmente invariante mientras que todos sus puntos salvo el centro se han movido.

(a)

(b)

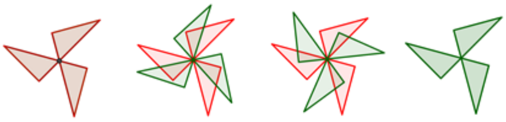


Figura 5. Ejemplo de simetría rotacional.

La composición de dos simetrías de una figura, es decir realizar una transformación y después otra, es también una simetría. Así se puede definir una "multiplicación" para las simetrías. El conjunto de las simetrías de una figura con la operación composición verifica ciertas propiedades y se dice que tiene estructura algebraica de **grupo**, que es una de las estructuras más importantes en matemáticas. Por eso se habla del grupo de simetría de una figura. La estructura algebraica del grupo de simetría de una figura da una información importante sobre el tipo de simetría y es un medio de extraer matemáticas a partir de objetos reales, algo parecido a lo que sucede al medir.

Los posibles tipos de simetría de figuras planas (con un número finito de simetrías) son: bilateral, admitiendo una simetría que es una reflexión respecto a una recta, rotacional, donde existen simetrías que son rotaciones cuyos ángulos son múltiplos de un divisor entero de 360º y simetría diédrica, con simetrías que son reflexiones y simetrías que son rotaciones, el producto de un par de reflexiones distintas da lugar a una simetría rotacional de la figura. Hay figuras que tienen un conjunto infinito de simetrías, por ejemplo una circunferencia: cualquier rotación con centro el centro de la circunferencia es simetría.

Una figura en una hoja de papel no puede tener simetrías que sean traslaciones, pues eso produciría que la figura se extendiera de modo indefinido en una dirección y se saldría del papel. Sin embargo una figura puede sugerir que se prolonga en una dirección, como ocurre por ejemplo en la figura 6. Aunque la figura está claramente limitada a las dimensiones del papel, el observador imagina sin dificultad como se extendería indefinidamente más allá de los márgenes derecho e izquierdo. Los grupos de simetría de este tipo de figuras que tienen simetrías que son traslaciones en una dirección se denominan grupos de frisos

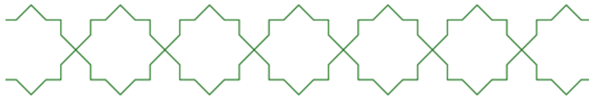


Figura 6. Ejemplo de friso

Aún hay otro tipo de diseños en el plano que posee un tipo de simetría más rico e interesante: la simetría cristalina plana. Se trata de figuras que sugieren simetrías que son traslaciones en dos direcciones no paralelas (ver figura 7). Obsérvese que en este caso la figura se puede extender de modo que llene todo el plano. Las isometrías que se consideran simetrías son las de la figura infinita que cubre todo el plano y que es una abstracción en nuestra imaginación. Los grupos de simetría que así aparecen son los **grupos cristalográficos planos** o grupos de simetría cristalina plana.

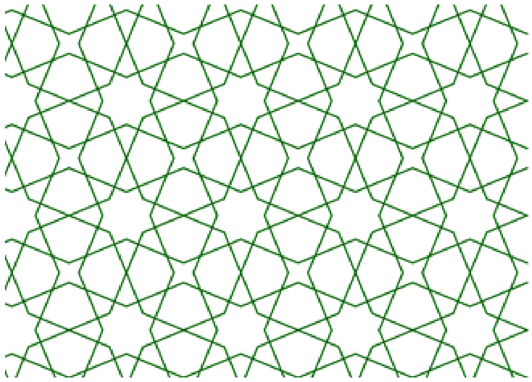
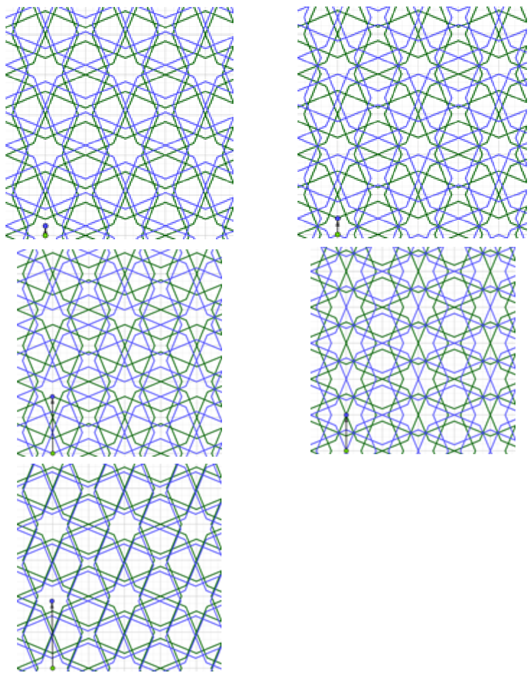
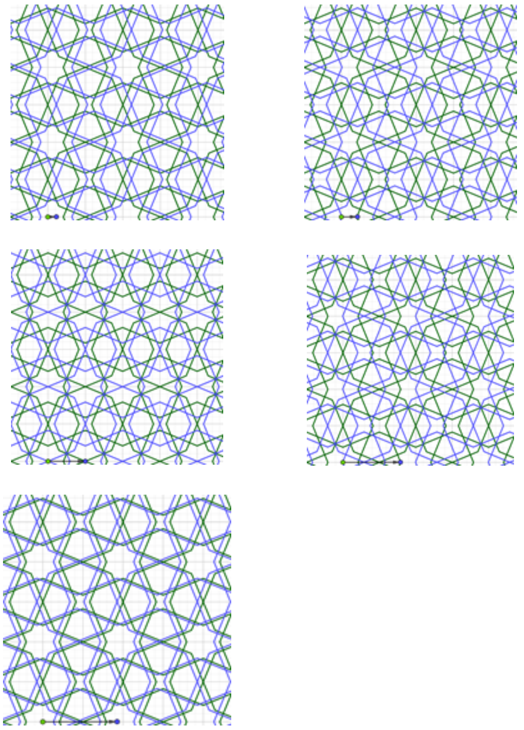


Figura 7. Figura con simetría cristalina (motivo de la Mezquita de Córdoba).

