DISCURSOS

LEÍDOS ANTE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

EN LA RECEPCIÓN PÚBLICA

DEL

SR. D. LEONARDO DE TORRES Y QUEVEDO

el día 19 de Mayo de 1901.

MADRID
IMPRENTA DE L. AGUADO
Calle de Pontejos, 8.
1901

DISCURSO

DEL

Sr. D. LEONARDO DE TORRES Y QUEVEDO

Señores Académicos:

No podría, si lo intentara, pintaros la gratitud que siento en este instante: renuncio pues á manifestarla ahora de palabra, y os prometo, en cambio, mostrarla con hechos de aquí en adelante, dedicándome con más empeño que nunca á la labor científica, para atenuar en lo posible la notoria desproporción que existe entre mi escaso valer y la alta honra que me habéis dispensado.

Vengo á ocupar el puesto que dejó vacante en esta Academia un ilustre compañero mío, D. Alberto Bosch y Fustegueras. No necesito recordar su brillante carrera, presente en la memoria de todos. Era, ante todo y sobre todo, un hombre político: su clara inteligencia, su laboriosidad incansable, su elocuencia en la tribuna, su decisión y tenacidad en las luchas de los partidos, le abrieron camino en el Parlamento, le llevaron á los altos puestos y le dieron considerable influencia en la marcha de los negocios públicos.

Otros han juzgado y juzgarán la vida pública del señor Bosch; no he de entrar yo en este terreno, ni en realidad he de juzgarle tampoco en ningún otro, porque no tengo competencia para tanto; pero sí diré, que admira ver cómo el

Sr. Bosch—ocupado toda su vida con el ardiente batallar de la política, que absorbió la mayor parte de su actividad,—encontró tiempo y energías para conquistarse un puesto envidiable entre los hombres de ciencia de nuestro país.

Doctor en Ciencias, Ingeniero de Caminos, Licenciado en Derecho, Profesor de Física-Matemática en la Universidad Central, hombre, en fin, de vastísima cultura, discurría con igual competencia sobre las más variadas cuestiones científicas. Su *Juicio Crítico acerca de los Cuadrinomios de Rowan Hamilton*, en que da clara idea del cálculo algorítmico de los cuaterniones y de su representación simbólica, poniendo al mismo tiempo de manifiesto las ventajas del nuevo método y sus numerosas aplicaciones en todas las ciencias matemáticas; sus *Estudios Trigonométricos*, donde—á propósito de las modificaciones que convendría introducir en la Trigonometría—desarrolla profundas consideraciones acerca del carácter de esta ciencia y de sus relaciones con la Geometría y el Algebra, deslinda el terreno propio de la Trigonometría, y da gallarda muestra de su erudición científica; sus discursos é informes en esta Academia; y otros muchos trabajos científicos, que fuera enojoso citar ahora, dan la medida del gran vacío que deja entre vosotros el Sr. Bosch.

Bien sabéis que no puedo yo llenarle. Mis aficiones, poco variadas, me han llevado á ocuparme exclusivamente, durante largos años, en tres ó cuatro problemas relacionados todos con la Mecánica, dejando entre tanto abandonado casi todo el ancho campo de la Ciencia que vosotros cultiváis sin descanso; y así me encuentro hoy con tan escaso caudal científico, que difícilmente podré nunca ser de utilidad en vuestras tareas.

Y no digo esto por alarde de falsa modestia: dígolo porque necesito justificar el tema de mi discurso. He de disertar por fuerza acerca de uno de estos problemas que me han preocupado constantemente, y entre ellos he elegido el que me pareció menos impropio de este acto. Me propongo, pues, hablaros de las *Máquinas Algébricas;* y vosotros, bondadosos conmigo una vez más, me perdonaréis, atendiendo á las circunstancias atenuantes ya expuestas, que haya elegido este asunto enojoso, y difícil de tratar sin el auxilio de fórmulas y figuras.

I

Una máquina algébrica es un aparato que impone entre los valores simultáneos de diferentes elementos las relaciones expresadas matemáticamente en una fórmula analítica. Todo aparato que permita reproducir á voluntad un fenómeno físico, cuyas leyes estén formuladas matemáticamente, puede en rigor denominarse máquina algébrica.

Algunos ejemplos lo pondrán claramente de manifiesto.

En el movimiento oscilatorio del péndulo simple existe cierta dependencia entre el tiempo que dura una oscilación y la longitud del péndulo: el tiempo es proporcional á la raíz cuadrada de la longitud. Esta última se determina de ordinario directamente, midiéndola, y la fórmula que expresa la ley del fenómeno se utiliza para calcular la frecuencia de las oscilaciones. Pues, inversamente, un péndulo dispuesto de modo que pueda hacerse variar su longitud, serviría para obtener, sin cálculo ninguno, la raíz de un número cualquiera: bastaría darle la longitud expresada por este número y medir cuánto dura una oscilación.

La temperatura de una cierta cantidad de aire ó de otro gas perfecto, es proporcional al producto del volumen por la presión. Imaginemos un cuerpo de bomba, con un émbolo perfectamente ajustado, que corre á lo largo de él; una escala graduada, para indicar la posición del émbolo, ó, más bien, el volumen ocupado por el gas; y, por último, un manómetro y un termómetro, para acusar la presión y la temperatura.

¿Queremos efectuar una división? Calentando ó enfriando el aire y cargando en el émbolo más ó menos peso, haremos que se lean al mismo tiempo los valores del dividendo y del divisor: el primero en el termómetro, y en el manómetro el segundo. El valor del cociente ha de ser igual al volumen ocupado por el aire, y se leerá en la escala graduada.

Y así podríamos multiplicar los ejemplos tanto como se quisiera.

En general, cada uno de los elementos de un fenómeno sometido á leyes matemáticas está representado por una variable, y las variables todas están sujetas á ciertas condiciones indicadas en una fórmula, á la cual—por ser ella expresión de la ley del fenómeno—satisfarán constantemente los valores simultáneos de todos los elementos.

Esta circunstancia permite deducir de los valores de algunos de entre ellos, que sean conocidos, los que corresponden á los otros, y determinar así, por medio del cálculo, ciertas magnitudes, sin necesidad de medirlas directamente. Pues lo mismo permitirá, procediendo á la inversa, sustituir á un cálculo un experimento: los datos que habían de servir para efectuar el cálculo determinarán las condiciones en que el experimento ha de verificarse; siendo preciso que, al producirse el fenómeno, cada elemento correspondiente á una de las variables conocidas alcance el valor que á esta variable se atribuye, para que entonces, midiendo los elementos restantes, obtengamos directamente el valor de las incógnitas.

Así se explica la gran variedad de máquinas propuestas. Sistemas de balanzas más ó menos complicados, aparatos hidráulicos, aparatos eléctricos, y otros muchos, fundados en muy diferentes principios, se han propuesto con frecuencia; pero el tipo que más abunda es el de las máquinas puramente cinemáticas, en las cuales se utilizan para efectuar los cálculos ciertas relaciones, establecidas por medio de enlaces mecánicos, entre los valores simultáneos de los espacios recorridos por diferentes móviles.

Y es natural esta preferencia; la Cinemática presenta ventajas incontrovertibles, y sólo de ella pueden esperarse soluciones generales en la construcción de máquinas algébricas. Fijémonos en el ejemplo del aire comprimido. ¿Quién fabricará escalas, manómetros y termómetros que midan con precisión bastante los volúmenes, las presiones y las temperaturas? ¿Quién ajustará el émbolo, de suerte que no escape nada de aire? ¿Quién vencerá, en suma, las mil dificultades técnicas que se presentarían al construir el aparato?

Y sobre todo, aun admitiendo que pudieran vencerse, ¿quién malgastaría su tiempo y su trabajo en manejar este artefacto, abandonando el procedimiento usual, mucho más rápido, cómodo y exacto?

Pues análogas y aun mucho mayores dificultades se encontrarían de ordinario en las aplicaciones.

La intensidad de un campo magnético, la presión de un fluido, la longitud de una onda sonora ó luminosa, y, en general, casi todos los elementos que figuran en las fórmulas de la Física, ni pueden medirse con aproximación suficiente, ni se prestan de ningún modo á la representación adecuada de las variables. Además, no todos los fenómenos físicos pueden reproducirse con facilidad á cada momento, ni encontraremos siempre un fenómeno cuya ley esté expresada por la fórmula que deseamos calcular.

II

En las máquinas cinemáticas se suprimen algunos de estos inconvenientes y se aminoran los otros. La construcción de fórmulas analíticas no ofrece, en pura teoría—cuando á ellas se acude,—dificultad ninguna. Plantear el problema en términos precisos es casi resolverle, y se plantea por sí mismo sólo con definir las máquinas cinemáticas en forma adecuada, de manera que la definición ponga en evidencia la analogía entre las máquinas y las fórmulas; analogía que no aparece claramente, porque las definiciones generalmente admitidas sólo se aplican, en realidad, á las máquinas industriales.

Los grandes progresos de la maquinaria pusieron de manifiesto, á fines del siglo pasado, la necesidad de estudiar sistemáticamente los diferentes medios empleados para conseguir la transformación de unos movimientos en otros.

Monge en 1794, al planear la organización de la Escuela Politécnica, proponía que se dedicaran dos meses al estudio de los *elementos de las máquinas* (1); Carnot, poco más tarde, ponderaba la utilidad de estudiar los *movimientos geométricos* (2); y otros hombres de ciencia, cuyos nombres es inútil citar ahora, trataron, más ó menos directamente, de la cuestión que nos ocupa; pero generalmente se estima que Ampère es quien constituyó la teoría de los movimientos geométricos en su *Ensayo sobre la Filosofía de las Ciencias* (3). En este libro se comprenden, bajo un solo nombre, dos teorías distintas, que más tarde han sido estudiadas separadamente por diferentes autores: la *Cinemática Pura* y la *Teoría de los Mecanismos.*

Ampère, después de exponer el concepto general de la Cinemática, define una máquina diciendo que es *un instrumento con ayuda del cual se puede cambiar la dirección y la velocidad de un movimiento dado;* y luego añade: "Resulta así esta definición independiente de la consideración „de las fuerzas que obran sobre la máquina: consideración „que sólo puede servir para distraer la atención de quien „trata de comprender su mecanismo. Para formarse idea „clara, por ejemplo, del engranaje que obliga á la aguja „de los minutos de un reloj á dar doce vueltas, mientras la „aguja de las horas da una sola, ¿es preciso atender á la „fuerza que pone el reloj en movimiento? El efecto del en- „granaje, en cuanto este último establece la relación de ve- „locidad entre las dos agujas, ¿no es siempre el mismo „cuando el movimiento procede de una fuerza cualquiera

(1) *Essai sur la Composition des Machines,* par MM. Lanz et Bétancourt. Paris, 1808, p. 1.

