

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

**EL VALOR OBJETIVO
DE LOS CONOCIMIENTOS
Y TEORIAS CIENTIFICAS**

DISCURSO DE RECEPCION

DEL

R. P. ENRIQUE DE RAFAEL VERHULST, S. J.

Y CONTESTACION DEL.

EXCMO. SR. D. JULIO PALACIOS MARTINEZ

VICERRECTOR DE LA UNIVERSIDAD CENTRAL

7 DE ABRIL DE 1943



**MADRID
NUEVAS GRAFICAS, S. A.
1943**

DISCURSO

DEL

R. P. ENRIQUE DE RAFAEL VERHULST, S. J.

Excmo. Señor,
Excmos. Sres. Académicos,
Señoras, Señores:

Tres deudas, señores Académicos, me toca, por lo menos, reconocer, ya que no me es posible satisfacerlas convenientemente, antes de comenzar el desarrollo del tema que me he propuesto en esta ocasión para mí tan solemne. Dos de ellas consuetudinarias, pero que me obligan de manera especial; y la tercera peculiar mía.

La primera es con vosotros, que me habéis distinguido tan por encima de mis merecimientos, llamándome a cooperar en vuestras elevadas tareas; y como Demóstenes en su discurso «Por la Corona», que se considera la más acabada obra de oratoria civil que se haya pronunciado jamás, comienzo por rogáros, señores Académicos, que la benevolencia con que me habéis acogido siempre, algunos desde hace casi cuarenta años, cuando yo era sólo un tímido estudiante provinciano de dieciocho, y todos recientemente, al admitirme en vuestra Corporación, la mantengáis siempre conmigo, especialmente ahora en que me veo más necesitado de ella.

No extrañe nadie el que parezca que yo quiera presentarme como pretendiendo sentir más de lo ordinario esta sensación de inferioridad por mi parte y de benevolencia por la vuestra. En mis largas estancias en el extranjero (nueve años en Inglaterra e India inglesa y seis años en Bélgica), he visto apreciar a esta Academia y a su Revista por encima de cualquier otra institución o individuo de nuestra patria. Los nombres de Merino, de

Ibáñez, de Ramón y Cajal y de Torres Quevedo son pronunciados con respeto por los extranjeros, aun por aquellos que menos simpatías nos inspiran o nos muestran; lo mismo digo de las publicaciones y concursos. Por no citar casos recientes, más sujetos a diferencias de apreciación que los antiguos, todos recordaréis que a la autoridad del Sr. Merino se debió el que el método de Gräffe y Encke para resolver ecuaciones algébricas con coeficientes numéricos fuese incorporado a los tratados clásicos, y a un concurso de la Academia se debe uno de los libros más curiosos del autor italiano Gino Loria, el cual parece que decidió su futura vocación como investigador.

En mi visita a la «Royal Society», de Londres, en 1923, vi en el revistero la Revista de esta Academia junto con las de las demás Academias de más nombre, y entre las memorias, una de las vuestras (después he lamentado haber olvidado el título); al ver el bibliotecario que yo me paraba con especial interés y averiguando después mi nacionalidad, le oí frases que me regocijaron de veras, como nunca antes y una sola vez después, al oír apreciar nuestro Almanaque Náutico de San Fernando como una de las cinco grandes efemérides de Astronomía (1). Estas alegrías son tanto más de apreciar, cuanto que no faltan amargas experiencias en contrario; sin embargo, séame permitido hacer esta observación incidental: las más injuriosas las he oído de los labios menos autorizados. Por ejemplo, en la India, al ser preguntado por qué Universidad era Doctor y responder que por la de Madrid, me preguntaron si en Madrid había Universidad. No os asombre esa pregunta por parte de un indio, que aunque graduado en Cambridge como Wrangler, no tenía la menor idea de la organización universitaria europea, ya no digo española.

La segunda deuda es con el que inmediatamente me ha precedido en este lugar en la Academia. Así como mi larga estancia en el extranjero ha sido la razón por la que he podido apreciar el respeto que la Academia inspira, en cambio me ha priva-

(1) Las otras cuatro son: el «Nautical Almanach» (Greenwich), la «Connaissance du Temps», (París), «Astronomisches Jahrbuch» (Berlín) y «American Ephemeris» (Washington).

do casi totalmente del trato con sabios españoles, aun de las mismas especialidades que he cultivado con más entusiasmo ; no creo, con todo, que esta circunstancia sea óbice para que en adelante, en los pocos años que me pueden quedar, aun en la mejor de las hipótesis, para investigaciones y colaboraciones, lo pueda hacer lo menos indignamente posible, contando siempre con vuestra simpatía y aliento. Pero en el caso del Excmo. Sr. D. Antonio de Gregorio y Rocasolano, ciñéndome a recuerdos personales, puedo deciros que asistí como oyente a su primera clase de Química general en la Universidad de Barcelona, allá por octubre de 1902, y que me dejó prendado por sus cualidades de profesor ; mucho interés debí tener en oírle, pues no recuerdo que, fuera de esta ocasión, haya tenido curiosidad de ir a otras clases que a aquellas a las que estaba obligado, en los veintiséis años que me he sentado en los bancos de una clase como casi exclusiva ocupación. Es verdad que en Londres asistí a una clase del Profesor Porter, del University College ; pero fué más por deferencia a la persona que por curiosidad. Poco gozamos en Barcelona (no sé si llegó a un mes su estancia) de las lecciones del Dr. Rocasolano ; pero nunca se borró su recuerdo de mi memoria. Cuando, con el transcurrir del tiempo, leí algunos de sus artículos sobre el envejecimiento, sus síntomas y causas y otros fenómenos relacionados con este tema, admiré dos cosas : la modestia con que proponía sus puntos de vista y la forma objetiva con que los desarrollaba, dejando a un lado toda ampliación retórica ; como a esto unía un espíritu profundamente cristiano, que sin ningún alarde impropio de piedad mística, trataba el asunto sin el menor resabio de materialismo proselitista, vicio en el que suelen caer aun los más dignos cultivadores y expositores de esta materia, sentí hacia el autor una verdadera veneración. Nunca le había tratado ni escrito, ni creo que mi persona le hubiese interesado en lo más mínimo, aun en el supuesto de haber tenido noticia de mi existencia, pues es más natural que el menor en edad y categoría social y científica se fije en el mayor que lo contrario. Sin embargo, hace un año tuve el gusto de ser presentado a él, y los pocos minutos de conversación que tuvimos me confirmaron en la opinión que de él me había formado como profesor, investigador y caballero. ; Poco me figuraba que le habíamos de perder tan pronto y aun menos que yo había de

reemplazarle en esta Corporación! Pero así lo ha dispuesto la Providencia, que le habrá llevado

*Ai campi eterni, al premio
Che i desideri avanza
Dov'è silenzio e tenebre
La gloria che passò (1)*

cual merecían sus sentimientos religiosos, sus trabajos y su probidad, y me ha impuesto el ocupar materialmente, y no puede ser por mucho tiempo, la vacante que aquí dejó. Después de su fallecimiento supe que, cuando joven estudiante en su querida Zaragoza, para hacerse más perfecto cargo del proceso de fermentación, se había presentado como operario en una tahona y estuvo allí algún tiempo amasando y cociendo pan; pero que tuvo que dejarlo porque el dueño, al enterarse de la clase de estudios de *su obrero*, temió algún envenenamiento o falsificación. Este episodio demuestra, tal vez más que otros triunfos académicos, el temple de investigador que había dentro de su alma y cuyo desarrollo en trabajos de muy distintos órdenes ha sido expuesto por mano maestra ante vosotros el día de su recepción. Descanse en paz, y no sólo me atrevo a decir: *Dr. Rocasolano, ¡presente!*, sino con todo mi corazón: *Hasta la vista, y mientras tanto, rogad por nosotros.*

La tercera deuda, peculiar mía, es hacia la Compañía de Jesús, que me acogió en su seno hace más de treinta y tres años, y durante doce completos y consecutivos me formó en las prácticas religiosas, literarias, filosóficas y teológicas. Es verdad que al ingresar tenía ya el título de Doctor y desempeñaba un cargo de Auxiliar en la Universidad de Barcelona hacía ya tres años; pero al rehacer mis estudios elementales a base del Bachillerato clásico, a pesar de que la edad no era la más a propósito, comprendí la superioridad del método y el gran bien que aun para mis anteriores estudios científicos reportaba. La llamada *Ratio studiorum*, de éxito innegable durante cuatro siglos y en toda clase de países, es, no sólo a mi juicio, sino al de muchos otros más autorizados, la mejor preparación para toda clase de estudios especializados, ya sean de leyes, medicina, ingeniería y ciencias especulativas; y a pesar de los prejuicios, se conserva

(1) A. Manzoni: «Il Cinque Maggio», V, 93-96.

sustancialmente en los gimnasios alemanes, en los liceos franceses, en las escuelas superiores inglesas y norteamericanas y, sobre todo, en los colegios públicos italianos; justo es, pues, que reconozca lo que debo a mi Madre espiritual y adoptiva, la Compañía de Jesús, por esta razón.

Poco dudé, señores Académicos, acerca del tema que había de escoger para la presente ocasión. Es antiquísimo y, por lo tanto, difícil de desarrollar con originalidad y elegancia; sin embargo, como me ha atraído desde mi juventud y hasta me ha parecido, a fuerza de darle vueltas, que podían aclararse algunos puntos que no he visto desarrollados sistemáticamente en los autores, me atrevo a proponerlos para vuestra consideración y juicio, y hasta para vuestra crítica y refutación, ya que no sólo me parece muy natural la discusión de las opiniones discutibles, sino también que no quiero parecer como enteramente seguro en un terreno en que hay mucha inseguridad.

Se trata de averiguar qué valor objetivo tienen los conocimientos y teorías científicas, y especialmente los conocimientos y teorías físico-matemáticas, que a la fuerza me han habido de interesar más que los otros, por la sola circunstancia de que han constituido casi la exclusiva ocupación de mi vida; como veis, el tema es trillado.

Durante mi vida de estudiante, preocupado con exámenes y, por lo tanto, más atento a asimilar y reproducir conocimientos y, sobre todo, frases a gusto de mis profesores, que a analizarlos por mi propia cuenta, poco me paré a reflexionar si lo que se me proponía como inconcuso, en la realidad tal vez no lo era. La existencia de las moléculas, de los átomos y del éter, las acciones a distancia, el carbono tetraédrico, el exágono de Kekulé y las series carbocíclicas y heterocíclicas, las acciones de los llamados *estados nacientes* y *fuerzas catalíticas*, en una palabra, cuanto se proponía en los textos para los principiantes, sin apenas indicación alguna del proceso histórico de los tanteos por los que se había llegado al punto de vista actual, fué aceptado por mí, como por tantos otros, sin discusión de ningún género. Mi posterior experiencia de prófesor me ha hecho ver que la inmensa mayoría de los discípulos prefieren que se les den hechas las teorías y ejercitar la memoria en las aplicaciones de las mismas, a discurrir sobre su verdad.

Sin embargo, en contadas ocasiones, se señalaban algunos

puntos de discusión filosófica : en Geometría, sin tocar la naturaleza física del espacio real y todavía menos su acción psicológica, oíamos consideraciones más o menos vagas de geometría no euclídeana y de los elementos en el infinito ; en el cálculo se nos daban ideas sobre los infinitamente pequeños e infinitamente grandes, tomadas, no con toda exactitud, de las famosas *mónadas* de Leibnitz ; en los cursos de física matemática comenzaba a insinuarse la óptica electromagnética de Maxwell, contrapuesta a la elástica de Huyghens y Fresnel. Los textos de Física matemática de H. Poincaré y, sobre todo, su primera obra de divulgación, «La Science et l'Hypothèse», fueron conocidos muy pronto por el público selecto en España. Estos chispazos fueron la única influencia universitaria que recibí de crítica científica y de hecho fué muy pequeño el efecto.

En cambio, una vez terminados los estudios llegué al estado en que, como dicen ciertos autores extranjeros, *el rigor se me imponía* ; y sin las trabas académicas, comencé a discurrir por mi cuenta acerca del valor objetivo de las ciencias que había estudiado. Entonces cayó en mis manos el *Discurso del método*, de Descartes, que leí de cabo a rabo con todo interés, pero sin ningún comentario que me pusiese en la pista de las circunstancias de tiempo que explican la razón de ser del estilo de ese «Discurso».

Muchos años más tarde comprendí lo muy conveniente, casi necesario, que es el recibir una educación adecuada de filosofía perenne, o, por hablar bien claro, de filosofía escolástica, antes de leer autores que, como Descartes, tienen gran habilidad en apuntar y hacer resaltar sus defectos, lagunas e inconsecuencias, pero que después necesariamente han de caer en las mismas dificultades que combaten, sin poder hallar mejores soluciones que las que han impugnado con gran maestría. Dejando a un lado ciertas observaciones, ciertamente de suma importancia, pero cuya consideración me llevaría a un terreno apartado de la crítica científica, dentro de ésta es necesario partir del principio, tan de sentido común como los que enuncia Descartes en su «Discurso» o los que enuncia Kánt en su «Crítica de la razón pura», o los que se hayan propuesto después por los seguidores de sus escuelas o de otras similares más o menos agnósticas, de que la ciencia secular tiene algún valor objetivo, y de que los que establecieron sus fundamentos y primeros desarrollos eran

hombres de genio, que veían dificultades, sin que por ello se desanimaran para proseguir adelante en su obra constructiva, y que no es buen principio de crítica científica el comenzar negando o dudando de todo lo que se ha aprendido de los predecesores, queriendo aparentar (porque en realidad no es así) delante del lector que se va a edificar sobre la nada con sólo los recursos del propio talento (1).

Pero, por el momento, la lectura del «Discurso sobre el método» me desilusionó por completo. Es verdad que, como todos, yo aspiraba a los veinte años aprovecharme de mi carrera para vivir honestamente; pero tenía afición intrínseca a las matemáticas y a la física y no podía resignarme a la idea de que sus cultivadores fuesen charlatanes e ideólogos, que vendían sus conocimientos sin creer absolutamente una palabra de lo que decían, o bien, lo que es frecuente en los preparadores de oficio, sin entender otra cosa que las respuestas que hay que dar en un examen o en unas oposiciones, a fin de sacar un grado u obtener una cátedra; cualquiera de estas suposiciones, que después he visto ser muy frecuentes, me parecía indigna de un amante de la ciencia e intolerable para un espíritu libre. No abandoné del todo mis estudios en materias de las que no había de sacar jamás ningún emolumento temporal y que, con todo, me interesaban y hasta me deleitaban en alto grado; pero no tenía fe en ellos.

Diez años tardé en salir de esta especie de infierno psicológico; en ellos se había operado el cambio más importante de mi vida; pues a los veintitrés años dejé para siempre mis ilusiones de cátedra y comencé una nueva vida, en que había de sentir con toda su fuerza el imperio de voluntades ajenas, siempre bien intencionadas subjetivamente y, en general, bien dirigidas objetivamente, pero, al fin y al cabo, ajenas. Tal vez lo que más me hizo sufrir fué la falta de compañeros de mis aficiones científicas y aún más la carencia de quien pudiera ilustrarme en mis dudas, sin peligro de discusiones violentas en las que el principio de autoridad sale mal parado. Pero mientras tanto iba reeducándome, y no como un autodidacto, sino como verdadero

(1) Al final de su primera parte del «Discurso», dice Descartes que *tomó un día la resolución de estudiar en sí mismo. Queriendo prescindir totalmente de su educación anterior, tal empeño era imposible; y, con todo, eso es lo que quiere aparentar.*

discípulo, en las disciplinas clásicas, con las desventajas de una edad ya no muy a propósito para aprender párrafos y definiciones de memoria, pero con la ventaja de una mayor reflexión.

He aquí las conclusiones que saqué y que someto gustosamente a la crítica objetiva :

1.^a El valor objetivo de los conocimientos y aun de las teorías científicas es algo real e independiente de nuestras propias ideas y de categorías o predicamentos intelectuales.

2.^a En las ciencias puramente abstractas (por ejemplo, la Lógica y la Aritmética) no existe verdadera distinción entre el objeto formal y el conocimiento del mismo. Los principios clásicos (mal llamados *postulados*, porque sin ellos no puede concebirse ciencia alguna y por ello se guardan muy bien los agnósticos de quebrantarlos abierta y prácticamente) de identidad, de contradicción, de razón suficiente y otros que se encuentran en todos los tratados de lógica, aritmética y metafísica, aun en los escritos por hombres de genio que aparentemente los impugnan, no sólo rigen nuestra mente como categorías, sino el mundo exterior como realidades.

3.^a El infinito potencial, tanto numerable como no numerable, no es ni una realidad ni una pura ficción (1), sino un ente de razón, con el fundamento real de la posibilidad intrínseca de existir un elemento nuevo agregable a un conjunto finito dado.