En las figura 8 se presentan ejemplos de simetrías de la figura 7 que son traslaciones, utilizando el método de deslizar una hoja transparente sobre otra.



Simetría traslacional vertical.



Traslación horizontal

Figura 8. Traslaciones de diseño con simetría cristalina plana

Los grupos de simetría cristalina plana se clasifican en 17 tipos distintos (dependiendo de los tipos de isometrías que contengan) y corresponden con los 17 grupos cristalográficos del plano que obtuvo Fedorov.

Los tipos de isometrías que pueden formar parte de los grupos cristalográficos son específicos para cada grupo, así cada grupo cristalográfico posee rotaciones cuyos ángulos y situación de los centros son fijos para el grupo. Por ejemplo, en la figura 9 se han marcado los centros de rotación de simetrías de un alicatado de la Alhambra de Granada. El grupo de simetrías del alicatado es p3, dado que hay simetrías que son rotaciones de 120º (que al repetir tres veces dan lugar a la identidad, de ahí en número 3 de la notación p3) y no posee simetrías que sean reflexiones.

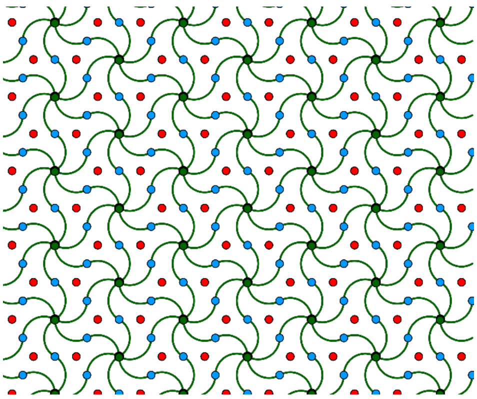
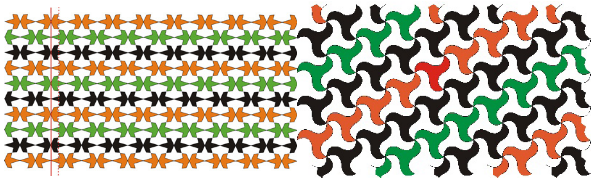
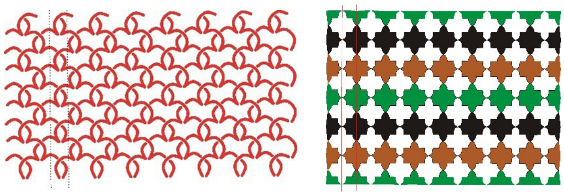


Figura 9. Centros de simetrías rotacionales de un alicatado de la Alhambra

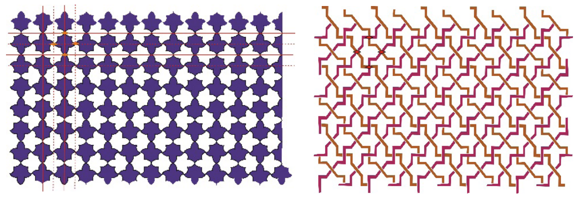
En el documental (Costa & Gómez, 2006) se presentan otros muchos ejemplos, con la ventaja de la animación. En las figuras 10a y 10b aparecen ejemplos para los 17 grupos cristalográficos sugeridos por decoraciones islámicas de la Alhambra de Granada.



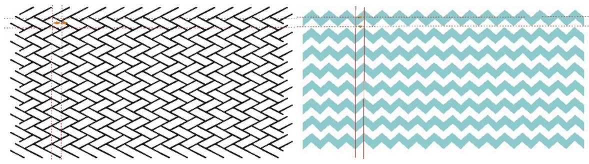
cm / p1



pg / pm



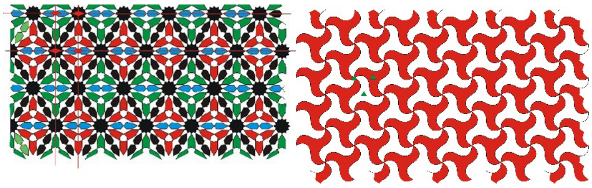
cmm / p2



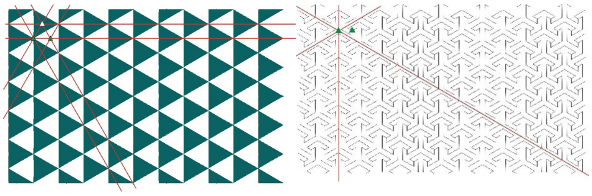
pgg / pgm

Figura 10a . Diseños de la Alhambra para ejemplificar los 17 grupos cristalográficos planos.

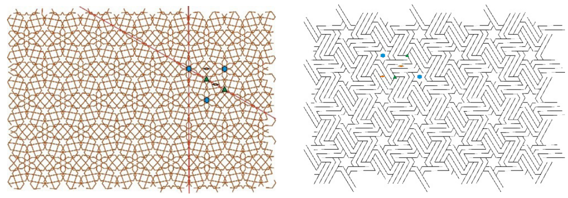
Recientemente, en el artículo (Thalal et al., 2018), este grupo de investigadores de la Universidad de Marrakesh, ha estudiado los grupos cristalográficos presentes en los ornamentos arquitectónicos del Maghreb. Uno de los resultados es que han encontrado en monumentos históricos de Marruecos 11 tipos de grupos cristalográficos y los grupos que no han aparecido son p2, pm, pg, pgg, p3m1 y p31m (obsérvese que pg y p3m1 son grupos muy difíciles de encontrar en la Alhambra). En el mismo artículo se realiza un estudio de los grupos finitos de simetría y grupos de frisos presentes en las decoraciones marroquíes. Es indudable que con las técnicas de los artesanos sería posible obtener decoraciones con todos los grupos posibles, pero el interés de dichos artesanos es puramente estético. En el artículo (Aboufadil, 2013) se obtienen decoraciones con simetría de los 17 grupos cristalográficos usando el método tradicional "Hasba" de los maestros artesanos. Finalmente en (Aboufadil, 2020) se lleva a cabo una comparativa entre los patrones ornamentales marroquíes y turcos desde el punto de vista de los grupos de simetría presentes en cada caso



