REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

La economía y la sociología como motores de la investigación matemática

DISCURSO

LEIDO EN EL ACTO DE SU RECEPCION

POR EL

EXCMO. SR. D. DARIO MARAVALL CASESNOVES

Y

CONTESTACION

DEL

EXCMO. SR. D. SIXTO RIOS GARCIA

EL DIA 8 DE MAYO DE 1968

MADRID
DOMICILIO DE LA ACADEMIA:
VALVERDE, 22. – TELEFONO 221-25-29
1968

Depósito Legal M. 7.688-1968.

TALL. GRÁF. VDA. DE C. BERMEJO.—J. GARCÍA MORATO, 122.—TELÉF. 233-06-19.—MADRID

DISCURSO

DEL

EXCMO. SR. D. DARIO MARAVALL CASESNOVES

TEMA:

LA ECONOMIA Y LA SOCIOLOGIA COMO MOTORES DE LA INVESTIGACION MATEMATICA

Excmo. Sr.,

Excmos Sres. Académicos,

Sras., Sres.:

Cuando me hicistéis el alto honor de traerme a esta Real Academia, para que os acompañara en vuestras tareas científicas, seguramente lo hicistéis pensando en mi entrega apasionada al estudio de las matemáticas, y no en mis pobres y escasos méritos. Al tener noticia de mi elección sentí gran alegría, pero al mismo tiempo un gran temor, porque aterra la enorme responsabilidad de sentarse al lado de tantos maestros y de suceder a aquellos que en tiempos pasados fueron el orgullo de la Ciencia española. No puedo ofreceros ni prometeros grandes cosas, pero lo que sí os prometo es seguir como hasta ahora, totalmente consagrado a la investigación matemática, que espero siga siendo el norte de mi vida. Muchas gracias por vuestra confianza en mí.

Fue mi predecesor en esta medalla número 5 el Excmo. Sr. don Manuel Velasco de Pando, gran matemático y gran ingeniero. No tuve el honor de conocerle personalmente, pero sí le conocí a través de sus numerosas y prestigiosas publicaciones científicas y técnicas, algunas de las cuales he estudiado con deleite y sumo interés. Grande ha sido la influencia que ha ejercido a través de su obra escrita sobre varias generaciones de ingenieros.

Don Manuel Velasco de Pando fue figura destacada en el Cuerpo Nacional de Ingenieros Industriales, en el que llegó a la cúspide, a presidente del Consejo Superior de Industria, órgano consultivo el más alto en su rama. En su vida profesional desempeñó cargos de gran responsabilidad y prestigio, y en todos ellos realizó una labor digna del recuerdo y del elogio.

Si bien es cierto que su labor profesional justifica muy sobradamente toda una vida ejemplar de gran ingeniero, aún mayor es, si cabe, el mérito de su labor de investigación científica, la cual se condensa en una larga serie de publicaciones a lo largo de cuarenta años, entre las que destacan las siguientes: «Piezas cargadas normalmente a su plano», «Solución general del problema elástico», «Placa elástica empotrada», «Placa circular con carga cualquiera», «Placa continua sobre apoyos aislados», «Nuevo método para resolver las ecuaciones integrales», «Arcos circulares y elípticos cargados normalmente a su plano», y los libros: «Elasticidad y resistencia de materiales», «Repertorio de funciones», «Plasticidad, nueva teoría y aplicaciones», «Máquinas herramientas», etc., etc.; por esta labor la Elasticidad, la Resistencia de Materiales y la Construcción le son fuertemente deudoras. Pero es el caso que no solamente en estas múltiples ramas de la Física y de la Matemática aplicadas a la Ingeniería fue importante su obra, sino que también lo fue en otros campos de la Matemática más puros, tales como las ecuaciones integrales y las funciones trascendentes superiores. Destacan sus publicaciones por su elegancia en el estilo, su exactitud y rigor en las demostraciones, junto a una gran claridad y belleza en la exposición.

Su fama de ingeniero y matemático traspasó las fronteras, y fue elegido corresponsal de varias Academias extranjeras, y oficial de la Academia de Francia. Así como de su obra de matemático y de ingeniero podría seguir hablándoos largamente con conocimiento directo de las fuentes, siento mucho no poder hacer lo mismo de su personalidad humana, porque, como dije anteriormente, la vida no nos dio ocasión de conocernos personalmente. Pero a través de amigos y colegas comunes, he podido hacerme una imagen de cómo fue D. Manuel Velasco de Pando, y sí puedo deciros que, aparte de ser un gran matemático e ingeniero, fue algo que todavía es más importante: un hombre muy bueno.

Fue elegido para esta misma medalla, aunque no llegó a tomar posesión, el Excmo. Sr. D. Ramón Iribarren Cavanilles, insigne ingeniero y prestigioso matemático, catedrático de Puertos de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, figura destacada en un claustro, famoso por las relevantes personalidades que han desfilado por él, en una ya larga tradición de celebridad científica y técnica. Autor de importantes obras de ingeniería en el grupo de puertos de Gipúzcoa, y en América del Sur y Africa portuguesa, y de muy conocidas y famosas publicaciones de Hidromecánica y Mecánica Elástica, entre las que destacan las siguientes: «Cálculo de diques verticales», «Obras de abrigo en los puertos», «Cálculo de los diques de escollera», «Violentas presiones producidas por la rotura de las olas», y otras muchas. Algunas de las cuales he estudiado con gran satisfacción.

¡Descansen en paz los dos sabios!

Pasemos al tema de nuestro discurso.

La investigación matemática se mueve animada por dos grandes fuentes de energía: una, interna, procede de las propias matemáticas; la otra, externa, procede de otras ciencias. Entre éstas ha sido la Física la más importante, con diferencia aplastante respecto a las demás, pero el trascurso del tiempo ha traído consigo que cada vez sea mayor el número de ciencias que actúan como motores de la investigación matemática. Nos proponemos examinar el papel desempeñado por la Economía y la Sociología en el origen de esta fuerza que pudiéramos llamar intelectomotriz.

Decía Volterra en su discurso de elogio con motivo de la muerte de Poincaré, que «las relaciones de la Física con las Matemáticas son tan antiguas como ellas mismas». Seguramente que esta opinión era compartida por todos los físicos y matemáticos de su tiempo. Desde entonces hasta nuestros días, esta idea del enlace entre Física y Matemáticas, que llega en muchas ocasiones hasta la casi fusión de ambas ciencias, ha trascendido del mundo de los científicos al del hombre de la calle, y una vez en ella se ha propagado con la misma rapidez que las ondas que el viento produce en el trigo, de que nos hablaba Leonardo. La idea de que no es posible la Física sin las Matemáticas, ha llegado a dejar de ser una idea para convertirse en una creencia, en el sentido de Ortega. En nuestros días, expresiones como: «los tensores conocen la Física mejor que los físicos», de Langevin, no expresan ya ideas, sino creencias.

No es igual el estado de las relaciones de la Matemática con otras ciencias; los contactos son mucho menores tanto en intensidad como en extensión, las ventajas del empleo del método matemático no son generalmente reconocidas y en muchos casos discutidas y negadas; y así Allen comienza la introducción de su «Economía matemática», diciendo: «la cuestión de si las técnicas matemáticas pueden o deben ser usadas en economía, es muy discutida». Al igual que la materia ofrece una resistencia a la penetración de la radiación que depende de la naturaleza de una y otra, asimismo la mente humana ofrece una resistencia a la penetración de las ideas nuevas, variable con la originalidad de éstas y con la capacidad intelectual del individuo. Aun cuando no todo, sí mucho de lo que se dice del individuo puede decirse de la colectividad, y en el hecho de que las Matemáticas son áridas y difíciles para muchos hombres, radica el curioso fenómeno de la lenta penetración de la Matemática en las otras ciencias. con la notable excepción de la Física.

La matematización de la ciencia ha sido lenta, pero continua, hasta llegar a constituir una de las características fundamentales de nuestra época, ya no solamente la Física, sino que también la Química, la Geología, la Biología, la Economía, la Sociología, hasta la Gramática usan cada vez con mayor intensidad los métodos matemáticos, y en algunas de sus partes se hallan tan impregnadas, tan empapadas de fórmulas y razonamientos matemáticos, como puedan estarlo la Mecánica o la Electricidad. Las Matemáticas se han vuelto con respecto a las demás ciencias más agresivas que cualquiera de los grandes imperios de la Historia. El tabú de la incompresión de las Matemáticas se ha roto, más que roto ha saltado en mil pedazos, y en la formación de los futuros científicos la enseñanza matemática juega un papel cada vez más importante en todos los países civilizados.

Gibs dijo que la Matemática era un lenguaje, y desde entonces se ha repetido con monótona insistencia; aun cuando se me diga que no es el lenguaje ordinario en que suele hablar el pueblo con su vecino, como decía Gonzalo de Berceo, no me parece que sea solamente un lenguaje, es más bien todo un modo de pensamiento, una manera de razonar muy especial, una forma de plantear los problemas, de preguntar por el ser de las cosas, que ofrece al hombre la máxima seguridad en la certeza de los conocimientos adquiridos, y la máxima precisión en los límites de lo verdadero, y en la confianza racional que podemos depositar en nuestro saber. Pero, además, lo que es también muy importante, es el método matemático, uno de los más potentes en el acceso al mundo de lo desconocido, una de las guías más eficaces de ese eterno caminar por un laberinto, que es el aprender de los humanos.

Cuando Russell define con humor, pero con convicción, a las Matemáticas como la ciencia que no sabe de lo que trata, ni si lo que dice es verdad o mentira, se refiere con ello a que se parte de ciertos postulados, que se admiten como verdaderos, y mediante ciertas operaciones conocidas y bien definidas, que actúan sobre elementos de naturaleza desconocida, se va obteniendo una cadena de teoremas que constituyen una teoría matemática dada. Al ser los elementos de naturaleza desconocida, es por lo que Russell dice que las Matemáticas no saben de qué tratan, y por ser los teoremas verdaderos, única y exclusivamente, si los postulados lo son, es por lo que dice que ni siquiera saben si lo que dicen es verdad. Eddington ha radicalizado esta actitud de Russell, es aún más extremista cuando define la teoría de grupos como la «supermatemática», porque además de cumplir las mismas condiciones que las restantes teorías matemáticas para la definición de Russell, tiene además una característica esencial que la distingue, y es que ni siquiera conoce la naturaleza de las operaciones que se efectúan sobre los elementos a los que se aplican, que también son desconocidos. Cuando Eddington escribía sobre esta materia, los físicos o, mejor dicho, la mayoría de ellos, creían en la posibilidad de encerrar todos los conocimientos de la Física, a pesar de su aterradora amplitud, en los estrechos moldes de la teoría de grupos, tarea más sobrehumana que la de encerrar todo el agua del mar en una botella. Es una constante histórico-cultural que periódicamente, aun antes de comenzar los fenómenos propios de la barbarie de la especialización, los más grandes científicos y filósofos pretenden encerrar el todo en una de sus partes, un conjunto en uno de sus subconjuntos; parece como si el fanatismo y la superstición estuviesen anclados en lo más profundo de la mente humana, con tal fuerza y vitalidad que ni el más grande talento es capaz de desarraigarlo, como si fuesen la huella indeleble, la reminiscencia imborrable que ha dejado en la mente del hombre su paso previo por formas más primitivas en tiempos remotos.

Creo que las Matemáticas saben de lo que tratan, y si lo que dicen es verdad o mentira, como ha señalado muy agudamente el profesor Navarro Borrás en un fino análisis de la frase de Russell; incluso llegan a delimitar con toda precisión los contornos de su verdad, dentro de qué límites y en qué determinadas condiciones son verdaderos sus teoremas y proposiciones, y cuándo dejan de serlo, al modificarse los factores que condicionan su verdad. No tratan los matemáticos con verdades absolutas, sino con verdades relativas, con verdades condicionales; otra tarea, y en extremo difícil, es hallar las correspondencias los isomorfismos entre el universo puro de los matemáticos y los múltiples universos de sus aplicaciones, porque esa tarea llega a confundirse con la pregunta por el ser, la pregunta por la cosa, lo cual ya es hacer Metafísica. Por mucho que los científicos y filósofos del positivismo lógico hayan pretendido y sigan pretendiendo despojar de Metafísica a la Ciencia, a la Filosofía y a la Lógica, el llegar a dejarla totalmente desnuda de Metafísica es tarea prácticamente imposible, son posiciones asintóticas a las que se tiende, pero que no se alcanzan nunca, por muy sutiles que sean las redes del Positivismo, siempre dejan algún resquicio para que se filtre algo de Metafísica; en el mundo de la mente el eliminar del todo la Metafísica es algo tan difícil como lo es en el mundo de la materia, el conseguir el vacío o la temperatura del cero absoluto.

En la íntima colaboración entre las Matemáticas y las restantes ciencias se da uno de los ejemplos más claros y notables de simbiosis intelectual.

Simplificación, abstracción, generalización y, posteriormente, concretización; he ahí las etapas que sigue el pensamiento científico en su viaje de ida y vuelta, desde el campo de cualquier ciencia al de las Matemáticas. Muchos científicos acusan a los modelos matemáticos de demasiado simplistas, para poder dar cuenta de la tremenda complicación de los fenómenos de la naturaleza o de la vida humana, pero es el hecho que aun con modelos muy simplistas, casi ingenuos en su sencillez, se puede encontrar la explicación de importantes leyes de las ciencias de la materia y del comportamiento, e incluso predecir nuevas; al igual que en política no hay que olvidar el viejo lema de «divide y vencerás», en el empleo del método matemático en la investigación científica hay que decir *simplifica si quieres vencer*, pero tampoco hay que olvidar que la simplificación no es un proceso estático, sino dinámico; está en un constante devenir, ese devenir, ese fluir de la simplificación es la quintaesencia del método de las aproximaciones sucesivas; mediante una cadena de simplificaciones se va subiendo por la escalera de la complejidad, y así se va perfeccionando, refinando y progresando en el saber. La simplificación es la modestia del investigador, es un fijarse límites, un restringirse en sus ambiciones, pero tiene su recompensa en su alta productividad científica.

Las fronteras entre las diversas ciencias no están trazadas de manera clara y distinta al estilo cartesiano, sino que se solapan entre sí, interfieren unas con otras, se funden entre sí ofreciendo un aspecto de continuidad, de modo que si bien es cierto que cada ciencia tiene un núcleo claramente diferenciado, tiene también una corteza que resulta difícil precisar si pertenece a ella o pertenece ya a otra; muchas veces es difícil reconocer si un fenómeno es económico o social, físico o químico. Toda ciencia tiene sus ciencias auxiliares y es a su vez auxiliar de otras ciencias, y esta relación de ayudantía es tan fuerte que con relativa frecuencia un progreso en la ciencia auxiliar perfecciona la ciencia fundamental, infinitamente más que un progreso de ella misma; así, por ejemplo, un progreso de la Química o de la Genética puede arrastrar consigo un progreso de la Fitotecnia, mucho más grande que un progreso de la propia Fitotecnia; asimismo, un avance en las técnicas estadísticas puede arrastrar consigo un avance de la Sociología, mucho mayor que un avance de la propia Sociología. Este hacer progresar una ciencia desde fuera de ella, a veces con más fuerza que desde dentro de la misma; es un factor cultural que no debe de ser olvidado por los rectores de la política científica y de la organización de la enseñanza y de la investigación.

Tras esta breve introducción, vamos a intentar entrar de lleno en el tema de nuestro discurso, que no es otro más que el de hacer una llamada de atención hacia el análisis de las estructuras matemáticas propias de la Economía y de la Sociología, haciendo especial hincapié sobre aquellas partes de la Matemática que encuentran aplicación en dichas ciencias y no en la Física, que, como es sabido, es la más matemática de las ciencias, después, naturalmente, de las propias Matemáticas. Incluso queremos señalar la existencia de nuevas estructuras matemáticas sugeridas por la Sociología y la Economía, como son, por ejemplo, las *oscilaciones teleológicas* y los *espacios aleatoriales*, así como sus repercusiones sobre la Lógica.

En resumen, queremos destacar cómo los problemas socioeconómicos pueden ser utilizados como instrumentos de la investigación matemática.

Economía y Sociología, aunque ciencias claramente diferenciadas, están fuertemente asociadas mediante problemas a caballo sobre ambas, problemas que podemos denominar socioeconómicos. El grado de matematización conseguido por la Economía es mucho mayor que el de la Sociología; los libros y trabajos de investigación sobre temas económicos utilizan el método y el lenguaje matemático con mayor profusión que los que versan sobre temas sociológicos; la econometría es más *métrica* que la sociometría; con palabras de Papp nos atrevemos a decir que los economistas han sentido «la nostalgia de la geometría» mucho más fuertemente que los sociólogos. Pero es forzoso reconocer que hoy por hoy, aun en los países más adelantados, las descripciones matemáticas de los problemas económicos están en franca minoría frente a las descripciones literarias; en parte es debido a que aún existen campos de la Economía inaccesibles a la Matemática, y en parte a la gran dificultad que presenta el aprendizaje de las teorías y métodos matemáticos más adelantados, que son los realmente importantes en las aplicaciones: y la influencia de este factor se realza, porque por afectar tan de cerca a la vida diaria, muy pocos son los hombres que no se interesan, apasionan y polemizan por cuestiones de conomía; es una de esas escasas ciencias en las que los grandes torneos ideológicos que, como en todas, se entablan entre sus especialistas, trascienden fuera de ese reducido círculo de personas con suficiente fuerza para enzarzar en el mismo a los hombres de la calle. Muy difícil es que dos hombres riñan por si es verdadera o no tal o cual teoría física o química, pero por desgracia con harta frecuencia, y a veces brutalmente, riñen cuando de teorías económicas se trata.

Existen analogías entre fenómenos físicos, biológicos y económicos. Concretamente, la teoría del equilibrio económico desarrollada inicialmente por Walras y Pareto, y perfeccionada posteriormente por Hicks y Samuelson, utiliza un formalismo matemático de la misma naturaleza que la teoría matemática de la lucha por la existencia, desarrollada por Volterra, que es la base de la biosociología, y está inspirada en las ideas científicas de Darwin. Hemos atribuido a Walras y Pareto la paternidad de esta teoría, por seguir las normas establecidas por los historiadores de la Ciencia, pero no sería justo silenciar el gran precedente de Cournot, que en 1838, en su libro «Investigaciones sobre los principios matemáticos de la teoría de las riquezas», iniciaba la teoría de la lucha económica y establecía los conceptos de equilibrio y estabilidad. Es curioso señalar que, a pesar de su interés, la segunda edición de este libro tuvo lugar ciento diez años después de la primera.

El problema del equilibrio biológico está íntimamente ligado al problema matemático de que un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden admita posiciones de equilibrio y el equilibrio sea estable. La solución de este problema matemático tiene interés en Biología porque permite explicar la existencia de fluctuaciones en las poblaciones de algunos seres vivos.