4.^a En las ciencias de observación, en las que se comprenden no sólo las ciencias naturales, químicas y físicas y la astronomía, sino también la geometría, la cinemática, la estática y la dinámica, el objeto material, que ordinariamente se designa con el nombre de *hecho bruto*, es externo y difiere del objeto formal, que es el conocimiento que de él tenemos, mediante la observación : pero esta diferencia no es enteramente arbitraria, sino la que hay entre un objeto cualquiera y su imagen, que nunca puede ser adecuada.

5.^a El espacio, el tiempo, el movimiento, la materia y la masa, la fuerza y la energía, el sonido, la luz, el calor, la electricidad y el magnetismo, los cambios físicos y químicos de los cuerpos, la elasticidad, la capilaridad, la gravedad y atracción

(1) «Ex profeso» no quiere usar la palabra *entelequia*, que aunque haya pasado al léxico ordinario, a mi juicio ha sido con una significación del todo impropia.

gravitatoria, y todos los fenómenos que estudian la Física y la Química experimentales, son realidades distintas, por lo menos modalmente en sí y relativamente a nosotros; pero raras veces pueden hacerse sus apreciaciones cualitativas, y mucho menos cuantitativas, independientemente unas de otras.

6.^a Las apreciaciones numéricas, vulgarmente denominadas *mediciones*, son también cualidades objetivas, y no puras ficciones de nuestra mente. Pero su certeza es mayor cuando su exactitud es menor, y viceversa, hasta tal punto que, así como no nos puede caber duda, cuando se trata de mediciones muy poco aproximadas, de la verdad de las mismas entre límites muy amplios, la duda es inevitable cuando se quiere precisar la medición a límites estrechos.

7.^a Es mucho más fácil apreciar cambios relativos que valores absolutos; pero esos cambios relativos no dejan de ser realidades, aunque no se les pueda asignar siempre el verdadero sujeto.

8.^a Aunque la primera y grosera observación del espacio, tiempo y demás entidades mencionadas en la conclusión quinta, nos los representen como objetos y variables continuas, no hay ninguna fuerza intelectual que nos obligue a admitirlas absolutamente tales; y, como la observación más delicada, mediante el microscopio sobre todo, nos induzca a creer (aunque tal vez hasta la fecha la certeza no sea completa), que la materia y la energía son de naturaleza discreta, no hay inconveniente en admitir hipotéticamente esta conclusión, y afirmar su mayor probabilidad sobre la primera.

9.^a Nunca, con todo, podrá decirse probablemente la última palabra sobre esta materia; porque aceptando la teoría atómica y la de los *quanta*, queda ahora y quedará probablemente siempre por averiguar la naturaleza, sea discreta o sea continua, de los últimos elementos observados o ideados.

10.^a Las leyes físicas, enunciadas cualitativamente o aun cuantitativamente en forma matemática, son también más ciertas si se precisan menos. Su enunciado exacto nunca podrá ser cierto, ni tampoco *existe* ninguna razón *a priori* que obligue a aceptar la existencia objetiva de tal exactitud aun para el mundo inorgánico; pero tampoco *existe* razón *a priori* en contrario, y no *existe* ninguna objetiva que nos induzca a creer que la mate-

ria inerte goce de algo equivalente ni parecido a la libertad de determinación que nosotros sentimos en nuestra conciencia.

11.ª Las mismas leyes no tienen nada que ver con las limitaciones de nuestros conocimientos matemáticos o de cualquier otro género que sean. Es un postulado enteramente gratuito el suponer que su enunciado haya de ser simple, o que, si de dos enunciados, igualmente probables objetivamente, uno es más sencillo que otro, es también más probable.

12.ª La evidencia es el único criterio de verdad natural; la evidencia lógica no es específicamente diversa de la evidencia física, ni puede constituir por sí sola la única base de la certeza científica.

Permitidme comentar e ilustrar con ejemplos estas doce conclusiones pertenecientes a la criteriología de las ciencias que versan sobre el mundo inorgánico y conceptos asociados. Es aquella parte de la Filosofía, que recibió los nombres clásicos de *Cosmología* y *Filosofía Natural*, con que aún se les conoce en Inglaterra y Alemania. Nada digo sobre los seres vivos y organizados, tanto vegetales como animales; sobre el hombre y su principio vital, el alma racional y libre, y sus relaciones morales y jurídicas, tanto individuales como colectivas; sobre Dios y otros seres espirituales, de los que no nos cabe conocimiento directo. No me son indiferentes ni mucho menos; pero no he reflexionado sobre ellos suficientemente para atreverme a proponer conclusiones propias, y no quiero imitar a Descartes, que gastó el mejor de sus capítulos describiendo la doble circulación de la sangre, fenómeno conocido hacía ya casi un siglo y del que nada original podía escribir, en vez de hablar de la refracción y de la adaptación del Álgebra a la Geometría, que son los descubrimientos que han inmortalizado su nombre; ni a Pascal, que dedicó sus Pensamientos fragmentarios e inéditos a impugnar a los jesuitas y aun a la Santa Sede, valiéndose de ciertos milagros que se habían, según él, realizado en la Abadía de Port-Royal, en lugar de exponer las propiedades del exágono inscrito en una cónica o las leyes de la Hidrostática, únicas por las que su nombre se conserva brillante en la Historia.

I

Τὴν γὰρ δὴ μιν ἄνογε Καλυφῶ, δῖα θεάων
 ποντοπορεύμεναι ἐπ'αριστερά χειρὸς ἔχοντα

(*Odisea*, lib. V, ῥ 276-277)

Hace casi tres mil años, o un millón de días aproximadamente, que Homero, o el que sea el autor del poema magno, escribió estos dos versos, en que se asegura que Calipso, la divina entre las diosas, aconsejó a Ulises conservar a mano izquierda la Osa Mayor, a fin de cruzar el mar y poder regresar a su patria querida. Aunque no se sabe exactamente el emplazamiento que fijó el poeta a la isla en que habitaba la diosa, es seguro que era por el actual mar Jónico; por lo tanto, el consejo de Calipso sería bueno actualmente. Difícil es conjeturar la antigüedad del conocimiento del movimiento diurno de las estrellas; pero por este ejemplo es claro que, en tiempo de Homero, era lo suficientemente preciso para servir a la navegación por el Mediterráneo, y de los marinos de su tiempo y, probablemente, de su propia experiencia (1) sacó el poeta la regla.

He tomado este ejemplo porque me llamó la atención la primera vez que me preleyeron la *Odisea*. La Ciencia, observación y cálculo a la vez, al cabo de tres mil años sabe algo, pero no

(1) Los aficionados a la crítica interna se dividen en dos bandos acerca de la personalidad de Homero: según unos, la *Iliada* y la *Odisea* pertenecen a dos distintos autores, y aun la *Iliada* suponen que es la fusión de dos poemas, uno en loor de Aquiles y otro en loor de Héctor y además muchas interpolaciones. El otro bando, menos radical, sin negar las interpolaciones y corrupciones inherentes a poemas largos, conservados durante cinco siglos por sola tradición oral, afirma que el cuerpo de la *Iliada* y el de la *Odisea* son debidos a un solo autor, joven y entusiasta de la gloria guerrera cuando compuso la *Iliada*, y maduro y lleno de experiencia de muchos viajes y trato con diversas gentes, cuando compuso la *Odisea*.

mucho más acerca del movimiento diurno. Por analogía con los demás planetas, se considera a la tierra girando alrededor de su eje, y no los cielos, quedando todavía la incógnita de la realidad o no realidad del espacio absoluto ; pero ese eje no es fijo ni con respecto a la tierra ni con respecto a los cielos. Respecto de la tierra, la dirección del eje tiene un movimiento muy pequeño en valor absoluto ; pero como la observación no comprende un siglo siquiera, fuera de esa pequeñez y de una gran irregularidad dentro de la misma, apenas si se sabe nada más ; y ni idea se tiene de las diferencias de magnitud entre las trayectorias del Polo Norte y del Polo Sur sobre la superficie de la Tierra, ni de las variaciones de la velocidad de rotación, porque precisamente ésta es la velocidad que se considera como uniforme y sirve para medir el tiempo y demás velocidades ; pero se ve que eso no pasa de ser una mera convención arbitraria, o, si se quiere, pragmática y antropomórfica, pero de ningún modo objetiva absolutamente. Respecto de los cielos, los conocimientos son algo más precisos ; la dirección del eje tiene un movimiento amplio y lento de precesión, conocido hace ya dos mil años (por lo menos, en parte) (1), y otro mucho más pequeño y rápido de nutación, descubierto por Bradley, el mejor observador de los tiempos modernos, hace ya casi trescientos años ; pero ambos movimientos no son uniformes y sus pequeñas irregularidades con las consecuencias que pueden tener a la larga, así en el movimiento diurno de los astros, como en la duración del año (sidéreo, trópico, anomalístico), están poco determinadas.

Ejemplos parecidos, aun de naturaleza mucho más incógnita, podrían multiplicarse ; por ejemplo, los períodos de re-

(1) El descubridor fué Hipparco, el mejor astrónomo de la antigüedad (escuela alejandrina, siglo II a. de J. C.) ; pero los hindus pretenden que la precesión de los equinoccios y, más particularmente, la variación del Polo en los cielos era conocida por los autores védicos, cuatro o cinco mil años a. de J. C. La estrella *Dhube*, mencionada en los Vedas por los hindus como modelo de estabilidad, no era, según los hindus, nuestra polar (*α Ursae Minoris*), sino *α Draconis*, estrella de magnitud 3,64, que era la polar hace seis mil años ; tratándose de una estrella tan pequeña a simple vista, no se ve la probabilidad de que su fijeza atrajese la atención de los antiguos observadores para proponerla a los hombres como modelo de constancia. Sobre la antigüedad de los escritos védicos están muy divididas las opiniones de los eruditos ; pero en la India existe la tendencia a suponerlos lo más antiguos posibles, hasta diez mil años a. de J. C.

producción de eclipses, conocidos con el nombre de *Saros* de los Caldeos, cuya aserción se remonta a tiempos verdaderamente prehistóricos y que, a pesar de ello, se citan en los más modernos tratados de Astronomía, como el *Handbuch der Astrophysik* (1).

La propiedad de la aguja magnética de orientarse hacia el Norte ciertamente es conocida desde Flavio Gioja de Amalfi (2) (siglo XIV). Pero puede muy bien ser que sea muchísimo más remota la fecha, pues parece que, como la pólvora y la imprenta, los chinos fueron los que la descubrieron. Algo se ha modificado en seis siglos la teoría del campo magnético terrestre; pero el hecho fundamental queda casi invariable.

Es más bien contra las antiguas teorías científicas, contra las que los partidarios del agnosticismo esgrimen sus mejores argumentos para probar la tesis de que aceptamos como verdadero todo aquello que nos parece conveniente hasta que vemos su falsedad, y que unas teorías se suceden a otras, sin dejar casi rastro al cabo de poco tiempo.

La primera dificultad está en la definición *práctica* de la palabra *teoría científica*; y como no es fácil ponerse de acuerdo sobre esta definición, por el momento me fijaré en un caso particular, en que todos están de acuerdo en que fué considerada como *teoría científica*, y es el sistema astronómico de Ptolomeo, de la escuela alejandrina.

Es verdad que antes de él, Platón y Aristóteles (3) habían imaginado una configuración cósmica de los cielos, a la vez arquitectónica y mecánica; pero sus teorías carecían casi por completo de carácter matemático y, por esta razón, eran más bien cosmológicas o filosóficas que científicas. Fué Ptolomeo el que sentó con su teoría de los deferentes y los epiciclos, o sea, con una serie de movimientos circulares uniformes en que el centro de cada epiciclo giraba uniformemente a lo largo del epiciclo anterior, la idea de explicar cinemáticamente los movimientos aparentes alrededor de la tierra, que consideraba como el centro del Universo, de todos los astros, así fijos como errantes.

(1) Véase sobre este asunto la reciente Memoria de Doctorado, de D. José María Torroja Menéndez.

(2) Personaje de discutida identidad histórica.

(3) Esta consideración está muy bellamente expuesta en el *Sueño de Escipión*, de Cicerón.

Esta teoría fué universalmente aceptada por el mundo cristiano y aun el árabe, hasta la edad moderna. Es inútil, por ser demasiado conocida la historia, referir cómo fué abandonada, gracias a los trabajos de Copérnico, Tycho Brahe, Galileo, Képler y, sobre todo, de Newton.

Pero ¿queda algo de ella? Por de pronto, por lo que toca a la mera exposición matemática, es sabido que toda función periódica puede ser expresada, en ciertas condiciones, que ciertamente se cumplen durante un período bastante largo de siglos si se trata del movimiento de los astros alrededor de la Tierra, en serie convergente de armónicos o de Fourier. Si, pues, expresamos las coordenadas de los centros de los astros, respecto de un sistema cartesiano geocéntrico, por series de Fourier, que dentro de límites de tiempo bastante amplios, no es menester que sean infinitas para que nos den resultados bastante aproximados, habremos conseguido dar cuenta matemática del movimiento periódico de los astros alrededor de la tierra por una serie de movimientos circulares uniformes, análogos a los epiciclos de Ptolomeo y aun con la condición, que él no expresó, de que los períodos son partes alicuotas de un período general. Las discrepancias del movimiento observado respecto del calculado, podrían expresarse por otras series de armónicos, y así vendría a obtenerse una expresión matemática del movimiento perturbado tan aproximada como se quisiese.

Esto parecerá muy artificial e indigno del nombre de científico; pero de hecho es el método ordinariamente seguido desde hace tres siglos en Astronomía de posición, y aun en Mecánica celeste, en el estadio elemental o estudio local o estricto (1). Es la concepción arquitectónica y como de relojería del universo de Ptolomeo lo que ha sido rechazado definitivamente; pero sin quererme meter a abogado de una causa perdida, con argumentos *ad hominem* y retorsiones ridículas, nadie puede negar que la ley de la inercia y la de la gravitación universal, bases de la Mecánica racional y celeste actuales, encierran en su idea un mecanismo oculto, que por lo que toca a la *explicación* (no a la

(1) Véase el Discurso de recepción en esta Academia de Esteban Terradas (15-II-33), pág. 65, líneas 12 a 17, y compárese con la introducción de H. Poincaré a «Les Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste», tomo I, donde el gran matemático declara el objeto de su libro.

exactitud en la evaluación) del movimiento de los astros, es tan misteriosa o más que la de los epiciclos y deferentes; la diferencia está en que las ruedas de Ptolomeo eran demasiado grandes para no ser vistas y las de Galileo y Newton se puede decir que son casi infinitamente pequeñas, y como los microbios, no se ven a simple vista. Si estas leyes se funden en otra más misteriosa todavía, la curvatura del espacio y deformación consiguiente de las líneas geodésicas o de inercia por la presencia y acción de las masas, se tendrá una explicación muy ingeniosa y plausible, sobre todo si sirve para predecir fenómenos; pero que no resistirá la crítica científica los siglos que ha resistido la de Ptomoleo.

Es evidente que la verdad de los conocimientos científicos es más cierta que la de las teorías correspondientes y, por lo tanto, que a los primeros hay que reconocerles un valor objetivo mucho mayor y más duradero que a los segundos. Pero una teoría racional, además de su carácter simbólico (ese nadie se lo niega ni se discute ahora) y de su carácter práctico, único que le quieren conceder los pragmatistas (los cuales, sobre todo a fines del siglo pasado y principios del presente, eran muchos), tiene un carácter objetivo, aunque no sea más que en el sentido mínimo que le da P. Duhem en su libro *La Théorie Phisique*, de tendencia a transformarse en *clasificación natural* (1). Poco es, pero lo suficiente para no decir que son puros *aegri somnia* (2).

II

Lo possibilité même de la science mathématique semble une contradiction insoluble (H. Poincaré, «La Science et l'Hypothèse.» Sur la nature du raisonnement mathématique).

Es ley ineludible la de que todos los hombres, aun los de mayor talento y más independiente, sean influenciados por su primera educación y por el medio que les rodea, una vez ya educados. Esta es la razón por la que H. Poincaré, el mayor mate-

(1) II ed., 1914, pág. 32.

(2) Horacio, *De arte Poëtica*, V. 7.

mático de fines del siglo pasado y principios del presente, y que en sus cuatro libros de vulgarización se reveló un filósofo autodidacto, profundo y muy original, encabezó el primer capítulo de su primer libro con esta duda acerca de la posibilidad de la aritmética.