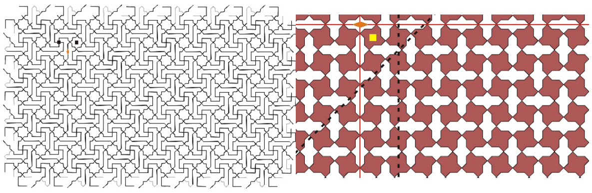
pmm / p3



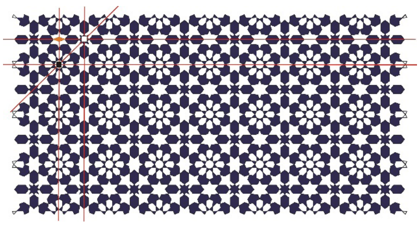
p3m1 / p31m



p6m /p6



p4 / p4g



p4m

Figura 10b. Diseños de la Alhambra para ejemplificar los 17 grupos cristalográficos planos (continuación).

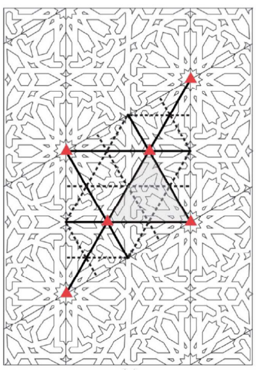


Figura 11. Un ejemplo de decoración con grupo de simetría p3m1 (difícil de encontrar en la Alhambra de Granada). Construido usando el método tradicional "Hasba" por el grupo de investigación de Marrakech (Aboufadil et al., 2020). Reproducido con permiso de los autores.

Hay otros posibles tipos de simetría cuyo estudio es interesante, como son los grupos de simetría con color y los grupos de simetría de las decoraciones planas considerando los nudos o enlaces que representan en el espacio. En ambos casos se reduce al estudio de pares grupo-subgrupo (G, H), H<G, que son grupos de simetría de una misma figura. Por ejemplo, en el caso del color, el grupo G se considera haciendo abstracción de los colores mientras que en H solo intervienen aquellas simetrías que conservan la coloración (ver por ejemplo el capítulo 8 del libro (Grünbaum & Shephard, 1987)). En (Makovicky, 2016) se estudian las simetrías de color y simetrías como enlaces en decoraciones islámicas, el tema es extenso, pues sólo para los grupos de simetrías de motivos con dos colores ya hay 43 posibles grupos (ver también (Ruiz, 1995)).

3. TESELACIONES APERIÓDICAS (CUASICRISTALES) EN DECORACIONES ISLÁMICAS.

Los alicatados, como los que aparecen en la Alhambra (ver figura 10a, para los grupos cm, p1, pm, pgg, p3, pmm, cmm) son ejemplos de lo que en matemáticas se denominan **teselaciones** (o teselados) del plano. Se trata de recubrimientos del plano con piezas, azulejos en los casos considerados, que responden a un número finito de formas que se disponen sin superponerse ni dejar huecos y que permiten rellenar una extensión tan amplia como se desee. Los alicatados de la Alhambra son teselaciones y muchos producen figuras con simetría cristalina, es decir, admiten dos simetrías que son traslaciones en dos direcciones distintas, y la existencia de estas traslaciones ayuda de forma importante al teselado sistemático del plano.

La teoría matemática de teselaciones es extensa, ver el libro de Grünbaum y Shephard (Grünbaum & Shephard, 1987) o el término "tesselation" en wikipedia. Cabe señalar que solo en el año 2017 se ha finalizado el estudio de las posibles teselaciones del plano con teselas todas iguales a un polígono convexo (teselaciones monoédricas, ver (Rao, 2017), aún pendiente de revisión, sólo quedaba abierto el caso de los pentágonos y el último tipo de pentágonos convexos que tesela el plano se obtuvo en fechas muy recientes: en 2015).

Aunque, como hemos visto, frecuentemente las teselaciones tienen simetría cristalina, no siempre ocurre así, es decir existen teselaciones del plano que no admiten simetrías traslacionales en dos direcciones no paralelas. Estas teselaciones se dice que son no periódicas.

No es difícil con un mismo tipo de tesela recubrir todo el plano de modo no periódico, aunque con la misma tesela se pueda también conseguir un teselado cristalino. Un problema que atrajo la atención a ciertos matemáticos, motivado por problemas de indecibilidad [Robinson71], era saber si existe un conjunto finito de formas de teselas (piénsese en azulejos o baldosas) de modo que las teselaciones del plano realizadas utilizando estas formas de baldosas forzosamente no admitan simetrías traslacionales (esta fue la cuestión planteada en 1961 por el matemático H. Wang). Los conjuntos de baldosas y las teselaciones con esta propiedad se llaman aperiódicas. Se han obtenido varias soluciones a este problema, ver los capítulos 10 y 11 de (Grünbaum & Shephard, 1987), sin duda las más famosas son las proporcionadas en 1973-74 por el físico R. Penrose (premio Nóbel 2020), que lo consiguió con conjuntos con sólo dos tipos de piezas, dardos y cometas, o dos tipos de rombos (ver también (Gardner, 1997)). Independientemente el matemático R. Ammann también consiguió en 1977 un conjunto de dos piezas aperiódico, la aproximación de Ammann además ayudó a nuevos desarrollos y métodos de teselado aperiódico. Un problema abierto es saber si existe un conjunto unitario aperiódico, es decir, una única pieza poligonal que siempre tesele no periódicamente (tal baldosa se llamaría Einstein y por los trabajos recientes sobre teselaciones con polígonos que hemos citado más arriba, (Rao, 2017), y, los de otros autores anteriores, debería ser un polígono no convexo).