El problema se plantea en los siguientes términos matemáticos: sean $x_1, \ldots, x_n$ los números de individuos de n especies distintas que componen una asociación biológica; su evolución en el tiempo es regida por el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n); \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad [1]$$

en las que se supone que las funciones $f_1, \ldots, f_n$ son desarrollables en serie de Taylor. El sistema admite posiciones de equilibrio si existen n constantes positivas $a_1, \ldots, a_n$, tales que

$$f_i(a_1, \ldots, a_n) = 0; \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad [2]$$

pero el equilibrio, en principio, puede ser estable o inestable; para estudiar su estabilidad se linealiza el sistema [1] y se obtiene un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes:

$$y'_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\, y_j; \quad y_i = x_i - a_i; \quad f_{ij} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n} \qquad [3]$$

y si la ecuación característica del sistema [3] tiene todas sus raíces con las partes reales negativas o nulas, el equilibrio es estable y existen fluctuaciones (pequeños movimientos) en torno a la posición de equilibrio.

Por esta razón ese enorme interés que tiene para todos los físicos los métodos para establecer las condiciones necesarias y suficientes para que una ecuación algebraica de grado n, tengan todas sus raíces las partes reales nulas o negativas, debe de tenerlo también para los biosociólogos.

Las ecuaciones [3] permiten una definición matemática del concepto biosocial de parasitismo generalizado, susceptible por tanto de medición numérica. La especie x_j se dirá que es parásita de la x_i si en [3] es f_{ij} menor que cero, porque un incremento de la primera, causa una disminución en la segunda; si ambas, f_{ij} y f_{ji}, son mayores que cero, las dos especies están en simbiosis.

La simbiosis puede ser considerada como un parasitismo negativo. En todos los casos la intensidad de éste viene medida por el valor absoluto de los f_{ij}. Puede haber casos en que existan varias posiciones de equilibrio, si [1] tiene más de una solución que cumpla las condiciones de estabilidad, e incluso se puede dar el caso (teóricamente al menos) de que el parasitismo positivo o negativo de unas especies con otras pueda cambiar de valor absoluto y de signo también, por cambiar el valor de los coeficientes f_{ij} de una posición de equilibrio a otra. Una especie x_i se dirá que es parásita de sí misma o no, según que f_{ii} sea negativo o no.

En realidad el parasitismo ordinario de los biólogos corresponde al caso en que f_{ij} es mayor que cero y f_{ji} menor que cero; entonces es cuando la especie x_i es parásita de la x_j.

Lo anterior es una idea esquemática de la teoría matemática del parasitismo, fenómeno clave de la Biosociología. Antes de seguir adelante, queremos hacer una observación sobre la importancia de utilizar medios matemáticos más refinados en las aplicaciones; cuando el uso de la integral de Lebesgue pasó de las Matemáticas puras a las aplicadas, muchos investigadores que manejaban la matemática con maestría y absoluto dominio de la misma, pero que no eran matemáticos puros, se preguntaban si valía la pena sustituir la integral de Riemann por la de Lebesgue; es la pregunta que surge siempre, de si vale la pena dejar las sendas viejas por las nuevas; hoy nadie duda ya de efectuar dicha sustitución. Pues volvamos con esta idea a lo que expusimos anteriormente; hicimos la hipótesis excesivamente restringida de que las funciones del [1] fuesen desarrollables en serie de Taylor; en realidad no hace falta tanto, basta con que sean diferenciables en el sentido de Stolz-Fréchet (monodiferenciables). Incluso si son bidiferenciables y en general n-diferenciables, se puede construir por el método de las aproximaciones sucesivas, mediante una superposición de pequeños movimientos, una descripción cada vez más aproximada de las fluctuaciones en torno a las posiciones de equilibrio. De esta forma el concepto de diferenciabilidad de Stolz-Fréchet, en sustitución de la propiedad de tener derivadas, que tan fecundo es en la topología de las funciones convexas, puede ser de aplicación a la biosociología.

Pasemos ahora de este problema biosocial a un problema socioeconómico, cuyo formalismo matemático es el mismo. Hablábamos de que existían analogías entre fenómenos económicos y biológicos, por ejemplo entre la lucha por la existencia de los seres vivos y la competencia industrial de la economía capitalista. Algunas de estas ideas todavía no están maduras para poder tomar forma matemática, pero otras sí; es un hecho que un amplio sector de economistas, inspirándose en las ideas de Marx, admiten que como consecuencia de la estructura interna de la economía capitalista, se produce en el trascurso del tiempo una disminución del número de pequeños capitalistas que pasan a engrosar la clase proletaria, fenómeno que a la larga produce el colapso de la sociedad capitalista. A este fenómeno se le podría denominar *la muerte por proletarización del capitalismo*, por analogía con el fenómeno físico descubierto por aquel entonces, que inspira las directrices de la Filosofía natural de la segunda mitad del siglo XIX; «la muerte térmica del universo», consecuencia del segundo principio de la Termodinámica. Existe un nexo entre el determinismo de Laplace, el evolucionismo de Darwin, el marxismo y las ideas filosóficas implícitas en el segundo principio de la Termodinámica.

El problema de la estabilidad de la sociedad capitalista parece que debe de plantearse en los siguientes términos: agrupadas las personas económicas en clases, el tamaño de éstas (o número de personas que lo componen) satisfacen ecuaciones diferenciales del tipo [1]. Así es que si no hay aniquilación de unas clases por otras, el tamaño de ellas ha de fluctuar alrededor de valores medios, siendo por tanto equivalente, desde el punto de vista matemático, este problema al antes descrito para las asociaciones biológicas. Si, por ejemplo, nos limitamos al caso de dos clases, grandes y pequeños capitalistas, las [3] se simplifican en las

$$x' = f_{11}\, x + f_{12}\, y\,; \qquad y' = f_{21}\, x + f_{22}\, y \tag{4}$$

cuya ecuación característica y soluciones son las

$$\begin{gathered} p^2 - p\,(f_{11} + f_{22}) + f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21} = 0\,; \\ x = \mathrm{A}\, e^{-\alpha t} \cos \omega t\,; \qquad y = \mathrm{B}\, e^{-\alpha t} \cos (\omega t + \varphi) \end{gathered} \tag{5}$$

siendo

$$-2\,\alpha = f_{11} + f_{22} \leqslant 0\,; \qquad -4\,\omega^2 = (f_{11} - f_{22})^2 + 4 f_{12} f_{21} \leqslant 0 \tag{6}$$

las condiciones de estabilidad.

Con la terminología que hemos adoptado en el caso de las asociaciones biológicas, si f_{21} es mayor que cero, y f_{12}, por tanto, menor que cero, y es parásito de x, mientras que x presenta parasitismo negativo frente a y, empleando un símil biológico podemos decir que los grandes capitalistas *devoran* a los pequeños.

Por tanto, siempre que se cumplan las condiciones [6], el fenómeno de la concentración del capital no es monotónico, idea clave de la concepción marxista de la sociología, sino que los números de grandes y pequeños capitalistas oscilarán alrededor de sus valores medios. En estas condiciones la economía pasa alternativamente por periodos de depresión y prosperidad, está dotada de estabilidad y para que se rompa esta estabilidad, es preciso una presión extraña al mundo de la economía; puede romperse, pongo por caso, como consecuencia de la desesperación de las clases proletarias en las épocas de depresión. En cierto modo se puede decir que no es la economía el motor de las grandes conmociones históricas, sino que, por el contrario, son las presiones extraeconómicas las que pueden determinar la ruptura violenta del equilibrio de la economía capitalista. Como veremos más adelante, al igual que en el problema biosocial antes considerado, la introducción de la herencia modifica la técnica matemática a emplear, pero no las conclusiones antes expuestas.

Insistimos en que para que se dé la hipótesis antimarxista de la estabilidad de la sociedad capitalista, es preciso que se cumplan las condiciones [6]; cuando éstas no se cumplen, entonces se da la hipótesis marxista del colapso final de la economía capitalista. Como los valores de las f de las [4], [5] y [6] dependen de la composición de cada sociedad, y pueden variar de una a otra, e incluso para una misma sociedad varían de una posición de equilibrio a otra, en principio no hay razón que se oponga a que a veces se dé la hipótesis marxista de la inestabilidad de la sociedad capitalista, y a veces la hipótesis contraria de la estabilidad.

De modo que en este caso el marxismo arrastra consigo dos hipótesis simultáneas, que son la de que se cumplan las ecuaciones [4] y no se cumplan las desigualdades [6]. Se observa la semejanza entre los formalismos utilizados para el planteamiento analítico del fenómeno biosocial de la lucha por la existencia, y del fenómeno socioeconómico de la competencia industrial en la economía capitalista. También se extiende este formalismo matemático a otros fenómenos sociales, que se dan en ciertas sociedades humanas primitivas o salvajes, cuando ésta se halla dividida en castas, de modo que los casamientos dentro de la sociedad obedecen a ciertas reglas dictadas por la ley, la tradición o cualquier otra causa, la existencia de posiciones de equilibrio en la composición de cada casta y la estabilidad del mismo, hay que enfocarlo de la misma manera que en las situaciones antes descritas. Hasta ahora nos hemos limitado a una concepción puramente determinista de estos fenómenos; más adelante los enfocaremos desde la óptica de una concepción probabilista y veremos cómo ello conduce al nacimiento de nuevas estructuras matemáticas sugeridas por la Economía y la Biología y que no habían surgido hasta el momento en la Física.

Por otra parte, las teorías económicas del multiplicador-acelerador, tales como se presentan en los diversos modelos de la Macroeconomía, del crecimiento económico, de la inversión acumulada, de los ciclos de «stocks» de capitales (inventarios) o en los modelos básicos de los distintos tipo de políticas de estabilización económica, utilizan el mismo formalismo matemático que las teorías físicas de los circuitos eléctricos y de los servomecanismos. Constituyen la primera aplicación importante de la Cibernética a la Economía. El efecto multiplicador tan conocido de los economistas, matemáticamente es el efecto realimentador (feeding), tan conocido de los físicos y de los ingenieros electricistas.

Las formulaciones matemáticas de la economía keynesiana ofrecen dificultades tecnológicas y dificultades matemáticas propiamente dichas; las primeras se refieren fundamentalmente al problema de la agregación, que cae de lleno dentro de la Econometría, cuya finalidad es reducir un gran número de variables en relación de oferta y demanda, a unas pocas variables, tales como consumo, ahorro, inversión, renta nacional, etc., ligadas entre sí mediante relaciones que han de cumplirse unas ex-ante (como consecuencia de planes), y otras ex-post (como consecuencia de lo que sucede). Por ejemplo, la renta nacional es la agregación expresada en dinero de todas las cantidades realmente pagadas a todos los factores de producción, tales como salarios, sueldos, beneficios, reservas de las empresas y cualesquiera otra formas de ingresos, pero también es igual a la producción nacional, que es la agregación expresada en dinero de la producción neta de la agricultura y de todas las industrias productoras de bienes y servicios. La producción es simultáneamente producida y distribuida, de modo que cuando se considera la economía nacional en toda su amplitud, renta y producción resultan iguales ex-post.

En esta parte de la Economía se utilizan dos técnicas matemáticas, que son: el análisis continuo y el análisis discreto. Según el primero, el tiempo varía en forma continua, y según el último, el tiempo varía discontinuamente, de modo que los diversos instantes del tiempo se pueden numerar. Las demás magnitudes económicas, tales como precios, cantidades de bienes o de factores de la producción, son funciones del tiempo. En muchos problemas de Economía, Sociología, Física, etc., el planteamiento analítico del mismo conduce a una ecuación diferencial de orden n:

$$f(x, x', x'', \ldots, x^n) = 0 \qquad [7]$$

en la que f es una función desarrollable en serie de Taylor. Existen posiciones de equilibrio cuando existen valores constantes de la función x, que son solución de la ecuación diferencial [7], se tiene entonces que toda raiz de la ecuación

$$f(a, 0, 0, \ldots, 0) = 0 \qquad [8]$$

es solución de [7]. Para estudiar la estabilidad del equilibrio, se desarrolla [7] en serie de Taylor, y detenemos el desarrollo en los términos lineales; para simplificar los cálculos conviene hacer el cambio de variable de x a $y = x - a$, con lo que se obtiene:

$$f(x, x', \ldots, x^n) = f(a, 0, \ldots, 0) + \sum_{i=1}^{n} f_i\, y^i = 0;$$

$$f_i = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_{x=a,\, x^1=0, \ldots,\, x^n=0} \qquad [9]$$

y teniendo en cuenta la [8], la ecuación no lineal [7] queda linealizada en la

$$\sum_{i=1}^{n} f_i\, y^i = 0 \qquad [10]$$

que es una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes de orden n. Si las raíces de la ecuación característica tienen sus partes reales nulas o negativas, el equilibrio es estable, por ser la solución obtenida compatible con el desarrollo en serie de Taylor y la detención del mismo en los términos lineales.

En correspondencia con lo anterior, cuando se utiliza el análisis discreto en vez del continuo, el planteamiento analítico de muchos problemas de Economía y Sociología (en Física es muy raro) conduce a una ecuación en diferencias finitas de orden n, no lineal:

$$f(x_t, x_{t+1}, \ldots, x_{t+n}) = 0 \qquad [11]$$

en la que se supone que f es también desarrollable en serie de Taylor. La existencia de posiciones de equilibrio y su estabilidad se investiga en forma homóloga a la anterior, de modo que existe una posición de equilibrio, si $x = a$ constante, es solución de [11], o sea, que todas las raíces de la ecuación

$$f(a, a, \dots, a) = 0 \qquad [12]$$

son posiciones de equilibrio. Para investigar la estabilidad del equilibrio se procede como en el caso anterior, se desarrolla en serie de Taylor la [11] en torno al punto $x = a$ y se retienen solamente los términos lineales, de modo que después de hacer el cambio de variables de $x - a$ por y, la ecuación no lineal [11] queda linealizada en la

$$\sum_{i=0}^{n} f_i x_{t+i} = 0; \quad f_i = \left(\frac{\partial f}{\partial x_{t+i}} \right)_{x_t = \dots = x_{t+n} = a} \qquad [13]$$

Para que el equilibrio sea estable, es preciso que las raíces de la ecuación característica de la [13] tengan sus módulos inferiores a la unidad. Si x representa, por ejemplo, el capital disponible de una persona o empresa, puede tomar valores negativos, y haber estabilidad siempre que sus oscilaciones estén acotadas, porque en los períodos en que el capital es negativo se puede remediar la situación recurriendo al crédito, cosa que no es posible si las oscilaciones no están acotadas, porque entonces el crédito concedido tendría que crecer más allá de todo límite. Si, por el contrario, x representa el tamaño de una población, como ésta no puede tomar valores negativos, en cuanto se dé uno de estos valores, por pequeño que sea, se rompe la estabilidad del sistema evolutivo, por extinción de la población, a menos que se pueda recurrir a la compensación de estos valores negativos de la población mediante inmigración. Como ya hicimos observar anteriormente, puede haber más de una posición de equilibrio, pudiendo haber estabilidad para unas e inestabilidad para otras. Llama la atención el hecho de que en la mayoría de los modelos matemáticos utilizados en esta clase de problemas de economía, se hacen hipótesis de linealidad, que son fuertemente restrictivas y que no corresponden a la realidad económica; sin embargo, estas restricciones son más bien aparentes, debido a lo que acabamos de exponer, es decir, que aun cuando los modelos matemáticos sean expresables por ecuaciones no lineales, si existen posiciones de equilibrio estable, la descripción del fenómeno mediante pequeños movimientos es sobradamente aproximada, o lo que es lo mismo, la linealización del problema, que no es lineal, es posible.

Cuando la inversión es autónoma, es decir, fija ó dada *a priori*, si se incrementa ésta con la parte del gasto de consumo que no depende de la renta, se obtiene lo que se llama gasto autónomo total, y si la propensión marginal del consumo es constante (está comprendido entre cero y la unidad), entonces la renta de equilibrio es proporcional, con factor de proporcionalidad mayor que la unidad, al gasto autónomo total. Se dice entonces que la inversión engendra una multiplicación de la renta a través del multiplicador. Pero junto a la inversión autónoma. existe una inversión inducida, debida a los cambios en la producción, porque si bien es verdad que la inversión influye sobre la producción, también es cierto que la producción influye sobre la inversión, porque todo aumento en la producción supone un aumento en los equipos de capital. Esta relación entre inversión inducida y los cambios en la producción constituye el principio de aceleración; este principio ha sido muy utilizado en la teoría de los ciclos económicos (Clark, Frisch, Harrod, Lundberg, Knox), así como las combinaciones del multiplicador y del acelerador (Samuelson, Hicks, etc.), utilizando relaciones lineales.

Vamos a ver cómo se pueden deducir multiplicadores y aceleradores, de una teoría general que presenta una gran analogía con la teoría matemática del parasitismo que antes hemos descrito. Sea un problema de naturaleza desconocida, cuyo planteamiento matemático conduce a un sistema de ecuaciones en diferencias finitas de primer orden, no lineales:

$$x_{it+1} = f_i\,(x_{1t}, \ldots, x_{nt}); \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{14}$$

existen posiciones de equilibrio, para los valores de x, iguales a las raíces de las ecuaciones

$$a_i = f_i\,(a_1, \ldots, a_n); \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{15}$$

y para investigar la estabilidad del equilibrio, como en ocasiones anteriores, desarrolladas en serie de Taylor las [14], teniendo en cuenta las [15], después de efectuar los cambios de variable de la $x - a$

a las y, y si detenemos el desarrollo en serie en los términos lineales, queda entonces linealizado el sistema no lineal [14] en el

$$y_{it+1} = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\, y_{jt}\,; \quad f_{ij} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{jt}}\right)_{x_{1t}=a_1,\ldots,x_{nt}=a_n} \qquad [16]$$

que lo es de n ecuaciones en diferencias finitas de primer orden, de coeficientes constantes. El equilibrio será estable si las raíces de la ecuación característica en r, que resulta de igualar a cero el determinante:

$$\| f_{ij} - r\,\delta_{ij} \| = 0\,; \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \qquad [17]$$

tienen sus módulos inferiores a la unidad. Por δ_{ij} representamos los conocidos símbolos de Kronecker.

Si la ecuación característica tiene una raíz igual a la unidad, en cuyo caso valores constantes de las y son soluciones de [16], es decir, existen dos posiciones de equilibrio infinitamente próximas, y si además se cumplen las dos relaciones

$$0 < f_{ii} < 1\,; \qquad \frac{f_{ij}}{1 - f_{ii}} > 1 \qquad [18]$$

entonces la variable y_j engendra por multiplicación a la y_i a través del multiplicador representado por la fracción de [18].

Si f_{ij} y f_{ji} son simultáneamente mayores que cero, entonces existe un principio de aceleración entre las dos variables y_i e y_j, relación que es análoga a la de simbiosis de los biólogos, tal como la definimos anteriormente en las ecuaciones [1] a [3]. En el caso continuo el acelerador requiere que se cumplan las mismas condiciones.

Cuando existe equilibrio y éste es estable, la linealización da una descripción muy aproximada de la realidad económica, pero si se desea obtener una mayor información del comportamiento económico, entonces es necesario recurrir a los métodos mucho más difíciles de las Matemáticas no lineales.

