REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DISCURSO

LEÍDO EN EL ACTO DE SU RECEPCIÓN

POR EL SEÑOR

D. JULIO REY PASTOR

Y

CONTESTACIÓN

DEL SEÑOR

D. AUGUSTO KRAHE

EL DÍA 14 DE NOVIEMBRE DE 1920

MADRID
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO DE FORTANET
IMPRESOR DE LA REAL ACADEMIA DE LA HISTORIA
Libertad, 29.—Teléf.° 991

1920

DISCURSO

DEL SEÑOR

D. JULIO REY PASTOR

EXCMO. SEÑOR:

SEÑORES:

La costumbre, que tiene fuerza de ley, y en los templos donde se rinde culto a la tradición es ley inexorable, obliga a tributar elogios a los sucesivos ocupantes de estos sillones académicos, ponderando sus merecimientos y presentando sus obras como eternos modelos que imitar.

Quisiera yo en este momento lograr el imposible de que, al simple conjuro taumatúrgico del deseo, la costumbre dejara de haber existido, para poder iniciarla en este caso, extraordinario como pocos. Desearía al menos que los obligados elogios al antecesor no hubieran sido tan frecuentes y efusivos, para que mis sinceros acentos de dolor repercutiesen en este recinto con ecos de novedad, y con ella adquiriesen el relieve que mi humilde voz no puede darles, en este solemne homenaje que hoy tributamos a la grande y venerable figura de D. Eduardo Torroja y Caballé.

En honor a su memoria, el sillón que él ocupó debiera quedar vacío para siempre; pero exigencias reglamentarias impiden guardar eterno duelo; y ya que benévolas gestiones de mis amigos me ponen en el duro trance de sucederle, dediquemos casi toda la sesión a rememorar su obra, dibujando con filial cariño su silueta moral y científica, para que su espíritu mismo siga hoy presidiéndonos.

Fué su vida un modelo de austeridad y de modestia. Aquel su apartamiento de nuestro pobre ambiente científico y social, era consecuencia de la inadaptación al medio, de su espíritu exquisito, era modestia y era distinción.

No frecuentó Ateneos; rehuyó títulos honoríficos; su nombre no circuló en la Prensa diaria, ni su retrato fué exhibido en las Revistas gráficas; huyendo temeroso del estrépito de la fama, que otros buscan y apetecen, alcanzó la distinción suprema de pasar sin ser notado por entre el tupido rebaño de la semidocta plebe, para atravesar la vida por el sendero apartado que prefieren los espíritus selectos.

Fué sabio, fué bueno, fué justo. Y con ser tan sabio y tan bueno, en una valoración de sus virtudes habría que anteponer al juez justo sobre el amigo bueno y el profesor sabio; que tan rígida fué su moral purísima y tan constante su culto a la justicia.

Permitidme, en apoyo de esta apreciación, una anécdota, recuerdo personal del tiempo en que fuí su profesor auxiliar.

Una grave dolencia lo tenía postrado en peligro de muerte; precisamente aquella cruel enfermedad que inició su decadencia rápida, persiguiéndolo desde entonces, con implacable saña, hasta conducirlo al sepulcro.

Conversaba yo en la sala próxima con uno de sus deudos, inquiriendo noticias del gravísimo estado del enfermo, a quien no se podía visitar; mas, apenas hubo reconocido mi voz, él mismo hízome pasar al recinto, donde yacía con angustias mortales, que no daban tregua a su dolor.

El débil cuerpo del maestro parecía un despojo; su intensa palidez se había hecho más lívida; la voz, siempre sutil, era más bien un quejido. En las sombras de la estancia se adivinaba la silueta de la negra Parca, acechando el momento propicio para cortar el hilo de su existencia preciosa.

Y en aquella hora solemne en que, frente al misterio del infinito, la conciencia procura reconstruir la vida en rápido examen retrospectivo, destacando las nobles acciones y los grandes remordimientos, me llamaba el moribundo para rogarme que revisase con detención un pliego de Descriptiva, que él había rechazado en las clases prácticas a uno de sus alumnos, sin haberlo podido examinar tan concienzudamente como acostumbraba, por haber caído víctima del primer ataque de su dolencia.

Sólo este remordimiento atormentaba su conciencia limpia; preocupación que pudiera parecer excesiva, y quizás pueril, a quienes no tengan tan arraigado el sentimiento del deber, ni comulguen en el culto que él siempre rindió a la justicia absoluta, rectilínea, implacable.

Mas no se limitó el maestro al cumplimiento pasivo de las obligaciones impuestas por los reglamentos; él supo excederse y superar la ley.

En los pueblos de organización secular, cuyas energías nacionales avanzan por cauces regulares, el *deber* es un sentimiento de obediencia a lo estatuído; es la subordinación del individuo al sistema elaborado por generaciones sucesivas y depurado por altísimos cerebros directores.

Pero en los pueblos como el nuestro que, a pesar de su vejez, están todavía en período constituyente, el deber es un sentimiento activo de colaboración y de lucha; las normas legales tienen carácter provisional de ensayos, y no basta cumplirlas; es preciso mejorarlas. Todo ciudadano, desde el rincón de su especialidad, debe aportar su contribución al progreso del país, lanzando a la publicidad su caudal de ideas y experiencias. Y quien no entregue a sus sucesores, ampliada y mejorada, la herencia que recibió, no habrá cumplido su deber.

Así supo llenar su altísima misión aquel gran patriota, conservador en política y revolucionario en la cátedra. Por su propio esfuerzo, y prescindiendo de reglamentos arcaicos, logró reformar radicalmente el plan de estudios geométricos, luchando siempre con todos los obstáculos de la tradición y la resistencia inerte de la rutina.

Al fin triunfó, y fué su victoria absoluta e incondicional, como suele acontecer cuando una idea cualquiera, no encuentra otras afirmaciones opuestas que le disputen el campo, sino solamente la resistencia pasiva, que es la negación de toda idea.

Fenómeno es éste que se presenta en aquellos países en que la cultura superior no es vegetación de vida perenne, sino que surge esporádicamente en cabezas aisladas, por generación espontánea. La instintiva oposición de las gentes hacia estos ejemplares insólitos, truécase al fin en ciego fetichismo, que rodea al ídolo de aureola sobrehumana y le concede los honores de la omnisciencia. Aquella misma obra del hombre excepcional, que poco antes era combatida con inconsciente saña, declárase monumento imperecedero; las frases más insignificantes del hombre cumbre adquieren valor lapidario. Oposición sistemática a todo lo nuevo, endiosamiento sistemático de todo lo triunfante, son dos manifestaciones distintas de la misma ignorancia que, desconociendo donde reside el altar de la Verdad, rinde su ofrenda al Dios Exito, doquiera que lo encuentra.

Pero esta admiración ciega, este fetichismo inconsciente, tan cultivado entre nosotros, no sería grato a la memoria de aquel admirable espíritu analítico, todo rigor y exactitud.

Queden las exageraciones piadosas para los casos en que el elogio obligado no encuentra en el valor intrínseco de la obra sólido fundamento. La de Torroja no necesita tales artificios retóricos; antes bien, gana en valor cuando se presenta en su hermosa desnudez, destacándose con contornos brillantes en la mancha gris de nuestra cultura científica del siglo pasado.

Triste cuadro era el de la Ciencia española, reproducción incompleta y deformada de la cultura científica francesa del siglo XVIII. Parecía, como si en el fondo de la cámara obscura de nuestro abandono, triplemente secular, se proyectase imprecisa y menguada una imagen de la cultura matemática francesa, cuyos rayos luminosos hubieran penetrado a través de pequeñísimo orificio abierto en los Pirineos.

Torroja abrió más amplia brecha en la muralla de nuestro aislamiento matemático, e importó de lejanas tierras la Geometría de la posición de Staudt.

Para quienes conozcan la Geometría proyectiva y hayan admirado la sencillez de sus principios y la uniformidad de sus métodos, pudiera parecer fácil empresa la de haber importado los elementos de esta disciplina, y hasta se extrañarán de que tal suceso no haya acontecido antes.

Mas no opinarán así quienes conozcan las dificultades de la obra alemana, la abstracción suma de sus conceptos, su concisa redacción, de penosa inteligencia, no facilitada siquiera gráficamente, puesto que carece de figuras. Sólo aquellos que hayan estudiado la Geometría de la posición en la fuente original misma, aun años después de haberla aprendido en las obras de Torroja, pueden valorar justamente la labor del geómetra español, formado solo, sin precursores ni maestros, sin colegas siquiera; espíritu hostilizado por un medio adverso; cumbre solitaria en medio de la llanura.