Es importante advertir que las piezas de un conjunto aperiódico deben ser usadas al teselar siguiendo ciertas normas precisas, en primer lugar en cuanto a cómo se deben situar las baldosas una al lado de otra, no permitiendo todas las posibilidades; puede conseguirse esto considerando baldosas con muescas o salientes, o bien con ciertas decoraciones que deben ser continuadas. Pero además, hay teselaciones parciales, que realizadas con las posiciones correctas de cada par de baldosas, es imposible completar para teselar todo el plano. Por esta última observación son muy importantes los procedimientos que permiten extender las teselaciones aperiódicas a todo el plano. Una vez realizadas, las teselaciones aperiódicas tienen propiedades muy curiosas, por ejemplo, cualquier pedazo finito de la teselación se repite infinitas veces y aparece con cierta proximidad a cualquier punto del plano.

Por otra parte, en 1982, el físico Dan Shechtman (premio Nóbel 2011) observó por primera vez un patrón de difracción de un material con ciertas propiedades cristalinas pero con simetría icosaédrica, lo que contradice la restricción cristalográfica. Esto abrió la posibilidad de materiales con cristalización no periódica, es decir sin admitir simetrías traslacionales. Estas nuevas estructuras se llamaron cuasicristales y como sucedió en la cristalografía tradicional se ejemplifican en geometría bidimensional (para una definición precisa de cuasicristal consultar (Senechal, 1995, p. 27-31). Las teselaciones aperiódicas de Penrose constituyeron un buen modelo plano para los cuasicristales, en primer lugar por sus posibles simetrías y por ciertas propiedades estructurales semejantes a las de los materiales que se descubrieron, donde existe un orden pero no está basado en simetría traslacional.

La aparición de teselaciones con elementos que sugieren la aperiodicidad en decoraciones islámicas antiguas, es un descubrimiento que ha despertado gran interés, ver los artículos (Makovicky, 1992,2016,2020), (Makovicky & Makovicky, 2011), (Castera et al., 1999), (Lu & Steinhardt, 2007), (Thalal et al., 2014). El artículo (Lu, 200)] apareció en la revista Science y dio lugar a controversia, pues, así como en el caso de las teselaciones periódicas las traslaciones indican claramente como extender a todo el plano la decoración, para las aperiódicas el método de extensión es más complejo y puede no estar claramente sugerido en un fragmento. Es de destacar que el físico J. P. Steinhardt es uno de los fundadores de la teoría de cuasicristales, por ejemplo en el trabajo (Levine & Steinhardt, 1984) aparece por primera vez el concepto y el término cuasicristal y su relación con los nuevos materiales descubiertos por Shechtman.

En el trabajo de Lu y Steinhardt se utiliza un conjunto de teselas que se relacionan con la teselación de Penrose con cometas y dardos para deducir la aperiodicidad de la decoración islámica de santuario musulmán de Isfahan (Irán 1453 d. C.). Como hemos indicado más arriba una dificultad importante es conocer como extender la teselación a todo el plano y es esencial concluir que los artesanos medievales tenían algún método de construcción de cuasicristales. El primer método conocido para la teselación de Penrose es el de "inflado" que describimos rápidamente a continuación. Se observa como cada tesela de un conjunto aperiódico C se puede "teselar" (en realidad de trata de un recubrimiento especial) a su vez con las teselas de otro conjunto C', cuyas teselas más pequeñas resultan de una semejanza s, con razón k menor que 1, de las de C. Partiendo de una de las teselas de C se realiza una homotecia de razón 1/k y se tesela con las teselas del conjunto aperiódico considerado. Repitiendo el proceso una y otra vez con todas las teselas de las teselaciones parciales se tiene un método para extender el teselado a todo el plano. Los autores de (Lu & Steinhardt, 2007) afirman que la superposición de dos teselados semejantes en la composición del alicatado que estudian sugiere el conocimiento del método de "inflado" (ver figura 12).

Otros puntos conflictivos del trabajo (Lu & Steinhardt, 2007) son si no hay otras decoraciones más antiguas con fragmentos aperiódicos y si no se había descrito antes la aparición de cuasicristales en el arte islámico. En este sentido, en 1992 E. Makovicky, (Makovicky, 1992), había descubierto un patrón aperiódico con simetría decagonal en una torre del siglo 12 en Maragha (Irán).

Aunque los ejemplos más antiguos de presencia de cuasicristales en la decoración islámica pertenecen al Este

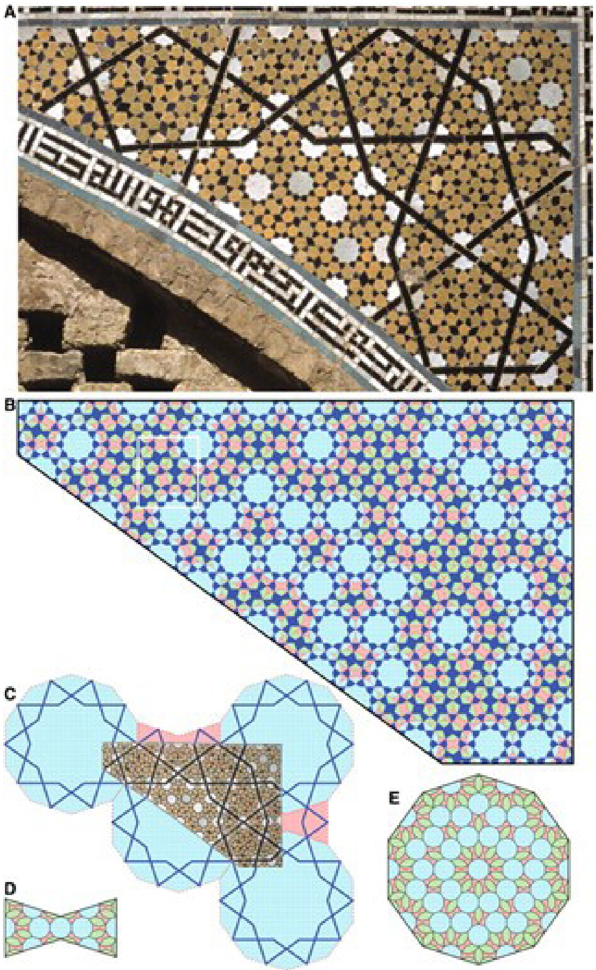


Figura 12. Decoración islámica cuasicristalina del santuario musulmán de Isfahan analizado en el artículo P. Lu, P. J. Steinhardt, Decagonal and Quasicrystalline Tilings in Medieval Islamic Architecture. Science 315 (5815) (2007) 1106–1110. Reproducido con autorización de la revista.