Rocard ha mostrado la analogía entre los ciclos económicos y los osciladores mecánicos con movimiento de rodadura, y observa que cuando se habla peyorativamente del «carro del Estado», no se trata solamente de una metáfora, sino que hay un trasfondo de analogía de estructura matemática. Como modelos más notables de oscilaciones no lineales en Economía están los de Godwin y Kalecki, muy notable este último por ser anterior a Keynes y utilizar por primera vez ecuaciones mixtas diferenciales y en diferencias finitas; en ellos existen efectos de umbral que recuerdan los de la Biofísica y Psicofísica. También son no lineales las oscilaciones de relajación que hemos encontrado en series estadísticas temporales, en economías dirigidas, tales como las relativas a los cocientes de los precios de los artículos libres por los de los intervenidos, pues mientras los primeros varían en forma más continua, los últimos varían en forma fuertemente discontinua, cada vez que tiene lugar una revisión oficial del precio. También son oscilaciones de relajación las de variación de la deuda en el curso de la amortización de un empréstito, una vez corregido el efecto de tendencia.

El concepto de herencia ha sido introducido por primera vez en la Ciencia por Volterra, y el planteamiento matemático de los fenómenos hereditarios conduce a ecuaciones integrales e integrodiferenciales, en sustitución de las ecuaciones diferenciales y en derivadas parciales clásicas de los fenómenos no hereditarios. Pudiéramos decir que la herencia dota de memoria a la naturaleza, ésta se acuerda de de lo que ha sido para tenerlo en cuenta en lo que ha de ser; por primera vez los científicos consideran que la historia de la materia influye en su evolución futura.

Pero la herencia que con Volterra y los matemáticos de su escuela se muestra tan fecunda en el campo de la Física y de la Biología, no se limita solamente a estas ciencias, sino que invade el campo de otras, concretamente de la Economía. Los efectos de retardo (los lags) distribuidos en el tiempo, tan conocidos por los economistas, no son en definitiva más que fenómenos hereditarios. Es a través de los mismos como a las transformadas de Laplace y de Fourier en particular, y a la teoría de las transformaciones integrales en general; les espera un brillante porvenir en la economía matemática. Intervienen quizás por primera vez en las aplicaciones de las Matemáticas ecuaciones integrales en las que la función incógnita aparece bajo el signo de la integral múltiple; cadenas recurrentes de ecuaciones integrales e integrodiferenciales.

También surgen en Economía problemas relativos a la existencia y resolución de un nuevo tipo de ecuaciones funcionales, que denominamos *ecuaciones sumatorias*, que están con las ecuaciones en diferencias finitas en la misma relación que las ecuaciones integrales con las ecuaciones diferenciales. Y así como en Economía las ecuaciones integrales traducen al lenguaje matemático un efecto de retardo distribuido en el tiempo de manera continua, por el contrario las ecuaciones sumatorias interpretan un efecto de retardo distribuido en el tiempo de manera discontinua.

Vamos a describir un proceso funcional matemático que se presenta en Economía y no en Física, que llamamos *ecuaciones G-integrales*, siguiendo la misma línea lingüística según la cual hemos llamado G-topologías y G-álgebras a las topologías y álgebras lineales generalizadas.

Las ecuaciones del tipo de la

$$\sum_{r=0}^{n} a_r y^r (t) + \sum_{s=0}^{m} \int_0^{\infty} \mathrm{K}_s (\sigma) y^s (t - \sigma) d \sigma = 0 \qquad [19]$$

son resolubles mediante exponenciales:

$$y = e^{pt} \qquad [20]$$

en la que el exponente es raíz de la ecuación

$$\sum_{r=0}^{n} a_r p^r + \sum_{s=0}^{m} p^s \mathrm{L}_s (p) = 0 \qquad [21]$$

donde las L son las transformadas de Laplace de las K, y no hace falta que las K sean funciones; pueden ser distribuciones, con tal de que tengan transformada de Laplace. Es particularmente interesante el caso de que el número de raíces de la ecuación [21] con la condición de pertenecer al campo de convergencia de las transformadas de Laplace L, que son las únicas utilizables, es finito. La ecuación [21] es trascendente y generaliza la ecuación característica de las ecuaciones lineales diferenciales de coeficientes constantes, que es algebraica. En algunos casos estas ecuaciones son susceptibles de transformarse por un número finito de derivaciones, integraciones y eliminaciones algebraicas en ecuaciones diferenciales lineales, pero en la mayor parte de los casos no. La parte integral de [19] describe un fenómeno hereditario o de retardo, y cuando sus soluciones son oscilantes, las podemos llamar oscilaciones hereditarias, las cuales presentan diferencias dignas de destacarse respecto a las clásicas, como son:

a) Pueden existir soluciones en número infinito numerable.

b) Pueden presentarse discontinuidades en las soluciones.

c) Pueden no existir oscilaciones libres ,por no tener solución la ecuación homogénea y existir, en cambio, oscilaciones forzadas, por tenerla la ecuación completa.

Por tanto, estas oscilaciones, aun cuando presentan muchas propiedades comunes a las lineales, no coinciden con ellas; forman una nueva clase de oscilaciones, que también obedece al principio de superposición.

Cuando el número de raíces de la ecuación [21] utilizables, es decir, pertenecientes al campo de convergencia de todas las transformadas de Laplace L es finito, la [19] es equivalente a una ecuación diferencial lineal, y la ecuación que resulta de completar la [19] sustituyendo en el segundo miembro cero por una función $f(t)$, es equivalente a una ecuación diferencial completa, cuyo segundo miembro no es $f(t)$, sino otra función $F(t)$,, que se deduce de ella mediante reglas conocidas. A [19] la hemos llamado ecuación G-integral, porque cuando las K *no son funciones, sino que son distribuciones*, entonces no son ecuaciones integrales ordinarias, sino ecuaciones integrales generalizadas.

Si en [19] se sustituye bajo el signo integral $t - \sigma$ por $t + \sigma$, la parte integral ya no representa un efecto de retardo, sino un efecto de *adelanto;* no se trata ya de un fenómeno hereditario, sino de un fenómeno *teleológico*, porque es el futuro el que influye sobre la configuración actual del sistema en el presente. Este hecho no tiene aplicación en Física, porque es un supuesto tácito de la misma, la independencia del presente respecto al futuro; pero, sin embargo, fenómenos de esta naturaleza pueden presentarse en Economía y Sociología, en que afectan a individuos que actúan siguiendo una finalidad, que siguen un comportamiento teleológico, ya sea de manera inconsciente como los animales, o según un libre albedrío como los hombres En las ciencias históricas, esta clase de ecuaciones integrodiferenciales se amoldan a las ideas filosóficas expuestas por Dilthey; es como si el futuro influyese sobre el presente, de modo que en cada instante el sistema se olvidase del pasado y evolucionase en persecución de un fin.

Las [19] admiten múltiples y muy variadas generalizaciones, como son el cambio de los límites de la integral por otras constantes, distintas de infinito y cero; el paso a los sistemas, incluso de infinitas ecuaciones, siendo particularmente interesante el caso particular de cadenas recurrentes, bien sean finitas o infinitas; de ecuaciones integrales múltiples, en cuyo caso hay que utilizar las transformadas de Laplace de varias variables; las ecuaciones integrodiferenciales en derivadas parciales, las cuales surgen o de agregar un término correctivo a las ecuaciones en derivadas parciales clásicas, expresivo de la acción de la herencia sobre la evolución temporal del sistema, o de agregar un término correctivo expresivo de la acción perturbadora que en un instante dado se ejerce en un punto del sistema por las deformaciones sufridas en los restantes puntos del sistema. De forma que en este último caso no puede hablarse de herencia en el tiempo, en el sentido de una influencia de los estados ancestrales por los que ha pasado el sistema sobre su configuración en el presente, sino más bien de una *herencia en el espacio*, de una especie de acción a distancia mediante la cual la configuración, que en una cierta región del espacio adopta el sistema, influye sobre la que adopta en cualquier otra parte; en una interacción entre elementos de un mismo sistema, expresable por una función de las diferencias absolutas de coordenadas. Y así los problemas clásicos de la propagación del calor y de la cuerda vibrante son susceptibles de estas generalizaciones que dan origen a largos desarrollos matemáticos.

Al hablar de las ecuaciones integrales, me viene a la memoria un recuerdo que no puedo dejar de mencionar, por si puede servir de consejo a los estudiantes que me escuchan, consejo que me permito por la única autoridad que sobre ellos me da el haber vivido más, porque vivir es una de las formas más importantes de aprender. Cuando se comienza el estudio de una nueva materia, es muy importante acertar en la elección de un buen libro, que a la vez que enseñe con rigor y profundidad, despierte en nosotros ese magnetismo irresistible que nos arrastra dentro de la Ciencia en busca de nuevos problemas, que constituye la vocación de todo investigador. Como más o menos diría Ortega, vivir es un constante decidir; cuando leo un libro he decidido previamente no estar leyendo otro, y si para cada cual la vida tiene las horas contadas, decidir bien es de radical importancia. A mí, en particular, cuando empecé el estudio de las ecuaciones integrales, me cupo la suerte de decidir bien; escogí como mentor el libro, por tantos conceptos magistral, del profesor Navarro Borrás, y desde que tomé aquella decisión se despertó en mí la vocación hacia ese importante campo de la investigación matemática.

También en el análisis discreto, al igual que en el continuo, se pueden expresar matemáticamente los efectos hereditarios y teleológicos, pasando de las ecuaciones en diferencias finitas a las ecuaciones sumatorias, que están con aquéllas en la misma relación que las ecuaciones integrales lo están con las ecuaciones diferenciales, de las que es un ejemplo la

$$a_0 y_t + a_1 y_{t+1} + \dots + a_n y_{t+n} + \sum_{\sigma=0}^{\infty} b_\sigma y_{t-\sigma} = 0 \qquad [22]$$

que es resoluble por la exponencial:

$$y_t = r^t \qquad [23]$$

siendo r raíz de la ecuación trascendente:

$$a_0 + a_1 r + \dots + a_n r^n + g\left(\frac{1}{r}\right) = 0 \qquad [24]$$

que desempeña el mismo papel que la ecuación característica de las ecuaciones en diferencias finitas lineales y de coeficientes constantes, que es algebraica. La función $g(r)$ es la función generatriz correspondiente a la serie de las b, serie que puede ser divergente, basta con que tenga función generatriz. El caso de ser la serie divergente es para el análisis discreto el homólogo del caso de las distribuciones (que no son funciones) para el análisis continuo. Es particularmente interesante el caso en que el número de raíces de la ecuación [24] es finito, porque entonces la ecuación [22] es equivalente a una ecuación en diferencias finitas, lineal, homogénea y de coeficientes constantes; y la que resulta de completar la [22] mediante la sustitución del cero del segundo miembro por una función $f(t)$ es equivalente a una ecuación lineal completa, cuyo segundo miembro resulta de sustituir $f(t)$ por otra función $F(t)$ mediante reglas conocidas. Las ecuaciones sumatorias obedecen al principio de superposición y pueden darse en ellas efectos de resonancia, son generalizables en varias direcciones: aumentando el número de variables independientes, por el paso a sistemas que incluye como caso particular el de las cadenas recurrentes finitas e infinitas. También como en el análisis continuo puede haber efecto teleológico en vez de hereditario. Puede darse el caso de ecuaciones mixtas diferenciales y en diferencias finitas, o mixtas de integrales y sumatorias, todas ellas se caracterizan por el empleo de un operador lienal L, cuyas funciones propias son las exponenciales, de modo que:

$$L * e^{pt} = e^{pt} L(p) \qquad [25]$$

en la que L (p) es una función.

Esta característica común permite formular una axiomática de las teorías del equilibrio económico y social, de modo que para el primero en condiciones de competencia perfecta, cuando ningún sujeto económico (productor, consumidor o intermediario) puede influir directamente en los precios, adopta la siguiente forma:

a) Los precios de todos los bienes, servicios y factores de producción, que intervienen en el mercado, son funciones del tiempo, representables por integrales de Laplace.

b) Las ofertas y demandas son expresables ex-ante, mediante funciones diferenciables (en el sentido de Stolz-Frechet) de los precios, y de operadores lineales definidos en el espacio de los precios, cuyas funciones propias son las exponenciales.

c) Las demandas y ofertas, para cada bien, servicio o factor de la producción son iguales ex-post.

Dentro de esta axiomática se puede desarrollar la teoría de la estabilidad del equilibrio y de los pequeños movimientos, que hemos descrito antes, cuando solamente intervenían los operadores derivación y de diferencias finitas. De esta naturaleza son los operadores definidos por los primeros miembros de [19] y [22], que hacen intervenir los efectos de retardo, y de adelanto si se quiere, distribuidos de manera continua y discontinua, en el juego de la oferta y de la demanda.

Cuando en el mercado existen *intermediarios*, la descripción de su mecanismo encaja dentro de la axiomática anterior. Supuesto un solo producto y $n - 1$ intermediarios entre productor y consumidor, el mercado se fracciona en n submercados que forman una partición del mercado total, entendiendo la partición en el sentido de la teoría de conjuntos, en cada uno de estos submercados existe un precio, en general diferente, para el mismo producto, de modo que si hay ausencia total de comunicación entre los distintos submercados, las ofertas y demandas en cada uno de ellos son funciones ex-ante del precio en el mismo, y en los adyacentes anterior y posterior respectivamente, y son iguales también ex-ante la demanda en un submercado y la oferta en el siguiente e iguales ex-post la oferta y la demanda en el mismo submercado. Así es que si numeramos desde 1 hasta n, al productor, al primer intermediario, y así sucesivamente hasta el $n - 1$ intermediario, y el consumidor, éste último sólo interviene en el enésimo submercado como comprador, mientras que el productor solamente interviene en el primer submercado como vendedor, y el emésimo intermediario en los submercados m y $m + 1$ como comprador y vendedor respectivamente. Si llamamos p_m, S_m y D_m al precio, la oferta y la demanda en elsubmercado emésimo, ex-ante se dan las relaciones:

$$\begin{gathered} S_1 = f_1 (L_1 p_1) ; \; D_1 = f_2 (L_2 p_1 ; L'_2 p_2) = S_2 ; \ldots ; \\ D_{n-1} = f_n (L_{n-1} p_{n-1}, L'_{n-1} p_n) = S_n ; \; D_n = f_{n+1} (L_n p_n) \end{gathered} \tag{26}$$

y ex-post se cumplen las igualdades:

$$f_1 = f_2 = \ldots = f_{n+1} \tag{27}$$

en las que los L son operadores de la naturaleza antes descrita.

La axiomática anterior solamente ofrece una visión parcial del comportamiento económico como vamos a intentar explicar ahora. Se habla muy frecuentemente de estabilidad del equilibrio a lo Walras y a lo Marshall, como actitudes fenomenológicas distintas, que en el planteamiento matemático conducen a ecuaciones distintas y como es natural a resultados también distintos. Esquemáticamente el modelo de Walras se basa en que si el precio de un producto es demasiado bajo, la demanda excede a la oferta y el precio tiende al equilibrio, que matemáticamente se expresa diciendo que oferta S y demanda D son funciones del precio p, ligadas por la ecuación diferencial:

$$\frac{d p}{d t} = - \lambda \left[S (p) - D (p) \right] \tag{28}$$

en la que λ es una constante que representa la velocidad de reacción del precio ante un déficit de la oferta con respecto a la demanda.

Por el contrario, el modelo de Marshall esquemáticamente se basa en que si la cantidad ofrecida por la venta es demasiado pequeña, los compradores ofrecen precios más altos, de los que los vendedores esperaban, por lo que la oferta aumenta, y tiende hacía el equilibrio, que matemáticamente se expresa diciendo que los precios ofrecidos por los compradores q y los esperados por los vendedores p, son funciones de la cantidad de producto X ofrecida, ligados por la ecuación diferencial:

$$\frac{dX}{dt} = -\lambda\,[p\,(X) - q\,(X)] \qquad [29]$$

en la que λ es una constante, que representa la velocidad de reacción de la cantidad ofrecida ante una inferioridad del precio ofrecido por los vendedores respecto al precio esperado por los compradores. A primera vista parece que existe una disimetría entre oferta y demanda en el modelo de Marshall, jugando la primera un papel privilegiado, mientras que en el modelo de Walras existe simetría entre oferta y demanda; entonces cabría la posibilidad de un tercer modelo también disimétrico entre oferta y demanda, en el que la demanda jugase el papel privilegiado, lo enunciaríamos diciendo que si la cantidad demandada para la compra es demasiado grande, los vendedores piden precios más altos de los que los compradores esperaban, por lo que la demanda disminuye y tiende hacia el equilibrio, que matemáticamente se expresa diciendo que los precios ofrecidos por los compradores q y los esperados por los vendedores p, son funciones de la cantidad de producto Y demandada, ligados por la ecuación diferencial que resulta de sustituir X por Y en la [29] y en la que λ es una constante que representa la velocidad de reacción de la cantidad demandada, ante una superioridad del precio ofrecido por los compradores respecto al precio esperado por los vendedores. Obsérvese que mientras las diferencia en el planteamiento matemático entre los modelos de Walras y de Marshall es grande, dando cabida a la posibilidad de tener que juzgar como estable, un mismo equilibrio de mercado en uno de los modelos y como inestable en el otro, por el contrario la diferencia entre el modelo de Walras y el que hemos llamado tercer modelo, radica únicamente en un análisis de las motivaciones del mercado, en el supuesto psicológico de asignar bien sea a la cantidad ofrecida o a la demandada el factor determinante del comportamiento del mercado. El tercer modelo no ha sido señalado, seguramente, porque como casi todas las escuelas económicas han florecido principalmente en países superdesarrollados en los que la industria es mucho más importante que la agricultura; en el mercado de productos industriales (frigoríficos, automóviles, etc.) la oferta está fuertemente centralizada y planificada, mientras que la demanda es multitudinaria, amorfa y bastante desordenada, por lo que la atención de los teóricos ha sido atraída más hacia la cantidad ofrecida que hacia la demandada. Por el contario, en el mercado de los productos agrícolas (naranjas, cereales, remolacha azucarera, etc.) sucede al revés, es la demanda la que está concentrada en pocas manos, la que es intencionada y planificada, mientras que la oferta, que corresponde a los agricultores, es por lo general dispersa y fuertemente individualizada, es pues en los problemas de la economía agraria y no en los de la industrial, en los que la atención del teórico es atraída hacia la cantidad demandada en vez de hacia la cantidad ofrecida.

Decíamos que la diferencia entre el modelo de Walras y el tercero es sólo aparente, porque no se basa en el mecanismo de actuación, que es lo económicamente observable, ni en su planteamiento matemático, sino solamente en su descripción lingüística, en un análisis de la psicología del comportamiento de los compradores y vendedores. El tercer modelo es reductible al de Marshall, y no supone novedad respecto al mismo, al menos desde el punto de vista económico; juzgamos preferible sustituir en la descripción de Marshall las cantidades ofrecidas, por las ventas, que son iguales a las compras, de este modo se pueden considerar como duales las dos maneras de razonar a lo Walras y a lo Marshall, la segunda resulta en definitiva de cambiar los ejes de coordenadas, de permutar entre sí abscisas y ordenadas en las curvas familiares de la oferta y la demanda, de modo que mientras para la escuela de Walras, las abscisas son los precios y las ordenadas son respectivamente las cantidades ofrecidas y demandadas, para la escuela de Marshall se cambiarían dichas curvas por las de los precios de vendedores y compradores, siendo las abscisas las ventas (o las compras) y las ordenadas los precios de los vendedores y de los compradores. En el equilibrio tanto para una como para otra escuela, se hacen iguales las demandas (compras) y las ofertas (ventas), así como los precios de vendedores y compradores (precio de equilibrio, que es el efectivo). Dada una representación particular cualquiera de las curvas familiares de la oferta y la demanda, se obtiene mediante reglas conocidas de la Geometría Analítica, las homólogas curvas marshallianas. Nos hemos permitido modificar la letra en la formulación de la manera de pensar de Marshall, porque creemos que se conserva el espíritu y se rompe así la aparente disimetría entre oferta y demanda, al mismo tiempo que se resalta la existencia de un principio de dualidad en Economía. Pero insistimos, en que ambas formas duales de razonar, no conducen a un mismo resultado, no interpretan una misma realidad económica, sino dos realidades distintas, con resultados concretos distintos.