* * *

Para analizar ahora su actuación como maestro, permitidme una definición previa de esta palabra, cuyo significado se desnaturaliza con frecuencia; una definición implícita, contenida en una parábola, al modo como se procede en la Axiomática, donde los conceptos no se definen sino indirectamente, enunciando sus propiedades.

Gorgias, filósofo ateniense, va a morir condenado por sus doctrinas, y ha elegido la muerte misma de Sócrates. En torno suyo congréganse por última vez sus amigos, y dirigiéndose al discípulo predilecto le habla de esta manera:

«Ya que la hora se aproxima, porque la luz se va y el ruido se adormece, ¿por quién será esta postrera libación? ¿Por quién este destello de ámbar que queda en el fondo de las copas?»

«Será —contestó el discípulo— por quien desde el primer sol que no has de ver, nos dé la verdad, la luz, el camino; por quien desvanezca las dudas que dejas en la sombra; por quien ponga el pie adelante de tu última huella y la frente más en lo claro y espacioso que tú; por tus discípulos, si alcanzamos a tanto, o por ajeno mentor que nos seduzca con libro, plática o ejemplo. Y si nos muestra el error que hayas mezclado a la verdad; si hace sonar en falso una palabra tuya; si ve donde tú no viste, hemos de entender que esto es vencerte. Maestro: por quien te venza, con honor, en nosotros.»

Y sintiendo ya la muerte que se acercaba, levantóse Gorgias, manteniendo en alto su copa, y con serena alegría repitió: Por él; por quien me venza, con honor, en vosotros.» (*)

Desventurado maestro llama Rodó al que no diga, como el Bautista, al anunciar a quien vendrá después: «Él debe crecer, yo ser disminuído.» Desventurados maestros los que adoptan la máxima opuesta, porque en sus ciegas ansias de fama perenne, no aciertan a ver que la posteridad dicta sus fallos con examen impersonal de las obras, sin oír los alegatos de sus autores. Desventurados, porque al subordinar el progreso de la patria a la conservación de su prestigio personal, pretendiendo invertir las leyes naturales, concitan contra sí todos los espíritus juveniles, amantes de la renovación.

Desventurados, sí, pero no maestros, dulcísima palabra que Cristo se asignó, para que ningún hombre se la atribuyera sin poseer alguna de sus excelsas virtudes. Maestro quiere decir generosidad y sacrificio, y en su túnica inconsútil no caben repliegues de egoísmo.

Maestro fué Torroja por su abnegada consagración a la cátedra; lo fué por la escrupulosidad en su actuación y el rigor lógico de su doctrina; y maestro insuperable habría sido si las especiales condiciones de su carácter austero y melancólico no se hubieran reflejado en su enseñanza, revistiendo la Geometría de tan severas apariencias; si hubiera puesto en sus palabras aquel calor adecuado para la pronta germinación de las ideas y hasta aquella nota de amenidad que en los pueblos latinos tanto coadyuva al éxito; si su modestia excesiva no le hubiera impedido mostrar espontáneamente el rico tesoro de sus ideas y conocimientos.

(*) Motivos de Proteo, CXXVII.

Los espíritus mezquinos, impulsados por el natural instinto de conservación, procuran obstruir la infinita escala de la vida para evitar que pasen adelante quienes nacieron después. En cambio, el superior espíritu del maestro, nunca temió ser superado; antes bien, a ello aspiraba fervientemente, y siempre estimuló con vivas instancias a sus discípulos, para que saliesen prestamente a beber en las fuentes mismas donde la Ciencia nace.

Casualmente conoció la obra de Staudt; pero él presentía todo un inmenso continente, que le fué vedado conocer. Colocado, respecto de los geómetras extranjeros, en la inferioridad de su aislamiento, sus investigaciones de nuevas verdades no alcanzaron el fruto proporcionado a la profundidad de su pensamiento y al admirable rigor lógico de su razón, cualidades que le habrían deparado sin duda gran éxito en la moderna Geometría axiomática, si en ella hubiera llegado a penetrar.

No voy a examinar aquí cuál fué su aportación original a la Geometría; tal estudio ha sido hecho ya, y muy a conciencia, por uno de sus más notables continuadores, y habré de limitarme a citar las conclusiones de su análisis imparcial y minucioso (*). El estudio sintético de la curvatura de superficies, fundándose en un postulado intuitivo, y más especialmente la introdución del concepto de curvatura en el infinito, haciendo proyectiva esta noción métrica; he aquí lo más saliente de la obra de nuestro geómetra.

Escasa contribución parecerá ésta a los entusiastas vindicadores de la Ciencia española; pero gran mérito debemos

(*) *D. Eduardo Torroja*, por J. Alvarez Ude. Revista matemática hispano-americana.—Núm. 1-2.—Enero-Febrero, 1919.

concederle si tenemos en cuenta que éstos son los únicos conceptos de cierto interés que han aportado los españoles a la Matemática pura, durante cuatro siglos de Edad moderna.

Pero, la admirable obra de Torroja, como la de Echegaray, como la de Galdeano y la de Clariana, tan meritorias por motivos distintos, desligadas de su medio ambiente y parangonadas con las producciones europeas, no serían juzgadas en su justo valor; ni tampoco serían calificadas justamente las obras de todos sus beneméritos continuadores, que han enseñado a varias generaciones las teorías por aquéllos introducidas. La crítica extranjera, no documentada suficientemente con los antecedentes históricos de nuestra cultura, al analizar estas obras valorándolas con el patrón universal, y al no encontrar en ellas teorías actuales ni aportaciones nuevas, suele juzgarlas con frías frases de cortesía, cuando no con despectivo tono, que hacen creer a algunos en un prejuicio, que no existe, de animosidad contra nuestra patria.

Son obras de interés nacional por la evolución que representan y por el patriótico deseo que las inspira; libros que sólo puede leer con fruición e interés el español que ignore nuestra situación ante el mundo o el extranjero que la conozca muy a fondo a través de nuestra Historia; son ellos los que han preparado el terreno para que en él depositen semillas originales las nuevas generaciones, recogiendo frutos nuevos, que merezcan cotización en el mercado internacional de la cultura.

Esta colaboración en la universal empresa de la Ciencia, esta actuación creadora, es la misión primordial de la Universidad en los países más cultos, y a ella debe quedar subordinada la función de expedir diplomas que habiliten para aspirar al profesorado secundario, modestísima tarea de utilidad evidente, pero cuya elementalidad no justificaría el sostenimiento de tan costosa y complicada organización.

El haber adivinado esta misión altísima del profesorado universitario y haber procurado cumplirla en las dificultades de su soledad, es, a mi entender, el principal título de honor en la actuación de nuestro geómetra. El señaló el rumbo y colocó la primera piedra del monumento que entre todos deberíamos haber levantado.

¡Y qué inmenso es el campo, apenas explorado, que tenemos que conquistar! ¡Y qué desaliento se apodera del ánimo y hiela toda esperanza, al ver los obstáculos de todo género que obstruyen el camino y se oponen a esta marcha, tan brillantemente iniciada y tan pronto interrumpida!

Si el sencillo empeño de introducir y arraigar entre nosotros los primeros elementos de la Geometría proyectiva traduciéndolos del extranjero, sin agregarles nada esencial, ha costado tantos años de labor incesante, sin que haya traspasado siquiera los umbrales de la Facultad de Ciencias; si en esta empresa han colaborado tan valiosos elementos y ella ha absorbido las vidas enteras de la mayor y mejor parte del profesorado de Matemáticas superiores de nuestras Facultades de Ciencias exactas, más numeroso que el de cualquier Universidad europea, asusta y apena el ánimo considerar qué inmenso espacio de tiempo, qué ingente cantidad de esfuerzos y qué número de hombres entusiastas, que hoy no se ven, habrán de surgir, para importar siquiera las infinitas teorías elaboradas durante el siglo XIX, entre las cuales es parte insignificante la Geometría cuadrática de que vanamente nos enorgullecemos, y que constituyen el grandioso cuerpo de doctrina de la Matemática novecentista.

* * *

Tiene cada Academia de Ciencias un ritual propio para estos actos solemnes. En algunas Corporaciones europeas hacen los recipiendarios una exposición de sus principales aportaciones a la especialidad que cultivan. En otras, suelen presentar una monografía, con algunos resultados nuevos, fruto de sus investigaciones recientes. Acostúmbrase en otros Institutos científicos presentar una reseña crítica de los problemas actuales de cada teoría.

Pero, los autores de vuestro sabio Reglamento, dándose cuenta de la abstracta índole de las materias propias de estos estudios, poco adecuados para su exposición ante el público no profesional que acude a estas solemnidades, deja para el seno de vuestras sesiones privadas los trabajos de investigación, parte muy principal de vuestras tareas, y para este acto público prescribe simplemente un «discurso alusivo a las circunstancias».