Este capítulo es muy conocido entre nosotros; en él demuestra el autor, con mano maestra, que el fundamento lógico del raciocinio matemático es la ley de inducción tan repetida en los libros: *si es verdad para n , lo es para $n+1$* . Pero al calificar la ley dice: *La inducción aplicada a las ciencias físicas, es siempre incierta, porque reposa en la creencia (1) en un orden general del Universo, orden que está fuera de nosotros. En cambio, la inducción matemática, o sea, la demostración por recurrencia, se impone necesariamente (se entiende, a nuestro espíritu) porque no es más que la afirmación de una propiedad del mismo espíritu*. He aquí una de las CATEGORIAS de Kant, tan en boga en la segunda mitad del siglo XIX y que aún todavía cuentan con muchos partidarios, algunos conscientes, pero los más absolutamente ciegos en cuanto a la inteligencia (2).

Así, pues, Poincaré reconoce con satisfacción que la inducción matemática y, por ella, toda la Aritmética abstracta, se impone necesariamente a nuestro espíritu. Pero la razón de esa imposición no es una debilidad de nuestro espíritu que se deja dominar ciegamente por una fuerza exterior, sino, al contrario, la

(1) El autor no refleja del todo en este párrafo las ideas de su tiempo, sino más bien las propias; porque muchos eran los que decían que no hay tal orden en el universo, sino que lo que nos parece tal, no es más que una categoría de nuestra mente, que ve *orden* hasta donde no lo hay.

(2) En su excelente tratado de *Análisis Algebraico*, nuestro ilustre compañero Rey Pastor abre su primer capítulo sobre las operaciones aritméticas fundamentales con dos párrafos sobre conjuntos y números naturales, por un método muy original y nada resabiado de agnosticismo. No deja con todo de establecer bien explícitamente que los conceptos de unidad, pluralidad y correspondencia son primarios y, por lo tanto, incapaces de definición propia; y además, al afirmar *el valor apodíctico universal de la Aritmética, que no poseen las Ciencias Naturales*, debido al principio de inducción, hace constar que *la Aritmética inspira sus definiciones en el mundo real; de este modo, sus operaciones serán la expresión abstracta de las operaciones de la Naturaleza, y de tales interpretaciones concretas se derivan sus aplicaciones a la vida práctica*. Aquí no hay nada de CATEGORIAS intelectuales, lo que prueba que el agnosticismo ya había pasado de moda en 1920, por lo menos por lo que a la Aritmética atañe.

fuerza del mismo espíritu, que ha descubierto en el principio de inducción una ley metafísica o de ontología, cuya negación no sólo haría imposible la ciencia de nuestra parte, sino también estaría en pugna (no quiero decir en contradicción lógica) con el mundo exterior a nuestro espíritu. Tiene, pues, un valor objetivo absoluto y subjetivo ineluctable.

La existencia del mundo exterior (y aun de nuestro mismo cuerpo), objeto material primario de las Ciencias físicas y naturales, no se puede demostrar con ningún principio metafísico, sino que nos viene puramente por la experiencia de nuestros sentidos; pero la existencia de nuestra alma como principio inteligente es innegable a nuestra conciencia: *Pienso, luego existo*, dijo Descartes, y ya trece siglos antes San Agustín, refutando a los agnósticos de su tiempo, dejó escrito: *Si me engaño, existo; luego no puedo engañarme cuando digo que existo porque por esto precisamente* (en el orden lógico, no en el ontológico) *existo, porque me engaño*. Sin embargo, este hecho primario, la propia existencia, puede ser negado sin contradicción; y lo mismo puede decirse del axioma fundamental de cualquier ciencia posible: la capacidad de nuestras facultades cognoscitivas, y en especial de nuestra inteligencia, de poder conseguir la verdad y la certeza, según aquel viejo dilema socrático: *Sabes que no sabes o no lo sabes*, etc.

Difícil es hacernos cargo de qué clase de ciencia lógica, crítica y metafísica desarrollaría, en tiempo indefinido, una inteligencia discursiva como la nuestra, pero sin la ayuda de los sentidos, ni de la observación de un mundo exterior y sin ningún contacto con otras inteligencias; ni siquiera nos es fácil prever qué ciencia desarrollaría otra humanidad inteligente y sensible como esta a que pertenecemos, pero sin ninguna comunicación con ella; *a priori*, y sin miedo a equivocarnos, cabe conjeturar que, en ambas hipótesis, sería bastante diferente de la nuestra en muchos aspectos materiales. Sin embargo, sin titubear podemos afirmar que en el segundo caso, los conceptos de agregado concreto y de número cardinal abstracto, que son el fundamento real y el objeto material de la Aritmética respectivamente, serían iguales a los nuestros; en el primer caso la conjetura es más difícil, porque el concepto de agregado no podría derivarse de la pluralidad simultánea, sino sólo de la sucesiva; pero no es necesario extremar tanto la hipótesis para poder afir-

mar la tesis. Análogamente podríamos discurrir por los otros principios de identidad, contradicción y razón suficiente, y sobre las reglas de juicios analíticos y sintéticos y de racionios deductivos e inductivos (que constituyen el objeto material de la lógica) y de su aptitud para conducirnos a la investigación y conocimiento de la verdad no inmediatamente evidente y a posesionarnos formalmente de ella por medio de la certeza formal, la cual importa no sólo el convencimiento íntimo, que puede darse acerca de proposiciones falsas en individuos o bien débiles intelectualmente o bien ofuscados por la pasión, sino también la intrínseca repugnancia con la falsedad, sobre la que no puede versar engaño, como se ve en el argumento ya expuesto de San Agustín.

En el siglo xx creo que se puede decir que el número de impugnadores de los principios de identidad y contradicción, dignos de mención, es muy reducido; pero además de estos dos principios, la lógica y la aritmética suponen la legitimidad de sus deducciones y esta legitimidad importa otros dos principios más discutidos: el de razón suficiente y el de abstracción.

El principio de razón suficiente, sin el cual ninguna ciencia (y menos la lógica) nos es posible, no suele ser impugnado directamente, sino en su consecuencia, o sea en el principio de causalidad: como éste pertenece más bien al orden físico que al metafísico (sobre todo por la naturaleza de las dificultades propuestas), dejo su análisis para la exposición de la décima tesis.

El principio de abstracción, en el que se basan los llamados conceptos universales, es fácilmente impugnable por razón de la oscuridad del objeto; es necesario, por lo tanto, declarar éste en el grado conveniente para cerciorarnos del valor objetivo de los conocimientos científicos que versan sobre los mismos.

En el mundo, aun en el de nuestra conciencia, no existen más que individuos (sustancias, accidentes, modalidades); estos individuos tienen algo común, por lo menos el existir, y en cambio, no hay dos enteramente iguales, porque si no difirieran, por lo menos modalmente (como sucede a un mismo ser en diverso lugar o tiempo), no serían dos seres distintos, por lo menos modalmente, sino uno solo. Con los elementos comunes a varios seres distintos formamos en nuestra mente el concepto universal y lo expresamos al exterior (y aun interiormente) con palabras (o gestos). Este proceso psicológico es verdaderamente

oscuro y cabe mucha discusión sobre la manera como lo realiza nuestra inteligencia; además se revelan en él simultáneamente una perfección y una imperfección de la misma. Perfección, porque la facultad de abstraer es precisamente la que nos permite hacer juicios (ya analíticos, ya sintéticos), y raciocinios (ya deductivos, ya inductivos), mediante los cuales combinamos y ampliamos nuestros conocimientos y progresamos intelectualmente, cosa que, evidentemente, no pueden hacer los irracionales; y también imperfección, porque nos vemos obligados a prescindir de los caracteres individuales y aun específicos más complejos, para detenernos sólo en otros más sencillos, que podemos distinguir bien. Cuanto mayor es el talento de un hombre, puede concebir más detalles específicos e individuales en sus ideas y palabras, y sus conocimientos se hacen más latos y profundos (1), y una inteligencia perfecta percibiría los seres sin necesidad de abstraer. Estas teorías sobre la abstracción y los conocimientos derivados de ellas son, sin duda, tan viejas como la humanidad que discurre, aunque por supuesto no enunciadas con claridad y precisión (cualidades de suyo subcontrarias, como expondré al explicar la sexta tesis), sino muy posteriormente; sucesivamente fueron impugnados por algunos filósofos griegos (Protágoras (2) (485-411 a. de J. C.), Epicuro (341-270 a. de J. C.) y los

(1) P. Duhem, en su libro citado *La Théorie Physique. Son Objet, Sa Structure* (París, Marcel Rivière, 1913, 2.ª ed.) dedica bastante de su primera parte, «L'object de la théorie physique». Cap. IV, «Les théories abstraites et les modèles mécaniques» al estudio de dos psicologías distintas: la que él llama *amplia, pero débil*, que atribuye a los ingleses, y la que denomina *estrecha, pero fuerte*, que atribuye a los continentales (por no decir exclusivamente a los franceses). La lectura es interesante en alto grado, y además de muchos físicos antiguos y modernos, hace desfilar ante el lector muchos otros personajes históricos: Napoleón, Talleyrand, Balzac, Dickens, Shakespeare, etc. Séame permitido hacer dos observaciones, sin querer quitar ningún mérito al conjunto de ideas y conclusiones: 1.ª La profundidad y la amplitud no son siempre irreconciliables y se presentan casos históricos de su acoplamiento; v. g., Newton, Leibnitz, Euler, Gauss, Cauchy. 2.ª No sólo es muy difícil asignar los individuos a cada clase, sino que muchos no pertenecen a ninguna, no por falta de inteligencia, sino porque en distintas ocasiones aparecen muy distintos; v. g., Aristóteles, San Agustín, el P. Suárez y, en general, los grandes polígrafos, de los que ha sido un ejemplo en nuestra patria en tiempos modernos D. Marcelino Menéndez Pelayo.

(2) Tal vez el personaje es fabuloso, pero es uno de los más salientes de los diálogos de Platón.

estoicos), por otros medioevales (Pedro Abelardo, 1079-1142 (1)—combatido por San Bernardo de Claraval—, Durando y Ockam, fundadores de la escuela nominalista a principio del siglo xiv) y, por fin, por todos los escépticos y positivistas de los siglos xviii, xix y xx; en cambio, fueron exageradas por Platón, según el testimonio de Aristóteles (tal vez no del todo fiel), y por los ultrarrealistas del siglo xii, que parece que admitían la existencia real de las ideas universales, prescindiendo de los individuos. Pues bien, sin quitar ni disimular nada de la dificultad de la materia, creo que es imposible fundar ninguna ciencia lógica sin admitir, contra los unos, el que las ideas universales tienen valor objetivo, basado en la semejanza real de los objetos bajo algún aspecto; pero, de tal manera, que no existen con el carácter universal con que las concebimos, el cual es sólo producto de nuestra facultad de abstraer. Las dificultades inherentes al análisis psicológico del proceso de abstracción no afectan a la certidumbre de este resultado.

Para acabar de aclarar el sentido de esta segunda tesis, expondré los objetos materiales y formales de la lógica, la metafísica y la aritmética.

El objeto material de la lógica lo constituyen los conceptos universales, sus relaciones manifestadas en forma de juicios (analíticos o sintéticos, universales o particulares, afirmativos o negativos) y las combinaciones de los mismos, por medio de raciocinios deductivos o inductivos, obedeciendo a las reglas de buena consecuencia lógica; el objeto formal es la verdad y la aptitud de nuestra inteligencia para conseguirla con certeza, pues ésa es la única razón formal del asentimiento a sus reglas. Como expresé en el enunciado, nadie se ha atrevido a quebrantarlas abiertamente al combatir la posibilidad de la lógica, sino al revés, el lujo dialéctico desplegado por los escépticos, en especial por Kant en su *Crítica de la razón pura*, es la confirmación más rotunda de la fe que tienen en las leyes lógicas.

Poco quiero decir del objeto material de la metafísica u ontología, que es el ente (existente o posible, por lo menos bajo algún aspecto) considerado como tal, y sus atributos trascen-

(1) Personaje verdaderamente histórico; también son históricas sus relaciones con Eloísa. Sin embargo, el escrito anónimo que las describe, las hace en gran parte fabulosas.

dentales de unidad, cognoscibilidad y conveniencia. Su objeto formal es la posibilidad de clasificarlos objetivamente en grupos que pueden ser ínfimos, medios y supremos (predicamentos de Aristóteles o categorías de Kant) y de percibir sus relaciones mutuas de muy diversas clases; por esa razón todos los sistemas ontológicos incluyen el análisis de la noción de causalidad de diversas clases (eficiente, material, formal, final), aunque traten de impugnar su concepto riguroso.

El objeto material primario de la aritmética es el número cardinal entero y positivo, que es la abstracción de la naturaleza de los elementos en los agregados concretos y finitos, y las operaciones directas sobre los mismos (adición y multiplicación) según sus leyes formales. Al descubrir la primera de éstas, la de uniformidad (la cual no es debida a una debilidad de nuestra inteligencia, sino al contrario) (1), se le ocurrieron al primer hombre que discurrió sobre la aritmética las operaciones inversas (sustracción y división), cuyas leyes formales, combinadas con las de la adición y multiplicación, constituyen el argumento de la aritmética elemental.

Las operaciones superiores, potenciación y radicación, son mucho más artificiosas mentalmente, aunque se ofrezcan respecto de las de multiplicación y división con la misma relación que éstas respecto de la adición y sustracción; prueba de este

(1) Séame permitida una pequeña observación acerca de la famosa discusión sobre si $5+7=12$ es un juicio analítico o sintético «a priori». El ejemplo está escogido con extraordinaria habilidad psicológica, porque 5 es el primer número cardinal del que no tenemos concepto simultáneo inmediato, sino que habemos menester comparar sucesivamente un agregado de cinco elementos con otro conocido (p. e., por el hábito de contar uno, dos, tres, cuatro, cinco o aplicando los dedos de la mano), y en cambio los conjuntos de dos, tres y cuatro elementos (binas, ternas y cuaternas) los concebimos sin tener que contar sucesivamente sus elementos y 7 ni es igual ni muy superior a 5. ¿Por qué no escogió Kant $2+2=4$ ó dos números de muchas cifras cada uno? Lo último era manifiestamente declarar el artificio de la argumentación y lo primero es demasiado evidente (véase la tesis duodécima) para ser discutido. Pero prescindiendo de la naturaleza del juicio $5+7=12$, la certeza de la verdad del mismo, único punto que nos interesa de veras desde el punto de vista de la criteriología, no la niega Kant, supuestos conocidos los términos lógicos 5, 7, 12 (números cardinales), más (+) (signo de agregación) y es igual (= expresión de la identidad entre los términos completos del juicio $5+7, 12$).

artificio es el proceso histórico que revela que el conocimiento de las operaciones de cuadrar, cubicar y sus inversas es completamente prehistórico; el de otras potencias y raíces es simultáneo con el de los números negativos, aunque independiente de él lógicamente, y el de los logaritmos es del siglo xvii (Napier), desde el punto de vista material, y del siglo xviii (Euler) desde el punto de vista formal, como operación inversa de la potenciación.

El objeto material secundario de la aritmética es el número derivado de las operaciones ejecutadas sobre números enteros y de las operaciones sobre los mismos. No cabe duda sobre los números negativos o fraccionarios; pero sobre los números inconmensurables e imaginarios ha habido una discusión secular, que no creo pueda darse por definitivamente resuelta, ni es fácil resumirla en pocas líneas, ni en pocos párrafos, ni aun en pocos capítulos (1). El punto de discusión es si la noción de límite, que históricamente se introdujo en las ciencias matemáticas por consideraciones de intuición espacial y, por lo tanto, no puramente lógicas, puede ser tratada completamente sin el recurso a la misma, o bien, si es posible una aritmética general, cuyo objeto material no sea el número real y el número complejo, *cuyo conjunto es no sólo INFINITO, sino también CONTINUO*, sino puramente el conjunto de números derivados del conjunto de números naturales y de las generalizaciones necesarias sobre los mismos, a fin de poder efectuar sobre ellos las siete operaciones aritméticas sin salirse del campo de los mismos; de esta manera se rechazan las nociones de *límite* y de *continuo*, por ser extrañas a la aritmética así concebida. Esta última pretensión (2), que equivale a rechazar los números e y π del campo de la aritmética, no ha podido ser realizada, ni creo que tampoco se pueda realizar la primera. Desde el punto

(1) Véase *Nombres irrationnels et Notion de Limite* («Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées», 1, 3, págs. 133 a 208), del artículo alemán de A. Pringsheim, traducido y revisado por J. Molk, en que está expuesto magistralmente el tema, tal como se concebía a principios de siglo y como en lo sustancial se considera al presente.