En resumen, la posición walrasiana considera tres series de variables económicas, que son: las ofertas, las demandas y los precios; la posición marshalliana considera tres series de variables económicas, que son: las ventas, que son iguales a las compras, los precios que están dispuestos a aceptar los vendedores y los precios que están dispuestos a pagar los compradores. Esto en cuanto al número de variables económicas, pero en cuanto a las relaciones que las ligan entre sí, en la posición walrasiana se admite que las ofertas y demandas son expresables ex-ante en función de los precios, y que ambas se hacen iguales ex-post; en la posición marshalliana se admite que los precios de vendedores y compradores son expresables ex-ante en función de las ventas (iguales a las compras) y que dichos precios se hacen iguales ex-post.

Es claro que la axiomática que enunciamos anteriormente, seguía la línea de pensamiento walrasiano, pero que también se puede enunciar una axiomática para la línea de pensamiento que sigue a Marshall, cuya formulación sería la siguiente:

a) Las ventas, iguales a las compras, de todos los bienes, servicios y factores de producción que intervienen en el mercado, son funciones del tiempo, representables por integrales de Laplace.

b) Los precios que están dispuestos a pagar los compradores, y los precios que están dispuestos a aceptar los vendedores, son expresables ex-ante, mediante funciones diferenciables (en el sentido de Stolz-Frechet) de las ventas, y de operadores lineales definidos en el espacio de las ventas, cuyas funciones propias son las exponenciales.

c) Los precios de compradores y vendedores, para cada bien, servicio o factor de la producción, son iguales ex-post.

A mí me parece que estas dos axiomáticas son solamente visiones de un aspecto parcial del equilibrio económico y de la dinámica económica; son secciones *trienedimensionales* del universo económico, que es *cuadrienedimensional.* Al decir que el universo económico es cuadrienedimensional, queremos expresar el hecho de que a nuestro juicio son cuatro las series de variables económicas, que son: las ofertas, las demandas, los precios de los vendedores y los precios de los compradores. Existen 2 *n* relaciones funcionales ex-ante entre dichas cuatro series de variables, que constituyen las *ecuaciones de estructura del mercado,* y otras 2 *n* relaciones ex-post, válidas para todos los mercados, que son las igualdades entre oferta y demanda de un lado, y precios del vendedor y del comprador por otro, para cada bien, servicio o factor de la producción, a las cuales podemos llamar *ecuaciones universales,* porque son válidas para todo mercado en condiciones de competencia perfecta. Al igual que los espacios de la Geometría y de la Física poseen sus propias ecuaciones de estructura, que son variables de unos a otros, y los caracterizan e individualizan, asimismo se comportan en la Economía las ecuaciones de estructura de los mercados, variables de unos a otros, que los definen y los distinguen entre sí.

La axiomática cuadrienedimensional de la estática y dinámica económicas quedaría formulada de la siguiente manera:

a) Las cantidades demandadas y ofrecidas, de cada bien, servicio o factor de la producción, así como los precios de los mismos que están dispuestos a pagar los compradores y a aceptar los vendedores, son funciones del tiempo, representables por integrales de Laplace.

b) Existen 2 *n* relaciones funcionales, diferenciables en el sentido de Stolz-Frechet, enunciables ex-ante, entre las 4 *n* variables económicas antedichas y operadores lineales definidos en dicho espacio cuadrienedimensional, cuyas funciones propias son las exponenciales.

c) Las ofertas y demandas, así como los precios de vendedores y compradores para cada bien, servicio o factor de la producción, son iguales ex-post.

A las relaciones funcionales ex-ante le llamamos ecuaciones de estructura del mercado, y a las igualdades ex-post, ecuaciones universales.

Puede haber ex-ante más de un valor numérico distinto para las cantidades demandadas y ofrecidas, así como para los precios ofrecidos y pedidos de una misma mercancía, incluido el trabajo, con tal de que concurran en el mercado más de un comprador y de un vendedor.

Dos de las infinitas maneras de reducir a tres series, las cuatro series de variables económicas, o lo que es lo mismo dos secciones trienedimensionales del universo cuadridimensional de la Economía, da origen a los panoramas parciales que del mundo económico ofrecen las concepciones de Walras y de Marshall.

Hasta ahora nos hemos ocupado exclusivameste de un enfoque estrictamente funcional de la estática y dinámica económicas, pero también es posible, aunque más difícil, concebirlas estocásticamente. La ley de la oferta y la demanda, al igual que la ley de gravitación universal, el principio de la conservación de la energía o las relaciones de incertidumbre de la Mecánica Cuántica, son leyes de origen empírico; los científicos las han extraído de la experiencia, al observar que los fenómenos naturales, en su comportamiento, se ajustan a las normas señaladas por dichas leyes. Una vez extraídas de la experiencia, se las despoja de su carácter empírico primitivo, y pasan a constituir uno de los sillares sobre los que se asienta la Ciencia, en su intento de estructuración hipotético-deductiva al modo de la Geometría, que desde los griegos es el modelo inalcanzable de toda Ciencia Natural.

Sin duda alguna los hechos que a grandes rasgos explica la ley de la oferta y la demanda son ciertos, pero lo que no es del todo aceptable en el estado actual de la Ciencia, es la interpretación funcional que de la misma se hace, se pretende establecer un enlace rígido, estrictamente determinista entre la oferta y la demanda de un lado, y el precio de otro, despreciando así el carácter marcadamente aleatorio de los fenómenos económicos, y se utiliza la teoría de las ecuaciones diferenciales y de las ecuaciones integrales, como instrumento matemático de la Economía, las cuales pertenecen a las manifestaciones más puras del determinismo científico.

Adoptando este punto de vista determinista, no existe ninguna dificultad en definir como precio de equilibrio fijo, aquél para el que la oferta y la demanda se hacen iguales, el que corresponde al punto de intersección de las ya familiares curvas de la oferta y la demanda, porque cualquier otro precio que se fije, no puede ser de equilbrio, es lo que traduce el hecho vulgar tan conocido e innegable, de que si la demanda es mayor que la oferta sube el precio, y en caso contrario, baja.

Que este hecho vulgar es cierto está fuera de toda duda, enunciado así a grandes rasgos, sobradamente se ha experimentado en la vida ordinaria, pero lo que no es lícito hacer científicamente es pasar de este hecho, por muy general que sea, a la ley determinista de la oferta y la demanda, contradice las reglas de la inferencia estadística y de la lógica de laboratorio. Es necesario introducir en la misma un elemento aleatorio, que falta en la concepción clásica de la Economía, y que está más de acuerdo con el indeterminismo económico, con la incertidumbre que gobierna la evolución de los precios y mercados, y que este indeterminismo sea absoluto, y con ello queremos decir que no sea un indeterminismo aparente, resultado estadístico global de la actuación de variables ocultas, permaneciendo estas variables ocultas deterministas, cual sucede en la concepción clásica de la mecánica estadística (estadística de Maxwell-Boltzmann), en la que el indeterminismo final aparece como resultado de la acción acumulativa de causas muy numerosas y complejas, de tal modo que pequeñas variaciones en las condiciones iniciales producen grandes variaciones en los resultados finales, de acuerdo con la concepción clásica de Poincaré sobre la probabilidad. En el caso de los fenómenos económicos, las variables ocultas serían la demanda individual de cada comprador y la oferta individual de cada vendedor; pero no, el indeterminismo económico es análogo al de la Mecánica Cuántica, al indeterminismo que viene implícito en las relaciones de incertidumbre de Heisenberg, que yace en el substrato de la naturaleza; no existen en Economía tales variables ocultas, sino que están también sujetas a incertidumbre, ni siquiera las demandas y ofertas individuales son totalmente previsibles, sino que son también elementos aleatorios.

A cada precio no corresponde una oferta o una demanda globales, que estén ligadas al precio por relación de efecto o causa; la ley de causalidad no rige del todo en Economía; al igual que en la nueva Física, subsiste una causalidad débil, lo que en Estadística se llama correlación, entre el precio de un lado y la oferta de otro, que es positiva, y entre el precio y la demanda que es negativa; esto es lo que debe de inferirse del hecho vulgar y cotidiano a que antes hacíamos referencia. La expresión en términos probabilísticos de la ley de la oferta y de la demanda, se puede dar así: *existe una correlación positiva entre el precio y la oferta, y una correlación negativa entre el precio y la demanda.* Las familiares curvas de la oferta y de la demanda son los valores medios o esperanzas matemáticas de la oferta y de la demanda, y las abscisas los precios.

En la concepción estocástica y dentro del supuesto de un universo económico cuadrienedimensional, la axiomática requiere dos axiomas, uno de estructura y otro universal, el primero propio de cada mercado en condiciones de competencia perfecta. Estos axiomas serían los siguientes:

a) Existe una distribución de probabilidad de las variables aleatorias que son las ofertas, demandas, precios de los vendedores y precios de los compradores, para cada bien, factor de la producción o servicio, enunciable ex-ante en cada mercado (*axioma de estructura*).

b) Las demandas y las ofertas, para cada bien, servicio o factor de la producción, y también los precios de los vendedores y de los compradores, se hacen iguales ex-post (*axioma universal*). También es válido aquí lo dicho en el caso determinista respecto a la posible existencia de más de un solo valor ex-ante para las cuatro variables económicas correspondientes a una misma mercancía.

De modo que en el caso de un solo producto, si $f(x, y, z, v)$ es la distribución de frecuencia de las cuatro variables aleatorias demanda, oferta, precio del comprador y precio del vendedor, conocida ex-ante, como consecuencia de las igualdades que se cumplen ex-post entre demanda y oferta de un lado, y entre precios de vendedores y compradores, se deduce de ella la distribución de frecuencia bivariante:

$$\frac{f(x, x, z, z)}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, x, z, z)\, d x\, d z} \qquad [30]$$

de las dos variables aleatorias ventas (iguales a compras) y precio de equilibrio, de modo que estas dos magnitudes económicas no son ciertas, sino aleatorias.

Tanto en la concepción funcional como en la estocástica, hemos admitido la estacionariedad del mercado, que se traduce matemáticamente por el hecho de no figurar el tiempo explícitamente en las relaciones funcionales ex-ante o en la distribución de probabilidad ex-ante.

La Matemática Financiera se halla íntimamente ligada a la Economía; en un principio se limitó a ser un cálculo comercial estricto, pero hoy ha ampliado su horizonte a través de sus múltiples e interesantes aplicaciones al cálculo económico, concretamente a la elaboración y ejecución de los criterios de selección de las inversiones, problema de gran actualidad, por ser básico en el establecimiento de *políticas financieras y económicas racionales u óptimas*. Al nacimiento del cálculo comercial está ligado el nacimiento del álgebra, que se remonta al matemático árabe Mohammed Ibn Musa (muerto hacia el 850), más conocido por el sobrenombre de Al-Khowarizmi, autor del libro titulado «al-jebr w'almuquabala», de donde deriva nuestro nombre de álgebra. Este libro, aunque escrito sin símbolos ni abreviaturas, expresando todas las operaciones a efectuar mediante palabras, contiene nuevas reglas algebraicas importantes; estaba especialmente dedicado a los ejecutores testamentarios, comerciantes, banqueros y agrimensores. Así como los problemas propios de los juegos de azar desempeñaron un papel importante en el nacimiento del Cálculo de Probabilidades, concretamente los problemas de repartimientos, consistentes en que cuando el juego tenía que interrumpirse, los jugadores debían de repartirse el dinero, equitativamente con arreglo a sus posibilidades de ganar, si el juego no se hubiese interrumpido; pues, asimismo, los problemas relativos a las herencias, a veces muy difíciles de resolver para el no matemático, desempeñaron un papel importante en el nacimiento del Algebra. La resolución de estos problemas era desconocida para los sutiles juristas romanos.

Al hablar de los primeros problemas de matemática comercial, no podemos dejar de evocar el nombre de Fibonacci, a quien debemos los occidentales el conocimiento del álgebra y del sistema aritmético hindú, por su libro «Abbacus», escrito hacia 1200, porque si hay manuscritos anteriores a esa fecha son debidos a árabes y judíos españoles, y no pertenecen al mundo cristiano. Aun cuando Fibonacci rechazaba las raíces negativas, dio un paso muy importante, al interpretar un número negativo en un problema comercial, como pérdida de dinero en vez de ganancia. Nos llevaría muy lejos de nuestro tema analizar dos de las contribuciones más importantes de Fibonacci, como son su célebre sucesión, impregnada de espíritu místico, y su identidad para la suma de dos cuadrados; hasta cinco siglos más tarde no aparecen identidades del mismo tipo como las de Euler para la suma de cuatro cuadrados, y la de Degen para la suma de ocho cuadrados. Las tres identidades de Fibonacci, Euler y Degen están relacionadas con los números complejos, los cuaternios y el álgebra de Cayley de ocho unidades básicas, respectivamente. Esquemáticamente podemos afirmar que la identidad de Fibonacci está en el origen de la teoría de la composición de las formas binarias cuadráticas de Gauss, la cual es el precedente que llevó a Dedekind a la creación de los ideales, que dan una generalización inmediata de formas especiales de grado n con n variables. Es curioso señalar que las obras de Fibonacci no son menos notables por lo que no contienen que por lo que contienen; en una época en que las ciencias matemáticas eran cultivadas para ser aplicadas a la magia y a la astrología, no se encuentran en sus obras ningún indicio de ciencias ocultas.

También se debe a Fibonacci, al no poder resolver un problema algebraico, el primer intento de buscar una prueba de imposibilidad, tarea que no vuelve a repetirse en el Algebra hasta el siglo XIX.

El cálculo financiero y comercial ha servido de siempre para un gran despliegue de ingenio; dentro del campo de la matemática elemental plantea problemas, algunos de una gran dificultad y belleza se les ha encontrado soluciones realmente elegantes. Comprende tres partes fundamentales, que son: la teoría de la capitalización y del interés, la teoría de las rentas, y la teoría de la amortización. En un principio solamente la capitalización simple para plazos de tiempos cortos, y la capitalización compuesta, para plazos largos, tenían interés; pero con la aparición de la inestabilidad económica, la inflación, la disminución del poder adquisitivo del dinero y otros fenómenos económicos, han adquirido interés otros procesos de capitalización más complejos, que antiguamente hubieran parecido meras elucubraciones teóricas, desprovistas de significado práctico. Las diversas clases de rentas, de términos constantes y variables, anticipadas, inmediatas y diferidas, con toda su secuela de problema de fraccionamiento y conversión de rentas, aun permaneciendo dentro del campo de la matemática elemental, son complicados. La teoría de la amortización comprende dos partes, la relativa a los préstamos indivisibles, y la de los préstamos divididos en títulos o empréstitos. Las posibilidades de concepción de planes de amortización distintos para un préstamo son casi ilimitadas, y la casuística que se encuentra en la práctica es enorme; en el caso de los empréstitos depende del desembolso que deben de hacer los suscriptores, los intereses que percibe la obligación, el plazo y la forma de reembolso, etc. La teoría se complica cuando se tiene en cuenta la influencia que ejercen los impuestos en la modificación de los tantos de interés efectivos para prestamistas y prestatarios, y los problemas que nacen por causas jurídicas, tales como los relativos al cálculo de usufructos y nudas propiedades.

Un problema interesante es el de la teoría general de los empréstitos con obligaciones reembolsables a precios variables, con los intereses anticipados total o parcialmente, y privadas o no de los intereses correspondientes al año en que se amortizan; y también la teoría general de los empréstitos de rendimiento constante, de los que es un caso particular el conocido modelo de Lenzi, todo lo cual se resuelve por medio de la matemática elemental, pero con mucho ingenio.

Como cierre del cálculo mercantil clásico se halla la teoría general de los regímenes de capitalización continua escindibles y no escindibles, de las rentas discretas y continuas, y de los diversos planes de amortización discreta y continua en dichos regímenes generales. La capitalización simple y compuesta son los prototipos de dos grandes clases de regímenes de capitalización que reciben respectivamente los nombres de no escindibles y de escindibles. El nombre de escindibles fue dado por Cantelli para aquellos que gozan de la propiedad de que el monto de una peseta (esa misma peseta más sus intereses) en el intervalo de tiempo de t_0 a t_1; M (t_0, t_1) goza de la propiedad de que:

$$M(t_0, t_2) = M(t_0, t_1)\, M(t_1, t_2) \qquad [31]$$

para cualquier terna de números t_0, t_1, t_2, dispuestos en orden creciente. A su vez tanto la capitalización simple como la compuesta son estacionarias, es decir que el monto de una peseta depende solamente de la duración de la imposición, pero existen casos más generales en que esta condición no se da, como por ejemplo cuando el Estado obliga a Institutos de Crédito a pagar intereses variables de año en año, en cuyo caso para calcular el monto de una peseta no basta con conocer la duración de la imposición, sino que depende también de la fecha en que se hizo la imposición.

A la práctica comercial y financiera hay que agradecer que se mantuviera vivo el interés por las Matemáticas durante la larga noche medieval. Pero tampoco todo fue oscuro durante el medioevo, pues desde los años veinte con el vigoroso renacer de la Lógica, y la aparición de las lógicas modales y multivalentes, se despertó el interés y con ello una nueva valoración de lo que Bell ha llamado «el análisis submatemático», del que fueron campeones, entre otros: el arzobispo Hildeberto, Abelardo, Guillermo de Champeaux (siglos XI y XII) y sobre todos Santo Tomás de Aquino (1227-1274). En 1936 Michalski descubrió que Guillermo de Occam (1270-1349) utilizó una lógica trivalente en lugar de la aristotélica.

La revisión de los fundamentos de la matemática financiera ha de hacerse a la luz del álgebra y la topología, que son los dos aspectos duales, antes complementarios que competitivos, con que se ofrece la matemática moderna a la mirada del científico. Un análisis a la vez muy profundo y sutil de las estructuras algebraicas ha sido hecho por el profesor Ancochea en su discurso de ingreso en esta Academia.

Como ejemplos de métodos matemáticos modernos altamente eficientes en la investigación de la matemática financiera, figuran los procesos estocásticos y las distribuciones, que como es sabido son uno de los últimos objetos matemáticos. La amortización de una sola obligación y también la de un lote de obligaciones, son procesos estocásticos markovianos, porque son sin memoria (no hereditarios); en ellos el conocimiento del pasado no aporta ninguna información para la predicción del porvenir, pero como cadenas no son markovianas, porque no son homogéneas en el tiempo. Estudiadas estas probalidades en cadena mediante el empleo de las matrices, permiten resolver toda clase de problemas sobre usufructos y nudas propiedades no solamente de las obligaciones aún vivientes, sino también de las ya amortizadas, mediante la inversión en el tiempo del proceso estocástico. Se encuentra en el curso de estas investigaciones, que en la determinación del tanto de interés efectivo del obligacionista surge un interesante algoritmo, que es el de la media aritmética de variables aleatorias en número aleatorio.