Ateniéndose fielmente a este precepto, los discursos leídos en esta tribuna suelen tener carácter histórico o expositivo, exornados con bellezas de dicción y enriquecidos con erudición copiosa, pero manteniéndose siempre en el terreno de las generalidades sobre una ciencia determinada, sin entrar en investigaciones originales que reservan para vuestras sesiones científicas.

Siguiendo, pues, las huellas que el Reglamento y la costumbre de consuno han trazado, no os presentaré conclusiones concretas ni resultados nuevos; pero careciendo del mucho tiempo necesario para la paciente ordenación de citas y selección de mis papeletas bibliográficas, tengo que renunciar también a presentaros un discurso histórico, de copiosa erudición. Forzosamente habré de limitarme, pues, a leeros el escueto programa de algunas de mis modestísimas investigaciones, que tendré el honor de presentar con todo desarrollo a vuestra discusión, en monografías sucesivas, y que versan sobre el problema del Ultracontinuo.

* * *

Es el Continuo concepto que la inteligencia humana ha ido conquistando por aproximaciones sucesivas.

Una sucesión de sensaciones discretas imperceptibles llegan a sumar un sensación medible. He aquí, pues, una suma no nula compuesta de sumandos nulos; la nada engendrando el todo; y para zanjar este conflicto entre dos realidades contradictorias, los matemáticos idearon el Continuo.

Mas éste no nació en la forma compleja hoy usual; fué ampliándose a medida que lo exigían los problemas planteados. El Continuo de primera especie fué pronto insuficiente; al estudiar los problemas cuadráticos de intersección, nuestra visión intuitiva del espacio invitaba a aceptar la existencia del punto común, mientras que la lógica demostraba la no existencia del mismo; y para resolver el nuevo conflicto, hubo que sacrificar la intuición; la necesidad de que las conclusiones lógicas prevalecieran, obligó a ampliar el Continuo.

Y este concepto impreciso de los griegos, depurado por Dedekind, Weierstrass y Cantor que lo aritmetizaron, ha sido suficiente a la Ciencia durante muchos siglos, llegando a creerse inmutable e incontrovertible.

Pero modernos problemas y reconsideración de otros antiguos han planteado la necesidad de nuevas ampliaciones, de las cuales quiero hablaros brevemente.

Las mismas objeciones que los geómetras no euclidianos hubieron de contestar, encontró la Geometría no arquimediana apenas iniciada, hasta que el triunfo de las creaciones cantorianas preparó el terreno para la germinación de las nuevas ideas.

Pero el trasfinito de Cantor era un primer paso y no la solución definitiva. Partiendo de un equivocado planteamiento, creyó haber demostrado la imposibilidad del infinitésimo actual, conclusión nada extraña si se tiene en cuenta que el postulado de continuidad por él elegido incluye al postulado de Arquímedes, por presuponer la condición de los dos continuos.

Corresponde a Veronese la gloria de haber encontrado un camino seguro para la resolución del problema del infinito geométrico actual; y avanzando gradualmente por la vía sintética, llega a construir el espacio no arquimediano de infinitas dimensiones.

Pero todavía quedaba una fundamental duda en pie; la misma duda de la compatibilidad lógica que hubo de retrasar el éxito de las concepciones no euclidianas, hasta que se encontró su interpretación numérica y con ella la prueba de su coherencia lógica. Dada la arquitectura actual de la Matemática, el único método para justificar la Geometría no arquimediana es su construcción aritmética pura, y éste es el gran éxito de Hilbert, altamente encomiado por Poincaré, quien en su *Rapport* famoso proclama al geómetra alemán padre de la nueva disciplina abstracta.

Ya Levi-Civita, en un precioso trabajo de estudiante, había emprendido el camino aritmético; pero hay diferencias esenciales entre ambos sistemas. Finalmente, las investigaciones recientes de Hahn, Schönflies y Wahlen han puesto de manifiesto la superior unidad que preside estos diversos sistemas no arquimedianos

El porvenir de la nueva disciplina geométrica, llamada a trascendentales aplicaciones, puede considerarse asegurado. Las impugnaciones hechas por Veronese, por Cantor, Killing y Schönflies y las discrepancias entre estos contradictores, radicaban en una clasificación insuficiente de los postulados de continuidad, donde aún quedan algunos puntos obscuros.

Prosiguiendo mis investigaciones sobre los axiomas de la Geometría, tan benévolamente juzgadas en esta casa, os presentaré un análisis minucioso, una verdadera disección de dichos postulados, en la que creo haber llegado a descomponerlos en factores simples; aparecen así claramente las superposiciones de unos y otros, los elementos comunes y no comunes, al modo de las fórmulas desarrolladas de la Química. Una vez hecho este análisis, aparecerá claramente la inexactitud de Enriques, ya notada antes de ahora, cuando afirma la independencia entre el postulado de Cantor y el de Arquímedes.

He aquí, pues, un extenso campo de investigaciones, cuyos mejores y más sazonados frutos pueden recogerse operando aritméticamente. Si la ocasión fuese oportuna, explicaría aquí varios sistemas de números complejos de infinitas componentes, que presentaré a vuestro examen, y me permiten analizar la dependencia, la independencia y la compatibilidad de los diversos postulados.

Si las componentes son enteras, resulta un sistema no arquimediano, equivalente al trasfinito de Cantor, en el que existe el infinito actual, pero no los infinitésimos actuales. Tomando componentes racionales, subsiste esta propiedad, pero el conjunto deja de estar *bien ordenado*. Esto mismo acontece si adoptamos componentes reales; pero entonces se verifica el axioma de Dedekind.

Avanzando un poco más, adopto números compuestos por pares de los complejos anteriores, creando así un sistema completo de entes no arquimedianos, en que existe el infinitésimo actual y satisface o no a los diversos axiomas de continuidad, según la naturaleza de los números componentes.

Todavía os presentaré una solución al problema de la continuidad, que consiste en prescindir de toda clase de postulados de este género. Idea bien sencilla que desarrollaré por analogía con la que dió origen a la Geometría absoluta. Es bien sabido que puede construirse la Geometría proyectiva sin hacer hipótesis ninguna sobre el infinito. Basta para ello ampliar el concepto de punto, considerando como tal todo par de rectas coplanarias. Prescindiendo así del problema de la intersección, la Geometría absoluta se desarrolla con uniformidad de método, aplazando toda bifurcación hasta que se desee investigar la naturaleza del infinito.

Algo análogo puede hacerse en el problema del Continuo mediante la introducción de puntos impropios, que complementan el continuo de 1.ª especie y permiten construir una Geometría proyectiva, contra la afirmación, un tanto aventurada, de Schönflies, que ya fué rechazada por Veronese.

Con este método evasivo constrúyese el edificio geométrico sin abordar el problema del infinito actual.

Cada postulado señala una posible bifurcación en su desarrollo, y combinando las diversas elecciones, resultan varias ramas igualmente lógicas. Pero hay un hecho interesante, al que llegamos por caminos distintos que Levi-Civita, su descubridor: Cualquiera que sea la hipótesis euclidiana o no euclidiana adoptada para el problema del infinito, la Geometría, en un campo no arquimediano, limitado a la región en que los segmentos guardan razones finitas, es euclidiana.

Construído y estudiado así el Continuo de 2.ª especie, con sus posibles bifurcaciones euclidiana y no euclidiana, de finitas e infinitas dimensiones, ocurre preguntar si esta construcción lógica quedará desligada de la Matemática usual, o, por el contrario, encontrará aplicaciones a las teorías ya constituídas. Aplicaciones, y muy importantes, tiene este concepto en la Aritmética y en la Geometría.

Defínense en Cálculo diferencial los órdenes de los infinitésimos y de las variables infinitamente grandes por medio de sus cocientes mutuos. Aparecen así órdenes enteros, órdenes fraccionarios, órdenes inconmensurables. ¿Basta, pues, con el continuo aritmético para expresar la infinitud de las variables? Desde el Análisis elemental viene la contestación negativa. Es bien sabido que las exponenciales son infinitésimos no comparables con las potenciales, porque sus órdenes exceden a todos los números reales, por grandes que sean. Es igualmente sabido que entre dos infinitésimos de órdenes reales cualesquiera, hay infinitos otros, no expresables por números del Continuo.

He aquí, pues, un problema bien elemental, que nos invita a una ampliación del campo numérico usual, y a ello nos obliga si queremos estudiar a fondo la variación de las funciones. Mas no bastan los números trasfinitos de Cantor; es indispensable el Ultracontinuo numérico.