(2) Véase el párrafo 10, *Point de vue de L. Kronecker*, del artículo citado anteriormente («Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées», 1, 3, pág. 158).

de vista práctico y doctrinal, se expone la aritmética con el aditamento del paso al límite, prescindiendo de si esta noción es o no aritmética, y entonces el objeto material de la aritmética es el *número complejo* y las operaciones sobre los mismos, así directas como inversas, incluso resolución de ecuaciones algébricas y trascendentes, con sus leyes formales y reglas, tal como se hace en los libros clásicos. La aritmética así extendida abarca todo el análisis finito e infinitesimal, y sus operaciones reciben el nombre genérico de *funciones*, en las que no sólo se comprenden las que se derivan de un número finito o infinito de operaciones aritméticas elementales, únicas consideradas hasta mediados del siglo pasado, sino cualesquiera clase de relaciones entre dos campos de números y las clasificaciones de estas operaciones (1).

Pero lo que ordinariamente los profesores y los autores de tratados y artículos no ponen de relieve es el objeto formal de la aritmética. Este es triple: la constancia del número cardinal, su operabilidad y constancia o uniformidad del resultado y, por fin, el infinito numerable o discreto. Cada uno de estos aspectos es independiente del otro, pero apenas si se puede concebir la aritmética sin estos tres extremos.

El primero, más fundamental, está basado en la posibilidad de ordenar un conjunto finito de objetos y permutar dos de ellos, consecutivos o no consecutivos, dejando inmutable el nú-

(1) Véase la *Introducción a la Matemática superior*, de J. Rey Pastor (Madrid, 1915). Aunque en ese precioso opúsculo no se hace la separación del objeto material del *Análisis* y de la *Geometría*, sino que más bien tiende a confundir ambos en el de una sola ciencia, la *Matemática*, sin embargo se enuncia bien claramente que las tres *ideas capitales* (o sea lo que en el lenguaje filosófico se llama *objeto material*) de la Matemática son: *Conjuntos, funciones, grupos*. Ahora tal vez el enorme desarrollo que ha adquirido el *Cálculo de probabilidades* exige otra noción nueva, que se aplica hasta a la teoría superior de números enteros. Como éstos son, sin duda, el objeto material de la Aritmética en el sentido más estricto, y por otro lado no se conoce ninguna prueba elemental aritmética del teorema fundamental de esa teoría, que se refiere a la distribución de los números primos (como tampoco se conoce ninguna prueba rigurosamente aritmética del teorema fundamental del Álgebra, que trata de la existencia de las raíces de las ecuaciones algébricas), parece que a las tres ideas capitales que enunció ya hace veintisiete años el Sr. Rey Pastor hay que añadir hoy la de la *probabilidad*, que es independiente de ellas.

mero cardinal. Este concepto es primario; sin embargo, sería posible negarlo sin contradicción lógica, aunque entonces sería imposible la aritmética tal como la concebimos y expresamos.

La operabilidad de los números y la certeza de los resultados de esas operaciones es lo que más atrae en la aritmética; y aun los muchos hombres a quienes interesa muy poco la ciencia de los números, sin excepción se rinden a la evidencia de sus resultados. En frases clásicas comunes a todas las lenguas: *Esto es tan cierto como dos y dos son cuatro* (1) expresa el vul-

(1) Entre filósofos de oficio se considera de mal gusto aducir ejemplos de razonamiento de plebe para probar una tesis cualquiera. Séame permitida una digresión sobre este tema: La ciencia, y en especial la filosofía, tiene por objeto formal la verdad conocida como tal, o sea cierta, y en este sentido reflejo es patrimonio casi exclusivo de profesionales de la misma. Pero la certeza directa no es mayor en las personas cultas que en las que no han pasado una educación universitaria, sino muchas veces al contrario. Esto ya lo hace notar Balmes, al hablar del entendimiento práctico, al final de su *Criterio*; se contenta con enunciar el hecho en abstracto, fingiendo una discusión entre un proyectista charlatán y un hombre práctico, incapaz de rebatir los argumentos del primero, pero que guiado por el *sentido común*, se niega a dejarse convencer y arrastrar por su arguyente y acaba por tener razón. En casos concretos nos ofrece la historia ejemplos muy claros; por ejemplo, el de *Akbar*, el *Gran Mogol* de nuestros anales (nacido en Umarkot el 23-XI-1542, entronizado como emperador del Indostán en Kalancur el 14-II-1556, muerto en Agra el 17-X-1605); en su largo y próspero reinado de casi cincuenta años, vió casi decuplicados sus dominios y su talento organizador y administrativo no quedó en zaga a su ambición de conquistador y pericia como general. Fué gran protector de las artes y ciencias, y muy tolerante en materias religiosas, hasta el punto de que los misioneros jesuitas se hicieron la ilusión de que se convertiría al catolicismo; en realidad era un hábil político, que quería estar bien con todos los que había sometido. Este personaje extraordinario no sabía leer ni firmar su propio nombre; y, sin embargo, además de tener un gran talento práctico como militar, gobernante y diplomático, era muy erudito por oído y memoria (se hacía leer muchos libros que recordaba perfectamente), hasta poder discutir con habilidad sobre abstrusos temas de religión y filosofía.

Ejemplos no tan claros como el de este analfabeto (más bien material que formalmente tal) los ofrece la ciencia teórica y práctica. Los dos grandes inventores americanos Graham Bell y Thomas Alva Edison y el belga Zénobe Gramme habían sido modestos obreros cuando jóvenes y nunca llegaron a poder *filosofar*, ni aun sobre sus propias invenciones. Entre los prodigios calculistas que cita Rouse Ball en sus *Mathematical recreations and essays*, se ve que los más eran analfabetos y jamás llegaron a adquirir

go este asentimiento humano a la evidencia de los resultados ; y este asentimiento tampoco es ciego ni producto de debilidad de inteligencia, sino que, al contrario, es una conquista de la misma.

Por fin, que el infinito numerable o discreto es el último objeto formal de la Aritmética lo prueba prácticamente H. Poincaré en el artículo que he citado al principio. Podría crearse una aritmética con leyes formales casi iguales a la ordinaria ; por ejemplo, eligiendo un número primo cualquiera y llamando *suma* al resto de la suma ordinaria respecto a dicho número, *resta* a la operación inversa, *multiplicación* al resto de la multiplicación ordinaria y *división* a la operación inversa. Las leyes formales de las operaciones permanecerían las mismas, sólo que el número primo dado jugaría el papel de cero e infinito a la vez (1). Pero tal aritmética, perfectamente lógica y tal que si el número primo es muy grande (y puede tomarse todo lo grande que se quiera, pues el número de números primos es ; infinito !) coincidiría con la nuestra en resultados suficientemente pequeños *relativamente* a dicho número primo, no sólo resulta artificial a nuestra mente, sino que suprime un elemento, el infinito potencial numerable, sin ninguna razón lógica. Así como es principio de sana filosofía que no hay que multiplicar los

un gran desarrollo mental, a excepción de Wallis, Ampère y Gauss ; uno de ellos, Fuller (1710-1790), era un esclavo negro, nacido en Africa ; otro, Buxton (1707-1772), fué labrador toda su vida, y el contemporáneo J. Inaudi (1867-1933) era un pastor italiano. Especial mención en este sentido merecen los dos genios matemáticos Evaristo Galois (1811-1832) y Srinivasa Ramanujan (1887-1920) ; pues su característica fué una seguridad absoluta y no meramente subjetiva de la verdad de sus profundos descubrimientos y una gran dificultad para precisarlos con palabras, de modo que otros grandes matemáticos pudieran apreciar con rapidez su valor.

(1) Así, por ejemplo, si el número primo dado fuere 101 tendríamos las mismas tablas pitagóricas de nuestro sistema hasta diez por diez ; pero a partir de este resultado obtendríamos, por ejemplo, $63+46=8$, y recíprocamente, $8-63=46$ y $8-46=63$, y también $63 \times 46=70$, y a su vez $70 : 63=46$ y $70 : 46=63$. Sólo 50 números tendrían raíz cuadrada exacta (los llamados restos-cuadráticos de Gauss y Dirichlet) y éstos tendrían dos cada uno ; por ejemplo, $\sqrt{37_1}=21$ y $\sqrt{37_2}=80$ (su suma siempre sería 101, el número absurdo en este sistema, pues es el cero), y así se podría discurrir por propiedades conocidísimas de las raíces primitivas de los números primos. En tal sistema habría que definir *número primo* por aquel que no puede ser descompuesto en productos de dos factores *menores* que él.

entes existentes sin necesidad, también lo es que no hay que negar la *posibilidad* de los mismos sin ninguna razón positiva que demuestre su absurdo.

Pero, ¿ realmente no es absurdo el mismo concepto de *infinito*? He aquí una antiquísima discusión que me conduce a la tercera tesis.

III

Adhuc non est demonstratum, quod Deus non possit facere, ut sint infinita actu.

Santo Tomás de Aquino: «De aeternitate mundi».

Así como la libertad humana es el enigma de la psicología, la ontogénesis el de la biología, la constitución de la materia el de la química, la acción a distancia el de la física, el movimiento el de la Cinemática (o Universo *espacio-tiempo*) y el continuo espacial el de la Geometría, las ciencias de puro razonamiento, que hemos considerado en la tesis anterior tienen también su enigma: el infinito.

Pero existe una gran diferencia entre este enigma y los arriba citados; porque la libertad humana, la ontogénesis, la materia, la acción, el movimiento y la extensión son *realidades* que podrán negarse sin contradicción, pero que se nos imponen desde fuera, y aun negándolas hay que hacer ciencia de ellas (1): Pero, en cambio, el infinito aparece a nuestro entendimiento, no sólo vago, sino también contradictorio (por lo menos a una primera vista superficial), y hasta cierto punto inaccesible al análisis. Un fantasma que nos atrae, pero que se nos escapa de las manos y se nos aparece cada vez más alejado a medida que tratamos de aproximarnos a él.

Ante este enigma se han adoptado dos actitudes opuestas: la de los filósofos y la de los matemáticos.

Los filósofos de oficio no ven en el infinito más que uno de

(1) Al fin y al cabo, el *Discours de la méthode*, de Descartes, y la *Kritik der reinen Vernunft*, de Kant y demás análisis similares, no son más que *filosofía de las ciencias* por métodos científicos.

tantos problemas de metafísica, y no de los más importantes ni más oscuros (pues todos los problemas metafísicos lo son mucho, aunque no en grado exactamente igual), si se consideran sólo infinitos *relativos* (en extensión, en duración, en alguna actividad particular, sobre todo en una multitud sucesiva de entes infinitos). Han dividido el infinito en *potencial* y *actual*: el infinito *potencial* o *sincategoremático* es la capacidad limitada de un ente finito, pero supuesto de duración ilimitada y que, por lo tanto, sucesivamente puede ejercer una serie ilimitada de acciones. El infinito potencial, por lo tanto, no quiere más que la duración ilimitada del sujeto con el tiempo, y puede llamarse *infinito sucesivo* (1). El infinito *actual* o *categoremático*, que puede llamarse también *simultáneo*, implica una multitud o una actividad infinita en un momento dado, y, por lo tanto, o un espacio infinito o una fuerza infinita; si esta actualidad lo es en todas las líneas posibles e imaginables, se tiene *el infinito absoluto o simplemente tal*, propio exclusivamente del ser por esencia o por sí mismo y necesario (*ens per essentiam, ens a se, ens necessarium*) que es único y al que llamamos Dios; si la actualidad no lo es más que bajo algún aspecto, se tiene *el infinito según un aspecto o relativo* (*secundum quid, per participationem, ab alio*).

Como dije al principio, no deseo en esta ocasión tratar de Dios, no sólo como objeto primario de la ciencia de la revelación sobrenatural (Teología, ciencia sagrada, según San Agustín y Santo Tomás, como puede verse en la primera cuestión de la primera parte de la *Summa Theologica*), pero ni siquiera como objeto primario de la filosofía natural (*Teodicea*, según Leibnitz); como que de El no podemos tener en esta vida un conocimiento directo, como el que tenemos por nuestros sentidos de los fenómenos del mundo exterior y por nuestra conciencia de nuestra propia alma, sino sólo por discurso podemos cerciorarnos con certeza de su existencia y la de algunos de sus atributos (2), no es conforme a la buena lógica tratar de El an-

(1) Los antiguos escolásticos expresaban esta idea con dichos que se hicieron célebres en las disputas: *no hay tantos (seres) que no pueda haber más; no hay ser tan grande que no pueda ser mayor; no hay ser tan bueno que no pueda ser mejor* (non tot quin plura, non tantum quin majus, non tale quin melius).

(2) Así fué declarado en la Sesión 3.^a del Concilio Vaticano (24-IV-

tes de haber tratado de la verdad objetiva de los seres más al alcance de nuestra inteligencia, y de aquellas de sus actividades que se puede decir nos entran por los ojos y se imponen a nuestra mente, independientemente de nuestra voluntad, por la claridad con que las vemos.

Así que el infinito del que se habla en esta tesis es solamente el *relativo*; y de él afirmamos que su existencia es posible y aun en ciertos aspectos real, o sea, que los dos infinitos potencial y actual son realidades, el potencial posible y el actual existente (1).

Los filósofos que niegan el infinito potencial son pocos y antiguos (Enrique de Gante (2), el famoso nominalista Durando (3), muy amigo de opiniones atrevidas, y, sobre todo, el jesuita P. R. Arriaga (4), notable por su empeño dialéctico, que le inclinaba a negar la ciencia clásica, poniendo muy de relieve los puntos flacos, para después proponer o defender opiniones mucho más inciertas, débiles y raras que las que había rechazado. Su posibilidad no es más que la afirmación del hecho de que si son posibles n objetos, son posibles $n + 1$; si es posible una magnitud o una perfección (sin necesidad de que sean *medibles*, o sea, cantidades en estricto sentido matemático), es posible otra magnitud o perfección mayor; como no se puede aducir ninguna razón sólida en contrario de estas ideas, ellas bastan para afirmar la tesis en este sentido. Pero tiene además otro muy controvertido, y es el de la posibilidad del infinitésimo,

1870), Cap. 2.º, citando las palabras del v. 20 del cap. 1.º de la Epístola de San Pablo a los Romanos, el cual condena a los filósofos gentiles, que por no adorar al único Dios verdadero, cuya divinidad y fortaleza invisibles pueden ser conocidas por los hombres al contemplar sus obras (o sea los seres creados) visibles, se pusieron a adorar hombres, aves, cuadrúpedos y reptiles.

(1) El Sr. Rey Pastor, en su obra ya citada *Introducción a la Matemática superior*, Conf. 1.ª, para eludir la cuestión filosófica declina el pronunciarse en esta materia y se ciñe a la matemática, inspirándose en los descubrimientos de Cantor sobre conjuntos infinitos.

(2) Contemporáneo de Santo Tomás de Aquino.

(3) Principios del siglo xiv.

(4) Mediados del siglo xvii, contemporáneo de Descartes. Enseñó en Praga y es autor de extensos *Comentarios sobre Santo Tomás*, muy alabados por Menéndez y Pelayo; pero, en realidad, fué más erudito controversista que un sólido pensador. Es muy consultado por los amigos de rarezas.

claro que no como número entero (pues no existe un entero menor que la unidad) pero sí como magnitud o perfección, pues, por pequeña que ésta sea, siempre se puede concebir otra menor que ella, y la expresión corriente en matemáticas, siendo *h una cantidad menor que otra cantidad finita dada por pequeña que sea* (sin necesidad de especificar la naturaleza de la cantidad) no es más que la aserción de esta posibilidad.

Pero al tratarse del infinito actual, simultáneo o categórico, la controversia es mucho mayor y llega hasta tiempos contemporáneos. Es opinión muy frecuente entre escolásticos que el infinito actual implica contradicción; pero son pocos los que mantienen esta opinión hasta sus últimas consecuencias (1). Como que las razones que dan para afirmar tal contradicción son contra la idea de un infinito actual que no puede crecer ni disminuir, pero no contra la de un infinito actual inagotable; creo que no hay que tener miedo a afirmar dicha posibilidad y, supuesta la realidad de la cantidad continua (espacio, tiempo, materia, energía), incluso su actual existencia.