Italia ha contado siempre con una escuela floreciente de matemáticos financieros, cuyo origen se remonta a la Edad Media, de la que destacan en nuestro tiempo, entre otros, los nombres de Cantelli, Lenzi, Sibirani, Insolera, Finetti, quienes han contribuido no solamente a dar rigor a los fundamentos científicos, sino también a la creación de un lenguaje elegante. Pero como los tantos de interés y de descuento son distribuciones en vez de funciones, como el principio genético del rédito en su forma más general viene expresado por una ecuación entre distribuciones, nos parece que una construcción rigurosa y axiomática de la Matemática financiera requiere el empleo de la teoría de las distribuciones. Esquemáticamente, el problema de la amortización consiste en que el acreedor presta el capital C, en el instante t_0 y pacta con el deudor su amortización mediante n cuotas $\alpha_1, ..., \alpha_n$ en los instantes $t_1, ..., t_n$; dos modalidades de pacto son posibles: a) la amortización progresiva, b) la igualdad de los valores de C y de las α en un instante cualquiera T. Ahora bien, si el régimen de capitalización es escindible rige el principio de la equivalencia financiera, en virtud del cual el resultado del segundo método es independiente del valor particular de T (resultado «a priori») y se demuestra que es el mismo que se obtiene mediante el empleo del primer método (resultado «a posteriori»). Si por el contrario el régimen de capitalización no es escindible (caso de la capitalización simple, por ejemplo) entonces los resultados de ambos métodos son distintos; el del primero es único, y el del segundo tiene, a su vez, una solución distinta para cada valor particular de T, existe pues una infinidad de soluciones distintas dotada de la potencia del continuo.

Algunos autores como Sibirani, por ejemplo, utilizan tres métodos y los colocan en un plano de igualdad, pero de estos tres uno es el progresivo, y los otros dos son dos casos particulares del segundo método antes descrito, que es más general ya que como acabamos de decir tiene infinitas soluciones. Incluso si la función de descuento no es la conjugada de la función de capitalización, es posible un tercer criterio de amortización que pudiéramos llamar regresivo por ser el dual del progresivo. Se demuestra la posibilidad de reducir toda amortización discreta con los intereses vencidos o anticipados total o parcialmente, a la amortización ordinaria en capitalización compuesta de tanto variable. Análogamente, para la amortización continua se demuestra que se pueden reducir todos los casos al de una capitalización escindible.

Mediante la teoría de las distribuciones se puede construir una teoría unitaria de la amortización que englobe dentro de sí la amortización discreta y continua, que muestra analogías muy fuertes con el Cálculo de Probabilidades, pudiendo darse los cuatro casos que resultan de considerar la amortización continua o discreta, y el régimen de capitalización continuo o discreto, de los cuales el de la amortización continua en régimen de capitalización discreto creemos que no había sido tenido en cuenta aún por la Matemática financiera.

Y ya fuera de los límites de la Matemática financiera, como consecuencia de sus problemas, surgen *ecuaciones G-diferenciales lineales*, cuyos coeficientes son distribuciones, las cuales son G-límites (en el sentido de las G-Topologías) de ecuaciones diferenciales lineales, y las soluciones de las primeras son 0-límites (en el sentido de la 0-Topología u ordinaria) de las funciones soluciones de las últimas; se llega, pues, a funciones a través de distribuciones. Se demuestra que las ecuaciones en diferencias finitas de coeficientes variables son G-límites de ecuaciones diferenciales lineales, siendo las soluciones de las primeras 0-límites de las soluciones de las últimas. Es indudable que a través de las distribuciones, precisamente de las distribuciones que pudiéramos llamar analíticas que son quizás las únicas que forman un espacio métrico dotado de la topología de la métrica, se opera una fusión del continuo y del discontinuo.

El espacio de las leyes financieras es el espacio producto de los espacios de las funciones de descuento y de capitalización. Este último es a su vez el espacio de las funciones exponenciales cuyos exponentes pertenecen al espacio producto del conjunto de los números reales positivos y del espacio de las funciones de distribución del cálculo de probabilidades. El espacio de las funciones de descuento es el espacio producto del conjunto de los números reales negativos por el espacio de las funciones de distribución del cálculo de probabilidades. De las definiciones de uno y otro se sigue que son espacios topológicos homeomorfos para el homeomorfismo que consiste en tomar la inversa y permutar dos variables; a las funciones de capitalización y de descuento homólogas en este homeomorfismo las llamamos conjugadas.

Es claro entonces, que el espacio de los tantos del interés es el producto del conjunto de los números reales positivos por el espacio de las distribuciones de frecuencia del cálculo de probabilidades, y el espacio de los tantos de descuento es el espacio producto del conjunto de los números reales negativos por el espacio de las distribuciones de frecuencia del cálculo de probabilidades.

Pero es interesante que también se puede definir el espacio de las funciones de capitalización como la suma de la unidad y del producto de un número real positivo por una función de distribución del cálculo de probabilidades. Si se compara esta definición con la anterior se observa, que ésta nace de generalizar la capitalización simple, mientras que la anterior nace de generalizar la capitalización compuesta, también pone de relieve la existencia de un homeomorfismo, que pudiéramos llamar financiero, interno al espacio topológico de las funciones de capitalización.

Se pueden definir seis operaciones fundamentales sobre las leyes financieras, que son la adición y la multiplicación ordinarias y reducidas, el producto financiero y la suma financiera, de las cuales hasta ahora solamente ha sido utilizada la del producto financiero.

La multiplicación y la suma ordinaria, como sus nombres indican, tienen por función de capitalización el producto y la suma ordinaria de funciones de capitalización. La multiplicación y la adición reducidas, se definen mediante las fórmulas:

$$L = 1 + (L_1 - 1) \dots (L_n - 1); \quad L = L_1 + L_2 + \dots + L_n - n + 1. \qquad [32]$$

Las funciones de capitalización son para las cuatro operaciones anteriores un semigrupo conmutativo, en el que es válida la regla de simplificación, pero solamente hay elemento neutro en el caso de la multiplicación ordinaria y de la adición reducida, que es la unidad (tanto del interés nulo). Por tanto, solamente respecto a estas dos últimas operaciones, pueden construirse *espacios aleatoriales* a partir de las funciones de capitalización.

De estas cuatro operaciones tienen una clara interpretación financiera la adición ordinaria, que corresponde al monto de n pesetas, impuesta cada una durante el mismo intervalo de tiempo, en regímenes de capitalización distintos. La generalización de las operaciones anteriores y la profundización en su estudio lleva al empleo de sucesiones biortogonales en el espacio de Hilbert, que generalizan en él los triedros suplementarios del espacio euclídeo ordinario.

El producto financiero consiste en la aplicación en intervalos sucesivos de tiempo, de distintos regímenes de capitalización, y aplicado de manera continua e infinitesimal engendra un régimen de capitalización estacionario (dependiente solamente de la duración de la imposición) y cuando el régimen de capitalización generador del producto financiero es estacionario se obtiene el conocido teorema de que engendra la capitalización compuesta. La suma financiera consiste en efectuar la operación anterior solamente para los intereses, y también cuando se aplica de manera infinitesimal y continua engendra un régimen de capitalización estacionario, y cuando el régimen de capitalización generador de la suma financiera es estacionario, se engendra la capitalización simple.

Las anteriores operaciones, convenientemente modificadas, son extensibles a las funciones de descuento. Dos fenómenos económicos, que son equivalentes a la modificación del tanto del interés, son la *ilusión monetaria* señalada por Fisher y lo que pudiéramos llamar *ilusión demográfico-financiera*, que consiste en la falsa creencia de que una empresa está haciendo producir el capital, cuando en realidad lo está consumiendo, debido a la disminución del poder adquisitivo del dinero con el tiempo, y la segunda en la falsa creencia de que el Estado está desarrollando económicamente al país, cuando en realidad está destruyendo la riqueza, debido a la simultaneidad de la disminución del poder adquisitivo del dinero y del aumento de la población con el tiempo. Cuando se da este fenómeno se puede decir que el Estado practica una política económica malthusiana, dando a este adjetivo un sentido distinto del que le dan otros economistas, cuando con ello se refieren al hecho de que un monopolio mantenga la producción por debajo de sus posibilidades, con objeto de aumentar sus beneficios, o cuando, como ha sucedido con el café, se destruye parte de la producción para evitar la caída de los precios. El tratamiento matemático de estos fenómenos lleva a una modificación del tanto del interés en el cálculo del «good-will» de las inversiones, cuando se practica una política económica de rentabilidad, y en el cálculo del tiempo de recuperación (pay-out») cuando se practica una política de liquidez, ello independientemente de que se utilicen unidades monetarias como en la economía capitalista o «trabajo congelado» como en la economía soviética, en cuyo caso el homólogo del «pay-out» es el «srok okupamoesti» de los economistas rusos.

Al igual que se pueden definir las operaciones con variables aleatorias a partir de las operaciones con variables ciertas, mediante la función característica, cuando se trata de capitales aleatorios, es preciso un postulado de equivalencia financiera, que utilice la función característica. Si C es un capital aleatorio disponible en el tiempo t, y si ξ es un capital aleatorio disponible en el tiempo aleatorio η, siendo $M(\eta, t)$ y $\Delta(t, \eta)$ las funciones de capitalización y de descuento, y $f(\xi, \eta)$ la distribución de frecuencia de ξ en el tiempo η, la función característica de C es la $\varphi(z, t)$ definida por:

$$\varphi(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \left[\int_0^t e^{iz\xi M(\eta, t)} f(\xi, \eta)\, d\eta + \int_t^{\infty} e^{iz\xi \Delta(t, \eta)} f(\xi, \eta)\, d\eta \right] \quad [33]$$

de la que por un cálculo, no difícil, se deduce que el valor medio de C *únicamente es proporcional al valor medio de* ξ, cuando ξ es una variable aleatoria independiente del tiempo aleatorio η.

Llevada a estas alturas la matemática financiera, creemos que deja de ser válido el juicio emitido por Bell en su «Historia de las Matemáticas» cuando dice: «... la inundación de aritméticas comerciales que han salido de las imprentas de todo el mundo a partir del siglo XV... no han aportado nada importante al desarrollo de las matemáticas».

Hay que distinguir entre amortización económica y amortización contable, la primera es un sustitutivo del lenguaje de la actualización en el cálculo de inversiones, mientras que la segunda está dirigida a aumentar los beneficios de la empresa, disminuyendo los impuestos que la gravan mediante una contabilidad óptima que aproveche al máximo los recursos que permiten las leyes fiscales vigentes. No se trata de burlar los impuestos, sino de que en algunos países sus leyes fiscales, con objeto de estimular una determinada política económica o financiera, autorizan diversos métodos de amortización contable: lineal, uniformemente progresiva y exponencial en el caso de los Estados Unidos, y según se utilice uno u otro de dichos métodos, se obtienen valores distintos para los impuestos que ha de satisfacer la empresa, lo que cambia sus beneficios. Los diversos métodos seguidos encajan dentro de un caso general de programación lineal muy particular.

La Matemática Actuarial está íntimamente ligada con la Financiera; hay fuertes analogías, por ejemplo, entre el montante demográfico-financiero y el descuento vitalicio de un lado, y la teoría del descuento de otro, entre la ley del envejecimiento uniforme para las funciones biométricas gompertzianas y para los sistemas financieros unificables, etc.; en paralelo a la teoría unitaria de la amortización de que antes hablamos, se puede desarrollar una teoría unitaria del seguro que unifica los seguros discretos y el seguro continuo en régimen de capitalización general, extendiendo la descomposición de la prima en prima de riesgo y de ahorro, a cualquier régimen de capitalización, descomposición homóloga a la que generaliza el usufructo y la nuda propiedad en la teoría unitaria de la amortización. Una de las posibles aplicaciones prácticas es el cálculo de la póliza de un seguro libre de la ilusión monetaria.

Aplicando la [33] a la teoría del seguro, se puede calcular la función característica de la reserva de una póliza considerada como una variable aleatoria, y mientras que para el valor medio se obtiene el mismo resultado por el método prospectivo que por el retrospectivo, el resultado es distinto para el cálculo de la función característica. Del estudio de las rentas aleatorias, surge el de la adición de variables aleatorias en número aleatorio, cuando la ley de probabilidad es variable que generaliza el caso en que la ley de probabilidad es constante, que conduce a las transformaciones funcionales para las funciones características de la suma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n [\varphi(t)]^n = \psi\left(\frac{\log \varphi(t)}{i}\right); \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_n \varphi_n(t) \qquad [34]$$

en las que p_n y $\psi(t)$ son las probabilidades y la función característica del número aleatorio de sumandos y las $\varphi(t)$ las funciones características de los sumandos aleatorios, constante para la de la derecha y variables para la de la izquierda. Estas transformaciones funcionales se generalizan, cuando se sustituye el número de sumandos por una variable aleatoria positiva, en cuyo caso la primera [34] queda la misma y la segunda se transforma en la

$$\int_0^{\infty} f(x)\, \varphi(t; x)\, dx \qquad [35]$$

su estudio puede conducir a muy largos desarrollos matemáticos, pues todas ellas son absolutamente convergentes, por ejemplo para la [35] se demostraría tomando módulos, así:

$$|\varphi(t; x)| \leqslant 1; \quad \left|\int_0^{\infty} f(x)\, \varphi(t; x)\, dx\right| \leq \int_0^{\infty} |f(x)\, \varphi(t; x)\, dx| \leqslant$$

$$\leq \int_0^{\infty} f(x)\, dx = 1. \qquad [36]$$

El estudio puede efectuarse, bien sea considerando como núcleo de la transformación funcional la ψ o la φ, o la f o las p, respectivamente. Si a la fracción de la primera [34] se le suma s, o bajo el signo de suma se introduce e^{ins}, o bajo el signo de la integral se introduce e^{isx}, respectivamente, se obtiene entonces la función característica de la distribución conjunta de la suma y del número de sumandos. A la operación definida por la [35] se le puede llamar integración de una variable aleatoria en un intervalo aleatorio.

Se observa que las ecuaciones en diferencias finitas desempeñan un papel muy importante tanto en las Matemáticas financiera y actuarial, como en la Economía matemática, pero no solamente las ordinarias, sino también las que tienen lugar entre operadores. Dada una ley de composición externa en un conjunto E, para un conjunto de operadores Ω que forman un semigrupo, se puede definir una ecuación en diferencias finitas dada por

$$\psi \in \mathrm{E}, \ \mathrm{L} \in \Omega ; \quad \psi_n = \mathrm{L}_{n-1} * \psi_{n-1} \tag{37}$$

cuya solución es:

$$\psi_n = \mathrm{L}_{n-1} * (\mathrm{L}_{n-2} * (\cdots * (\mathrm{L}_1 * \psi_0) = (\mathrm{L}_{n-1} \cdots \mathrm{L}_1) * \psi_0 . \tag{38}$$

Si Ω es un espacio de límites de Frechet, un espacio $\mathcal{L}^*$ con la notación de Kuratowski, se pueden estudiar las propiedades asintóticas de las ecuaciones en diferencias finitas operacionales [35], basta pues con que el espacio Ω sea pseudotopológico. Para que sea posible el paso directo de las ecuaciones en diferencias finitas a ecuaciones diferenciales operacionales, se requiere ya una topología, porque han de estar definidos el logaritmo y la exponencial de operadores, y la integral.

Tres tipos importantes de ecuaciones en diferencias finitas son los siguientes:

$$\mathrm{L} * \psi(x) = a\,\psi(x) + \varphi(x) ; \quad \mathrm{L} * \psi(\vec{t}) = \psi(\vec{t}\,\mathrm{A})\,\varphi(\vec{t}) ;$$

$$\mathrm{L} * \psi(t_1, \ldots, t_n) = \psi\left(\frac{\log \varphi_1(t_1, \ldots, t_n)}{i}, \ldots, \frac{\log \varphi_n(t_1, \ldots, t_n)}{i}\right) \varphi_0(t_1, \ldots, t_n) \tag{39}$$

La primera corresponde a las ecuaciones en diferencias finitas ordinarias, las a son números reales y las $\psi(x)$ y $\varphi(x)$ funciones reales de variable real. Los operadores forman un grupo conmutativo y se puede definir un espacio aleatorial de 1.ª especie.

En la segunda [39] las A representan matrices y las $\psi(\vec{t})$ y $\varphi(\vec{t})$ funciones características de variables aleatorias enedimensionales. Por $\psi(\vec{t})$ representamos simbólicamente la función de n variables $\psi(t_1, \ldots, t_n)$. Sirven para describir los saldos en el movimiento aleatorio de una cuenta corriente, son el instrumento matemático de la teoría de las rentas aleatorias.

En la tercera [39] las ψ y las φ son funciones características de variables aleatorias enedimensionales. Tanto en este caso como en el anterior los operadores forman un semigrupo no conmutativo con elemento neutro y para el que es válido la regla de simplificación tanto a la derecha como a la izquierda. Se pueden construir espacios aleatoriales de 2.ª especie, pero no de 1.ª; en el último caso incluso hay que modificar el semigrupo de los aleatores. La última [39] sirve para describir la evolución aleatoria en el tiempo de las castas en que se halla dividida una sociedad humana. Se observa cómo las matemáticas de la Sociología son mucho más difíciles que las de la Economía.

Los dos espacios de operadores L de las dos primeras [39] son topológicos, y existen para ellos ecuaciones diferenciales en correspondencia con las ecuaciones en diferencias finitas, las primeras son ordinarias y las segundas operacionales. El espacio L de las últimas [39] es pseudotopológico, no se pueden definir en él ecuaciones diferenciales, por método directo, sino indirectamente.

Weil y Bush han estudiado las reglas de matrimonio y la estructura social de varias sociedades salvajes y primitivas, mediante el empleo del cálculo matricial y de las ecuaciones en diferencias finitas ordinarias, lo que únicamente permite plantear y resolver problemas de valores medios, mientras que las ecuaciones en diferencias finitas operacionales para las funciones características del tipo de las dos últimas [37] permiten plantear y resolver también problemas de dispersión y correlación; a partir de ellas se obtienen para los momentos de órdenes sucesivos ecuaciones en diferencias finitas ordinarias.

La supervivencia y mortalidad de un lote de cabezas, se comporta de manera similar a la amortización de un lote de obligaciones, y la teoría clásica se puede sustituir con ventaja por el empleo de cadenas no markovianas como el que hemos descrito, para el caso de las obligaciones, pero más sencillas.

Las cadenas de Markov son muy útiles en la programación de créditos, como muestra de lo cual damos un ejemplo esquemático: supongamos una empresa que realiza sus ventas por campañas y que el crédito que concede lo es por un cierto número de unidades de tiempo, que vamos a llamar períodos; para fijar las ideas supongamos n períodos. Cada unidad monetaria de crédito puede encontrarse en los siguientes estados: haber sido devuelta al acreedor, encontrarse en poder de un cliente deudor en los períodos 1, 2, ..., n, o ser incobrable al final de los n períodos, correspondiendo a dichos estados se define una matriz de probabilidades de transición. Fijada una tasa del interés se pueden calcular las pérdidas por el crédito concedido, actualizando el valor de las devoluciones en los n períodos. Siempre que a una cadena de Markov se asocia una matriz de ganancias se transforma un problema puramente probabilístico en un problema económico, definido por un vector de ganancias; los factores de actualización transforman las series divergentes en convergentes, pero incluso sin actualizar, si se sustituye el vector de ganancias por un vector de ganancias medias se transforman series divergentes en sumables con el criterio de Césaro. Toda esta clase de problemas puede plantearse para cadenas no markovianas, pero entonces la solución es más difícil, las fórmulas finales más complicadas, pero no obstante se puede desarrollar una teoría de las cadenas no markovianas absorbentes.