Establecido un patrón para la medida de los infinitos e infinitésimos, queda resuelto el problema que Abel se planteó sobre la medida de la convergencia de las series. Llegó a clasificarlas como magnitudes; definió la igualdad y la desigualdad, el concepto de mayor y menor; logró intercalar, entre cada dos series, infinitas otras; probó así la ineficacia absoluta de los diversos criterios de convergencia fundados en la comparación; pero no pudo llegar a la medida de la convergencia ni de la divergencia, porque son magnitudes no arquimedianas.

Resuelto queda también el problema planteado por du Bois Reymond sobre los órdenes de infinitud de las funciones; el sistema genético por él construído queda incluído como caso particular de los campos no arquimedianos.

Finalmente, la insuficiencia del concepto de límite, puesta de manifiesto por el neokantiano Gawronsky, que le lleva a adoptar como límites de los infinitésimos, no el cero absoluto, sino diversos infinitésimos actuales, bien satisfecha queda con los conceptos generales que someramente he citado, y que tendré el honor de someter a vuestro examen (*).

Los problemas aritméticos que estamos examinando nos llevan como de la mano a una cuestión geométrica muy elemental, a saber: la medida de ángulos. El que forman dos curvas tangentes no puede considerarse, ciertamente, como nulo, aunque en el entorno del vértice sea inferior a cualquier ángulo rectilíneo; y no es nulo, puesto que encierra una porción de plano. Prescindir de ella, como se hace en los *Elementos* de Geometría, es eludir el problema, pero no resolverlo, y sólo puede aceptarse como primera aproximación.

La medida de los ángulos se reduce a calcular el orden de los segmentos infinitésimos limitados por sus lados, y este problema nos ha conducido al campo completo no arquimediano. Los ángulos que forman con su tangente las parábolas cuadrática, cúbica, etc., son infinitésimos actuales de 2.º, 3.º, ... orden; el que forma la curva de Cauchy es de orden trasfinito.

(*) En esta Memoria habré de rectificar algunas inexactitudes matemáticas de Gawronsky, por ejemplo, la de afirmar que el incremento de una función continua es del mismo orden que el incremento de la variable.

Hay en todos los problemas que vamos examinando una ordenación obligada por la índole de la magnitud que se trata de medir. El problema de contar es igualmente interesante, y de él vamos a ocuparnos también.

Según Cantor, el Continuo tiene ω^{ω} elementos. Aplicando la inducción trasfinita, ha demostrado Zermelo la enumeración sucesiva de los elementos de un conjunto, que nos conduce a asignarle un número ordinal.

No pretendemos resolver el difícil problema filosófico que plantea el postulado de libre elección, y sólo deseamos enumerar aquí algunas de sus numerosas aplicaciones, como índice de los trabajos que habré de someteros.

Resuelto queda, en primer término, el problema de Cantor sobre la comparabilidad de los números cardinales; puesto que cada conjunto es coordinable con una sección de la sucesión cantoriana, entre dos números cualesquiera sólo pueden existir las relaciones de $>$ $<$ *o* $=$: *Los números son magnitudes;* he aquí, pues, la primera conquista de Zermelo.

Esta identificación entre las *alef* de Cantor y las potencias trasfinitas es de la mayor importancia filosófica y matemática. Casi todos los problemas pendientes en el cálculo de potencias de conjuntos quedan resueltos de la manera más eficaz. Cada número cardinal tiene un siguiente; las operaciones aritméticas con ellos efectuadas tienen un significado único y bien conocido. Por fin puede hablarse de una Aritmética trasfinita.

Pero todo el edificio armónico así construído descansa sobre el postulado de Zermelo.

Si limitamos nuestras aspiraciones a construir una Aritmética sencilla que satisfaga a las leyes fundamentales, es fácil evitar este postulado. Fruto de mis tentativas es un sistema de números **a**, análogos a las $\aleph$ de Cantor, que no agotan ciertamente el campo de todos los cardinales, pero que en cambio satisfacen a dichas leyes, y con los cuales se puede operar ariméticamente, sin las excepciones y dudas que ofrecen las $\aleph$ cantorianas.

Otra aplicación interesante de la conclusión de Zermelo es el sistema de numeración de infinitas bases, apto para representar todos los números reales.

Adoptemos como cifras todos los números racionales; todo número real admite una representación mediante finitas o infinitas cifras, y esta representación es única.

Notables aplicaciones pueden hacerse de esta expresión lineal de los números reales. Hamel ha conseguido, gracias a ella, resolver del modo más general la ecuación funcional de Cauchy. La proporcionalidad no es ya la única correspondencia en la igualdad y la suma; hay infinitas funciones o correspondencias discontinuas que tienen esta misma propiedad.

Por brevedad, no insistiré en otras aplicaciones aritméticas que pueden hacerse ordenando el continuo; citaré solamente la descomposición factorial de Broggi, análoga a la sumatoria de Hamel; finalmente, quiero plantear otra cuestión que juzgo de interés, y sobre la que algo tengo elaborado.

¿Qué debe entenderse por parte racional de un número inconmensurable? La analogía con la parte entera no conduce a una solución única, sino a infinitas, según la aproximación prefijada. Pues bien: gracias a la expresión sumatoria de los números reales, llegamos a determinar numéricamente dicha parte racional, y con ella como abscisa, y la parte inconmensurable por ordenada, estudiamos una representación gráfica del continuo por medio de un conjunto denso en todo el plano. A vuestra benevolencia encomendamos éste como los anteriores trabajos mencionados.

Vemos en estos múltiples ejemplos que la pretendida suficiencia del sistema arquimediano de los números no es mucho más completa que la asignada por los griegos a los números racionales. El mismo gesto de asombro y el mismo ademán de protesta con que fueron acogidos los primeros problemas que dieron origen a los inconmensurables, inquietarán sin duda a los espíritus conservadores al oír hablar hoy de la necesidad de ampliar el Continuo. Preguntarán por la interpretación real de este concepto en la Naturaleza; discutirán el derecho de existencia de las concepciones matemáticas que no representan una realidad.

¡Realidad! Misteriosa palabra cuyo significado han intentado explicar los filósofos de todos los tiempos.

Dentro del sistema kantiano que, al modo de Copérnico, invierte el orden aparente de las causas, haciendo girar la realidad en torno del ser pensante, esta cuestión carece de sentido. Eliminada definitivamente la intuición en el sistema apriorístico de Kant, queda la razón como única fuente de conocimiento puro. Pensamiento y existencia son equivalentes; el primero engendra la segunda, y la Lógica, ciencia del pensamiento, se transforma en Teoría completa del conocimiento.

Tampoco en el empirismo puede plantearse la cuestión acerca de la realidad objetiva del Ultracontinuo. La experiencia es insuficiente para reconocerlo y para engendrarlo; pero también lo es para el Continuo ordinario. Uno y otro son conceptos abstractos, creados libremente para la resolución de problemas matemáticos; según cuales sean éstos, así convendrá uno u otro.

Si realidad es eso que llamamos materia, porque impresiona el tacto o la vista, y realidad llamamos también a la energía cuyas manifestaciones percibimos directa o indirectamente, realidad no menos pura y elevada son asimismo las creaciones de nuestro espíritu.

Leyes naturales llamamos a las normas que regulan las variaciones de esa realidad externa; luego toda ley matemática, por ser fruto de la observación interna y ley de nuestro pensamiento, es también ley de la Naturaleza.

Afortunadamente para el progreso humano, algunos espíritus avanzados se preocuparon de estudiar los problemas abstractos antes de que éstos les fuesen impuestos, sin cuidarse de la utilidad que pudieran reportar y sólo por simple recreación de sus espíritus filosóficos.

Gracias a los esfuerzos desinteresados de estos investigadores, un nuevo cuerpo de doctrina se está elaborando ya, apto para las necesidades de la Matemática, y no está lejano el día en que el Ultracontinuo hará su entrada triunfal en la enseñanza escolástica de esta ciencia.

* * *

Señores académicos: Llego aquí al punto más difícil de mi discurso. La cortesía obliga a contestar a las alusiones nominales que repetidamente me han sido dirigidas desde este mismo sitio. También es forzoso, pues la costumbre lo exige, que os confiese mi estado de ánimo en este momento; y he de hacerlo con mi ruda sinceridad, sin aquellas afectaciones de humildad excesiva que suelen constituir una variedad de la inmodestia.

Heme aquí, cuando el turno me ha correspondido, encumbrado por obra de vuestra benevolencia, en este elevado puesto, tan codiciado de muchos y que colmaría las ambiciones de quien viviera más atento a su medro personal que al porvenir de su Ciencia y de su Patria.

Pero, en las nuevas generaciones, educadas en la escuela del desengaño, la vanidad cede su puesto al dolor. El cual se reconcentra en las almas, sumiéndolas en amargo desconsuelo, o estalla en gritos de indignación y protesta que sin duda resonarán con ecos estridentes en las felices almas anidadas en el paraíso de la inconsciencia.

