

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DISCURSO INAUGURAL

DEL AÑO ACADÉMICO 1966-1967

LEÍDO EN LA SESIÓN CELEBRADA EL DÍA 16 DE NOVIEMBRE DE 1966

POR EL ACADÉMICO NUMERARIO

RVDO. P. ALBERTO DOU MASDEXEXÁS, S. J.



M A D R I D
DOMICILIO DE LA ACADEMIA
VALVERDE, 22. — TELEFONO 221-25-20
1 9 6 6

Depósito Legal M. 16 816.-1966

TALLERES GRÁFICOS VDA. DE C. BERNEJO.—J. GARCÍA MORATO, 122.—TELÉF. 233-06-19.— MADRID

LA VERDAD EN LA MATEMATICA AXIOMATICA

La presente investigación acerca de la noción de verdad en la matemática axiomática o formalista se divide en cinco secciones. En la primera introducimos la definición de sistema formal y en particular de teoría formal de primer orden que sirve de fundamento a toda la matemática axiomática. En la segunda describimos la noción de verdad que nos va a guiar en nuestro estudio. En la tercera tratamos de la verdad científica y de la puramente formal que se obtiene al introducir un modelo. En la cuarta, que consideramos la parte principal y sin duda la más discutible de esta investigación, ensayamos descubrir cuál es el fundamento de la verdad en la matemática axiomática. Finalmente, en la quinta y última sección hacemos unas consideraciones sobre la dinámica interna y sobre la historicidad de la matemática por la estrecha relación que guardan con la anteriormente discutida noción de verdad.

Deseo agradecer a los PP. F. Ríaza, S. J. y J. M. Carerras, S. J. que leyeron atentamente el manuscrito y me hicieran interesantes observaciones, que he tenido en cuenta en la redacción definitiva.

§ 1.—LA MATEMÁTICA AXIOMÁTICA.

Vamos a dar una idea muy somera de lo que se entiende por matemática axiomática. Es la matemática actual, tal como está en los textos y se enseña en las Universidades y la practican los

profesionales, pero entendiendo que su fundamento lo constituye un sistema formal, y que por lo tanto los teoremas matemáticos son reducibles a teoremas formales.

La comprensión de lo que es metodológicamente la matemática axiomática se reduce pues, por lo menos por lo que respecta al presente estudio, a la comprensión de lo que es un sistema formal. En general un sistema formal es un conjunto determinado de objetos que llamaremos *símbolos*, que pueden combinarse atendiéndose a reglas fijas en orden a formar sucesiones finitas de símbolos que llamaremos *expresiones*. Entre estas expresiones hay una clase particular de las mismas, que llamaremos *fórmulas bien hechas* (*f b h s*). Observemos de paso, antes de terminar la descripción del sistema formal, que los símbolos del sistema formal pueden interpretarse como símbolos matemáticos o como letras de un lenguaje; y las *f b h s* pueden interpretarse como fórmulas matemáticas o como proposiciones gramaticalmente bien hechas, de modo que en ambas interpretaciones se obtiene algo que tiene sentido y ha de ser por tanto, en cierta manera, necesariamente verdadero o falso. Para terminar la descripción de un sistema formal nos queda especificar una subclase de la clase de *f b h s*, cuyos elementos son *f b h s* a las que llamaremos *axiomas*; y finalmente especificar unas *reglas de inferencia* que permiten inferir de una manera precisa una *f b h* a partir de otra u otras.

Según lo que hemos dicho en el párrafo primero, lo más interesante, desde el punto de vista matemático, de un sistema formal son los teoremas formales. Los teoremas formales son una subclase de la clase de *f b h s*. Por definición una *f b h* es un *teorema formal* si es un axioma o si es una *f b h* que pueda ser inferida por aplicación de las reglas de inferencia a partir de otros teoremas formales obtenidos previamente.

Una *demostración formal* de un teorema formal es precisamente una sucesión finita de *f b h s*, la primera de las cuales es un axioma; y cada una de las siguientes o es un axioma o se infiere por aplicación de las reglas de inferencia a partir de *f b h s* que le preceden; y cuya última *f b h* es precisamente el teorema

formal, del cual esta sucesión de *f b h s* es una demostración formal.

De todos los sistemas formales imaginables hay dos que son especialmente importantes para la fundamentación de la matemática, a saber: la teoría formal de números para axiomatizar la aritmética y la teoría formal de conjuntos para axiomatizar el análisis matemático. Ambas teorías formales, la de números y la de conjuntos, son teorías formales de primer orden.

He aquí una descripción, que aunque muy somera e incompleta es suficiente para nuestro estudio, de las características más importantes de lo que es una teoría formal de primer orden (1). Es un sistema formal en el que hay los siguientes símbolos: infinitas variables individuales $x_1, x_2, \dots$; posibles constantes; los signos de puntuación de abrir y cerrar paréntesis; posibles letras o signos funcionales f_j^n ; una o más letras o signos de predicación A_j^n ; y finalmente los conectivos lógicos de implicación ($\supset$) y de negación ($\sim$), y el cuantificador universal $\forall$. Los otros conectivos lógicos de copulación ($\wedge$) y disyunción ($\vee$) y el cuantificador existencial $\exists$ pueden definirse mediante los anteriores.

Hay unas expresiones que se llaman términos, t_n , que son las variables individuales y las constantes; y las que se obtienen al aplicar letras funcionales a términos obtenidos previamente, así $f_j^n(t_1, \dots, t_n)$. La aplicación de una letra de predicación a términos da una *f b h* atómica, así $A_j^n(t_1, \dots, t_n)$. Además de las *f b h s* atómicas son también *f b h s* las expresiones de la forma

$$\sim \mathcal{A}, \mathcal{A} \supset \mathcal{B}, (\forall z) \mathcal{A},$$

donde $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son *f b h s* y z es una variable individual. Y no hay más *f b h s* que las mencionadas.

Lo más importante para nuestro presente trabajo son los axiomas y las reglas de inferencia.

Los axiomas de una teoría formal de primer orden se dividen en lógicos y propios. Los *axiomas lógicos* son cinco, a saber:

1. $\mathcal{A} \supset (\mathcal{B} \supset \mathcal{A}).$
2. $(\mathcal{A} \supset (\mathcal{B} \supset \mathcal{C})) \supset ((\mathcal{A} \supset \mathcal{B}) \supset (\mathcal{A} \supset \mathcal{C})).$
3. $(\sim \mathcal{B} \supset \sim \mathcal{A}) \supset ((\sim \mathcal{B} \supset \mathcal{A}) \supset \mathcal{B}).$
4. $(\forall x_i) \mathcal{A}(x_i) \supset \mathcal{A}(t).$
5. $(\forall x_i) (\mathcal{A} \supset \mathcal{B}) \supset (\mathcal{A} \supset (\forall x_i) \mathcal{B}).$

En estos axiomas se supone que $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son *f b h s* cualesquiera y que t es un término cualquiera. En los dos últimos axiomas hay que hacer ciertas salvedades que omitimos explicar.