Orr y Miller en «Quaterly Economics Journal» han desarrollado un modelo de mercado de capitales en relación con la financiación de empresas, utilizando el problema de la ruina del jugador. Admiten la existencia de un suelo y un techo para la caja da la empresa, de modo que cuando se supera el techo, el empresario retira el exceso sobre un nivel medio para invertirlo fuera de la empresa, y cuando alcanza el suelo aporta la diferencia entre éste y el nivel medio, con fondos procedentes de fuera de la empresa. Se puede generalizar el modelo de Orr y Miller utilizando un modelo que generaliza a su vez el problema de la ruina del jugador, en el que se supone que dos jugadores A y B, apuestan en un juego en el que A tiene las probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_a$ de ganar 1, 2, ..., a pesetas, y las probabilidades $p_0, p_{-1}, \ldots, p_{-b}$ de no ganar ni perder, o de perder 1, ..., b, pesetas respectivamente. El juego se termina cuando las reservas de A son inferiores a b pesetas o las de B inferiores a a pesetas. Es curioso que el planteamiento matemático de este problema conduce a ecuaciones en diferencias finitas lineales y de coeficientes constantes, cuyo segundo miembro es una delta de Kronecker. Son las homólogas de las ecuaciones diferenciales que describen las oscilaciones impulsivas en los circuitos eléctricos por parásitos, y en las conducciones de agua por golpes de ariete, para las que la delta de Dirac juega el mismo papel que para las anteriores, las deltas de Kronecker.

Los procesos estocásticos son muy apropiados para describir las distribuciones de la renta y la dinámica de poblaciones, emigraciones, movilidad social. Como caso curioso señalaremos que surgen variables aleatorias singulares de función característica no igual a la unidad en el punto cero, que significa que tiene una probabilidad no nula de valer infinito, en el problema de Galton de la extinción de un apellido y en el de extinción de una población cuando la natalidad es menor que la mortalidad. En el caso más complicado de un proceso estocástico bidimensional de natalidad y mortalidad, si la primera supera a la segunda, cuando el tiempo tiende a infinito, los números de nacidos y de muertos tienen una probabilidad no nula de ser infinitos, y la probabilidad complementaria, de seguir una distribución de probabilidad finita, convergiendo en este último caso el número de nacidos al de muertos. Estas variables aleatorias singulares se comportan respecto a la convergencia de probabilidad de manera distinta a las ordinarias, y mientras que se presentan en Demografía y Sociología, no se presentan en Física.

Los procesos estocásticos son también muy adecuados para describir cuantitativamente los hechos de la Medicina estadística, muy relacionada con lo social.

Al hablar de Economía y Sociología matemática no se debe omitir los juegos de estrategia, las programaciones lineal y dinámica, el análisis secuencial y en general la teoría de la decisión, pero nosotros vamos a incurrir en esta omisión, porque un estudio muy profundo y detallado sobre los procesos de decisión ha sido hecho por el profesor Ríos en su discurso de ingreso en esta Academia, estudio que ha prolongado en posteriores publicaciones. La teoría de grafos, con todo lo que le es afín: organigramas, árboles, relaciones de dominación (expresadas por las llamadas matrices sociométricas), redes de comunicación, etc., son de aplicación no ya sólo en Economía y Sociología, sino en actividades muy próximas, tales como son la organización científica del trabajo y del tráfico. Toda esta sutil trama de simpatías, de influencias de unas personas sobre otras, de la comunicación humana y del análisis jerárquico, que no son expresables en la forma cuantitativa de la matemática tradicional, han encontrado su medio de expresión idóneo en esta nueva matemática de relaciones que es la teoría de los grafos. En otras ocasiones nos hemos ocupado de las fuertes interacciones entre desarrollo matemático y las formas sociales y políticas, ahora solamente señalaremos que es curioso que la teoría de grafos, tan importante para la organización científica de la policía, no se ha desarrollado en el siglo XIX, en la época célebre de las sociedades secretas y de las conspiraciones románticas, sino mucho más tarde. Como ejemplo curioso dentro de este campo, se puede citar el de la teoría matemática de las coaliciones electorales, que permite definir en términos de la teoría de conjuntos la figura del dictador y del derecho de veto, el voto acumulativo, y dar una medida del poder electoral de un individuo o grupo de individuos, como cociente entre el número de coaliciones en las que es clave y el número total de coaliciones posibles. Por ser clave en una coalición, se entiende que si el individuo o grupo de individuos se retira de la coalición, ésta deja de ser mayoritaria. Obsérvese la analogía entre la medida del poder electoral, que es debida a Shubik y Shapley, y la definición clásica de probabilidad de Laplace como cociente entre el número de casos favorables y el número total de casos posibles.

Se encuentran ejemplos muy notables de aplicación de los grafos a las Ciencias humanas en el libro del profesor Ballestero.

Los economistas utilizan cada vez con más frecuencia el análisis dimensional, pero no sé si para las dimensiones de las magnitudes económicas se ha realizado una obra tan importante como la realizada por el profesor Palacios para las magnitudes físicas. Me parece que el análisis dimensional en Economía no es solamente una forma elegante de hablar, sino que ya va siendo un instrumento eficaz de investigación, mámixe después de la publicación del libro de Jong sobre esta materia. Por el contrario, me parece aún muy rudimentario el empleo del principio de la mínima acción en Economía.

La teoría de la producción y el análisis marginalista tienen, aparte de su interés intrínseco muy grande, un interés histórico, porque es seguramente la primera aplicación importante no solamente del método matemático, sino también del razonamiento matemático en

Economía. El análisis marginalista es compatible con el determinismo y el indeterminismo. En el último caso se emplea el cálculo comparativo de esperanzas matemáticas, y en el primero los métodos de las funciones de n variables y de las formas cuadráticas, cuya consecuencia más importante es el cálculo de los efectos de sustitución entre bienes y factores de la producción, que ha sido llevado a una forma muy perfecta por Hicks. Con el advenimiento de la programación lineal se ha desarrollado el análisis de las actividades económicas, cuyos dos aspectos fundamentales son escoger los programas óptimos cuando los factores son fijos y los precios de lo productos dados, y cuando las proporciones de la demanda son fijas; es un instrumento muy adecuado para estudiar la conveniencia de la fusión de empresas, de la adquisición de patentes, de la especialización (efecto Ricardo) en el problema directo; y en el dual para determinar los llamados precios contables, como son el coste de la mano de obra fija, la renta de la tierra, la tasa interna del interés o precio por el uso del capital invertido en los factores adquiridos.

Muy relacionada con la anterior está la teoría de la utilidad que arranca de Pareto y ha sido axiomatizada en forma muy perfecta por Wold en su «Análisis de la Demanda», como ejemplo de sus consecuencias, se puede citar el efecto Slutsky, que consiste en que el efecto del cambio de un precio aislado sobre la demanda tiene dos componentes, una es un efecto de renta, en virtud del cual el aumento del precio corresponde a una reducción de la renta del consumidor y por tanto a una reducción de la demanda de los bienes superiores y un aumento de la demanda de los bienes inferiores. La otra componente es un efecto de sustitución clásico. Como consecuencia de lo anterior a veces para bienes inferiores y niveles bajos de renta, se da la paradoja de Giffen que consiste en que un aumento del precio de un bien inferior hace que aumente su demanda en vez de disminuir. Se utilizan los mismos métodos matemáticos antes citados, tanto en la teoría aislada de la demanda como en la teoría conjunta del consumo y de la producción. Son característicos de la teoría de la utilidad los mapas de indiferencia y la independencia respecto a la métrica utilizada, ello nos hace suponer que quizás llegue el día en que en esta parte de la Economía matemática encuentren aplicación los espacios «ecartizados» (no métricos) en los que no puede definirse una distancia, pero sí un «ecart» o desviación, que toma sus valores en un conjunto ordenado.

Intimamente ligada a la teoría de la utilidad se encuentra la teoría del riesgo, que arranca de la paradoja de San Petesburgo de Bernoulli y de su definición de «esperanza moral», hasta adquirir recientemente una forma axiomática muy rigurosa y parecida a la de la teoría de la utilidad; en ella se tiende a establecer un equilibrio entre la maximización del valor medio, que mide el beneficio, y la minimización de la varianza, que mide el riesgo, cuando se enfocan los problemas con la óptica del inversionista prudente, que es lo usual; pero también se pueden enfocar con la óptica del inversionista jugador y entonces se busca un equilibrio entre las maximizaciones del valor medio y de la varianza: se presenta así una dualidad en la representación gráfica de los mapas de indiferencia, según se adopte una u otra óptica. Una de las más brillantes exposiciones de la teoría del riesgo se encuentra en el libro de Markowitz «Portfolio Selection», que escrito para las necesidades de la economía capitalista, han sido adoptados sus criterios a la economía socialista.

Llegamos por este camino a las fronteras de una teoría matemática de las emociones, que pudiéramos llamar Noofísica, tomando este neologismo de la filosofía de Teilhard de Chardin que llama «noosfera» a la capa del pensamiento reflexivo. La cual separa la teoría de las sensaciones (Biofísica y Psicofísica), de las ciencias humanas.

Analizar las repercusiones que sobre la Lógica tiene el creciente proceso de relativización de la verdad, que lleva consigo las nuevas formas del pensamiento matemático, nos llevaría muy lejos, pero sí quiero concluir este discurso señalando la crisis que se apunta en los principios de contradicción y de identidad. Desde que se descubrieron las estructuras topológicas de las lógicas bivalente, intuicionista de Brouwer-Heyting y modal de Lewis (la estructura algebraica era conocida con anterioridad), estaba abierto el camino a una lógica relativista dual de la institucionista, en la que se mantiene el principio del tercero excluido y se sacrifica el principio de contradicción. En ella aun cuando para las proposiciones simples no vale el principio de contradicción, se pueden construir proposiciones compuestas absolutamente verdaderas, para las que sí vale, cuya negación es falsa. La debilidad en el principio de identidad estriba en el empleo de la palabra *todo* en sus leyes más importantes, que si no ofrece dificultades en las definiciones predicativas, sí las ofrece en las definiciones constructivas, para las que a veces carece de significado operacional.

Hemos designado por $\sigma(x)$ la distribución no schwartziana:

$$\sigma(x) = \underset{a \to 0}{\text{G-lim}} \sqrt{\frac{a}{\pi}}\, e^{-a x^2} \neq \underset{a \to 0}{\text{0-lim}} \sqrt{\frac{a}{\pi}}\, e^{-a x^2} = 0 \qquad [40]$$

que se distingue de la distribución schwartziana delta de Dirac, que es la misma [40] cuando se sustituye cero por infinito en el límite, en que para esta última existe el G-límite (límite generalizado), pero no el 0-límite (límite ordinario), mientras que para la primera existe el G-límite que es distinto del 0-límite que vale cero. Hechos parecidos los hay en el Cálculo de Probabilidades y en los espacios de Hilbert y de Banach generalizados, definidos por espacios cocientes de espacios de sucesiones en espacios ordinarios de Hilbert y de Banach, para una cierta relación de equivalencia, con un cambio de la topología que ya no es la de la norma. Por ejemplo, el cero del espacio de Hilbert se disocia en un subespacio G 0, del que todos los puntos tienen sus coordenadas nulas, pero que son distintos entre sí en su comportamiento respecto al espacio dual de las aplicaciones lineales y continuas sobre el cuerpo de los números complejos. Hechos como éste y como el expresado por [40] nos autorizan a decir mitad en broma y mitad en serio que no siempre cero es igual a cero.

Como curiosidad vamos a señalar una analogía entre la Matemática y el lenguaje. De las tres expresiones del lenguaje ordinario: «saber todo de nada», «saber nada de todo» y «saber nada de nada», solamente tiene sentido la última; las dos primeras, aunque usadas, parecen metáforas. Y así Bernard Shaw define al especialista como una persona que sabe cada vez más sobre cada vez menos, hasta llegar a saber todo de nada; decía en mi libro «Teoría de la investigación matemática», al tratar de especialización y enciclopedismo, que parafraseando a Bernard Shaw se puede definir al enciclopedista como una persona que cada vez sabe menos sobre cada vez más, hasta llegar a saber nada de todo. La expresión, la única con auténtico sentido, «saber nada de nada» sería la imagen del sumo ignorante; e incluso cabe una cuarta expresión, también con sentido, que es «saber todo de todo», que es la imagen del omnisciente. Tenemos pues que las cuatro expresiones anteriores: definiciones de los casos extremos del especialista, del enciclopédico, del ignorante y del omnisciente son las homólogas de cuatro objetos matemáticos, que son las distribuciones delta de Dirac, sigma [40], el conjunto vacío y el universo del álgebra de Boole, claramente diferenciados entre sí, perfectamente definidos y conocidos por sus propiedades.

Algunas de las ideas que acabamos de exponer las hemos dado forma matemática, a unas en memorias y libros ya publicados, y a otras en memorias todavía inéditas.

DISCURSO DE CONTESTACION

DEL

EXCMO. SR. D. SIXTO RIOS GARCIA

Al concederme por primera vez la Sección de Exactas de la Academia el honor de contestar a un nuevo académico, constituyó para mí especial satisfacción que éste fuera un antiguo amigo, el ingeniero D. Darío Maravall Casesnoves.

Sin duda Maravall se hace acreedor a la simpatía y el afecto general por esa su cualidad más saliente de modestia no fingida. Aún recuerdo la expresión inconfundible de su gesto cuando me comunicó, casi asustado, que nuestro eminente compañero Navarro Borrás había decidido proponerle para la vacante que acababa de producirse. Su bondad, su talento ordenado, su capacidad de trabajo, hacen de él una auténtica vocación hacia las tareas académicas, que no podíamos perder, y por esto hoy le tenemos entre nosotros, y yo paso a hacer, siguiendo la costumbre tradicional, su elogio académico.

Anuncio, desde ahora, mi propósito de evitar en estas notas biográficas el empleo de adjetivos encomiásticos que tantas veces tratan de convertir en oro lo que sólo es oropel.

Al terminar Maravall el bachillerato con premio extraordinario, en 1940 decide hacerse ingeniero agrónomo, y al año siguiente de haber tomado esta decisión cursa el primer año en la Escuela. Se dice que no ha habido otro caso tan rápido de ingreso, antes de la reforma de la enseñanza técnica, en una época en que la resolución de problemas de matemáticas era la clave del ingreso. Simultáneamente, arrastrado por su afición a la Matemática, estudió la carrera de Ciencias Exactas, y al terminarla fue becario durante dos años en el Instituto «Jorge Juan» de Matemáticas, del C. S. I. C.

Tras seis años en Salamanca, que le pusieron en estrecho contacto con los problemas técnicos y económicos de la agricultura provincial, vino a Madrid, estando primero en la Sección de Ordenación y Fomento de la Producción Agraria y después en el I. N. I. A., dedicándose fundamentalmente a la investigación de la Matemática aplicada a la Agricultura, la Estadística y la Economía.

Doctor Ingenero Agrónomo y Doctor en Ciencias Exactas, ganó por oposición la cátedra de Física de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos de Madrid, que desempeña en la actualidad.

Cuando la Escuela de Estadística de la Universidad de Madrid organizó, seguramente por primera vez en España, las enseñanzas de Estadística aplicada a la Física, fue designado Maravall profesor de dicha asignatura.

Ha desempeñado otras actividades docentes aparte de las específicas de las cátedras antes mencionadas, tales como las de dictar varios seminarios y ciclos de conferencias sobre diversos aspectos de la Matemática Pura y Aplicada en la Universidad de Verano de Santander, Escuela de Ingenieros Agrónomos, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Instituto de Investigaciones Agronómicas, Instituto de Ingenieros Civiles, Colegios Mayores Universitarios, etc.

Aun cuando su actividad profesional y docente ha sido variada, siempre ha tenido como norte buscar nuevos campos para la aplicación de las matemáticas y nuevas fuentes de problemas matemáticos, siendo su preocupación constante las estructuras matemáticas yacentes en el fondo de los problemas reales del mundo material o de la actividad humana. De manera que aunque en apariencia resulten a veces muy distanciadas entre sí las esferas de su actividad investigadora, existe un denominador común, en forma de estructura matemática que le da coherencia y unidad.

No solamente le ha preocupado la investigación, sino también la didáctica y la enseñanza de la Matemática; es miembro de la Comisión Nacional de Matemáticas Aplicadas. Fue designado por la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias para estudiar las relaciones entre la Universidad y las Escuelas de Ingenieros, y también para redactar el informe sobre el estado actual de la Estadística aplicada a la Biología, para el Congreso de Oporto, que fue publicado en los Anales del mismo.

A fines de 1963, la O. C. D. E. proyectó un Seminario internacional de Matemáticas Aplicadas, y con tal motivo en los distintos países miembros de la misma se formaron Comisiones Nacionales de Matemáticas Aplicadas, formando Maravall parte de la española. Las distintas Comisiones Nacionales, durante 1964 prepararon voluminosos y documentados informes sobre múltiples aspectos de la formación matemática de los ingenieros. A cada nación se le encomendó un informe monográfico específico, correspondiendo a España el referente a Estadística y Cálculo de Probabilidades. La Comisión española nos encomendó a Maravall y a mí la redacción de dicho informe monográfico específico. La lectura de este informe en la Asamblea plenaria de París, celebrada en enero de 1965, fue muy satisfactoria, pues se acordó su publicación, traducido al inglés y francés.

La obra realizada hasta la fecha por el profesor Maravall se compone de diez libros y ochenta y ocho memorias y trabajos de investigación sobre Matemáticas Puras y Aplicadas y Física.

Sus trabajos sobre la Teoría de la Relatividad comienzan con la solución de las ecuaciones de campo para medios dotados de simetría cilíndrica, en el caso de fluidos, partículas independientes y del vacío. Al hablar de simetría cilíndrica se refiere a las tres coordenadas espaciales, independientemente de la coordenada temporal, a diferencia de Levi Civita y otros autores, que al hablar de simetría cilíndrica se refieren a una simetría hipercilíndrica en el espacio de cuatro dimensiones, desempeñando el tiempo el papel de coordenada ángulo polar. Trabajos que prolongó con los de resolución de las ecuaciones de campo en el interior y en el exterior de esferas huecas o macizas dotadas de spin o pulsátiles. En todos ellos el problema fundamental es el cálculo del elemento lineal, que define la métrica no euclídea del espacio-tiempo. Siguiendo en esta línea de pensamiento, combina los resultados de la relatividad general respecto a la existencia de un universo finito, y un tiempo de expansión del mismo también finito, con las relaciones de incertidumbre de Heisenberg de la Mecánica cuántica, relativas a la segunda cuantificación de la función de onda del electrón para establecer un modelo de Cosmología cuántica y relativista a la vez, con creación permanente de materia, y que introduce la constante de Planck en el cálculo del radio del universo y del tiempo de expansión.