Escuchad esta triste confesión. Consagrar los mejores años de juventud a levantar el edificio de la propia cultura; triunfar en oposiciones; oír el elogio de los maestros; sentir el halago de todos los premios y distinciones; procrear en noches de vigilia, hijos de la inteligencia; y, de pronto, al arribar a otras playas, contra el consejo de muchos profesores, para saciar la curiosidad de saber, impulsado por íntimo descontento interior, presagio del rudo desengaño, sentir, al violento contraste con la realidad de la Ciencia, que aquella ficticia riqueza se disipa, y la familia creada se pierde, y el edificio levantado se derrumba.

Encontrarse indigente en los umbrales de la Ciencia, llorando la juventud perdida, verse obligado a ocultar el título ganado a costa de tantas torturas, y tener que rehacer a marchas forzadas una nueva vida... Sólo quien haya sufrido análogo tormento está capacitado para comprender este dolor.

Mas, no temáis que turbe la grave solemnidad de este acto abriendo a vuestros ojos mis heridas, todavía no cicatrizadas. El corazón angustiado suele olvidar todas las conveniencias sociales y debe desahogarse en la soledad. Si aludo a este sentimiento, sobrado subjetivo para que pueda interesaros, es porque debo explicar los lazos espirituales que me unían al maestro, cuyo valor no conocí hasta que me alejé de él.

En aquellos momentos de desconsuelo en que, lejos de la patria, el alma convaleciente del rudo golpe se complace en reconstruir mentalmente la escena de su naufragio, el recuerdo de D. Eduardo aparecía a mi memoria rodeado de un nimbo de respeto y gratitud.

Gratitud por haber introducido en España los elementos de la Geometría proyectiva, que en aquél mi triste inventario de conocimientos no tuve que desechar. Gratitud por haberme animado él mismo a buscar en otros países la satisfacción del íntimo descontento, que también él sentía y que le fué vedado realizar.

Mas, si tuve la suerte de saciar esta sed, dolor insufrible para quien lleva en la sangre el orgullo legendario de la raza, es sentir en el propio rostro los latigazos del desprecio, sin encontrar defensa que oponerle.

Avergonzado cada vez que de labios extranjeros oía exclamaciones de estupor al conocer nuestra organización universitaria, nuestro original procedimiento de provisión de cátedras y la índole de las cuestiones matemáticas en que todavía nos ocupamos, propúseme contagiar a otras conciencias mi indignación y comunicarles mis optimistas entusiasmos.

Repugnándome la cobarde posición fatalista de quienes juzgan inevitable y como designio providencial que en el campo de los estudios matemáticos forzosamente habrá de ser España siempre una excepción en el mundo de la cultura, puse toda mi alma en la empresa de nuestra renovación matemática, sin medir antes la pequeñez de mis fuerzas para tan descomunal empresa.

Creía yo, ingenuamente, que aquella misma sed de rigor y exactitud que en todos los países determinó el profundo cambio, habría de sentirse aquí al cabo de los tiempos, y en sustitución del Análisis algorítmico del siglo XVIII, perfeccionado por Cauchy, sería acogida con entusiasmo la lógica trabazón de conceptos que constituye el nervio de la Ciencia novecentista.

Parecíame cuestión de decoro nacional el que nuestros doctores en Ciencias exactas, ya que no aportasen nada original a la Matemática, como en otros países, conocieran siquiera las geniales creaciones de Kummer y Kronecker, de Hermite y Darboux, de Cayley y Salmon, de Beltrami, Dini y Veronese, de Grassmann y Lie, de Schwarz y Cantor, de Klein y Poincaré, y de tantos otros clásicos de la segunda mitad del siglo XIX, cuyos nombres, lanzados como un cartel de desafío a nuestra ignorancia por un benemérito maestro, desde su cátedra provinciana, suenan todavía en nuestros oídos como algo exótico y lejano, como si sus creaciones hubieran de ser eternamente inaccesibles al intelecto español.

Y en alas de mi optimismo llegué a soñar que también la Matemática viva, actualmente en elaboración por artífices eminentes que no es preciso citar, y en la cual colaboran en la medida de sus fuerzas profesores y alumnos universitarios de tantos países, llegaría a interesar a algunos de nuestros jóvenes, no inferiores en inteligencia ni aplicación a los de aquellas otras naciones.

Ofreciéndonos la gran guerra universal la única coyuntura favorable para aprovechar la momentánea detención de los otros pueblos, salvando a marchas forzadas nuestro progresivo alejamiento de ellos, puse en práctica todos los medios que en mi mano estaban: cursos y conferencias, libros y artículos, fundación de céntros de estudio y revistas de divulgación...

Luchando siempre contra el supersticioso temor que a los hombres prudentes inspira la introducción de esa Matemática *moderna* (tan *moderna* que sus teorías y métodos datan del año 70, y aun algunas llevan un siglo de existencia), colaboré con entusiasmo con quienes dentro de la Universidad se esforzaban en trasladar las columnas de Hércules que, colocadas en el Cálculo infinitesimal, como confín accesible de la Matemática universitaria, excluyen de las aulas casi toda la obra del siglo de oro de las Ciencias exactas.

Mas, aunque yo me esforzara en disimular o atenuar nuestra equivocación, los hechos señalan bien claramente la magnitud del fracaso de todos los que hemos acometido el intento de renovar las enseñanzas.

Aun fracasados los intentos de reforma en nuestros centros superiores de cultura, todavía quedaba como último recurso un camino abierto a la esperanza. Respetar todo lo estatuído; conservar intangibles todos los intereses creados en largos años de meritísima actuación pedagógica, y pedir respetuosa, pero insistentemente, autorización para que al margen de ese cuadro de enseñanzas actuales pudieran figurar cursos libres de Análisis y Geometría, dictados sin ventaja personal ninguna por todos los catedráticos que sientan la conciencia de los deberes que nos impone nuestra situación ante el mundo. Parte bien mínima de las reformas mucho más ámplias contenidas en el Estatuto universitario, que, aprobadas sin discusión, parecía llevaban el consentimiento entusiasta y casi unánime del profesorado universitario, y que por obstáculos complejos no han llegado siquiera a ser planteadas.

Imposible parece también, por ahora, y quizá en mucho tiempo, ejercitar una acción eficaz extrauniversitaria sobre la juventud estudiosa; pues sus energías todas son necesarias para el acrobatismo de las oposiciones, en cuyos arriesgados ejercicios el peso de toda investigación seria y de todo conocimiento moderno suele ser inútil, cuando no contraproducente.

Cerradas, pues, todas las posibilidades, forzoso es dar por terminada la peregrinación de dos lustros a través de un desierto de indiferencia y hostilidad, sin haber sentido el consolador eco de voces amigas.

Puesto que a nadie hemos convencido, o la razón no está de nuestra parte, o no hemos acertado a defenderla convenientemente; y al presentarme ante vosotros derrotado y maltrecho, pero no vencido, yo elevo un saludo de respeto y simpatía al maestro Galdeano, que por primera vez intentó el mismo imposible.

Mas, si la ciega persistencia en los propósitos, luchando contra toda una corriente poderosa, sin otro sostén que el amor propio, es locura temeraria, cobardía también censurable sería abandonar indefenso un ideal, con inconstancia indigna de ocupar el mismo puesto de nuestro gran geómetra, altísimo ejemplo de noble terquedad y patriótica constancia.

Me habéis llamado para suceder a D. Eduardo Torroja; pero continuar su obra es sentirse poseído de aquél su espíritu progresivo y aplicarlo a la obra misma que él nos legó, completándola y mejorándola; es apoderarse de su ferviente sed de ciencia nueva, prosiguiendo la importación de nuevos capítulos; es heredar su espíritu de lucha, continuando la batalla que él inició contra nuestra secular ignorancia. Así entendemos nuestro deber los que aspiramos a continuar su obra; y en estas horas de desfallecimiento, cuando las piedras puestas en el camino parecen formar muralla infranqueable, debemos confortarnos recordando la paciente constancia con que él, en trance análogo, fué apartándolas una a una, hasta dejar expedito el camino.

Aun cerrados los medios de acción directa sobre los estudios de Matemáticas superiores; aun condenados, sabe Dios por cuantos años, a la inacción forzosa, no debemos renunciar a la esperanza de que alguien mejor pertrechado levante un día la misma bandera, tantas veces humillada. Que los capitanes derrotados pueden tener un honroso puesto como soldados de fila.

Quedan, mientras tanto, las armas de corto alcance: el libro, la revista, la cátedra elemental donde la Matemática vive precariamente al servicio de otras ciencias. Queda, sobre todo como última posibilidad de acción indirecta, esta misma Academia.