Los *axiomas propios* especifican las diversas teorías formales de primer orden. En particular si no hay ningún axioma propio entonces la teoría se llama *cálculo de predicados* (de primer orden).

Las *reglas de inferencia* de una teoría formal de primer orden son dos: La *regla del «modus ponens»*, que permite inferir que la *f b h* $\mathcal{B}$ es un teorema formal cuando se ha demostrado previamente que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$ son teoremas formales; y la *regla de generalización*, que permite inferir que $(\forall x_i) \mathcal{A}$ es un teorema formal cuando se ha demostrado previamente que $\mathcal{A}$ es un teorema formal. Con esto hemos concluido la definición de una teoría formal de primer orden.

La teoría formal de números es una teoría formal de primer orden con una única constante que se llama cero; con tres letras funcionales que se llaman «siguiente», «suma», «producto»; con una única letra de predicación que se llama «igualdad»; y con nueve axiomas propios, ocho de los cuales sirven para definir implícitamente las funciones de «siguiente», «suma», «producto» y la predicación de «igualdad», y el noveno, el más importante, axiomatiza el principio de inducción completa así:

$$9. \mathcal{A}(0) \supset ((\forall z) (\mathcal{A}(z) \supset \mathcal{A}(z')) \supset (\forall z) \mathcal{A}(z)).$$

La teoría formal de conjuntos es una teoría formal de primer orden que no tiene ninguna constante ni letra funcional y tiene una sola letra de predicación de «pertenencia» (o de «ser miembro de»), y tiene numerosos axiomas, por ejemplo trece o catorce en la teoría de Neumann-Bernays-Gödel.

Observemos para concluir que hay que distinguir entre *f b h s* y teoremas formales y sus demostraciones, que constituyen el lenguaje formal, y el lenguaje matemático clásico que no es formal, sino que es más bien tradicional e intuitivo y no excluye métodos que no sean finitarios, por ejemplo mediante reducción al absurdo. Finalmente hay que distinguir el lenguaje formal matemático del metalenguaje o lenguaje de la metamatemática que empleamos cuando hablamos sobre el sistema formal, mediante métodos exclusivamente finitarios.

§ 2.—LA NOCIÓN DE VERDAD.

Abordemos ahora la cuestión de si cabe hablar de verdad en relación con la matemática axiomática. Parece se presentan inmediatamente dos cuestiones. Primera si hay proposiciones de las que pueda decirse que sean verdaderas ; y segundo precisar el sentido de esta verdad.

Además parece conviene, por lo menos para mayor claridad, distinguir los tres niveles que ya hemos mencionado: el nivel matemático clásico, impreciso, definido por referencias a la historia de los matemáticos que han dejado huella ; el nivel matemático axiomático que quiere ser equivalente al anterior, pero definido formalmente como hemos explicado en la sección anterior ; y el nivel metamatemático, que es una matemática finitaria acerca de la matemática axiomática. Dejamos fuera de nuestra consideración otros tipos de matemática, como por ejemplo la intuicionista.

La noción de verdad que queremos considerar aquí, y que nos parece sustancialmente pertinente al caso, connota necesariamente una adecuación o isomorfía entre dos realidades o espacios. Así, por ejemplo, una verdad metamatemática implica una adecuación o isomorfía entre la proposición metamatemática de la que se predica que es verdadera (y que se llama un *teorema*) y una cierta realidad en el sistema axiomático que es el objeto material de dicha metamatemática. En este caso resulta especialmente claro cuáles son las dos realidades o espacios o niveles implicados ; en cambio

quizá no sea tan fácil determinar el objeto formal de la metamatemática, es decir precisar cuál es el método o medio lógico o argumentos en virtud de los cuales se consigue tal verdad; es decir quizá no sea fácil precisar lo que se entiende por «finitario», cuando se dice que la metamatemática ha de ser finitaria. Anotemos de paso que una buena definición de matemática finitaria podría ser definirla como matemática intuicionista en el sentido de Brouwer, Heyting, etc. (2).

En la matemática clásica o en el logicismo de Frege y Russell resulta más difícil precisar cuáles sean las dos realidades implicadas por el enunciado y demostración de un teorema. Observemos únicamente que hasta el siglo XIX exclusive, con la única posible excepción de la interpretación dada por el primer Platón, la segunda realidad a la que se tiene que adecuar el teorema matemático es el mundo exterior, independiente de nuestra mente; los conceptos de los objetos matemáticos, son conceptos mentales extraídos o abstraídos de la realidad mundana.

Pero nuestro interés en esta comunicación se centra sobre la verdad en la matemática axiomática, y excepto unas consideraciones generales que haremos al final acerca de la dinámica de la matemática actual, nos vamos a limitar ahora a intentar precisar cuál pueda ser el sentido de la noción de verdad en la matemática axiomática.

Tenemos, pues, que la verdad se predica de una proposición, cuyos constituyentes son un producto de nuestra mente y no tienen más realidad que la que se deriva de esta generación, lo que deja un gran margen de arbitrariedad. Por otra parte la proposición de la que se predica la verdad tiene un contenido intencional que es referido a una segunda realidad o espacio, la cual puede tomar formas muy diversas. Esta segunda realidad puede que sea también exclusivamente mental como la primera realidad y que sea también arbitraria o convencional en gran medida. Observemos que si esta segunda realidad la podemos introducir con el mismo grado de arbitrariedad con el que generamos proposiciones, entonces la verdad que resulta será puramente formal, un

puro concepto de matemática convencional y será incapaz de darnos a conocer algo que no sea meramente formal.

En esta comunicación estamos interesados en la verdad que pueda haber en la matemática axiomática, y que no sea una verdad puramente formal. Queremos estudiar si es posible que, al decir de una proposición de la matemática formal que es verdadera, ello nos dé a conocer algo de una realidad que no sea meramente la misma realidad matemática.

Si ello es posible, es claro que la segunda realidad o espacio al que se refiera en alguna manera la proposición verdadera no podrá ser simultáneamente puramente mental y completamente arbitrario. En particular la noción de verdad parece más plena y en ella estamos especialmente interesados si se refiere a un ser cuya realidad es «a priori» o sea anterior a nuestro conocimiento e independiente de nuestra mente y completamente fuera del alcance de nuestra libre voluntad.

§ 3.—VERDAD PURAMENTE FORMAL.