La última etapa de la teoría de la relatividad es la construcción de una teoría unitaria de la gravitación y del electromagnetismo, problema que todavía no ha sido resuelto en forma unánimemente aceptada. Existen diversos ensayos, de los que el primero es el de Weyl, caracterizado por una geometría más general que la de Riemann, en la que no es invariante el sistema de aforo. Posteriormente se han concebido otros ensayos, y uno de ellos es el debido a Maravall, que se caracteriza porque se mantiene la invarianza del sistema de aforo y la métrica riemanniana, pero se cambia la definición de paralelismo de Levi Civita, que permite elaborar un cálculo diferencial absoluto más general que el clásico; en ambos la operación de diferenciación de pseudotensores coincide, pero no así la de los tensores, porque mientras en el clásico esta operación depende únicamente de las coordenadas del punto del espacio en que está localizado el tensor, en el nuevo depende también de la dirección según la cual se efectúa.

Sus trabajos de Matemáticas aplicadas a la Ingeniería se refieren a la teoría de las oscilaciones eléctricas y mecánicas y de los acoplamientos giroscópicos, entre los que destacan una teoría de las autooscilaciones de flexión-tracción, que tienen interés desde el punto de vista del Ingeniero Agrónomo, porque pueden ser la causa de ciertos efectos catastróficos, tales como la ruptura de los enganches de los arados a los tractores y, en general, de piezas que suficientemente calculadas para resistir las tracciones que tienen que soportar, se rompen por flexión, como consecuencia de una flexión supletoria inducida por la tracción, ya sea por resonancia, o por entrar en régimen de autooscilación. Dentro de la agronomía, pero en un campo muy alejado del anterior, como consecuencia de unos trabajos prácticos que le enconmendó la Cámara Agrícola de Madrid, relativos al catastro, encontró una analogía de tipo formal matemático entre una amplia gama de fenómenos físicos y otra más restringida de fenómenos econométricos, consistente en la presencia de oscilaciones de relajación en series estadísticas temporales, de la misma naturaleza que las que se encuentran en la variación del nivel de agua en un vaso de Tántalo y de la variación del número de «agujeros» (deficiencias de electrones) en la pantalla fotoeléctrica del iconoscopio de Zworykin.

Sus trabajos sobre las ecuaciones diferenciales se refieren a las oscilaciones hereditarias y teleológicas, que se diferencian de las lineales clásicas en algunas propiedades, tales como las siguientes: pueden existir soluciones en número infinito numerable; pueden presentarse discontinuidades en las soluciones; pueden no existir oscilaciones libres y sí forzadas. Las soluciones al igual que en el caso de las oscilaciones lineales son exponenciales, cuyos exponentes son las raíces de una ecuación trascendente en vez de algebraica. Les dio el nombre de teleológicas, porque en ellas es el futuro el que condiciona la configuración del presente y no el pasado. Ha extendido estas investigaciones a sistemas de ecuaciones integrales, y a las ecuaciones integrodiferenciales en derivadas parciales. También se ha ocupado de las oscilaciones fraccionarias, así llamadas porque son soluciones de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, pero de orden fraccionario en vez de entero, y ha demostrado que para ellas las funciones de error integral de variable real y compleja desempeñan un papel análogo al de las funciones exponencial y trigonométrica en las oscilaciones lineales clásicas.

Sus trabajos sobre procesos estocásticos y el movimiento browniano y sus aplicaciones son numerosos. Ha encontrado nuevas propiedades de la adición de variables aleatorias en número aleatorio y de la adición de vectores aleatorios en espacios enedimensionales, así como de la estabilidad de sus leyes de probabilidad y de las transformadas integrales a ellos asociadas. Como consecuencia de la resolución de estos problemas ha encontrado propiedades de funciones trascedentes superiores difíciles de obtener por vía directa: poniendo de relieve cómo en esta parte de las probabilidades las funciones de Bessel desemepeñan un papel tan importante como el que tradicionalmente vienen desempeñando en la Física matemática. Ha estudiado la adición de variables aleatorias en número aleatorio en el caso continuo, lo que se puede denominar integración de una variable aleatoria en un intervalo aleatorio.

Es bien sabido que hoy los procesos estocásticos son una de las partes más vivas e importantes de las Matemáticas aplicadas. En Economía, en Biología matemática, en Física estadística, no se puede dar un paso sin recurrir a los procesos estocásticos. Maravall los ha aplicado a problemas biológicos (propagación de epidemias, genética de poblaciones, crecimiento demográfico), económicos (renta aleatoria), físicos (variación del número de electrones positivos en el seno de la materia), ideando modelos bidimensionales, desarrollo simultáneo de dos procesos estocásticos y condiciones iniciales aleatorias.

En sus investigaciones sobre los procesos estocásticos ha tenido necesidad de resolver ciertos problemas concretos, tales como la integración de ecuaciones integrales singulares, y de cadenas doblemente recurrentes de ecuaciones diferenciales, y el cálculo de integrales múltiples recurrentes. Los procesos estocásticos han proporcionado a las ecuaciones entre derivadas parciales de primer orden una importancia práctica para el estadístico o el ingeniero, tan grande como la tienen para el físico las ecuaciones entre derivadas parciales de segundo orden. Se ha puesto de relieve la analogía entre dichas ecuaciones entre derivadas parciales y las cadenas recurrentes de ecuaciones diferenciales; analogía que es distinta de la que ya conocían los físicos, que existe entre la ecuación de Jacobi y las ecuaciones canónicas de Hamilton.

Sus investigaciones sobre el movimiento browniano de traslación y de rotación en el espacio ordinario y en espacios de n dimensiones, y sobre los movimientos aleatorios impulsivos, en los que ha hallado la correlación entre posición y velocidad, están íntimamente relacionados con los anteriores, y los ha aplicado a fenómenos físicos tales como los de sedimentación y polución. Ha distinguido entre procesos estocásticos continuos de primera y segunda especie; los últimos son aquellos en los que el crecimiento de la variable aleatoria igual puede ser hacia la derecha que hacia la izquierda, tal es el caso de la renta de una persona o de las coordenadas de un partícula en movimiento aleatorio, los cuales se rigen por la ecuación de Fokker-Plank, y han sido muy estudiados; pero los de primera especie son aquellos en los que la variable solamente puede crecer o permanecer constante, tal es el caso del crecimiento de un órgano vivo, o del número de átomos radiactivos desintegrados, los cuales se rigen por una ecuación entre derivadas parciales que ha planteado él y que, a diferencia de la de Fokker-Plank, es de primer orden.

Sus aportaciones más importantes a la Matemática financiera y actuarial han sido la introducción en las mismas de cadenas no markovianas, en la amortización de obligaciones y en la supervivencia de grupos de cabezas y de la teoría de distribuciones en la amortización de préstamos y en los seguros sobre la vida humana.

Sus investigaciones sobre Topología y Teoría de las distribuciones versan principalmente sobre una generalización del álgebra diferencial exterior a anillos diferenciales abstractos; teoremas del punto fijo; topologías generalizadas y generalizaciones de los espacios de Hilbert y Banach, y sobre una lógica, topológicamente dual de la intuicionista de Brouwer-Heyting.

Ha llamado aplicaciones U-contractivas a las que generalizan a los espacios uniformes de Weil, las aplicaciones contractivas de los espacios métricos y ha dado para las mismas un teorema del punto fijo, que es homólogo del de los espacios métricos, del que tanto uso se ha hecho para la demostración de teoremas de existencia y de unicidad de la solución en teoría de funciones, ecuaciones diferenciales, etcétera.

Partiendo de un par de espacios topológicos, de los que uno de ellos es de Haussdorf, y de las aplicaciones continuas del primero en el segundo, ha construido unos espacios abstractos dotados de una nueva topología; nacen así clases de topologías generalizadas que recuerdan las clases de funciones de Baire. Ha generalizado las funciones semicontinuas inferior y superiormente, definiendo las funciones p-semicontinuas y semicontinuas en media que forman un espacio vectorial.

Generalizando la teoría de los triedros suplementarios del espacio euclídeo ordinario al espacio de Hilbert, ha estudiado las propiedades de las sucesiones biortogonales discretas y continuas y sus aplicaciones al desarrollo en serie y en integral de las funciones de cuadrado sumable, dando un criterio de completitud basado en la distribución delta de Dirac. Ha ampliado el espacio de Hilbert considerando el espacio cociente de sucesiones en un espacio ordinario de Hilbert, respecto a una determinada relación de equivalencia, con una topología que no es la de la norma, y surge así un espacio de distribuciones de cuadrado sumable, cuyas transformadas de Fourier ha calculado. Así como las funciones pueden ser simultáneamente sumables y de cuadrado sumable, por el contrario, ha demostrado que las distribuciones que no sean funciones no pueden ser simultáneamente sumables y de cuadrado sumable. Este espacio , y no el ordinario de Hilbert, es el de las funciones de onda de la Mecánica cuántica.

Sus libros, en número de diez, versan sobre las siguientes materias: Física matemática, Mecánica y Cálculo tensorial, Teoría y aplicaciones de las oscilaciones lineales y no lineales, Ecuaciones diferenciales y Matrices, Geometría analítica y proyectiva, Procesos estocásticos y Movimiento browniano y Filosofía matemática.

De la simple enumeración de sus títulos se ve la imposibilidad de entrar en detalles sobre los mismos, sin tener que dedicarle un tiempo de que no disponemos, máxime si se tiene en cuenta las materias tan diversas de que tratan, que van desde las cinemáticas y geometrías no euclídeas al cálculo simbólico, la transformada de Laplace y las distribuciones; desde la Física no lineal a la Biología matemática; desde las transformaciones de contacto y los invariantes integrales a la investigación operativa; desde problemas muy concretos de Ingeniería a temas generales de Filosofía.

Algunas de sus investigaciones han sido citadas en textos de otros autores; así, por ejemplo, en el segundo tomo del libro «Relativity», de Synge, editado por North Holland y distribuido por Interscience Publisher de U. S. A., figuran dos de sus trabajos sobre la Teoría de la Relatividad general.

Igualmente, en el libro de Tonnelat, «Les verifications experimentaux de la relativité», editado por Masson, figuran citados dos de sus trabajos. En el libro de «Funciones de Bessel», de Rey Pastor y Castro Brzezicki, hay unas ocho páginas que reproducen investigaciones de Maravall, cuyo nombre es citado en el texto unas quince veces. Este libro, que tuvo una gran acogida en *Zentralblatt* y *Mathematical Reviews*, ha sido citado en textos de otros autores extranjeros, concretamente en el libro de Luke, «Integrals of Bessel Functions» (editado por McGraw-Hill).

En el libro «Mecánica no lineal», del profesor Castro Brzezicki, seis páginas reproducen investigaciones de Maravall relativas a oscilaciones de relajación en Econometría. También dicho libro fue muy bien acogido por *Zentralblatt*.

También en libros de texto en la enseñanza universitaria hay citados sus trabajos como, por ejemplo, en los libros de Rey Pastor y Castro editados por Saeta, «Elementos de Matemáticas» y «Complementos de Matemáticas».

En el libro de H. Wold, «Time Series and Stochastics Processes», editado por el M. I. T. (Instituto Tecnológico de Masachussets), se citan cinco de sus trabajos.

El profesor Grimm de Jena ha calificado «de importantes contribuciones a los procesos estocásticos» sus publicaciones de 1958 y 1959, y el profesor Richter, en los *Mathematischen Nachrichten* de la Academia de Berlín (t. 29, cuad. 5-6, pág. 347, 1965), ha escrito: «Entre las nuevas investigaciones, ante todo son dignos de destacarse los trabajos de D. Maravall». Se refiere a procesos estocásticos (adición de v. a. en número aleatorio y sus generalizaciones).

Parece evidente, después de esta resumida exposición de méritos y trabajos científicos del profesor Maravall, que éste llega a la Academia en un momento de su vida científica en que se encuentra en plena capacidad de producción, y es de esperar que siga contribuyendo con sus trabajos al enriquecimiento de nuestra revista y memorias.

Pasemos ahora, siguiendo la tradición, a glosar algunos de los temas de su brillante y meditado discurso.

El propio autor me brinda una puerta de entrada a través de los procesos de decisión, que constituyen mi tema central de trabajo y el de algunos de mis colaboradores desde hace algunos años.

Es, a mi juicio, este campo de los procesos de decisión, uno de los más importantes campos matemáticos nuevos, desarrollados por la necesidad de resolver problemas de la Economía.

Y decimos *nuevo*, porque realmente nos parece importante destacar este aspecto de *emancipación* de las ciencias socioeconómicas en su elección de métodos matemáticos, y como justamente el progreso en estos dominios ha sido más importante y espectacular cuando se ha prescindido de las analogías mecánicas, físicas, etc., y han surgido matemáticos de la potencia de von Neumann, Pontriaghin o Bellman, capaces de aportar ideas matemáticas originales, nuevas y *ad hoc* y no traídas de otros campos.

La tradición matemática de los siglos XVIII y XIX, con sus éxitos rotundos en los campos de la Física, la Mecánica y la Ingeniería, fue sin duda perjudicial para las ciencias sociales, ya que al tratar de aplicar a estos campos modelos rígidos, similares a los de la Mecánica newtoniana, sólo se logró una mayor desconfianza e incredulidad de los estudiosos de la Economía.

Como ha dicho Hermite: «Un descubrimiento analítico se produce en el momento necesario para hacer posible cada progreso nuevo en el estudio de los fenómenos del mundo real».

A situaciones y problemas nuevos, ideas, conceptos y métodos nuevos. Veamos algún ejemplo. La noción de utilidad en diferentes contextos de la Economía presenta una cierta analogía con la función potencial de la teoría de los campos gravitatorios y electromagnéticos, pero hay allí un ingrediente nuevo, que es la idea intuitiva de *preferencia*, y hasta que tal idea no se formalizó, gracias a las nociones algebraicas de orden completo y de orden parcial, no tuvo la teoría del valor o utilidad apenas más que un interés descriptivo. Hoy, gracias a los trabajos de von Neumann, Debreu, Aumann, etc., la teoría de la utilidad es un capítulo importante de la Economía, fundamental en todos los problemas de optimación de un proceso de decisión y con aplicaciones prácticas de interés, tanto en las decisiones individuales como colectivas, al nivel de la empresa, de la alta administración y del gobierno de un país.

Otro ejemplo: la teoría del oligopolio ocupaba en los libros clásicos de Economía un gran número de páginas en que se estudiaban une serie de reglas asimétricas de respuesta en que cada participante asignaba a los demás un comportamiento más automático que el suyo propio .Hubo de surgir la teoría de juegos de estrategia de von Neumann para dar a éste y otros problemas económico-sociales una formalización matemática apropiada, gracias a la introducción de toda una serie de conceptos nuevos y originales, como son los de partida, movimiento personal y movimiento aleatorio, conjunto de información, consecuencia final y regla de pago, con las que establece von Neumann la estructura básica de cualquier juego más o menos complejo, que se representa mediante un grafo de tipo árbol. La noción de *estrategia pura* resulta de la especificación de los distintos movimientos que puede hacer un jugador dentro de los posibles, tras cada movimiento eventual del oponente. Así, podríamos imaginar que, por ejemplo, un jugador de ajedrez que no pudiera estar presente en una partida, sería teóricamente capaz de dar una serie de normas para que un representante suyo actuase de una manera unívoca y automática según ellas.

La noción de estrategia pura es el puente para reducir los juegos más generales a juegos rectangulares en dos o *n* dimensiones, mediante el proceso de normalización. Desde el punto de vista práctico, la enumeración de todas las estrategias puras puede ser una labor de dificultad práctica insuperable, aun con los más poderosos computadores actuales. De aquí el interés del desarrollo de la teoría de juegos polietápicos con sus correspondientes ecuaciones funcionales recurrentes, a los que hemos dedicado una reciente memoria publicada por esta Real Academia (*). La combinación de estos procesos polietápicos con la idea de aprendizaje conduce a los modelos llamados adaptivos, en que las probabilidades de paso no son

---

(*) S. Ríos: *Procesos dinámicos de decisión en concurrencia* (Memoria de la Real Academia de Ciencias, 1967). Ver también *Programmation Sequentielle en concurrence*, de S. Ríos e I. Yáñez, en «Research Papers in Statistics» (John Wiley, 1966) y la Tesis de I. Yáñez.

conocidas y se van perfeccionando sus estimaciones a través del desarrollo del proceso y del conocimiento que se adquiere del mismo.

Este punto de vista ha sido adoptado por Murphy («Adaptive Processes in Economic Systems») para tratar el problema de la gestión de un capital que puede ser objeto de inversiones diversas con diferentes rentabilidades r_i cuyas probabilidades p_i son estimadas al comienzo del proceso y reestimadas en etapas sucesivas tras las decisiones adoptadas y los resultados observados.

Se trata, en definitiva, de determinar la sucesión de decisiones que hacen máxima la utilidad del estado final del sistema, que ha sido influido por la sucesión de decisiones y estados precedentes. Estos trabajos han sido impulsados especialmente por Bellman en América, y Pontriaghin en Rusia.

Los juegos de estrategia constituyen uno de los tipos de *modelos* introducidos en Economía, Sociología, Ciencia militar, para reducir el estudio de la realidad compleja a esquemas matemáticos resolubles. Es interesante observar que todavía en el siglo XVIII el mundo físico y el de las ideas eran considerados como partes de un universo racionalmente construido e inteligible. Y así, por ejemplo, la ley de gravitación universal se consideraba razonable y exacta, sin encontrarse en escritos de aquella época ninguna sugestión de que pudiera ser solamente una versión simplificada y aproximada de la realidad. Puede decirse que la idea de modelo, que hoy es básica en la Economía y Ciencias sociales, se ha hecho familiar en todas las ciencias matematizadas gracias, de modo muy especial, a los trabajos de los economistas matemáticos, y que luego ha pasado a la Biología, la Física, etc.; pero manteniéndose aún en nuestros días en la Física la tendencia a eliminar la locución *modelo* cuando se trata de teorías antiguas, sólidamente establecidas, en que es frecuente encontrar una mezcla de teoría y situación empírica en un lenguaje común realístico, no siempre suficientemente claro. Y así leemos en el prólogo de la Mecánica estadística de Kintchine, refiriéndose a Gibss: «El autor considera que su objetivo no es establecer teorías físicas, sino construir *modelos mecánicos estadísticos* que tengan alguna analogía con la Termodinámica y algunas partes de la Física».

La consideración de los procesos adaptivos, de que hemos hablado hace un momento, enlaza con el punto de vista cibernético, cuya inspiración viene de la Biología y de los sistemas de control profusamente estudiados en Tecnología.

Conviene observar que en cualquier planta industrial, empresa, etcétera, se representan dos tipos de decisiones: de rutina y de nivel superior.

En las primeras, más que un modelo que hayamos de resolver en cada ocasión, interesa la construcción de una rutina o mecanismo que tome él mismo en cada etapa las decisiones mejor adaptadas a la evolución de los sucesos. Somos así conducidos a considerar la empresa o la administración, como un *sistema* en que hemos de tener en cuenta las relaciones entre los elementos del mismo y las respuestas a las perturbaciones venidas del ambiente para el reglaje de los órganos de control, que permiten la vigilancia y rectificación del funcionamiento.