Dos dificultades suelen aducirse a esta conclusión y voy a exponerlas, junto con las soluciones que me parecen adecuadas:

(1) Séame lícito citar entre estos pocos al P. Luis de Lossada, S. J. (1684-1748), español, autor de un tratado de *Summulas* (Lógica menor) y de otro mucho más extenso de *Filosofía general*, reeditado a fines del siglo pasado por la editorial «La verdadera Ciencia española». Es decidido partidario del P. Suárez, que puede decirse inspira casi todas sus páginas; pero, al tratarse de la esencia del continuo, y observar que su existencia real implicaría la de una actualidad infinita de puntos, líneas y superficies, se aparta de su maestro, y sin llegar a solidarizarse del todo con las ideas zenonianas, manifiesta claramente su inclinación a ellas, por parecerle menos absurdas que las clásicas. Rara conclusión, ya que los argumentos de Zenón, por lo menos tal como nos han llegado transmitidos por Aristóteles y sus comentaristas, son los ejemplos más frecuentes que se aducen de extravagancias filosóficas, de donde proviene la conocida frase: «El movimiento se demuestra andando.» D. Adolfo Bonilla de San Martín era también partidario de esas ideas zenonianas, pero no las consideraba sino puramente desde el punto de vista dialéctico o controversista, pues no era matemático. Entre matemáticos he visto quienes decididamente equiparan los puntos a esferitas muy pequeñas; pero en sus explicaciones siguen los métodos clásicos; lo cual puede hacerse por dos razones: porque la Geometría continua es el límite de la discontinua, y porque la exposición de esta abrumaría a principiantes, como vemos que ocurre con la *Geometría Axiomática*, de Hilbert y Schur.

la primera es si, prescindiendo de la observación del mundo exterior, podemos adquirir la noción del *continuo* y de sus partes en número infinito actual; y la segunda, qué clase de existencia hay que asignar a sus infinitas partes y a los elementos indivisibles de las mismas, que designamos con las palabras *instantes* o *momentos*, *puntos*, *líneas* y *superficies matemáticas*.

Para la primera dificultad hay que tener presente que, aunque sin la observación por los sentidos no podemos tener idea de *espacio* (según el sentido de que provenga suele designarse por visual, auditivo y táctil), en cambio, por la mera consideración interna, podemos adquirir la noción de *tiempo*, pues nuestra conciencia, raíz material de la certeza metafísica, al revelarnos nuestra propia existencia, lo hace como la de un *ente sucesivo* y *continuo*. No podemos con la sola conciencia *medir el tiempo*, ya que ni a priori, ni mucho menos a posteriori, no nos consta que operaciones iguales (pensar, sentir, entender, querer) nos cuesten el mismo tiempo; pero sí podemos asignar la precedencia (por ejemplo, de aprensiones *antes* de formar un juicio, de juicios *antes* de sacar de ellos la conclusión, de ideas *antes* de decisiones, etc) de unas operaciones respecto de otras y *además* de su complejidad y continuidad (1). Esto basta para que podamos formar idea de un continuo real, aunque no matemático, pues no es medible. Este continuo se identifica realmente con nuestra propia conciencia sucesiva sin necesidad de ningún elemento nuevo que la determine (2). De aquí que, por

(1) Sabido es que Kant calificó al *tiempo elemento formal de la sensibilidad interna* en contraposición al espacio, que lo es de la externa. Así es en realidad; en lo que añade, que lo que se nos representa por dichas formas no nos consta que tenga un valor objetivo, es en lo que hace una afirmación gratuita.

(2) Es opinión corriente (aunque muchos filósofos antiguos, modernos y contemporáneos la nieguen) que el *lugar* de un cuerpo se distingue del mismo cuerpo y que un mismo cuerpo está ahora *en un lugar*, ahora *en otro lugar* del espacio, aunque sea prácticamente imposible asignar el sistema espacial absoluto de referencia; de donde se sigue que al especificar la posición de un cuerpo en el espacio, hay que asignar *su lugar*, que constituye *su modo de estar en el espacio*, adherido al cuerpo, pero distinto de él (Suárez), pues el mismo cuerpo puede separarse de *su lugar* y ocupar otro. A este modo de estar suele llamarse *ubicación*.

Es frecuente, por establecer analogías con el espacio, asignar también.

sola la consideración del hecho primero de la existencia de nuestra propia conciencia sucesiva (que siempre podemos concebir dividida indefinidamente en intervalos cada vez más pequeños), podemos adquirir la noción del continuo temporal y, por abstracción, del continuo ideal de una dimensión. El acoplamiento por relación de varios continuos unidimensionales nos puede inducir a idear continuos de varias dimensiones, en manera análoga a la que deducimos los conjuntos numerables doblemente infinitos (p. e., números fraccionarios) o múltiplemente infinitos por la asociación de conjuntos numerables simples, como lo es la serie de números naturales.

La segunda dificultad es más nominal que real. Todo conjunto continuo finito está integrado por un número finito de continuos finitos de su misma dimensión; tales partes tienen la misma existencia real que el conjunto total. Los indivisibles (terminantes de las partes, continuantes del todo) que las separan tienen también existencia real, aunque no independiente de la parte que terminan, pues no podemos concebir un momento, un punto matemático, una línea divisoria, una superficie limitante sin un intervalo de tiempo o una extensión espacial al que esté adherido. Todo subsiste previamente a cualquiera de las infinitas divisiones en que podemos concebir una división; pero antes de realizar (aunque no sea más que idealmente) tal división, tales partes existen *virtualmente*, no formalmente como

una *cuandocación* en el tiempo absoluto a los seres existentes; pero este *modo de existir* en un tiempo determinado es enteramente superfluo porque no nos es concebible la existencia actual de un ser actual, separado del ser en el tiempo actual en que existe; y, en cambio, sólo por la observación caemos en la cuenta de que un ser actual dado ocupa un solo lugar dado en el tiempo dado (lo contrario es imposible naturalmente, pero no metafísicamente), y, en cambio, puede ocupar un mismo lugar (por lo menos relativamente a los cuerpos circunstantes) en distintos tiempos. Así que, aunque desde el punto de vista del continuo, el espacio y el tiempo presentan analogías (sólo que el espacio nos aparece con tres dimensiones y el tiempo con sólo una y el concepto de dimensión no es puramente convencional), esta analogía no puede extremarse e identificar espacio y tiempo, *por lo que toca a su naturaleza*. La teoría de la relatividad se refiere a la computación numérica de uno y de otro; lo cual no puede hacerse con el tiempo, sino por consideraciones de movimiento (ya sea en el sentido estricto de movimiento local, ya sea en el más lato de cambios en los seres), que obligan a reconocer otras ideas, además de la de tiempo.

tales. Y como que los indivisibles citados no los podemos concebir sin la división, tampoco están designados formalmente antes de efectuar la división.

Todos entendemos estas dificultades filosóficas, y absurdo es querer negarlas u ocultarlas; pero como los matemáticos operan en sus cálculos en virtud de estas intuiciones y, aunque es verdad que a veces tienen que rectificarlas, es un hecho histórico que el substrato permanece el mismo después que antes de la rectificación (1), creo que no es arrogancia la afirmación de lo expuesto. No he tratado de invalidar el *dicho* de Santo Tomás, con que he encabezado con toda intención la exposición de esta oscura tesis, sino al contrario; si el Doctor Angélico, a pesar de su manifiesta inclinación a negar la posibilidad del infinito actual (2) afirma, con toda claridad y sin ambages de ninguna clase, que no se ha demostrado todavía que Dios no puede hacer que haya infinitos seres actualmente (lo que equivale, en su lenguaje y manera de concebir, a decir que no se puede decir que el infinito actual envuelva una contradicción o absurdo, porque según su pensamiento, Dios puede hacer todo lo que no es absurdo y no puede hacer absurdos), no es mucho decir que existen actualmente infinitos seres de tan poca entidad y ésta depen-

(1) Las investigaciones de Riemann, Weierstrass, Lebesgue, Schwarz y La Vallée Poussin, y las que no hace muchos meses oímos en esta misma sala al ilustre profesor de la Sorbonne, Maurice Fréchet, sobre el concepto de superficie, demuestran que la tendencia de esas rectificaciones no es demoleadora, sino extensiva. No se trata de negar el pasado, sino de acomodarlo a nuevas ideas, observaciones y descubrimientos, y viceversa, acomodar éstas a la verdadera ciencia clásica.

(2) En la primera parte de la Summa Theologica 7, art. 3. *Si puede existir algún infinito actual en tamaño* y art. 4, *Si puede haber una multitud infinita*, trata el Santo del infinito y del continuo, pero no en el sentido que le hemos dado en la tesis, pues se refiere a extensiones o multitudes infinitamente grandes. Al final de la prueba de la segunda tesis tiene este párrafo, que hace al caso: *Es posible una multitud infinita en potencia*, porque a la división de la magnitud (o de la multitud) se sigue al aumento de la multitud (o sea el número de miembros). Porque cuanto más se divide resultan más cosas en número. Por lo cual como el infinito se encuentra en potencia en la división del continuo, etc.» Por lo que se ve que el Santo acepta la divisibilidad indefinida del continuo y la preexistencia virtual de las partes en el mismo, aunque no quiera afirmar que esas constituyan un infinito actual, porque no son partes antes de la división.

diente, como los momentos de tiempo y los puntos, líneas y superficies matemáticos (1).

La actitud de los matemáticos ante el enigma del infinito, es muy distinta de la de los filósofos; mientras que para éstos es el tema de muchas disputas, con las que perder el tiempo y lucir el ingenio dialéctico, para los matemáticos es asunto práctico, sobre el que hay que discurrir y sacar conclusiones útiles. La primera es que es posible concebir un conjunto infinito, así en Aritmética pura como en ciencias aplicadas (Geometría, etc.), y que se puede afirmar si elementos dados pertenecen o no a un conjunto infinito dado. Si se comparan entre sí dos conjuntos infinitos, podrán ocurrir dos casos: o que se puedan hacer corresponder sus elementos uno a uno por algún medio u otro, o que sean de tal naturaleza que siempre ocurra que uno de los conjuntos exceda al otro en elementos. En el primer caso se dice que ambos conjuntos infinitos tienen la misma *potencia*; en el segundo, que el que tiene más elementos tiene más *potencia* que el que tiene menos. Esta palabra *potencia* está muy bien escogida, porque expresa la *posibilidad* de ordenación de los elementos de un conjunto infinito, de manera que se pueda asignar a cada elemento su puesto. Las conclusiones de esta teoría dieron mucho que hablar al principio de este siglo, pues parecía en contradicción con principio tan apodíctico como el de que *el todo es mayor que la parte*; pero después se ha visto que no hay tal paradoja, pues la correspondencia que se puede establecer, por ejemplo, entre todos los números enteros y los números pares, es sólo de cada parte *finita* de los primeros con una *finita* de los segundos; en lo cual no hay contradicción, pues ambos son infinitos y, por lo tanto, nunca se agotarán por sustracciones de un número finito de términos (2).

(1) El autor citado P. Luis Lossada, dice que, aunque en tiempo de Santo Tomás, tal vez era verdad que no se había demostrado todavía la imposibilidad del infinito actual, después de cinco siglos en que tantos cerebros privilegiados habían sudado por demostrarlo, no valía el argumento de autoridad. No valdrá en ningún caso; pero ciertamente que los argumentos que él aduce valen todavía menos. Ni se ha dado un paso en este sentido después de dos siglos más; y probablemente no se dará nunca, pues parece ser una de esas cuestiones insolubles en las que se afanan los psicasténicos, como en el movimiento continuo, cuadratura del círculo, etc., etcétera.

(2) La teoría de los conjuntos fué muy cultivada desde fines del siglo

Con estos métodos han conseguido los matemáticos operar con seguridad con los conjuntos infinitos (ideales o reales) y sacar estas conclusiones, entre otras :

1.º Existen infinitas potencias infinitas, de las cuales tres son denominadas *elementales*. α) La potencia de los conjuntos coordinables con los números de la serie natural (conjuntos numerables), que es la de todos los números enteros, la de los números fraccionarios, β) de los números algébricos, y la de los números aritméticos en el sentido restringido de L. Kronecker. β) La potencia de los conjuntos coordinables con los puntos de un segmento finito, de un intervalo de tiempo finito (conjuntos *continuos o casi-continuos*) que es la de los puntos de una línea, superficie o espacio de cualquier número de dimensiones, la de los números reales o complejos, la de los números inconmensurables y otros muchos. γ) La potencia del conjunto de todos los conjuntos que se forman con los elementos de un conjunto continuo dado (conjuntos *funcionales*), que es la de las agrupaciones de todas clases de números reales o de funciones de cualquier especie de una variable y hasta infinitas variables independientes (1).

El lema fundamental es que $2^m > m$, o sea, que *cualquiera que sea m (finito o infinito) la potencia del conjunto de elementos 2^m es superior a la del conjunto m.*

2.º Todo conjunto puede ser bien ordenado, o sea, dispuesto de tal manera, que a cada parte se la pueda asignar un primer elemento (Zermelo). La sucesión de números naturales es el

pasado hasta muy entrado el presente. En la actualidad se encuentra algo estacionaria ; está expuesta en forma clásica y definitiva (aunque, por supuesto, perfectible en detalles y desarrollable en muchos puntos), en las obras de *Frenkel Punktmannigfaltigkeiten* y *Hausdorff, Mengenlehre*. Este último tratado sigue un método casi estrictamente aritmético. La afición a la teoría de la relatividad primero y después al cálculo de probabilidades, ha desviado mucho la atención de los matemáticos, y esa es tal vez la razón por la que la teoría de los agregados no ha progresado tanto en los dos últimos decenios como en los anteriores. ¿Cuestión de moda? Probablemente ; lo cual prueba que tampoco los matemáticos están exentos de esta debilidad, aunque sea debida más que nada a que el número de cultivadores es muy superior al de sanos inventores.

(1) Véase *Hausdorff* (1 c. pág. 40). Allí se hace notar que la potencia de las funciones *continuas* no es superior a la del continuo.

prototipo de conjunto bien ordenado ; los conjuntos de números enteros positivos y negativos, de números fraccionarios y de números reales en orden de menor a mayor, no son bien ordenados ; pero se pueden bien ordenar, alterando el orden, como, por ejemplo, en los números enteros positivos y negativos, poniéndolos en tal orden, que a cada número positivo siga el negativo del mismo valor absoluto y a éste el positivo superior en una unidad en valor absoluto, 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ... o de otra manera.

3.º Existen diferentes tipos de conjuntos ordenados y bien ordenados. Con los números cardinales correspondientes se pueden definir las operaciones aritméticas, cuyas reglas y leyes formales, son en general, muy distintas de las de las mismas operaciones con números finitos.

Es inútil seguir con ejemplos particulares, porque la teoría en la actualidad es determinada y conocida. Pero conviene hacer notar que, aunque las nociones nos han venido por la intuición del espacio, la teoría puede prescindir de la misma al ser expuesta sistemáticamente. No afirmamos la existencia actual del infinito actual, pero sí que podemos concebirla con sólo el entendimiento sucesivo, aunque la sucesión de los actos fuese discontinua, porque afirma el lema fundamental $2^n > n$, siendo n la potencia de los conjuntos numerables.

Tal es en síntesis muy incompleta, el resultado de las reflexiones de los matemáticos sobre el infinito, obtenido después de elaboradísimos razonamientos, por los que han discurrido privilegiadas inteligencias, desde Arquímedes hasta nuestros días. Quien recuerda los métodos de exhaustación del genio siracusano, los indivisibles de Cavalieri, los infinitamente pequeños e infinitamente grandes de Leibnitz, las fluxiones y fluentes de Newton, las aproximaciones sucesivas de Cauchy, la teoría de los límites de fines del siglo pasado y la de los conjuntos de principios del presente, puede darse cuenta de la batalla que el pensamiento humano ha librado victoriosamente contra un gran enigma.

IV

Nicht die Körper erzeugen Empfindungen, sondern Empfindungs-Komplexe bilden die Körper..

E. Mach, Analyse der Empfindungen, Cap. 23.

En las dos tesis precedentes hemos tratado del valor objetivo de las ciencias de puro discurso ; en la segunda en general, y en la tercera con relación al problema magno del infinito. Pero el solo discurso no es la fuente exclusiva del conocimiento humano ; tenemos cuerpo y sentidos corporales y la evidencia inmediata de sus percepciones nos conducen a un estado de certeza, por lo menos subjetiva (esto es innegable), del que no nos es fácil desprendernos, aun en los mismos casos en que después reconocemos habernos equivocado y mucho más si no lo reconocemos ; ante la prueba de los sentidos, tanto las personas de poco talento natural o de escasa instrucción como las de mayor capacidad y con profundos estudios en cualesquiera ciencias, todas se rinden directamente, y la reflexión ha de ser muy detenida y madura para rectificar esa primera impresión.