La primera realidad o espacio es, en el caso de la matemática axiomática, el sistema formal. Y las proposiciones de las que en primer lugar cabe pensar que quepa que puedan ser verdaderas en algún sentido son las *fbhs* (fórmulas bien hechas). En un sistema formal se puede decir que todo carece de sentido, y ello adrede para que no pueda ser la intuición lo que nos guíe, sino exclusivamente la lógica. Pero dentro de ese sinsentido general es obvio que las *fbhs* tienen un contenido, determinación o estructura más rica que las simples expresiones. Más aún, vamos a considerar exclusivamente proposiciones que no solamente sean *fbhs*, sino que sean teoremas formales. Limitamos también los sistemas formales a las teorías formales de primer orden, que ya hemos tratado y que incluyen las distintas teorías formales de cálculo de predicados, de números (Aritmética) y de conjuntos.

A. Tarski (3) mediante la introducción de una teoría de modelos ha precisado una semántica de los sistemas formales, donde

cabe hablar con toda propiedad de *validez lógica*, que es una noción muy afín a cierta noción de verdad. Ahora bien, en este caso los modelos que forman la segunda realidad o espacio están también formalizados, de modo que la misma noción de verdad y de *validez lógica* resulta también formalizada.

Describamos en líneas muy generales lo que es un modelo de una teoría formal de primer orden K . Para ello hemos de definir primero lo que es una interpretación de una teoría formal de primer orden K . Una *interpretación* J consiste en un conjunto no vacío D , o *dominio de la interpretación*, en el que, como en un molde, se introduce una imagen o réplica de la teoría formal K de la manera siguiente: Las variables individuales $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ de la teoría K se consideran como variables arbitrarias que varían en el dominio D . A toda constante individual de K la interpretación J le hace corresponder un elemento determinado fijo o constante de D . A toda letra de predicación o predicado n -ario de K la interpretación J le hace corresponder una relación n -aria en D y a toda letra funcional o función de n argumentos en K le hace corresponder una función con dominio D^n y con rango D . Los símbolos lógicos se interpretan en el sentido obvio del cálculo proposicional y análogamente los cuantificadores.

Entonces toda *f b h* $\mathcal{A}$ de K se transforma para cada conjunto de valores de las variables individuales libres que contenga $\mathcal{A}$ en una proposición en la interpretación que en virtud de la estructura o molde impuesto en D tiene un determinado sentido y consiguientemente es verdadera o falsa. En particular toda *f b h* cerrada, es decir que no contenga ninguna variable individual libre, tiene que ser necesariamente verdadera o falsa en la interpretación J . A una *f b h* que contenga n variables individuales, $A(x_1, \dots, x_n)$ le corresponde en la interpretación J una relación n -aria en el dominio D y se dice que A es verdadera en la interpretación J cuando sea verdadera para cada una de las combinaciones de las n variables arbitrarias en D correspondientes a las variables individuales formales; o lo que es lo mismo, se dice que A es verdadera en la interpretación J cuando lo sea la *f b h* cerrada $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n A(x_1, \dots, x_n)$.

Se dice que la interpretación J es un modelo de la teoría formal K , si todos los axiomas de K son verdaderos en la interpretación J .

Se dice que una $f b h$ es lógicamente válida (considerada en el contexto de la teoría K) cuando es verdadera en cualquier modelo que se pueda dar de K ; y que una $f b h$ es lógicamente válida en el contexto de un cálculo de predicados cuando es verdadera en cualquier interpretación. Obsérvese que dada una teoría K (consistente) el número de posibles interpretaciones (modelos) de K es mayor que cualquier número cardinal previamente dado.

Para juzgar del valor epistemológico de esta noción tarskiana de verdad en la interpretación y de validez lógica en la teoría formal hemos de distinguir dos casos. Consideremos en primer lugar el caso en que el dominio D y su estructura (constantes, funciones y relaciones) sean introducidos materialmente, es decir con una existencia que no se derive exclusivamente de una postulación axiomática «ad hoc», sino que probablemente la existencia de D y su estructura se supone independiente de nuestra mente y su introducción se justifica por un tipo de *evidencia intuitiva*. Entonces, en esta interpretación, D representa un conjunto natural, o sea sacado del mundo exterior y K se convierte en una teoría científica y la noción de verdad es la de verdad científica propia de las ciencias positivas, formalizadas y aplicadas, y el análisis de esta noción de verdad es ajeno al presente estudio. Me parece que estamos en este mismo caso cuando K es la teoría formal de números, D es el conjunto de los números naturales y la interpretación es la estandarizada y *se admite* por razones intuitivas de matemática clásica o logicista que esta interpretación estandarizada es en efecto un modelo de K .

Consideremos ahora el caso en que el dominio D y su estructura se introduzcan mediante axiomas o postulados «ad hoc». Entonces la interpretación J es también completamente formal y, como ya hemos indicado antes, parece que no puede darnos a conocer nada que no sea meramente formal. Ello no excluye naturalmente que tal interpretación pueda tener un enorme interés científico

dentro de la matemática. En este sentido hay que entender la verdad de un teorema en una teoría matemática de grupos cuando dicha teoría se supone fundamentada en una teoría formal de primer orden.

Este es también el caso de la interpretación estandarizada de la teoría formal de números, cuando no se asume que sea un modelo. Esta interpretación estandarizada y sin suponer que sea un modelo tiene una importancia científica extraordinaria como elemento de la demostración de los teoremas metamatemáticos de Gödel acerca de la incompleción de la teoría formal de números y de la indemostrabilidad formal de su consistencia. Ahora bien, precisamente porque todo ello constituye una especulación puramente matemática, por sí sola, es decir si se excluye todo dato empírico, es absolutamente incompetente para decirnos directamente lo más mínimo acerca de la Naturaleza o acerca de sus leyes.

§ 4.—EL CONVENCIONALISMO.

Es obvio, me parece, que la realidad mundana no puede servir de segunda realidad o segundo espacio para fundamentar la noción de verdad en la matemática axiomática. La edificación de la matemática axiomática no necesita para nada del mundo exterior desde el punto de vista epistemológico. Desde el punto de vista psicológico necesita muy poco, por lo menos en teoría: solamente, a lo más, percepciones indeterminadas que permitan intuir la binidad o unidad del dos, la formación del siguiente y de límite para llegar a cualquier número ordinal y para intuir las operaciones de suma y producto de números naturales. Para la introducción de predicados y axiomas no parece que se necesite el mundo exterior en absoluto.