No considero este sillón como lugar de descanso, ni mucho menos como altar de consagración, a todas luces inmerecida y prematura; es un puesto avanzado, de honor y de peligro.

A este Centro acuden espíritus laboriosos con las primicias de su trabajo, en busca de orientación para su labor futura; vuestros certámenes han de servir de estímulo a los investigadores; de vuestras discusiones científicas nacen las monografías que sirven de estudio y de modelo; vuestros informes críticos sobre la producción científica señalan los rumbos futuros a los autores. Es un puesto de trabajo intenso, y por ello lo acepto reconocido.

Para terminar la expresión de este concepto y con él mi pobre discurso, permitidme un recuerdo de mis viajes.

En el corazón del continente sudamericano hay un lugar elevado, donde a muy poca distancia nacen dos manantiales. Después de larguísimo y accidentado curso, las aguas de una de las fuentes van a engrosar el caudal inmenso del Amazonas, y atravesando las regiones pantanosas y malsanas del Brasil, desembocan en la zona tropical.

Las aguas de la otra fuente se dirigen hacia el Sur, vertiéndose de uno en otro valle, para enriquecer el caudaloso Río de la Plata, que fecunda las fértiles llanuras argentinas y uruguayas.

Los pocos viajeros que visitan aquel elevado paraje, donde las aguas nacen, suelen llenar su vaso en una de las fuentes, y, vertiéndolo en el otro cauce, cambian totalmente el rumbo de su trayectoria.

Desde este lugar altísimo a que vuestra bondad me ha llamado, se dominan asimismo las dos corrientes científicas opuestas que, ahora, como siempre, luchan en nuestra patria para conducirla a bien opuestos destinos.

Permitidme que colabore en vuestra obra vertiendo mi vaso, pequeño, pero mío, en la corriente que conduzca al progreso científico de España.

Diciembre de 1919.

CONTESTACIÓN

DEL SEÑOR

D. AUGUSTO KRAHE

SEÑORES:

DESIGNADO por el Excmo. Sr. Presidente para contestar a la joya que en forma de discurso acaba de mostrarnos el Sr. Rey Pastor, hónrame sobremanera la delegación y complázcome en saludar y corresponder en nombre de la Academia a tan esclarecido y joven matemático.

Cumplo este deber reglamentario de dar la bienvenida al nuevo académico con honda emoción. Por segunda vez, en solemnidades análogas a la presente, tócame dirigiros la palabra; no extrañéis que hoy rememore la tarde de mi recepción, en la cual, acogido precisamente desde este mismo sitio por el verbo prodigioso del gran Echegaray, tuve el honor de sentarme por primera vez entre tan insignes compañeros.

Coincidió con mi ingreso la entrega por la Academia del premio, brillantemente conquistado por el Sr. Rey Pastor, instituído por el Excmo. Sr. Duque de Berwick y de Alba en memoria de su egregia madre.

Esta coincidencia o asociación de actos sería sobrado motivo —de no concurrir otros muchos— de simpatía, por mi parte, hacia el nuevo e ilustre compañero.

Para satisfacción del Sr. Rey Pastor, declararé que el excelso Echegaray manifestó en repetidas ocasiones, a nuestro querido Presidente, D. Amós Salvador, y al que tiene el honor de dirigiros la palabra, su vehemente deseo de contarle entre los académicos a la primera ocasión en que la implacable e ineludible muerte aclarase nuestras filas. Si se hubiera prolongado algo más la vida de aquel glorioso veterano de las ciencias y las letras españolas, es seguro que, dada su simpatía por el Sr. Rey Pastor y su amoroso entusiasmo, tantas veces expresado, por las ciencias exactas, el discurso que acabáis de aplaudir hubiera motivado una brillante oración, producto de aquella soberana inteligencia. Lamento vivamente, sobre todo en ocasiones como la actual, no poseer la mágica palabra del eximio y llorado maestro, con la que tantas veces deleitó y electrizó a este selecto auditorio.

Toma posesión en el día de hoy nuestro nuevo colega de la medalla número 20, vacante por defunción del sabio don Eduardo Torroja, y dedica gran parte de su discurso a tributar, como es costumbre y tradición, con sinceras y sentidas frases, homenaje al maestro genial, y enaltece la memoria del varón bueno y justo. Seguramente todos nosotros ofrendamos en este momento un recuerdo al compañero fallecido y suscribimos de corazón el elogio que de él hace el Sr. Rey Pastor.

No tuve el honor de ser alumno del Sr. Torroja; de haberlo sido, quizá hubiera podido ofreceros algunas anécdotas, actos del ser humano —*definiciones disfrazadas*, como llamó el ilustre H. de Poincaré a propiedades de los entes geométricos, y que sirven para caracterizarlos—, que, al referirlos, describen y dan a conocer al individuo mejor que multitud de páginas plagadas de adjetivos encomiásticos. Mi primera impresión, ya lejana, sobre D. Eduardo Torroja, impresión adquirida en actos universitarios, fué a veces la de caballero de un cuadro del Greco y a veces la de asceta redivivo arrancado de un lienzo de Zurbarán. Frío, rectilíneo, de hablar lento y apagado; una vez hecha la pregunta, velaba la mirada, concentrándola en su potente cerebro, donde se hallarían ordenadas y dispuestas a entrar en batalla todas las formas geométricas de las diversas categorías. Más adelante, ya entre vosotros, tuve ocasión de apreciar en su justo valor al varón creyente, modesto y ecuánime, todo deferencia y bondad para sus compañeros.

En D. Eduardo Torroja predominó la energía potencial; en su sucesor rige la energía cinética.

El primero, moldeado en las estrechas disciplinas de Staudt, introdujo sus enseñanzas con la impasibilidad y tenacidad del hombre del Norte. Su Geometría no se contamina con el Análisis, y es en él casi exclusivamente estática; refléjase en su obra algo de la belleza y solidez de los grandes monumentos egipcios.

El segundo, no es partidario de pasarse la vida contemplando y comentando a Cauchy. Apasionado, con razón, por la moderna Matemática, iniciada el siglo anterior por Riemann, Weierstrass, Lie, Cantor y Klein, y perfeccionada constantemente por legiones de discípulos y por él mismo, batalla por introducir en la enseñanza superior universitaria las creaciones de aquellos grandes maestros. Su Geometría proyectiva no se ocupa sólo de figuras en reposo; en virtud de las transformaciones geométricas, anímanse aquéllas y se someten a movimientos y deformaciones. Es más: siguiendo a Hilbert, los elementos geométricos, puntos, rectas y planos, pudieran ser otras *cosas* de las entendidas por tales, desde Euclides hasta Staudt.

De muy brillante ejecutoria viene acompañado el Sr. Rey Pastor al suceder al Sr. Torroja. Las oposiciones a las cátedras de Oviedo y Madrid; los premios ganados en esta Real Academia, en concurso ordinario, y el extraordinario de que antes hice mención; sus notables conferencias en el Ateneo sobre la Matemática superior; la altísima labor científica y patriótica desarrollada en Universidades sudamericanas; las Memorias presentadas en Congresos científicos; las publicadas en periódicos matemáticos nacionales y extranjeros, a lo que hay que agregar el ímprobo trabajo y sacrificios de todo género que supone la dirección del Laboratorio Seminario y de la *Revista Matemática Hispano-Americana* ponen aquélla bien de manifiesto. Añadiré que como resumen de sus conferencias en Sociedades científicas y de sus lecciones en cátedras de las Universidades españolas y americanas, han aparecido preciosos libros estimados y conocidos por cuantos siguen, en nuestra España y en tierras de habla castellana, los estudios matemáticos (*).

Para que no se juzgue de apasionamienno patriótico, cualquier elogio que se haga del Sr. Rey Pastor, bastará señalar la alta estimación que en el extranjero merece su labor; entre otras muchas que pudiéramos citar conviene hacer especial mención, por el lugar que ocupan en el mundo matemático, las opiniones de los ilustres Klein y Loria (**).

Y como su actividad cerebral y su amor a la ciencia matemática son inagotables, no se duerme en los laureles: ya habéis oído el programa de las interesantes cuestiones que ulteriormente ha de presentaros completamente desarrolladas, investigaciones propias del notable matemático acerca de puntos mal dilucidados o nebulosas aún no resueltas de la Matemática elemental y de la superior, que se refieren al infinito que pu-

(*) Véase la lista de publicaciones del Sr. Rey Pastor al final.

(**) *Le matematiche in Ispagna. Ieri ed oggi.* Extracto de la Revista «Scientia». Vol. XXV, año XIII (1919).

diéramos llamar clásico y al nuevo infinito o transfinito de Cantor.