(2) Carnot (L. M. N.), *Géometrie de Position.* Paris, 1803.

(3) *Essai sur la Philosophie des Sciences* par André-Marie Ampère. Paris 1834, p. 51.

„distinta del motor ordinario, cuando, por ejemplo, se hace „girar con el dedo la aguja de los minutos?„

Critica Willis en su libro *Teoría de los Mecanismos* (1) la definición de Ampère, porque habla ésta, según hemos visto ahora mismo, de la transformación de un movimiento *dado*, es decir, de un movimiento cuya dirección y velocidad sean conocidas; mientras Willis entiende, y con razón, que la máquina se limita á regir las relaciones de velocidad y de dirección entre los dos móviles enlazados por medio de ella; pero que la conexión establecida y sus efectos son independientes de las velocidades actuales.

Tomando al pie de la letra la definición de Ampère, la transmisión citada en su ejemplo serviría para transformar un movimiento determinado (el de la aguja de los minutos) es decir, una rotación cuya velocidad es de una vuelta por hora, en el movimiento de la otra aguja. Willis quiere que la definición no se funde en los movimientos reales, sino en sus relaciones, y por eso, según él dice, la conexión entre las dos agujas del reloj rige la relación de sus velocidades angulares, que han de estar siempre en la proporción de doce á uno, y además impone la condición de que ambas agujas giren en cada momento en el mismo sentido: las dos en sentido directo, ó las dos en sentido inverso. Podrán marchar de prisa ó despacio; con movimiento continuo ó con movimiento alternativo, esto es indiferente; la máquina se limitará á imponer las dos condiciones mencionadas.

Esta crítica no tiene gran alcance, pues se refiere á un error de redacción en Ampère; pero Willis estaba interesado en ponerle de relieve para justificar una nueva clasificación de mecanismos, y yo he querido recordar sus palabras, porque, además de ser muy justas, nos encaminan directamente á nuestro objeto.

La máquina establece una conexión entre dos móviles; Willis la define teniendo en cuenta la relación entre sus ve-

---

(1) *Principles of Mechanism* by Robert Willis. London, MDCCCXLI. p. XIII.

locidades, y nosotros la definiremos teniendo en cuenta la relación entre los espacios recorridos por aquellos móviles. Cada aguja del reloj describe al moverse un cierto ángulo, y los dos ángulos descritos por las dos agujas, medidos á partir de una posición elegida arbitrariamente, estarán en la relación de doce á uno.

Vemos ahora ya á la máquina imponiendo, de una manera mecánica, cierta dependencia entre los valores simultáneos de dos ángulos variables, lo mismo que una ecuacion expresa, en lenguaje algébrico, cierta dependencia entre los valores simultáneos de dos variables abstractas. Pero estos ángulos son cantidades muy fáciles de medir por medio de limbos graduados y de contadores que cuenten automáticamente el número de vueltas de cada aguja: podremos, pues, construir un aparato en el cual se leerán directamente los valores simultáneos de los ángulos descritos por las dos agujas, ó, para hablar más brevemente, los valores simultáneos de sus *desplazamientos,* y estos dos valores estarán ligados por una condición, á la cual necesariamente han de satisfacer siempre, cualesquiera que sean los movimientos de la máquina. La ecuación dice que un desplazamiento ha de ser igual al otro multiplicado por doce, y el aparato impone realmente esta condición.

Hemos venido, en resumen, dando un largo rodeo, á considerar las máquinas como se consideran los sistemas materiales en la Mecánica Racional, y á definir los efectos cinemáticos de los enlaces, formulando las ecuaciones impuestas entre los valores simultáneos de los desplazamientos de diferentes móviles.

Y, en verdad, no es fácil establecer diferencias fundamentales entre los sistemas ideales de la Mecánica y las máquinas que se consideran en la Teoría Geométrica de los Mecanismos, compuestas, como dice Bour, de cuerpos ficticios, que sólo tienen las propiedades que nosotros les hayamos atribuído para simplificar la cuestión (1).

(1) *Cours de Mécanique et Machines,* par M. Edm. Bour. Paris, 1865, p. 15.

Es cierto que en un sistema puede haber un número cualquiera de movimientos independientes, y en una máquina, *tal como se ha definido hasta ahora,* no habrá nunca más que uno solo: basta conocer el movimiento de un mecanismo determinado para deducir el movimiento de la máquina toda, la cual constituye—como ahora se dice—un sistema de un solo parámetro ó de un solo grado de libertad de movimiento.

Tal limitación, aplicable á las máquinas industriales, que por razones de orden práctico tienen siempre un solo motor, es completamente arbitraria é inaceptable en la teoría de las máquinas cinemáticas, cuyo objeto es resolver con toda la generalidad posible el problema de la transformación de unos movimientos en otros.

Tan cierto es esto, que en realidad casi todos los autores—contradiciendo la definición admitida—plantean este problema, aunque sólo de un modo subrepticio, al estudiar las que generalmente se llaman combinaciones de movimiento. Todos recordáis cómo, por medio de los trenes epicicloidales, se imponen mecánicamente ciertas condiciones entre los movimientos de tres móviles: cómo se puede hacer, por ejemplo, que el ángulo descrito por uno de ellos sea igual á la suma de los ángulos descritos por los otros dos.

En el aparato así construído no habrá transformación de un movimiento en otro, sino de dos movimientos en uno; y podrá encargarse un experimentador de cada uno de los móviles que representan los sumandos y hacerle marchar á su antojo: los enlaces mecánicos arrastrarán al otro móvil, obligándole á marchar en tal forma que los valores simultáneos de los tres desplazamientos satisfagan siempre á la ecuación impuesta, y el desplazamiento del móvil, arrastrado por los enlaces, será constantemente igual á la suma de los dos desplazamientos que hayan determinado de un modo arbitrario los dos experimentadores.

A cierta combinación de ruedas dentadas, que establece entre dos móviles una conexión, en virtud de la cual el desplazamiento de uno de ellos ha de ser doce veces mayor que el del otro, damos el nombre de máquina; pues máquina es igualmente otra combinación de ruedas en virtud de la cual el desplazamiento de un móvil ha de ser igual á la suma de los desplazamientos de otros dos; y máquina llamaremos también, para ser lógicos, á toda combinación más ó menos complicada de mecanismos, que enlace un número cualquiera de móviles y establezca cierta dependencia entre ellos. Por eso, en la Memoria que informasteis benévolamente el año 94 (1), propuse esta definición: *una máquina es un instrumento que enlaza varios móviles é impone mecánicamente ciertas relaciones entre los valores simultáneos de sus desplazamientos.*

III

No es difícil ya imaginar la disposición general de una máquina algébrica, que sólo se diferenciará de otra cualquiera en ciertas particularidades de orden práctico, y especialmente en las disposiciones adoptadas para que puedan leerse con facilidad los valores de los desplazamientos.

Se compondrá de varios cuerpos, fijos los unos y móviles, con relación á éstos, los otros: distinción puramente empírica, pues no hay ó no sabemos que haya cuerpos en reposo absoluto, y cualquier Tolomeo de la relojería podría explicar el movimiento de un reloj, suponiendo quieta una de las agujas, mientras giran alrededor de ella la esfera y la caja, arrastrando todas las ruedas, convertidas en otros tantos epiciclos. Pero, en la práctica, la distinción se impone casi siempre: así, cuando hablamos de los movimientos de un reloj, suponemos todos implícitamente que la esfera permanece inmóvil, y á nadie le ocurrirá, de seguro, explicar el movimiento de un torno ó de una máquina de coser suponiendo que el pedal está quieto y que la máquina toda oscila.

A cada variable real corresponderá en la máquina un

(1) *Memoria sobre las Máquinas Algébricas.*

móvil, guiado de manera que cada uno de sus puntos se mueva siempre sobre una línea determinada, trayectoria del punto.

Esta clase de movimientos son precisamente los más usuales en toda clase de máquinas: en las de vapor, por ejemplo, todos los puntos del émbolo describen constantemente, en su movimiento de vaivén, trayectorias rectilíneas, mientras los puntos del volante describen trayectorias circulares. Y adviértase que ninguna influencia tiene en la determinación de estas trayectorias la conexión establecida entre ambos móviles por medio de la transmisión de biela y manivela: si estos órganos desaparecieran, serían los dos movimientos independientes uno de otro, pero el émbolo sólo podría marchar en línea recta, deslizándose á lo largo del cuerpo de bomba, y el volante sólo podría girar alrededor de su árbol. Pues lo mismo ha de suceder con la máquina algébrica que vamos imaginando: cada uno de los móviles, destinados á representar las variables, estará ligado á los cuerpos fijos por conexiones que le obliguen á marchar siempre según una trayectoria determinada. Una escala en correspondencia con cada uno de estos móviles permitirá apreciar por una simple lectura el valor de su desplazamiento, y entre la escala y el móvil constituirán un aparato propio para representar una cantidad real cualquiera, positiva ó negativa.

Estos aparatos—que por indicación de D. Eduardo Saavedra he designado con el nombre de *aritmóforos,*—pueden ofrecer muy variadas disposiciones, que no es del caso examinar aquí: bastará á mi propósito indicar, en forma esquemática, la manera de realizar mecánicamente, en la representación de variables, los procedimientos usuales de la Geometría. Un botón, sujeto por un movimiento de corredera á moverse á lo largo de una ranura rectilínea, será el equivalente mecánico de un punto que se mueve á lo largo de una recta. Marcaremos al lado de la ranura un punto fijo, que será el cero; trazaremos, á partir de él, la escala de las cantidades positivas en un sentido, y la de las negativas en sentido contrario; y podremos representar una cantidad real cualquiera corriendo el botón á lo largo de la escala, hasta colocarlo frente á la división que corresponda á esta cantidad.

También una cantidad imaginaria puede representarse por medio de un móvil, guiándole de manera que cada uno de sus puntos haya de moverse siempre sobre una superficie determinada. Imaginemos, para seguir copiando el procedimiento geométrico, un plano material; una regla sujeta á él por medio de un eje, alrededor del cual gira moviéndose siempre sobre el plano; en esta regla una ranura rectilínea, y en la ranura un botón que corre á lo largo de ella; tracemos al lado de la ranura una escala cuyo cero coincidirá con el eje de giro, y en el plano un círculo graduado; y ya tenemos un aparato que permite representar cualquier cantidad imaginaria: su *módulo* estará dado por la posición del botón sobre la escala, y su *argumento* por la posición de la regla sobre el círculo graduado.