Parece, pues, que llegamos necesariamente a un convencionalismo como última fundamentación de la matemática axiomática. La matemática sería entonces un puro juego sin sentido, es decir sin sentido que no fuera meramente formal, y cuyas reglas serían exclusivamente convencionales. Esta conclusión tan radical, explícita o implícitamente admitida por muchos matemáticos,

pone inmediatamente en guardia al filósofo por su parecido con la posición radicalmente escéptica, y pone también en guardia a otros muchos matemáticos como R. Courant, que exclama: «Una amenaza seria para la vida de la ciencia aparece contenida en la afirmación de que la matemática no es más que un sistema de conclusiones derivadas de definiciones y postulados que deben ser compatibles, pero que, por lo demás, pueden ser creación de la libre voluntad del matemático. Si esta descripción fuera exacta las matemáticas no podrían interesar a ninguna persona inteligente. Sería un juego con definiciones, reglas y silogismos, sin meta ni motivo alguno» (4).

Parece que el convencionalismo radical no puede ser sostenido, sino como tesis negativa, pues no parece que se pueda dar del mismo un argumento positivo, por aquello de que no se querrá llegar a decir que el convencionalismo absoluto es absolutamente convencional.

Con todo, aunque la matemática no fuera más que un juego, habría que reconocer que es un juego muy difícil, apasionante, y que el mundo juega una de sus partidas, pues sólo por la matemática las ciencias positivas han llegado a darnos la mejor interpretación del mundo, que nos ha llevado al humanismo científico de la era presente.

Vamos a adelantar la conclusión a que hemos llegado y que luego justificaremos por vía de ensayo. La matemática axiomática no es absolutamente convencional. Por otra parte me parece que se puede conceder sustancialmente que las matemáticas son en efecto un juego. Pero un juego no es algo que sea absolutamente convencional: todo juego tiene algo absoluto, a saber que es un juego, y que en su desarrollo hay que guardar las reglas del juego, pues no sería juego el que tuviera como regla que no hace falta guardar las reglas del juego.

En el hecho del progreso de las matemáticas y del de las ciencias y técnicas se ha creído ver una incompatibilidad con la absoluta convencionalidad de las matemáticas (5). Pero por una parte el progreso de la matemática misma no parece incompatible con

la tesis convencionalista ; y por otra parte el progreso científico y técnico parece que arguye la imposibilidad de un convencionalismo en las ciencias positivas, pero no se ve cómo del no convencionalismo de éstas se pueda pasar al de la matemática misma.

Para encontrar una segunda realidad o espacio que sirva para fundamentar una noción de verdad en la matemática axiomática, que no sea la convencionalista libre voluntad del matemático, empezamos acudiendo al clásico argumento de Kant, en el que después de haber establecido la aprioridad de la representación del espacio, expone la discusión (*Erörterung*) trascendental de la noción del espacio. He aquí el texto que hace al caso:

«Entiendo por una discusión trascendental la explicación de una noción como un principio, del cual se puede intuir "a priori" la posibilidad de otros conocimientos sintéticos. Para este fin se requieren: 1) que efectivamente tales conocimientos fluyan de la noción dada, y 2) que tales conocimientos sean posibles únicamente mediante la presuposición de un tipo dado de explicación de esta noción.

La Geometría es una ciencia que determina las propiedades del espacio sintéticamente y no obstante "a priori". Entonces, ¿cuál debe ser la representación del espacio, para que tal conocimiento de él sea posible? Tiene que ser originalmente una intuición (*Anschauung*) ; porque de una mera noción no pueden tirarse proposiciones que vayan más allá de la noción, lo cual sucede precisamente en la Geometría. Pero esta intuición tiene que ser hallada en nosotros "a priori", esto es anterior a toda percepción de un objeto, y por lo tanto tiene que ser una intuición pura, no empírica. Porque las proposiciones geométricas son totalmente apodícticas, esto es, ligadas a la conciencia de su necesidad, por ejemplo el espacio tiene sólo tres dimensiones ; tales proposiciones, empero, no pueden ser empíricas o juicios de experiencia, ni de ellos pueden ser deducidas.

Ahora bien, ¿cómo puede encontrarse en el ánimo una intuición (*Anschauung*) exterior, que preceda al objeto mismo y en la cual la noción del último pueda ser determinada "a priori"? Cla-

ramente no de otra manera, que en tanto ella tiene su asiento sólo en el sujeto, como condición formal del mismo de ser estimulado por los objetos y por ello llegar a ser una representación, esto es intuición del mismo, por consiguiente solamente como forma del sentido exterior y no de otra manera.

Por consiguiente, únicamente nuestra explicación hace comprensible la posibilidad de la Geometría como conocimiento sintético "a priori"» (6).

En esta discusión falla actualmente el presupuesto fundamental, a saber que la Geometría sea «a priori», al menos en cuanto sea distinta de la Aritmética. Las geometrías no euclídeas hacen patente que la geometría euclídea no podría ser la única geometría «a priori», y sabemos también ahora, sobre todo gracias a Descartes, que la geometría puede reducirse al álgebra, que consideramos más fundamental. Así el ejemplo que se cita, la trimensionalidad del espacio, es un conocimiento sensible que será pertinente para una geometría como parte de la física, pero parece que nada tiene que ver con la geometría axiomática como la entendemos hoy día. Por otra parte, si el argumento de Kant se quisiera aplicar a la geometría física actual, tampoco sería válido, pues esta geometría física ya no es apodíctica en el mismo grado que lo es la matemática.

Si hay un fundamento real de la matemática que sea incompatible con el convencionalismo, me parece ha de ser una realidad trascendental análoga a la introducida por Kant. Los matemáticos intuicionistas son ciertamente anticonvencionalistas y derivan su intuicionismo de Kant. He aquí un texto de L. E. J. Brouwer :

«Por muy débil que pareciera la posición del intuicionismo después de este período (siglo XIX) de desarrollo matemático, se ha recobrado mediante el abandono de la aprioridad kantiana del espacio, pero adhiriéndose más resueltamente a la aprioridad del tiempo. Este neointuicionismo considera el desmembramiento de los momentos vitales en partes cualitativamente distintas —que sólo pueden ser reunidas si han sido previamente separadas por el tiempo— como el hecho primigenio del entendimiento huma-

no; y considera el despojar este desmembramiento de todo contenido sentimental en orden a intuir la simple unidad de dos como el hecho primigenio del pensar científico.»

«De este modo la aprioridad del tiempo no solamente determina las propiedades de la aritmética como juicios sintéticos «a priori», pero incluso las de la geometría, y no sólo de la elemental plana y tridimensional, sino incluso de las no euclídeas y de la n -dimensional» (7).

