REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

Del arrastre por corrimiento relativo de estratos flúidos

DISCUSO DEL ACADÉMICO

E. TERRADAS

LEÍDO EN LA SOLEMNE SESIÓN INAUGURAL DEL CURSO
DE 1942-43 EL DÍA 17 DE MARZO DE 1943

MADRID
S. AGUIRRE, IMPRESOR
General Alvarez de Castro, 40. Teléf. 30366
1943

INTRODUCCION

El análisis de la superficie de separación de dos medios flúidos, caracterizados por sus densidades respectivas, o sus velocidades distintas a uno y otro lado de la superficie límite, ofrece gran interés teórico, y no menor interés en las aplicaciones. De problemas de esta índole depende la forma y estabilidad del oleaje provocado por el viento, el arrastre de las aguas y desniveles que interesa conocer en obras ribereñas y portuarias y en mediciones y cálculos de Geodesia; la estructura de vientos y ciclones y la circulación oceánica de corrientes; la formación de la denominada capa límite en Aerodinámica y su dependencia respecto de la velocidad hasta valores que alcanza la del proyectil; la distribución de corrientes atmosféricas provocadas por una regulación determinada de temperatura, la misma resistencia de los buques flotantes y submarinos, la lubricación, etc.

Hay propiamente dos cuestiones involucradas en el problema: una se refiere a la forma y estabilidad; la otra se refiere a la resistencia.

Para el análisis de la primera puede ser suficiente plantear el problema mediante las ecuaciones de flúidos perfectos, en los cuales no entran más elementos peculiares que la presión y la continuidad.

Para el análisis de la resistencia, es preciso, en general, introducir el rozamiento interno, sea en forma de constante molecular, sea, y es más frecuente, en forma de coeficiente de transporte, variable con las coordenadas, con la velocidad, con la temperatura.

Sólo en algunos casos, v. gr., en el cálculo de la resistencia inducida de perfiles alares y en el de la resistencia por alteración del espejo de agua en la progresión de un buque, se pueden calcular estas resistencias sin introducir coeficiente alguno de disipación de energía.

Para problemas planos puede ser suficiente para el análisis servirse de una primera generalización de las fórmulas de Navier, las cuales no tienen más que una constante, el coeficiente de viscosidad. La generalización se logra admitiendo que en lugar de ser constante el coeficiente, es función de las coordenadas.

Problemas más complicados pueden exigir que se introduzca un sistema de coeficientes de transporte constantes o variables, constituyendo un tensor. A medida que se pretende mayor ajuste de la teoría con la realidad, es necesario mayor número de elementos paramétricos, lo que demuestra que el problema no está resuelto, es de suyo difícil y exigirá aún renovadas tentativas de los analistas.

Otra dificultad reside en las condiciones en los límites, lo que fué señalado, en general, por Hadamard.

No hay método de análisis matemático que resuelva las complicadas ecuaciones más generales de la hidrodinámica de flúidos heterogéneos y que permita calcular las fuerzas resultantes de la presión y del rozamiento interior. Exige talento singular de analista distinguir la relativa importancia de los términos diversos de las ecuaciones aplicadas a un caso concreto, simplificándolas de modo que, sin perder lo esencial del problema, quepa referirlo a uno de tipo conocido, del calor, del potencial, de característica ondulatoria, o de simple integración de una ecuación diferencial o integral ordinaria, con el que se pueda operar obteniendo resultados susceptibles de contraste con la experiencia.

De una exposición a grandes rasgos de problemas de esta índole va a tratarse en lo que sigue, no sin alguna contribución personal.

Fué propósito inicial examinar ambos temas, el de la forma y su estabilidad y el de la resistencia; pero, dada la amplitud de ambos y la carencia de tiempo, ha sido preciso concretar, de momento, la atención a uno de ellos, el de la resistencia por viscosidad (1).

(1) Por enfermedad del autor e improrrogabilidad de plazo y fecha de lectura, han debido acortarse mucho las cuatro partes de que consta este discurso y suprimirse las dos últimas sobre discontinuidades, cuerpos compresibles y condiciones límites en Hidrodinámica.

PRIMERA PARTE

DEL ARRASTRE DE LAS AGUAS MARINAS POR EL VIENTO

I

Del desnivel provocado por el viento en un canal rectilíneo de sección constante.

Un primer problema simplificado es el siguiente: calcular el desnivel que entre dos puntos, en un canal uniforme de gran longitud, produce el viento. Llámese h a la sonda de fondo, V la velocidad del viento, rasante al espejo del agua. Se admitirá logrado un régimen estacionario que mantenga el nivel en cada punto, lo que equivale a admitir un régimen estacionario de corrientes en el canal.

La corriente de agua, junto al espejo, irá en dirección del viento; pero para mantener invariables los niveles, si hay arrastre en una dirección, debe haberlo también en la contraria, merced a la corriente rastrera originada por el desnivel.

Sea un sistema de ejes x, z, horizontal según el lecho el primero y en la dirección de V, vertical el otro según la ascendente. Llámese W a la velocidad horizontal del agua. La forma estacionaria plana de la superficie que separa aire y agua ha de resultar del equilibrio de la presión por el rozamiento interno o viscosidad del agua.

Sea μ el coeficiente de viscosidad, la fuerza horizontal por unidad de área es $\tau = \mu \frac{dW}{dz}$. Sean g la aceleración de la gravedad, ρ la densidad, γ el ángulo de inclinación del espejo, que se supone muy pequeño. El equilibrio de un prisma vertical, dada la ausencia de toda aceleración vertical, conduce a la ecuación siguiente:

$$g \rho \operatorname{sen} \gamma = \frac{d}{dz}\left(\mu \frac{dW}{dz}\right)$$

Si se admite que no hay corrimiento en el fondo, la solución que expresa W en función de z debe dar $W = 0$ para $z = 0$.

Si μ es constante, la ecuación diferencial conduce a una solución W (z) según una parábola. Las dos constantes de integración resultan de ser $W = 0$ para $z = 0$ y de ser el flujo total nulo:

$$\int_0^h W \, dz = 0.$$

Del valor de W que así se obtiene

$$W = \frac{g \rho}{\mu} \operatorname{sen} \gamma \, z \left(z - \frac{2}{3} h\right),$$

resulta la llamada fórmula de Ekman (1):

$$\tau = \frac{2}{3} \rho g h \operatorname{sen} \gamma.$$

El valor de W rasante es

$$W = \frac{1}{3} \frac{g \rho}{\mu} \operatorname{sen} \gamma \, h^2.$$

Dado τ, se hallaría de este modo γ y, por lo tanto, W. En realidad, interesa relacionar γ con V, velocidad del viento; velocidad que debe ser pequeña si no ha de alterar el espejo plano de las aguas con movimientos ondulados, a menos de admitir que los valores de observación son valores medios en el tiempo, niveles medios de mareógrafos o datos proporcionados por instrumentos de medida insensibles al pequeño período del oleaje.

Eliminando γ, se halla una relación entre la velocidad superficial de arrastre y la fuerza τ que la provoca.

$$W = \frac{1}{2} \frac{\tau h}{\mu}.$$

El coeficiente μ no es constante; disminuye con la sonda. Cerca del fondo es muy pequeño por la dificultad que ofrece el suelo al desenvolvimiento de balones turbulentos.

Si en vez de suponer μ constante, se escribe con Sverdrup y Fjelstad, ε cantidad pequeña,

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{z + \varepsilon}{h + \varepsilon} \right)^n,$$

(1) Ekman: Beiträge zur Theorie der Meeresströmungen. *Annalen der Hydrographie*, 1906.

Id.: Eddy viscosity and Skin friction in the Dynamics of Winds and Ocean currents. *Memoirs of the Royal Astronomical Society*, 1928.

resulta una nueva fórmula para la distribución de la densidad según la altura, y un nuevo valor de τ según la inclinación γ. De la medida y ajuste de los resultados de la experiencia, v. gr.: por los valores de W según z, se deducen los valores de n, μ_0 y ε, así como τ. Si $\varepsilon = 0$,

$$4 g \rho h \operatorname{sen} \gamma = \tau (3 - n) (2 - n) (1 - n)$$

con el valor $n = 0{,}5$ resulta la fórmula de Sverdrup (1):

$$\tau = \frac{15}{32} \rho g h \operatorname{sen} \gamma$$

a igualdad de τ, la fórmula de Sverdrup da menos inclinación que la de Ekman; el punto donde la corriente se anula es más profundo que el punto (distinto del fondo) correspondiente en la fórmula de Ekman.

En cada caso concreto habrá un valor más conveniente de n y un valor de ε que la distribución de temperaturas y salinidad alteran. Fjelstad (2) ha obtenido para algunos casos $n = 0{,}75$, $\varepsilon = 0{,}1$. Con estos valores, a igualdad de τ, la inclinación γ es mayor que la que da la fórmula de Sverdrup.

En la observación hay que llevar en cuenta el efecto debido a la diferente presión barométrica en los distintos puntos del canal. El efecto consiguiente (estático) es aparte del efecto dinámico hasta ahora tratado. También, en caso de aguas estratificadas, hay una variante, más difícil de ajustar.

En las observaciones efectuadas en mares cerrados o en gol-

---

(1) Sverdrup: The waters of the Nordsiberian Shelf. *Norvegian expedition with the Maud.*, 1918-1925.

(2) Fjelstad: *Beitrag zur Theorie der Winderzeugte Meereströmungen: Gerlands Beiträge*, 1929.

fos en forma de canal, junto a las corrientes, se da la intensidad V de los vientos ,sea en m/s, sea en escala Beaufort.

Las fórmulas que relacionan τ y γ permiten calcular la fuerza de arrastre τ por la observación de γ.

2

De la velocidad del agua en la superficie en relación con la del viento.

Si V ha de dar lugar a un valor de τ, es preciso que V varíe con la altura y se establezca una condición límite que relacione V y W en el espejo. Por ejemplo: $V = W$, y siendo μ' el coeficiente de viscosidad del aire,

$$\tau = \left(\mu' \frac{dV}{dz}\right)_{z=h}.$$

De tal modo, a cada valor supuesto conocido de W ó V correspondería un valor de γ. La teoría necesita de la condición en el límite y de la distribución de V con la altura.

En la práctica, el valor de V se mide a cierta altura sobre el nivel de las aguas, de modo que el valor rasante, si se supone igual a W, no será en general el dato experimental de los anemómetros. Sea V_1 el valor que dan éstos, los que se supondrán colocados a un metro de altura sobre el espejo de las aguas.

En la hipótesis de que a partir de un metro y para alturas mayores, al largo del canal, la velocidad no varía, el problema queda referido al de relacionar γ con V_1 mediante una hipótesis sobre la distribución de V desde $V = W$ hasta $V = V_1$.

Este problema se reduce al de la variación de μ' con la altura si admitimos a lo largo del canal un gradiente constante de presión, pues

$$-\frac{dp}{dx} = G = \frac{d}{dz}\left(\mu' \frac{dV}{dz}\right).$$

Mucho menos ajustado a la realidad que para el agua, es admitir aquí μ' constante.

Si con una hipótesis adecuada para la variación de μ' con z (y eventualmente con V_1) se resuelve la ecuación anterior, aparecen dos constantes a determinar, por ser $V = V_1$ a un metro y $V = W$ la velocidad rasante. La circunstancia de ser $\mu' \dfrac{dV}{dz}$ igual a τ para el nivel del espejo de agua permite relacionar entre sí las tres cantidades V_1, W, γ.

Introduciendo el valor de γ en función de W o de W en función de γ se puede deducir una relación teórica entre V_1 y W o entre V_1 y γ.

Taylor (1) dió a conocer, para la llanura de Salisbury, una

---

(1) Taylor: *Skinfriction of the Wind on the Easth's surface: Proceedings of the Royal Society*, 1916, vol. 92.

En lo que sigue se indica bibliografía complementaria sobre desniveles debidos al viento y modo de observarlos y establecer correlaciones con la presión atmosférica.

Colding: Nogte Undersogelser over Stormen over Nord og Mellem Europa. *Academia de Ciencias de Kopenague*, págs. 234-247, 1880.

Dinklage: Oberflächenströmungen in südwestlichen Teile der Ostsee. *Annalen der Hydrographie*, 1888.

Ortt: Einfluss des Windes auf die Gezeiten. *Annalen der Hydrographie*, págs. 200-207, 1897.

Witting: *Hydrobiologische Untersuchungen*. Helsingsfors, 1908.

Witting: Zur Kenktniss des vom Winde erzeugten Oberflächenströmes, 1909. *Annalen der Hydrographie*, pág. 193.

Krümmel: *Handbuch der Ozeanographie*, tomo II, pág. 534. Stuttgart, 1911.

Thorade: Die Geschwindigkeit vom Trifftströmungen. *Realschule Eilbeck*, pág. 49. Hamburgo, 1913-14.

Leverknick: *Ueber den Einfluss des Windes auf die Gezeiten*. Berlín, 1915.

Hayford: Effects of Winds on the great lakes. *Publicaciones Carnegie, Washington*, 1922.

fórmula que relaciona τ con V_1^2, siendo ρ la densidad del aire y K un valor que oscila entre 0,004 y 0,0016:

$$\tau = K \frac{1}{2} \rho V_1^2 .$$

Esta fórmula permite relacionar V_1 y γ si se utilizan las fórmulas de Ekman, Sverdrup, etc. Según Ekman, la fórmula conviene a una superficie libre de agua y coincide con la que resulta de la fórmula de Colding, que se da a continuación.

Fórmulas análogas son las siguientes, obtenidas con valores experimentales y la fórmula indicada de Ekman:

Thorade: Schwankungen der Wasserspiegels. *Archiv der deutschen Seewarte*, 1923.

Proudman: Tiwe relations in meteorological effects on the *Sea. Proceedings of the London Mathematical Society*, págs. 140-49, 1924. (Véase también el suplemento geofísico de las *Monthly Notices*, págs. 196-209, 1929.)

Doodson: Meteorological Perturbations of Sealevel and Tides. *Geophysical suplement to Monthly Notices*, pág. 124, abril 1924.

Terada y Yamaguti: On the effects of Wind on Sea level. *Japonese Journal of Astronomy and Geophysics*. Tokio, 1926.

Thorade: *Probleme der Wasserwellen*, págs. 172-180. Hamburgo, 1931.

Palmen: Ueber die Einwirkung des Windes auf die Neigung der Meeresoberfläche. Commentationes physico-mathematicae. *Societatis Scientiarum Fennica*, VI, 14, 1932, con bibliografía.

Palmen: Zur Bestimmung des Tangentialdrucks des Windes auf die Meeresoberfläche mittels Wasserstandsbeobachtungen. *Annalen der Hydrographie*, pág. 435, 1932.

Schultze: Die nichtperiodische Einflüsse auf der Gezeiten der Elbe bei Hamburg. *Annalen der Deutsche Seewarte*, 1935.

Rossby and Montgomery: The layer of frictional influence in Wind and Occean currents Papers on phys. Occeanography and Metereology. *Massachussets Institute of Technology Cambridge*, vol. III, núm. 3, 1935.

Mazure: *De Berekening van Getijden en Stormvloeden op benedenrivieren*, páginas 177-83. La Haya, 1937.

Schultze: Der Widstau in Tide Gebiet. *Bau Ingenieur*, pág. 100, 1938.

Neumann: Trifftströmungen an der Oberfläche bei Adlerground Feuerschiff. *Annalen der Hydrographie*, págs. 82-91, 1939.

(En general, puede consultarse el índice de Liverpool (Instituto de Mareas), así como las referencias bibliográficas del *Zentralblatt für Geophysik*.)

Vientos moderados:

$$\tau = 0{,}0028\ V_1 \qquad \text{cm}^{-1}\ \text{gr. seg}^{-2}$$

Palmen, para vientos más recios:

$$\tau = 0{,}0014\ V_1 + 0{,}0000022\ V_1^2\ \text{cm}^{-1}\ \text{gr. seg}^{-2}$$

Ekman dedujo de los valores de Colding (v. más adelante):

$$\tau = 0{,}0000032\ V_1^2 \qquad \text{cm}^{-1}\ \text{gr seg}^{-2}.$$

Diversos geofísicos han dado a conocer fórmulas empíricas que relacionan V_1 y γ de una parte, V_1 y W de otra.

Observaciones de Colding en metros, segundos y radianes condujeron a la siguiente:

$$h\gamma = 763 \cdot 10^{-9} \cdot V_1^2,$$

o bien, midiendo γ en milímetros por kilómetro, h en metros, V_1 en metros por segundo y llamando Δ al nuevo valor de γ,

$$h\,\Delta \sim \frac{3}{4} V_1^2.$$

Los holandeses, para un viento en la dirección en que se mide Δ, recomiendan un coeficiente igual a la mitad del anterior. Si el viento sopla en dirección formando un ángulo φ, la fórmula (de Lorentz) es

$$h\,\Delta = 0{,}36\ V_1^2 \cos \varphi.$$

En vez del exponente 2, Palmen considera adecuado el exponente 1,8; Hayford, 2,4. Otros se han servido de fórmulas binomias.

Relaciones empíricas entre V_1 y W se han propuesto varias, algunas tienen en cuenta la variación de la latitud y valen entre los valores de ésta que convienen en la zona templada. He ahí algunas.

Nansen, para un mar cubierto de hielo, establece entre la deriva de éstos y V_1 la fórmula empírica aplicable a las zonas árticas:

$$W = 0{,}019\ V_1$$

Mohn deduce para latitudes de zona templada:

$$W = 0{,}047\ V_1$$

Dinklage, para el Báltico, mar de escaso fondo:

$$W = 0{,}013\ V_1 \quad \text{si} \quad V_1 < 6{,}2 \text{ m/s}$$
$$W = 0{,}014\ V_1 \quad \text{si} \quad V_1 > 6{,}2 \text{ m/s}$$

Witting, por observaciones a bordo de buques faros:

$$W = 0{,}48 \sqrt{V_1} \qquad V_1 \text{ en cm./seg.,} \qquad W \text{ en cm./seg.}$$

Gallé, para el Indico:

$$W = 0{,}044\ V_1$$

Thorade, explicitando la dependencia con la latitud φ,

$$W = \frac{0,259}{\sqrt{\operatorname{sen} \varphi}} \sqrt{V_1}.$$

Escala de Beaufort < 3, V_1 y W en cm/s.

$$W = \frac{0,0126}{\sqrt{\operatorname{sen} \varphi}} \sqrt{V_1}.$$

Escala de Beaufort > 3, V_1 y W en cm/s.

Neuman, para el Báltico, costa alemana:

$$W = \frac{0,0204}{\sqrt{\operatorname{sen} \varphi}} V_1$$

y de un modo general:

$$W = 0,0226 \; V_1$$

por lo menos, hasta 9 Beaufort (18 m/s).

He aquí diversos valores medios del coeficiente W/V_1 según diversos observadores:

Mohn	0,0105	Ecuador, Océano Atlántico.
Dinklage	0,0127	Báltico.
Witting	0,0160	Golfo de Finlandia.
Thorade	0,0126	Canarias, California.
Palmen	0,0140	Golfo de Botnia.
Neuman	0,0226	Báltico.

Dinklage halló los siguientes valores para diversas velocidades:

V_1	W	Coeficiente $W/V_1 \times 10^2$
1,7	0,035	2,1
4,4	0,058	1,3
6,2	0,081	1,3
8,3	0,116	1,4
10,4	0,150	1,4
12,4	0,174	1,4
14,8	0,208	1,4
17,4	0,243	1,4

Neumann:

V_1	W	$W/V \times 10^2$
1,7	4,29	2,52
3,1	7,55	2,44
4,8	10,75	2,24
6,7	15,00	2,24
8,8	19,25	2,19
10,7	24,04	2,28
12,9	28,16	2,18
15,4	33,79	2,19
18,0	37,41	2,08

Como valor medio total puede tomarse, salvo comprobaciones en cada caso concreto:

$$W = 0,02\ V_1$$

es decir, la velocidad de arrastre determinada por el viento V_1 es 2 por 100 de la intensidad del viento.

La dependencia entre la velocidad de arrastre W y la latitud es consecuencia de las hipótesis que constituyen la teoría de las espirales de Ekman, de que se hablará luego, y de suponer el mar libre (y no un canal); W tiene la dirección de la fuerza de arrastre, que en tal caso no está dirigida según W, de modo que W y V_1 forman un cierto ángulo variable en general con la intensidad del viento. Este ángulo en las experiencias anteriores tiene un valor medio alrededor de 10°. Witting dedujo

$$\alpha = 34^{\circ} - 7{,}5 \sqrt{V_1}\,.$$

Al referirnos a W, siempre se entiende la corriente rasante. En rigor, los aparatos de medida o los medios de observación por flotantes lastrados miden más bien la velocidad a cierta distancia del espejo de las aguas, por ejemplo, a un decímetro.

3

De la ley de variación del viento con la altura sobre el espejo de las aguas, y de la variabilidad del coeficiente de transporte.

La evaluación del coeficiente de transporte para el aire como función de la distancia al suelo en la capa rastrera ha sido objeto de hipótesis, así como de múltiples determinaciones experimentales. Al pasar cierta altura, la variación en intensidad es mucho más lenta, pero la influencia del suelo llano se deja sentir en alturas de hasta 500 y 1.000 metros; la de las aguas marinas alcanza probablemente menores cotas y se manifiesta en cambios de intensidad y de rumbo.

Una tentativa para establecer la variación de μ fué formulada por Prandtl (1) y fundada en la distribución de velocidades

---

(1) Prandtl-Tietjens: *Hydro und Aeromechanik*, tomo II, págs. 86-95. Berlín, 1931.
Prandtl-Tollmein: Die Windverteilung ueber dem Erdboden errechnet aus dem Gesetzen der Rohrströmung. *Zeitschrift für Geophysik*, págs. 47-55, 1925.

junto a la pared de un caño o tubo circular. Entre la presión por unidad de longitud a lo largo de la cañería, la velocidad media $\bar{u}$ y el radio r existen relaciones empíricas señaladas en los tratados y memorias de Hidráulica; por ejemplo, la fórmula de Blasius para paredes lisas:

$$\frac{dp}{dl} = \frac{0{,}133}{\sqrt[4]{R}} \frac{1}{r} \frac{\rho}{2} \bar{u}^2,$$

en que R es el número de Reynolds: $\frac{r \cdot \bar{u}}{\mu/\rho}$. De lo anterior se deduce el esfuerzo tangencial τ por la relación evidente

$$\pi r^2 dp = 2 \pi r \tau dl$$

lo cual, con la fórmula anterior, conduce, escribiendo $\mu/\rho = \nu$, a

$$\tau = 0{,}033 \rho \nu^{1/4} r^{-1/4} \bar{u}^{-7/4}.$$

Suponiendo que u varía como una potencia de la distancia z a la pared,

$$\frac{u}{u_{\max}} = \left(\frac{z}{r}\right)^q$$

la sustitución de este valor y el admitir que τ sólo depende de lo que acontece en la inmediación de la pared, es decir, es prácticamente independiente de r, conduce, al anular el exponente de r, a la ley definida por $q = \frac{1}{7}$.

Leyes experimentales distintas de la de Blasius conducirían a otras distribuciones de la velocidad con la altura.

La finitud de $\mu \frac{dV}{dz}$ para $z \rightarrow 0$ obliga a atribuir a μ una variación con la potencia $1 - \frac{1}{7}$ de la altura, o a prolongar la curva de distribución junto a $z = 0$ por otra curva representante de un régimen distinto, de modo que, por ejemplo, fuera laminar el régimen para muy pequeña u, y pasara a turbulento para valores más grandes. En el régimen laminar u sería proporcional a z.

Sea por las consideraciones anteriores o por otras análogas, sea preferiblemente como resultado de experiencias, dada la variación de μ' con z, la resolución de la ecuación ordinaria queda siempre reducida a dos cuadraturas consecutivas.

En general, μ' se ofrecerá como función de z y de V y la integración de una ecuación de primer orden y una cuadratura permitirá la expresión de V en función de z.

Para acertar en la expresión de μ' será preciso introducir funciones empíricas provistas de un reducido número de constantes ajustables con los resultados de la experimentación.

Si en el análisis de Prandtl se hubiera partido de fórmulas empíricas propias para calcular la pérdida de presión en cañerías mayores, medida la rugosidad, *vg*, por el tamaño de gránulos o asperezas, el valor de μ vendría afectado por tal circunstancia y en él intervendría el grado de aspereza de la superficie de contacto, es decir, el oleaje en el espejo de las aguas.

El cálculo de τ, basado en analogías de las curvas de velocidad, ofrece la dificultad de su rápida variación junto a la superficie de discontinuidad, mientras que el producto que da τ varía poco en cada caso. Por lo tanto, si se parte de las curvas obtenidas para un problema merced a consideraciones más o menos plausibles, difícilmente se obtendrá, al considerarle aplicable a otro problema, el valor límite correcto.

En la comprobación experimental de la teoría, en la evaluación de μ y de los parámetros que en su fórmula intervienen, queda mucho por hacer. El contraste con la realidad puede buscarse en la comparación de niveles del mar entre dos lugares perfectamente nivelados por cadena de estaciones terrestres, anotando y observando vientos, su permanencia, su componente en la dirección de los niveles conocidos, la dependencia de éstos con el gradiente de presión y aun con la presión misma si se trata de mares abiertos, descartando los efectos de marea. Estos se pueden considerar como los que indica la curva de previsión deducida de medias a lo largo de muchos años, al menos un ciclo lunar, habiendo calculado las amplitudes y fases de los componentes fundamentales y habida cuenta de los términos introducidos por la proximidad de playas y restingas y las oscilaciones propias del brazo de mar en que se observa. Los residuos o diferencias entre la curva mareográfica y la curva prevista son los que se aplican al cálculo de las constantes locales para la determinación de los desniveles producidos por el viento.

No siempre conviene referir el desnivel al viento momentáneo; indudablemente, ha de haber una permanencia mínima del viento y una constancia de intensidad a lo largo de la distancia entre niveles y sobre todo un cierto tiempo transcurre, en general, entre causa y efecto. En el mar libre, vientos de tal cuadrante, soplando con determinada fuerza, durante tal intervalo, producen entre A y B desniveles que tardan en manifestarse un cierto lapso. Estos elementos de juicio se determinan por estudio de correlación múltiple, llegándose así a un cuadro de constantes para determinada extensión de costas o contornos en lugares de importancia para la navegación comercial y la defensa guerrera.