En suma: un aritmóforo se compone de un móvil, cuyo desplazamiento representa la variable, y de una ó dos escalas—según que se trate de cantidades reales ó imaginarias—para medir este desplazamiento.

Decir que hacemos variar una cantidad, ó que le damos un valor determinado, valdrá tanto como decir que hacemos marchar el móvil correspondiente ó que le fijamos en una posición determinada.

Tenemos ya la armazón, la parte inmóvil de la máquina; tenemos también varios aritmóforos corespondientes á otras tantas variables; pero como los móviles de estos aritmóforos son aún todos independientes unos de otros, sin ninguna relación necesaria entre sus posiciones simultáneas, no existe aún ninguna dependencia entre las variables representadas.

Establezcamos ahora conexiones entre estos móviles por medio de mecanismos que impongan cierta solidaridad entre ellos.

Habrán de verificarse entonces sus movimientos con arreglo á ciertas leyes, y éstas se formularán en un sistema de *ecuaciones de condición*, relativas á los desplazamientos de los móviles; es decir, á las variables representadas en los aritmóforos. Diremos propiamente que las *ecuaciones de condición quedan construídas en la máquina*, y el problema consiste en averiguar si pueden construirse, cualesquiera que ellas sean.

IV

Empezando por el caso más sencillo, ¿podremos construir una función explícita cualquiera? ¿Podremos hacer que un movimiento dependa de otros varios, según ciertas leyes indicadas explícitamente en una fórmula analítica?

Teóricamente sí. No es posible, ni hace falta tampoco, demostrarlo aquí con todo rigor; pero es fácil señalar el camino que en tal construcción ha de seguirse.

El problema parece de gran complicación por la infinita variedad de funciones que en las fórmulas figuran; pero en los cálculos numéricos sólo es preciso ejecutar unas cuantas operaciones, siempre las mismas, combinándolas de diferentes maneras y repitiéndolas cuantas veces sea necesario: basta conocer las cuatro reglas y manejar un corto número de tablas para calcular una función explícita, por complicada que sea. No se obtiene su valor directamente por una sola operación de cálculo, sino que se ejecutan una por una todas las operaciones indicadas en la fórmula. De los datos se deducen directamente ciertos valores, que á su vez sirven de argumentos para calcular otros nuevos, y así se continúa hasta llegar al valor final. En cada una de estas operaciones elementales se determina una cierta cantidad, en función de otra ó de otras dos conocidas de antemano.

Algo parecido puede observarse en cualquier máquina industrial. La herramienta no está directamente montada sobre el émbolo del motor, sino ligada á él por una cadena más ó menos larga de mecanismos que se transmiten el movimiento de unos á otros. Y lo mismo diremos, con mayor razón aún, de las máquinas algébricas: los móviles que representan variables independientes arrastrarán á los que están directamente enlazados con ellos, éstos á otros, y así sucesivamente hasta llegar al desplazamiento final. El sistema puede considerarse descompuesto en un cierto número de combinaciones elementales de mecanismos, y la operación mecánica, ejecutada por medio de una de estas combinaciones, consiste siempre en determinar el desplazamiento de un móvil en función de los desplazamientos de otro, ó de otros dos, cuya posición está ya determinada.

La analogía es patente, aunque la prioridad de unas operaciones con relación á otras, que existe realmente en los cálculos numéricos, es de un orden puramente lógico en los mecánicos: como que solo responde á la idea de que hay ciertos movimientos que son causa de que se produzcan otros; pero, en realidad, todos se verifican al mismo tiempo.

Se reduce, pues, la dificultad á construir un número limitado de aparatos elementales: uno por cada una de las operaciones que se ejecutan en los cálculos numéricos; y, según en otras ocasiones he demostrado, esta construcción es posible (1). Repitiéndola cuantas veces sea preciso, y combinando luego los aparatos elementales con arreglo á las indicaciones de la fórmula que exprese el valor de una función, quedará ésta construída.

La concordancia entre la fórmula y la máquina será en pura teoría perfecta. Dispondremos con entera libertad de las variables independientes; cada uno de sus aritmóforos podría correr á cargo de un experimentador distinto, quien le haría marchar á su antojo, sin ocuparse de los demás para nada; pondríase así en movimiento la máquina toda; y el valor señalado por el aritmóforo de la función variaría

(1) *Memoria sobre las Máquinas algébricas*, por Leonardo Torres. Bilbao, 1895.

Machines à Calculer, par M. L. Torres. Memoires presentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France, tome XXXII. Paris, MDCCCCI.

con todos los demás y sería en cada caso el que á ésta correspondiera, dados los valores simultáneos de las variables independientes.

V

El cálculo de funciones implícitas, ó, dicho de otro modo, la resolución de ecuaciones—problema erizado de dificultades, que sólo en algunos casos muy sencillos puede vencer el Álgebra,—no se plantea en la teoría de las máquinas algébricas.

Una ecuación expresa una cierta relación entre las variables, y resolverla es expresar esta misma relación en forma distinta para que la incógnita aparezca como función explícita de los datos; y esto es precisamente lo que no sabemos hacer. La máquina no expresa la relación, la construye; hace que exista realmente la condición impuesta; y, mientras los enlaces mecánicos que la establecen subsistan, ella se manifestará siempre en la forma necesaria y se impondrá á los movimientos de la máquina, cualesquiera que sean las circunstancias en que se verifiquen.

Supónese en este razonamiento que las transmisiones son todas reversibles; y así ha de suceder necesariamente en las máquinas ideales que ahora consideramos, no sujetas á rozamientos ni á resistencias pasivas de ninguna clase.

Sólo cuando la relación de velocidades entre dos móviles se haga infinita ó indeterminada, podrán presentarse puntos muertos; y éstos son casos excepcionales, que han de tratarse separadamente, como los puntos singulares de las curvas y los valores críticos de las funciones.

Aplicando este razonamiento á un caso particular, supongamos construída la función z:

$$z = f(a, b, c, \ldots x).$$

Si disponemos de los aritmóforos $a, b, c, \ldots x$, haciendo variar arbitrariamente las cantidades en ellos representadas, los enlaces mecánicos obligarán á marchar al aritmóforo z en tal forma que la ecuación quede siempre satisfecha. Ésta es la hipótesis. Pues la misma máquina sirve, como diré ahora, para calcular una variable cualquiera, x por ejemplo, en función de todas las otras variables $a, b, c,$... y de la función z.

Sean $a_1, b_1, c_1, \ldots z_1$ los valores particulares de las cantidades conocidas; representemos en el aritmóforo de cada una de las variables a, b, c el valor de ésta, y fijémosle en esa posición mientras dure el cálculo. Haciendo marchar ahora el aritmóforo x, el aritmóforo z marchará también, y, cada vez que leamos en este último el valor z_1, leeremos en el primero el valor correspondiente de la variable x.

Pero este método indirecto, y en cierto modo de tanteo, no es el único aplicable. Si imaginamos que varían de un modo continuo todas las cantidades conocidas, $a, b, c \ldots z,$ en cada momento corresponderá á los valores simultáneos de todas ellas un cierto valor de la incógnita x, implícitamente determinado por la fórmula construída. Esta variación de todas las cantidades—datos é incógnita,—y cualquiera otra *compatible con la fórmula, puede obtenerse en el aparato* haciendo variar según sea necesario todas las variables independientes $a, b, c \ldots x,$ y dejando que la máquina determine el valor de la función z. ¿Podrá obtenerse también haciendo variar la función y todas las variables conocidas, y dejando que la máquina determine el valor de la incógnita x? Indudablemente sí; porque el movimiento que consideramos es el único compatible con los enlaces del sistema, y se producirá necesariamente—si las transmisiones son reversibles,—cualesquiera que sean los móviles á que se apliquen las fuerzas destinadas á provocarlo.

En resumen, hemos construído una ecuación entre la función y las variables, de quienes depende. No es preciso establecer diferencia ninguna entre aquélla y éstas; podemos considerar como incógnita la primera, ó una cualquiera de las últimas; y bastará, para calcular mecánicamente, dar en la máquina á todas las otras variables los valores particulares que queramos atribuirlas.

Los mismos razonamientos se aplican á un sistema de ecuaciones simultáneas. Cada una de ellas exigirá que se establezcan ciertos enlaces entre los móviles que representan las variables; y, estableciendo á la vez todos los enlaces correspondientes á todas las ecuaciones, quedarán éstas construídas.

No repetiré las consideraciones que acabo de exponer al tratar de una sola ecuación; pero bien veis que, cuando éstas son varias, podremos tomar como incógnitas las variables que convenga (en número igual al de ecuaciones construídas), y calcularlas mecánicamente, con sólo dar en la máquina á todas las otras los valores particulares que les correspondan.

VI

Las ecuaciones diferenciales se construyen también sin dificultad, utilizando para ello los mecanismos empleados en la construcción de los planímetros ó integradores.

Imaginemos dos rectas que se corten perpendicularmente y sirvan de ejes, la una á un disco, y la otra á una rodaja tangente á él: el disco está sujeto á girar alrededor de su eje, y no admite ningún otro movimiento; mientras que la rodaja puede girar alrededor de su eje y resbalar á lo largo del mismo, acercándose ó alejándose del punto de intersección de las dos rectas. Resbalará, al producirse este último movimiento, sobre el disco, marchando en dirección radial: suponemos el resbalamiento posible en esta dirección é imposible en cualquiera otra, de modo que los dos mecanismos son perfectamente solidarios en sus movimientos de giro. Tal es la hipótesis, realizable con absoluta exactitud en teoría; y no tenemos que pensar ahora en los medios de llevarla con más ó menos perfección á la práctica.

Tres desplazamientos han de considerarse en este aparato. El ángulo descrito por el disco, el ángulo descrito por la rodaja, y la distancia de la rodaja al centro del disco.

No son tres variables de la misma índole: si uno de los dos mecanismos gira, girará también el otro al mismo tiempo, sin ocasionar movimiento ninguno de traslación. Los dos movimientos angulares dependen directamente uno de otro; el de traslación ni depende de ellos ni puede producirlos tampoco: redúcese su efecto á definir la dependencia que entre los otros dos movimientos existe; y la velocidad angular de la rodaja con relación al disco será en cada momento proporcional á su distancia al centro. Tenemos, pues, representadas:

La variable independiente, x, por el desplazamiento angular del disco.