En este texto se señala una aprioridad del sujeto, la intuición primigenia de la binidad, la cual no parece que pueda ser integrada en una doctrina absolutamente convencionalista. A esta intuición hay que añadir las intuiciones de «siguiente» y de «paso al límite» para la constitución de la noción de ordinal, y las que sean primigeniamente necesarias para la posibilidad de las operaciones de suma y producto. Obsérvese que aquí lo importante no es el aspecto psicológico de estas intuiciones, ni la apelación a un mundo exterior para la posibilidad de las mismas, sino que lo decisivo sería la aprioridad o condición formal que implica en el sujeto en el sentido de una discusión trascendental kantiana. Con todo no parece evidente que esta aprioridad invalide la tesis convencionalista. Por una parte, así como el espacio como forma de la sensibilidad nada tiene que ver con la geometría axiomática, quizá pueda decirse también que el tiempo tampoco tiene nada que ver epistemológicamente con la aritmética axiomática. Las intuiciones primigenias insoslayables que hemos mencionado quizás puedan considerarse como supuestos previos asimilables al supuesto mismo de un matemático convencionalista, y que por tanto deben ser considerados como preliminares exteriores y no como constituyentes de la matemática axiomática.

Vamos ahora a considerar más de cerca la lógica matemática y en particular las teorías formales de primer orden que ciertamente están necesariamente implicadas en la matemática axiomática. Intentaremos hacer, esquemáticamente y como ensayo, una fenomenología de los mismos y en especial del contenido (fenomenológico) de su aprioridad trascendental.

Antes de seguir adelante, el siguiente texto de E. Husserl hace al caso :

«Pero al formular esta cuestión (relativa a los problemas de la explicación racionalmente teórica de la lógica formal), y por cierto únicamente para enunciados en tanto son pensados como determinados exclusivamente mediante puras formas, permanecemos en la lógica formal y en las disciplinas paralelas mencionadas más arriba, que están edificadas esencialmente en las correspondientes doctrinas de la forma, como escalones inferiores. *En las formas sintéticas* —que como tales presuponen claramente de muchas maneras tesis o bien enunciados de la correspondiente categoría de enunciados— *yacen condiciones "a priori" de su posible validez, las cuales se hacen patentes en las leyes sobre las esencias, de las disciplinas en cuestión.*

Especialmente yacen en las puras formas de la síntesis *predicativa* (analítica) condiciones "a priori" de la posibilidad de certeza racional dóxica, dicho noemáticamente, *de posible verdad*» (8). En este texto hay que tener en cuenta el significado general de las palabras «enunciado» y «síntesis», y el peculiar significado de «forma» y «a priori», de acuerdo con la terminología husserliana.

Como parece desprenderse de nuestro análisis anterior del texto de Kant y luego del de Brouwer, el *apriori* trascendental, si existe, no es algo que se nos imponga con evidencia y que entre voluminosamente en la matemática axiomática. Con todo, si confirmados por este texto de Husserl examinamos con mayor detalle la verdad puramente formal en el sentido de Tarski, encontramos el siguiente dato importante. En el modelo formal de una teoría formal de primer orden todo es arbitrario, el dominio de interpretación, sus constantes, sus funciones y sus relaciones, con una excepción : los axiomas lógicos (y las dos reglas de inferencia) han de ser interpretados en el «sentido obvio». Y obsérvese que la existencia de este sentido obvio es evidente. Parece, pues, que estamos ante una forma primaria del pensar humano.

Ahora bien, si todo fuera absolutamente arbitrario no parece que tuviera plena justificación hablar de un sentido obvio. A esta extrema regularidad o mejor notable singularidad que presentan

los axiomas de un cálculo de predicados hay que añadir otra singularidad a mi parecer todavía más notable, aunque quizá no sea más que una generalización de la singularidad primera. Me refiero al hecho mismo, eidético y no psicológico, de intuir un axioma (o una consecuencia) o lo que es equivalente, de intuir una relación, lo cual a su vez parece que en algún modo se identifica con la intuición de una unidad global e inmediata en una cierta pluralidad. Esta intuición por una parte parece absolutamente primigenia y por otra tiene que saltar como una chispa en el sujeto; en sí misma no se puede enseñar, sólo despertar o excitar o estimular.

Además esta intuición es necesaria para el planteamiento y desarrollo de toda aritmética axiomática o de toda teoría de conjuntos; y no sólo inicialmente, sino también siempre que quiera uno nuevamente prolongarlos, lo cual es sucesivamente posible infinitas veces según demuestra el teorema de incompleción de Gödel. Por otra parte esta intuición primigenia y la singularidad que presentan los axiomas lógicos parece que son también suficientes para la edificación de una matemática axiomática. Por tanto, a estos hechos primigenios se puede aplicar la discusión trascendental de Kant y nos encontramos efectivamente con un condicionamiento «a priori», incompatible con un convencionalismo absoluto. La extrema necesidad y universalidad que presentan los teoremas matemáticos axiomáticos, comparados con las leyes físicas, no es, entonces, más que una expresión del hecho de que en tales enunciados intervienen sólo las condiciones «a priori» del sujeto, sin empiria alguna (salvo, quizá, las vagas vivencias que hemos mencionado al principio de este § 4).

Observemos que los axiomas lógicos (y las reglas de inferencia mencionadas) y análogamente la intuición primigenia de otros axiomas no son ni la única formulación posible del *apriori* trascendental, ni son una formulación absoluta del mismo. Es obvio que los axiomas lógicos pueden ser formulados de diversos modos, pero ello no obsta a la existencia de un invariante que parece constituir un auténtico *apriori*.

Tampoco pensamos que este *apriori* lo conozcamos con certeza absoluta ; es decir, es muy posible que los axiomas lógicos no constituyan más que una aproximación del verdadero *apriori* de nuestro esquema trascendental. De hecho podemos crear sistemas formales con axiomas totalmente distintos de los axiomas lógicos. Con todo, dos teoremas que pertenezcan a dos sistemas distintos no pueden ser contradictorios, aunque su formulación escrita sí puede ser contradictoria al considerarlos como pertenecientes a un mismo sistema. Así por ejemplo, los dos teoremas: «la suma de los ángulos de un triángulo es mayor que dos rectos» en geometría elemental elíptica y «la suma de los ángulos de un triángulo no es mayor que dos rectos» en una geometría elemental hiperbólica, son dos teoremas distintos, pero no contradictorios. Pero es claro que el hecho de que aproximemos el contenido de nuestro esquema trascendental implica que hay un *apriori* en cierto modo absoluto. Quizá para conocer cuál sea el verdadero contenido de ese *apriori* apelemos al éxito, o sea a un cierto pragmatismo ; pero aquí este éxito no sería, como en el pragmatismo, la norma constitutiva de verdad, sino solamente un criterio lógico para conocer la verdadera norma que es el *apriori* trascendental.

Para concluir este § 4 consideremos el juego del ajedrez. Nos encontramos en primer lugar con una posición inicial y unas reglas de juego que corresponden a la formulación de un sistema formal con sus reglas de inferencia ; en segundo lugar durante el desarrollo de la partida hay que intuir las jugadas en cuanto tales, es decir en cuanto se guardan las reglas y en cuanto prolongan el juego ; finalmente es posible que una determinada partida o jugada sea aplicable por ejemplo a un modelo tomado de las ciencias militares, aunque esto es ajeno al juego mismo. Una jugada cualquiera, por ejemplo «AXP» (álfil toma peón) de las blancas, revela algo de cada uno de los aspectos que acabamos de mencionar y análogamente parece que lo mismo puede decirse de todo teorema de matemática axiomática respecto del *apriori* trascendental.