Si se trata de alguna sensación en particular, no es infrecuente tal rectificación y llenos están los libros de Psicología experimental de ejemplos variados, instructivos y curiosísimos, de ilusiones (ópticas, sobre todo, pues no es fácil incluir en textos las referentes a otros sentidos ; pero existen igualmente). Todas, sin excepción, se refieren a apreciaciones más bien cuantitativas que cualitativas (p. e., si dos líneas iguales o dos líneas paralelas, no lo parecen o viceversa) y, por lo tanto, su discusión se refiere más bien a la medida de la sensación (1). Pero fué moda en los siglos XVIII y XIX, hablar

(1) Tanto en los libros de verdadera ciencia como en los de vulgarización corrientes en Europa, se fantasea sobre el espejismo del desierto ; y, llevados los autores de la imaginación y deseo de impresionar al lector, fingen patéticas descripciones del caminante sediento, que corre desolado a los árboles en busca de agua sin poderla alcanzar. El fenómeno del espejismo, mucho más complicado que ver simples reflexiones de árboles (pues se ven mares, lagos, ciudades, casas, calles, etc.), aparece tan pronto se mete el viajero en un desierto y, si acaso al principio provoca ilusión y después admiración, al poco tiempo se habitúa el viajero al mismo y re-

mucho de *actividades del espíritu que crean el mundo exterior y de la proyección al exterior de las sensaciones*; este lenguaje hacía suponer que los que lo usaban negaban toda existencia a lo que no fuera el propio yo consciente; pero no hay tal cosa. Y sobre todo (y es lo que hace al caso para nuestra tesis) así como no hay metafísica, ni lógica, ni aritmética posibles sin el hecho primario de la propia existencia y el mal llamado postulado primario de la capacidad de nuestro entendimiento para adquirir con certeza alguna verdad, no hay ciencia de observación ni experimental posible sin la aceptación de alguna objetividad a nuestras sensaciones, o sea, de la existencia del mundo exterior al yo consciente, comenzando por el propio cuerpo. Es un hecho que en el siglo XX (tal vez hayan influido sucesos políticos y la exaltación de distintos aspectos del espíritu nacionalista), la escuela idealista pura no tiene partidarios ni en el sentido de Berkeley (atribuir a Dios nuestras sensaciones), ni en el sentido de Hume (atribuir todos nuestros conocimientos a las sensaciones), ni en el sentido de Kant (atribuir ideas y sensaciones a actividad interna del espíritu y cualidades inheren-

para en él menos de lo que lo hacemos con el arco iris, el cual ciertamente es una ilusión que asombraría al beduino mucho más que el espejismo a un europeo que nunca lo ha visto antes. Nunca he visto escrita esta conclusión, como tampoco he visto escrito que es relativamente fácil ver a Mercurio a simple vista (en la India puede decirse que es un segundo lucero; y aunque no he estado en otro país tropical, como que la razón de la mejor visibilidad entendí inmediatamente que es la casi verticalidad de la eclíptica, supongó que en todos ocurre lo mismo) y, por lo tanto, que es bastante candorosa la alabanza a los *antiguos observadores de las estrellas*, por el hecho de que la existencia de Mercurio es conocida desde la más remota antigüedad, como si hubiesen sido muy perspicaces en este punto. Cuando Saturno y Mercurio están próximos, Mercurio se ve mucho mejor, pues su *albedo* es muy superior al de Saturno.

Del famoso *rayo verde*, observado en la puesta del sol en el mar, la discusión cabe sobre en qué circunstancias del observador y del mar es visible o no; pero sobre que lo he visto muchas veces y otros muchos también, no me cabe la menor duda. Y respecto de otros fenómenos peculiares a las regiones polares, creo que la duda es sobre las circunstancias, pero no sobre la existencia de los mismos. En general, cuando se observa por primera vez un fenómeno en un país lejano, del que no se tiene clara noticia, por ejemplo, una tempestad o una tromba de arena (que en Quetta oí designar con el nombre de *Quetta Devil*, el Diablo de Quetta), la impresión es una mezcla de curiosidad y malestar a la vez; pero se habitúa uno pronto por la frecuencia y pierde el interés psicológico, quedando sólo el científico.

tes al mismo, que Kant denominó *Anschauungsform a priori*, traducido incorrectamente por *Forma sintética a priori*; los últimos que existieron de alguna categoría (Lange, Vaihinger, Mach), son anteriores a 1914.

La tesis que defendemos es : que existe un mundo exterior a nuestro *yo* consciente ; que ese mundo impresiona a ese *yo* consciente, mediante nuestros sentidos ; y, por fin, que esas sensaciones las objetivamos hacia el exterior, identificando el objeto externo con esa objetivación. Este último punto necesita declaración, en especial por lo que se refiere a las ciencias físicas.

Es costumbre secular dividir las ciencias cosmológicas, que no tratan de seres vivos, en matemáticas o exactas y físicas ; en la segunda mitad del siglo XVIII, la física se desdobló en Física propiamente dicha, o ciencia de los fenómenos, y Química, o ciencia de las sustancias. Las ciencias matemáticas se dividían en Aritmética o ciencia del número (a la que se agregó en la Edad media el Algebra o ciencia de la cosa, de origen indio, pero importada por los árabes a Europa y después notablemente desarrollada por los italianos del renacimiento) y Geometría o ciencia de la extensión. La Astronomía matemática era y aún es hoy considerada como parte de las ciencias exactas ; en las facultades de todo el mundo se incluye su estudio con el de las matemáticas puras, constituyendo ordinariamente el rompecabezas de los alumnos de esta sección, que he observado ser muy reacios a esta parte de su programa. También se incluyen en los cursos de matemáticas puras la Cinemática, la Estática y la Dinámica ; y por la combinación de esta última con la Astronomía, se creó por I. Newton la *Mecánica celeste*, así como por la combinación de la Física y la Química con la Astronomía se creó, a mediados del siglo pasado, la *Astronomía física* por A. Secchi, S. J.

Pues bien, prescindiendo de la Aritmética y el Algebra (a lo sumo extendida hasta el Análisis infinitesimal, aunque los elementos de éste han sido obtenidos por intuiciones espaciales), todas las demás ciencias tienen su objeto en el mundo exterior a nuestra conciencia. Este objeto material es el *hecho bruto* que impresiona nuestros sentidos, y en virtud de ello formamos un concepto en nuestra mente de dicho hecho bruto, que es su *imagen intencional*, la cual nos da una idea del objeto, no completa, sino sólo en cuanto nos ha impresionado. Esta imagen

intencional es vaga ; pero el entendimiento precisa sus características con elementos propios y así define predicamentos generales como *sustancia* (se entiende material), *cantidad*, *calidad*, *lugar*, *fecha*, *forma*, *modalidad* y otros accidentes, cuya denominación y clasificación dependen de los sistemas filosóficos que los han analizado. Este es el *objeto formal* de las ciencias, a veces muy alejado del verdadero objeto material exterior que lo ha engendrado ; mas la deformación sufrida al pasar del objeto material al formal, tanto por la imperfección de la sensación como por la acción abstractiva de nuestra inteligencia, no es tan grande como los idealistas quieren hacernos creer que creen.

El objeto material de la Geometría es la *extensión*, que puede impresionar los sentidos del tacto, del oído y, sobre todo, de la vista ; en virtud de esas impresiones formamos en nuestra mente un concepto del espacio o extensión indefinida, abstraída de materia, que será táctil, auditivo o visual. Este último se nos aparece *continuo tridimensional* y, mediante abstracciones mentales, venimos en conocimiento de los puntos, líneas, superficies y cuerpos geométricos, que son los elementos materiales de la ciencia geométrica clásica. Elaborando un sistema completo y compatible de hipótesis acerca de estos elementos, los llamados *postulados fundamentales*, podemos, con el auxilio de la sola lógica, desarrollar la Geometría pura (1). Esta compatibilidad y deductibilidad lógica constituyen el objeto formal de la Geometría pura tal como la concibieron Euclides y Arquímedes. Mediante extensiones y generalizaciones de conceptos geométricos, independientes de las impresiones que las originaron, se obtiene la *Geometría general o ciencia del continuo simultáneo multidimensional*.

La noción de *tiempo* no la deducimos del mundo exterior, sino de nuestra conciencia sucesiva (2) ; acertadamente, cohe-

(1) Tal fué el objeto de Riemann y Klein en la segunda mitad del siglo pasado. Entre los matemáticos son muy conocidas las obras de Pasch, Hilbert y Schür, en las que se trata de precisar la *Axiomática* de la Geometría en cuanto es posible ; pero dista mucho de haberse dicho la última palabra sobre este tema.

(2) Se entiende del tiempo *cualitativamente considerado* que es una magnitud *escalar*, imposible de ser medida por la sola experiencia interna, ya que nos es imposible la operación de simultanear fenómenos sucesivos.

rentemente con su concepción antropomórfica del conocimiento, Kant llamó al tiempo *forma sintética «a priori» de la sensibilidad INTERNA* (ésta es una de tantas pruebas de que los que niegan la lógica objetiva se guardan muy bien de quebrantar sus reglas), contraponiéndolo al *espacio, forma sintética «a priori» de la sensibilidad EXTERNA*. Pero hay que hacer notar que, salvo el hecho de que el espacio y el tiempo se nos representan *continuos*, su analogía no va más allá, en contra de lo que ordinariamente suelen hacer filósofos y aun físicos y matemáticos, que quieren comparar y casi identificar el tiempo con un espacio unidimensional, y aun mezclar ambos conceptos en un solo continuo cuadridimensional, al que se designa con el nombre de *Universo*.

La razón de esta confusión es que la *medición* del tiempo no puede verificarse sin consideraciones de movimiento, como ya hemos dicho antes; pero cualitativamente considerada la *duración* de una cosa o de un fenómeno no se distingue formalmente de la misma cosa y del tiempo transcurrido (1), según un argumento muy conocido de las antiguas escuelas, contra el cual no pueden aducirse dificultades serias.

De la combinación de los conceptos de espacio y tiempo resulta la noción de *movimiento local*, que es el objeto material de la *Cinemática*; el objeto formal lo constituyen las leyes del mismo, unas en cuanto forman una serie de postulados cohe-

(1) Permítaseme una pequeña digresión sobre este punto, más bien sutil que oscuro, de Metafísica. Tal vez no hay otro que haya levantado más discusiones entre autores católicos desde el siglo xvi hasta nuestros días y sin ningún fundamento intrínseco. Todo se redujo a pasión de escuela al principio, y a nacionalismo después.

Todos los católicos creen que Dios existe por sí mismo y, por lo tanto, que su esencia incluye la existencia como primer predicado; en cambio creen que ningún otro ser existe por sí mismo, sino que la existencia le viene de Dios y, por lo tanto, ésta no es predicado formal de la esencia. Pero una vez supuesta una esencia existente, ¿hay que suponer que existe formalmente por algo distinto realmente de ella, mientras existe? El punto es puramente metafísico; pero la discusión ha versado, más que nada, sobre cuál fué la opinión de Santo Tomás de Aquino en esta materia, o sea, un tema metafísico se ha convertido en un tema de autoridad o de interpretación de la misma.

Hasta mediados del siglo pasado se puede decir que la controversia era entre dominicos y jesuitas; pero desde hace un siglo, el número de estos últimos en Italia, Bélgica, Francia y aun en la misma España, partidarios

rentes e independientes entre sí y las restantes en cuanto se pueden deducir lógicamente, una vez establecidos esos postulados; y esto siempre prescindiendo de la sustancia y otras realidades físicas del móvil, teniendo en cuenta sólo la extensión geométrica. Hasta principios del siglo xx, uno de los postulados era la independencia del tiempo, no sólo en el sentido metafísico, pero aun en el físico; hasta en Geometría pura se expresaban las coordenadas de un punto móvil que engendra una curva plana o alabeada como funciones continuas de un parámetro, al que ordinariamente se le asignaba el valor del tiempo absoluto transcurrido; la cinemática así concebida, ha sido denominada clásica, tal vez un poco impropriamente, porque costaría un poco determinar hasta qué punto informa la ciencia del movimiento anterior a Einstein.

Pero desde principios del siglo actual, por consideraciones de orden físico-experimental más que lógico-cinemático, esta invariancia del tiempo físico ha sido abandonada en la teoría. En la práctica, así como se adopta no sólo el postulado de Euclides, sino hasta el paralelismo de las verticales (a nadie se le ocurre en Arquitectura y Construcción tener en cuenta la convergencia de las verticales en el centro de la Tierra), también se adopta la invariancia del tiempo absoluto para todos los sistemas materiales fijos o en movimiento. Pero la nueva cinemática o cinemática relativista considera al tiempo como una di-

de la opinión dominicana, o sea de la distinción real entre la esencia real de un ente creado y su existencia, es muy crecido. ¿Por qué? Porque los modernos defensores (Toledo, Vázquez, etc., y sobre todo Suárez) de la teoría de la identidad real no sólo eran jesuitas, sino, además, *españoles*; los italianos sobre todo, animados del espíritu nacionalista, que cristalizó primero en la unidad política y después en la expansión colonial e imperial, no quisieron admitir una opinión ajena, y a esa corriente se asociaron muchos franceses y belgas y también sacerdotes y hasta jesuitas españoles educados en Roma, muchos de los cuales han llegado a ser prelados y teólogos distinguidos. Sin embargo, el más entusiasta y profundo de los partidarios de Suárez y demás teólogos jesuitas españoles del siglo xvi en tiempos modernos, ha sido un jesuita francés, el R. P. Raoul D'Scarraille, el cual, por haber vivido largos años en nuestra patria y haber estudiado muy concienzudamente las obras de nuestros teólogos del siglo de oro, dedicó el tiempo que le sobró a sus importantísimas ocupaciones de gobierno, a glorificar la memoria de aquéllos, siendo la figura central del homenaje que en 1917, con ocasión del tercer centenario de su muerte, se tributó en Granada a Francisco Suárez.

mensión del Universo, y, por lo tanto, las hipótesis fundamentales son las de un continuo cuatridimensional; la cinemática clásica es, con respecto a la moderna, lo que la Geometría euclídea a la general.

Quedan todavía dos nociones básicas en las ciencias experimentales, *la materia y la energía*, que, agregadas a las referidas de espacio y tiempo, constituyen el fundamento u objeto material de la Física y la Química. La noción de *vida orgánica*, junto con las anteriores, es el objeto material de la Biología; pero el respeto que merece el tema en sí, y la seriedad de esta Corporación (sobre todo para mí en este momento) impiden que sean examinadas por un profano o, a lo sumo, ligero aficionado como yo. Quedan, sin embargo, en pie estas preguntas: ¿Cuáles son los objetos formales de la Física y la Química, respectivamente? ¿Difieren entre sí?

Parece que fué Descartes el primero que, sistemáticamente, quiso establecer la extensión como la esencia de los cuerpos y, por lo tanto, excluir de la ciencia las propiedades que no pudiesen referirse a lugar y tiempo. Nos réimos con más o menos razón al recordar las famosas *propiedades ocultas* de los antiguos escolásticos, tan hábilmente ridiculizadas en la última escena del *Malade imaginaire*, de Molière. Pero la reacción de Descartes fué un poco más allá de lo que prudentemente debía y la unificación de todos los agentes físicoquímicos en la sola noción de puro movimiento local resultó exagerada; y, sin embargo, perdura todavía y si no es fácil, ni mucho menos, justificarla por completo, tampoco es posible rebatirla con metafísica y argumentos *a priori*.

Aceptada esta tendencia, el objeto formal de la Física y de la Química es único: *el mundo inorgánico en cuanto observable y medible en el espacio y tiempo*, o, si se quiere, *en el Universo cuatridimensional*; no difiere, pues, del de la cinemática, que resulta la única ciencia de observación de ese mundo inorgánico. El papel de las matemáticas (topología, figuras, relaciones descriptivas y relaciones métricas) es el *modelo abstracto y coordinado* de ese Universo. Pero si se distingue entre el *movimiento y el móvil*, suponiendo al segundo como el sujeto del primero, fijo e invariable en su esencia, mientras se suceden los cambios con que se manifiesta el segundo, entonces la noción de materia no puede excluirse como distinta de la ex-

ensión, y prescindiendo de su evaluación, lo mismo que hicimos con el tiempo, resulta irreductible.

Ahora bien, lo mismo que del tiempo metafísico, nuestra conciencia nos revela la existencia de un *yo* permanente (móvil) sujeto a continuos cambios (movimiento). De modo que la existencia de un móvil fijo *yo*, en sucesivos estados, de conciencia nos es tan innegable como la propia existencia, sucesiva y variada. La única diferencia está en que ese *yo* consciente no se nos revela como ente material, sino al contrario; y no se nos representa fácil a nuestra mente cual puede ser el elemento material fijo, sujeto del movimiento inorgánico. Nos hacemos cargo, sin poder determinar las últimas modalidades, de lo que es un hombre, un animal superior, una planta perfeccionada; ya nos es más difícil distinguir el uno y el múltiple y, por lo tanto, los diversos móviles, en los seres inferiores de la escala biológica; pero en el mundo inorgánico nos es imposible definir el individuo. ¿Es éste un enigma insoluble? Si acaso no, a pesar de nuestra satisfacción por el adelanto de las ciencias físicas, hemos de confesar que en este punto estamos exactamente a la altura de conocimiento del hombre primitivo.