del mundo islámico, en el arte hispánico-musulmán y marroquí también hay muchos muy bellos ornamentos sugiriendo aperiodicidad. En [Makovicky20] (ver también [Makovicky16]) aparecen ejemplos de cuasicristales en la Alhambra de Granada y los Alcázares de Sevilla. Una diferencia señalada por algunos expertos es que los artistas del este usaron más cuasicristales con simetría decagonal mientras que en el oeste se decantaron por la simetría octogonal (ver (Makovicky, 2020) y (Castera et al., 1999)).

En los artículos (Thalal et al., 2014) y (Aboufadil et al., 2014) se utiliza el método de la "multigrilla" (multigrid) para la construcción de los cuasicristales que han encontrado en el arte marroquí (por ejemplo cuasicristales con simetría octogonal en las madrasas Ben Youssef de Marrakech y Bou Inania de Fez) y para crear nuevos ejemplos (decoraciones al estilo tradicional que son cuasicristales con simetría heptagonal, nanogonal, tetradecagonal y octadecagonal). El método multigrid fue introducido por el matemático N. G. de Bruijn (de Bruijn, 1981) en los artículos donde consiguió demostrar que las teselaciones de Penrose se podían ver como proyecciones en planos de la teselación por hipercubos del espacio 5-dimensional (de Bruijn consideró pentagrids). Una grilla, grid, R es un conjunto de rectas paralelas equiespaciadas o espaciadas siguiendo una sucesión discreta. Ahora una pentagrid consiste en cinco grillas, cada una es una rotación de R con amplitud de ángulo $2\pi m/5$, $m=0,\ldots,4$ y después trasladada en dirección perpendicular a sus rectas. Se suele exigir que no existan puntos de corte de más de dos rectas (multigrid regular) de las distintas grillas. Las rectas de la pentagrid producen una teselación del plano que es dual a una teselación de Penrose con un conjunto aperiódico formado por dos rombos. Hay muchas variaciones del método multigrid dando lugar a los cuasicristales estudiados por el equipo de Marrakech.

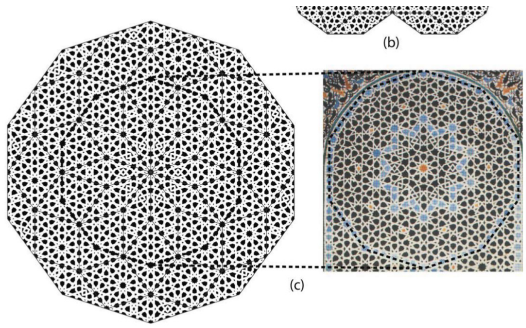


Figura 13. Figura en (Aboufadil et al., 2014. En la izquierda es un motivo cuasicristalino realizado por los autores con el método multigrid y a la derecha como aparece en una madrasa A-Attarin de Fez. Reproducido con permiso de los autores.

Finalmente en el reciente artículo (Makovicky, 2020) se ofrecen varios ejemplos de cuasicristales del arte islámico del oeste. E. Makovicky supone que los artistas originales utilizaron para crear sus patrones modificaciones del método multigrid y realiza un amplio estudio de las sucesiones de las longitudes de intervalos entre las rectas de las grillas usadas.

Como conclusión de esta sección podemos decir que el análisis de las estructuras de cuasicristales en las decoraciones islámicas ha contribuido a relanzar el interés del estudio matemático de este arte y está siendo un recurso valioso para la divulgación de ideas geométricas y físicas.

4. VARIEDADES DE MOSAICOS. ESPACIOS DE POSICIONES DE DECORACIONES Y VARIEDADES DE DIMENSIÓN TRES.

En esta sección vamos a comentar otro uso de las decoraciones islámicas, para ejemplificar espacios matemáticos importantes en topología de dimensión baja. Volvamos al sistema que hemos descrito en la Sección 2 para analizar las simetrías cristalinas de una decoración del plano.

En la figura 14 (izquierda) aparece un alicatado y para aplicar sobre él una isometría directa hemos deslizado una copia trasparente de la decoración. Los posibles desplazamientos traslacionales de una decoración a otra tienen dos grados de libertad, las dos dimensiones del plano, además está el grado de libertad dado por el ángulo de giro. Por tanto, cada desplazamiento del alicatado de la figura 14 es un punto dentro de un espacio tridimensional. Expresado de otro modo cada superposición de dos alicatados, como se muestra en la figura 15 (derecha), es un punto dentro de un espacio tridimensional. Cuando estamos desplazando la figura 14 estamos moviéndonos dentro de un espacio y la pregunta ahora es ¿qué espacio tridimensional es? Las propiedades de estos espacios de posiciones de decoraciones, desde el punto de vista de la topología, ofrecen ejemplos de espacios interesantes. En primer lugar, son localmente indistinguibles de nuestro espacio tridimensional, matemáticamente se dice que son **variedades tridimensionales.** Además son variedades cerradas, sin borde, cada camino se puede continuar en cualquier dirección sin encontrar fronteras infranqueables o muros. Y son compactas, esto intuitivamente se refleja en que si recorremos un camino “infinito” vamos pasando cerca de algunos puntos que ya habíamos recorrido, es decir que si muevo de forma continua la decoración de la figura 14 después de cierto recorrido se vuelve a una posición muy cercana de otra por la que ya se había pasado (figura 15).