La función, y, por el desplazamiento angular de la rodaja.

Y la derivada, y', ó sea la relación de velocidades entre el móvil que representa la función y el móvil que representa la variable por el desplazamiento de la rodaja sobre su árbol, es decir, por la distancia de la rodaja al centro del disco.

Para construir una ecuación diferencial de primer orden, $f(x, y, y') = 0$, bastará imponerla por medio de nuevos enlaces mecánicos entre estos tres desplazamientos.

Impongámosla, y—partiendo de una posición elegida arbitrariamente—hagamos girar el disco: la rodaja, arrastrada por él, girará también; pero, al girar el disco y la rodaja, esta última, empujada por los enlaces establecidos al construir la ecuación $f(x, y, y') = 0$, marchará sobre su árbol, determinando automáticamente, en cada momento, la derivada y', ó sea la relación de velocidades en función de los valores x é y.

El movimiento resulta perfectamente determinado, y lo mismo sucedería si dispusiéramos arbitrariamente del movimiento de rotación de la rodaja, dejándola, por supuesto, en libertad de correr sobre su árbol, según lo exigiera la acción de los mecanismos.

Tenemos, pues, construída la ecuación de una cierta curva $\varphi(x, y) = 0$; pero los enlaces mecánicos ya definidos no bastan por sí solos para determinarla. Al componer una máquina de calcular, se pueden colocar todos los mecanismos en una posición cualquiera, que sea compatible con las ecuaciones de condición; aquí sólo existe una de éstas, y podremos elegir arbitrariamente los valores de x é y, á condición de dar á y' el que, según la ecuación

$$f(x, y, y') = 0,$$

le corresponda.

Al elegir los valores iniciales (x_1, y_1) se elige un punto de la curva; y claro es que, en general, si el punto cambia, la curva cambiará también.

El aparato que estamos considerando sirve—ya lo estáis viendo—para construir una integral particular cualquiera de la ecuación propuesta.

La integral general no puede construirse. Aun cuando ella y la ecuación diferencial de que procede sirvan para determinar una misma familia de curvas, no expresan ambas las mismas relaciones ni se refieren á las mismas cantidades; porque, al integrar, se introduce una nueva, llamada constante de integración; y esto de deducir de ciertas relaciones entre determinadas variables otras relaciones diferentes entre variables también distintas, no es operación que pueda encomendarse á la acción automática de los mecanismos.

No podremos, según esto, hallar la integral general de ninguna ecuación; pero—conociendo los valores particulares necesarios—podremos construir las integrales particulares relativas á cada caso. Y esto, cualesquiera que sean la clase y número de ecuaciones diferenciales. Cada una de las derivadas que figuren en ellas se construirá separadamente, por medio de una combinación de disco y rodaja, ó de otra análoga; y luego se establecerán entre los desplazamientos que correspondan á las variables principales y á las derivadas los enlaces necesarios para construir todas las ecuaciones del sistema.

VII

Hasta ahora sólo he hablado de la manera de construir una raíz ó un sistema de raíces; pero una ecuación ó un sistema de ecuaciones admiten, en general, más de una solución, y aun con mucha frecuencia un número de soluciones infinito.

Pues todas ellas, ó por lo menos varias de entre ellas, cuando son infinitas, pueden obtenerse cinemáticamente en cada caso.

Consideremos primero uno muy sencillo, para concretar bien las ideas.

Representemos dos cantidades imaginarias: z y w, cada una en un aritmóforo, compuesto—como decía al principio—de una regla que gira sobre un plano, y un botón que corre á lo largo de la regla. Enlacemos mecánicamente los dos botones, imponiendo una ecuación entre los valores simultáneos de sus desplazamientos, ó, en otros términos, haciendo que las dos cantidades representadas dependan una de otra; y especifiquemos esta dependencia, suponiendo que, á causa de la condición mecánicamente impuesta, w ha de ser igual á la raíz cuadrada de z.

Este supuesto se traduce en dos condiciones distintas: la una—relativa á los argumentos—exige que el desplazamiento angular de la regla, correspondiente á la función w, sea la mitad del desplazamiento angular de la regla correspondiente á la variable z; la otra—relativa á los módulos—pide que la distancia del botón al origen ó *cero* sea, en el aritmóforo w, igual á la raíz cuadrada de la distancia homóloga en el aritmóforo z.

Las relaciones mecánicas así definidas pueden imponerse de muchas maneras distintas, pero no nos importa ahora estudiarlas con minuciosidad; basta á mi objeto suponerlas realmente impuestas.

Consideremos el aparato ya construído en una posición dada, y hagamos marchar el aritmóforo z de tal manera, que el botón recorra una curva cerrada y vuelva al punto de partida. ¿Cuál será la posición final del otro aritmóforo? La distancia del botón al centro será la misma que al principio: la raíz cuadrada de su homóloga en el aritmóforo z, y esta última no ha variado.

Del argumento de la función no puede decirse otro tanto: el de la variable vuelve, es cierto, al mismo valor; pero esto puede ocurrir de dos maneras distintas: girando la regla primero en un sentido, y después en sentido contrario, hasta volver á la posición primitiva, ó girando siempre en la misma dirección, hasta describir la circunferencia completa.

En el primer caso, la regla del aritmóforo w reproducirá, en escala mitad, el movimiento alternativo, marchando primero en un sentido, y luego en el contrario, para volver al punto de partida, con lo cual volveremos á representar el mismo valor particular que tenía la función w en la posición inicial del aparato. En el segundo, mientras la regla del aritmóforo z describe una circunferencia entera, la regla del aritmóforo w describirá un arco de 180°, y el botón correspondiente se encontrará á la misma distancia del origen que al iniciarse el movimiento, pero en dirección diametralmente opuesta.

Tendremos representada ahora la otra determinación de la raíz de z.

Basta reflexionar un momento para comprender que en el primer caso, cuando la regla oscila y vuelve á su posición inicial, el cero del aritmóforo z queda necesariamente fuera de la curva cerrada descrita por el botón; mientras que en el segundo, cuando la regla gira 360°, el cero queda dentro de la curva.

¿Y si quisiéramos hacer que la curva pasara por el cero mismo? El movimiento sería imposible, porque la derivada de la función, con relación á la variable, ó sea la relación de velocidades entre los dos móviles correspondientes, se haría infinita al pasar la variable por cero.

Si los mecanismos ideales de nuestra máquina los imagináramos dotados de masa, como los cuerpos de la Naturaleza, es decir, si impusiéramos mecánicamente la ley de continuidad, consecuencia necesaria de la de inercia, que impide toda variación brusca de las condiciones del movimiento, entonces, digo, pasaríamos sin dificultad por el cero del aritmóforo, lo mismo que podríamos—admitiendo la existencia de semejante ley—determinar analíticamente la marcha de la función cuando pasa por cero la variable.

Pero el movimiento no puede ser determinado por la acción y efecto de los enlaces puramente cinemáticos. El punto crítico de la función estará fielmente representado por un punto muerto en la máquina.

El aparato servirá, según acabamos de ver, para obtener las dos determinaciones, representándolas alternativamente, ya la una ó ya la otra, á medida que la variable gira alrededor del punto crítico.

Añadamos ahora un nuevo aritmóforo w', y enlacémosle con el de la variable—repitiendo las construcciones mecánicas ya ejecutadas,—de manera que la cantidad en él representada sea también constantemente igual á la raíz de la variable independiente. Tendremos así la variable en un solo aritmóforo, y la función en dos diferentes, y en cada uno de éstos representaremos—al componer la máquina—una raíz distinta de las dos correspondientes al valor particular que atribuyamos á la variable. En virtud de las consideraciones expuestas hace un momento, las dos raíces simultáneamente representadas ahora en el aparato se permutarán cada vez que la variable dé una vuelta alrededor del punto crítico.

Una máquina que construí hace algún tiempo da las dos raíces de un polinomio de segundo grado, y en ella pueden observarse, aunque con alguna imperfección, debida á deficiencias de orden práctico, la permutación de las raíces y la imposibilidad de pasar por los puntos críticos.

No hay ningún inconveniente en generalizar el procedimiento.

Para representar á la vez varios sistemas de raíces de un sistema dado de ecuaciones simultáneas, basta repetir la misma construcción tantas veces como sea necesario.

Para darnos cuenta de cómo esta construcción pudiera llevarse á cabo, imaginaremos una máquina en forma de estrella, en cuyo centro exista un grupo de aritmóforos, uno por cada variable independiente; formando círculo alrededor de este primero otros varios grupos, todos iguales entre sí, y en cada uno de los cuales están representadas todas las incógnitas, cada una en su aritmóforo; y después uniremos idealmente el grupo central con cada uno de los otros por medio de una recta que ha de representar en nuestro esquema el conjunto de mecanismos necesarios para construir el sistema de ecuaciones.

Repítese así la construcción de éstas tantas veces como rayos tiene la estrella, y al extremo de cada uno de los rayos puede representarse un sistema de raíces diferentes.

Podremos entonces hacer marchar arbitrariamente todos y cada uno de los móviles del grupo central; y los otros —arrastrados por ellos— marcharán también, y en cada instante tendremos representado en el extremo de cada uno de los rayos un sistema de raíces correspondiente á los valores simultáneos de los datos.

VIII

Esta íntima y perfecta analogía entre las máquinas ó sistemas mecánicos y las fórmulas algébricas permite dar siempre forma sensible á toda clase de relaciones analíticas, y puede aprovecharse en algunos casos para ilustrar la exposición de teorías matemáticas.

No hay quien desconozca la conveniencia de emplear á veces ejemplos para hacer más clara la exposición de ideas abstractas.

Proporciónalos casi siempre, y muy adecuados, la Geometría; pero en ocasiones no es fácil acudir á ella: la figura geométrica fija é indeformable, sólo mediante ciertos convencionalismos y artificios puede prestarse á la representación de relaciones entre cantidades variables; y por eso con frecuencia se supone que las figuras varían según ciertas leyes, confirmando así mi opinión; porque estas figuras variables, como sistemas mecánicos ideales pueden considerarse; y yo sólo digo que en ciertas teorías debiera acudirse con más frecuencia, y de una manera sistemática, á esta clase de ejemplos.

Serían, en general, más sugestivos que los geométricos, y se prestarían lo mismo al razonamiento matemático, porque los sistemas que nosotros imaginemos compuestos de cuerpos inalterables, con formas geométricas exactamente definidas, sin asperezas que produzcan rozamientos imprevistos ni imperfecciones de ninguna especie, no existen ni pueden existir fuera de nuestro entendimiento: son, en puridad, entes de razón conformes en un todo á la definición que de ellos hayamos dado, y es lícito, por consecuencia, afirmar con certidumbre matemática todas las conclusiones que de su definición puedan lógicamente derivarse.