En lo que precede se ha pretendido salvar la dificultad de que la superficie del espejo no sea plana, mediante el uso de valores medios y la dependencia entre μ y V, dependencia que hay que establecer empíricamente y que viene iniciada por la escala de Beaufort, en forma vaga e imprecisa. La observación revela otras dificultades originadas por el carácter desordenado de la V (turbulencia del viento), por la presencia de oleajes debidos a co-oscilación o propagación de efectos originados por vientos a grandes lejanías, cambios bruscos de dirección del viento local, corrientes locales debidas a la forma de la costa; v. gr., la contracorriente de golfos y ensenadas; todo lo cual invita al estudio simultáneo en observatorios mareográficos locales y en laboratorios provistos de túneles aerodinámicos y canales, como los destinados al análisis de la resistencia de cascos.

La hipótesis de que la velocidad en el fondo es nula, sólo es admisible en canales o mares de mucho fondo. Examinados varios casos en mares poco profundos o en plataformas continentales de poco fondo, se han hallado valores de la velocidad distintos de cero hasta alcanzar prácticamente el fondo. La ola de Lagrange para profundidades someras, la ola de marea de gran longitud respecto de la sonda de fondo, suponen siempre un movimiento horizontal en aquél, siendo la oscilación de igual amplitud horizontal que en cualquier otro punto. Muchos teóricos, como Taylor, Jeffreys y Nomitsu, creen que debe prescindirse de la hipótesis de ser cero la corriente en el fondo en muchos casos; el último ideó una teoría de corrientes oceánicas con corrimiento en el fondo.

El valor de μ en un río, por ejemplo, puede obtenerse por la observación de las cantidades que intervienen en la integral primera de la ecuación del movimiento:

$$\frac{d}{dz}\left(\mu \frac{dW}{dz}\right) = g \rho \gamma,$$

a saber:

$$\frac{\mu}{\rho} = \nu = \frac{3 \gamma (\varepsilon - z)}{\dfrac{dV}{dz}}$$

ε es la z, para la que $\dfrac{dV}{dz} = 0$.

La prolongación de la curva que da V en función de z hasta $z = 0$ en el fondo, para la mayor parte de observaciones no da $V = 0$. El coeficiente μ que se deduce es casi constante y disminuye un 20 por 100 del valor superficial en la proximidad del fondo, probablemente debido a que por la presencia de éste las masas turbulentas desarrolladas en él no han alcanzado suficiente desenvolvimiento. El coeficiente de viscosidad así calculado aumenta al disminuir la altura de agua sobre el fondo y es proporcional al cuadrado de la velocidad media menos en la capa inferior, de algunos decímetros.

Los valores del coeficiente molecular μ para el aire a cero grados son del orden 10^{-4} gr., cm^{-1} seg^{-1}, para el régimen turbulento varían mucho. Para la turbulencia según la vertical, los valores del coeficiente de transporte son del orden 50 gr. cm^{-1} seg^{-1}, oscilando entre valores del orden del gr. cm^{-1} seg^{-1} y valores 1.000 veces mayores.

En la llamada gran turbulencia, aplicable a la circulación atmosférica total, son del orden de 10^8 gr. cm^{-1} seg^{-1}.

Junto al suelo el coeficiente de transporte suele ser nulo; crece con la altura hasta una cierta capa, a partir de la cual disminuye lentamente. Esta capa de inversión en el coeficiente de transporte puede estar entre 5 y 100 metros.

4

Sobre la influencia del viento en la forma ondulada de la superficie libre de los mares. Estratificación. Números de Reynolds y de Richardson.

Que la superficie plana no puede ser una forma estable como superficie de discontinuidad entre los medios heterogéneos lo demuestra la facilidad con que se riza la superficie de los mares al soplo de un viento muy leve. Admitida, en efecto, una superficie ondulada, el viento en la cresta de las olas determina una disminución de presión y un aumento en el seno. Ambas tienden acentuar la ondulación hasta que la gravedad equilibra sus efectos. Si los dos medios separados por la superficie de discontinuidad están en movimiento, el efecto es mayor y, por lo tanto, cabe esperar mayores amplitudes, como ocurre con las olas submarinas, que separan estratos de salinidades o temperaturas diferentes, o en la misma atmósfera entre dos estratos a diversa temperatura cuya superficie de separación viene señalada a veces por una capa de nubes.

La observación anterior es debida a lord Kelvin. Este es quien en 1871 (v. *Phylosophical Magazine:* Hidrokinetic Solutions and Observations, pág. 368) enuncia, como resultado del cálculo, que existe una ola de mínima longitud de onda que para profundidad indefinida vale 1,8 cm., y señala que para provocarla se necesita un viento de 6,40 metros por segundo.

Tal consecuencia no viene confirmada por la observación. En el cálculo señalado por Lord Kelvin no se introduce fuerza de rozamiento alguno ni viscosidad, solamente interviene la cohesión por la presión p, la continuidad, las condiciones en los límites introducidas por Airy y la tensión capilar φ, que aumenta el valor de p en la superficie en $\frac{\varphi}{r}$, siendo r el radio de curvatura, o sea $\varphi \frac{d^2 y}{d x^2}$, lo cual en olas sinusoidales equivale a $-\varphi \frac{2\pi}{\lambda^2}$ y. Por lo que, la condición en la superficie libre en función del potencial de velocidades Φ, siendo $\rho = 1$, a saber:

$$p = \frac{d\Phi}{dt} - gy,$$

conduce a una velocidad de propagación de la onda entre dos estratos en reposo dada por

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\varphi}{\lambda},$$

con el consiguiente valor de λ, que da un mínimo para c [para el aire y agua $\varphi = 72$ c. g. s., $\lambda = 1{,}72$ cm., $c = 23{,}3$ cm/s]. Mas si se tratara de la superficie ondulada que separa el viento de las aguas marinas, al potencial de velocidades en el aire habría que añadirle un término $-Vx$. Si se denominan ρ_1 y ρ_2 las densidades del aire y del agua, se supone el fondo de ésta a una sonda H, e indefinida la altura del aire, se llega a la siguiente fórmula para calcular c, en la que $\varkappa = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$(\rho_1 + \rho_2 \cot h \cdot \varkappa H)\, c^2 - 2\, V \rho_1 c + V^2 \rho_1 + \frac{g}{\varkappa}(\rho_1 - \rho_2 \cot h \cdot \varkappa H) -$$
$$- \varkappa \varphi = 0.$$

Si en esta ecuación se supone $H \to \infty$, la condición de realidad de las raíces en c, llamada "de estabilidad", se expresa así:

$$V^2 \leq \frac{g}{\varkappa} \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{\rho_1 \rho_2} + \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \varkappa \varphi .$$

El mínimo del segundo miembro lo da

$$\varkappa^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \frac{g}{\varphi}\left(\rho_2 - \rho_1\right)$$

lo cual, habida cuenta de que para el aire $\varphi \sim 72$ conduce a $\lambda = 1{,}8$ cm. y

$$V > 6{,}40\ ^{m}/_{s}\,,$$

que es el resultado de Lord Kelvin.

En 1889 y 1890 aparecieron las memorias fundamentales de Helmholtz, *Ueber Atmosphärische Bewegungen. Zur Theorie* *vom Wind und Wellen* y *Die Energie der Wogen und des Windes,* publicadas por la Academia de Ciencias de Berlín, así como en *Annalen der Physik,* págs. 641-662 del tomo XLI, reimpresas luego en el tomo III de sus *Wissenschaftliche Abhandlugen.*

Helmholtz examina la distribución de la energía cinética y la energía potencial en el movimiento de dos estratos con velocidades V y W, separados por una superficie plana o una superficie ondulada, definidos los medios por sus densidades respectivas. El movimiento supuesto estacionario prescribe la constancia del flujo. En estas condiciones, al pasar de la forma plana a la ondulada, la energía cinética disminuye, la potencial aumenta, pero el balance acusa una disminución en la energía total. Hay infinitas formas onduladas en las que el balance es negativo, la condición que introduce el carácter estacionario de la presión hidrodinámica en la superficie límite equivale a la exigencia de un mínimo para la diferencia entre la energía cinética y la potencial que determina la longitud de onda. Siendo $V_1 - V_2$ la diferencia de velocidades en m/segundo, $T_1 - T_2$ la diferencia de temperaturas, Helmholtz llega a la fórmula

$$\lambda = 87{,}4 \frac{(V_1 - V_2)^2}{T_1 - T_2},$$

que observaciones recientes de Trey han permitido confirmar no sólo por la observación de las condensaciones de vapor en forma de nubes onduladas, sino también por observaciones aerológicas y datos registrados con globos sondas.

En las memorias de Helmholtz aparece por primera vez demostrado que toda superficie de discontinuidad de vientos en la redondez de la Tierra debe aparecer inclinada respecto del horizonte por efectos de la rotación terrestre. Esta inclinación y la existencia misma del "frente", como se llama a la superficie de discontinuidad, son fundamento de la teoría de los ciclones, debidos a deformaciones de tales superficies, probablemente.

Los trabajos de Helmholtz fueron continuados por Wien (1894-1895), que estudió formas de olas y señaló diversos valores de la velocidad de la ola en función de la velocidad del viento. Sus memorias principales llevan los títulos *Ueber den Einfluss des Windes auf die Gestalt der Meereswellen* (1894) y *Ueber die Gestalt von Meereswellen* (Academia de Ciencias de Berlín). Desde el punto de vista experimental, para el aire, véase Alfred Wegener: *Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre,* págs. 55-72, 1906-1908.

Las ideas de Helmholtz fueron extendidas por Lamb y Bjerknes (1) a medios compresibles.

Las "nubes" de Helmholtz se producen sin que sea relevante la componente vertical del viento que casi siempre hay junto a la nube. Tienen la forma de la superficie del mar agitada por el oleaje. Forman lo que se denomina mar de nubes. Modernamente han sido estudiados por varios investigadores, especialmente por Haurwitz (2), en estratos cuya potencia es una cifra grande comparada con la longitud de onda. Base del cálculo son las ecuaciones de perturbación de Bjerknes en forma de ecuaciones de Lagrange: x, z coordenadas de la partícula móvil (a, c sus valores iniciales), en relación con $X = Ut + a$, $Z = c$, U velocidad relativa de los estratos, P la presión en estado no perturbado y Q la densidad en el mismo, p la sobrepresión en

---

(1) Bjerknes y Solberg: *Physikalische Hydrodynamik,* pág. 305 y sig. Berlín, 1933.

(2) Haurwitz: Ueber die Wellenlänge von Luftwogen. *Gerlands Beiträge zur Geophysik,* volumen dedicado a Köppen, 1932.—Ueber Wellenbewegungen an der Grenzfläche zweier Luftschichten mit linearen Temperaturgefälle. *Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre,* volumen dedicado a Bjerknes, págs. 47-54. Leipzig, 1932.

el movimiento perturbado, ρ la densidad:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} + \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{p}{Q} + g z\right) = 0,$$

$$\frac{d^2 z}{d t^2} + \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{p}{Q} + g z\right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \gamma \frac{\partial P}{\partial c}\right)\frac{p}{Q^2} = 0$$

$$\frac{p}{Q} = -\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial c}\right), \quad \gamma = \frac{\partial \rho}{\partial \Pi}, \quad \Pi = P + p,$$

$$\frac{\partial P}{\partial c} = -g Q,$$

Una perturbación de tipo ondulatorio

$$e^{i(\alpha x + \beta t)},$$

conduce a fórmulas que expresan la velocidad de propagación para diversos tipos de gradiente vertical de la temperatura, diversos valores de la diferencia de temperatura Δ T y de la diferencia de velocidades Δ V, de la humedad, etc.

Uno de los resultados más sencillos aplicable al caso de estratificación isoterma es el siguiente. La longitud de onda λ es en metros:

$$\lambda = \frac{160\,(\Delta V)^2}{\sqrt{0{,}90\,(\Delta V)^2 + 3{,}43\,(\Delta T)^2}}.$$

Valores grandes de λ corresponden a valores grandes de Δ V, valores pequeños se obtienen con variaciones grandes de la temperatura.

En lo que precede se supone λ tomado en la dirección de la discontinuidad de las velocidades, siendo éstas coincidentes en dirección. En la práctica no coinciden siempre, lo que da lugar a diversos aspectos de las nubes de Helmholtz, que tanto interés tienen en Meteorología, previsión del tiempo, etc., y que constituyen una clase bien distinta de la debida a ascensos turbulentos del aire o descensos.

En Oceanografía, las olas internas han dado lugar a ciertos fenómenos de "agua muerta" observados en Fjords, o vías donde una capa de agua dulce viene a estratificarse sobre otra de más densidad o diversa temperatura. El movimiento impulsivo del barco se convierte en la energía de traslación de ondas internas y el barco permanece o avanza menos de su andar. A principios de siglo fueron demostradas tales olas en el Atlántico norte, después por las expediciones del *Meteor* y otras.

El factor $\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$, aplicado a dos estratos de diversa salinidad o temperatura, disminuye la velocidad de las olas a un 2 a 3 por 100 del valor que resulta en superficie límite con la atmósfera.

Actualmente cuentan con extensa bibliografía y a su análisis han contribuído trabajos españoles realizados en Baleares y Gibraltar (1). La casi coincidencia de algunos de sus períodos con períodos de la marea cósmica ha inducido a sospechar la posible influencia de la acción de los astros; indudablemente, puede influir la corriente de marea en la formación de ondas internas en mares estratificados y con fondo de sonda variable; la propagación de la corriente de marea como corriente de ola de gran longitud no puede tener lugar en iguales condiciones que en un mar homogéneo de fondo constante. Pero no parece dudoso que a la cooscilación de la marea habrán de sumarse multitud de causas fortuitas: diurnas, estacionales, de desembocadura de ríos, de elevación local de temperatura, vientos lo-

---

(1) F. Navarro: Instituto Español de Oceanografía. Variación de las aguas de Palma de Mallorca. Madrid, 1935.

cales, variaciones de presión, etc., y especialmente el carácter inestable de la superficie plana de separación de dos medios flúidos heterogéneos, mucho más acentuado cuando sus densidades difieren poco.

Las superficies de discontinuidad en las capas submarinas, su inclinación y forma son el fundamento de los estudios oceanográficos que permitan calcular las corrientes (1).

La estratificación, o sea la existencia de capas de densidad uniforme en el aire o en el agua separadas por superficies de discontinuidad, altera fundamentalmente el régimen laminar o turbulento de las corrientes, de que se habla en la tercera y cuarta parte con mayor extensión. Es idea admitida, aunque falta de precisión, que el tránsito de uno a otro régimen corresponde a un número crítico R_c de Reynolds: $\frac{U\lambda}{\nu}$ comprendido entre límites bastante próximos. U és la velocidad de traslación, λ una longitud inherente al problema, y $\nu = \mu/\rho$ es la viscosidad llamada cinemática.

La estratificación interviene medida por el número de Richardson R *i*,

$$Ri = \frac{g}{\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2} \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz}, \qquad Ri = \frac{g}{\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2} \frac{1}{T}\left[\frac{dT}{dz} - \left(\frac{dT}{dz}\right)_{\text{adiab}}\right]$$

la segunda fórmula es aplicable a medios compresibles, como el aire, T es la temperatura absoluta. El valor de R *i* modifica mucho las R_c críticas de Reynolds. Un valor elevado de R *i* reduce el de R_c (2).

La gravedad disminuye la turbulencia en estratos cuya den-

---

(1) Ekman: Neuere Ergebnisse und Probleme zur Theorie der Konvektionsströme im Meere. *Ergebnisse der Kosmischen Physik*, tomo IV. Leipzig, 1939.

(2) Richardson: *Phylosophical Magazine*, 1925.

sidad decrezca con la altura. El aire tiende a mayor estabilidad cuando la irradiación facilita este equilibrio. El caso de inversión, en que la densidad crece con la altura, facilita la turbulencia. Llamando β al cociente $\frac{1}{\rho}\left|\frac{d\rho}{dz}\right|$, la condición de turbulencia llamada de Richardson, consecuencia de su teoría, es:

$$\left(\frac{dU}{dz}\right)^2 > g\,\beta.$$

Si no se cumple, el movimiento no puede ser turbulento (1).

Varios casos de flúidos estratificados, v. gr., tres flúidos moviéndose en igual corrimiento relativo horizontal, han sido sometidos al análisis. Oscilaciones inestables pueden ofrecerse si, llamando $\Delta\rho$ al salto de densidad en cada superficie límite, h el grueso del estrato central,

$$\left(\frac{dU}{dz}\right)^2 > 2\,g\,\frac{\Delta\rho}{\rho\,h}.$$

(1) Diversas memorias de los *Proceedings of the Royal Society*, debidas a Taylor y Goldstein, examinan la cuestión y sus aplicaciones a la Oceanografía. Véase, en particular, 1931, págs. 499, 509, 524, así como una memoria de Schlichting, de 1935, publicada en el *Zeitschrift für angewandte Mathematik*, págs. 313-338, y el interesante resumen del mismo autor: Untersuchungen zur Turbulenzentstehung. *Naturwissenschaften*, 1934, pág. 373.

V.. además:

Paeschke: Experimentelle Untersuchungen zum Rauhigkeits und Stabilitätsproblem. *Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre*, 1937, pág. 163.

Sverdrup: Austausch und Stabilität in den untersten Luftschicht. *Metereologische Zeitschrift*, 1936, pág. 10.

5

Hipótesis y trabajos experimentales recientes.

La influencia del viento sobre el espejo de las aguas marinas es tenida por efecto de la presión en los cálculos de Kelvin y Helmholtz, toda vez que la condición de contacto no involucra esfuerzo de arrastre; la diferencia de presiones se compensa con la inercia y la fuerza capilar. En ausencia de ésta, la presión se supone constante y no introduce esfuerzo tangencial alguno.

El primero que estableció nuevos razonamientos en los cuales interviene un elemento dinámico variable fué Jeffreys (1). La naturaleza ondulada del espejo obliga a una desigual distribución de la presión, por ser variable la velocidad en el enrase de crestas y senos, diversa para la ladera a barlovento y para la ladera a sotavento. En realidad, además de esta circunstancia, habría que llevar en cuenta la fuerza tangencial o de arrastre. Prescindiendo de ésta, la desigual distribución de presión da lugar a un aumento de la energía debido al viento. Ello provoca el desarrollo del oleaje hasta quedar compensado el aporte con la energía perdida por viscosidad en la ola misma.

Tal es el razonamiento que, debidamente completado por otras hipótesis, permite a Jeffreys modificar los resultados de Kelvin.

La energía perdida por viscosidad y por unidad de tiempo se calcula por las fórmulas generales del movimiento viscoso. El resultado es una integral de tres términos, uno volumétrico y dos superficiales. En aquél y en uno de éstos interviene el remo-

(1) Jeffreys: On the formation of Water Waves by Wind. *Proceedings of the Royal Society*, 107 y 110; 1925 y 1926.

lino, de tal modo que, si el movimiento es irrotacional, son nulos ambos. El término que queda, integrando en la superficie que limita el flúido, es

$$\mu \iint \frac{d\,(u^2 + w^2)}{dn}\, dx\, dz,$$

siendo n la normal interna (1). Si se considera la superficie que en un canal limita un espacio de ancho 1, largo λ la longitud de ola, alto H la sonda de fondo, en la base y en todas las superficies laterales la integral es cero. Queda un valor en la superficie libre a la cual se supondrá referido el signo de integración.

Si se aplica a la ola de Airy en canales que corresponde al fondo H, cuyo forma superficial es

$$z = z_0 \cos \frac{2\pi}{\lambda}(x - c\,t),$$

y cuyo potencial de velocidades es

$$\Phi = c \frac{\cos h \cdot 2\pi \dfrac{z - \mathrm{H}}{\lambda}}{\operatorname{sen} h \cdot \dfrac{2\pi \mathrm{H}}{\lambda}} z_0 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda}(x - c\,t),$$

se encuentra:

$$\text{Energía perdida por unidad de tiempo} = 2\,\mu\, z_0^2\, c^2\, \lambda \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^3 \cot h \cdot \frac{2\pi}{\lambda} h\,.$$

La hipótesis especial de Jeffreys para el cálculo de la energía transmitida es ésta: La presión normal para olas de muy poca inclinación de la tangente es proporcional al cuadrado de la dife-

(1) Lamb: *Hydrodynamics*, pág. 549, formula 11. Cambridge, 1924.

rencia entre la velocidad del viento V y la de fase de la ola c, y además, es proporcional a la inclinación $\frac{dz}{dx}$ de la superficie libre. Por lo tanto, el trabajo que realiza por unidad de tiempo, extendida la integral a la superficie libre, es:

$$\text{Trabajo del viento por unidad de tiempo} = c_1 \rho_2 (V - c)^2 \int \frac{dz}{dx} \frac{dz}{dt} dx$$

$$= c_1 \rho_2 (V - c)^2 z_0^2 \lambda c \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2;$$

c_1 es un coeficiente de proporcionalidad.

Mientras este valor exceda la energía perdida, las olas crecen. El valor de c corresponde al valor ya indicado antes al exponer el razonamiento de Kelvin. En él puede suponerse para mayor simplificación $\varphi = 0$. Para H muy grande, la condición de amplificación ó estacionamiento es, llamando ρ_1 a la densidad del aire:

$$(V - c)^2 c \geq \frac{4}{c_1} g \frac{\mu_2}{\rho_1} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}.$$

La velocidad V que provocará la máxima ola, es decir, la ola de mayor inclinación de la tangente en el punto de inflexión entre todas las de velocidad c, será la que determine un máximo para el primer miembro: $V = 3c$.

Dado V, la longitud de ola que alcanzará el máximo de intensidad será aquella cuya c sea el tercio de V.

Con el signo $=$ en vez del $\geqslant$, la longitud de ola mínima, siempre para profundidad infinita, se obtiene por

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^3 = c_1^2 g \frac{\rho_1^2}{\mu^2} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}.$$

El cálculo de este valor no es posible como no se conozca la constante c_1, que debe ser un valor de observación. Según este modo de razonar, hay una λ mínima y una V mínima que la provoca. Si se substituyen los resultados experimentales (muy dispersos), no se halla para c_1 un valor único, ni siquiera el mismo valor si se parte de la fórmula última con la λ observada, o si se parte de la fórmula de la velocidad mínima del viento observada también en correspondencia.

Jeffreys intentó confirmar los resultados anteriores mediante otras hipótesis, v. gr., la existencia de una fuerza tangencial τ de arrastre con el valor empírico $\tau = 0{,}002\ \rho_1\ V^2$, ρ_1 densidad del aire; pero el resultado es poco satisfactorio, la velocidad mínima del aire es alrededor de 5 m/s para engendrar olas de 1,5 metros como longitud de ola mínima.

En resultados más recientes consigue asignar a una velocidad mínima de 1,1 m/s olas de 9 cm.

Material experimental ha sido reunido por Stanton (1) en 1932 y material descriptivo abunda en la literatura.

En fecha relativamente reciente se ha intentado aclarar la cuestión por la escuela de Prandtl en el laboratorio de Mecánica de flúidos de Gotinga, examinando las líneas de corriente del viento al lanzar una corriente de aire a un recinto paralepipédico cuyo fondo está formado por una superficie cilíndrica ondulada imitando las olas, desde las más llanas hasta la onda de Stokes y Michell, de cresta en arista. En este caso concreto no hay arrastre de partículas de agua porque la superficie limita un sólido, pero no cabe duda de que constituye una cierta aproximación.

El trabajo de Motzfeld (2), publicado en 1937, contiene los resultados del examen y medida de velocidades a distintos puntos

---

(1) Stanton Marschal y Houghton: The growth of Waves in Water due to the action of the Wind. *Proceedings of the Royal Society*, 137, 1932.

(2) Motzfeld: Die turbulente Strömung an welligen Wänden. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, págs. 193-212, 1937.

de una vertical y diversas distancias de la superficie para diferentes abscisas hasta cubrir la longitud de ola. Como las mediciones se hacen con tubo de Pitot y medida simultánea de la presión estática (tubo con orificio paralelo a la corriente) se conoce la presión p y la velocidad u en cada punto del plano vertical sobre la superficie ondulada. Con tales medidas se puede trazar el diagrama de las líneas de corriente o de gasto constante:

$$\int_0^y u\, d z = \text{const}$$

y conocer empíricamente la ley de distribución de p que pretende formular Jeffreys.

El cálculo de arrastre, obtenida la velocidad, necesita sólo de la fuerza tangencial. Para evaluar ésta no es posible partir de la fórmula de Newton, $\tau = \mu \frac{d u}{d z}$, por no ser las curvas de corriente paralelas. La consideración del equilibrio de un elemento limitado por dos curvas próximas y dos normales, llamando r al radio de curvatura, conduce a la expresión siguiente, en que s es el arco, n la normal, ρ la densidad del aire:

$$\frac{d\left(p + \frac{1}{2} \rho u^2\right)}{d s} = \frac{d \tau}{d n} + \frac{2 \tau}{r} .$$

Imitando la exposición habitual en la teoría turbulenta de la capa límite, Motzfeld expresa los resultados experimentales, v. gr., la velocidad, en función de la distancia z a una línea determinada del perfil y a partir de cierto origen (como en las leyes de turbulencia junto a superficies más o menos lisas).

Los resultados son los siguientes: Para olas sin desprendimiento a sotavento de la cresta ni formación del consiguiente remolino, resulta, siendo a ángulo de inflexión:

$$u = 5{,}75 \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \log \frac{3 z \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}}{\frac{\mu}{\rho}} - 18{,}2 \operatorname{tg} a.$$

Si la cresta es abrupta o hay formación de remolino a sotavento:

$$u = 5{,}75 \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \log \frac{7{,}5 z}{2 z_0} \quad ; \qquad z_0 \text{ altura de la ola.}$$

Basándose en conceptos similares a los de Jeffreys: variación de la energía total cinética y potencial con el tiempo igual a la diferencia entre energía comunicada y energía disipada por la viscosidad, plantea una nueva ecuación que le permite formular el crecimiento de la amplitud de la ola con el viento. Para la energía comunicada adopta la misma hipótesis que Jeffreys. La ecuación diferencial entre z_0 y el tiempo permite mayor precisión en el concepto que la desigualdad de Jeffreys. La condición de estacionamiento (z_0 constante en el tiempo) conduce a un valor de la amplitud para cada par de valores de V y λ. La dificultad que estriba en el valor desconocido de c_1 la refiere, como Jeffreys, a una determinación experimental, que aquí es doble por haber introducido otro elemento empírico en forma de exponente. Para profundidad H muy grande:

$$\sqrt{z_0} \max = 0{,}0035 \frac{\rho}{\mu_2} \frac{\lambda}{2\pi} \frac{(V - c)^2}{c}.$$

Dado V y λ, como c es función de λ, queda definida la máxima amplitud. El cociente z_0/λ es máximo para

$$\lambda = \frac{2\pi}{9} \frac{V^2}{g},$$

admitidas a concurso olas geométricamente semejantes.