Un ejemplo típico sencillo nos lo da la teoría del inventario o de los «stocks». Esta teoría es aplicable a todos los sistemas abiertos en que hay un intercambio de material, energía o informaciones entre el sistema y el ambiente y éste es parcialmente controlable. Si un incremento en la tasa de ingreso va acompañado de un incremento de beneficio o de pérdida, estamos ante las condiciones de un proceso de inventario.

La formulación matemática ha dado lugar a una copiosísima bibliografía de más de 200 modelos, no todos esencialmente distintos.

Dentro del campo industrial sabemos que esta teoría encuentra aplicaciones a fenómenos tan diversos como la regulación de entradas y salidas en un almacén, adquisición y uso de capital operante, contratación y entrenamiento de personal de trabajo. Asimismo, se ha aplicado la teoría al proceso metabólico de un ser vivo a las operaciones de un centro de cálculo o de una central hidroeléctrica a la circulación monetaria en un banco. Todos éstos son *sistemas* en el sentido matemático de la palabra, es decir, conjuntos de entes o seres (inanimados o vivos) que reciben ciertos ingresos, que están restringidos a actuar concertadamente a fin de producir ciertas salidas y tienen el objetivo de hacer máxima una cierta función de las entradas y salidas.

Vamos así conducidos a la *Teoría general de sistemas* como un instrumento matemático de síntesis de la teoría económica y la econometría y cuya influencia no se limita a este campo, sino que está penetrando y logrando unificar otros campos, como la teoría de la comunicación, la teoría del control, la teoría del aprendizaje, la teoría de los algoritmos y del cálculo electrónico, la teoría de los autómatas, la teoría de la autoorganización, etc.

La teoría general de sistemas, construida a la manera de Nemytskii, que utiliza conceptos de Topología, Algebra y Probabilidades, o bien, la forma más abstracta dada por Mesarovic, son instrumentos que, si no del uso diario del economista, deben incorporarse a corto plazo a los cursos formativos en estas disciplinas, ya que constituyen también el esqueleto básico de toda exposición seria de la Cibernética.

Se supone generalmente en el estudio matemático de los procesos de decisión que la información es gratuita. Pero esto evidentemente no es cierto. Coincidiendo con la difusión de las grandes computadoras para el proceso de datos, se ha precisado esta realidad del coste de la información, que ha de tenerse cada día más en cuenta en la solución de los problemas de decisión.

Pero la empresa, como la administración, no es un centro de decisión único, sino un conjunto de centros de información y decisión coordinados de acuerdo con ciertos esquemas o grafos. Vamos así a la teoría de los *equipos de dirigentes* de Marschak, fundamental en los esquemas de organización de una empresa.

Al subrayar la importancia de estos problemas de información, debemos destacar el papel de la teoría de grafos en todos los aspectos de formalización de las relaciones de organización, que ha permitido dar una interpretación matemática y por tanto rigurosa y manejable, de una serie de nociones hasta ahora bastante imprecisas, como: organización jerárquica, organización democrática, estructura de diálogo, estructuras en staff y en línea, organización en comandos, circuitos de información, dirección de la información, retroacción de la información.

Toda esta metodología está contribuyendo a dar un carácter científico en línea con la I. O. a los estudios tradicionales de «organización».

La *teoría de grafos* es además el fundamento de una serie de técnicas denominadas PERT, CPM, etc., profusamente aplicadas hoy por ingenieros, arquitectos, administradores y militares en sus operaciones. Al considerar una operación compleja, como construir un avión o un edificio, descompuestas en operaciones elementales, se observa que existen relaciones de orden parcial por causas técnicas entre las mismas y que hay un gran número de maneras diferentes de, a partir de una situación inicial, llegar a la final. Determinar la trayectoria óptima desde el punto de vista del tiempo o del coste, etc., es un problema de I. O. que ha trascendido en estos años casi a la práctica corriente del ingeniero.

Sin embargo, donde mayor importancia tiene esta técnica es en las aplicaciones a los grandes proyectos de I. D. de un nuevo ingenio, o bien al plan de desarrollo de una comarca o de un país.

Cuando se ha querido utilizar la metodología de los modelos a fin de suministrar métodos en que el político pueda hacer previsiones aproximadas sobre el resultado de sus decisiones relativas a impuestos, inversiones, etc., se han seguido tres tendencias principales.

La más antigua, de que son tipo los trabajos de Tinbergen, trata de relacionar magnitudes macroeconómicas relativas a grandes sectores de la economía mediante ecuaciones en diferencias finitas estocásticas de naturaleza recursiva simultánea. El método desarrollado más tarde por Leontieff, utiliza matrices que relacionan los flujos de entradas y salidas de diversos sectores nacionales. Ambos han sido criticados y tienden a ser sustituidos por los llamados, por Orcutt, modelos microanalíticos en que se logra, gracias al progreso de los métodos estadísticos de encuestas por muestreo, de los métodos de Montecarlo y de los grandes ordenadores electrónicos, construir simulaciones de las unidades más elementales de la economía, que van integrándose a niveles cada vez más altos del individuo a la familia, de ésta a la empresa y al sector industrial con sus interacciones recíprocas, hasta llegar a una formidable simulación global de la economía de un país.

Estos estudios, que están en sus comienzos y que seguramente van a necesitar nuevos aportes de la Estadística matemática y de los computadores, los cito porque quiero hacer referencia a los mismos en relación con algunas observaciones que se hacen a la aplicación de la Matemática a las Ciencias sociales. Se observa, a veces, que un método de simulación asociado al uso de un buen computador es todo lo necesario para resolver cuantos problemas cuantitativos se presenten en Economía o en Sociología. Y aún se añade que es lo más rápido y sencillo. Este es, sin duda, el punto de vista del practicón. Con el método de simulación resolvemos rápidamente aquel caso particular, pero el conocimiento científico de los fenómenos lleva implícito el empleo de modelos explicativos que dan soluciones generales y la justificación del empleo de las Matemáticas para su solución.

El mérito principal de estos métodos de simulación consiste en permitir cambios en las variables que intervienen en la situación y obtener los resultados finales, de modo que hoy puede hablarse de verdaderos experimentos a gran escala en las Ciencias humanas. Citemos de paso, a este respecto, los notables trabajos de la System Developpment Corporation (S. D. C.) de Los Angeles (California), que ocupa a más de 300 investigadores, 2.500 empleados y 15 ordenadores potentes en el estudio experimental de los procesos de decisión en grupos humanos, de los que es típico el famoso proyecto Leviathan, en que los decisores humanos a nivel superior al robot son simulados por decisores humanos.

Una objeción al empleo de modelos es la compeljidad de los fenómenos economicosociales en que, se dice, las simplificaciones son tan drásticas que rayan en la caricatura. Pues bien, hoy encontramos sistemas y baterías de modelos de tan gran alcance que hacen considerar esta observación como superada. De otra parte si, como dice Bellmann, «hoy podemos resolver sistemas del orden de mil ecuaciones diferenciales y en los próximos diez años del orden de de las diez mil o quizá de las cien mil», podemos sonreirnos de los que tienen estos temores sobre la capacidad de acción de las matemáticas

Otra objeción se refiere a la disparidad entre las Ciencias naturales y las sociales. Dicen algunos, «mientras es razonable utilizar modelos estocásticos para representar el comportamiento de las moléculas o aún de los animales, es absurdo suponer que las mismas leyes valen para el comportamiento humano». Pero es precisamente porque el hombre es libre, que su comportamiento individual es imprevisible en cada acción particular y puede ser descrito en términos probabilísticos. Reiteradamente se ha visto, en apoyo de este punto de vista, al estudiar el comportamiento de grupos sociales, que tales comportamientos tienen las mismas propiedades que resultarían si los individuos determinaran sus acciones por ciertos mecanismos de azar. La teoría de probabilidades tendría que haber sido inventada para estudiar el comportamiento de grupos humanos, si no fuera anteriormente conocida.

Vemos así, con estos complementos al discurso de nuestro nuevo compañero, algunos ejemplos de conceptos y teorías que han sido creados por la necesidad de formular y resolver problemas de la realidad socioeconómica.

Cuando el gran economista americano I. Fisher escribió su notable tesis doctoral, pudo decir con justicia que apenas podían señalarse en todo el mundo cincuenta libros y artículos de cierto interés que aplicasen las Matemáticas a la Economía. Pero hoy el panorama es completamente distinto: se cuentan por millares los artículos y libros que contribuyen de un modo importante al progreso de la Economía y las Ciencias sociales gracias al empleo de la Matemática.

Pero como ha dicho el economista francés Allais, «el desarrollo actual de las Matemáticas en Economía es apenas nada respecto a lo que será dentro de muy pocos años».

Al dar la bienvenida a nuestro nuevo compañero, congratulémonos, pues, de que haya elegido este profícuo y prometedor campo para sus investigaciones actuales, y deseémosle larga vida y persistencia en el mismo.

LISTA DE PUBLICACIONES

DE

DARIO MARAVALL

LIBROS

1. *Ingeniería de las oscilaciones.*
2. *Ecuaciones diferenciales y Matrices*, incluyendo la transformación de Laplace y la teoría de las distribuciones.
3. *Mecánica y Cálculo tensorial*, incluyendo el Cálculo diferencial exterior y Topología algebraica.
4. *Geometría analítica y proyectiva* (dos tomos), incluyendo las Geometrías y Cinemáticas no euclídeas.
5. *Filosofía de las Matemáticas.*
6. *Problemas de Mecánica* (dos tomos), incluyendo los invariantes integrales y las transformaciones de contacto.
7. *Física matemática.*
8. *Teoría de la investigación matemática.*
9. *Métodos matemáticos de la Ingeniería*, en colaboración separada con el catedrático Sr. Castro, estando la parte del profesor Maravall dedicada a los procesos estocásticos, movimiento browniano, colas, epidemias y renovación industrial.

Todos ellos editados por Dossat.

Editado en Brasil por Globo:

10. *Teoría e Aplicações das Oscilações*, que incluye la Mecánica no lineal.

Concretamente, el Zentralblatt alemán, cuaderno I del tomo 92 (febrero 1962), ha dedicado un amplio comentario al primero de los libros.

En dicho comentario figuran frases como éstas: «... Contiene la exposición de una rica colección de problemas relativos a la teoría y técnica de las oscilaciones, entre los cuales hay varios debidos al propio autor». «... El nombre de las oscilaciones teleológicas fue introducido por el autor en la memoria...» «... es útil detallar los resultados de los capítulos X, XI y XII», y los detalla. Etc., etc., los capítulos X, XI y XII han sido extraídos de memorias del autor, se refieren a las oscilaciones hereditarias, y a las que ha llamado teleológicas y fraccionarias, y a las oscilaciones estocásticas.

MEMORIAS

Ha publicado ochenta y ocho trabajos de investigación en las revistas de la Real Academia de Ciencias, del Consejo Superior de Investigaciones Científicas, del Instituto Nacional de Investigaciones

Agronómicas, de la Asociación de Ingenieros Agrónomos y en Euclides, sobre Matemáticas puras y aplicadas a la Estadística, la Física, la Biología, la Economía y la Sociología.

La lista de sus títulos es la siguiente:

En la «Revista de la Real Academia de Ciencias»

1. *Nuevos tipos de ecuaciones diferenciales o integrodiferenciales. Nuevos fenómenos de oscilación.*
2. *Nuevos modelos de distribuciones y de procesos estocásticos*
3. *Algunos nuevos procesos estocásticos y sus aplicaciones.*
4. *L-álgebras, lógicas multivalentes y redes biónicas.*
5. *La G-compactación de un espacio topológico, las distribuciones y las corrientes.*
6. *Homología, cohomología y álgebra diferencial exterior generalizadas.*
7. *Fenomenología de la difusión, teoremas del círculo y de la esfera de la física de campo.*
8. *Lógica relativista.*
9. *Teorías estocásticas del interés, del usufructo y de la nuda propiedad. Cadenas no markovianas.*
10. *Teoría unitaria de la amortización. Aplicaciones de las distribuciones a la matemática financiera.*
11. *Teoría de las rentas aleatorias. Teoría unitaria del seguro.*
12. *Espacios aleatoriales. Espacios de Hilbert y de Banach generalizados.*

En la «Revista Matemática Hispano-Americana», del Consejo Superior de Investigaciones Científicas

13. *La aberración y la aceleración de la gravedad.*
14. *La no convergencia de la integral de Fourier y las ondas de discontinuidad en Física.*
15. *Teorema de unicidad de las ecuaciones integrales no lineales.*
16. *Teoría matemática de las funciones singulares de la Mecánica cuántica.*
17. *La estructura de los medios con simetría axial en la relatividad generalizada.*
18. *La métrica no euclídea del espacio-tiempo en el interior de una masa de fluido barótropo con simetría esférica.*
19. *Teoría relativista de la atracción de una esfera pulsátil o con spin.*
20. *Investigaciones teóricas sobre las funciones aleatorias de la microfísica.*
21. *Cuestiones de matemáticas aplicadas a la experimentación.*

22. *Movimientos aleatorios impulsivos y procesos estocásticos hereditarios.*
23. *Ensayo de teoría unitaria de la gravitación y del electromagnetismo.*
24. *La medida del contagio en Física y Biología.*
25. *La adición de variables aleatorias en número aleatorio y el proceso estocástico de la descendencia de un mismo progenitor.*
26. *Nuevos teoremas sobre el movimiento browniano y las oscilaciones estocásticas.*
27. *Cuestiones de Cinemática clásica.*
28. *Las bases matemáticas de los fenómenos físicos de polución y sedimentación.*
29. *G-topologías y teoría de las distribuciones*
30. *.Un nuevo formalismo de las funciones singulares o distribuciones de la Física y las transformadas de Laplace y de Fourier de N variables.*
31. *Aplicaciones contractivas en los espacios uniformes. Teorema del punto fijo.*
32. *Las aplicaciones T_2-contractivas en los espacios topológicos.*
33. *La maximización del provecho en la programación de créditos. Una aplicación de las cadenas de Markov a la Matemática Financiera.*
34. *El semigrupo de las distribuciones de frecuencia y la teoría analítica de la probabilidad.*

En «La Gaceta Matemática», del Consejo Superior de Investigaciones Científicas

35. *La aberración y la velocidad de la luz.*
36. *El flujo de energía y la dispersión del medio.*
37. *Sobre los invariantes comunes a una circunferencia y a una cónica.*
38. *Sobre la dinámica de los sistemas de masa variables.*
39. *El complejo cuadrático de las rectas de momento constante y otro problema de Mecánica clásica.*
40. *El problema de la aguja de Buffon en el espacio de N dimensiones.*
41. *Sobre la estabilidad del equilibrio definido por un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden y su interés en Biología.*
42. *Generalización de los teoremas de Guldin.*
43. *La función característica de cuatro algoritmos estocásticos.*
44. *El fenómeno biológico de la lucha por la existencia, la estabilidad de la economía capitalista y la predicción de la ley de Pareto.*
45. *Los aleatores.*
46. *Espacios G-métricos y grupos G-normados. La G-convergencia de las sucesiones no de Cauchy.*

En la «Revista Arquímedes», del Consejo Superior de Investigaciones Científicas

47. *Aplicaciones biológicas de las oscilaciones hereditarias.*
48. *Las oscilaciones de relajación en series estadísticas temporales.*
49. *Los límites de la concentración de la vida.*

En la Revista «Euclides»

50. *La cuantificación del espacio y del tiempo en Mecánica ondulatoria.*
51. *La cuantificación de la masa y de la velocidad y la incertidumbre del reposo absoluto en Mecánica ondulatoria.*
52. *Las consecuencias cosmológicas de la teoría de la discontinuidad de las variables de la Mecánica ondulatoria.*
53. *Cálculo del número de electrones y protones del universo.*
54. *Cálculo del límite superior de la relación masa-radio de los cuerpos materiales y de la densidad del universo en función del radio.*
55. *La teoría de la estrucutra cosmológica del universo en expansión.*
56. *La fuga de las galaxias en la teoría de la expansión del universo. Variación de la energía de ionización de los rayos cósmicos en función del tiempo.*
57. *La cuantificación de la probabilidad y la imposibilidad física en la Mecánica ondulatoria.*
58. *La solución dinámica del problema del cuerpo único en la teoría de la relatividad. Hipótesis sobre el origen de los rayos cósmicos.*
59. *El problema de la cuerda y el concepto de ondas.*
60. *El principio de superposición y la integración de ecuaciones integro diferenciales en derivadas parciales.*
61. *En torno a la ecuación de continuidad de la Mecánica cuántica no relativista.*
62. *El concepto de masa y de fuerza en Física y el problema de la Geometría natural.*
63. *Interpretación estocástica de la ley de la oferta y de la demanda.*
64. *Evolución y metodología de la Física.*
65. *Nueva teoría de la desviación de los rayos luminosos y del corrimiento de las rayas espectrales hacia el rojo por la acción de un campo gravitatorio.*
66. *Investigaciones sobre la forma y rotación de las galaxias.*

En la Revista «Agricultura»

67. *Un nuevo criterio de correlación por rangos.*

En el «Boletín de la Asociación de Ingenieros Agrónomos»

68. *Contribución a la teoría de las oscilaciones eléctricas.*
69. *La teoría matemática de la estabilidad de la economía capitalista. El proceso estocástico de la distribución de la renta.*
70. *Aplicaciones de los procesos estocásticos a la Demografía, a la Biometría y a la Electrodinámica.*
71. *La evolución de las frecuencias de genes mendelianos alelomorfos en una población en panmixia sin selección ni mutación.*

En el «Boletín de la Estación de Fitopatología Agrícola»

72. *Cuestiones de Biología matemática.*
73. *Los procesos estocásticos de la propagación de las plagas y de las enfermedades contagiosas.*

En el «Boletín del Instituto Nacional de Investigaciones Agronómicas

74. *Investigaciones de Física teórica con aplicaciones agronómicas.*
75. *Investigaciones sobre la teoría de las oscilaciones lineales con aplicación a la electrotecnia.*
76. *Las oscilaciones hereditarias. Las autooscilaciones de flexión-tracción. La teoría de la piroclectricidad.*
77. *Poblaciones estadísticas de tamaño aleatorio.*
78. *Un proceso estocástico bidimensional de contagio y una distribución estable de colas.*
79. *Un problema de mínimo en economía de la empresa.*
80. *El nuevo espacio abstracto de los aleatores de la Economía y de la Biología matemáticas. La ilusión demográfico-financiera.*
81. *Metrología biofísica y noofísica.*
82. *Modelos matemáticos de fenómenos biológicos. Patología estadística.*

En la Revista «Trabajos de Estadística y de Investigación Operativa», del Consejo Superior de I. C.

83. *La adición de vectores aleatorios isótropos en un espacio de n dimensiones.*
84. *Ensayo de axiomática del cálculo de probabilidades y teoría de las distribuciones.*
85. *El problema inverso de la integración de una variable aleatoria en un intervalo aleatorio.*

86. *Vectores aleatorios enedimensionales y transformaciones integrales asociadas* («Revista Matemática Hispano-Americana»).
87. *Las ecuaciones funcionales de la demografía y las funciones características de las cadenas de Markov* («Revista de la Real Academia de Ciencias»).
88. *El semianillo asociado a un semigrupo. Espacios y álgebras aleatoriales. Espacios G-completos.*