Podría, pues, un sistema mecánico, lo mismo que una figura geométrica, servir de apoyo y guía al razonamiento matemático para facilitar á los principiantes la inteligencia de ciertas demostraciones, sin perjuicio de exponerlas luego en forma más abstracta, siempre que sea necesario.

Así como los entes geométricos se representan por medio de dibujos, y aun por medio de figuras en relieve, cuando conviene, así también, para definir con entera claridad los entes cinemáticos, las máquinas ó sistemas mecánicos ideales que hemos de hacer funcionar mentalmente, acudiremos de ordinario á su representación gráfica; pero quizá no esté de más á veces construirlos, para obtener una realización material suficiente, aunque grosera, de los hechos ó leyes que se trata de poner en evidencia.

Y eligiendo con tino los ejemplos, no serían necesarios aparatos muy complicados: un simple sistema articulado me ha servido, hace muy poco tiempo, para construir una función de dos determinaciones con dos puntos críticos, á los cuales corresponden en el sistema dos puntos muertos; y se observa la permutación de las raíces cada vez que la variable describe una curva cerrada que comprende en su interior uno cualquiera de ellos (1).

La función construída no es monógena, pero eso ninguna importancia tiene para nuestro objeto.

Sería igualmente fácil construir—no exigiendo que fueran monógenas—funciones simple ó doblemente periódicas, y quizá algunas otras, que presentaran particularidades interesantes.

IX

Réstame sólo decir algo acerca de las aplicaciones á los cálculos usuales. Prescindiré en absoluto de los aritmómetros y planímetros—entre los cuales hay aparatos muy ingeniosos y de innegable utilidad,—porque no encajan exactamente dentro de mi estudio, y trataré sólo de las máquinas destinadas á calcular fórmulas algébricas.

Muchas han sido, según dije al principio, las propuestas; pero en ningún caso, que yo sepa, se han examinado las condiciones prácticas. Parece como si los inventores pensaran que la única dificultad estriba en imaginar una solución teórica, y en realidad la cuestión no está ahí; porque siempre hay, según acabamos de ver, infinitas maneras de construir una ecuación ó un sistema de ecuaciones.

Las dificultades son puramente prácticas y proceden de la gran complicación de mecanismos, á veces necesaria, y, más principalmente aún, de la gran amplitud de variaciones á que están sujetas las variables de las fórmulas.

En las Memorias, antes citadas, he expuesto las condicio-

(1) *Sobre la utilidad de emplear ejemplos cinemáticos en la exposición de algunas teorías matemáticas,* por Leonardo Torres. Ateneo de Madrid, curso de 1900 á 1901. Sesión inaugural de la Sección de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, celebrada el 19 de Noviembre de 1900. Madrid, 1900.

nes que necesariamente han de reunir las máquinas de calcular algébricas, para que las dificultades prácticas puedan vencerse satisfactoriamente.

Tres son las principales:

1.ª Emplear aritmóforos logarítmicos, en los cuales el desplazamiento es proporcional, no á la variable representada, sino á su logaritmo.

Es absolutamente necesaria esta condición para representar con precisión suficiente variables que oscilan entre límites muy extensos; y además, cuando se acude á este procedimiento de representación—comparable á los procedimientos de anamórfosis usados en Geometría—las ecuaciones entre los desplazamientos no son las mismas que existen entre las variables, sino las que existen entre sus logaritmos; y estas últimas se construyen mucho más fácilmente en algunos casos importantísimos, entre los cuales se cuentan todos los relativos á las funciones algébricas.

2.ª Prescindir de las transmisiones por contacto, que se prestan á la acumulación de errores, y á los errores groseros ocasionados por los resbalamientos, acudiendo siempre á los enlaces geométricos, cuya acción—como depende sólo de la forma de los mecanismos—ha de producirse necesariamente, mientras éstos no se rompan ó deformen.

3.ª Admitir sólo mecanismos sin fin, ó que puedan prácticamente reputarse por tales, para tener libertad de representar las variables en escala bastante grande, sin limitar la amplitud de sus variaciones.

En dichas Memorias y en otros trabajos sobre el mismo asunto tengo demostrado que es posible—ateniéndose á estas tres condiciones—construir un sistema cualquiera de ecuaciones algébricas; pero será preciso evitar la complicación excesiva de mecanismos, porque sólo pueden esperarse resultados prácticos en los casos más sencillos. No siendo posible precisar cuáles sean éstos, me limitaré á dar noticia de una máquina, destinada al cálculo de funciones algébricas, que tengo proyectada en detalle, y cuyos principios están expuestos en la Memoria *Machines à Calculer.*

Para puntualizar cuál podría ser la utilidad de esta máquina, ó de otra cualquiera, será preciso contestar á estas tres preguntas:

¿Cuáles son las fórmulas que pueden calcularse con el aparato?

¿Cuáles son los límites impuestos á las variables?

¿Cuál será el error que se cometa en los cálculos?

Contestaré escuetamente, sin razonar las respuestas, porque su justificación exigiría, como comprenderéis, la descripción y discusión detenida del proyecto. Indicaré los resultados que, á mi juicio, se obtendrán con este aparato, ya que me es imposible dar aquí la menor idea de los mecanismos que le componen.

En el aparato se construye la función α:

$$\alpha = \frac{A_1 x^{m_1} + A_2 x^{m_2} + A_3 x^{m_3} + A_4 x^{m_4} + A_5 x^{m_5}}{A_6 x^{m_6} + A_7 x^{m_7} + A_8 x^{m_8}},$$

cuyo numerador consta de cinco términos, y de tres el denominador; sin que quepa aumentar el número de términos, aunque sí pueden suprimirse los que no se consideran necesarios en cualquier caso, conforme luego indicaré.

Los coeficientes A_1, A_2... A_8, y lo mismo la variable independiente x y la función α, están tratados como variables en el sentido propio de la palabra: cada una de ellas está representada en un aritmóforo, y los enlaces mecánicos establecidos entre éstos hacen que los valores, simultáneamente representados por todos, satisfagan á la ecuación.

Los exponentes pueden ser positivos ó negativos, enteros ó fraccionarios, y se varían—para pasar de una fórmula á otra — introduciendo ligeras modificaciones en los enlaces, es decir, desmontando unas piezas y montando en su lugar otras análogas: gracias á las disposiciones adoptadas, el cambio se hace con comodidad y rápidamente.

Podrían, pues, construirse en este aparato casi todas las funciones algébricas que se presentan en las aplicaciones corrientes.

También serviría para calcular las raíces reales de una ecuación algébrica.

Escribiríamos todos los términos positivos de su primer miembro en el numerador y los negativos en el denominador, ó á la inversa; construiríamos la fracción así obtenida; daríamos valores particulares á los coeficientes, y haríamos marchar el aritmóforo *x;* el valor que correspondiera á esta variable, cada vez que α pasara por el valor *uno,* sería una raíz positiva de la ecuación; porque, cuando su primer miembro es *cero,* la suma de los términos positivos ha de ser igual á la de los negativos.

Cambiaríamos luego el signo de todos los monomios de grado impar, construiríamos la ecuación que resultara, y calcularíamos sus raíces positivas, iguales necesariamente en valor absoluto á las raíces negativas de la ecuación propuesta.

Los aritmóforos logarítmicos no pueden representar el valor *cero* ni ningún valor negativo, pero cada una de las variables de nuestro aparato podrá oscilar entre dos límites positivos tan extensos como se quiera. Podrán representarse en los aritmóforos cantidades que se expresan por veinte, treinta ó más cifras, ó sus inversas; valores, en fin, tan grandes ó tan pequeños, como nunca aparecen en los cálculos usuales.

Para suprimir prácticamente un término, daríamos á su coeficiente un valor sumamente pequeño, y así resultaría el monomio en cuestión despreciable con relación á todos los demás. ¿Cuál será la exactitud de los cálculos?

Esta última pregunta es la más difícil de contestar.

La respuesta depende de ciertos datos prácticos que sólo experimentalmente pueden determinarse.

Nada puedo afirmar en este punto con completo conocimiento de causa; pero creo lícito esperar que el error cometido al calcular mecánicamente el valor α no exceda de tres ó cuatro centésimas, y aun me parece posible reducir mucho más este límite, construyendo el aparato con toda precisión y manejándole con cuidado.

Cuando se calcule una raíz, la cuestión es más compleja: el error será en este caso muy variable, porque depende de la naturaleza de la ecuación, y crecerá ó menguará al mismo tiempo que la derivada de x con relación á α.

De todos modos, el cálculo mecánico dará á menudo toda la exactitud necesaria; porque es frecuente en los problemas de Física, en los de Ingeniería y en otros muchos manejar datos en cuya determinación caben errores de mucha monta, ó fórmulas que no reflejan con entera fidelidad las leyes que representan, y es locura buscar en casos tales gran exactitud estirando las operaciones numéricas para obtener largas filas de guarismos.

Y otras veces, cuando se trate de cálculos que deben ser muy exactos, servirá también la máquina, que dará un primer valor aproximado, con ahorro casi siempre de la mayor parte del trabajo, aunque luego, para rectificarle, hayan de prolongarse los cálculos acudiendo á los procedimientos ordinarios.

Todas las combinaciones mecánicas necesarias en este aparato están ya ensayadas, y no es de creer que su construcción ofreciera dificultades de importancia.

Otras aplicaciones prácticas pudieran considerarse. Pero he abusado sobradamente de vuestra paciencia, y aquí termino, como empecé, pidiéndoos perdón de haberos molestado con un discurso tan árido y desabrido.

DISCURSO

DEL

EXCMO. SR. D. FRANCISCO DE PAULA ARRILLAGA

Señores:

Entre todas cuantas invenciones se han realizado ó ideado para ejecutar mecánicamente operaciones de cálculo, con ser tantas y muchas de ellas dignas de admiración, ¿hay ó hubo jamás alguna más sorprendente que la de las máquinas algébricas del ingeniero español D. Leonardo de Torres y Quevedo?

A esta pregunta que á sí mismo se hizo un egregio ingeniero y profesor francés (1), luego que conoció los trabajos de nuestro compatriota, debería yo contestar en este discurso, si el mismo matemático no la hubiera contestado á continuación de formularla; si la Academia de Ciencias de París, á propuesta de Marcel Deprez, Poincaré y Appell (2), no hubiera dado de tan raro invento el mismo honroso y público testimonio de mérito extraordinario; ó si, antes que otro alguno, nuestra Real Academia, mediante ponencia del sabio Presidente de la Sección de Exactas, D. Eduardo

(1) Maurice d'Ocagne.—*Génie civil*, del 18 de Enero de 1896.