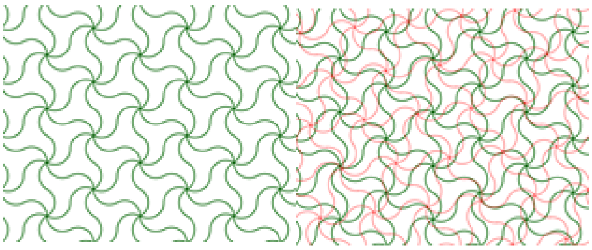


Figura 14. El diseño rojo se produce al trasladar y rotar el verde (tres grados de libertad)

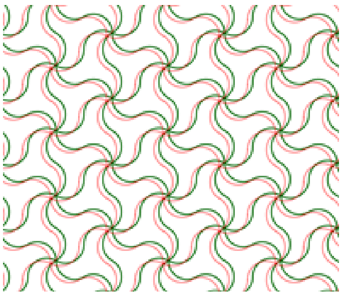


Figura 15. Pasando cerca del punto de partida al moverse en la variedad de mosaicos

Las variedades tridimensionales compactas son un tema de investigación dentro de la topología y su clasificación ha dado un gran avance gracias a los trabajos de W. Thurston, R. Hamilton y R. Perelman (medalla Fields en el ICM de Madrid 2006) (Thurston, 1980)(Morgan & Tian, 2014), donde se ha puesto de relevancia la gran importancia de las posibles estructuras geométricas que admiten estas variedades. Una de las consecuencias de estos avances ha sido la demostración de la conjetura de Poincaré. Las variedades tridimensionales que aparecen como espacios de decoraciones con simetría cristalina bidimensional son un tipo especial de variedades de dimensión tres, son variedades de Seifert, es decir variedades tridimensionales que admiten una foliación por circunferencias (ver (Montesinos, 1987b)). Las variedades de Seifert ofrecen ejemplos de variedades tridimensionales con seis de las ocho geometrías posibles para las variedades de dimensión tres, si bien los espacios de posiciones de teselaciones periódicas del plano son variedades que admiten geometría euclidiana.

El Museo del Louvre en Abu Dhabi (una reciente obra arquitectónica de Jean Nouvel, inaugurada en 2017, ver fotografía en figura 16) presenta una cúpula gigantesca donde se recurre a una superposición de ocho diseños que sugieren celosías islámicas. Es algo similar a lo que hemos presentado un poco más arriba en esta sección, en este caso el espacio de posiciones de las capas en las cúpulas es un toro de dimensión siete: $(S^1)^7$. Si lo que interesa es las posibles imágenes de los rayos de sol, se ha de considerar un orbifold más complejo: el cociente de dicho toro por la acción del grupo de permutaciones de siete elementos

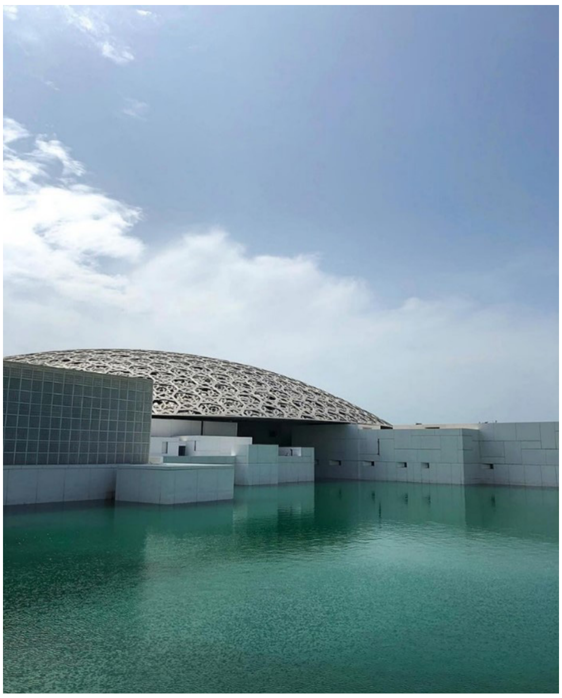


Figura 16. Louvre de Abu Dhabi. Wikiemirati [CC BY-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0)].

Σ_7: $(S^1)^7/\ \Sigma_7$. Este cociente es el producto simétrico de siete circunferencias y el espacio subyacente a tal orbifold es homeomorfo al producto de la circunferencia por una bola de dimensión 6 (ver (Morton, 1967)).

5. DEFORMACIÓN DE TESELACIONES Y ESPACIOS DE MÓDULOS

Finalmente, en esta sección se presentará otra relación entre ciertas obras de diseño gráfico inspiradas en las decoraciones musulmanas y un concepto matemático importante: los espacios de módulos (moduli spaces).

Se pretende estudiar la deformación de estructuras cristalinas o teselaciones de forma continua. Quizás el primero en utilizar en el arte esta idea de “modificación continua o suave” de teselaciones fue del artista holandés M. C. Escher, principalmente en sus obras Metamorfosis I y II. Más adelante W. S. Huff, profesor de arquitectura en la Universidad de Nueva York, recobró y simplificó con sus estudiantes estas ideas de Escher obteniendo unos resultados notables que llamaron la atención de Douglas Hofstadter (Hofstadter, 1983) (divulgador muy conocido por su libro “Gödel, Escher y Bach: An Eternal Golden Braid” (Hofstadter, 2015)).

En los ejemplos de Huff y sus estudiantes se parte de una teselación muy sencilla, y se intenta dar una idea de deformación continua al recorrer visualmente la obra. Las obras de Huff han dado lugar a otras recientes por artistas como Craig Kaplan (ver el reciente libro (Bonner, 2017)), Kaplan además intenta utilizar teselaciones con origen en el arte islámico en alguno de sus trabajos.