El coeficiente de arrastre c_d en la fórmula

$$\tau = c_d \cdot \lambda \cdot \frac{1}{2} \rho V^2,$$

alcanza valores entre 0,00085 y 0,0028, según las olas. Para la de Michell, $c_d = 0{,}0194$. El coeficiente c_d es proporcional al cociente de la amplitud por la longitud de ola elevado a 3/2; Jeffreys admite que es proporcional al cuadrado.

Según Motzfeld, no hay un viento mínimo que determine ondulación, todo viento puede rizar la superfice; entre las olas que se forman, las hay particularmente favorables, y éstas son las que el viento refuerza. Así, entre las geométricamente semejantes, es decir, de igual cociente entre amplitud y longitud de ola, las que responden a la fórmula ya indicada:

$$\lambda = 7{,}12 \cdot 10^{-4} \cdot V^2 \qquad \text{(cgs)}$$

Entre las de igual longitud de ola, aquellas en que

$$\lambda = \frac{\pi}{2g} V^2 = 16 \cdot 10^{-4} V^2.$$

Para una velocidad de 1 m/s la primera λ es 7,12 cm.

Sobre el modo de formación de las olas e influencia de la persistencia de vientos y "largo" o trecho en que soplan se han realizado observaciones (1). Todo ello necesita aún de muchas experiencias, a la vez que de una teoría adecuada y nuevos métodos de medida (2). Las recientes expediciones marítimas procuran datos numéricos que sustituyen las antiguas observaciones excesivamente personales.

La necesidad de conocer la influencia del viento en estudios de Geodesia al considerar el nivel fundamental; en la elaboración de cartas marinas al fijar el nivel de referencia de sondas para facilitar la navegación; en obras portuarias para calcular alturas de franco bordo en muros de contención; en obras de defensa de márgenes para evitar inundaciones, especialmente en estuarios de desembocadura, donde, además, influye en el nivel la crecida, dan dado origen a multitud de estudios especiales, cuya bibliografía es bastante copiosa. Cada problema tiene sus modalidades, así la línea de niveles de referencia de sondas es distinta de la curva de intersección con la costa del nivel cero del geoide o superficie de las "aguas marinas", definida ésta por ser normal en todo lugar a la resultante de la acción gravitatoria de atracción terrestre y fuerza centrífuga ordinaria de la rotación terrestre determinadas por medidas gravimétricas. La oscilación local de marea determina la situación del nivel de referencia de sondas en cada punto, según reglas en las que no hay aún completo acuerdo internacional. En los puertos, la propia obra determina bancos y arrastres y altera niveles, modifica corrientes y sedimentos, y puede dar lugar a insospechados perjuicios en regiones vecinas o apartadas. Por parte de los institutos mareográficos, oceanográficos, meteorológicos, se procede a un análisis estadís-

(1) Thorade: Probleme der Wasserwellen. *Entstehung der Wellen durch Wind*, págs. 37-54. Hamburgo, 1931.

Véase también: Larisch: *Sturmsee und Brandung*. Leipzig, 1926. Vaughan Cornish: *Occean Waves*. Cambridge, 1934, con notas adicionales por Jeffreys, págs. 121-159.

(2) Weinblum: *Seegangsforschung: Naturwissenschaften*, págs. 193-198, 1938.

tico de los valores de las presiones atmosféricas y las alturas residuales de nivel. En tales estudios de correlación no se separa el efecto barométrico del efecto de gradiente y buscando máximos de coeficientes de correlación se trata de estimar el retraso con que se manifiestan los efectos. Probablemente en lo porvenir el problema vendrá relacionado con la marcha general del tiempo, abarcando mayores ámbitos. Los estudios actuales se refieren principalmente a mares interiores, estrechos, puertos, y ponen a contribución observaciones meteorológicas relativamente próximas; v. gr., dentro de un círculo de 500 kilómetros de radio.

SEGUNDA PARTE

DE LA VIRAZON DEL VIENTO SEGUN LA ALTURA Y LA CORRIENTE MARINA SEGUN LA COTA DE SONDA

1

Generalidades.

Un segundo problema de carácter menos local es el de la circulación atmosférica y marina.

A pesar de los estudios realizados, las condiciones a cumplir en la superficie de separación no están debidamente y en definitiva establecidas.

Consecuencia del dinamismo de los vientos y las aguas es la topografía de los mares. De trabajos realizados en expediciones marítimas sobre permanencia de presiones altas o bajas, dirección e intensidad de corrientes marinas e influencia de arrastre de los vientos estacionarios, puede deducirse la forma topográfica media de la superficie de los mares como forma alterada de la debida a la gravedad terrestre y a las fuerzas centrífugas en el movimiento relativo alrededor del eje de rotación.

A esta forma estacionaria viene a añadirse la perturbación, periódica o casi periódica por las fuerzas centrífugas debidas al movimiento relativo alrededor del c. d. g. del sistema Sol-Tierra-Luna (oscilaciones de las mareas) y las vibraciones propias y forzadas de carácter permanente en estratos de forma parecida a los océanos; v. gr., para el Atlántico, que en ciertos estudios se asimila la forma de un canal o huso entre dos meridianos.

Desniveles potenciales de 50 dinas centímetro parecen existir entre puntos de igual latitud en el nivel del mar en Haití y en las costas occidentales del Africa, diferencias explicables por los aliseos. La corriente compensadora llamada de Guinea corre entre dos de dirección contraria que van de este a oeste. La superficie presenta ondulaciones como consecuencia del movimiento con gradientes opuestos (1).

En la confluencia de corrientes, la superficie de discontinuidad de velocidades afecta formas singulares; fórmanse remolinos estacionarios, superficies de "frente" polar y trópico, que dan lugar en la atmósfera a ciclones y anticiclones, en las aguas marinas a divisorias que separan las surgentes y las surmentes, etc.

2

Problema de Ekman. Espirales.

Sea en el aire V la velocidad horizontal del viento, variable con la altura z sobre el nivel del mar. Vendrá definida por su intensidad y rumbo. Análogamente, sea W la velocidad horizontal de la corriente marina, variable con la sonda. Admitiendo que existe una capa inferior, la tropoesfera, donde se

(1) Defant: *Einflüsse der Gradientströme: Meteorologische Zeitschrift*, pág. 174. 1942.

manifiestan las nubes, donde varía la temperatura al ascender, donde el viento en general aumenta con la altura, y una capa superior, la estratòesfera, separadas por una superficie que se denomina la tropopausa, se pide cuál es la distribución del viento horizontal en la vertical de la tropoesfera y la distribución en intensidad y dirección de las corrientes horizontales en el mar.

Se puede denominar problema de Ekman al enunciado tal, por haber hallado Ekman (1) una solución particular del mismo, aclarando ciertas dificultades que ofrecía la antigua teoría de Guldberg y Mohn sobre la diferencia entre el viento de gradiente y el viento observado en la superficie de la parte sólida o líquida de la corteza terrestre.

La solución, denominada espirales de Ekman, deducidas por éste para la corriente marina, pero aplicables a la atmósfera, supone que, en primera aproximación, pueden introducirse simplificaciones notables que permiten formular el equilibrio estacionario entre las principales fuerzas en juego.

Las simplificaciones son de naturaleza másica, es decir, aplicables a la masa, y de naturaleza límite, mejor dicho, aplicables a las superficies límites: la tropopausa, la del espejo de agua y la del fondo.

Simplificaciones en las condiciones másicas: Existencia de estado estacionario; movimiento horizontal rectilíneo o de muy grande curvatura; aceleración vertical nula, gradiente horizontal de presión, constante; valor constante del coeficiente μ' de transporte en todo el grueso del estrato tropoesférico y otro análogo μ, constante también, para toda sonda; influencia de la

(1) Ekman: On the influence of the Earth rotation in Ocean currents. *Arkiv f. Mathematik*, etc. Estocolmo, 1905.—*Dynamische Gesetze der Meeresströmungen Vorträge aus dem Gebiete der Hydro und Aerodynamik*. Berlín, 1924.

Véase también su redacción en el *Tratado de Mecánica* de Auerbach (Barth). Leipzig, 1927, tomo V, pág. 177, y la bibliografía contenida en Neuere Ergebnisse und Probleme zur Theorie der Konvektion Ströme im Meere. *Ergebnisse der Kosmischen Physik*, tomo IV, págs. 1-74. Leipzig, 1939.

fuerza centrífuga compuesta, engendrada por la rotación terrestre, la que se considera hasta tal extremo preponderante, que no entra en el cálculo ninguna otra fuerza de inercia. Las fuerzas preponderantes quedan reducidas a tres: la centrífuga compuesta, el gradiente de presión y la viscosidad.

Recordando cómo se expresa la fuerza centrífuga compuesta en función de la rotación terrestre ω, de la latitud φ y de la velocidad V, el equilibrio de las tres fuerzas supuestas preponderantes conduce a dos ecuaciones en el plano, o a la ecuación vectorial

$$\frac{d}{dz}\left(\mu' \frac{d\,U'}{dz}\right) = i\,2\,\rho\,\omega \operatorname{sen}\varphi\, U', \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

en que U′ es la diferencia entre V y la llamada corriente geostrófica

$$G = \frac{1}{2\,\omega\,\rho \operatorname{sen}\varphi}\,\frac{dp}{dn}$$

(n la normal a las isobaras en el sentido de presiones decrecientes).

Es decir, vectorialmente

$$U' = G - V.$$

La velocidad G está dirigida según la isobara, siendo contrasolem la rotación fuerza centrífuga compuesta, viento, gradiente.

En el Océano puede establecerse una ecuación análoga; en ella $\frac{dp}{dn}$ será el gradiente de nivel que engendra la "corriente profunda", análoga a la geostrófica de la atmósfera.

En la nueva ecuación el coeficiente de transporte (1) es μ, y en ella $U = G - W$:

$$\frac{d}{dz}\left(\mu \frac{dU}{dz}\right) = i\, 2\, \rho\, \omega \operatorname{sen} \varphi \cdot U.$$

Observando que $2i = (1 + i)^2$, si $\mu =$ constante, escribiendo $B^2 = \frac{\rho\, \omega \operatorname{sen} \varphi}{\mu}$, resulta

$$\frac{d^2 U'}{dz^2} = (1 + i)^2 B^2 U'$$

$$U' = M e^{-(1+i)Bz} + N e^{(1+i)Bz};$$

si $N = 0$ es una espiral logarítmica con ángulo de la tangente y radio vector igual a 45°, el ángulo polar es función lineal de z.

3

Examen de las condiciones en los límites.

Las condiciones en los límites que determinan los valores de las ocho constantes de integración en las cuatro ecuaciones de segundo orden escritas en forma vectorial en lo que antecede, podrían ser las siguientes:

1. En la tropopausa, las variaciones según la vertical de los dos componentes del viento son nulas o como alternativa

(1) Coeficiente de transporte, rozamiento virtual, son expresiones que traducen el *Austausch* de Schmidt y *Virtuelles Reibungstoeffizient* de Ekman, en oposición al coeficiente de viscosidad molecular.

Schmidt: *Die Massenaustausch in freier Luft und verwändte Erscheinungen.* Hamburgo, 1925.—Die Struktur des Windes. *Sitzunsberichte der math. nat. Klasse.* Academia de Ciencias de Viena. 1929.

equivalente para $z = \infty$, los valores de las dos componentes horizontales de la velocidad del viento son finitas.

2. En el fondo del mar ocurre lo mismo, o su equivalente: las velocidades son nulas.

3. Quedan cuatro condiciones a establecer en la superficie de discontinuidad o espejo de las aguas. Dos condiciones vienen dadas por la ley de la acción y la reacción

$$\mu \frac{dW}{dz} = \mu' \frac{dV}{dz}; \qquad z = 0.$$

Quedan otras dos por establecer. Acaso podría convenir una condición de la forma

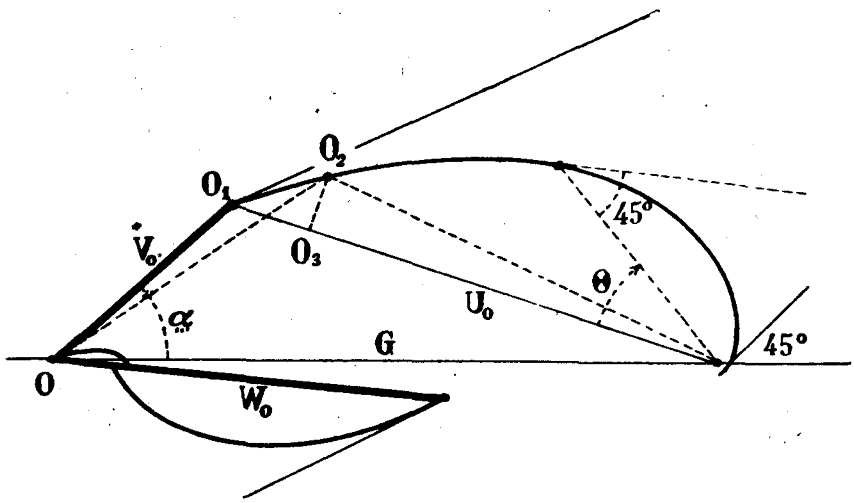
$$\left| \mu' \frac{dV}{dz} \right|_{z=0} = \varkappa \, | V_1 |^n, \qquad (V_1 = V \text{ á 1 metro ó altura anemométrica}),$$

obtenida como resultado de la experiencia o como fórmula de ensayo. En una solución del sistema de velocidades del viento y las corrientes en un "elemento" vertical de Ekman en que intervinieran las constantes $\varkappa$ y n cabría determinarlas por el contraste con la experiencia. Pero con sólo las tres condiciones anteriores no se determinan los elementos todos, por lo tanto, uno de los parámetros del problema habría que considerarlo como fundamental, y la resolución, conocido el gradiente, daría los demás parámetros en función de él. Así, por ejemplo, si se tomara el valor absoluto de V_1, se deduciría el valor de W en la superficie libre, la distribución de W en magnitud y rumbo según la sonda, las de V según la altura, el ángulo de W en el espejo y V_1, la desviación de V respecto de las isobaras, etc.

Sea la espiral en que las condiciones de finitud en lo infinito conducen a un valor de 45° entre el radio vector U y la tangente, el ángulo polar a partir de la U inicial correspondiente a $z = 0$, viene relacionado con la altura z por

$$\theta = B z, \qquad B = \sqrt{\frac{\omega \operatorname{sen} \varphi}{\mu'}}.$$

Sea, además, a distinta escala, la corriente marina definida por dos espirales a 45° como la anterior, una de las cuales repre-



senta la corriente de arrastre y la otra la profunda y rastrera, de la que se prescindirá en el razonamiento. Sobre la representación geométrica se hará la interpretación de la primera condición en el límite común, es decir, la igualdad de esfuerzos tangenciales.

Por la figura, y refiriéndola a diferencias en módulos,

$$\frac{dV}{dz} = \frac{dV}{o_1 o_2} \frac{o_1 o_2}{dz} = \frac{dV}{o_1 o_2} \frac{\sqrt{2}\, o_2 o_3}{dz} = \sqrt{2} \cos \widehat{o_1 o_2 o} \frac{U' d\theta}{dz} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \omega \operatorname{sen} \varphi}{\mu'}} \cos \widehat{o_1 o_2 o} \cdot U$$

$$\frac{dW}{dz} = \sqrt{\frac{2 \omega \operatorname{sen} \varphi}{\mu}}\, W.$$

La condición vectorial $\mu' \frac{dV}{dz} = \mu \frac{dW}{dz}$ para $z = 0$ conduce a la igualdad de argumento y establece por la igualdad de los módulos que

$$\sqrt{\mu'} \cos \widehat{o_1 o_2 o} \,.\, U_0 = \sqrt{\mu}\; W_0 \,.$$

De donde: *a)* La dirección inicial de W_0 es la de U_0, o sea de la diferencia entre la velocidad geostrófica y la rasante.

Si se supone $o_1\, o_2\, o$ muy pequeño, lo que equivale a la llamada condición de Taylor, justificada por la circunstancia de variar poco la "dirección" del viento con la altura a partir del viento rasante,

b) El valor absoluto de W_0 es

$$W_0 = \sqrt{\frac{\mu'}{\mu}} \left| G - V_0 \right| .$$

Con la condición de Taylor $o_1\, o_2\, o =$ cero no hay parámetro fundamental, todas las constantes están determinadas en función del gradiente de presión mediante las cuatro condiciones introducidas en la superficie.

En efecto, magnitud y dirección de W_0 resultan de la igualdad de argumento y de la relación que acaba de escribirse; quedan por determinar V_0 y α. Pero se observará que de la ecuación de la espiral y de ser V_0 tangente a ella se deduce

$$| G - V_0 | = \sqrt{2}\, G \operatorname{sen} \alpha \,; \qquad | G - V_1 | = | G - V_0 | \, e^{-B} ,$$

las cuales, en el triángulo V_1, $G - V_1$, G, con la tercera condición,

$$2\, \mu' \, B\, G \operatorname{sen} \alpha = \varkappa\, V_1^n ,$$

constituyen un sistema para hallar V_1, V_0 y α, supuestas conocidas G, μ', μ, $\varkappa$, n y en la hipótesis de ser constantes μ' y μ.

Si en vez de B se introduce la constante D definida por $BD = \pi$, en el exponente imaginario de e figura como función de z, $i\frac{\pi}{D}z$, por lo tanto, cuando z alcanza el valor D se invierte la dirección de U', y análogamente, para la sonda

$$z = \frac{\pi}{B} = \frac{\pi\sqrt{\mu}}{\sqrt{D\omega \operatorname{sen}\varphi}}$$

se invierte W. Se llama a D altura o sonda de influencia superficial (Reibungstiefe de Ekman), porque el valor de la amplitud se reduce, a la altura o sonda D en $e^{-\pi}$, quedando muy atenuada. El valor de D en el aire sobre el mar es de unos 100 metros para valores moderados del viento. En D entra el coeficiente μ que depende de V en general.

En las consideraciones precedentes no se han introducido los resultados sobre variabilidad de las μ en la capa límite superficial de un metro de aire o la correspondiente de un decímetro de agua, que limitan entre sí y en las cuales hay variación rápida de la amplitud de V y de la amplitud de W. Propiamente, los valores V_0 y W_0 son valores de extrapolación a $z = 0$ que da el cálculo en la hipótesis de la curva espiral logarítmica. Pero esta curva no se prolonga más acá de $z = 1$ para valores menores de z. El mismo ángulo α medido corresponde no al valor V_0, sino a V_1, por ejemplo, aunque difieran poco. El verdadero valor de V_0, que llamaremos $V_{0\,r}$, es menor que V_0 extrapolado, y su dirección distinta de la de V_0, aunque poco diversa. Del mismo modo, $W_{0\,r}$ será un valor real mayor que W_0 y poco diferente de $V_{0\,r}$, que formará con $V_{0\,r}$ un ángulo menor que 45°. La teoría de esta doble capa límite de régimen turbulento, descartando la influencia del oleaje, obliga a introducir valores variables de μ con z y con V.

A mayor violencia del viento, mayor oleaje, y la altura anemométrica debe exceder un metro.

En la cuestión que se considera se ofrecen los siguientes estratos en una vertical: Estratoesfera o zona de calma. Superficie de separación llamada tropopausa, de 17 kilómetros de altura en el ecuador y 10 kilómetros en los polos, variables ambos con el régimen local de vientos, especialmente en régimen ciclónico. Tropoesfera, comprendiendo: zona superior, zona de influencia del rozamiento (de 100 a 500 m.), capa límite superficial ($\sim$ 1 m.). En la zona superior el régimen puede ser turbulento, como lo demuestran observaciones de globos sonda. En la zona de influencia del rozamiento μ es variable con la altura, con un máximo para cierto nivel relativamente cerca de la superficie de las aguas. Espejo de las aguas. Estrato de corriente de arrastre. Zona de corriente profunda. Estrato de corriente rastrera. Fondo.

4

Nuevas condiciones. Teoría de Exner.

En la forma que acaba de exponerse, considerando a la vez el aire y el agua, no ha sido presentado el problema, con la excepción de un ensayo de Exner, del que se habla al término de este capítulo, pero en el que las condiciones límites son difícilmente aceptables. Al examinar separadamente la columna elemental de aire y la de agua, se introducen condiciones límites diferentes e incompatibles. Así, por ejemplo, en el problema atmosférico, la llamada condición de Taylor exige que V para $z = 0$ sea distinto de cero y tenga la dirección de la tangente a la curva V (z). En esta hipótesis, en la finitud de V para $z = \infty$ y en la constancia de μ se basa la teoría de la espiral atmosférica de Ekman en que el radio vector U forma 45° con la tangente. Si α ángulo de V con la isobara para $z = 0$, se toma como elemento paramétrico fundamental, en función de él se determinan las constantes de integración, y, dado el gradiente y la latitud, resulta el valor de V para $z = 0$ y, eventualmente, para $z = 1$. El valor, supuesto constante, del coeficiente de transporte μ se obtiene con la observación de las alturas en que el viento tiene la dirección de la isobara o el valor absoluto G. Así es como Taylor (1) obtuvo de observaciones de Dobson valores de μ para diversos valores de la velocidad rasante.

Una doble condición en que si V_0 es la velocidad rasante y α_0 el ángulo que forma con la isobara

$$\mu \frac{dV}{dz} = f V_0^2 e^{i\alpha_0}$$

con μ constante, fué introducida por Nomitsu (2), el cual calculó los valores de V_0 y α_0 correspondiente a valores dados de G, μ y f. En vez de las condiciones de finitud para $z = \infty$, introduce Nomitsu las de ser nula la variación de V para una determinada altura dada por la observación.

En las condiciones de Nomitsu no hay parámetro fundamental, es decir, no puede partirse de un valor observado de α_0 ó V_0 y calcular el otro, pues ambos resultan del valor del gradiente, si bien introduce un nuevo elemento, la constante f, calculable con los resultados de la experiencia.

En Oceanografía (3), a partir de la memoria fundamental de Ekman, se ha supuesto que el viento superficial que determina la corriente marina coincide con la dirección de $\mu \frac{dW}{dz}$, de lo que se deduce el ángulo de 45° entre el viento rasante y W por rotación cum sole de V a W.

Existe todo un programa de estudios y experiencias a reali-

---

(1) Taylor: *Phylosophical Transactions*, tomo 215, pág. 1. Londres, 1915.
(2) Nomitsu: Winds in the lower atmosphere. *Memoirs of the College of Science*, pág. 333. Kioto, 1933.
(3) Defant: *Dynamische Ozeanographie*. Berlín, 1929.

zar para tener mayor conocimiento de la distribución y dirección de vientos según alturas, y corrientes según sondas en una vertical; la determinación mediante observaciones a diversas alturas y sondas por los métodos en uso habrá de proveer una ley de arrastre como consecuencia de hipótesis más o menos empíricas sobre la dependencia entre μ y las variables z, V. En esta ley intervendrán parámetros cuyos valores, contrastados en casos diversos, den la medida de su invariabilidad y acierto.

En los cálculos y teorías no es posible referirse al valor rasante más que de un modo teórico. Prácticamente, V debe medirse según un criterio preliminar, por ejemplo, a un metro, llamada altura anemométrica. Las demás observaciones se referirán, v. gr., a la altura en que se invierte el viento observado a un metro, a la altura en que su dirección es la isobara, o en que su valor absoluto es el geostrófico, etc. Los resultados de la teoría deberían presentarse en forma que intervinieran sólo elementos observados con cierta precisión.

En un análisis publicado en 1912 en los *Annalen der Hydrographie,* tomo 40, Exner (1) establece como condición límite en la superficie de nivel del mar $V \doteq W$ en valor absoluto y dirección, y coincidentes ambas en la de la isobara. Acepta, además, la continuidad de la tangente, admitiendo espirales a 45° para el aire y para el agua; resulta un diagrama en espiral doble e inflexión en $z = 0$. Son cuatro condiciones para las cuatro constantes en la superficie de nivel, de modo que, dados los valores de μ y μ', a cada gradiente de presión corresponde un viento superficial y una corriente igual.

Resulta para esta corriente 0,016 G si μ y μ' tienen determinados valores.

Sverdrup (2) admite una capa laminar en el espejo de las

(1) Referencia de Koschmieder, *Dynamische Meteorologie,* pág. 283. Leipzig, 1941.

(2) Sverdrup: On the evaporation of the Ocean. *Journal of Marine Research,* 1937, pág. 1. (Referencia sacada del texto de Lettau sobre turbulencia atmosférica.)

aguas marinas de un grueso de algunos milímetros en la capa límite de la humedad, de naturaleza turbulenta. (No ha sido posible analizar este trabajo, por lo cual queda solamente mencionado por su referencia.)

5

Complementos al problema. Trabajos experimentales. Curvas isalobáricas.

La teoría de las espirales de Ekman, aun con la generalización de nuevas condiciones en los límites, ρ variable con z y μ variable con z y V, y aun suponiendo variable el gradiente horizontal con la altura, es demasiado simplificada para lograr una adaptación satisfactoria a realidades en que la trayectoria deja de ser rectilínea, y es desde luego inaplicable a formaciones ciclónicas o anticiclónicas, aun las de gran radio de acción. La fuerza centrífuga ordinaria y la formación de frentes de discontinuidad en la atmósfera o en el mar altera profundamente la distribución de velocidades y rumbos en la vertical (1), (2), (3).