Conocida es por demás, para el público matemático, la expectación con que aún no hace medio siglo fueron acogidas las teorías cantorianas por filósofos y matemáticos. Críticos e investigadores cayeron sobre ellas con verdadera saña. Parte de las creaciones cantorianas se incorporaron, desde luego, a la enseñanza, pues su impecable rigor lógico las impusieron. No sólo los filósofos, los mismos matemáticos no se mostraron de acuerdo respecto a los números transfinitos. Sabido es que filósofos y matemáticos nunca se entendieron muy bien. Respecto a los matemáticos, prescindiendo de los que desde luego consideraron todo aquello pura paradoja, los hubo dispuestos a trabajar con fe e investigar siguiendo los derroteros señalados por el maestro, y sus investigaciones producen la revisión y renovación de la Matemática en todas direcciones.

Hay matemático, alguno muy ilustre, que, aceptando sin objeción las teorías cantorianas, las acoge con frialdad, manifestando que, si bien la consideración de los números transfinitos ha permitido descubrir ciertos teoremas, como a éstos se puede llegar por otra senda, será conveniente aguardar hasta ver lo que da de sí la nueva Aritmética de los números transfinitos. No es de aplaudir esta reserva en hombres eminentes y conocedores de la ciencia matemática y de su progresivo desarrollo en el transcurso de los siglos.

Y no quiero hablar de otras críticas acerbas sobre la obra del gran Cantor, en las cuales críticas el principal argumento en contra era la nacionalidad del gran matemático, pues aun estando suscritas por firmas ilustres, más vale correr un piadoso velo sobre tales aberraciones.

Que todo en Cantor sea de claridad meridiana, no he de osar defenderlo. No es tan asequible y de comprensión tan general lo transfinito como lo indefinido, y a su aclaración se dedican los hombres entusiastas y con cerebro capaz para investigar. De admirar son los avances que nos anuncia el Sr. Rey Pastor en el dominio de lo transfinito.

Casi de populares pudieran calificarse en España los trabajos de Cantor, gracias principalmente a la propaganda entusiasta y enseñanzas del Sr. Rey Pastor, y hemos de señalar como caso curioso en nuestra patria la simpatía con que han sido aceptadas y lo pronto que han arraigado entre la juventud estudiosa. Deduzco de ello que no predicaron en desierto los predecesores del Sr. Rey Pastor, muchos de ellos discípulos del Sr. Torroja; fueron preparando el terreno para la siembra, y la semilla ha germinado con facilidad.

Excusado sería decir que acogemos con júbilo la lectura de trabajos que ha de presentar más adelante el Sr. Rey Pastor y mucho nos prometemos y esperamos del genio y saber del nuevo compañero.

Creo firmemente en el progreso científico de España y en el avance en la marcha, y confío en que la velocidad aumentará aún más. El Sr. Rey Pastor ha contribuído para ello, y ya tenemos la seguridad de que ha de contribuir todavía más.

No compadezco, y no es alarde de mal corazón, al Sr. Rey Pastor en la circunstancial ruina de su hogar matemático.

Creo que todo el mundo deducirá que sus amarguras son producidas por fermentos de un noble y ferviente patriotismo. Hay que convenir, además, que en su naufragio, o la orilla estaba muy próxima, o él es excelente nadador. Y respecto a su arruinada casa, bien pronto pudo consolarse, pues sobre el solar surgió inmediatamente, por arte de su inteligencia, hermoso monumento de sólida cimentación.

PUBLICACIONES MATEMÁTICAS DE J. REY PASTOR (*)

Año 1905.

Sobre los números consecutivos cuya suma es a la vez cuadrado y cubo perfecto.—C. r.—«Rev. trim. de Mat.», tomo V, pág. 61.

Un problema sobre el triángulo.—C. r.—«Rev. trim. de Mat.», tomo V, pág. 239.

Fórmulas que dan cuadrados perfectos.—C. r.—«Rev. trim. de Mat.», tomo V, página 241.

Círculo inscrito en un pentágono y circunscrito a otro.—C. r.—«Rev. trim. de Mat.», tomo V, pág. 243.

Notas y problemas diversos.

Año 1906.

Mínimo segmento rectilíneo que pasa por un punto, interceptado por un ángulo.—C. r.—«Rev. trim. de Mat»., tomo VI, pág. 54.

Módulo de números divisibles por 5.069.—C. r.—«Rev. trim. de Mat.», tomo VI, pág. 57.

Cuestiones y notas varias.

Año 1907.

Algunas consecuencias de la fórmula de Leibniz.—«Anales de la Facultad de Ciencias de Zaragoza», tomo I, pág. 163.

Un problema de mezclas.—«Anales de la F. de C. de Zaragoza», tomo I, pág. 169.

Una propiedad de la recta de Simpson.—C. r.—«Anales de la F. de C. de Zaragoza», tomo I, pág. 163.

Artículos, problemas, etc.

(*) Los títulos en cursiva designan las notas que tienen carácter de investigación.

Año 1908.

Un lugar geométrico de sexto orden. – C. r.—«Anales de la F. de C. de Zaragoza», tomo II, pág. 76.

Condiciones necesarias y suficientes para que dos cúbicas tengan dos raíces comunes.—«Anales de la F. de C. de Zaragoza», tomo II, pág. 79.

Longitud de un hilo arrollado en torno de un cono, formando una hélice cónica.—C. r.—«Anales de la F. de C. de Zaragoza», tomo II. pág. 146.

Varios lugares geométricos descritos por el punto de Euler de un triángulo.—C. r.—«Anales de la F. de C. de Zaragoza», tomo II, pág. 149.

Una expresión de la suma de potencias semejantes de los primeros números naturales.—C. r.—«Anales de la F. de C. de Zaragoza», tomo II, pág. 280.

Una función simétrica de cosenos de arcos en progresión aritmética.—C. r.—«Anales de la F. de C. de Zaragoza», tomo II, pág. 284.

Año 1909.

Sobre algunas cuárticas de segunda especie.—«Anales de la F. de C. de Zaragoza», tomo III, pág. 63.

Nota bibliográfica de la obra «Leçons sur les fonctions definies par les équations différentielles du premier ordre», de P. Boutroux.—«Anales de la F. de C. de Zaragoza», tomo III, pág. 94.

Idem de las «Leçons sur les théories générales de l'Analyse», de R. Baire.—«Anales de la F. de C. de Zaragoza», tomo III, pág. 96.

Un problema de Análisis indeterminado cuadrático.—C. r.—«Anales de la F. de C. de Zaragoza», tomo III, pág. 104.

Una propiedad de la suma de potencias semejantes de un número impar.—C. r.—«Anales de la F. de C. de Zaragoza», tomo III, pág. 107.

Expresión aproximada de un arco en función de la cuerda y la flecha.—C. r.—«Anales de la F. de C. de Zaragoza», tomo III, pág. 108.

Una relación métrica entre triángulos.—C. r.—«Anales de la F. de C. de Zaragoza», tomo III, pág. 109.

Un lugar geométrico.—C. r.—Idem, tomo III, pág. 110.

Nota crítica de la obra «Les systemes d'équations aux derivées partielles», de Ch. Riquier.—Idem, tomo III, pág. 256.

Idem de la obra «Memoires diverses», de H. de la Goupillière.—«Anales de la F. de C. de Zaragoza», tomo III, pág. 257.

Año 1910.

Correspondencias de figuras elementales.—Tesis doctoral. Un volumen en 4.°, de 100 páginas.

La involucion cíclica en las figuras de primera, segunda y tercera categoría.—Congreso de Valencia.

Cudrticas de primera y segunda especie sobre cuádricas alabeadas.—Congreso de Valencia.

Año 1911.

Aplication d'une proyectivite cyclique a la Géometrie du triangle.—L'Enseignement mathématique, tomo XIII, pág. 292. [Véase también la obra «Exercices de Géometrie», par F. G. M., 5.ª edition, págs. 1.140, 1.247, 1.262, 1.263, 1.266, 1.279].

Caracteres de las formas cuadráticas definidas.—«Revista de la Real Academia de Ciencias de Madrid», tomo IX, pág. 540.

Sobre la sumación de series.—«Revista de la Sociedad Matemática Española», tomo I, pág. 10.

Una cuestión de divisibilidad.—C. p.—«Rev. de la S. M. E.», tomo I, pág. 390.

Biografía de F. Gomes Teixeira.—«Rev. de la S. M. E.», tomo I, pág. 77.

Nota crítica de la obra de Rosenthal «Untersuchungen uber gleichflächige Polyeder.—«Rev. de la S. M. E.», tomo I, pág. 99.

Un sistema de puntos en involución.—«Rev. de la S. M. E.», tomo I, pág. 111.

Sobre una sección del toro.—«Rev. de la S. M. E.», tomo I, pág. 145.