Si en vez de examinar un determinado juego o un determinado sistema formal consideramos la clase de todos los sistemas

formales, o sea el contenido global de la matemática axiomática. entonces desaparece la noción de planteamiento inicial y lo único que nos queda es el ejercicio continuado de las condiciones «a priori» o condiciones formales del esquema trascendental. La matemática axiomática parece que se ofrece, entonces, como el medio único para conocer la estructura de este esquema trascendental en su aspecto racional. Si consideramos el caso límite de un juego sin regla alguna que limitase la absoluta arbitrariedad de su desarrollo, entonces ese juego podría corresponder a una teoría formal simplemente inconsistente en la que todas las *f b h s* fueran teoremas. Entonces ese juego o teoría formal podrían ser completamente convencionales y serían incapaces de revelarnos nada del *apriori* trascendental.

Se plantea también el problema de la coincidencia de las condiciones «a priori» en distintos sujetos humanos, el cual es sin duda un aspecto importante del binomio realismo-idealismo. Pero esto se aparta demasiado de nuestro tema.

§ 5.—DINÁMICA ACTUAL DE LA MATEMÁTICA.

En la historia de la matemática podemos distinguir por razón de la idea que los matemáticos tienen de su ciencia por lo menos las dos etapas fundamentales siguientes: Primera, la del nacimiento de la matemática como ciencia racional en la cultura griega; en este período hay dos interpretaciones del método matemático: la de Platón de tipo intuicionista que es también, al parecer, la de los grandes matemáticos griegos; y la de Aristóteles, que perdurará durante la filosofía medieval hasta Descartes inclusive, basada en la cantidad o extensión de los cuerpos y en un cierto tipo de abstracción de esencias de las cosas. La idea que el matemático Kant tiene de su ciencia, a pesar de su análisis trascendental, está mucho más cerca, me parece, de la que acabamos de mencionar que de la siguiente, que empieza a gestarse en el siglo XIX.

La noción de matemática que tenemos hoy día, en cuanto fundamentalmente distinta de la que tuvieron los griegos, tiene su origen en el siglo XIX con el descubrimiento de las geometrías ele-

mentales no euclídeas y de las rímanianas, la logificación de la matemática, la creación de los sistemas axiomáticos formales, la independización de la matemática del mundo físico, y el análisis del papel de la intuición.

Especialmente en nuestro siglo la idea de la matemática no sólo ha evolucionado rápidamente, sino que incluso se ha ramificado en diversos tipos. Ello contribuye a hacer más patente una cierta dinamicidad de la matemática. Podemos distinguir una dinámica interna que tiene lugar dentro de la matemática y una dinámica externa, mucho más interesante, de la interpretación o idea de la matemática a lo largo de la historia.

Los grandes matemáticos de todos los tiempos han sido plenamente conscientes de la dinámica interna de su época, le han prestado siempre gran atención, han sido influenciados por ella y sobre todo han sido los principales promotores de esta dinámica. La matemática considerada en sí misma se desarrolla así de una manera que recuerda el desarrollo inconsciente de un ser vivo. Una pasión profunda, una ciega necesidad interna, arrastra al matemático hacia nuevos derroteros. Para la consecución de un avance importante, un salto como la creación del cálculo infinitesimal o la creación de la teoría de la relatividad, hace falta por un lado una mente privilegiada que rompa la continuidad, y por otra parte parece que es también necesaria una cierta madurez de los tiempos que atestigüa a pesar de todo una profunda continuidad en el desarrollo.

Somos conscientes de la genialidad de Newton y de Leibniz, pero el hecho mismo de la aparición simultánea e independiente de dos descubridores del cálculo infinitesimal nos convence de que se había previamente producido una maduración suficiente de la matemática para que este salto se produjera con cierta espontaneidad. No parece que pueda tener otra explicación el considerable número de importantes teoremas que llevan dos nombres, porque fueron hallados simultánea e independientemente por dos matemáticos y a veces tres como el descubrimiento de la geometría elemental hiperbólica: Gauss, Bolyai y Lobatchevski. Incluso en el caso de Einstein nos parece que si él hubiera muerto antes de crear la relatividad no hubieran pasado muchos años sin que otro

lo hubiera hecho de un modo sustancialmente equivalente. Todo ello parece testimoniar el carácter vegetativo de la dinámica interna de la matemática, y confiere una cierta continuidad a su desarrollo.

Esta continuidad merece tanto más ser puesta de relieve, cuanto que para el profano pasa desapercibida. En efecto, la matemática, y más aún la matemática axiomática, se suele exponer como si su contenido fuera absolutamente independiente de una tradición o del recuerdo de la época precedente; y en general ese modo sistemático atemporal será el más conveniente si se quiere aprovechar bien el tiempo y se pretende una formación (no demasiado profunda) puramente técnica o científica. Obsérvese que una exposición absolutamente atemporal, es decir que no traicione de alguna manera la dinámica interna real de la matemática, parece que es imposible, aunque en general se pretenda que lo sea.

Si hacemos una breve consideración acerca de la dinámica interna de la matemática en el momento actual, me parece la podemos resumir en una palabra, a saber, la matemática se mueve hacia una mayor *unidad*. La matemática ha sido siempre una principalmente por razón de su método peculiar y de sus fundamentos; pero ello no ha sido obstáculo a una variedad de ramas con métodos más particulares propios, derivados de hipótesis que condicionan la diversidad de las ramas.

En los dos o tres últimos decenios se han puesto de manifiesto principalmente dos factores, me parece, que han contribuido poderosamente a dar una mayor unidad a la matemática, aunque es claro que esos factores tienen también sus raíces en el pasado y no sabemos hasta qué punto se prolongarán en el futuro.

a) La matemática se ha hecho más general y más compleja, y ello contribuye a una mayor unidad y a una cierta mayor concreción. Se han creado varias importantes teorías que por un proceso de generalización, perdiendo algo de profundidad, han conseguido reunir diferentes teorías dispersas; el fenómeno es patente y no vale la pena insistir. Es evidente que también se ha hecho más compleja. Las definiciones e hipótesis aumentan y se hacen mucho más precisas; ello permite acercarnos más al individuo, en una

posible interpretación natural, aunque la matemática sea sustancialmente una ciencia de conjuntos; la matemática se ha hecho, por razón de sus posibles interpretaciones, mucho más concreta. Aunque esta concreción no está en la línea de las esencias aristotélicas abstraídas de la realidad mundana, sino en la línea de una mayor determinación mediante relaciones. Porque la matemática al entrar en la segunda etapa, descrita hace poco, dejó de ser abstracta en cuanto que dejó de considerar esencias abstraídas de las cosas, y se convirtió en una ciencia de relaciones. La mayor complejidad de la matemática o mayor concreción de sus interpretaciones puede expresarse diciendo que va aumentando la potencia de la matemática en orden a ser un molde apto para racionalizar todos los fenómenos mundanos o incluso todos los mundos posibles.