---

(1) Para el caso de gradiente variable con la altura véase Hesselberg y Sverdrup: *Veröffentlichungen der Geophysikalische Institut der Universität*, págs. 241-309. Leipzig, 1915.—Die Reibung in der Atmosphäre.—Mollwo: Zur Wirkungsweise der Reibung in der freien Atmosphäre. *Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre*, págs. 25-45, 1936.

(2) Para el caso de μ variable con z véase Prandtl Tollmien: Die Windverteilung ueber dem Erboden errechnet aus der Gesetzen der Rohrströmung. *Zeitschrift für Geophysik*, págs. 47-55, 1925.

Köhler: Studium des Austausches auf Grund des Potenzgesetzes. *Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre*, tomo XIX, págs. 91-104, 1932.

Rossby: A generalisation of the Theory of the mixing length with applications to atmospherie and occeanic turbulence: Massachussets Institute of Technology, 1934. *(Meteorological papers.)*

Rossby y Montgomery: The lager of frictionel influence in wind and occean currents. Id. 1935.

En general, véase el tratado de Lettau: *Atmosphärische Turbulenz*. Leipzig, 1939.

(3) Véase Haurwitz para la influencia de la aceleración tangencial y centrífuga en movimientos estacionarios: On the change of Wind with elevation. *Gerlands Beiträge*, págs. 243-267, 1935.

El análisis en el caso general es difícilmente asequible al cálculo matemático. Por este motivo se suele referir a resoluciones parciales de una serie de problemas en que entran un reducido número de elementos en juego.

Así, por ejemplo, Fjelstadt (1) resuelve el caso de movimiento no estacionario y de movimiento estacionario prescindiendo de términos cuadráticos en las aceleráciones, dejando variable el coeficiente de viscosidad o de rozamiento virtual y suponiendo constante el gradiente horizontal de presiones. Sus métodos resolutivos en forma de ecuaciones integrales permiten abarcar en forma sintética, resultados muy generales. La primera de sus memorias es de 1930. En 1933 aplicó métodos análogos al estudio de la deriva de témpanos y corriente submarina bajo el hielo, provocados ambos por el viento. El efecto del hielo aumenta el ángulo del viento y la corriente. Es especialmente interesante en la resolución de Fjelstadt el análisis del régimen de establecimiento del movimiento estacionario, siguiendo las directrices de su compatriota Fredholm *(Arkiv,* 1906).

Otros matemáticos y geofísicos abordan el problema del movimiento de un flúido sobre una plataforma en movimiento de rotación elaborando el análisis del movimiento inicial y haciendo intervenir condiciones simplificadoras con objeto, v. gr., de analizar la influencia del relieve terrestre o submarino en la formación de corrientes. Objetos de estudio teórico y experimental, los resultados contribuyen a aclarar la cinemática y dinámica de ciclones y anticiclones. Junto a trabajos de autores ingleses, descuellan los de la escuela de Prandtl (2), (3), (4), (5)

---

(1) Fjelstad: Ein Problem aus der Windstromtheorie. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik,* págs. 120 y sigs., 1930.—Windstrom in einem Eisbedeckten Meere. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik,* páginas 348-355, 1933.

(2) Prandtl: Erste Erfahrungen mit den rotierender Laboratorium. *Naturwineschaffen,* pág. 425, 1926.

y (6), en el Instituto Kaiser Wilhelm para estudio de corrientes. En estos estudios interesa sobremanera el desarrollo y comportamiento de la capa límite en contacto con el fondo del depósito donde las fuerzas centrífugas del movimiento relativo vienen disminuídas por el rozamiento virtual y de contacto, dando lugar a las que denominan corrientes secundarias, Un movimiento ciclónico es asimilable, en cierto modo, a una masa muy extensa en rotación colocada sobre la tierra fija.

Antes de proceder al examen de tales frentes y de abordar con mayor generalidad el problema de la superficie que separa dos medios heterogéneos en movimiento relativo, parece oportuno mencionar los esfuerzos de Baur y Philipps (1) para sintetizar las discrepancias entre la teoría de Ekman y la realidad, así como mencionar las líneas isoalóbaras o de igual variación de presión durante un intervalo dado, pues acontece que la diferencia entre el viento de gradiente teórico deducido por las espirales y el viento observado es normal al gradiente isoalobárico o gradiente de $\frac{\Delta p}{\Delta t}$ (2) dejando a la derecha las curvas con valor decreciente del mismo.

Baur y Philipps insisten en la idea primitiva de Guldberg

---

(3) Cochran: The flow due to a rotating disc. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,* pág. 365, 1934.

(4) Thiriot: Ueber die laminare Anlaufsströmung einer Flüssigkeit ueber einem rotierenden Boden bei plötzlicher Änderung des Drehungszustandes. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik,* págs. 1-12, 1940.—Untersuchungen ueber die Grenzschit einer Flüssigkeit ueber einer rotierenden Scheibe. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik,* págs. 23-28, 1942.

(5) Bödewadt: Die Drehströmung ueber festeb Grunde. *Zentschrift für angewandte Mathematik und Mechanik,* págs. 241-253, 1940.

(6) Görtler: Einfluss der Bodentopographie auf Strömungen ueber der rotierenden Erde. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik,* págs. 279-303, 1941.

(1) Baur y Philipps: Untersuchung der Reibung bei Luftströmungen über dem Meer. *Annalen der Hydrographie,* 1938, págs. 279-295.

(2) Möller y Sieber: Ueber die Abweichungen zwischen Wind und geostrophischen Wind in der freien Atmosphäre. *Annalen der Hydrographie,* págs. 312-322, 1937.

y Mohn sobre la influencia del rozamiento en el suelo, equiparándolo a un efecto en bloque sobre la masa de aire de valor $\rho\, b\, V$ y opuesto a la dirección de la velocidad V a la altura anemométrica. A este efecto añaden el de las capas próximas, tal como aparece en la teoría de Ekman. Operan con valores medios con objeto de eliminar aceleraciones. Sólo intervienen en sus cálculos diferencias respecto a valores medios. Según la nueva constante b introducida, varía el ángulo del viento con la isobara. Sobre el mar, como resultado de la observación, la constante b vale $0{,}76\ 10^{-4}\ \mathrm{seg}^{-1}$.

La observación de Möller Sieber es interpretada por Ertel (1) como debida a la inercia que introduce el cambio de presión. Los dos miembros de las ecuaciones de equilibrio en un estado estacionario corresponden a tiempos no simultáneos. Sea τ el retraso con que una variación de gradiente se manifiesta en la velocidad:

$$-2\,\omega \operatorname{sen} \varphi\, (\rho\, V_y)_t = -\left(\frac{dp}{dx}\right)_{t-\tau},$$

$$2\,\omega \operatorname{sen} \varphi\, (\rho\, V_x)_t = -\left(\frac{dp}{dy}\right)_{t-\tau}.$$

Si

$$p_{t-\tau} \doteq p_t - \tau \frac{dp}{dt},$$

y se llaman ξ y η las correcciones $v_x - (v_x)$, $v_y - (v_y)$, siendo las cantidades entre paréntesis las teóricas según Ekman, se tendrá para las correcciones:

$$-2\,\omega \operatorname{sen} \varphi\, \rho\, \eta = \tau \frac{d^2 p}{dx\, dt}, \qquad 2\,\omega \operatorname{sen} \varphi\, \rho\, \xi = \tau \frac{d^2 p}{dy\, dt},$$

(1) Ertel: *Methoden und Probleme der Dynamischen Meteorologie*, pág. 121. Berlín, 1938.

luego la corrección es normal al gradiente isalobárico, prescindiendo de inercia y viscosidad. Prácticamente, τ es del orden de una hora.

6

Problema general de las circulaciones atmosférica y marina. Ciclogénesis.

En los primeros análisis de Ekman se estudia el equilibrio estacionario entre el gradiente de presión horizontal, la fuerza de Coriolis y el rozamiento virtual sin estratificación de la masa. Pero aun las pequeñas corrientes marinas exigen introducir la fuerza centrífuga de su movimiento curvilíneo; el coeficiente de corrimiento virtual experimenta variaciones y la estratificación es importantísima. Gracias a ella pueden deducirse los valores de las corrientes marinas, los cuales no resultan, en general, de las indicaciones de los aparatos medidores, por el carácter temporal y local de las medidas y la turbulencia en que se ven envueltos hidrómetros e hidrógrafos y dificultad de fijarlos y traducir sus indicaciones a diversas sondas.

La primera teoría de Ekman data de 1906; en 1932 (1) publicó una teoría más completa del régimen estacionario conservando los términos de la aceleración horizontal de que había prescindido antes.

Se elaboran de este modo estudios concretos, esperando llegar algún día a un estudio teórico de la circulación oceánica en el que el cálculo matemático permita englobar las corrientes superficiales y profundas, las verticales, los frentes de discontinuidad y los torbellinos, análogamente a lo que se espera poder

---

(1) Ekman: Studien zur Dynamik der Meeresströmungen. *Gerlands Beiträge zur Geophysik*, págs. 385-438, 1932.

resolver algún día respecto de la circulación de vientos en la atmósfera.

El problema de la circulación atmosférica consiste en lo siguiente: En la superficie de la tierra animada del movimiento diurno de rotación limita una capa de aire y vapor de agua que constituye la atmósfera. Este estrato flúido, más concretamente, la tropoesfera, se halla expuesto a la radiación solar, variable con las estaciones y con el grado de nebulosidad de la propia atmósfera. La radiación solar determina un campo escalar de temperaturas, y aquélla y la atracción terrestre un campo escalar de presiones y densidades. Tales campos determinan el movimiento de grandes masas de aire formando estratos horizontales y masas ascendentes, que ofrecen singularidades y permanencias reveladas por la observación, sea en la superficie, sea en altura por globos sonda, movimientos de nubes, forma de nubes, etc. Se trata de explicar la observación por premisas *a priori* sobre la radiación, la ecuación de estado, las ecuaciones de la Hidrodinámica y los principios de la Termodinámica. Las variables en función de x, y, z, t, como independientes, serían las tres velocidades, la presión, densidad y temperatura y el grado de humedad; siete para cada hipótesis sobre la radiación, a determinar con las siete ecuaciones mencionadas.

A pesar de las sencillas descripciones de Ferrel, de las ecuaciones de Overbeck y de los optimismos de Bjerknes (1); a pesar de que cada día es mejor conocida la distribución de los grandes vientos que constituyen la circulación atmosférica según latitudes, longitudes y alturas, el desconocimiento de la radiación ha hecho poco menos que insoluble el problema, del que se conocen, sólo como por vía de ejercicio, soluciones particulares, válidas para casos concretos, teóricos, irrealizables. Para problemas estacionarios con simetría zonal y diversas distribu-

(1) Bjerknes-Solberg: *Physikalische Hydrodynamik*. Berlín, 1933.

ciones del coeficiente de transporte con la altura, así como de la radiación, puede leerse la memoria de Kropatschek (1).

Se opera siempre con las ecuaciones hidrodinámicas del movimiento relativo perturbado, en las que se introducen simplificaciones para poder obtener resultados concretos. Mediante tales procesos de cálculo se ha conseguido explicar muchos fenómenos más o menos locales; uno de los fenómenos típicos es, por ejemplo, el de la forma de las líneas de corriente y estructura de nubes a sotavento de las crestas y altos cerros, problema estacionario y ondulatorio resuelto por G. Lyra (2), suponiendo isoterma la atmósfera no perturbada. Se ha dado a las ecuaciones la forma de las ecuaciones clásicas de la marea (analogía de Bartels Jeffreys) para atmósferas isotermas en estado de equilibrio antes de la perturbación; se ha teorizado la onda de variación diurna de presión linearizando las ecuaciones (problema de Margules); se ha explicado desde Helmholtz la inclinación de las superficies de discontinuidad; pero el problema general de la distribución y forma de estas superficies en la atmósfera todavía está por acometer.

Con soluciones particulares que pudieran convenir a un caso concreto no estaría resuelto completamente el problema de la circulación atmosférica ni aun para tales soluciones, porque es preciso conocer su estabilidad.

No cabe duda de que los ciclones y anticiclones son contracciones, deformaciones, oclusiones, remolinos que se engendran en superficies de discontinuidad, y acerca del modo como se realizan puede tenerse una idea bastante completa, dada por la observa-

---

(1) Kropatschek: Die Mechanik der grossen Zirkulation der Atmosphäre. *Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre*, págs. 273-297, 1935.

Otros casos tratados por Jeffreys pueden leerse en *Quaterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 1931, referidos por Brunt: *Dynamical and Physical Meteorology*, págs. 406-409. Cambridge, 1939.

(2) G. Lyra: *Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre*, 1934, repetido en *Koschschmieder: Dynamische Meteorologie*, págs. 318-321, 1941.

ción; pero falta saber por qué se desarrollan en tales y cuales zonas de latitud y cuâl es la ley que rige su dinámica. La misma noción de estabilidad no es clara, pues cabe distinguir la inestabilidad definida por pequeñas oscilaciones, la inestabilidad para perturbaciones finitas, la inestabilidad para movimientos perturbados ondulatorios, etc.

En líneas generales, la circulación parece originarse en la mayor absorción junto al ecuador, pero no en el ecuador propiamente tal, donde la nubosidad es grande y, por tanto, las nubes reenvían al espacio la radiación solar, más bien entre 20 y 30° latitud norte, en julio, se halla la máxima absorción. El aire rasante, que desde latitudes altas se dirige a ciertas regiones, procede del NE. y vira, en procedencia del E. a medida que avanza, por el efecto de la rotación terrestre: es el aliseo. La afluencia de los aliseos en la zona tórrida y la temperatura determinan corrientes ascensionales, que al elevarse se enfrían e inician su carrera en dirección de latitudes altas, a gran altura sobre la superficie sólida o líquida de la tierra. Al iniciar su carrera en el meridiano, desvían a la derecha en el hemisferio norte (y a la izquierda en el sur) por efecto de la aceleración de Coriolis, iniciando la virazón del oeste. Este viento del oeste en las alturas, enfriado, desciende conservando su dirección, y es el contraaliseo, del que se han hallado evidencias de corriente rastrera en latitudes hasta de 20 a 25°. Para latitudes más altas el viento rasante procede del oeste y del sudoeste, y los vientos altos del oeste, y como no es posible admitir una simetría zonal (distribución independiente de la longitud), por no ser observada una concentración de aire en latitudes altas, el viento debe virar al sur en las mismas latitudes en que tiene permanencia el viento del oeste. En éstas, tal virazón va acompañada de ciclones y anticiclones, como resolviendo un estado estacionario inestable. Lo que equivale a decir que no puede haber circulación estacionaria, por lo tanto, la idea explicada en textos elementales con tanto pormenor, es ilusoria.

El equilibrio térmico entre radiación absorbida del sol y energía disipada en el movimiento e irradiada en pérdida se realiza al través de múltiples movimientos de la masa en corrientes más o menos regulares en dirección e intensidad, funciones del punto y del tiempo, donde se manifiestan ciertas regularidades en las líneas trayectorias y de corriente y ciertas superficies de discontinuidad en velocidad tangencial y densidad, temperatura y humedad, las cuales no pueden lograr carácter permanente y estacionario y se transforman y alteran, dando lugar a remolinos y ondulaciones de carácter variable, que se propagan en la masa, ocluden, desaparecen, reapareciendo formas análogas en otro lugar y en otra hora, pero con suficiente persistencia para mantener el interés del meteorólogo por una solución de conjunto, que en lo que va de siglo ha ido esfumándose a medida que era más conocido el pormenor.

Si se consideran latitudes superiores a la del trópico y el huso atlántico, las masas del aire cálido procedente del oeste y el aire frío procedente del este no se mezclan, sino que se yuxtaponen, estando separadas por la denominada superficie de discontinuidad. Esta superficie no es tal superficie en realidad, pero puede llamarse tal a la concentración en dos dimensiones de las variaciones rápidas de temperatura. De esta superficie suele dibujarse la traza en los planos meteorológicos de nivel cero, y es lo que se denomina frente. A veces se da el mismo nombre a toda la superficie.

Ya en 1888 hizo ver Helmholtz que, siendo las fuerzas que obran sobre una masa de aire en movimiento la gravedad, la aceleración y las aparentes en el movimiento relativo, toda permanencia de una superficie de separación entraña una inclinación de la misma. Admitiendo condiciones estacionarias en la Tierra, la superficie cónica de revolución forma un cinturón zonal. Si se denominan ρ_1 y ρ_2 las densidades, v_1 y v_2 las velocidades tangenciales a la superficie, $\lambda = 2\,\omega$ sen φ, $\lambda' = 2\,\omega$ cos φ, de las ecuaciones generales en que se prescinde de aceleraciones distintas de la de Coriolis se deduce:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\lambda\,(\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2)}{g\,(\rho_1 - \rho_2) - \lambda'\,(\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2)}\,.$$

Tal es el valor de la inclinación de las generatrices sobre el horizonte. Más adelante, el meteorólogo Margules (1) desarrolló ampliamente estas ideas, que han pasado a los tratados corrientes.

Llamando α al ángulo de inclinación e introduciendo temperaturas en vez de densidades, resulta aproximadamente:

$$tg\,\alpha = \frac{1}{2}\,\frac{\lambda}{g}\,(v_2 - v_1)\,\frac{T_2 + T_1}{T_2 - T_1}\,,$$

la velocidad del aire frío cum sole.

Esta supuesta superficie ha sido el origen de las especulaciones de meteorólogos noruegos de la escuela de Bjerknes, que han visto en su inestabilidad el origen de ciclones y anticiclones. Sin que sea objeto de las pocas líneas que cierran la segunda parte de este escrito exponer con pormenor adecuado en qué consiste la inestabilidad de la presunta superficie, ni estudiar los fenómenos de pliegue y oclusión desde el punto de vista cuantitativo teniendo en cuenta el rozamiento, se indica brevemente la teoría de Bjerknes como ensayo explicativo de uno de los más interesantes fenómenos naturales en que interviene el arrastre relativo de dos estratos flúidos, y como preliminar de más extensos estudios en una cuestión de palpitante interés.

(1) Margules: *Meteorologische Zeitschrift*, págs. 243, etc., 1906.

7

Ecuaciones de perturbación.

Bjerknes cree que la superficie cónica del frente de separación de dos corrientes flúidas, la fría del este, cum sole, y la cálida del oeste, es inestable, y en vez de conservar la forma cónica da lugar a pliegues. Una vez iniciado un pliegue, la traza se convierte en una circunferencia con un ángulo entrante, el borde del ángulo limitado por lados curvilíneos. Este pliegue se propaga contra solem, de oeste a este. En su interior el aire es cálido entre masas de aire frío. De los dos lados, el que va a proa o avante se llama frente cálido, porque introduce el aire cálido en la comarca que barre, y el otro es el frente frío, porque precede las masas de aire a temperaturas bajas. Por efecto del pliegue y la curvatura de los lados, el aire frío, más allá del frente de avance, tiende a soplar del SO., y antes del frente cálido ha virado, en procedencia del SO. también.

La intervención del rozamiento en la superficie de la Tierra y otras causas, no bien aclaradas, de estabilidad, tienden a deformar el pliegue a medida que se propaga, y de tal modo que los lados van cerrándose y se convierte en un remolino; en la parte ecuatorial gira con viento del SO.; en la boreal, con viento este; el frente es no ya un pliegue, sino una tromba en remolino, cuyas partículas giran contra solem. El ciclón es arrastrado, en el arrastre se modifica y empequeñece y acaba por desaparecer por oclusión.

El ascenso del aire caliente en la proa del pliegue, a medida que avanza, da lugar a nubosidades y lluvias; el frente posterior que abre paso al aire frío se llama turbulento y origina condensación por contacto.

Desde que se ha podido conocer el estado de la atmósfera a grandes alturas, se ha podido adelantar en la cinemática de los ciclones de Bjerknes. La velocidad máxima de rotación del ciclón se halla junto a la estratoesfera; el remolino actúa como una bomba centrífuga de succión y provoca el descenso de la tropopausa. Las masas aspiradas y elevadas se enfrían rápidamente, más que el aire alrededor y la parte central del ciclón es fría. Es probable que el remolino de la tropoesfera se continúe por otro remolino en la estratoesfera. El gradiente señala baja presión en el centro.

Este mecanismo (1) describe a grandes rasgos, con graves dificultades, el modo cualitativo de formarse y desarrollarse los ciclones. La primera dificultad se encuentra al explicar los anticiclones. Para ello se ha recurrido a lo siguiente: El anticiclón sería un ciclón en cuanto al sentido absoluto de las rotaciones, pero el observador en la tierra debe combinarlas con la rotación de esta contrasolem, el resultado es la diferencia. Si aquélla es menor que la relativa, aparecerá cum sole, anticiclónica. Pero la rotación es ahora mínima en estratos altos, con máximos en la estratoesfera y cerca del suelo. De este modo, el aire de la tropoesfera desciende y, al descender, se caldea, lo que determina el centro cálido y la mayor presión.

Esta brevísima descripción no basta para describir las particularidades, aun las más salientes, de ciclones y anticiclones, ni contiene razón ninguna energética o de causalidad, no es de estrañar, por lo tanto, que deje abierto el interés y la necesidad de mayor pormenor, así como de teoría, y se refiera casi exclusivamente a la traza, sin precisar apenas lo que ocurre en la altura.

Un análisis sinóptico y estadístico de los ciclones revela que el gradiente de presión en el frente avante es mayor que en el

---

(1) V. Stüve: Die unperiodischen Zirkulationen der mittleren Breiten, páginas 476-524 de su tratado de Meteorología, publicado en 1937 formando parte de la colección *Handbuch der Geophysik*, que comenzó a editar Gutenberg.

posterior, de modo que por esta causa el pliegue no debiera cerrarse si no fuera por el rozamiento en la superficie de la tierra y la acción difusiva del aire ascendente. La inclinación del pliegue en la parte avante es menor (1 : 200) que en la posterior (1 : 100). La oclusión, en rigor, corresponde sólo a los estratos inferiores de la tropoesfera. El frente frío es mucho más acusado, preciso y permanente, mucho más estable que el otro. En la ciclogénesis intervienen divergencias y convergencias, dilataciones y rarefracciones que determinan los movimientos del aire y la formación de los gradientes de presión, las tendencias a la baja o alta, etc.

El régimen anticiclónico presenta mucho menos acusadas las líneas de discontinuidad en los mapas del tiempo, la discontinuidad de velocidad es en ellos ciclonal. Y si ello no ocurre, el frente anticiclónico desaparece en pocas horas.

Las "superficies" de discontinuidad en la temperatura adiabática húmeda que limitan inferiormente masas frías y superiormente masas cálidas, son capas de potencia alrededor de 2 a 5 kilómetros. En cambio, las superficies límites que confinan entre una masa cálida superior y una fría inferior en los anticiclones tienen mucha menos potencia, la inversión es muy acusada. Cuando la superficie de discontinuidad llega al nivel del mar, determinando una línea de frente en los mapas, la potencia a unos 300 kilómetros a lo largo de la superficie de discontinuidad tiene de ½ a 5 kilómetros.

Las líneas de frente en el plano al nivel del mar, de apariencia bien manifiesta, se acusan en zonas donde el movimiento vertical ascendente es intenso; en cambio, las superficies de menor potencia o la discontinuidad más acusada corresponden a regiones con movimiento vertical descendente.

La formación del frente acusado en el plano horizontal del tiempo es debida a una contracción vertical. En la formación de ciclones intervienen movimientos espontáneos que liberan gran

TERCERA PARTE

DE LAS ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DE LIQUIDOS VISCOSOS Y DE LA CAPA LIMITE EN REGIMEN LAMINAR

1

Ecuaciones de Navier Stokes. Variación en la circulación. Condiciones en los límites.

Toda cuestión que se intente resolver referente al arrastre relativo de estratos necesita de hipótesis para constituir la teoría. En lo que precede se ha hecho empleo únicamente de la expresión del esfuerzo tangencial sobre la unidad de superficie en función del gradiente de velocidad paralela tomado normalmente a la superficie, idea que se debe a Newton. El coeficiente de proporcionalidad se ha denominado coeficiente de viscosidad o de transporte y ha sido designado por μ. El transporte se ha referido a la cantidad de movimiento de la velocidad paralela.

Una generalización de las leyes elementales, deducidas de antiguos experimentos de Poiseuille, ha permitido evaluar el esfuerzo elemental entre dos unidades de superficie paralelas como diferencia de los esfuerzos sobre cada una de ellas, suponiendo μ variable con la altura.

La fuerza másica que así resulta:

$$\frac{d}{dz}\left(\mu \frac{dV}{dz}\right),$$

ha sido utilizada por gran número de matemáticos y especialmente por Prandtl, por lo que suele llevar este nombre para distinguirlo de otras expresiones, también empleadas, y cuyo fundamento es diferente.

Las condiciones en los límites han afectado forma sencilla: la continuidad del esfuerzo tangencial y la impenetrabilidad normal.

Para abordar problemas más complicados es preciso servirse de fórmulas más amplias y generales. Las primeras fórmulas que responden a esta necesidad son las dadas por Navier en 1827. Se obtienen partiendo de las fórmulas de la elasticidad lineal, como si se tratase de cuerpos plásticos, pero sustituyendo los corrimientos u, v, w por sus velocidades. Siendo μ el coeficiente de esfuerzo cortante, las fórmulas de la elasticidad lineal relacionan el tensor de esfuerzos y el de deformaciones mediante las siguientes fórmulas simbólicas:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_3 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_3 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_3 \end{vmatrix} = \mu \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} - \theta & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} - \theta & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} - \theta \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} - \theta & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} - \theta & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} - \theta \end{vmatrix}$$

$$3\,\sigma_3 = -3p = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \qquad 3\,\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

en que cada elemento del primer determinante se expresa por la suma de los dos que ocupan el mismo lugar en los determinantes del segundo miembro. En elasticidad lineal hay que añadir otra ecuación, pues la expresión de $\sigma_z - \sigma_3$, por ejemplo, tal como resulta de lo anterior, no es independiente de las otras. En plasticidad se aceptan las expresiones anteriores en que u, v, w, no son corrimientos, sino velocidades, pero μ es una cantidad que depende generalmente del tiempo. Quedan como ecuaciones horísticas fundamentales de la viscosidad lineal, con μ constante, obtenidas por analogía, no como consecuencia de una teoría del cuerpo viscoso (1):

$$\sigma_x = 2\,\mu\,\frac{\partial u}{\partial x} - p - \frac{2}{3}\,\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

$$\tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

y otras cuatro análogas. Formando con estos componentes las fuerzas másicas, y en la hipótesis de μ constante, la componente sobre el eje x es

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \mu\,(\Delta\, u) + \frac{1}{3}\,\mu\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \frac{\partial p}{\partial x}$$

y otras dos análogas.