Y, sin embargo, este móvil existe y se le da el nombre de *materia*, en contraposición al principio vital de los vivientes, que como nuestra alma (de cuya existencia no nos puede caber duda) informa la materia. Si no se admiten más formas que las vivientes (tal es la tendencia de los antiguos atomistas y dinamistas, la cual perdura con solas modificaciones de detalle, pero no esenciales), tampoco hay diferencia esencial entre el objeto formal de la Física y el de la Química, que es *la distribución de la materia en el espacio y sus modificaciones con el tiempo en cuanto observables y medibles*. Física y Química no son más que capítulos, no diversos esencialmente, de la Estática y la Dinámica. Esta tendencia es la que rige en la Ciencia hace ya casi un siglo, aunque no siempre enunciada explícitamente.

Solamente en la vieja teoría hilomorfista de Aristóteles, perpetuada por los escolásticos medioevales y modernos, y aunque notablemente restringida en cuanto a la multiplicidad de las formas, aceptada por los fundadores de la Química moderna (Lavoissier, Dalton, Gay Lussac, Humphry Davy, etc.) la Física y la Química tienen objeto formal diverso. El de la Física es *la Materia y las modificaciones de la misma que no afec-*

tan a su composición esencial, y el de la Química es la materia y las modificaciones esenciales de la misma, en cuanto observables y medibles en el espacio y el tiempo. Si nos fuera fácil observar las esencias de la materia no habría dificultad en estas definiciones; pero, como por desgracia, esto no es posible, ellas se reducen a puras palabras y peticiones de principio.

Además la teoría hilomorfista presenta el grave inconveniente de no poder dar razón de esa asombrosa variedad de formas, fuera del hecho bruto de la existencia de sustancias con diversas propiedades; es también manifiesta su tendencia antropomórfica, imaginando una especie de alma (aunque no sea racional, ni discursiva, ni sensible, ni siquiera vital) a todos los seres que nos representan los sentidos; siendo así que, por carecer de verdadera individualidad, la supuesta forma no puede actuar más que en una porción infinitesimal de materia. Nada tiene, pues, de extraño que haya sido enteramente abandonada, y que sólo se la cite como recuerdo histórico, a pesar de las serias dificultades que ofrece el atomismo dinamicista.

De todo esto sólo queda en claro que una cosa son los cuerpos reales y sus modificaciones reales en el espacio real y con el transcurso del tiempo también real, que es la realidad objetiva y otra diversa los conceptos que sobre los mismos formamos en nuestra mente. Pero tan erróneo es suponer que esos conceptos corresponden adecuadamente a la realidad, como que no tienen ninguna relación con ella; la primera conclusión es dogmatista en exceso, y la segunda también en exceso idealista, y precisamente el adelanto de las ciencias consiste en perfeccionar los métodos de observación (1) de modo que la imagen mental se acomode lo más posible al mundo exterior. Pero, además, al sistematizar la ciencia, se advierte que la Geometría ha perdido casi totalmente el carácter de ciencia de observación, convirtiéndose en Ciencia de puro raciocinio con sus axiomas fundamentales, arbitrariamente elegidos, y sus consecuen-

(1) En un folleto que, con motivo de esta ocasión, me ha facilitado mi amigo de la niñez, el Ingeniero D. Enrique Posa, Delegado regional de Cataluña de la gran empresa alemana A E G (Allgemeine Elektrizitäts Gesellschaft) de investigación y construcción de maquinaria eléctrica, puede verse lo que la perfección del instrumento mejora el conocimiento. A este folleto (*Zehn Jahre Elektronenmikroskopie*. Berlín, Springer, 1941) me he de referir después.

cias lógicas ; casi lo mismo ocurre con la Cinemática, sea en el sentido clásico, sea en el relativista. La Mecánica, una vez admitidos los principios fundamentales clásicos, se ha convertido también en una rama de las matemáticas puras y sus problemas son exclusivamente de ecuaciones diferenciales y sistemas canónicos ; pero al advertir la necesidad de modificar algo esos principios, por consideraciones de óptica electromagnética, se ha querido incluir a toda la Física dentro de la Cinemática y hacer desaparecer las nociones clásicas de masa, fuerza y energía, para vincularlas en el continuo de cuatro dimensiones (1), o sea, en el sentido de Descartes. Pero tal unificación, o sistematización, o simplificación, o como quiera llamársela, dista mucho de ser una concepción acabada.

En cambio, tanto la Estática como la Dinámica clásica, se puede decir que se estudian en forma puramente matemática, pero agregando a las ideas de espacio y tiempo, la de *masa mecánica* y densidad de la misma *en el espacio*. Su distribución y cambios de la misma en el transcurso del tiempo es el objeto formal de la Mecánica, que ha sido por eso definida muy acertadamente : *La Ciencia del movimiento y del equilibrio de los cuerpos materiales*, expuesta matemáticamente. El ideal de las ciencias físico-químicas es reducir los fenómenos que se observan en la materia a problemas de mecánica racional ; pero así como ésta tiene sus postulados bien definidos y sobre ellos teoriza y arguye, contentándose con ver si en los casos en que puede comprobar prácticamente los resultados, como sucede en la Mecánica celeste, la comprobación es satisfactoria (lo mismo puede decirse de sus precursoras, la Geometría Euclídea y la Cinemática pura), tanto en Física como en Química, la dependencia de la investigación y el adelanto de la observación y la experimentación, o sea del *hecho bruto*, es todavía muy grande. Esto revela que, a pesar de los adelantos, no han podido los hombres especificar mentalmente el objeto formal de la Física y de la Química, y cuando lo han intentado, ha sido en sentido puramente hipotético, con la condición implícita de rechazar la hipótesis, tan pronto como se advierta claramente su discordancia con la realidad. Mientras no se progresa más en este

(1) Tal fué el objeto con que escribió H. Weil sus tratados *Raum, Zeit, Materie y Mathematische Analyse des Raum Problem*.

sentido metafísico, inútil es querer fijar el objeto u objetos formales de la Física y de la Química y tratar de ver su identidad o discrepancia formal (1).

V

Nous ne connaissons en toute lumière qu'une seule loi, c'est celle de la constance et de l'uniformité. C'est à cette idée simple que nous cherchons à réduire toutes les autres et c'est uniquement en cette réduction que consiste pour nous la science.

Poinsot, Elements de Statistique, 1861.

Si un individuo hubiese estudiado a conciencia y con provecho las matemáticas hace medio siglo, y después hubiese vivido sin ningún contacto con esos estudios ni con sus cultivadores, suponiendo que recordase perfectamente lo que había aprendido, si quisiese proseguir ese estudio con ese medio siglo de retraso, tendría alguna dificultad, pero no creo que pueda decirse que se encontraría despistado. En cambio, en el campo de la Física y de la Química, tanto teóricas como técnicas, el que estuviera en tales condiciones se vería obligado a comenzar casi desde el principio; porque no sólo el adelanto de esas ciencias ha sido considerable, sino que casi se puede decir que han cambiado de lenguaje.

Por de pronto, el número de compuestos descubiertos ha sido de tres a cuatro mil por año, que forman un total de más de cien mil. Las series de los mismos son tan complicadas que, a pesar de los perfeccionamientos de la nomenclatura, no es infrecuente encontrar compuestos cuyo sólo enunciado llena una línea y a veces hasta dos o más. En los compuestos del carbono, entran ya casi todos los elementos, no meramente como iones sueltos, sino como integrantes de una función. Las síntesis

(1) Véase Poincaré, *La science et l'hypothèse*, conclusions générales de la troisième partie. El autor pretende que los postulados de Geometría y los de la Mecánica tienen distinto origen y valor y hasta usa un apóstrofe retórico; pero sin fundamento. La diferencia entre la Geometría y la Mecánica no es más que la primera tiene un objeto formal más simple que la segunda y, por ser más antigua, está más desarrollada teóricamente.

realizadas son innumerables y por variadísimos procedimientos (1), sobre todo en el dominio de los compuestos que antes se llamaban orgánicos, pues sólo se les conocía en los organismos vivos.

Sin embargo, este aumento es tal vez más material que formal y, aunque tal vez en proporción mucho menor, es común a todas las ciencias. Pero la Química ha sido influenciada por las ciencias afines en dos aspectos, que podríamos llamar opuestos. Por un lado, la biología le ha planteado problemas no fáciles, por lo inestable de los compuestos; estos problemas se han multiplicado extraordinariamente, a medida que se han ido puntualizando y se prevé, sin necesidad de gran discurso, que esa multiplicación y complicación ha de ir aumentando en el inmediato porvenir (2). Pero la que ha cambiado totalmente (casi se puede decir su mismo objeto formal), a la Química es la Energética. No ha habido ningún descubrimiento en el campo de la Física que no haya repercutido en la Química al aplicarlo a diferentes cuerpos, ya simples ya compuestos. Es verdad

(1) Grande fué mi admiración, tal vez un poco candorosa, cuando al visitar (1936) en *Clydach* (Swansea-Inglaterra) la gran fábrica «The Mond Nickel Refinery Works» me enteré de que, por un procedimiento descubierto por Ludwig Mond, se obtenía un níquel con menos de una milésima de impurezas, por la disociación del carbonilo de níquel $\text{Ni}(\text{CO})_4$, gas sumamente venenoso. Así obtenían hasta cincuenta toneladas diarias de níquel; el residuo, rico en cobalto y con partes de plata, oro, platino, paladio, iridio, rodio, rutenio y osmio, proporcionaban hasta 8.500 kilos anuales de platino y metales de su grupo, muy preciosos y caros, pero bien poco elegantes a la vista, comparados con el oro y la plata.

(2) Para no citar más que cosas que he visto personalmente, pude observar en el «Hafkine Institute», de Bombay (dedicado, sobre todo, a la confección de sueros contra la mordedura de las cobras, el mayor azote de la India después de la malaria, pues son más de 30.000 las víctimas anuales en una población de aproximadamente 400.000.000 de habitantes; las víctimas de los tigres, y otras fieras no llegan a 12.000), que una gran parte del personal técnico estaba dedicado casi exclusivamente a investigaciones de Química biológica, no sólo relativas a las secreciones de las cobras y a sus efectos en las inoculaciones, según las distintas condiciones del animal y de su víctima, sino también a otras muy diversas, como, por ejemplo, las reacciones que tienen lugar en los músculos de ambos animales, debidas a las contracciones de los mismos. En seguida se me ocurrió que pronto llegaría el día en que se nos describan las reacciones químicas (y sus equivalentes energéticos), que tienen lugar cuando un profesor explica una lección o interroga a un alumno, o cuando éste es examinado con algún rigor.

que el espectro y el análisis espectral eran conocidos hace ya ochenta años; pero de aquellas sencillas observaciones de Bunsen y Kirchhoff a las complicadas series espectrales de Balmer, Born, Jordán y Sommerfeld, con todos los desarrollos físico-matemáticos que las ilustran y, en cierta manera, las explican y justifican, va una gran distancia. La Termodinámica informa toda la Química moderna y casi no se concibe un adelanto de una de ellas que no influya en la otra. Y, por fin, el estudio de las radiaciones y cuerpos radioactivos es, a mi entender, el que ha cambiado más el concepto de cuerpo simple que se tenía hace medio siglo, cuando Moissan aisló el fluor (1). La idea de la inmutabilidad de la masa de cada uno de los elementos a través de los cambios de estado físicos y químicos está definitivamente abandonada, aunque en la práctica (y mucho menos en la industria) no está del todo comprobada la hipótesis de Millikan.

La Física, a mi juicio, ha sido más transformada que la Química durante este último medio siglo. Las palabras son casi las mismas y el número de fenómenos o efectos nuevos descubiertos no tiene comparación con el de compuestos químicos. Pero las ideas designadas con nombres antiguos son totalmente diversas de las clásicas; se habla de materia, de masa y densidad, de espacio, de velocidad, de fuerza y de energía, igual que hace cincuenta años, pero ¿qué tiene que ver un punto material antiguo con un tren de ondas? Y, sin embargo, la analogía evidente entre el principio de Maupertuis o de la mínima acción para las trayectorias de un punto material, y el de Fermat o de camino mínimo para un rayo de luz (2), hace comprender que si la segunda se puede explicar mediante las ondas asociadas al rayo de luz, al movimiento de un corpúsculo podemos asociar un tren de ondas.

(1) Este año hemos oído en esta misma sala al Rector de la Universidad de Bucarest, Prof. Horia Hulubei, la reseña de sus cálculos y experiencias en el descubrimiento del elemento 85, el último de la serie halógena (ekayodo). Es sabido que los americanos Allison y Murphy habían, por lo menos previsto, por el método magneto-óptico, la existencia de este elemento 85 en el mineral radioactivo *monazita*.

(2) Véase *L. de Broglie*, Introducción al estudio de la Mecánica ondulatoria. Primero, la introducción general y después Cap. IV (en especial el § 5) y Cap. X (en especial el § 1).—*Cl. Schaefer*, Introducción a la Física matemática, III, Caps. VI-VII y VIII.

Esto se refiere a un punto tal vez más de filosofía que de ciencia positiva; y casi idénticamente podríamos juzgar de la teoría cinética de los gases, de la teoría corpuscular de la energía, de la teoría de la probabilidad termodinámica, de la teoría de la anulación de la entropía y de la resistencia eléctrica con la temperatura; de la teoría de los núcleos atómicos y moleculares, de la teoría de la desintegración de la materia por los bombardeos radiactivos, de la teoría de la equivalencia de la materia y de la energía y de la teoría de la relatividad del espacio-tiempo, que, como la de las vitaminas, ha llegado a interesar al público profano. Sin embargo, esta superposición de ideas con palabras y viceversa es algo más que teoría; en la práctica se traduce en una imposibilidad de separar los distintos elementos integrantes de una observación cualquiera; los métodos que proponen los filósofos para la investigación de las leyes físicas por inducción están muy bien para ser estampados en un libro de vulgarización barata; pero ningún físico de profesión los ha seguido jamás y sólo los verdaderamente iniciados saben la cantidad de ensayos, intuiciones, desengaños, ilusiones, descabros, marchas hacia adelante y hacia atrás, abandonos de unos métodos por otros para volver otra vez a los primeros, hasta que, por fin, después de muchos años y muchos más trabajos, llega a comenzar a vislumbrarse algo de la nueva ley, que aún ha de tardar muchos años en tomar verdadera forma de tal, muchas veces no por el trabajo del primer investigador, sino por el de sus discípulos... o el de sus rivales (1).

(1) Poca experiencia personal puedo aducir sobre este punto, pero sí alguna, suficiente, por lo menos, para mi propia enseñanza. Me refiero a los trabajos que en dos distintas ocasiones en el Observatorio del Ebro en 1920 y en el Observatorio de Alibag (Kolaba, Konkan—India inglesa) en 1932, quise hacer para justificar prácticamente la teoría de los llamados coeficientes P y Q en la determinación del cociente $\frac{M}{H}$, por el método de las desviaciones o de Gauss. Se trata de una determinación no reciente y, además, de mucha importancia práctica si se desea justificar la costumbre o convenio de expresar H en gammas o cienmilésimas de unidades C. G. S. Pues bien, el coeficiente P puede determinarse con relativa aproximación, tomando dos distintas distancias (se recomiendan 30 centímetros, la clásica, y 40 cm., a mi juicio demasiado grande) del imán desviante patrón; pero el coeficiente Q exige medir la desviación para tres distancias distintas (p. e. 30 cm., 40 cm. y 25 cm. como se hacía antes, o bien 30 cm., 40 cm. y 22,5 cm. como proponía el Dr. Ch. Chree, ya

De ahí ha venido ese deseo de unificarlo todo ; pero, a mi juicio, esa unificación no sólo no está justificada, sino que, además, complica y no explica la naturaleza del fenómeno observado, produciendo un resultado contrario al que se pretende. Así ocurre que los textos y artículos recientes tienen a la fuerza que tratar de muchísimos más fenómenos que los escritos hace cincuenta años, pues la observación y la experimentación los han descubierto ; pero al empeñarse en unificar en breves conceptos tan enmarañada diversidad, raras veces son afortunados y siempre (y este es el punto capital de la tesis que defendemos) tienen que acabar, si quieren ser objetivos, en hablar con detalle del espacio (aunque no sea más que del relativo a cualquier sujeto), del tiempo (aunque sólo sea del local), del movimiento (sea relativo y no respecto del sistema de estrellas fijas o del éter hipotético), de la materia (sea sustancia discreta o lo que sea) y de su masa y densidad, de la fuerza y de la energía, del sonido, de la luz, del calor, etc., etc.