b) El otro factor que da actualmente mayor unidad a la matemática consiste en recientes grupos de teoremas que establecen, en el nivel mismo de los métodos empleados, importantes conexiones entre distintas ramas que hasta ahora se habían desarrollado independientemente. Vamos a mencionar sólo dos ejemplos concretos. Ambos se han hecho patentes en el reciente congreso internacional de matemáticos en Moscú. El primero lo constituyen los teoremas de M. F. Atiyah y de S. Smale que han obtenido importantes resultados empleando simultáneamente métodos de la teoría de grupos, de la topología y de la teoría de operadores diferenciales. El segundo ejemplo, todavía más notable, es una lenta incorporación de la teoría de los trasfinitos de Cantor, que hasta ahora había permanecido formando un solitario bloque aparte, dentro del resto de la matemática; esta incorporación ha tenido lugar no sólo dentro de la lógica matemática —demostraciones de consistencia de sistemas formales matemáticos, debidas a G. Gentzen, S. Feferman, K. Schütte y otros—, sino incluso dentro de los presupuestos inmediatos del Análisis matemático al demostrar P. J. Cohen la independencia del postulado de Zermelo y de la hipótesis cantoriana del continuo.

Por muy interesante que sea el estudio de la dinámica interna es claro, me parece, que sólo indirectamente influye en la noción

de verdad matemática, es decir solamente en cuanto esta dinámica interna modifica o transforma la interpretación que se dé globalmente de la matemática, o sea en cuanto es un factor para la comprensión de la que hemos llamado dinámica externa de la matemática.

¿Qué relaciones existen entre la matemática en su conjunto y la historia? En la respuesta distinguimos tres grados de historicidad de la matemática.

1) En primer lugar hay una historia de la matemática en cuanto hay una cronología de los descubrimientos y de las creaciones matemáticas. Ahora bien, este mero estar en el tiempo apenas si merece el nombre de historia ; más bien será una mera crónica de los diversos matemáticos y de sus teoremas.

2) Un carácter más histórico tiene sin duda el desarrollo de la dinámica interna de la matemática tal como la hayan entendido o la entiendan los matemáticos o los historiadores.

Parece obvio que la historia de la ciencia tiene un carácter muy distinto de la historia política o de la de las culturas y civilizaciones, aunque a veces la discriminación entre ambas resulte difícil. Esta implicación o confusión se presenta no sólo en la historia de las ciencias positivas, por ejemplo la historia de la bomba atómica, pero incluso en hechos puramente matemáticos, como por ejemplo la historia del descubrimiento del cálculo infinitesimal. Pero estas confusiones no invalidan una diferencia fundamental: la historia de la ciencia, aparte de ser desapasionada, tiene un carácter netamente evolutivo progresista, donde las nuevas teorías no tanto contradicen las anteriores cuanto las perfeccionan y las integran ; no se vuelven *contra* el período anterior.

Esta consideración de continuidad y progreso tiene una fuerza mucho mayor al tratarse de historia de la matemática. Si dejamos aparte la historia de los errores, que se incluye más bien por contraste, pero que no es propia historia de la matemática, entonces ésta presenta un carácter progresivo absoluto. Las nuevas teorías no contradicen en nada a las anteriores: o las generalizan o establecen nuevas conexiones o quizá son simplemente independientes, pero nunca contradictorias. Las nuevas teorías matemá-

ticas no son mejores aproximaciones que corrijan ni siquiera ligeramente las anteriores de las que dimanen, como sucede por ejemplo con la teoría física de la relatividad que es una mejor aproximación que la teoría galileana.

Ahora bien, este carácter de absoluto progreso, de evolución tan perfectamente ordenada hace que la historicidad de la dinámica interna de la matemática sea mínima, si es que tal evolución llega a merecer el nombre de historia.

3) La evolución matemática adquiere un carácter netamente histórico, tanto como pueda serlo la historia de la filosofía, si consideramos además de su dinámica interna sus relaciones exteriores con otras disciplinas y en particular con la filosofía.

Vamos a examinar en particular la posibilidad de una historia de la noción de verdad matemática y veremos: a) que esta noción pertenece esencialmente al contenido de la matemática, y b) que está afectada por una historicidad análoga a la de los movimientos filosóficos y culturales.

a) Si se quiere conocer el significado pleno de un teorema matemático necesariamente hay que entenderlo en el contexto de sus fundamentos. En particular si se trata de un teorema de matemática axiomática hay que involucrar las teorías formales de primer orden (la de números y la de conjuntos) que le sirven de fundamento, si es que se pretende la mayor comprensión posible del contenido de dicho teorema. Pero entonces tropezamos con la noción de verdad, tal como la hemos analizado en la sección anterior; y por tanto la noción que se tenga de verdad matemática axiomática es un elemento constitutivo del significado pleno de un teorema de esta matemática, y resulta que la evolución de la noción de verdad matemática es un factor esencial en la evolución de la matemática misma. Lo que decimos de la matemática axiomática se aplica análogamente, o quizás «a fortiori» a las otras clases de matemática.

b) En el comienzo de esta sección hemos señalado dos etapas de la evolución matemática y hemos puesto de relieve el cambio extraordinario que sufre la noción de verdad matemática al pa-

sar de la primera a la segunda etapa. Merece señalarse de paso el carácter pionero o la originalidad profunda del cambio matemático en relación con los cambios filosóficos o culturales. La nueva concepción de verdad matemática que empieza a surgir desde hace poco más de un siglo, tiene sus raíces en la dinámica interna de la matemática misma, y no es fruto ni poco ni mucho de los sistemas filosóficos o culturales vigentes, sino más bien surge a pesar de la filosofía kantiana reinante. Gauss explica por carta (1829) a Bessel que no piensa publicar sus resultados porque teme la «gritería de los beocios» (9) aludiendo a los filósofos kantianos. Por el contrario, es patente lo mucho que la nueva concepción de la matemática ha influido y sigue influyendo en las ideas filosóficas y culturales de nuestro tiempo.