(1) En forma lineal existe una teoría del cuerpo viscoso gaseoso establecida por Maxwell y expuesta en todos los tratados de teoría cinética de los gases. Es precisamente la clásica teoría del transporte por capas aplicada aquí al de la cantidad de movimiento en una corriente cuando el transporte se realiza por convección, es decir, por multitud de elementos de masa m animados de velocidades c que inciden sobre el estrato en dirección θ. Establecida una ley estadística, se puede calcular en base a la misma el coeficiente de viscosidad comparando el esfuerzo cortante con el que formulara Newton y que sirve para definir dicho coeficiente.

De cómo todo rozamiento interno, más general que el que traduce la expresión de Newton, por ejemplo el que se formula por las ecuaciones de Navier, puede deducirse mediante una teoría molecular, no se ha dicho la última palabra. (Véase, por ejemplo, Mohr: Ueber den Navier-Stokeschen Spannungsanstz für zähe Flüssigkeitsströmungen. *Luftfahrtförschung,* págs. 327 a 330, 1941.

Llevadas estas fuerzas a la fórmula de Euler en Hidrodinámica, resultan las fórmulas de Navier, llamadas a veces de Navier Stokes. Para flúidos incompresibles, la primera es

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + X + \frac{\mu}{\rho}\Delta u.$$

A la terna de ecuaciones anteriores cabe añadir la ecuación de continuidad y la de estado. De las ecuaciones anteriores se deduce para la circulación Γ en un circuito cerrado, con potencial de fuerzas exteriores Π,

$$\frac{d}{dt}\Gamma = -\int \frac{d}{ds}\left(\frac{p}{\rho} + \Pi - \frac{1}{2}V^2\right) ds - \frac{\mu}{\rho}\Gamma'$$

siendo Γ' la circulación del remolino cuyas componentes son las del remolino de la velocidad.

Estas ecuaciones han sido el punto de partida para la resolución de múltiples problemas de flúidos viscosos a cuyo desarrollo han contribuído matemáticos como Poisson, S. Venant, Duhem, Boussinesq, y más modernamente Lamb, Oseen, Hamel, Rosenblatt (1), etc.

En estas ecuaciones μ es la llamada constante molecular, para el agua a 0°, 0,018, y para el aire a la misma temperatura, 0,00017 gs. cm^{-1} seg^{-1}. Para flúidos incompresibles y movimiento en una sola dirección o en un plano se han extendido las fórmulas anteriores, que suponen μ constante a valores supuestos varia-

---

(1) Hamel: Spiralförmige Bewegungen zäher Flüssigkeiten. *Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung*, tomo 25, págs. 34-60, 1917.—Potential Strömungen zäher Flüssigkeiten. *Zeitschrift für angewandte Mathemathik und Mechanik*, págs. 124-140, 1941.

Rosenblatt: *Sur certains mouvements des liquides visqueux incompresibles.* París, 1933.—*Solutions exactes des équations du mouvement des liquides visqueux.* París, 1935.

bles a que se hace referencia al comienzo de este capítulo. El valor de μ pasa a ser el llamado coeficiente de transporte, cuyo valor medio es miles de veces mayor que la constante molecular y varía, como ya se ha dicho, entre muy apartados límites en las aplicaciones a la Meteorología y a la Aerodinámica cuando el régimen pasa a turbulento.

Problema típico en el estudio de la viscosidad es el problema de la caída de la esfera pesada sólida en el seno de un líquido viscoso. Otro problema típico es el de la caída de una gota. Problemas más modernos son el del difusor (1) y el de la capa límite laminar que interviene en la resistencia de perfil de la Navegación aérea o marina y de la Balística.

Para la completa resolución de estos problemas y otros análogos hace falta introducir condiciones en los límites. En ausencia de fuerzas capilares, las condiciones pueden ser las siguientes:

a) *Superficie de separación de flúido y sólido.* — En el caso de moléculas muy grandes, que no puedan entrar en los poros de las partículas superficiales, puede admitirse un deslizamiento superficial. Este caso puede darse entre los lubricantes. Para los ríos de fondo pedregoso la estimación de la superficie hace también difícil, por su aspereza, la hipótesis de velocidad nula en "el fondo". En general, las velocidades relativas en un punto del sólido envolvente se estiman nulas.

b) *Superficie de separación de dos flúidos no miscibles.*— La presión normal y los esfuerzos tangenciales deben ser continuos al atravesarla. La velocidad tangencial puede ser discontinua, lo mismo que la densidad y la viscosidad. Las partículas situadas en la superficie de separación se mantienen en

---

(1) Sobre el problema del difusor dió el autor de este resumen un curso de conferencias en la Escuela de Ingenieros Industriales de Madrid, en 1927.

ella durante el movimiento laminar o la abandonan sin atravesarla en el movimiento con turbulencia.

c) *Superficie libre.*—Los tres componentes σ_{zz}, σ_{xy}, τ_{xy} son nulos, la partícula no abandona la superficie en el movimiento ondulatorio.

d) El estado de tensiones en el sólido continente o que se mueve a través del líquido o en la superficie de contacto y separación de dos estratos será, llamando α, β, γ los cosenos directores de la normal, para la componente sobre el eje x

$$T_x = -p\,\alpha + \mu\,\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \mu\,\gamma\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) +$$
$$+ \mu\,\beta\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -p\,\alpha + \mu\frac{\partial u}{\partial n}$$

y otras dos análogas para las otras componentes. Estas fórmulas son la base del cálculo teórico de resistencias de perfil, llamadas así para distinguirlas de las inducidas (que no dependen de μ) y en el supuesto de μ constante.

El estudio de la gota de un líquido cayendo en el seno de otro, abordado por Boussinesq en los comienzos de este siglo (1), obliga a tener en cuenta la tensión capilar. Esta acción interviene también en los movimientos en ondas de superficies libres, especialmente en las capas estratificadas al verter, v. gr. aceite en el agua. La tensión capilar es superficial y en el movimiento no es isotropa. En una u otra forma, junto a la superficie de separación, dos medios difieren en propiedades distintas de las másicas; no puede admitirse en las capas adyacentes a la superficie de separación la isotropia de un flúido alrededor de un punto ni aun en el caso de flúidos isotropos.

La influencia de la capilaridad, en algunos casos, no puede

(1) Boussinesq: *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1913. *Annales de Chimie et de Physique*. Idem.

considerarse nula, y para flúidos en movimiento debe de formar un tensor plano en la superficie de separación con dos direcciones principales en cada punto T_1, T_2.

2

Ecuaciones diferenciales de la capa límite para el caso de placa plana, cilindro y superficie de revolución. Expresiones integrales de Karman. Grueso de pérdida de momento y grueso de desplazamiento.

Las ecuaciones de Navier, como las de la elasticidad lineal, como las del campo electromagnético de Maxwell, gozan entre los estudiosos de gran predicamento: se consideran poco menos que un hallazgo, definitivamente establecidas y válidas, por lo menos, para el movimiento en que el número de Reynolds característico es relativamente bajo al comparar entre sí diversos movimientos de un flúido definido por una viscosidad cinemática $\nu = \mu/\rho$ dada.

En contraposición al régimen laminar está el turbulento, en que ciertas masas a modo de bloques de flúido se mueven arremolinadas formando unidades convectivas y esfumándose el carácter de trayectoria lisa característico de las partículas en el movimiento laminar.

Multitud de problemas particulares han sido resueltos con las fórmulas de Navier, unos con carácter exacto, otros con carácter aproximado. La forma no lineal de las ecuaciones dificulta su resolución. Cuando los términos no lineales son nulos (tubo o cañería, movimiento entre cilindros concéntricos en rotación, etc.) o cuando su importancia es muy pequeña (cilindros excéntricos de ejes paralelos en la lubricación), se facilita mucho la resolución del problema. En otros casos hay que acudir a formas aproximadas linearizadas, válidas sólo para valores pequeños del número de Reynolds.

En un mismo problema sujeto al análisis puede haber regiones con régimen laminar y otras con régimen turbulento.

En el problema del movimiento de un sólido a través de un flúido se observa alrededor del sólido un estrato en que la velocidad varía rápidamente, donde el movimiento junto a la superficie cambia de aspecto y relativamente al sólido hasta de dirección. A popa se forma la estela siempre turbulenta con remolinos y agua estanca que participa del movimiento del sólido formando remanso entre los remolinos de la estela, los cuales aparecen a menudo en series alternadas regulares.

En la parte anterior, por ser pequeño el grueso δ de la capa límite, el número de Reynolds formado con la velocidad de traslación U y δ:

$$\frac{U\delta}{\nu}$$

es también pequeño y, por lo tanto, el movimiento es laminar, de filetes paralelos. Al crecer δ, este movimiento pierde su estabilidad y se convierte en turbulento; no se sabe bien en qué condiciones. Si por absorción del flúido en inmediato contacto con el sólido se disminuye δ, puede retrasarse o impedirse el tránsito y aun puede convertirse nuevamente en laminar un estrato turbulento.

Interesa conocer en cada uno de estos casos cómo son las fuerzas que el flúido transmite al sólido, cómo reacciona el sólido que se mueve al través del flúido, pues tales fuerzas de reacción son, en sus resultantes, sustentación y resistencias, unas y otras varían según el régimen, según el tránsito y el modo y punto en que tiene lugar.

Decenios llevan físicos, matemáticos e ingenieros tratando de aclarar cuestiones tan apasionantes, por lo que cualquier nuevo progreso es recibido ávidamente y metódicamente analizado.

Esta tercera parte analiza planteo y resultados de la teoría de la capa límite laminar introducida por Prandtl en 1904, dividiendo la exposición como sigue:

1.° Planteo del problema.
2.° Métodos de resolución.
3.° Estabilidad.
4.° Estratos límites con absorción.
5.° Breve exposición del problema del lubricante.

El planteo del problema en el caso de dos dimensiones convienen todos en que para el régimen variable es el que formulan las dos ecuaciones que se escriben a continuación.

A) Placa o pared plana indefinida según el eje y. Eje x en el plano, eje z normal, $\nu = \mu/\rho$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

$u = w = 0$ para $y = 0$, $u = U$ a una cierta distancia δ (desconocida) de la placa. δ es el espesor, variable con x, de la capa límite, U es la velocidad de traslación de la corriente en ausencia de la placa para la misma x. En el caso de placa plana, U es independiente de x y de z. Si el régimen es estacionario, los términos en t desaparecen.

B) Pared curva: Definido un sistema de coordenadas curvilíneas por la curva del perfil y sus paralelas, así como por sus trayectorias ortogonales, llamando q a la velocidad "paralela" y w a la "normal", siendo s el arco en la coordenada paralela,

n en la normal, K (s) la curvatura del perfil (inversa del radio de curvatura) y con las notaciones siguientes:

$$V^2 = q^2 + w^2, \quad W = \frac{\dfrac{\partial w}{\partial s} + K(s)\, q}{1 - n\, K(s)} - \frac{\partial q}{\partial n}.$$

$$R = \frac{1 \cdot U}{\nu}, \quad \text{U, velocidad de traslación; 1, longitud unidad,}$$

las ecuaciones del movimiento son:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\dfrac{\partial}{\partial s}\left(\dfrac{V^2}{2} + p\right)}{1 - n\, K(s)} - w\, W = -\frac{1}{R}\,\frac{\partial W}{\partial n}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{V^2}{2} + p\right) + q\, W = \frac{1}{R}\,\frac{\dfrac{\partial W}{\partial s}}{1 - n\, K(s)}$$

$$\frac{\partial q}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial n}\Big[w\,(1 - n\, K(s))\Big] = 0.$$

Las condiciones en los límites son como antes, si bien U varía con s según las leyes del movimiento para $\mu = 0$ (1).

C) Para superficies de revolución en que h es la distancia del punto s, n el eje de giro, dada la meridiana por una curva, como en el caso anterior,

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\dfrac{\partial}{\partial s}\left(\dfrac{V^2}{2} + p\right)}{1 - n \cdot K(s)} - w\, W = -\frac{1}{R}\left(\frac{\partial W}{\partial n} + \frac{W}{h}\,\frac{\partial h}{\partial n}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{V^2}{2} + p\right) + V\, W = \frac{\dfrac{\partial W}{\partial s} + \dfrac{W}{h} \cdot \dfrac{\partial h}{\partial s}}{R\,(1 - n \cdot K(s))}.$$

(1) Fórmulas más generales referidas a coordenadas curvilíneas ortogonales en el espacio se hallan, como las anteriores, en la primera parte de la memoria de Harry Schmidt y Kurt Schröder: *Laminare Grenzschichten: Luftahrtforschung*, págs. 65-97, 1942.

La de continuidad es

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(h \cdot q\right) + \frac{\partial}{\partial n}\left(h\,(1 - n \cdot \mathrm{K}\,(s))\,w\right) = 0.$$

Cualesquiera de estos sistemas de fórmulas especializadas según las generales de Navier sólo convienen al caso de régimen estrictamente laminar. La circunstancia de que este régimen sea excepcional (por la turbulencia del propio flúido antes de chocar con el cuerpo rígido) y se manifieste en espesores pequeños junto a la pared o en el encabezamiento de la capa límite donde el grueso de ésta es pequeño, no es óbice para que su interés sea muy grande, pues es la capa que transmite el rozamiento de perfil, hasta que se desprende por haberse constituído un flujo contrario, debido al gradiente opuesto de presión que engendra la propia distribución de velocidades en la inmediación del contacto. Este flujo contrario y el desprendimiento es lo que puede modificarse con la succión, cuya teoría se expone más adelante; la modificación entraña un más elevado rozamiento de perfil, que puede ir acompañado de ciertas ventajas en el vuelo.

Aunque se consiga llegar al planteo de las fórmulas de Navier de manera adecuada al estudio de cada caso concreto, las fórmulas diferenciales son muy complicadas y las condiciones en los límites también. De ahí que para llegar a plantear el problema en condiciones de poder dar de él una solución concreta, aunque sea aproximada, es preciso simplificarlo. Esta simplificación, introducida al comenzar el siglo por Prandtl, ha desatado pluralidad de críticas sin grandes resultados positivos, se ha llegado a negar la existencia de la capa límite, a afirmar que nuestros conocimientos de análisis no permiten conocer su existencia; se han mudado y transformado razonamientos y deducciones, pero poco se ha adelantado sobre la manera sencilla e intuitiva de Prandtl, debido a la dificultad que en la Matemática acompaña siempre a las ecuaciones no lineales, máxime cuando las condiciones en los límites son de índole especial.

Para formar las ecuaciones simplificadas, por ejemplo, en el caso de la placa, se supone δ reducido, w muy pequeño y su variación con x mucho menor, así como la segunda variación con z. De tales condiciones y de la segunda ecuación se deduce que p es función sólo de x. Si se introduce la nueva hipótesis de ser p constante, quedan

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

como ecuaciones simplificadas para la placa plana. Las condiciones en los límites son las mismas.

Para una superficie cilíndrica de generatrices perpendiculares a U las ecuaciones simplificadas son las siguientes:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + q\frac{\partial q}{\partial s} + w\frac{\partial q}{\partial n} = -\frac{\partial p}{\partial s} + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 q}{\partial n^2},$$

$$\frac{\partial q}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial n} = 0.$$

$\frac{\partial p}{\partial s}$ es el valor correspondiente en el movimiento sin viscosidad $\mu \to 0$; es una función dada de s.

Si se trata de una superficie de revolución cuya simetría sea axil y la curva meridiana es la que corresponde al caso anterior, las ecuaciones simplificadas son las siguientes:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + q\frac{\partial q}{\partial s} + w\frac{\partial q}{\partial n} = -\frac{\partial p}{\partial s} + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 q}{\partial n^2},$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} \backsim 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial s}(h\,q) + \frac{\partial}{\partial n}(h\,w) = 0$$

h es la distancia del punto *s*, *n* al eje de rotación.

Antes de indicar a grandes rasgos los métodos de resolución aproximada empleados por algunos investigadores, refiriendo al lector a la bibliografía para un estudio más detenido, se escribe el teorema llamado del impulso para el caso de la simetría cilíndrica y para el caso de revolución o simetría axil. Se llama a veces teorema de Karman y es de mucha utilidad en apreciaciones y aproximaciones. Es integral de las ecuaciones del movimiento, que puede deducirse por vía intuitiva (1).

El caso de simetría cilíndrica (placa plana, pared curva, ala indefinida) se puede plantear así. Sea un elemento prismático de flúido comprendido entre la placa plana, dos planos distantes $d\,x$ y el borde $z = \delta$ de la capa límite. La fuerza es la derivada con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento, o lo que altera la cantidad de movimiento en la unidad de tiempo. La cantidad de movimiento que se considera en lo interior del citado prisma (que puede considerarse de altura igual a la unidad) altera por el flúido que entra en la unidad de tiempo, por el que sale y por la variación que sufre en lo interior al mudar la velocidad si ρ es constante. Considérese sólo el impulso en dirección de la placa o de U. Esta es la velocidad exterior a δ, exterior, por lo tanto, al prisma.

(1) Goldstein: *Developments in fluid dynamics.* Oxford, 1938.

El flúido que sale por unidad de tiempo a través del plano de salida es $\int_0^\delta u\,dz$. La diferencia entre el que sale y el que entra por el plano paralelo es $\frac{d}{dx}\int_0^\delta u\,dz \cdot dx$, y este flúido, como no puede penetrar por la pared impermeable, entra por el contorno δ, donde la velocidad horizontal es constante en todo el tiempo y vale U. Luego la fuerza que esto representa es

$$U \cdot dx \frac{d}{dx}\int_0^\delta u\,dz.$$

Del mismo modo, la cantidad de movimiento por unidad de tiempo que atraviesa cualquier plano es $\int_0^\delta \rho u \cdot u \, dz$. Luego la diferencia entre las respectivas cantidades en dos planos a distancia dx es

$$\frac{d}{dx} M \cdot dx,$$

llamando M la integral última. Agregando la variación interna, e igualando a la fuerza resultante del gradiente de presión y del rozamiento, resulta la expresión integral deducida por Karman en 1921 (1):

$$\int_0^\delta \rho \frac{\partial u}{\partial t} dz + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho u^2 dz - U \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho u\,dz =$$
$$= -\delta \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0}.$$

En régimen estacionario, y p independiente de x, el valor del

(1) Kármán: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, pág. 235, 1921.

esfuerzo cortante o rozamiento es

$$\tau_0 = \frac{d}{d\,x} \int_0^{\delta} \rho\,(U - u)\,u\,d\,z.$$

En régimen cualquiera se introduce una longitud δ_1, definida por $\tau_0 = U^2 . \delta_1\,\rho$, y otra δ_2, definida por

$$U\,\delta_2 = \int_0^{\delta} (U_1 - u)\,d\,z,$$

a las cuales se designa con los nombres de grueso de pérdida de momento y grueso de desplazamiento, respectivamente.

Para el caso de contornos cualesquiera, pero conservando la simetría cilíndrica, la expresión integral de Karman, es

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial q}{\partial t} d\,n + \frac{\partial}{\partial s} \int_0^{\delta} q^2\,d\,n - U_{n=\delta} \frac{\partial}{\partial s} \int_0^{\delta} q\,d\,n =$$

$$= - \delta \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial q}{\partial n}\right)_{n \to 0} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial q}{\partial n}\right)_{n \to \delta}.$$

Una y otra se deducen por una primera integración de las ecuaciones simplificadas de Prandtl. En la integración se introducen las dos longitudes δ_2 y δ_1, que intervienen en la expresión de los resultados.

Para el caso de simetría axil se puede deducir una integral análoga:

$$\int_0^{\delta} h \frac{\partial q}{\partial t} d\,n + \frac{\partial}{\partial s} \int_0^{\delta} h\,q^2\,d\,n - U_{n=\delta} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \int_0^{\delta} h\,q\,d\,n =$$

$$= - \frac{\partial p}{\partial s} \int_0^{\delta} h\,d\,n - \frac{1}{R} \left(h \frac{\partial q}{\partial n}\right)_{n \to \delta}.$$

Expuesto lo que precede, se indican brevemente algunos métodos "clásicos" de resolución, refiriendo al lector, para más desarrollo, al tratado de Goldstein, ya citado, y a los trabajos, por publicar aún, de Schmidt y Schröder en números sucesivos del *Luftfahrtforschung*.

3

Solución de Blasius para la placa plana indefinida y régimen estacionario. Caso del cilindro indefinido. Punto de desprendimiento.

Caso de placa plana, régimen estacionario:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

La segunda de las ecuaciones fundamentales, introduciendo la función de corriente ψ, se halla idénticamente satisfecha, y la primera es una ecuación diferencial en ψ y derivadas parciales.

Si se cambia de función ψ y variables independientes x z, introduciendo la nueva función f y la nueva variable η (1):

$$f = \frac{\psi}{\sqrt{\nu U x}}, \qquad \eta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{U}{\nu x}}\, z,$$

resulta

$$u = \frac{1}{2} U f', \qquad w = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{U\nu}{x}}\,(\eta f' - f), \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{U}{u}\sqrt{\frac{U}{\nu x}}\, f''$$

y la ecuación diferencial ordinaria entre f y η en que los acentos son derivadas respecto a η, se escribe:

$$f''' + f f'' = 0,$$

(1) H. Blasius: Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, tomo LVI, págs. 1-37, 1908.

con las condiciones $f = f' = 0$ para $\eta = 0$, $f' = 2$ para $y = \delta$. Esta última se sustituye por $f' = 2$ para $\eta = \infty$, toda vez que δ es desconocido, y como condición aproximada.

La ecuación se puede integrar por series (1) o numéricamente. De ella se saca $\left(\mu \frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0}$ como función de x e integrada ésta

---

(1)

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{C_n \alpha^{n+1}}{(3n+2)!} \eta^{3n+2}$$

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{3n-i}{3i}\right) C_i C_{n-1-i}$$

determinando $\alpha = f''(0)$ por la condición en lo infinito: $f' = 2$ para $\eta = \infty$.

La solución $f(\eta)$ puede escribirse:

$$f = \alpha^{1/3} F(\alpha^{1/3} \eta),$$

siendo

$$F(\xi) = \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{Cn}{(3n+2)!} \xi^{3n+2},$$

de donde

$$\lim_{\eta \to \infty} f' = \alpha^{2/3} \lim_{\eta \to \infty} F'(\alpha \eta) = \alpha^{2/3} \lim_{\xi \to \infty} F'(\xi)$$

$$\alpha = \left\{ \frac{2}{\lim_{\xi \to \infty} F'(\xi)} \right\}^{3/2}$$

La evaluación de $F'(\xi)$ conduce al valor de α que interviene en la fórmula de la resistencia.

Otros métodos de integración aproximada:

Pohlhausen: Zur näherungsweise Integration der Differentialgleichung der laminare Grenzschicht. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 1921.

Bairstow: *Journal of the Royal Aeronautical Society*, págs. 563-565, 1925 y 1926.— *Applied Aerodynamics*, págs. 509-511. Londres, 1939.

Véase también la bibliografía general (tratados) que se indica a continuación al tratar de perfiles curvos.

a todo lo largo l de la placa, conduce a la resistencia por unidad de ancho:

$$\text{Resistencia de perfil} = 1.328 \frac{1}{\sqrt{R}} \rho U^2 l, \qquad R = \frac{U l}{\nu}.$$

El llamado coeficiente de resistencia es por cada cara,

$$C_D = \frac{1.328}{\sqrt{R}}.$$

Prácticamente, para placas lisas la fórmula es válida para $R < 3{,}10^5$, más allá del cual el régimen es turbulento, sin que haya sido posible hasta ahora explicar el por qué del cambio de régimen que lleva consigo un valor muy distinto de C_D, tal como

$$0{,}072 \cdot R^{-1/5}.$$

La evaluación de $\frac{\partial p}{\partial x}$ en el caso de perfiles curvos exige casi siempre una hipótesis suplementaria, o una ley empírica cuyos elementos (coeficientes o exponentes) se determinan luego por ajuste con la experiencia. Con las fórmulas correspondientes a perfiles curvos se han planteado los problemas para el cilindro y perfiles alares. El valor de p se puede referir al de U mediante el teorema de Bernoulli:

$$\frac{\partial p}{\partial s} = U \frac{\partial U}{\partial s}.$$

La ecuación hidrodinámica con la sustitución anterior será:

$$q \frac{\partial q}{\partial s} + w \frac{\partial q}{\partial n} = U \frac{\partial U}{\partial s} + \nu \frac{\partial^2 q}{\partial n^2},$$

a la que hay que añadir la de continuidad, satisfecha con

$$q = -\frac{\partial \phi}{\partial n}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial s}.$$

La ecuación en ψ se integra a tramos, dando a la solución la forma $\psi = F_1 \; s + F_2 \, s^3$, etc., y determinando las F como funciones de s por la ecuación diferencial. Vienen así definidas estas funciones por ecuaciones diferenciales en cuya integración hay que hacer intervenir las condiciones en los límites.

El punto de desprendimiento de la capa laminar ocurre al ser $\frac{\partial q}{\partial n} = 0$.

En el cilindro $U = 2\, U_0$ sen $\varphi = 2\, U_0$ sen $\frac{s}{r}$; aproximadamente en las cercanías del punto de remanso a proa,

$$U \backsim 2\, U_0 \frac{s}{r} - \frac{1}{3} U_0 \frac{s^3}{r^3},$$

de donde F_1 satisface a la ecuación diferencial

$$F_1'^2 - F_1 F_1'' = \left(2 \frac{U_0}{r}\right)^2 + \nu F_1'''$$

y F_2 a

$$4\, F_1' F_2' - F_1 F_2'' - 3\, F_2 F_1'' = \frac{8}{3} \frac{U_0^2}{r^4} + \nu F_1'''.$$

Las condiciones para el punto de remanso a proa son $q = w = 0$, o sea para $s = n = 0$, $F = F_1 = F' = F'_1 = 0$; y para $n = \infty$, $q = U_0$, $F'_1 = F'_2 = 2$.