(2) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXX, séance du 2 avril 1900.

Saavedra, no hubiese informado con el merecido encomio sobre la memoria y aparato presentados ante nosotros en 1893 (1).

Todos con perfecta unanimidad de pareceres declaran que las máquinas algébricas de Torres y Quevedo resuelven en teoría el problema del cálculo mecánico, de manera absolutamente general y completa, para la resolución de ecuaciones ó de sistemas de ecuaciones de cualquier grado, algébricas y transcendentes, con determinación de sus raíces reales é imaginarias, según principios rigurosamente matemáticos, por procedimientos directos é inmediatos, con mecanismos sencillos y algunos de singular originalidad: teoría y mecanismos comprobados en la práctica con una máquina para trinomios, con el proyecto de otra para ocho términos, y con otra tercera para la resolución de ecuaciones de segundo grado con coeficientes imaginarios, exhibida en la Exposición de París (2).

El panegírico del nuevo académico viene, pues, de antemano hecho por el mejor y más elocuente de los modos: por el elogio de sus obras, discernido por hombres y senados tan conspicuos, que á mí sólo me toca brindarle en este momento las primicias del afecto con que es en esta casa acogida su persona. A ello me autoriza la benévola designación del Presidente de la Academia, conocedor de la cariñosa amistad que con el Sr. de Torres me une hace muchos años, y sabedor del entusiasmo con que sigo desde su iniciación los trabajos que le han granjeado tan sólida reputación y aventajada fama de ingeniero sobresaliente y de matemático sutilísimo.

Es, por otra parte, superfluo todo encarecimiento de las

(1) *Anuario de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de 1895*, pág. 202.

(2) Mr. Chateau, constructor de aparatos de precisión, lleva muy adelantada, bajo la dirección del Sr. de Torres, la construcción de una máquina para el cálculo de las raíces reales de una ecuación trinomia; y Mr. Kœmgs, en su laboratorio de Mecánica de la Sorbona, construye la de segundo grado con coeficientes imaginarios.

dotes y talentos que en solemnidades como ésta es natural y debido hacer del recipendiario, pues á nadie, por ajeno que á estos estudios sea, se oculta la suma colosal de esfuerzos intelectuales que suponen labor tan ardua y concepciones teóricas y prácticas tan ingeniosas, cuyo éxito depende sólo del puro trabajo intelectual y de felices inspiraciones, que no pueden darse ni ser fecundas sino en entendimientos muy privilegiados.

También me juzgo dispensado de tratar á fondo del problema por él resuelto de modo tan cabal y en forma tan cumplida. Ahí están para eso los escritos que ha dado á luz: desde la memoria que en 1893 nos presentó é imprimió en 1895, hasta la que la Academia de Ciencias de París acordó, de su cuenta, el año pasado, publicar en su *Repertorio de sabios extranjeros* y ha sido hace poco estampada.

Tenéis además, sobre el propio tema, el discurso que acaba de pronunciar, sobrio y severo, sin otras galas que el buen decir y la esmerada corrección de vocablos y de sintaxis, cual corresponde á la exposición doctrinal de conceptos y materias del más puro Análisis matemático y sin otros aderezos que los del rigor científico y del método estricto, del que es imposible que se aparte hombre de carácter tan serio y de procederes ingénitamente y por educación tan austeros.

A los que no conocierais aquellas publicaciones, seguramente os habrá causado ahora el mismo simpático efecto que á mí me produjeron las ocho substanciosas páginas de la introducción de su primera memoria, donde en pocas líneas comienza por ampliar la idea de máquina y la definición de Cinemática de Ampère, poniendo de manifiesto la íntima analogía existente entre una máquina y una fórmula algébrica, y deduciendo racionalmente, con ejemplos tan sencillos como el de un tren epicicloidal, que limitar la Teoría de los Mecanismos á la transformación de *un movimiento en otro* sería tan arbitrario é injustificado como reducir el Álgebra al solo estudio de las funciones de dos variables; y concluye en breves renglones por dejar sentado fundamentalmente que las máquinas algébricas deben cumplir con dos esenciales condiciones: una, la de servirse de *transmisiones puramente geométricas,* ó sea sólo dependientes de su forma, lo cual garantiza su seguro funcionamiento mientras no se rompan, se deformen ó se gasten; y otra, que sólo se empleen *mecanismos sin fin,* para que los valores de las variables representados por recorridos de los móviles puedan oscilar entre amplísimos límites: conceptos y razonamientos que, como hoy habéis visto, continúan informando la teoría y la práctica de las máquinas del Sr. de Torres. La claridad y la magistral lucidez con que de nuevo ha puesto ante nuestra vista la génesis en su mente de tan fecundas investigaciones demuestran además, no sólo las facultades intelectuales de que goza y lo mucho y muy fructuosamente que las ha cultivado, sino su resuelta vocación por las ciencias exactas y, lo que es más plausible, la devoción con que á ellas se ha consagrado.

¡Por cuán distintos rumbos se hubo de encaminar su ilustre antecesor en esta Academia, Excmo. Sr. D. Alberto Bosch y Fustegueras, matemático é ingeniero también y nacido á la vida de la ciencia bajo igual régimen y disciplina escolar!

Á quien crea como yo que se malograron las altas dotes de su entendimiento por haber dedicado sus mayores afanes á la Política, quizá se le ocurra que vaya ahora á desahogar la pena que en la Academia nos causó su prematura é inopinada muerte, hablando mal de la vida pública á que desde muy joven se entregó. Nada de eso; porque también obedeció Bosch á llamamientos irresistibles de su relevante personalidad, y porque nada me choca que atraiga á los más elevados espíritus la Política, que como ciencia y como arte es la más noble profesión en que puede el hombre ejercitarse.

Bosch creyó desde su adolescencia (y lo afirmo auténticamente, porque dimos muy cerca uno de otro los primeros pasos por el mundo) que las ciencias exactas preparan y templan como ningunas otras los entendimientos para toda suerte de labores.

Tengo para mí que si, terminada su carrera en la Escuela de Caminos y en la Facultad de Ciencias, emprendió y concluyó la de Derecho, fué sólo para poder aseverar con más autoridad y conocimiento su tesis favorita de la supremacía de las Matemáticas y la posibilidad de que fueran eficazmente aplicadas, no sólo á las materias propias de las ciencias físicas, sino también á los problemas peculiares de las ciencias morales y políticas. Recordad, si no, su discurso de ingreso en esta Academia.

Y ved por cierto, los que pudisteis apreciar sus verdaderas aficiones y aptitudes sin rebozo manifestadas aquí, donde tan asidua y tan útilmente trabajó, cuán deleznables son los propósitos del hombre sobre la tierra. Cuando aquella inteligencia activa como pocas pudo reposar de tanta lucha y tanta porfía en las alturas á que por su propio esfuerzo supo alzarse; cuando su cultísimo espíritu pudo descansar, digo mal descansar y reposar; cuando pudo dedicarse á las labores políticas más adecuadas de un ingeniero; cuando acababa de ver sus iniciativas convertidas en leyes como la de imposición de servidumbres en favor de las conducciones de energía eléctrica, ya le acechaba solapada la muerte, sin miramientos á la lozanía de la edad y á la plenitud de fuerzas en que se hallaba.

No me equivoco seguramente cuando pienso que no muchos días antes de sentirse gravemente enfermo fué cuando saboreó sin mezcla ni dejos de amargura el placer de contribuir con sus especiales talentos á una de las obras, á que la política moderna y la ciencia también del ingeniero vienen más obligadas: á llevar á la legislación, con espíritu de caridad cristiana nunca bastante recomendable, todos los progresos de la Mecánica que mitiguen dolores y alivien miserias de los obreros. No es posible que hayáis olvidado aquella satisfacción que en la última ó la penúltima sesión de la Academia á que concurrió rebosaba de su expresivo semblante, al presentarnos el álbum en que se van sucesivamente recopilando en el extranjero los artificios accesorios, los mecanismos anejos á la maquinaria industrial, para prevenir, impedir, ó cuando menos aminorar, los terribles y frecuentes accidentes á que en los talleres y en las fábricas, en las minas y en las obras, los pobres operarios se ven expuestos. Había sido él nombrado para entender en tan benéfico asunto; y se proponía sin duda llevar á tal comisión con toda su influencia política todas sus facultades de ingeniero, según entusiastamente nos dijo; y he ahí que, cuando tan laudables propósitos le animaban y en el punto de empezar á ponerlos por obra, hubo de desafiar indefenso los rigores de una noche inclemente y de contraer virulenta enfermedad que dió con su cuerpo en el sepulcro.

La Academia honra su memoria dándole preclaro sucesor en el autor de los automatismos, de que tengo ahora que deciros, por deber y por gusto, breves palabras.

* * *

En punto á máquinas, y antes de hablar de las algébricas, debo confesar ante vosotros que cualquiera de ellas, la más sencilla de las industriales, tiene para mí algo de prodigio, ó me produce impresiones de tal, á contar desde el motor utilizado, así sea el menos artificioso de todos, el aire, por ejemplo.

Habituado á figurármele corriendo suelto, y sin más aparente objeto que orear los huertos y ofrecer mil olores al sentido, ó menear los árboles

> Con aquel manso ruido
> Que del oro y del cetro pone olvido,

no dejo de verle con cierta extrañeza mover incansable las aspas del más erguido de los molinos, ó encerrarse comprimido para impeler por expansión los barrenos perforadores de un túnel, y celebro por venturosa la ocurrencia de quien supo sujetar al trabajo elemento tan sutil y tan libre de suyo.

Igual impresión experimento cuando comparo el suave calor del fogón campesino, arrojando plácidamente ligeros humos azulados por la humilde techumbre, con el fuego mismo puesto en el hogar de una locomotora, que respira con estrépito por su negra y férrea chimenea, arrastrando por montes y llanos larga y pesada cola de carruajes, ó cuando considero que la electricidad, engendradora del rayo, se somete dócilmente á servir de agente propulsor de los coches de un tranvía, sin proferir otra queja que el tenue silbido que se escapa del hilo al paso del *rodante.*

Los motores, desde sus receptáculos, ponen en juego ruedas y piñones, correas y árboles, bielas y excéntricos en complicados enlaces, para manejar con perfecta regularidad herramientas de mil formas y clases, que realizan trabajos ó elaboran productos con la fuerza, el primor y la suavidad que el más hábil operario no llega á sobrepujar; y la impresión que la máquina en acción me produce es la de que motor, mecanismos y herramientas, con estrépito ó en silencio, hacen lo que hacen con intención deliberada y decisión irresistible. De ahí el prodigio ó la impresión de asombro, que sólo la costumbre llega por entero á disipar.