Crítica de la obra de Guimarães «Les Mathématiques en Portugal».—«Rev. de la S. M. E.», tomo I, pág. 173.

El exceso algebraico y la teoría de ecuaciones numéricas.—Congreso de Granada.

Sobre la representación conforme.—Congreso de Granada.

Año 1912.

Lugar geométrico sobre una cuádrica alabeada.—C. p.—«Rev. de la S. M. E.», tomo I, pág. 332.

Sobre una propiedad de las curvas circulares de tercer orden.—«Rev. de la S. M. E.», tomo I, pág. 388.

Determinación de una cuádrica por nueve puntos.—«Rev. de la S. M. E.», tomo I, pág. 390.

Sobre aplicación de la Geometría proyectiva a la Mecánica.—«Rev. de la S. M. E.», tomo II, pág. 28.

Fundamento del método de aproximaciones sucesivas.—«Rev. de la S. M. E.», tomo II, pág. 28.

Sobre la generalización del teorema de Rolle.—«Rev. de la S. M. E.», tomo II, pág. 29.

Sur la plus grande puissance de p contenue comme diviseur dans p^n.—C. p.—L'Intermédiaire des Mathématiciens, tomo XIX, págs. 98, 283.

L'équation $x^4-y^4=5z^4$.—Idem, págs. 98, 190, 206, 281.

Sur la Géometrie du triangle au point de vue non euclidien.—Idem, pág. 98.

Intersection d'une conique.—C. r.—Idem, pág. 114.

Position des axes d'une conique determinée par cinq points.—C. r.—Idem pág. 114.

Año 1913.

Lecciones de Geometría moderna.—Traducción anotada, en colaboración con J. Alvarez, de la obra «Vorlesungen über neuere Geometrie», del Profesor M. Pasch. Un tomo en 4.°, de 288 págs.

Ein geometrischer Ort.—Archiv der Mathematik und Physik, tomo XXII, pág. 79.

Über eine abgeleitete Kurve.—Idem, pág. 290.

Rezensionen der Werken: Z. G. de Galdeano. «Ensayos de síntesis matemática y nuevo método de enseñanza matemática».—Zaragoza, 1911. «Nuevo método de enseñanza matemática».—Zaragoza, 1912.—Archiv der Mathematik und Physik, tomo XXI, pág. 355.

Aplicaciones algebraicas de la representación conforme.—Congreso de Madrid.

Los matemáticos españoles del siglo XVI.—Discurso inaugural del curso académico de 1913-1914 en la Universidad de Oviedo.

Sobre bibliografía matemática.—«Revista de libros», tomo I, pág. 18.

Un libro de Análisis matemático.—Reseña bibliográfica.—«Revista de libros, núm. 3, pág. 42.

Reseña de la Memoria: Terradas, «Movimiento estacionario de una cuerda».—«Revista de libros», núm. 3, pág. 44.

Nuestra cultura físico-matemática.—«Revista de libros», núm. 2, pág. 22.

Año 1914.

Reseña de la Memoria: Pannelli, «Sobre el número de superficies de un haz que tienen un punto doble».—«Rend. Cir. Mat. di Palermo», tomo XXXVI.—«Estudio», tomo V, pág. 164.

Idem de la obra: Loria, «Le scienze esatte nell'antica Grecia».—«Estudio», tomo VI, pág. 194.

Idem de la obra: Staude, «Analytische Geometrie der kubischen Kegelschnitten».—«Estudio», pág. 195.

Idem de la Memoria: Schur, «Dos teoremas sobre ecuaciones algebraicas que tienen todas sus raíces reales».—«Estudio», tomo VII, pág. 298.

Idem de la Memoria: Polya-Schur, «Sobre dos clases de series de factores en la Teoría de ecuaciones algebraicas».—«Estudio», tomo VII, pág. 298.

Idem de la Memoria: Runge, «Sobre un tipo especial de ecuaciones integrales».—«Estudio», tomo VII, pág. 299.

Idem de la Memoria: Stübler, «Investigaciones sobre algunas superficies de área mínima».—«Estudio», tomo VII, pág. 301.

Año 1915.

Valoración de la cultura matemática española.—Discurso inaugural de la Sección 1.ª en el Congreso de Valladolid.

Resolución elemental del problema de Dirichlet para el círculo.—Congreso de Valladolid.

Resumen de las lecciones de Análisis matemático, primer curso, explicadas en la Universidad de Madrid. Un tomo en 4.° de 440 págs.

Revista de Revistas.—«Rev. de la S. M. E.», tomo IV, págs. 58 y 90.

Notas, artículos, problemas, etc.

Año 1916.

Fundamentos de la Geometría proyectiva superior.—Un tomo en 4.° de 445 págs. [Obra laureada por la Academia con el premio del Duque de Alba].

Introducción a la Matemática superior.—Estado actual, métodos y problemas. Un tomo en 8.° de 200 págs. Curso explicado en la cátedra del Ateneo de Madrid.

Evolución de la Matemática en la edad contemporánea·—Conferencia en el Ateneo de Madrid. Un folleto de 31 págs. en 4.°

Resumen de las lecciones de Análisis matemático, segundo curso, explicadas en la Universidad de Madrid.—Un tomo en 4.° de 472 págs.

Sistematización de la Geometría en torno de la Geometría proyectiva superior—«Rev. de la Acad. de Ciencias de Zaragoza», tomo I, pág. 46.

Año 1917.

Teoría de la Representació conforme.—Conferencias dadas en el Institut d'estudis catalans. Un volumen en 4.°, de 90 págs.

Algunos ejercicios sobre la sucesión de Fibonacci.—Scientia, tomo I, pág. 19.

Resumen de los trabajos de investigación realizados en el Laboratorio y Seminario matemático.—Congreso de Sevilla.

Análisis algebraico. Un tomo en 4.°, de 500 págs.

Año 1918.

Systématisation de la Géometrie au moyen de la Théorie des groupes.—Scientia.—Milano, pág. 411-422.

Un teorema erróneo en la Geometría no euclidiana del triángulo.—Contribución al Estudio de las Ciencias Físicas y Matemáticas. Vol. II, núm. 38. La Plata.

Resumen de la Teoría de las funciones y sus aplicaciones físicas. Un volumen de 112 págs. Buenos Aires.

Prólogo a la obra Estática y aplicaciones de F. García Martínez. Montevideo.

Año 1919.

La Aritmética trasfinita.—Rev. Mat. hispano-americana, págs. 25, 33, 89, 94, 128, 13, 218, 223.

J. Hadamard. —Idem, págs, 66, 80, 105, 112.

Necrologías de E. Lampe, U. Dini, Bôcher, etc.

Diversas cnestiones propuestas, análisis bibliográficos, notas del Glosario matemático, Crónica, etc.

EN PRENSA

Teoría geométrica de la polaridad en las figuras de primera y segunda categoría.— Obra premiada en el concurso ordinario de 1912 por la Real Academia de Ciencias de Madrid.

Reseña histórica y bibliográfica de la Teoría de la Representación conforme.

Contribución de España a las Ciencias matemáticas.—Enciclopedia universal Espasa.

Teoría de las funciones reales.—Un tomo.

Das Hurwitzsche Problem.—Mathematische Annalen.

Réprésentation conforme des surfaces de Riemann sur le plan ouvert.—Congrés international d'Estrasburg.

TRABAJOS EN COLABORACIÓN REALIZADOS EN EL LABORATORIO - SEMINARIO MATEMATICO

Un abaco para el cálculo de la refracción, por A. Saldaña.—Congreso de Valladolid.

Cónicas analagmáticas en la inversión respecto de un triángulo, por R. Araujo.— Idem.

Cuadricas analagmáticas en la inversión respecto de un tetraedro, por R. Araujo.— Idem.

Sustituciones en el cuerpo algébrico normal de Galois, por S. Cámara.—Idem.

Representaciones reales de los espacios complejos de n *dimensiones*, por O. Fernández Baños.—Publicaciones del Laboratorio Seminario Matemático, tomo II, Mem. 1.ª

Representaciones conformes por el método de Bieberbach, por P. Pineda.—Idem, tomo II, Mem. 3.ª

Grupos de sustituciones que dejan invariable un recinto plano circular múltiplemente conexo, por J. Rodríguez Sanz.—Idem, tomo II, Mem. 4.ª

Curvas IV, por R Araujo.—Idem, tomo III, Mem. 1.ª

Resolución gráfica del problema de Dirichlet para vàrios tipos de recintos, por J. M. Orts. —Idem, tomo III, Mem. 2.ª

Biografía y Análisis de las obras de Matemática de Pedro Sánchez Ciruelo, por J. M. Lorente.—Idem, tomo III, Mem. 4.ª