El ángulo del punto de desprendimiento en que $\frac{\partial q}{\partial n} = 0$ corresponde a $\varphi = 93°$.

Con estas soluciones aproximadas pueden trazarse las líneas de corriente, calcularse las resistencias, etc. El desarrollo matemático y experimental de la teoría de la capa límite con arreglo a lo que se acaba de exponer es muy extenso y tiene amplia bibliografía (1).

La capa límite introducida por Prandtl para el cálculo de la resistencia de perfil supone números de Reynolds relativamente grandes, por ser grande la velocidad, las dimensiones, y pequeña la viscosidad. Son números del orden 10^4 a 10^6. Para valores intermedios y mayores el régimen es turbulento, como ya se ha dicho.

El estudio de la capa límite estacionaria no se ha limitado al caso estacionario. El modo de alcanzar el estado estacionario, es decir, de cómo se forma la capa límite partiendo de condiciones iniciales determinadas, ha sido objeto de análisis, iniciado por Blasius en su memoria fundamental de 1908. El mismo matemático hizo el cálculo de la resistencia en régimen uniformemente acelerado. Blasius estudió principalmente el cilindro, otros

---

(1) Blasius, lugar ya mencionado del *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik.*

Véanse además:

Hiemenz: *Dinglers Polytechnisches Journal,* págs. 321-324, 1911.

Howard: *Aeronautical Reports and Memoranda,* núm. 1.632, 1935.

Falkner y Skan: *Aeronautical Reports and Memoranda,* núm. 1.314, 1930.

Hartree: *Proceedings of the Cambridge Phylosophical Society,* págs. 223-239, 1937.

Homan: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik,* págs. 143-164, 1936.

Tomotika: Laminar boundary layer on the surface of a sphere in a uniform stream. *Aeronautical Reports Committee,* 1.678, 1936.

J. Pretsch: Zur Theoretischen Berechnung des Profilwiderstandes. *Anuario del Luftfahrtforschung,* pág. 60, 1938. — Die Laminare Reibungschicht an elliptischen Zilindern und Rotationsellipsoiden bei symmetrischer Umströmung. *Luftfahrtforschung,* págs. 397-402, 1941.

Bibliografía menos especializada es la de textos y tratados, por ejemplo:

Tollmien: Grenzschichtheorie, págs. 241-281 del *Tratado de Física experimental* de Wien y Harms, tomo IV, 1.ª parte. Leipzig, 1931.

Müller: *Einführung in die Theorie der zähen Flüssigkeiten.* Leipzig, 1932.

El capítulo V del *Report of the Committee on Hydrodynamics,* escrito por Bateman. Washington, 1932.

Prandtl: The Mechanics of viscons fluids, págs. 80-112 del tomo III de la *Aerodynamic Theory,* editada por Durand. Berlín, 1935.

El capítulo IV del primer tomo de la obra *Modern Development in Fluid Dynamics,* editada por Goldstein. Oxford, 1938.

han estudiado la esfera (Boltze, 1908, Gotinga), y otros, perfiles de revolución (v. Goldstein y Rosenhead en los *Proceedings of the Cambridge Phylosophical Society*, págs. 392-401, 1936).

El caso de flúido en contacto con pared oscilante tiene interés en acústica y fué estudiado por Stokes y Lord Ragleigh. Para trabajos más modernos, véase Sexl: *Zeitschrift fûr Physik*, págs. 349-362, 1930.

4

Absorción en la capa límite. Cálculo del coeficiente de resistencia.

Para el estudio de la capa límite con absorción se pueden emplear ecuaciones más simplificadas, ya que se introduce la nueva circunstancia de que a lo largo de la superficie de separación se aspira el flúido. Una primera hipótesis para dar pie al análisis será que la velocidad absorbida por unidad de longitud en el caso de la placa plana es constante e igual a w_0.

El problema puede plantearse así: Hallar u y w que satisfagan las dos ecuaciones diferenciales para el movimiento estacionario:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Para $y = 0 : u = 0,\ w = w_0$, para $y = \infty,\ u = U,\ w = 0$. Se pide el cálculo de $\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z = 0}$ y la distribución de u según z para cualquier valor de x. Este problema ha sido resuelto por

Schlichting (1) siguiendo en líneas generales el método aproximado de Pohlhausen para cuando no hay absorción. Consiste en escribir

$$\frac{u}{U} = F_1(\eta) + K F_2(\eta), \quad \eta = \frac{z}{\delta}$$ (δ grueso de la capa límite, función de x desconocida.)

Exigir de F_1 y F_2 que satisfagan las siguientes condiciones que derivan de las impuestas a la capa límite:

$$z = 0 : u = 0, \quad w_0 \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_0 ;$$

$$y = \infty : u = U, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

lo cual se logra con $F_1 = 1 - e^{-\eta}$, $F_2 = \eta\, e^{-\eta}$, determinando K por la condición en el límite

$$w_0 \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_0 ,$$

a saber:

$$w_0 \frac{U_0}{\delta}(1 + K) = \nu \frac{U_0}{\delta^2}(-1 - 2K),$$

lo que puede expresarse con la notación

$$\lambda(x) = \frac{-w_0 \delta}{\nu},$$

por

$$K = \frac{\lambda - 1}{2 - \lambda}$$

(1) Schlichting: Die Grenzschicht mit Absaugung und Ausblasen. *Luftfahrtforschung*, págs. 179-181 y 293-301, 1942.

Para determinar λ y, por lo tanto, δ el grueso de la capa límite en función de x se puede acudir a la ecuación integral de Karman, resultado de integrar entre 0 y δ (teniendo en cuenta las condiciones límites) la primera ecuación de la capa límite. El valor de

$$\delta_1 = \frac{1}{U^2} \int_0^\infty u\,(U - u)\,d\,z$$

es igual a

$$\frac{\delta}{2}\left(1 - K - \frac{K^2}{2}\right),$$

es decir, una función de δ, y como, por otra parte, δ_1 satisface a la ecuación de Karman

$$U^2 \frac{d\,\delta_1}{d\,x} - U\,v_0 = \nu \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z\,=\,0},$$

cuyo segundo miembro es $\frac{1 + K}{\delta}\,\frac{U}{\nu}$, resulta una ecuación diferencial que da δ en función de x, con lo cual se puede calcular τ desde $x = 0$ hasta cualquier valor, lo mismo que la distribución u en función de z para cualquier valor de x.

El grueso $\delta_2 = \frac{1}{U}\int_0^\infty (U - u)\,d\,z$, llamado grueso de desplazamiento, tiende a un valor asintótico constante igual a $\frac{\nu}{-v_0}$, y el grueso δ_1 de impulso al valor constante mitad del anterior. La distribución asintótica de u es, siendo la δ_2 que figura en ella el valor asintótico,

$$u = U\,(1 - e^{-z/\delta_2}).$$

El valor asintótico del coeficiente de resistencia de perfil definido por

$$C_D = \frac{\text{Resistencia}}{{}^1/_2\, \rho\, U^2 x \cdot 1}$$

que para el régimen laminar viene dado por

$$C_D = 1.328 \frac{1}{\sqrt{R}}$$

tiene actualmente como valor

$$\frac{-w_0}{U}.$$

El coeficiente de resistencia es mayor que sin absorción. En la referida memoria de Schichting se trata también el caso de la placa soplante, es decir, con inyección de aire en vez de absorción. Experimentos sobre absorción y tránsito al régimen laminar de un régimen turbulento fueron realizados por Ackeret en Zurich (1).

5

De las teorías isotérmicas de la lubricación.

En las aplicaciones a la aerodinámica de perfiles alares o perfiles de casco, el número de Reynolds es bastante alto por la velocidad de traslación y por el escaso valor del coeficiente ν de viscosidad cinemática, de modo que el régimen laminar sólo pue-

---

(1) Ackeret: Verhinderung des Turbulenzwerdens einer Reibungschicht durch Absaugung. *Naturwissenschaften*, pág. 622, 1941.

de mantenerse por limitar R el grueso mismo δ de la capa límite, o de más inmediata influencia de la pared. Hay otra categoría de fenómenos de gran interés en la Técnica, en los que el número R de Reynolds se mantiene bajo por ser pequeña la velocidad, la cuantía del grueso de la capa flúida y elevada la viscosidad, tales son los fenómenos de lubricación.

Distínguense dos tipos clásicos: el cojinete y el patín. En ambos el lubricante se mueve entre dos superficies próximas, planas, cilíndricas, curvas, las cuales, a su vez, se hallan en movimiento relativo. El problema mecánico exige determinar en función de las cargas los momentos para dimensiones dadas y en averiguar las dimensiones más apropiadas.

El movimiento del lubricante es, en general, un movimiento en tres dimensiones, aun en el caso del muñón y cojinete, y las partículas describen trayectorias alabeadas. Con el movimiento altera la temperatura y la viscosidad del lubricante, de modo que el problema es de gran complicación, por intervenir fenómenos de conducción y convección del calor. Por tales razones, a pesar de los innegables progresos alcanzados, de los que se dan algunas indicaciones, no es posible augurar a la teoría que no lleva cuenta de la distribución y régimen de temperatura, una confirmación brillante por los resultados de la experimentación, y la Técnica seguirá necesitando de coeficientes empíricos.

El caso de dos dimensiones para muñón y cojinete indefinidos puede tratarse así: De las ecuaciones linearizadas de la capa límite

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = 0,$$

se obtiene por doble integración respecto a z, observando que en un punto cualquiera entre las dos superficies cilíndricas en presencia $u = 0$ para $z = h$ (distancia normal variable), $u = U$ para $y = 0$,

$$2\,\mu\,h\,u = h\,z\,(z - h)\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\,U\,(h - z),$$

y otra integración

$$12\,\mu\,h\int_0^h u\,d\,z = 6\,\mu\,h^2\,U - h^4\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Pero por la ecuación de continuidad

$$\frac{d}{d\,x}\int_0^h u\,d\,z = -\int_0^h \frac{dw}{d\,z}\,d\,z = 0,$$

por ser $w = 0$ en ambos límites, luego $\int_0^h u\,d\,z$ es constante, que se igualará a $\frac{h_1}{2}U$, con lo cual

$$h^3\frac{\partial p}{\partial x} = 6\,\mu\,U\,(h - h_1).$$

Esta ecuación, escribiendo en vez de h su ley de variación con x, da p por integración. Por lo tanto, la resultante de las presiones que sufre el muñón. Conocida la ley de variación de p con x, se tiene la de u y, por lo tanto, $\tau = \mu\left(\frac{d\,u}{d\,z}\right)_{z\,=\,0,}$ y con p y τ las fuerzas exteriores y sus momentos en función de las dimensiones, de μ y de U. El llamado coeficiente de rozamiento es el cociente entre el momento de las fuerzas de rozamiento y el producto del radio por la presión total, que suele ser un dato del problema, como el momento. De este modo, a cada valor del coeficiente de rozamiento corresponden dimensiones apropiadas, que hay que completar con datos de construcción y reglas empíricas.

La introducción de una función de corriente ψ en los problemas de dos dimensiones y movimiento lento o número de Reynolds relativamente bajo, reduce el problema linearizado a determinar una función biarmónica Ψ, es decir, tal que

$$\Delta \Delta \Psi = 0,$$

con las condiciones en los límites que corresponden a cada caso.

El problema tiene analogías con otros problemas de elasticidad, electricidad, etc., que conducen a biarmónicas sobre las cuales se conocen varios teoremas generales. La adopción de tres integrales particulares en r^2, log r, y $r^2 \log r$ permite la resolución del problema anterior del muñón y cojinete (1).

El problema de Sommerfeld, como se le designa algunas veces, ha sido extendido al caso del espacio por Michell. Una nueva solución mediante funciones que satisfagan al operador L L = 0, en que

$$L = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + a^2 \right)$$

ha sido expuesta por Reissner (2).

---

(1) La ecuación general en Ψ en el problema de dos dimensiones se obtiene eliminando p de las dos dimensiones de Navier por derivación cruzada, y sustituyendo en las velocidades sus expresiones $u = \frac{d\Psi}{dz}$, $w = -\frac{d\Psi}{dx}$. Resulta así la ecuación general siguiente en ausencia de fuerzas másicas

$$\nu \Delta \Delta \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t}$$

que en caso de movimiento estacionario y linearización conduce a $\Delta\Delta \psi = 0$.

(2) Sommerfeld: Zur Hydrodynamische Theorie der Schmiermittelreibung. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, págs. 97-155, 1904.

Michell: The Lubrication of plane surfaces. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, pág. 123, 1905.

Reissner: Räumliche Strömung zäher, inkompressibler, trägheitsfreier Flüssigkeiten, etc. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, págs. 275-286, 1936.

El problema del patín fué planteado y resuelto por Michell en la memoria ya mencionada para el caso de ser el largo mayor que el ancho y caras planas (lubricante en cuña) y generalizado luego por diversos ingenieros. El caso de una zapata de superficie curva patinando sobre un plano con lubricante entre ambos ha sido tratado recientemente por Muskat y Frössel (1).

Si el movimiento tiene lugar según el eje x, horizontal, z es la vertical e y se toma según el ancho, las ecuaciones diferenciales análogas a las del caso anterior son:

$$-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

para $z=0 : u=U$; para $y=h : u=0$, h es la altura (variable) del lubricante entre la superficie inferior de la zapata o patín y el suelo horizontal. Procediendo como antes, es decir, fijando una vertical por un valor definido de x, la nueva ecuación diferencial que da $p\ (x, z)$ es, suponiendo h variable sólo con x:

$$\frac{\partial^2 p}{d z^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{3}{h}\frac{d h}{d x}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{6\,\mu\,U}{h^3}\frac{d h}{d x}=0.$$

Para la cuña simple $h=(a-x)\,\theta$, siendo θ y a const. Para la zapata en parábola $h=h_0+\frac{x^2}{2\,r}$.

Multitud de tablas, calculadas adrede, facilitan la resolución práctica de los casos que ofrece la Técnica.

---

(1) Muskat, Morgan y Meres: The lubrication of plane sliders of finite Width. *Journal of Applied Physics*, págs. 208-219, 1940.

Frössel: Berechnung der Reibung und der Tragkraft eines endlich breiten Gleitschuhes auf ebener Gleitbahn. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, págs. 321-340, 1941.

6

De la estabilidad del régimen laminar y de su tránsito al régimen turbulento.

La resolución numérica de las ecuaciones, la simplificación del planteo, permiten abordar aproximadamente la discusión de soluciones de casos concretos del movimiento laminar calculándose los elementos estáticos, dinámicos y cinemáticos del mismo. Pero al confrontar los resultados experimentales con los deducidos por la teoría simplificada, difícilmente se obtiene el ajuste anhelado. Contribuye fundamentalmente a ello la inestabilidad del movimiento laminar y el tránsito a turbulento en forma análoga a como se realiza un cambio de estado físico o alotrópico. Lejos de seguir la corriente trayectorias lisas estacionarias, fórmanse balones turbulentos cuyas partículas siguen trayectorias entreveradas variables y el movimiento, al pasar diversas partículas por un punto fijo del espacio (donde está el instrumento de medida), por hacerlo a velocidades y direcciones diversas, adquiere carácter pulsatorio.

El tránsito del movimiento laminar al turbulento puede retrasarse o adelantarse como en los fenómenos de cambio de estado. Pero parece influir mucho en él el número de Reynolds en cada caso concreto, de modo que para valores pequeños el movimiento es laminar, y para valores grandes, turbulento. Esta noción puede en cierto modo ser extraña al examen del problema, como ocurre al examinar el efecto sobre un cuerpo de forma determinada de una corriente de aire previamente turbulento.

Dejando el estudio de pulsaciones para el capítulo siguiente, para terminar éste se insiste en la noción de estabilidad.

Este concepto, difícil tratándose del equilibrio, lo es mucho más al considerar el movimiento, en cuyo caso se carece propiamente de criterio.

Se puede ensayar un tipo de perturbación inicial. Si para este tipo (v. gr., oscilación de tipo lineal ondulatorio) las amplitudes aumentan indefinidamente con el tiempo, se dirá que hay inestabilidad para este tipo. Las oscilaciones pueden referirse a tales o cuales variables, en algunas no será intuitivo que su alteración, creciendo la amplitud con el tiempo, dé lugar a inestabilidad, v. gr., en ángulos. Una transformación de variables puede hacer aparecer perturbaciones como estables cuando no lo son en otras variables diferentes.

Si la perturbación no es lineal, es decir, si se parte de las ecuaciones de perturbación no linearizadas, la resolución del problema es casi imposible. No se dispone de criterio para determinar la estabilidad o inestabilidad de un modo absoluto. Aparte de ello, el movimiento estacionario se puede encajar en ecuaciones como las de Navier, pero el movimiento turbulento exige razonar sobre valores medios y no valores instantáneos.

Se comprende cómo la cuestión espera una respuesta satisfactoria desde hace mucho tiempo; es uno de los problemas fundamentales no resueltos ni definitivamente planteados en la Dinámica de los flúidos.

Con todo, y a pesar de las dificultades esbozadas en lo anterior, se ha intentado por parte de varios investigadores hallar siquiera una forma de perturbación de un movimiento estacionario para el caso, por ejemplo, de la placa plana, tal que el crecimiento indefinido de la amplitud se manifestara a partir de un cierto número de Reynolds para la placa. La perturbación ideada por Tollmien (1) arroja, en efecto, un número groseramente del orden del que da la realidad; pero es un tipo de perturba-

(1) Tollmien: Ueber die Entstehung der Turbulenz. *Vorträge auf dem Gebiete der Aerodynamik Aquisgran*, 1929.

Siendo λ la longitud de onda de la perturbación supuesta extendida de un modo ción por ondas de gran longitud, del que no se ve cómo puede engendrar turbulencia, ni cómo puede alcanzarse en un caso práctico concreto. El autor lo llama de turbulencia inicial por suponer que, iniciado tal movimiento por ondas, su permanencia lo convierte "automáticamente" en series de remolinos, iniciación a su vez de la turbulencia. Para engendrar la turbulencia sería necesaria una estratificación previa de capas a velocidades diversas, la inestabilidad de Helmholtz en las superficies onduladas límites y la formación de balones turbulentos por arrollamiento de tales superficies. Este arrollamiento se pone visualmente de manifiesto en muchos experimentos por humos o anilinas. El origen de toda inestabilidad sería así la ondulación de las capas límites y el subsiguiente juego de presiones y velocidades a lo largo.

Tollmien (1), de acuerdo con ideas anteriores de Prandtl y Tietjens, atribuye causa de inestabilidad a la existencia de inflexión en la curva de velocidades paralelas a la placa tomadas en diversos puntos de la normal a la misma. La forma de la curva en S influye efectivamente en la estabilidad; si se da esta forma muy acusada, puede ser suficiente un número de Reynolds relativamente bajo para provocar el paso al régimen turbulento. Perfiles en S de velocidad paralela se hallan antes de los puntos o líneas de desprendimiento de la capa adherente,

---

total a lo largo de una placa con perfil constante de velocidades, y con el valor δ del grueso del desplazamiento

$$\lambda = 17'1\,\delta$$

alcanza, mediante hipótesis, simplificaciones y razonamientos especiales, un número de Reynolds crítico

$$\frac{\delta U}{\nu} = 575.$$

(1) Tollmien: Ein allgemeines Kriteriam der Instabilität laminarer Geschwindigkeitsverteilurgen. *Göttinger Nachrichten*, pág. 79, 1935.

donde el juego de las presiones introduce un gradiente negativo que obliga al flúido a moverse en dirección contraria a la traslación.

La condición de ser $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ positiva en toda la capa límite se encuentra ya en estudios de Lord Reyleigh sobre estabilidad en el movimiento de flúidos no viscosos, pero el tránsito $\mu \to 0$ no puede, en general, aplicarse a cuestiones de estabilidad. Todo tipo estacionario de movimiento en líquido viscoso es estable a velocidades suficientemente pequeñas.

En ciertos métodos de cálculo se parte de las ecuaciones de perturbaciones lineales atribuídas a Reynolds-Orr. Dada U como función conocida de z (en el caso de dos dimensiones, correspondiente a problemas resueltos del movimiento de flúidos viscosos entre planos fijos o móviles, tubos, etc.), las ecuaciones de la perturbación u, w son las linearizadas siguientes:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Introduciendo la función de corriente Ψ y el torbellino ζ, y eliminando p, queda

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + U \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \nu \Delta \zeta, \qquad \zeta = \Delta \Psi.$$

Con esta ecuación se puede examinar el resultado de pequeñas oscilaciones. Es conveniente para que aparezca el número de Reynolds hacerla adimensional. Las perturbaciones examinadas son de la forma $\Psi = e^{i\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{2\pi x}{\lambda}\right)} f(z)$ satisfaciendo además las condiciones en los límites. La constante T, si fuera imaginaria pura y positiva, indicaría inestabilidad. Para casos concretos (1) $U = \beta z$, $U = \overline{U}\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)$, $U = az^2$, $U = az^3$, etc., multitud de investigadores ha estudiado las raíces de la ecuación trascendente que da T, las cuales son generalmente imaginarias puras y negativas para todo valor de la longitud de onda y del número de Reynolds. El análisis conduce a resultados con los que no es posible definir de un modo concluyente cómo nace el régimen turbulento en problemas de dos dimensiones y del tipo anterior.

Pueden hallarse soluciones en que la perturbación aumenta al principio, pero luego decrece indefinidamente, lo cual no corresponde al criterio clásico de la inestabilidad.

Los resultados de Tollmien para perfiles de curvatura bien definida no son admitidos con plena confianza por investigadores como Taylor. Se objeta al análisis de Tollmien sobre estabilidad para placa plana la hipótesis de ser U función sólo de z para toda x, de suponer un grueso uniforme δ en toda la longitud de la placa, cuando la fórmula de Blasius da variación de δ con x; se le objeta también que para los perfiles en S que supone y para los que deduce la existencia de inestabilidad para grandes valores de R, son necesarias fuerzas exteriores inexistentes para mantenerlos en toda su extensión uniforme y, finalmente, que las olas cuya longitud de onda calcula como perturbaciones de inestabilidad no han sido nunca observadas.

En vez del método de las oscilaciones lineales, Reynolds sugería criterios energéticos. Para el caso de flúido viscoso entre dos planos $y = \pm h$ el mínimo de la energía cinética perturbada se puede referir al mínimo de una integral análoga a la que

(1) Hopf: Verlauf kleiner Schwingungen auf einer Strömung reibender Flüssigkeit. *Annalen der Physik*, págs. 1-60, 1914.

aparece en el estudio de pandeo de placas planas rectangulares sujetas a esfuerzos longitudinales en $y = \pm h$. La fuerza de pandeo corresponde con el número de Reynolds (1).

Problemas de simetrías axiles, como el régimen de Poiseuille del movimiento a lo largo de tubos de diámetro constante, y de Couette, rotación entre cilindros, se tratan de modo análogo al problema plano introduciendo coordenadas cilíndricas. El primer caso ha sido analizado por Sexl (2) y el segundo por Taylor (3).

El caso de Poiseuille, para perturbaciones de simetría axil, es análogo al caso de los planos paralelos de Couette. Todas las oscilaciones son amortiguadas. Cuando R es pequeño, la perturbación alcanza a todo el flúido. A medida que crece se contrae y acaba por estratificarse, es decir, las vibraciones de perturbación se manifiestan en distintas capas. Si $\mu \rightarrow 0$, se concentran en un estrato muy tenue de remolino.

En el caso de Couette de cilindros en rotación descubrió Taylor que para un sistema de rotaciones representable por una curva $\omega_1 = f(\omega_2)$ hay un número de Reynolds crítico que marca el paso a otro régimen más estable, en el que aparecen remolinos alterando profundamente la forma del movimiento. Esta aparición de un movimiento nuevo, demostrada teórica y experimentalmente, guarda analogía con otros problemas de la Mecánica, v. gr., con el pandeo de estructuras lineales o superficiales y con las figuras de equilibrio de masas flúidas y sus formas de bifurcación.

El estudio de Taylor llamó mucho la atención en su tiempo.

---

(1) Southwell and Miss Chitty: Hydrodinamical Stability. *Reports and Memoranda del Aeronautical Reseerch Committee*, núm. 1.200, 1930.

(2) Sexl: Stabilitätsfrage der Poiseuilleschen Strömung. *Annalen der Physik*, tomo LXXXIII, pág. 835, y tomo LXXXIV, pág. 807, 1927.

(3) Taylor: Stability of a Viscous Liquid contained between two rotating Cylinders. *Proceedings del Congreso de Mecánica Aplicada de Delft*, 1924.

Se hicieron visibles los remolinos parciales, se observaron las vibraciones de perturbación entre dos cilindros concéntricos de radios r_1, r_2, animados de dos velocidades distintas w_1, w_2. La ecuación trascendente o secular que determina el tránsito del régimen laminar al de remolinos es de resolución complicada, pero se consigue expresar la frecuencia crítica $\frac{1}{T}$ en función de los números de Reynolds $\frac{r_1 w_1}{\nu}$, $\frac{r_2 w_2}{\nu}$ y de los cocientes $\frac{r_2}{r_1}$, $\frac{w_2}{w_1}$ en el supuesto de ser $r_2 - r_1$ pequeño en relación con $\frac{r_1 + r_2}{2}$. El tránsito se manifiesta por la aparición de remolinos anulares con circulación alternada que dividen el espacio entre los dos cilindros en una serie de compartimientos ocupados por tales remolinos. En un plano meridiano las trayectorias son cerradas y ovales. Si los dos cilindros giran en sentido contrario, los remolinos anulares se adhieren al cilindro interior y queda un cilindro de discontinuidad que separa la región de los remolinos de otra junto al cilindro exterior en que la circulación es muchísimo menor. El cálculo permite evaluar los números de Reynolds en que semejantes perturbaciones son posibles y la experimentación los confirma. El caso $\mu \rightarrow 0$ fué examinado por Lord Rayleigh, que encontró la condición $r_1 w_1^2 = r_2 w_2^2$. Los números de Taylor cuando $\mu \rightarrow 0$ tienden a obedecer a dicha ley.