No la desvanecen el conocimiento de la máquina ni el científico análisis de sus elementos; pues aun los mismos hombres dedicados á las artes mecánicas se sienten llevados á ver en la máquina el espíritu de quien la inventó.

Y es que, real y efectivamente, tal espíritu allí se encuentra incorporado á la materia, por virtud del ordenamiento intencionadamente dirigido á un fin, que el inventor señaló, y persiste en los aparatos y piezas algo de su mente y de su voluntad, dado que sigue la máquina ejecutando lo que aquél ideó y quiso.

Y, hablando en puridad, es prodigioso el telar mecánico y el tren de laminar acero y la máquina de coser y la de remachar blindajes, sólo y principalmente porque la materia inerte obedece sumisamente al inventor y mantiene en sus mecanismos y realiza la idea que á su construcción presidió, tal y como si fuese capaz de ejecutar por sí determinada obra; y esto sin contar con lo mucho que se ignora de cierto género de máquinas, como las eléctricas, en cuyas funciones tantos misterios y tantas cosas ignoradas intervienen.

Pero el asombro se acrece y el prodigio se reviste de caracteres de magia al contemplar máquinas de ejecutar operaciones de cálculo.

Al fin y al cabo, las máquinas industriales no hacen sino lo que, si bien en peores condiciones, el hombre puede realizar con sus manos; pues un telar mecánico, aun de aquellos de Lyon, que reproducen en seda pinturas y cuadros famosos, no hace cosa en substancia distinta de lo que trama y urde grosera y toscamente el tejedor de aldea, con el hilo moreno torcido por el huso entre los dedos de la aldeana.

Pero ¡idear, construir y montar máquinas ó aparatos mecánicos para sumar, restar, multiplicar y dividir, extraer raíces y aun resolver ecuaciones! Pues ¿no es necesaria para operar con los números la intervención continua de la mente humana? ¿Es labor puramente material la del cálculo aritmético ó algébrico, para encomendarla á ruedas ó á discos movidos por un manubrio?

Bueno que se construyan máquinas para fabricar objetos, para librar al hombre de la esclavitud de la materia; para, según frase admitida en elogio y definición de la maquinaria, reemplazar al trabajador, sustituir con ventaja sus brazos ó ahorrarle esfuerzos; pero pretender cambiar por mecanismos el entendimiento humano y hacer manufactura de los productos intelectuales, parece temeridad insana. De ahí á fabricar mecánicamente estatuas en emulación con Fidias, ó pintar cuadros á millares en competencia con Velázquez, creyérase que no hay sino dar un paso.

Así tiene que pensar el vulgo, de quien yo ahora estoy haciéndome eco, mientras no le enseñen cómo Pascal inventara su máquina de sumar para aliviar á su padre, Intendente de Hacienda en Normandía, del pesado trabajo de la contabilidad financiera, ó quién sabe si para librarse del enojo de *sacar las cuentas* que á hijo tan despierto le encomendasen en la oficina paterna; y así tiene que pensar mu cha gente antes de que se le explique cómo, no ya la simple suma en la máquina de Pascal, sino el Álgebra con todas sus operaciones en las máquinas del Sr. de Torres y Quevedo es, hasta cierto punto, labor mecánica; y aun así tienen que sentir, ya que no pensar, también los matemáticos que, no por entenderlos, dejan de calificar de admirables tales invenciones y artificios. Y buena prueba de sus dificultades es que, hasta el día de hoy, el problema no estaba bien planteado, ni por consiguiente resuelto en términos generales y completos, tal como el Sr. de Torres y Quevedo le ha planteado y resuelto, sin más precedente, á mi juicio, aunque embrionario en la teoría y deficientísimo en la práctica, que el de Stamm en sus *Ensayos de Automática pura* (1863).

Lo que en las máquinas industriales podrá ser sencillo prodigio de incorporación de una idea del inventor, mediante el ordenamiento de mecanismos para un fin dado, en las máquinas aritméticas, y más aún en las algébricas, el prodigio toma vuelos de portentoso.

Al oir al Sr. de Torres y Quevedo en su discurso de esta tarde, no os habrá parecido nada de esto, sino cosa fácil y llana plantear de golpe el problema y resolverle, estudiándole desde el primer sencillo elemento y remontándose hasta sus máquinas por escalones muy suaves y asequibles.

Ha comenzado por deciros, como verdad inconcusa y universalmente reconocida, que todo aparato que permita reproducir á voluntad un fenómeno físico, cuyas leyes estén formuladas matemáticamente, puede en rigor transformarse en máquina de calcular, representando los elementos del fenómeno á las variables, y estando todas éstas sujetas, como aquéllos, á la fórmula que es expresión del fenómeno.

El principio es evidente y la subsiguiente reflexión muy obvia, y lo son de la propia manera y sucesivamente uno por uno todos los grados de la indagación en el discurso del Sr. de Torres, sobre todo después de haber identificado casi la Cinemática con el Álgebra, mediante una definición de *máquina*, idéntica á la de fórmula algébrica.

« Pues, con todo y con eso, insisto yo en mi asombro y en lo sorprendentes que las máquinas algébricas son, aun antes que en la práctica, en la propia teoría.

Advertid, en efecto, que para fundarla ha tenido el señor Torres y Quevedo que elevarse á los primeros conceptos y más fundamentales principios de las ciencias que intervienen en el problema.

Ha empezado por recordarnos que los números gobiernan el mundo, no como dijo Platón ó como imaginaron los cabalistas, sino tal como aquel sublime texto expresó al decir que todo está hecho con número, peso y medida; por donde no hay fenómeno en el cosmos que no esté realizando operaciones matemáticas y ejecutando mecánicamente cálculos; sólo que, para que sea por nosotros con tal objeto utilizado, menester es que nos sea bien conocida su ley. De que la cantidad y sus formas es lo que hay de más universal en el mundo, sácase la deducción de que el problema exige que el fenómeno, además de ser por su ley matemática bien conocido, sea también el más sencillo; el movimiento, que, mejor que fenómeno, debería llamarse el fenómeno por antonomasia, ó *substratum* de todo fenómeno. Sólo con aparatos que no realicen sino puros movimientos se estará en las mejores condiciones; porque si la cantidad es la condición fundamental de todo fenómeno, y el movimiento es el fenómeno de todo fenómeno, claro es que se habrá llegado así á la casi identificación de cantidad y de movimiento, y por tanto á la íntima conexión buscada entre el Álgebra y la Cinemática, entre la fórmula y la máquina. Con esto, y con emplear en la forma que antes dije las definiciones de máquina y de fórmula, queda sentada sólidamente la doctrina.

Depurada ésta por sucesivas abstracciones, no pudo memos de engendrar la teoría de las máquinas, por decirlo así, más ideales de todas; es decir, de máquinas destinadas á producir movimientos, sin otro fin ni propósito que el de que los trayectos recorridos por móviles representen los valores que pueden tener las variables de una fórmula.

***

No está, sin embargo, el mérito de la invención de las máquinas algébricas, ni lo más difícil de tal empeño, en fundar la teoría, en establecer las condiciones con que han de cumplir y en demostrar la posibilidad de construirlas, sino en dedicarse á renglón seguido á idear mecanismos al efecto, y á elegir entre ellos los más propios y de mejor y más fácil funcionamiento.

Que el mundo se rige principalmente por las leyes de la cantidad es cosa sabida, y no es raro hoy probarlo experimentalmente en muchos casos y en casi todas las ramas de la Física, como antes de ahora no lo fué metafísicamente razonarlo desde que se dió por la más característica propiedad de la materia, según los filósofos y en contraposición al espíritu, la mensurabilidad y la composición y descomposición opuestas á la simplicidad.

Precisamente toda la historia del desarrollo de las ciencias en el siglo XIX ha dado por juicio definitivo el de que una ciencia se debe reputar por tanto más adelantada cuanto más y mejor se le aplica la Matemática, dándose con eso á entender que el fondo de todas ellas se rige por leyes de la cantidad, y que, cuanto más patentes se hacen éstas, mejor entendidos y explicados se consideran los fenómenos. Más todavía: la Matemática reacciona sobre las ciencias positivas por virtud de haber venido á aplicarse á ellas, hasta el punto de que da demostraciones de cosas que las ciencias físicas tal vez nunca llegarían por sus propios medios á dilucidar.

Recuerdo á este propósito ciertas apreciaciones de Bertrand acerca de las hipótesis, en que con su ingenio finísimo decía que el éter, que ningún ojo ha visto ni mano alguna ha tocado y que la Física no puede por tanto mostrar, está más que suficientemente demostrado por el razonamiento matemático usado para esclarecer los fenómenos de que se supone causa inmediata.

El mérito de esta primera parte de la teoría de las máquinas de calcular del Sr. de Torres y Quevedo estriba, á mi juicio y principalmente, en haber invertido el problema, generalmente planteado en la ciencia, de aplicar la Matemática pura á otras ciencias, puesto que él inversamente aplica á la Matemática la Cinemática. Claro es que lo hace á beneficio de ser ésta casi pura matemática; pero insinuando que del propio modo, más adelante, y avanzando en el conocimiento de los fenómenos físicos y mejorando los medios de medir sus elementos primarios, se llegará á hacer aplicaciones de cualesquiera de ellos á la labor del cálculo.

Además, el Sr. de Torres y Quevedo deriva de sus invenciones mecánicas la posibilidad, y en muchos casos la conveniencia, de servirse de aparatos cinemáticos, como él recientemente practicó en una Conferencia del Ateneo, para muchas demostraciones científicas, con ventajas sobre las demostraciones efectuadas sobre figuras. Éstas, con efecto, tienen que complicarse mucho ó repetirse con variaciones para las distintas fases de la demostración, mientras el aparato las presenta sucesivamente en su funcionamiento. Ábrese por tal manera nuevo y fértil campo en la investigación, y agrándanse los horizontes de la enseñanza, á poco que su ejemplo sea imitado (1).