En la figura 17 aparece una obra de la diseñadora gráfica Mariana Costa inspirada en otra de un estudiante de Huff. En este ejemplo vemos como se sugiere un cambio continuo en una teselación al recorrer la obra de izquierda a derecha (o viceversa). El grupo cristalográfico de simetrías de las teselaciones (que se van sucediendo) es p4. Se está recorriendo un camino en un espacio de deformaciones y en este camino se consigue pasar de una teselación a su imagen especular, este es un “viaje en que se atraviesa un espejo”.

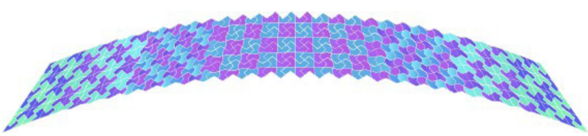


Figura 17: A través del espejo. Una deformación continua de una teselación a su imagen especular por Mariana Costa.

En el ejemplo anterior el grupo cristalográfico que actúa en cada fase del recorrido es siempre el mismo, lo que va cambiando es el diseño de la baldosa sobre la que se hace actuar el grupo. En la figura 18 queremos hacer un viaje a través del espacio de deformaciones de los grupos cristalográficos, es decir lo que se pretende es que varíe el grupo que actúa. Se parte de un grupo cristalográfico del tipo p2, pero con un retículo de traslaciones de tipo hexagonal (es decir generado por un vector y su rotación de 120º). En una primera etapa el diseño a que da lugar la acción de este grupo p2 tiene muchas más simetrías, como se aprecia en la parte izquierda de la figura 18, en concreto el grupo de simetrías es p6m. A continuación, se alarga uno de los vectores generadores del retículo de traslaciones del grupo p2 rompiendo las simetrías de p6m y reduciendo la simetría a p2, más adelante se alarga la otra traslación llegando otra vez al retículo hexagonal pero con traslaciones con vectores de módulo mayor que los vectores de partida y apareciendo de nuevo el primer diseño (ampliado) con simetría p6m. En este caso, al recorrer la figura 18 de izquierda a derecha, se ejemplifica un camino cerrado en el espacio de módulos de los grupos cristalográficos bidimensionales. Los subespacios correspondientes a mayor o menor simetría indican una estratificación del espacio de módulos inducida por las posibles inclusiones entre grupos cristalográficos planos.

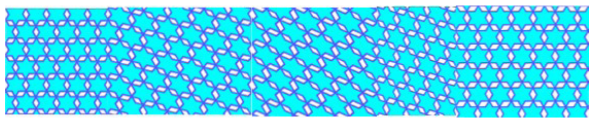


Figura 18: Un camino por el espacio de módulos de los grupos cristalográficos.

En el plano hiperbólico también se definen y estudian grupos cristalográficos. En el caso del plano se clasifican algebraicamente en un número infinito de tipos geométricos, en vez de 17 como en el caso euclidiano. Los grupos cristalográficos del plano hiperbólico son una herramienta actual en la investigación de los espacios de módulos de superficies de Riemann y de Klein (ver (Bartolini et al., 2013), (Costa & Porto, 2019)), así como para el estudio en general de los automorfismos de tales superficies ((Bujalance, 1990), (Bujalance, et al., 2007)).

AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecer al revisor de este artículo por sus valiosas sugerencias que han contribuido notablemente a la mejora de su calidad.

REFERENCIAS

Aboufadil, Y., Thalal, A.,Dogan, N.S., Ide, S., Koç, Y.(2020). Comparative study between Turkish and Moroccan ornamental patterns from the 11th to the 20th centuries. *Symmetry: Culture and Science,* 31(2), 117-176.

Aboufadil, Y., Thalal, A., & Raghni, M. A. E. I. (2013). Symmetry groups of Moroccan geometric woodwork patterns. *Journal of Applied Crystallography,* 46(6), 1834-1841.

Aboufadil, Y., Thalal, A., & Raghni, M. A. E. I. (2014). Moroccan ornamental quasiperiodic patterns constructed by the multigrid method. *Journal of Applied Crystallography,* 47(2), 630-641.

Baez Macías, E., & de San Miguel, A. (2007). Obras de Fray Andrés de San Miguel. Universidad Nacional Autonoma de México, Instituto de Investigaciones Estéticas.

Bartolini, G., Costa, A. F., & Izquierdo, M. (2013). On the connectivity of branch loci of moduli spaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math,* 38(1), 245-258.

Bodner, B. L. (2013). The planar crystallographic groups represented at the Alhambra. Bridges Conference Proceedings, 2013, 225-232.

Bonner, J. (2017). Islamic geometric patterns: their historical development and traditional methods of construction. New York: Springer Nature.

Broug, E. (2008). Islamic geometric patterns. London: Thames & Hudson.

Bujalance, E., Etayo, J. J., Gamboa, J. M., & Gromadzki, G. (1990). Automorphism groups of compact bordered Klein surfaces (Vol. 1439). Berlin: Springer-Verlag.

Bujalance, E., Cirre, F. J., Gamboa, J. M., & Gromadzki, G. (2010). Symmetries of compact Riemann surfaces. Berlin: Springer-Verlag.

Buser, P. & Costa, A. F. (2019), Geometría Básica, Madrid: Sanz y Torres.

Castera, J. M. (1999). Arabesques: Decorative Art in Morocco. Art Creation Realisation.

Costa, A. F. (2006). Arabescos y geometría, vídeo. UNED.

Costa, A. F., & Porto, A. M. (2019). Note on topologically singular points in the moduli space of Riemann surfaces of genus 2. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas,* 113(4), 3375-3382.

De Bruijn, N. G. (1981). Algebraic theory of Penrose's non-periodic tilings of the plane. I, II: dedicated to G. Pólya. *Indagationes Mathematicae,* 43 (1), 39-66.

Emparán, M. A. (2019). The Planar Crystallography Groups as an Iconographic Analysis Tool in Islamic Art. Bridges Conference Proceedings, 2019, 303-310.