A pesar del interés que los cálculos de Taylor despertaron, no resuelven el problema de cómo se forma la turbulencia, dan sólo confirmación de que para ciertos valores de R pueden desarrollarse movimientos arremolinados cuya energía es arrancada al movimiento principal, siendo la total menor de la que correspondería al movimiento principal sólo.

Volviendo al caso de la curva U (z) con inflexión y al análisis de Tollmien, sólo ha llegado a probar que para valores muy grandes de R y en la hipótesis de ser U función sólo de z hay ciertamente inestabilidad (es decir, posibilidad de movimiento perturbado no amortiguado). Estudios más modernos del problema plano se indican en la bibliografía (1), y aunque en ellos los resultados parecen más optimistas, en el examen completo del problema no puede procederse sólo por el método de perturbaciones "infinitesimales"; las de carácter finito (examen de términos de orden superior) tienen decisiva importancia influyendo también la turbulencia inicial del flúido y la aspereza del obstáculo.

Los métodos de análisis que pretenden calcular el número de Reynolds crítico que separa las oscilaciones de perturbación amortiguadas de las que no lo son necesitan del conocimiento muy exacto de la curva de velocidades paralelas en el problema plano exento de perturbación. Al tratar de estudiar un cuerpo de revolución (casco), se tropieza con el inconveniente de no conocerse los perfiles de velocidad con la debida exactitud.

Para la esfera, el material experimental es abundante, y acaso pudiera bastar para ciertas especulaciones. Las ecuaciones de perturbación se obtienen, para el caso de perturbaciones cuyo eje de simetría es la línea de traslación, sustituyendo en las generales de Navier, con simetría adecuada, $u = U + u_1$, $w = W + w_1$, siendo u y w las velocidades del movimiento perturbado, y simplificando en virtud de la supuesta pequeñez de u_1 y w_1. La función de corriente, que lo es de u y w, permite referir la resolución del problema a la de la ecuación única que resulta de eliminar p; el proceso es siempre el mismo. Las ecuaciones son más complicadas que para el plano, pero los razo-

---

(1) Tollmien: loc. cit., 1935.

Schlichting: Amplitudenverteilung und Energiebilanz der kleiner Störungen bei der Plattenströmung. *Gottinger Nachrichten*, pág. 47, 1935.

Görtler: Ueber Dreidimensionale Inestabilität laminaren Grenzschichten. *Gottinger Nachrichten*, pág. 1, 1940.

namientos de Tollmien pueden aplicarse al examen de las regiones de estabilidad e inestabilidad del punto de remanso (1). Dada en él una curva de velocidades, v. gr., por una parábola tangente a la ordenada en el origen, es posible determinar, a la manera de Tollmien para la placa plana, el llamado "contorno de indiferencia" que separa lo interior inestable de lo exterior estable en el plano cuyas coordenadas son: número de Reynolds y $\frac{2\pi}{\lambda}\,\delta_2$, siendo λ la longitud de onda y δ_2 el grueso de desplazamiento.

Resulta de tales cálculos un número de Reynolds crítico igual al tercio del que corresponde a una placa plana, definido el número de Reynolds por $\frac{U\,\delta_2}{\nu}$.

(1) Pretsch: Ueber die Stabilität der Laminarströmung um eine Kugel. *Luftfahrtforschung*, págs. 341-344, 1941.

CUARTA PARTE

DEL REGIMEN TURBULENTO

1

Generalidades. Fórmulas de Reynolds.

Cualquiera que sea la opinión que pueda tenerse acerca del tránsito del régimen laminar al turbulento, el laminar obedece a ciertas leyes precisas. ¿A qué leyes obedece el régimen turbulento, en el que es característica la formación de masas o balones de partículas arremolinadas irregularmente y en el que un instrumento sensible como el termómetro de hilo metálico acusa fuertes fluctuaciones? No cabe una definición precisa de lo que es la turbulencia establecida. Darla, equivaldría a conocer el fenómeno. Sólo será posible hacerlo cuando se conozcan mucho mejor sus pormenores y modos de manifestarse.

Porque pulsaciones hay, incluso donde se considera bien establecida la corriente laminar y este estado de pulsación aparece como relativamente lento respecto de la pulsación turbulenta; el modo de ser de la turbulencia varía según se la considere: junto a una pared fija o móvil, junto a una superficie libre o lejos de todo obstáculo; caracteres peculiares tiene la turbulencia atmosférica, y la turbulencia en un túnel aerodinámico es diversa de las anteriores. A medida que progresa el arte experimental, aumenta con él la diversidad de tipos. Lo que parece bastante bien establecido es que, fuera de ciertas nociones dimensionales, todo progreso va ligado al examen de las pulsaciones y a su correlación simultánea o diferida, es decir, parece evidente la necesidad de establecer, por lo menos por vía preliminar, una teoría estadística. Esta teoría tiene su modelo en las teorías cinéticas de los gases, en éstos es la molécula la que actúa como balón. Pero en el señalamiento de la velocidad se puede alcanzar más precisión por la naturaleza relativamente sencilla de la molécula.

Al par que la transmisión del movimiento y por consecuencia del esfuerzo de arrastre, el movimiento turbulento da lugar al transporte de calor, transporte convectivo, y la misma difusión y dispersión de partículas es un fenómeno que tiene lugar acompañado de turbulencias.

La teoría general de la turbulencia debiera comprender un modo de representar ciertos elementos esenciales, señalar su dependencia mutua y su variación con el tiempo y el espacio y obtener resultados comprobables.

La estadística se refiere, como elementos fundamentales de juicio, a los componentes u, v, w de la velocidad en cada punto como diferencias entre el valor medio tomado durante cierto intervalo y el valor instantáneo. Los valores medios se designarán por un guión, $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$. Así definido, falta precisar el tiempo durante el cual se promedia. Suponiendo que esta noción es susceptible de aclaraciones, pueden establecerse ecuaciones en los valores medios de $\bar{u}$, v, $\bar{w}$ los cuadrados y productos de las fluctuaciones $\bar{u} - u = u'$, $\bar{v} - v = v'$, $\bar{w} - w = w'$, en los cuales intervienen los coeficientes de dispersión y de correlación, fluctuación cuadrática media, etc.

Estas ecuaciones fueron deducidas ya por el propio Reynolds, a quien se debe mucho de lo que hoy se conoce sobre el particular.

Para establecer las ecuaciones de Reynolds se parte de las ecuaciones de Navier para flúidos incompresibles, la primera de las cuales

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w = \rho X + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}$$

se puede escribir

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \rho X + \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma_x - \rho u v \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau_{xy} - \rho u v \right) +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\tau_{xz} - \rho u w \right).$$

Introduciendo los valores compensados

$$\bar{u} = \frac{1}{2\tau} \int_{t-\tau}^{t+\tau} u \, dt,$$

con la notación

$$u' = u - \bar{u}, \quad v' = v - \bar{v}, \quad w' = w - \bar{w},$$

resulta

$$\rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \rho X + \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{\sigma}_x - \rho \bar{u} \bar{u} - \rho \overline{u' u'} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\tau}_{xy} - \rho \bar{u} \bar{v} - \rho \overline{u' v'} \right) +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{\tau}_{xz} - \rho \bar{u} \bar{w} - \rho \overline{u' w'} \right).$$

Las medias sobre los valores residuales definen las tensiones que añade la turbulencia. El intervalo τ ha de ser bastante grande para que $\int_{t-\tau}^{t+\tau} u' \, dt$ sea cero.

Las fórmulas han dado origen a copioso material de observación y cálculo de tales coeficientes mediante valores anemométricos, sea que se refieran a un punto y los coeficientes a las componentes simultáneas de la velocidad durante un intervalo, sea que se consideren puntos separados en la dirección del viento o normal a ella y valores instantáneos de una misma componente, o también valores no simultáneos, separados por un determinado lapso.

La observación o el razonamiento ha de permitir el cálculo de los esfuerzos dados por las fórmulas de Reynolds en función de coeficientes y valores medios o compensados.

2

Turbulencia rastrera y turbulencia libre. Teorías de Prandtl y de Taylor. Sus generalizaciones.

Sea el caso simple de transporte a lo largo del eje x y movimiento con velocidades medias de componentes $\bar{u}_z \bar{v}_z$ en el estrato de altura z. Sean u y v los componentes residuales (habiendo prescindido del acento), de modo que $\bar{u}_z + u$, $\bar{v}_z + v$ representan en el estrato z las componentes de la velocidad instantánea.

Una hipótesis (llamada de Prandtl) para el cálculo será, v. gr., que el momento (o la velocidad) se conserve independiente de z. Si z_0 es la altura, u_0 la velocidad del estrato donde se origine la turbulencia, al alcanzar la altura z su cantidad de movimiento supuesta invariable, se expresará por la masa multiplicada por

$$u + \bar{u} = \text{constante} = u_0.$$

de donde

$$u = u_0 - \bar{u}, \quad u = \frac{d\bar{u}}{dz}(z_0 - z) + \ldots\ldots$$

La fuerza tangencial correspondiente a la variación de la cantidad de movimiento $\rho\, d_x\, d_y\, d_z\ (\bar{u} + u)$ vendrá dada por el cociente de la cantidad anterior por dt, o sea $\rho\, d_x\, d_y\, w\ (\bar{u} + u)$, y el esfuerzo constante turbulento a lo largo de la superficie $z =$ constante será, en hipótesis de que no hay transporte de masa y siendo S la superficie total,

$$\tau_{xz}\, S = \int\!\!\int \rho\, w\, u\, d\, x\, d\, y.$$

Con el valor anterior de u

$$\tau_{xz}\, S = \int\!\!\int \rho\, (z_0 - z)\, w \frac{d\,\bar{u}}{d\,z}\, d\, x\, d\, y.$$

$$\bar{\tau}_{xz} = (z_0 - z)\, w\, \rho \frac{d\,\bar{u}}{d\,z} = A\, \rho \frac{d\,\bar{u}}{d\,z}\,.$$

La fuerza de resistencia en el estrato de grueso dz es la variación de esta cantidad con z. Al valor $z_0 - z$ para cada masa turbulenta se la llama recorrido en trance de mezcla. (Mischungsweg.)

Por unidad de volumen resulta la resistencia dada por la fórmula

$$\frac{d}{d\,z}\left(A\, \rho \frac{d\,\bar{u}}{d\,z}\right).$$

A es el coeficiente de transporte.

Taylor, admitiendo la constancia de la vorticidad,

$$\frac{\partial}{\partial\, z}(\bar{u} + u) - \frac{\partial\, w}{\partial\, x} = \frac{d\, u_0}{d\, z}$$

de la masa turbulenta, en vez de la cantidad de movimiento, llega, para la fuerza másica de resistencia, a la fórmula (con A variable)

$$A\, \rho \frac{d}{d\,z} \frac{d\,\bar{u}}{d\,z}\,.$$

El efecto de la velocidad residual w normal a la pared puede interpretarse, según Prandtl, como proporcional al gradiente de la velocidad paralela a la pared y a la longitud en trance de mezcla: $\frac{d\bar{u}}{dz}(z - z_0)$, porque si dos balones vienen desde afuera del estrato z con velocidades w_1 y w_2 y luego siguen en el estrato paralelamente a la pared, el efecto de su choque se podrá medir por la velocidad relativa con que siguen su marcha. Resulta de tales consideraciones que, llamando l a la longitud en trance me mezcla, $l = z - z_0$,

$$A = \rho\, l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dz} \right|$$

El figurar valor absoluto del gradiente resulta de que la fuerza de arrastre A $\frac{d\bar{u}}{dz}$ es posivitiva si $\frac{d\bar{u}}{dz}$ es positivo.

Esta longitud en trance de mezcla viene a ser la distancia que puede recorrer un balón turbulento conservando su identidad, sea antes de entrar en el estrato z, sea al salir de él. Es análogo al camino libre de las moléculas gaseosas, pero en éstas, w es la velocidad de las moléculas normal a la pared, y aquí es el valor residual normal a la pared.

Análoga expresión A se halla en las transmisiones convectivas de calor c_μ, temperatura θ, etc. La cantidad de calor transmitida por unidad de superficie y de tiempo es

$$c_\mu A \frac{d\theta}{dz}, \qquad A = \rho\, l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dz} \right|$$

Fórmulas análogas traducen la difusión o derivada respecto del tiempo de polvo, humos, vapores, miasmas, etc.

Multitud de hipótesis se han hecho sobre la variabilidad de l

en la turbulencia de pared o rastrera que se está considerando. La más sencilla es que l es proporcional a z, distancia a la pared (Prandtl).

En toda turbulencia rastrera o de pared la parte en inmediato contacto con la pared, la adherente, es laminar. Si el número de Reynolds es relativamente pequeño, esta capa invade una región extensa; en el régimen de Poiseuille, todo el tubo. La velocidad a través del tubo sigue una ley parabólica, la constante μ es la molecular. Si el número de Reynolds (1) no es pequeño, v. gr.: > 2000 en tubos lisos, la ley de distribución de la velocidad no es parabólica; hay una variación de velocidad mucho mayor junto a la pared, por lo tanto, si hay que conservar un valor finito al esfuerzo de arrastre, es preciso que en el contacto inmediato μ sea muy pequeña. La capa laminar de contacto es de grueso tan pequeño que a veces se tiene la impresión de que el movimiento turbulento alcanza hasta las paredes.

Prandtl supone que en el esfuerzo de arrastre, lo mismo en tubos que en placas u otras superficies, intervienen dos sumandos, uno laminar, molecular, y otro debido a la turbulencia:

$$\tau = \mu \frac{d\bar{u}}{dz} + \rho\, l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dz}\right)^2.$$

El primer término es el de más influencia si el diámetro del tubo es muy pequeño. El valor de τ en cualquier punto del flúido viene dado por el segundo término en cuanto al número de Reynolds excede determinado límite. Por lo tanto, salvo en la inmediata proximidad de la pared, se puede escribir en este caso

$$\tau = \rho\, l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dz}\right)^2.$$

(1) Dado por $\dfrac{\text{Velocidad media} \times \text{Diámetro}}{\text{Viscosidad cinemática}}$

Si para los distintos puntos a diversa distancia z (no próxima a cero) se supone $\tau =$ constante y se introduce el valor constante u_0 de la llamada velocidad de arrastre

$$u_0 = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$$

se puede escribir para todo z (no cerca de cero)

$$u_0 = l \frac{d\bar{u}}{dz} .$$

Si l se supone proporcional a z, $l = \kappa z$, resulta la ley logarítmica de distribución de velocidades

$$\bar{u} = u_0 \left(\frac{1}{\chi} l \cdot z + C \right) .$$

Se puede dar a esta fórmula formas diversas introduciendo valores numéricos relacionados con el problema. Por ejemplo, con $\frac{z u_0}{\nu}$ resultan fórmulas de este tipo

$$\bar{u} = u_0 \left(\frac{1}{\chi} l \cdot \frac{z u_0}{\nu} + C \right),$$

que se han aplicado aun a casos con τ variable sustituyendo, en vez de u_0, $\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$.

He ahí, por ejemplo, la fórmula de Nikuradse para tubos lisos:

$$\bar{u} = u_0 \left(5{,}75 \log_{10} \frac{z u_0}{\nu} + 5{,}5 \right) .$$

La misma aspereza definida por el tamaño del grano o de la malla cedazo introduce una longitud K y la fórmula de distribución de velocidades es de la forma

$$\bar{u} = u_0 \left(5{,}75 \log_{10} \frac{z}{K} + \text{const}\right).$$

Los meteorólogos que se han ocupado en las leyes de la turbulencia en el aire en contacto con el suelo usan leyes análogas, según el grado de aspereza: árboles, barbechos, espigas, o grado de ondulación (superficie de los mares), las constantes de la fórmula son diversas y deben determinarse por contraste con la experimentación. He ahí la de Rossby y Montgomery:

$$\bar{u} = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \log_{10} \frac{z + z_0}{z_0}.$$

En el mar, en calma, por ejemplo, $z_0 = 4$ cm. Esta fórmula se ha confirmado bastante bien cuando la variación de la temperatura con la altura obedece a la ley adiabática, aun cuando τ no sea constante.

Las fórmulas en potencias $^1/_7$, $^1/_8$, etc., de que se habló en la segunda parte son fórmulas aproximadas de las logarítmicas Son, como éstas, válidas hasta junto a la pared. Pero en la inmediación de ésta la velocidad varía siempre linealmente por tratarse de un valor finito de la tensión de arrastre y de un grueso muy pequeño. La ley de variación de $\bar{u}$ con z en la turbulencia rastrera de movimiento y transporte de cantidad de movimiento tiene, pues, dos ramas: una lineal para z muy pequeño y otra logarítmica para z mayores.

Si en vez de la hipótesis de Prandtl, se introduce la hipótesis de que l depende de $\frac{d\bar{u}}{dx}$, $\frac{d^2\bar{u}}{dx^2}$, etc., lo más sencillo es escribir, de acuerdo con las dimensiones

$$l = \frac{\dfrac{d\bar{u}}{dz}}{\dfrac{d^2\bar{u}}{dz^2}},$$

salvo una constante de proporcionalidad k (hipótesis de Karman).

Si para una distancia muy pequeña a la pared límite se supone que la τ de Reynolds o esfuerzo cortante de arrastre varía poco, $\tau = \text{const}$, resulta

$$\tau = \rho\, k^2 \frac{\left(\dfrac{d\bar{u}}{dz}\right)^4}{\left(\dfrac{d^2\bar{u}}{dz}\right)^2},$$

cuya integral da la distribución de $\bar{u}$ con z, en forma de ley también logarítmica

$$\bar{u} = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}\,\log z\,.$$

Experimentos realizados en turbulencia libre, v. gr., en la estela de un alambre rectilíneo al rojo o en la penetración turbulenta de un chorro en el seno de un flúido, han demostrado que el coeficiente de transporte A para el calor es doble del coeficiente A para el impulso o cantidad de movimiento que da lugar a las fuerzas de arrastre. En la turbulencia rastrera los coeficientes hallados experimentalmente son iguales. Otros experimentos en tubos y placas dan valores alrededor de 1,5 para el cociente de las A.

En la turbulencia rastrera intervienen remolinos de eje paralelo al movimiento, y en la turbulencia libre principalmente remolinos con eje normal a la corriente, lo que parece poder explicar las divergencias.

Durante mucho tiempo ha venido imperando la dualidad entre las teorías del transporte con longitud en trance de mezcla, y conservación de cantidad de movimiento y la del transporte de vorticidad. Para paliar los inconvenientes y resultados poco exactos a que han conducido al ser aplicados a problemas concretos, sus autores han recurrido a generalizaciones, sus alumnos a contrastes experimentales. Gran cantidad de trabajos de contraste se halla en la literatura corriente. En los mismos textos se exponen ambas, y puede decirse que es una de las controversias modernas más interesantes.

Por estas teorías de carácter fenomenológico se ha iniciado el estudio estadístico, emprendido especialmente por G. Taylor y su escuela y desarrollado también en América. En él, la turbulencia entra de lleno en los cálculos de la estadística de variables aleatorias, y los grandes progresos últimamente realizados en ésta pueden hallar un campo de aplicación en la turbulencia.

Relacionados con ellos están los estudios de difusión, por lo que no es de extrañar que partiendo de teorías de la misma, de forma más o menos imitada de las teorías moleculares, algunos estudiosos enfoquen el problema desde tales puntos de vista.

La teoría generalizada de Prandtl, aplicable a tres dimensiones, es ésta. Las tensiones de Reynolds en función de valores medios cuando hay una componente predominante en el tensor de deformación vienen dadas por

$$-\rho\,\bar{u}^2 = 2\,\rho\, l^2\, \mathrm{Y}\cdot\frac{d\bar{u}}{dx}, \qquad -\rho\,\overline{uv} = \rho\, l^2\, \mathrm{Y}\cdot\left(\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dy}\right), \text{ etc.}$$

siendo

$$\mathrm{Y}^2 = 2\left(\frac{d\bar{u}}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{d\bar{v}}{dy}\right)^2 + 2\left(\frac{d\bar{w}}{dx}\right)^2$$
$$+\left(\frac{d\bar{w}}{dy}+\frac{d\bar{v}}{dz}\right)^2+\left(\frac{d\bar{u}}{dz}+\frac{d\bar{w}}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\bar{v}}{dx}+\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2.$$

Para los estudios de turbulencia libre, es decir, sin obstáculo ni pared en que la difusión tiene un papel preponderante, tales como sombra del viento, mezclas de chorros, difusores, estelas de obstáculos, para todo el espacio donde hay difusión efectiva, es decir, a cierta distancia de los límites de sombra o estela, Reichardt (1) ha propuesto modificar la hipótesis de Prandtl sobre el coeficiente de intercambio, escribiendo:

$$\mu = \rho \cdot \varkappa \cdot b\,(\bar{u}_{max} - \bar{u}_{min}),$$

b es el ancho de la sombra o estela normalmente a la dirección de la corriente, es una función de x, $\bar{u}_{max}$ es el máximo de $\bar{u}$, $\bar{u}_{min}$ el mínimo de $\bar{u}$ en la sección que se considera. Para todo valor de z el coeficiente de transporte se supone constante. Con esta hipótesis y alguna otra resultan del cálculo perfiles de velocidad más ajustados a la realidad, especialmente dentro del volumen donde haya ciertamente turbulencia y difusión de cantidad de movimiento.

Ejemplos de casos concretos cuyos resultados experimentales eran conocidos se han podido calcular por las nuevas fórmulas; el propio Reichardt ha resuelto algunos casos, otros lo han sido por Görtler, del Instituto Kaiser Wilhem de Gotinga, que dirige Prandtl (2).

Por su parte, Taylor, en los *Proceedings of the Royal Society*, págs. 697-700, 1932; págs. 494-497, 1935, y págs. 499-502, 1937, dió fórmulas generalizadas de su teoría, ya referida, de

(1) Reichardt: Ueber eine neue Theorie der Turbulenz. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik,* 1941, págs. 257-264.—Gesetzmässigkeiten der freie Turbulenz. *Forschungsheft del V. D. Ingenieure,* núm. 414, Berlín, 1942.

(2) Görtler: Berechnung von Aufgafen der freien Turbulenz auf Grund eines neuen Näherungsansatzes. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik,* 1942, págs. 244-254.

la conservación de la vorticidad. Ambas generalizaciones tienden a introducir mayor precisión y mayor número de parámetros. El objeto de todas ellas es disponer de medios adecuados para el planteo de problemas concretos y su resolución; pero las nuevas constantes son difícilmente referibles a conceptos físicos concretos, tal ocurre, por ejemplo, con el valor de l_1 que interviene en cierta fórmula propuesta por Prandtl ya en 1925:

$$\tau = \rho\, l^2 \frac{d\bar{u}}{dz} \sqrt{\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2 + l_1^2 \frac{d^2\bar{u}}{dy^2}},$$

con la cual, si bien a costa de ciertas complicaciones matemáticas, se logra ajustar mejor la realidad (que da perfiles de velocidad más llanos que los de la teoría primera de Prandtl).

Siendo la bibliografía sobre el particular muy numerosa, sólo se da en lo que sigue relación de algunas memorias recientes (1).

3

Medida de la turbulencia. Curvas de igual velocidad en la capa límite. Puntos de tránsito y de desprendimiento.

La técnica experimental se ha servido principalmente del termómetro de hilo de Wollaston, reducido a diámetros de 5 micras, una vez debidamente estudiadas las correcciones de am-

---

(1) Schlichting: Ueber das ebene Windschattenproblem. *Ingenieur Archiv*, páginas 533-571, 1930.

Gran Olsson: Geschwindigkeits und Temperaturverteilung hinter einem Gitter bei turbulenter Strömung. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, págs. 257-275, 1936.

Reichardt: Neue Theorie der freien Turbulenz. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, págs. 257-264, 1941.

Schmidt: Turbulente Ausbreitung eines Strömes erhitzer Luft. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, págs. 265-279, 351-364, 1941.

plitud y fase del instrumento. Se han obtenido amplificaciones de gráficos cuya frecuencia alcanza 10^4 por segundo. El análisis de la difusión en la estela de un hilo al rojo mediante pares termoeléctricos ha permitido el estudio de fluctuaciones en velocidades transversales.

La técnica del hilo de Wollaston permite medir fluctuaciones en la intensidad de corrientes, pero no da direcciones.

Conexiones especiales del aparato amplificador permiten medir directamente los coeficientes de correlación que intervienen en las fórmulas de Reynolds.

Cuando las medias cuadráticas de los residuos $u - \bar{u}$, medias que se designarán por $\bar{\bar{u}}$, son independientes de la dirección, se llama isotropa la turbulencia. Es decir, si hay tres direcciones rectangulares y para cada una de ellas $\bar{\bar{u}} = \bar{\bar{v}} = \bar{\bar{w}}$, se le da ese nombre. Es la turbulencia que se espera de un túnel aerodinámico.

Antiguamente se definía la turbulencia de una corriente por el "test" de la esfera. Una esfera de 15 cm. de diámetro, por ejemplo, se examinaba en el túnel aerodinámico. Se denomina número de Reynolds característico de la corriente aquel producto

$$\frac{U \cdot D}{v}$$

U velocidad de la corriente, D diámetro de la esfera y ν viscosidad cinemática, tal que, al alcanzarlo, el coeficiente de resistencia de la esfera vale 0,3.

Se basa tal definición en que al aumentar la turbulencia del aire, la disminución brusca del valor del coeficiente de resistencia (pasa repentinamente de un valor mayor a 0,3 a un valor menor a 0,3) tiene lugar para un número de Reynolds tanto menor cuanto más elevada es la turbulencia de la corriente.

Pero la definición supone que para nada interviene el diámetro ni la malla del rectificador del túnel. Por Taylor fué sugerido que los números críticos de Reynolds, que miden al modo anterior la turbulencia, son funciones uniformes de

$$\frac{\bar{\bar{u}}}{U}\left(\frac{D}{L}\right)^{1/5}$$

L es, aproximadamente, la longitud de la malla cuadrática del rectificador.

En vez del coeficiente 0,3, se toma a veces como elemento de juicio que la diferencia (medida manométricamente) entre la presión en el punto de remanso a proa y un punto de la esfera a popa valga 1,22 veces la presión hidrodinámica debida a U.