Mas esto es lo difícil: cuando se considera que el empeño de calcular mecánicamente, iniciado por Pascal en 1642, ha producido tantas invenciones, ha absorbido tantas inteligencias y tan eximias, ha ocasionado tantos gastos (2) y ha originado á la par tantos fracasos, hay para enaltecer más y más á quien, desde los fundamentales principios ya expuestos, ha descendido hasta la construcción de máquinas no aritméticas, sino algébricas, sin perder en tal descenso ni una tilde de la generalidad teórica del problema.

Quisiera yo disponer de la erudición indispensable y de la

(1) Cosa es en este punto de citar las *Aplicaciones de la Geometría cinemática* del Académico de la Real de Ciencias y Artes de Barcelona D. Luis Canalda. Boletín de Abril de 1900.

(2) De Leibnitz se dice que gastó más de cien mil francos sin pasar del invento de Pascal.—Babage invirtió buena parte de su fortuna y 17.000 libras esterlinas, con que sucesivamente le subvencionó el Gobierno inglés; y Schentz, padre é hijo, gastaron fuertes sumas del Rey de Suecia y de la Academia de Estocolmo.

amplitud de discurso necesaria para narrar la historia de los aparatos y mecanismos ideados ó realizados en los siglos XVII, XVIII y XIX; pero, á falta de ellas, seáme dado siquiera apuntar algunas escuetas afirmaciones.

Las máquinas calculadoras no son los únicos artificios ideados para simplificar la prolija y penosa tarea de calcular: son no más que una de las dos especies del primer género de los cinco en que los clasificó D'Ocagne, en sus amenas conferencias de 1893, en el Conservatorio de Artes y Oficios de París.

Mucho más antiguos que las máquinas son los instrumentos formados por varillas, reglas ó listones, de que son tipo los de Neper (1617), pero que está averiguado fueron aplicados para efectuar multiplicaciones en el siglo XV por algún matemático árabe. Son igualmente anteriores á las máquinas, aunque por pocos años, las reglas y círculos de cálculo que, fundados sobre el principio de Gunter (1620), son hoy corrientes y muy útiles, después de las modificaciones de Lallemand y Mannheim y de sus combinaciones con otros órganos en el aritmoplanímetro de Lalanne (1840), con ventaja después sustituído por los planímetros.

Los cálculos por trazados geométricos (que debieron de ser usados por los griegos), elegantes y expresivos, han llegado á constituir, por otro lado, toda la *Estática gráfica* en estos últimos sesenta años. Las tablas de simple, doble y triple entrada tienen su primer rudimentario precedente en la tabla pitagórica de productos de los números dígitos.

Las tablas gráficas ó *abacos* han progresado en un siglo, desde Pouchet acá, y después de pasar por la aplicación del principio de la *anamórfosis*, establecido por Lalanne y generalizado por Massau, hasta constituirse en cuerpo de doctrina en la *Nomografía* de D'Ocagne, autor de los abacos de puntos *isopletos*.

***

Propiamente máquinas de calcular, aparatos mecánicos ó automáticos, son invenciones que datan del tiempo de Pascal y se clasifican en tres tipos: aritmómetros, planímetros y máquinas algébricas, nombres que, aplicados correctamente, los definen y distinguen, como se definen y distinguen los números, el elemento diferencial de una función, y la función misma.

Los aritmómetros no alcanzan á otras operaciones que á las de la cantidad concreta, no á las de la continua, y se caracterizan cinemáticamente por la discontinuidad consiguiente de sus movimientos. Desde que Pascal construyó el suyo y desde los infructuosos conatos de Leibnitz, casi transcurrieron dos siglos sin llegarse á resolver bien, fácilmente y por completo el problema de la multiplicación, hasta que, en 1820, Thomas de Colmar inventó y construyó el que se emplea hoy en casi todos los establecimientos científicos y técnicos para ejecutar todas las operaciones aritméticas, y que ha sido objeto de constantes perfeccionamientos de fabricación. En este género de máquinas no se sabe con certeza hasta dónde llegó el inglés Babage; pues después de su primer aritmómetro, fundado en el empleo de diferencias sucesivas de una función algébrica y entera, fué ideando sucesivamente, y á beneficio de las liberales subvenciones del Gobierno de la Gran Bretaña, otros hasta el último, cuyas piezas dejó construídas y sin montar. De él esperaban mucho su autor y su país, y parece que tenía alguna analogía con los telares Jacquard, á causa de ciertos cartones picados que jugaban gran papel en la invención.

Son los planímetros de todos conocidos, utilísimos aparatos integradores, universalmente usados para la determinación de áreas, y que ofrecen caracteres muy diversos y mejoras cada vez más interesantes, desde el que Gonella ideó en Florencia (1825), hasta el que D. José Ruiz Castizo, meritísimo Catedrático de la Facultad de Zaragoza, construyó en 1898 y el que posteriormente proyectó hasta llegar á la obtención mecánica de $\int y^3\,dx$ haciéndole á un tiempo planímetro, integrador de movimientos estáticos é integrador de tercer orden.

Ya comprenderéis, por sólo esta reseña, que ni aritmómetros ni planímetros tienen de común cosa alguna, si no es genéricamente hablando, con las máquinas del Sr. de Torres y Quevedo, que figuran en el tercer grupo de los mecanismos de calcular.

¿Cuáles son las máquinas algébricas hasta ahora ideadas ó realizadas?

Ideadas han sido varias, si bien no en tan gran número, naturalmente, como los planímetros y aritmómetros; mas ninguna de ellas puede invocarse como precedente de las que ahora alabo.

Emprender su estudio en toda su generalidad, lo hizo, aunque de distinta manera, antes que el Sr. de Torres y Quevedo, solamente, que yo sepa, Ernesto Stamm, Ingeniero dedicado al estudio de los talleres de hilados y tejidos automáticos, quien en 1863 dió á luz un opúsculo muy instructivo sobre *Automática pura* (1). Nada realizó; pero escribió sobre la posibilidad de realizar movimientos dados por la ejecución automática de las operaciones indicadas ó contenidas en las expresiones ó funciones algébricas, con ayuda de las cuales se pueden representar estos movimientos; todo por medio de la recta, el círculo y el plano combinados.

Stamm por su profesión dió en este género de investigaciones al estudiar los diferentes sistemas de máquinas, en las que ha habido que recurrir á platillos y rodajas ó á conos movidos por correas para la producción de movimientos de curso indefinido. Parecióle que todas estas combinaciones se fundían en una teoría general, cuyas bases se debía buscar más bien en las evoluciones misteriosas del

(1) *Essais sur l'Automatique pure.*—Milán. G. Daelli y Co., editeurs du Politecnico, et Paris, Mallet-Bachelier, imprimeur-libraire de l'Ecole Polytechnique et du Bureau des Longitudes.—Quai des Augustins, 55.

pensamiento creador de sus inventores que en las teorías geométricas elementales, por medio de las cuales se exponen estas mismas combinaciones en los tratados de tecnología. Así se explica que pusiera todo su empeño en generalizar el principio fundamental de los planímetros y en construir expresiones algébricas por sucesivas *genealogías* ó integraciones.

Tal principio conduce, como queda dicho, al empleo de platillos y rodajas, cuya insuficiencia práctica, prescindiendo de los inconvenientes de las transmisiones por contacto, tiene el Sr. de Torres y Quevedo patentemente demostrada en su memoria de 1895.

Stamm por su parte, como los demás inventores, no apreció la dificultad, que convierte en ilusorios los resultados prácticos, de representar entre amplios límites directamente, por recorridos de los móviles, las variables mismas; dificultad vencida por Torres y Quevedo con la mera adopción de los logaritmos de los valores de las variables, á los cuales corresponden los trayectos recorridos por los móviles, logrando al propio tiempo la constancia en los errores.

Cúmpleme también citar en este punto una invención del Sr. Guarducci, ingeniero italiano inteligentísimo, al servicio del Instituto Geográfico de Florencia, con cuya amistad me honro, y que precisamente en 1892, cuando el Sr. Torres y Quevedo redactaba su primera memoria y construía su primera máquina, presentaba á la Academia *dei Lincei* de Roma una memoria sobre el modo de resolver mecánicamente un sistema de ecuaciones lineales y de determinar las raíces reales de una ecuación de cualquier grado. Y le cito en este punto, porque, á mi juicio, su invención tiene algo de los aritmómetros y mucho de los generadores de Stamm en su último intento, en el de resolver parcialmente ecuaciones de cualquier grado (1), sirviéndose de platillos, rodajas y varillas.

---

(1) *Sulla risoluzione meccanica delle equazioni.* Memoria del

Y otros y otros habrá quizá, desconocidos para mí, que hayan ideado máquinas algébricas; debiendo advertir que el mismo Marcel Deprez, ponente ante la Academia de Ciencias de París, para juzgar de la obra de Torres, ideó una, fundada en los desarrollos de sen.$^m x$ y cos.$^m x$, sin que la cite, ni otra alguna, en su informe.

Hay, por último, un órgano en las máquinas de nuestro novel compañero, el husillo sin fin, destinado á sumar la construcción de un monomio con la de otro, que realza á mucha altura su inventiva poderosa, y le acredita de mecánico originalísimo. Ejecuta automáticamente tal husillo el cálculo de logaritmos aditivos de Gauss, expresando la relación

$$Y = \log. (10^x + 1).$$

Se hacen lenguas de su ingeniosísima traza y artificio cuantos de él se dan cuenta ó tienen noticia; y en él veo yo también, en efecto, lo más culminante de la invención.

Mas no me maravilla sólo porque construye mecánicamente el logaritmo de una suma en función de los logaritmos de los sumandos, sino porque además, al idearle, realizando un peregrino invento, lo consigue sin tanteos, deductiva y directamente, como proceden los matemáticos de verdad, como ha procedido en todo el Sr. de Torres y Quevedo: leed en este punto su memoria, ó meditad en su discurso, y quedaréis edificados.

Así nos enseña á todos cómo llega á lo que quiere llegar, quien tenga medios de llegar, se entiende; así se da á conocer la excelsitud de las Matemáticas; así se demuestra que las ciencias exactas son lógica pura y engendro directo de la inteligencia; así se ve que el cerebro humano recibió el soplo divino, para contener un espíritu hecho á imagen y semejanza de Aquel que impuso orden y destino á la máquina del Universo.

Dott. Federico Guarducci.—Roma, tipografía della R. Accademia dei Lincei.—1892.

Y así, por fortuna suya y en honra y prez de la ciencia patria, ha adquirido D. Leonardo de Torres y Quevedo el derecho de inscribir sus solariegos apellidos en el libro de la Historia de las Ciencias, y en su capítulo con más limpios timbres blasonado, cual es el de la Historia de las Matemáticas.