La dialéctica acerca de los fundamentos de la matemática sigue hoy día viva. Más aún, nos parece tener conciencia hoy de que esta dialéctica, que fue rica durante el período griego en el nacimiento mismo de la matemática racional y que en nuestro siglo ha vuelto a manifestarse con variedad y potencia extraordinarias, seguirá siendo siempre un factor importante en la evolución matemática. Ahora bien, esta dialéctica confiere a la matemática un acentuado carácter de historicidad. Resulta, pues, que ni siquiera en la matemática le es ni le será posible al hombre la posesión de una verdad absoluta; sus fundamentos siguen oscuros y tenemos la convicción de que si se clarifican las presentes dificultades, será sólo al precio de que surjan más profundas oscuridades.

En el caso de la matemática axiomática esta dialéctica es especialmente manifiesta. Con el descubrimiento de las geometrías no euclídeas alrededor de 1830, y la demostración de su consistencia relativamente a la geometría euclídea primero y luego relativamente a la Aritmética, alrededor de 1900, por Hilbert, el mundo real exterior no puede continuar siendo el fundamento de la matemática. El problema de los fundamentos de la matemática se hace especialmente agudo al surgir las primeras paradojas en la teoría de conjuntos. Entonces Hilbert declara el programa que pretende realizar mediante su *Teoría de la demostración*:

«Desearía acabar definitivamente con los problemas relativos

a los fundamentos de la Matemática como tales problemas. Para ello convierto toda proposición matemática en una fórmula concretamente demostrable y rigurosamente deducible, con lo cual pongo las definiciones y conclusiones matemáticas en tal posición que resultan incontrovertibles y además proporcionan una imagen de la ciencia considerada en su conjunto. Creo que podré conseguir completamente este fin con mi Teoría de la Demostración —*Beweistheorie*— aun cuando será todavía necesario mucho trabajo para llevarla a su perfección definitiva» (10).

En forma algo más concreta y empleando una terminología más reciente, lo que Hilbert proponía era lo siguiente: demostrar por métodos directos metamatemáticos que la teoría formal de números (y la de conjuntos) son consistentes, y argüir que esa consistencia era un fundamento de la matemática suficientemente seguro, puesto que aseguraba que en la matemática así formalizada o axiomatizada no podían existir teoremas contradictorios.

Desgraciadamente ya en 1931, K. Gödel, al demostrar la imposibilidad de una demostración formal de la consistencia, puso de manifiesto que es muy difícil que se pueda lograr el programa de Hilbert. En efecto, habría que dar una demostración metamatemática que sabemos que no podría ser formalizada, o habría que dar una demostración con métodos más fuertes, pero que no pueden suponer la validez de aquellos métodos matemáticos, cuya validez se pretende justificar precisamente con esa demostración.

Para terminar este trabajo y como botón de muestra de la dialéctica histórica entre el intuicionismo y el formalismo matemáticos damos a continuación dos breves textos. L. Brouwer, fundador del intuicionismo, antes de que Gödel descubriera su teorema de imposibilidad de una demostración formal de la consistencia, rechaza que el programa de Hilbert sirva para fundamentar la matemática, incluso en el supuesto de que se llegara a demostrar la consistencia. Escribe así en 1923: «Una teoría errónea, aunque no se la coja en contradicción no por eso deja de ser errónea; ni más ni menos que una acción criminal aunque no sea condenada en juicio no por eso deja de ser criminal» (11).

Al mismo tiempo que Hilbert construía su teoría de la demostración, es decir a principios de este siglo, Poincaré señala que no se puede prescindir de la intuición del principio matemático de inducción completa. Y L. Brouwer funda la matemática intuicionista, cuyos objetos y demostraciones deben ser todos mentalmente construibles. Ello le lleva a negar la validez de la aplicación del principio del tercio excluso a los conjuntos numerables infinitos. Todo ello provoca que en 1927 Hilbert exclame:

«Poincaré llega a su errónea convicción, porque no distingue entre dos procesos inductivos completamente distintos. Poincaré, el matemático más original y prolífico de su generación, desgraciadamente tenía declarados prejuicios por la teoría cantoriana, los cuales le impedían juzgar rectamente de la grandiosa concepción de Cantor. En estas circunstancias Poincaré tenía que rechazar mi teoría.»

Y en la misma conferencia Hilbert contesta así a Brouwer: «El principio del tercio excluso es una consecuencia del axioma lógico ε y todavía no ha conducido nunca al más mínimo error. Es además tan claro y comprensible que queda excluido el mal uso del mismo. En particular el tercio excluso no tiene la más mínima culpa de los resultados paradójicos de la teoría de conjuntos». «Prohibir al matemático el empleo del tercio excluso es algo así como quitar el telescopio al astrónomo o impedir el uso de los puños al boxeador». Siguen abundantes ejemplos de la mutilación que sufre la matemática y prosigue: «En estas circunstancias me maravillo de que un matemático dude de la estricta validez del principio del tercio excluso. Me maravillo todavía más de que hoy se encuentre toda una comunidad de matemáticos que duden de lo mismo. Y todavía lo que más me maravilla es el hecho de que sea posible, incluso en círculos matemáticos, que la sugestión de un hombre, pletórico de espíritu y temperamento, pueda influir de la manera más absurda y excéntrica» (10).

He dicho.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- (1) Para una exposición de las teorías formales propia para universitarios pueden verse los textos de S. C. KLEENE, *Introduction to Metamathematics* y de E. MENDELSON, *Introduction to mathematical Logic*, ambos de la Van Nostrand.
- (2) Véase P. LORENZEN, *Metamathematik*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1962.
- (3) Véase el texto de E. MENDELSON mencionado en (1) y la bibliografía pertinente que allí se cita.
- (4) R. COURANT y H. ROBBINS, *¿Qué es la matemática?*, traducción, Aguilar, Madrid, 1955.
- (5) Véase L. GEYMONAT, *Filosofía y filosofía de la ciencia*, traducción, Labor, Barcelona, 1965.
- (6) M. KANT, *Crítica de la razón pura*, en la sección «Estética trascendental»; primera edición, 1781.
- (7) L. E. J. BROUWER, *Intuitionism and Formalism*, «Bulletin of the American Mathematical Society», 20 (1913), 81-96.
- (8) E. HUSSERL, *Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie*, libro primero, págs. 359-360; Martinus Nijhoff, La Haya, 1950.
- (9) C. F. GAUSS, en carta a BESSEL el 27-I-1829, parcialmente reproducida por O. BECKER, *Die Grundlagen der Mathematik*, página 178; Karl Albert, Friburgo (Alemania), 1964.
- (10) D. HILBERT, *Die Grundlagen der Mathematik*, discurso pronunciado en el Seminario matemático de Hamburgo en 1927. *Hamburger mathematische Einzelschriften*, 5 Heft, 1928.
- (11) L. E. J. BROUWER, *Über die Bedeutungen des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik», 154 (1925). 1-7. Citado por S. C. KLEENE en las páginas 56-57 del texto mencionado en la nota (1).