Los puntos así determinados no tienen efectivamente dispersión experimental, llenan una curva, lo cual permite mayor precisión en las medidas.

Con medios muy exactos de medida han podido dibujarse los haces de curvas de corriente media en la capa límite; es decir, las curvas de velocidades medias diferentes, habiendo hallado Dryden las correspondientes a varios cuerpos, especialmente al cilindro elíptico. Estos haces de curvas se representan en diagramas cuya abscisa es la distancia al punto de remanso a proa y cuya ordenada es la distancia a la superficie límite. Tienen tales curvas formas onduladas, en sus comienzos son muy apretadas, luego se separan entre sí, y a cierta distancia del remanso a proa se yerguen verticalmente indicando el desprendimiento.

Entre el punto de remanso a proa y el punto de desprendimiento las curvas presentan ondulaciones, especialmente una ondulación junto al desprendimiento demuestra una disminución de la velocidad en un estrato a distancia fija del sólido. La prolongación de los máximos de las ondulaciones conduce, por extrapolación, a marcar un punto en el perfil situado entre la proa y el de desprendimiento, que Dryden llama punto de tránsito, y a partir del cual sospecha el cambio de régimen.

Hay, pues, tres puntos en el perfil hasta alcanzar el gradiente adverso donde convergen los remolinos de la estela: el de remanso a proa, el de tránsito y el de desprendimiento. La teoría y prederivación de la posición relativa de los tres puntos es de gran interés en el estudio de la Aerodinámica. El carácter netamente ondulado antes del punto de desprendimiento aparece en el cilindro liso indefinido desde la curva 0,6 U hasta 0,05 U.

Es elemental la conveniencia de evitar el desprendimiento. Un desprendimiento avanzado ocurre en ángulos grandes de ataque de perfiles alares, con pérdida rápida de sustentación e incremento considerable de resistencia. Sin embargo, no se puede afirmar que el régimen pase de laminar a turbulento en el desprendimiento. Es turbulento antes, y puede convenir que la parte turbulenta se alargue, porque el régimen turbulento es más "pegadizo" que el laminar, que es menos estable. Hay aquí un fenómeno crítico que depende mucho de la forma del perfil (convexidad, curvaturas) y que varía según los distintos cuerpos por su forma, por el pulido de la superficie y según la turbulencia inicial de la corriente.

En la región de tránsito, si se sigue una línea a distancia invariable del perfil, entre el punto de tránsito y el de desprendimiento, la velocidad aumenta después de pasar por un mínimo en el punto de tránsito.

El punto de tránsito y segmento entre éste y el desprendimiento parece ser muy sensible a la turbulencia inicial de la corriente (1). La turbulencia inicial se define, por ejemplo, por el valor $\bar{\bar{u}}$ antes de chocar la corriente con el obstáculo. Las propiedades de la región de tránsito alteran mucho en ciertos cuerpos, v. gr., en la esfera, y dan cuenta de las particularidades y anomalías observadas, v. gr., al provocar un aumento en la tur-

---

(1) Dryden: Turbulence and the boundary layer. *Journal of the Aeronautical Sciences*, págs. 85-101, 1939.

bulencia mediante un anillo postizo. Se alarga así la región de tránsito y se corre a popa el punto de desprendimiento, con lo que disminuye la resistencia y se contrae la estela.

En perfiles alares se obtiene siempre mayor sustentación adelantando el punto de tránsito y retrasando el de desprendimiento.

Adelantar el tránsito en perfiles de casco o formas aerodinámicas de dirigibles, especialmente para ángulos de ataque pequeños, significa casi siempre aumentar la resistencia.

Un túnel en que el coeficiente de resistencia de una esfera de 5″ sea 0,3 para $Re = 360000$ puede considerarse como un túnel con poca turbulencia. El valor R corresponde al aire libre y en calma.

En la parte delantera laminar las fluctuaciones son aproximadamente tres veces mayores que en la corriente libre. En la capa de tránsito aumentan rápidamente, especialmente en el centro de la capa de tránsito; disminuyen luego en la estela arremolinada.

En rigor, la posición del punto de tránsito es oscilante y el fenómeno de la fluctuación, en general, es distinto según la forma del modelo. No es igual en una placa plana que en un cilindro. Cuando el aire es ya turbulento se aprecian menos cambios en las fluctuaciones y éstas son siempre rápidas, como corresponde a la turbulencia establecida. Precisamente este carácter permanente de la oscilación rápida en un punto determinado es erigido por algunos en definición del régimen turbulento, en contraposición a la fluctuación, relativamente más lenta, para un punto determinado en el régimen laminar. La amplitud de las oscilaciones varía según la posición del punto. La frecuencia sería lo característico del régimen. Pero es difícil establecer un límite separador. Por lo cual, para la turbulencia isotropa, es preferible apoyarse en criterios de correlación entre fluctuaciones horizontales y verticales, lo cual exige adecuada técnica experimental para ser aplicada a una capa límite, y sólo recientemente parecen preconizarse métodos experimentales adecuados. Interesa especialmente conocer el paso de la turbulencia isotropa de la corriente a la no isotropa de la capa límite.

En el estudio de estos fenómenos conviene conocer los efectos de diversas causas supuestas. Estas, en general, no obrarán de modo independiente entre sí; ciertos efectos serán funciones, empíricas antes de toda teoría, de una función de las causas. Diversos laboratorios de América emprendieron la ejecución de un programa en que cada laboratorio estudia una causa en relación con la posición del punto de tránsito, sea la aspereza, sea la forma, el número de Reynolds, el gradiente de presión, la posición del punto de desprendimiento, etc.

Entre los resultados generales pueden señalarse los siguientes.

El punto de tránsito se adelanta a proa al aumentar el número de Reynolds, lo mismo en superficies cóncavas que en superficies convexas.

El número de Reynolds necesario para fijar el punto de tránsito a una distancia determinada del punto de remanso a proa es dos à tres veces superior en una superficie convexa que en una superficie cóncava de igual curvatura.

Una disminución del gradiente de presión es equivalente a un aumento del número de Reynolds para una posición fija del punto de tránsito.

Con diversas turbulencias iniciales (diversas mallas del rectificador) e igual número de Reynolds calculado sobre el diámetro menor de la sección del cilindro, la posición del punto de tránsito en el cilindro elíptico, de eje mayor horizontal, parece ser función definida del parámetro de Taylor, indicado al tratar de medida de la turbulencia para esferas:

$$\frac{\bar{\bar{u}}}{U}\left(\frac{d}{L}\right)^{1/5}$$

d es el diámetro menor de la sección y L la amplitud de la malla, o, mejor, la escala de turbulencia

$$L = \int_{0}^{\infty} R \, d\, r,$$

siendo R el coeficiente de correlación en dos puntos distantes *r* en una horizontal, medido sobre las fluctuaciones en velocidad. Para valores descendentes del parámetro de Taylor la curva que da la posición del punto de tránsito en el cilindro tiende a ser paralela al eje de dicho parámetro; dicho en otras palabras, al disminuir el parámetro de Taylor, la posición del punto de tránsito tiende a estabilizarse.

A tales resultados experimentales y a otros muchos que no cabe añadir se pueden aplicar consideraciones de cálculo dimensional para orientar el trazado de haces de curvas.

Prácticamente, ha querido sacarse partido de la turbulencia inicial como si permitiese referir los resultados a un número de Reynolds más elevado. Las dos causas, tratadas separadamente, adelantan el punto de tránsito. Tal dependencia constituye la llamada corrección del número de Reynolds en el túnel por turbulencia inicial de su corriente. Es una corrección empírica, pero la cuestión no está clara en sus efectos, v. gr., sobre el coeficiente de máxima sustentación, mínima resistencia, etc., y es dudoso que la corrección que se estila sea aceptable, por lo que la tendencia general de los grandes centros de investigación es reducir todo lo posible la turbulencia de la corriente.

Ensayos de turbulencia al estilo del túnel en vuelo en atmósfera libre han revelado en ella muy poca turbulencia. Lo que no significa que la atmósfera no tenga turbulencia en sentido meteorológico. La diferencia está en el orden de la frecuencia y en el valor del intervalo empleado al promediar. Este es mucho mayor en Meteorología, y las frecuencias de fluctuación muchísimo menores.

Para el estudio de la turbulencia deben consultarse especialmente las reuniones internacionales y Congresos de Mecánica aplicada; sumamente interesante sobre el particular es el que tuvo lugar en Cambridge (América) en 1938. Por lo demás, las revistas profesionales y las publicaciones de los grandes laboratorios aerodinámicos están colmadas de memorias y estudios originales o de grandes síntesis de los resultados obtenidos o discutibles (1).

4

Elementos de la turbulencia isotropa. Coeficientes de correlación. Su dependencia. Energía de disipación.

Como ya se ha dicho, diversa de la turbulencia forzada junto a un muro, o de la turbulencia libre de venas, chorros y esteias, es la turbulencia de los túneles aerodinámicos, en la modalidad isotropa.,

La turbulencia en los túneles es muy importante por alterar los valores de las constantes aerodinámicas de sustentación, resistencia, etc.

---

(1) Desde el punto de vista experimental, se mencionarán las siguientes, aparte de las que comprenden las publicaciones del ya citado V Congreso de Mecánica Aplicada de Cambridge:

Stüper: Untersuchungen am fliegendem Flugzeug. *Luftfahrtforschung*, pág. 26, 1934.

Hoerner: Versuche mit Kugeln. *Luftfahrtforschung*, pág. 42, 1935.

Platt: Turbulence factors of N. A. C. A. Wind Tunnels. *Report* núm. 558, 1936.

Clauser: The effect of curvature on the transition. *Technical Note of the N. A. C. A.*, 1937.

Dryden y colaboradores: Meesurement of intensity and Scale of Wind Tunnel turbulence N. A. C. A. *Technical Report*, núm. 581, 1937.

Mock: Alternating-current equipement on the meesurements of fluctuations of Air speed in turbulent flow N. A. C. A. *Technical Report*, núm. 582, 1937.

Melville Jones: Flight experiments on the boundary layet. *Journal of Aeronautical Sciences*, pág. 81, 1938.

Los elementos principales que se introducen en el estudio de los túneles son propiamente tres: 1.° La energía media q^2 del movimiento residual, la escala de turbulencia L y la constante λ de Taylor, que viene a ser una medida del diámetro del balón turbulento.

La energía o fuerza viva

$$\frac{1}{2}\overline{(u^2 + v^2 + w^2)} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{u}}^2 + \bar{\bar{v}}^2 + \bar{\bar{w}}^2) = q^2$$

depende de la distancia a la malla del rectificador, de la amplitud de la malla y del grueso del barrote o parte equivalente. Medidas muy precisas de Dryden, mediante el termómetro de hilo, han permitido precisar tal dependencia empírica.

Los otros dos coeficientes están ligados a los coeficientes de correlación R_1 y R_2, definidos así:

Para R_1. Sea un segmento r en la dirección de U. En los extremos se miden las fluctuaciones simultáneas en la velocidad u. Se define L por $L = \int_0^\infty R_1\, d\, r$, siendo R_1 el coeficiente de correlación para cada r.

Para R_2. Sea un segmento r en dirección normal a U. En los extremos se miden las fluctuaciones simultáneas en las velocidades u. Se calcula su coeficiente de correlación R_2 para cada r.

Entre las dos funciones R_1 y R_2 existe la relación siguiente, llamada de Karman, que traduce la ecuación de continuidad

$$r \frac{d\, R_1}{d\, r} = 2\,(R_2 - R_1).$$

Las curvas R_1 y R_2 función de r se determinan experimentalmente en cada caso. Ambas valen 1 para $r = 0$ y tienden asintóticamente a cero para valores crecientes de r (o de $\frac{r}{M}$ siendo M la dimensión de la malla).

El tercer número λ viene definido por

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 R_2}{d r^2}\right)_{r=0}.$$

Resulta

$$\lambda \text{ proporcional a } \sqrt{\frac{\nu L}{q}}$$

$$\text{L proporcional a } \sqrt{\nu (T + t)}$$

$$q \text{ proporcional a } \frac{M}{T + t},$$

siendo T una constante inversamente proporcional a U y que depende de las dimensiones o grueso de los barrotes relativamente a M, y t es el tiempo transcurrido desde el paso del rectificador.

Otra de las cantidades que intervienen en la teoría estadística de la turbulencia es el número relativo de frecuencias sinuosoidales n en que puede descomponerse la velocidad residual u.

Designando la probabilidad relativa por F (n), se tendrá:

$$\int_0^\infty F(n)\, d n = 1.$$

Taylor descubrió que entre el coeficiente de correlación $R_1(x)$ y la función F (n) existe una relación notable, por ser ambas transformadas recíprocas de Fourier.

$$F(n) = \frac{4}{U}\int_0^\infty R_1(x) \cos \frac{2 \pi n x}{U}\, d n$$

$$R_1(x) = \int_0^\infty F(n) \cos \frac{2 \pi n x}{U}\, d n$$

La longitud λ se expresa en función de F (n) por la fórmula

$$\frac{1}{\lambda^2} = 4\pi^2 \int_0^\infty \frac{n^2}{U^2} U F(n) \frac{dn}{U}$$

Estas funciones y valores permiten el estudio experimental de la turbulencia en túneles.

La turbulencia isotropa viene caracterizada por multitud de propiedades de simetría, que se traducen en otras a que obedecen los valores residuales de las velocidades y sus derivadas, valores medios de sus cuadrados y de sus productos, etc.

Teniendo en cuenta estas relaciones, puede calcularse el valor medio de la función de disipación, que es la energía E convertida en calor.

Taylor (1) dedujo la siguiente fórmula:

$$E = 7{,}5\,\mu \left(\frac{\overline{\overline{\partial u}}}{\partial z} \right)^2.$$

En la teoría general de flúidos viscosos que obedecen a las ecuaciones de Navier se puede expresar la energía de disipación

---

(1) La bibliografía sobre la "Teoría estadística de la turbulencia isotropa" es muy numerosa. Los trabajos fundamentales de Taylor aparecieron, como ya se ha dicho, en los *Proceedings of the Royal Society*, en los años 1935 y 1936. Una relación de estos trabajos está resumida en la obra de Goldstein, ya mencionada, publicada en 1938. De este mismo año datan las publicaciones del V Congreso Internacional de Mecánica Aplicada, donde Taylor actuó como referente. Un resumen de la referencia de Taylor se encuentra en la *Revue Scientifique*, escrito por Rocard, año 1941, págs. 375 a 383, referencia provista, además, de abundante bibliografía.

La memoria fundamental de Kármán es de 1937, The Fundamentals of the Stabilical Theory of Turbulence, *Journal of Aeronautical Sciences*, pág. 131. La noción del espectro de turbulencia fué introducida por Taylor en 1938; véanse *Proceedigns of the Royal Society*, pág. 476.

En la revista *Luftfahrtforschung* puede leerse una referencia general escrita por Wieghardt en octubre de 1939, publicada en 1941, págs. 1 á 7.

en el movimiento estacionario, en el caso de que las fuerzas exteriores deriven de un potencial, por la fórmula:

$$E = \mu \left\{ \Sigma_i \, \omega_i^2 - \frac{2}{\rho} \Delta p \right\}$$

Siendo ω_i la componente del remolino.

Helmholtz dedujo que en un movimiento estacionario y fuerzas exteriores constantes, si los términos representativos de las fuerzas de inercia son insignificantes, la disipación extendida a un volumen determinado es mínima para el movimiento real comparado con todos los movimientos posibles con iguales velocidades en el contorno.

5

Aplicación a la turbulencia de los métodos de la Estadística matemática.

El problema de la turbulencia, iniciado en 1883 por Reynolds, lleva sesenta años atrayendo la atención de los estudiosos. Reynolds mismo no le llamó turbulento, sino movimiento "sinuoso", en contraposición al "directo". En los comienzos de siglo pudo creerse que una atenta discriminación de soluciones posibles, rotacionales, con distribución discontinua de velocidades, podría explicar teóricamente las circunstancias todas del movimiento. Fué el momento de confianza de los teóricos en las ecuaciones en derivadas parciales y resolución de problemas "bien planteados", con precisas condiciones límites, uniformidad de soluciones, etc. La Elasticidad, la Electricidad y el Magnetismo tenían su cuadro de ecuaciones, como la Hidrodinámica. Y creyeron que sólo era preciso trabajo de discriminación y de pormenor.

Pronto los progresos de la Física obligaron a extender el campo de los principios. Las cuestiones de estabilidad, de una parte; de otra, la multiplicidad de soluciones aparentes, obligaron a considerar no un problema, sino un conjunto de problemas, y buscóse el nuevo principio guía en una analogía con los resultados característicos de la estadística y probabilidad en fenómenos al azar.

Ciertos teóricos a la manera clásica, como Noether, Oseen, etcétera, dieron paso a otros que introducían elementos estadísticos fundamentales. Primero fueron los de las teorías cinéticas, como los que señalara Burguess; después, tímidamente, la noción de camino en trance de mezcla, consideraciones de dimensión, etc., acompañados de constantes empíricas, aparecían en todos los razonamientos. Más adelante, el método experimental abrió nuevos cauces de comprobación; ello dió lugar a las teorías estadísticas, que muy brevemente acaban de ser reseñadas en el capítulo anterior.

Paralelamente, se pensó en aplicar a la Hidrodinámica los métodos de la Estadística matemática; la noción de probabilidad de tránsito de un estado a otro, definido cada uno como punto representativo en un espacio de Hilbert, y la noción ergódica o de existencia de un límite aparecía como un ideal en que tal vez fuera posible encajar la noción de turbulencia.

Ensayos en este sentido fueron llevados a cabo por Mieses, y todo el instrumental matemático de las cadenas de probabilidad fué puesto en obra.

Afortunadamente, grandes analistas de diversas nacionalidades daban lugar simultáneamente a progresos considerables en la Estadística. Kolmogoroff estableció las ecuaciones a que obedecen las probabilidades de tránsito y la función de distribución mediante hipótesis sencillas sobre los momentos; la noción ergódica era profundizada por otros matemáticos rusos y americanos; las cadenas fueron objeto de progresivo análisis por parte de geómetras franceses, como Fréchet; la noción probabilística de turbulencia, objeto de estudio por especialistas en Mecánica de flúidos, tales como el director del Instituto de Lille, Kampé de Fériet; aparecieron trabajos en Italia, escritos por Matteoli, y se publicaron libros como el de Gebelein.

Esta escuela de investigadores teóricos ha conseguido algunos frutos, pero la necesidad de operar con nociones muy abstractas los aleja acaso de la realidad experimental y los razonamientos parecen poco apropiados a interpretación física intuitiva y conducentes, sólo por largo rodeo, a resultados numéricos concretos. La misma generalidad y necesaria vaguedad de los métodos estadísticos hace temer que haya iguales probabilidades para demostrar una proposición que su contraria, y, en consecuencia, hacedero hallar un hilo de razonamientos probabilísticos que abone una proposición más o menos arbitraria. Con todo, la Física de la radiación y del átomo nos ha enseñado qué sorprendentes resultados pueden obtenerse siguiendo los nuevos caminos y adoptando el lenguaje nuevo (1).

6

Teoría tensorial de la turbulencia.

La teoría tensorial de la turbulencia de Ertel (2) se basa en una transformación de la fórmula que expresa el flujo residual. Si ε es el elemento de transporte, designando la compensación

(1) Para la bibliografía referente a este capítulo consúltese, especialmente, Gebelein: Turbulenz, 1935, Berlín (Springer), y Kampé de Fériet: Los fonctions aléatoires stationnaires et la théorie statistique de la Turbulence homogène, *Anales de la Sociedad Científica de Bruselas*, págs. 145-194, 1939. Con abundante bibliografía.

(2) Exner: Tensorielle Theorie der Turbulenz. *Annalen der Hydrographie*, Helft. V, págs. 193-205, 1937.

o valor medio por un guión,

$$\text{Flujo residual} = T = \overline{\rho\,\varepsilon\,v} - \bar{\rho}\,\bar{\varepsilon}\,\bar{v}.$$

Se recordará que

$$\bar{v}\,(x\,y\,z\,t) = \frac{1}{2}\int_{t-\tau}^{t+\tau} v\,(x\,y\,z\,t')\,d\,t'.$$

El flujo residual se llama también turbulento.

El valor de T se puede escribir con la notación $v - \bar{v} = \zeta$, de la que se deduce $\frac{1}{2\,\tau}\int_{t-\tau}^{t+\tau} \zeta\,d\,t = 0$,

$$T = (\overline{\rho\,\varepsilon} - \bar{\rho}\,\bar{\varepsilon})\,\bar{v} + \overline{\rho\,\varepsilon\,\zeta}$$

Sea el vector $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$ que une un punto P en la dirección de la velocidad residual en P con un punto de la superficie lugar de los extremos de $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$, en que $\bar{\rho}\,\bar{}$ compensado tiene el mismo valor que el instantáneo de P

$$\rho\,\varepsilon = \bar{\rho}\,(x - \xi_1,\ y - \xi_2,\ z - \xi_3,\ t)\,\bar{\varepsilon}\,(x - \xi_1,\ y - \xi_2,\ z - \xi_3,\ t),$$

por la fórmula de Taylor,

$$\rho\,\varepsilon = \bar{\rho}\,\varepsilon - \frac{\partial\,(\bar{\rho}\,\bar{\varepsilon})}{\partial x}\,\xi_1 - \frac{\partial\,(\bar{\rho}\,\bar{\varepsilon})}{\partial\,y}\,\xi_2 - \frac{\partial\,(\bar{\rho}\,\bar{\varepsilon})}{\partial\,z}\,\xi_3 + \ldots\ldots$$

Con ello se puede calcular $\rho\,\varepsilon\,\xi$, resultando en la hipótesis de la correlación de Gauss

$$T = (\overline{\rho\,\varepsilon} - \bar{\rho}\,\bar{\varepsilon})\,\bar{v} - \frac{\partial\,(\bar{\rho}\,\bar{\varepsilon})}{\partial\,x}\,\overline{\xi_1\,\zeta} - \frac{\partial\,(\bar{\rho}\,\bar{\varepsilon})}{\partial\,y}\,\overline{\xi_2\,\zeta} - \frac{\partial\,(\bar{\rho}\,\bar{\varepsilon})}{\partial\,z}\,\overline{\xi_3\,\zeta}.$$

Si $v_1\ v_2\ v_3$ son las componentes de la velocidad instantánea, a ellas corresponderían tres valores $\zeta_1\ \zeta_2\ \zeta_3$.

El tener $(\xi_1\ \xi_2\ \xi_3)$ y $(\zeta_1\ \zeta_2\ \zeta_3)$ la misma dirección, conduce a la condición de ser su momento nulo:

$$\xi_i \zeta_j = \xi_j \zeta_i \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

El vector $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$ así definido es tal que su componente, según el gradiente normal de las superficies $\varepsilon = \text{const}$, es el "camino en trance de mezcla de Prandtl.

Los componentes del tensor de transporte, según Ertel, son:

$$\eta_{ij} = \eta \ = \rho\, \overline{\zeta_i \xi_j}\,.$$

Llevados estos valores al de T, y con la hipótesis de que T no depende sino de las derivadas de ε, quedan las dos ecuaciones fundamentales. Si $x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,$

$$T_i = -\Sigma\ \eta_{ij} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}$$

$$(\overline{\rho\ \varepsilon} - \bar{\rho}\ \bar{\varepsilon})\, v_i = \Sigma\ \varepsilon\, \eta_{ij} \frac{\partial\, \text{l.}\, \rho}{\partial x_j}\,.$$

Con el tensor η_{ij} se define el elipsoide correspondiente.

El sistema de fórmulas que da las tres componentes de T asemeja mucho el de las fórmulas de conducción del calor en un medio anisotropo, T es el calor, ε la temperatura. El sistema se adapta a la propagación convectiva de una magnitud vectorial en un medio definido por un tensor.

El sistema de fórmulas que da las T conduce inmediatamente a las de difusión de ε; si $x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z$:

$$\rho\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_3} v_3\right) = \Sigma\,\Sigma\, \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\eta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\cdot$$

Las fórmulas de la resistencia por el transporte convectivo resultan de aplicar a las T las fórmulas del equilibrio cuando $\varepsilon = v$, es decir, cuando el elemento de transporte es la cantidad de movimiento, resultando

$$T_i = \Sigma\, \Sigma \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\eta_{jk} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right).$$

Las fórmulas así generalizadas, si en ellas $\frac{\partial \eta_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \eta_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \eta_{zz}}{\partial z} = 0$ y los valores de v_i dependen sólo de z, se reducen a

$$\eta_{zz} \frac{\partial^2 v_i}{\partial z^2},$$

que es la resistencia deducida por vorticidad, según las ideas de Taylor. Si en ellas se supone sólo $\frac{\partial \eta_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \eta_{yz}}{\partial y} = 0$, se reducen a

$$R_i = \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta_{zz} \frac{\partial v_i}{\partial z}\right),$$

de acuerdo con la generalización de Prandtl.

Otra consecuencia interesante se puede sacar de las otras tres ecuaciones de Ertel:

Para el caso de flujo horizontal, la última da, por ser $v_z = 0$,

$$\eta_{zx} \frac{\partial\, l \cdot \rho}{\partial x} + \eta_{zy} \frac{\partial\, l \cdot \rho}{\partial y} + \eta_{zz} \frac{\partial\, l \cdot \rho}{\partial z} = 0,$$

Con $p = RT\rho$, $\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho$, se deduce

$$\frac{\partial\, l \cdot \rho}{\partial z} = -\frac{1}{T}\left(\frac{g}{R} + \frac{\partial T}{\partial z}\right),$$

o sea el coeficiente de transporte η_{zz} es inversamente proporcional a $\frac{g}{R} + \frac{\partial T}{\partial z}$, o sea al gradiente de temperatura en una atmósfera homogénea $\frac{g}{R} = 0{,}034''$ C°/m más el gradiente vertical de la temperatura.

Madrid, enero de 1943.

INDICE

Páginas.

PRIMERA PARTE

Del arrastre de las aguas marinas por el viento.

SEGUNDA PARTE

De la virazón del viento según la altura y la corriente marina según la cota de sonda.

TERCERA PARTE

De las ecuaciones del movimiento de líquidos viscosos y de la capa límite en régimen laminar.

CUARTA PARTE

Del régimen turbulento.