Fedorov, E. S. (1971). Symmetry of crystals (Monograph No. 7). American Crystallographic Association.

Fricke, R., & Klein, F. (1897). Vorlesungen über die theorie der automorphen functionen: bd. Die gruppentheoretischen grundlagen (Vol. 1). BG Teubner.

Gardner, M. (1997). Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers: And the Return of Dr Matrix. Cambridge: University Press.

Grünbaum, B. (2006). What symmetry groups are present in the Alhambra. *Notices of the AMS,* 53(6), 670-673.

Grünbaum, B., & Shephard, G. C. (1987). Tilings and patterns.

Hoz Arderius, Rdl 1996. La Proporción Cordobesa [presentación especial de original de 1974]. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales (Ed.). Actas de las VII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática "Thales". Córdoba: Universidad de Córdoba, 67-84.

Hofstadter, D.R. (2015), Gödel, Escher, Bach: Un eterno y grácil bucle, Barcelona: Tusquets .

Hofstadter, D. R. (1983). Parquet deformations-patterns of tiles that shift gradually in one dimension. *Scientific American,* 249(1), 14-20.

Jaworski, J. (2013) A Mathematician's Guide to the Alhambra, mathMedia Ltd.

López de Arenas, D. (1633). Breve compendio de la carpinteria de lo blanco y tratado de alarifes. Manuscrito Consultable en la Biblioteca General de la Universidad de Salamanca: https://dicter.usal.es/.

López de Arenas, D. (1727). Breve compendio de la carpinteria de lo blanco y tratado de alarifes: con la conclusion de la regla de Nicolas Tartaglia y otras cosas tocantes a la geometría y puntas del compas.../por Diego Lopez de Arenas...Disponible en version digital en Wikimedia Commons.

Lu, P. J., & Steinhardt, P. J. (2007). Decagonal and quasi-crystalline tilings in medieval Islamic architecture. science, 315(5815), 1106-1110.

Levine, D., & Steinhardt, P. J. (1984). Quasicrystals: a new class of ordered structures. *Physical review letters*, 53(26), 2477.

Makovicky, E. (1992). 800-year-old pentagonal tiling from Maragha, Iran, and the new varieties of aperiodic tiling it inspired. Fivefold Symmetry, 67-86. Singapure-London: Wordl Scientific.

Makovicky, E. (2016). Symmetry: through the eyes of old masters. Berlin-Boston: Walter de Gruyter GmbH & Co KG.

Makovicky, E. (2021). Quasicrystalline patterns in western Islamic art: problems and solutions. *Rendiconti Lincei. Scienze Fisiche e Naturali,* 32(1), 57-94.

Makovicky, E., & Makovicky, N. M. (2011). The first find of dodecagonal quasiperiodic tiling in historical Islamic architecture. Journal of Applied Crystallography, 44(3), 569-573.

Montesinos Amilibia, J. M. (1987a). Orbifolds in the Alhambra. Memorias de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales de Madrid. Serie de ciencias exactas, 23, 44.

Montesinos Amilibia, J. M. (1987b). Classical tessellations and three-manifolds. Berlin: Springer Verlag.

Montesinos Amilibia, J.M. (2002). La Cristalografía Geométrica. En Horizontes culturales: las fronteras de la Ciencia (pp. 97-112), Real Academia de Ciencias Exactas Físicas y Naturales de Madrid

Montesinos Amilibia, J.M. (2008) , Geometría y Topología en la Alhambra. En Aspectos matemáticos en la ciencia y en la sociedad (pp. 111-141), Instituto de España.

Morgan, J., & Tian, G. (2014). The geometrization conjecture (Vol. 5). Providence: American Mathematical Society..

Morton, H. R. Symmetric products of the circle.

Nuere, E. (1985). La carpintería de lo blanco: lectura dibujada del primer manuscrito de Diego López de Arenas. Madrid: Ministerio de Cultura.

Nuere, E. (2014). La carpintería de lazo. En www.enrique.nuere.es.

O'Connor, J.J. & Robertson, E.F. (2016), Andreas Speiser, en MacTutor/Biographies, web University of Sant Andrews.

Ostwald, W. (1925) Die Farbenfibel, Berlin: Verlag Unesma.

Pérez-Gómez, R. A. F. A. E. L. (1987). The four regular mosaics missing in the Alhambra. *Computers & Mathematics with Applications*, 14(2), 133-137.

Prieto Vives, A. (2021). El arte de la lacería. Valladolid: Ed. Maxtor.

Polya, G. (1924). Über die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene. *Zeitschrift für Kristallographie-Crystalline Materials,* 60(1-6), 278-282.

Rao, M. (2017). Exhaustive search of convex pentagons which tile the plane. arXiv preprint arXiv:1708.00274.

Robinson, R. M. (1971). Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane. *Inventiones mathematicae*, 12(3), 177-209.

Garrido, R., & Gómez, P. (1987). Visiones matemáticas de la Alhambra. El color. En revista Epsilon, monográfico dedicado a la Alhambra, 51-59.

Schattschneider, D. (1987). The Pólya-Escher connection. *Mathematics Magazine*, 60(5), 293-298.

Senechal, M. (1996). Quasicrystals and geometry.

Speiser, A. (1927). Die theorie der gruppen yon endlicher ordnung. Berlin: Springer-Verlag. Julius Springer. Berlin.

Thalal, A., Aboufadil, Y., & Elidrissi, M. (2014). Construction of quasiperiodic patterns in the Moroccan ornamental art . MS95. P06. *Acta Cryst*, 70(C1430), C1430.

Thalal, A., Aboufadil, Y., Jali, A., Oueriagli, A., & Ait Rai, K. (2018). Symmetry in art and architecture of the Western Islamic world. *Crystallography Reviews*, 24(2), 102-130.

Thurston, W. P. (2002). The geometry and topology of three-manifolds. Princeton University Lecture Notes. In the web of MSRI, Berkeley. Original 1980.

Weyl, H. (1952). Symmetry, Princeton: Princeton University Press.