Pero concedemos que no siempre voces distintas corresponden a conceptos, y mucho menos a realidades, totalmente distintos ; el ejemplo clásico es el del sonido, que realmente parece que no es otra cosa que el resultado de condensaciones y dilataciones longitudinales casi adiabáticas del medio elástico transmisor ; y, por extensión, aunque dista mucho de ser tan cierto, que las vibraciones luminosas no son más que vibraciones electromagnéticas transversales, restringidas dentro de determi-

tallecido, que fué durante muchos años Superintendente del Observatorio magnético-meteorológico de Kew, Surrey, en lo que se llama área de Londres) y su determinación exige resolver un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas, o sea, en total, doce coeficientes y veinticuatro términos formados por productos de tres de aquéllos, unos positivos y otros negativos, de valor absoluto grande, pero por las restas, de valor relativo pequeño. Los valores para Q así obtenidos son muy poco coherentes ; y, sin embargo, para poder hablar con seguridad, haría falta hacer las medidas a cinco distancias distintas (yo propondría 22,5 cm., 25 cm., 30 cm., 35 cm. y 40 cm., respectivamente) y aplicar el método de los mínimos cuadrados. Esta investigación es larga y difícil, por la influencia de las variaciones de temperaturas, tanto en la longitud de la barra como en el momento magnético M del imán a lo largo de la determinación. (Véase *Ch. Chree. The Law action between Magnets and its bearing on the Determination of the Horizontal Component of the Earth's Magnetic Force with Unifilar Magnetometers*, *Phil. Mag. S. 6*, vol. 8, n.º 44, agosto 1904).

nadas frecuencias para que afecten nuestro órgano visual, y así sucesivamente. Con esta salvedad conviene encarecer lo que tienen de peculiar los distintos fenómenos, pues sus manifestaciones e impresiones en nuestros órganos sensoriales son sumamente variadas, y no nos es lícito, en buena lógica, atribuir diferentes impresiones a fenómenos idénticos; éstos deben diferir por lo menos en ciertas modalidades objetivas (que podemos denominar frecuencias, intensidades, decalajes) no sólo de lugar y tiempo (pues eso es evidente), sino también de otras realidades que, por lo menos *a priori*, no podemos identificar con puros movimientos locales.

VI

Disquirenti nil perfecte notum (Varrón).

Poca declaración necesita la tesis sexta, sobre todo propuesta ante un auditorio selecto, para el que las amplificaciones retóricas son sospechosas y contraproducentes. Sin embargo, es en esa tesis donde me ha parecido siempre que estaba el punto de discusión entre dogmatistas y escépticos (1). Los primeros aducen para sus argumentos ejemplos de vida cotidiana, los analizan en forma popular, hacen resaltar la evidencia de sus conclusiones y raras veces profundizan en sus métodos y resultados, porque en seguida sienten que pierden el pie al intentarlo; en cambio, los pirronistas atacan en sus investigaciones el punto oscuro de los hechos que analizan (el cual siempre existe por triviales y sencillos que parezcan); en él hacen resaltar esa oscuridad, tanto mayor cuanto más se analiza, y, usando también amplificaciones retóricas (en esto no difieren nada dogmatistas y escépticos, aunque unos y otros traten de disimularlo y jamás quieren confesarlo; por algo los filósofos acostum-

(1) Lo que expongo en esta tesis es antiguo; pero de hecho no he encontrado ningún autor que enunciase explícitamente la paradoja de que la exactitud y la certeza son subcontrarias lógicamente. Como la ciencia procede de la conjunción de ambas en algún grado, de aquí se ha derivado el problema criteriológico en la misma, que es el objeto principal de esta disertación. Esta tesis es, por lo tanto, la más importante de las expuestas; las precedentes eran necesarias para entenderla y las que siguen son corolarios lógicos o analogías de ella, excepto la octava, que se refiere a un punto aislado.

bran a ser literatos), extienden la oscuridad a todos los hechos y razonamientos, sin querer nunca desandar lo mal andado en su cadena de conclusiones. Contra unos y otros se afirma en la tesis que las *mediciones*, en sentido lato de apreciaciones comparativas de cualquier género que sean, tanto cuantitativas como puramente cualitativas, son tanto más evidentes y, por lo tanto, ciertas lógicamente, cuanto menos exactas.

Es de sobra manifiesto que, en una primera intuición del *hecho bruto*, siempre podemos apreciar en él algo, que no es mera ficción de la mente, y esa primera apreciación jamás sale fallida en el transcurso del análisis. Si se trata de hechos permanentes, por ejemplo una longitud o una masa material, una acción eléctrica o magnética, la constatación es clara. A primera vista se advierte, por ejemplo, si una longitud al alcance de nuestra mano tiene uno, dos o tres metros; los cambios de lugar, tiempo, temperatura, etc., ordinarios en la superficie de la tierra, nunca llegan a afectar en una unidad de ese calibre; lo mismo decimos de un peso expresado en veinte kilos. Pero si queremos expresar una longitud en centímetros o un peso en kilos, tenemos que recurrir al metro o a la balanza; sabemos, con todo, que tampoco los cambios de circunstancias en la superficie de la tierra afectan esas unidades y a nadie se le ocurre usar un metro en invierno y otro en verano, o un kilo en el Ecuador y otro en el Círculo Polar. En cambio, si tratamos de precisar más, esa certeza de la invariabilidad de la medida longitudinal, ponderal o lo que sea, desaparece, y de ahí, las corrientes correcciones a cero grados y setecientos sesenta milímetros de mercurio, que se encuentran en todos los observatorios. Cuanto más se afina, mayor es el número de correcciones y mucho menor la certeza de la medición (1), hasta que

(1) En el siglo pasado hubo dos escuelas diversas de métodos de observación, sobre todo astronómicos: la inglesa de Airy y la alemana de Bessel. Según la primera, la certeza en la exactitud de los resultados dependía de la perfección de los instrumentos; según la segunda, del análisis y corrección de las causas de error, tanto sistemáticas como fortuitas. Ninguna de las dos prevalece exclusivamente; porque, por un lado, se tiende al más perfecto ajuste en la construcción de los instrumentos, como si se les quisiese suponer absolutos; pero se supone que el instrumento tiene todos los defectos imaginables hasta que se ha podido comprobar positivamente que no tiene uno determinado.

se llega a un punto en que el acertar es pura casualidad (1).

Algo más difícil es la seguridad de la primera apreciación en fenómenos sucesivos que requieren la apreciación del tiempo. A pesar de lo antiguo del fenómeno, se necesitó el genio de Galileo para descubrir que el descenso de los graves era aproximadamente de aceleración constante (prescindiendo de la resistencia del aire), y la gloria mayor de Newton, reconocido como el mayor genio matemático de la edad moderna, es el haber identificado la razón de la caída de los graves en la superficie de la Tierra con la que retiene a la Luna en su órbita alrededor de la misma Tierra, hasta llegar a descubrir la ley de gravitación universal, evidentemente bien aproximada, pues había sido tenida por completamente exacta hasta principios del siglo actual.

Por la gran variedad de cuerpos y reacciones y por la influencia de las circunstancias tan diversas que pueden darse en ambos, es la Química la que presenta más ejemplos de esta ley de oposición entre la exactitud y la certeza, tanto si se trata de sustancias permanentes (o casi permanentes, porque no hay compuesto y aun tal vez simple que no pueda ser disociado y hasta desintegrado) como de compuestos inestables (radioactivos u orgánicos, de los que tantísimos ejemplos ofrece la bioquímica). Las más de las investigaciones modernas en este campo se puede decir que giran alrededor de este punto; y aun que a muchas de ellas les falta el sello de originalidad (2) (como hace observar muy bien en uno de sus célebres prólogos el autor francés H. Bouasse, fecundo, festivo y cáustico a la vez), sin

(1) Por ejemplo, en las mediciones de la declinación magnética, el número de grados es cierto, el de minutos probable, el de segundos enteramente arbitrario; en las de la componente horizontal las centésimas son ciertas, las milésimas casi ciertas, las diezmilésimas inseguras y las cienmilésimas absolutamente arbitrarias; y, sin embargo, las cienmilésimas son las que aparecen en los boletines.

(2) Uno de los ejemplos más claros de esta falta lo prueban las series de artículos de ciertas revistas no de poca fama. Descubierta por Raman su efecto en 1928, una serie inacabable de discípulos suyos se dedicó a comprobarlo en no sé cuántos cuerpos y llenar de esta manera páginas y páginas de la «Indian Physical Review». El inventor fué más ducho y aprovechó para sus experiencias y determinaciones ulteriores las piedras preciosas del Maharajá de Bhurdwan; no era fácil que otro investigador, discípulo suyo o no, pudiese disponer ni en Europa, ni siquiera en América, de tan cuantioso y raro tesoro.

embargo, son preciosas contribuciones para el adelanto de la ciencia, como lo son las largas series de efemérides astronómicas y meteorológicas, cuyos datos aislados apenas si valen nada, pero de valor imposible de tasar económicamente cuando se poseen centenares de series completas.

VII

I think it is literally true to say that we never feel the force of the earth's attraction on our bodies; what we do feel is the earth shoving against our feet.

(Eddington, Report on the relativity theory of gravitation, 11-13.)

Sabido es que en todos los observatorios existen aparatos de lectura directa y registradores; éstos son de diversas clases, y los que han dado mejor resultado son los fotográficos, pues, además de ser más sensibles, permiten percibir matices muchas veces inapreciables por la observación directa. La gran dificultad, al querer reducir a números publicables en boletines los resultados de ambas clases de observaciones, está en determinar *el cero*, según la expresión corriente y *la graduación* del aparato registrador o de las hojas registradas por el mismo.

Esta práctica es la razón por la que muchas veces se ha renovado la discusión sobre *lo absoluto y lo relativo*, y hay que reconocer que no es fácil hacer medidas absolutas. El sentido de la tesis que defendemos es que, aun suponiendo que sean imposibles observaciones absolutas rigurosamente tales (es muy probable que la demostración de tal posibilidad o imposibilidad está fuera del alcance de la experiencia y aun de la metafísica), las observaciones relativas, aun sin la reducción al cero y la graduación correspondiente, expresan una relación real y objetiva entre el aparato detector y el medio ambiente en que está colocado, y no una mera ficción de nuestros sentidos; pero la dificultad está en dos puntos: el primero, determinar *quién*, o quiénes, han cambiado *realmente* (determinación del *cero*); el segundo, determinar *cuánto* han cambiado los sujetos del cambio (graduación). Por supuesto que esto último está sujeto a la

paradoja enunciada en la tesis anterior ; pero dentro del sentido de ésta, el significado de la presente es claro.

Nunca jamás he oído a observadores de oficio el que abrigasen la menor duda sobre dichas realidades ; tal vez se excedan en su objetividad (1), y por eso, en la tesis hacemos resaltar la imposibilidad de asignar muchas veces el sujeto adecuado del cambio real ; los filósofos de oficio son los que, siguiendo la misma táctica expuesta en la anterior tesis y valiéndose de su superioridad dialéctica, debida tanto a natural agudeza como a entrenamiento, pretenden sacar de esa imposibilidad la conclusión de que los cambios relativos no implican cambios absolutos ; la falacia es clara y de un tipo muy conocido en las viejas *Summulas*, al pasar del sentido disyuntivo indeterminado al determinado.

Tal vez el sentido de la tesis sería más claro si partiésemos de un principio que, aunque prácticamente cierto, lleva involucradas dos dificultades que conviene aclarar de antemano.

El principio es de que *ningún ente creado*, vivo o inerte, tal como nosotros le observamos, *está en reposo absoluto* ; de ahí el perpetuo *devenir*, la imposibilidad del equilibrio. Los aparatos de observación y medida son intermediarios entre el mundo externo y nuestra conciencia y, por lo tanto, no pueden apreciar más que cambios relativos entre una y otra, y aun éstos, deformados y limitados por los defectos e imprecisión de los aparatos. Este principio, que podemos llamar en lenguaje antiguo del *movimiento continuo*, parece que contradice a la idea del principio de individuación metafísica y al principio físico de imposibilidad del movimiento continuo de cualquier especie que sea.

Pero estas contradicciones son sólo aparentes : en cuanto al principio de individuación, porque, sin querer precisar todas las circunstancias, hemos supuesto que existe un sujeto permanente

(1) Eddington simuló una discusión entre el *Royal Astronomer* (Jefe del servicio horario en Inglaterra) y el célebre filósofo francés Henri Bergson, recientemente fallecido, sobre la naturaleza del tiempo. En la dialéctica el último lleva la ventaja absoluta ; pero terminada la controversia, mira el reloj, regulado por el astrónomo, para tomar a tiempo el tren. **ouy** servicio se ajusta al horario del que es director responsable su víctima.

de los cambios sucesivos, aunque tal sujeto, no sólo no nos es tan evidente como la propia conciencia, sino que en el mundo inorgánico apenas si podemos precisar si es materia, energía, átomo, carga eléctrica, onda, etc. Pero sea el que sea, existe.

En cuanto a la imposibilidad del movimiento continuo físico, hay que declararlo en esta forma: *Es imposible un movimiento simple, absoluto o relativo, de un solo grado de libertad.* Todos los movimientos, por más perfectos que sean los organismos que los realizan, tienen, además de movimientos principales (desde el primer punto en que actúa la energía, por ejemplo, el hogar, hasta el punto de aprovechamiento) una serie de movimientos secundarios (trepidaciones, rozamientos, etc.) imposibles de suprimir totalmente y que consumen energía, disipándola y haciéndola inepta para un trabajo mecánico útil. El movimiento continuo que se propone no es siempre utilizable en forma de trabajo mecánico. Con estas explicaciones, el sentido de la tesis es claro, y la única dificultad que presenta es, como en lo anterior, la que se sigue de la subcontrariedad entre la certeza y la exactitud.

VIII

Admittenda est hypothesis atomica, quae statuit, corpora ex minimis partibus divisio composita esse.

(J. Donat, *Cosmología*, Thesis 13.)

En las tesis precedentes se ha procurado exponer las conclusiones generales sobre los fundamentos criteriológicos de las ciencias o de puro razonamiento (matemáticas puras) o de razonamiento aplicado a las observaciones acerca del mundo exterior en cuanto a medibles (matemáticas aplicadas). Poco había que añadir; pero, sin embargo, por ser el problema de la constitución, esencial o integral, de los cuerpos inorgánicos el más importante y debatido de la *Cosmología*, por los adelantos realizados en este terreno estos últimos veinte años y por ser uno de los más palmarios ejemplos de dificultad criteriológica, a pesar de que para discutir tan interesante como intrincado tema en forma completa, haría falta una obra extensa en varios tomos y no una sola tesis de una elucubración como la presente, no he

querido dejar de aludir a él, aunque siempre en la hipótesis de que no pretendo agotarlo ni remotamente.

La idea de la constitución discreta de la materia y mediante ella de la explicación de las propiedades de la misma, parece que es debida a Leucippo (siglo VI a. de J. C.); siguieron sus ideas Demócrito, algunos eleáticos y casi todos los epicúreos; el más famoso de los atomistas de la antigüedad fué Lucrecio (siglo I a. de J. C.) en su poema *De natura rerum*. Los átomos, según ellos, eran extensos, de formas variadas (hasta ganchudos) y dotados de toda clase de movimientos, y no sólo el mundo inorgánico, sino hasta el orgánico y el anímico, no eran más que una fortuita distribución de átomos. Esta hipótesis atómica adolecía de dos defectos: el no estar apoyada en ninguna realidad observada, y el pretender una realidad demasiado materialista, o, si se quiere denominarla mejor, *mecanicista* exagerada.

Entre los griegos se levantaron dos escuelas contrarias al atomismo, que vinieron a fundirse en una: la jónica y la peripatética. De la primera el más famoso partidario fué *Empédocles* (siglo V a. de J. C.), que inventó su teoría de los cuatro elementos: frío y seco (tierra), frío y húmedo (agua), caliente y seco (fuego), caliente y húmedo (aire), y de la combinación de estos cuatro en distintas proporciones, se derivan todos los cuerpos. Entre los peripatéticos sobresalió Aristóteles; más amigo de la observación natural que del cálculo, por la analogía entre la generación y corrupción de los vivientes y las transformaciones en los cuerpos inorgánicos, concibió el sistema hilomorfista, que supone en todos los cuerpos una constitución análoga a la humana de cuerpo y alma (cuya evidencia nos es indiscutible); todos los cuerpos, según él, están constituídos por una potencia receptiva indeterminada (materia prima) en la que radica la cantidad y sus derivados, y de una actualidad (entelequia=forma sustancial) que (a excepción del alma humana por ser espiritual [1]), sacada de la potencia de la materia prima, es la fuente de las cualidades específicas de los cuerpos.

Tales son, en brevísimos compendios, las dos tendencias de las escuelas griegas acerca de la constitución de la materia. Nin-

(1) Punto puramente filosófico, enteramente extraño al objeto de esta disertación, cuyo análisis es debido, no a Aristóteles, sino a los autores escolásticos que han seguido su sistema.

guna de ellas se basaba ni en la observación ni en el cálculo, sino que eran meras hipótesis.

Los escolásticos medioevales, aun los alquimistas, se adhirieron a la doctrina aristotélica, que procuraron puntualizar y perfeccionar; sin embargo, no faltaron nunca partidarios del atomismo mecanicista. Pero cuando a principios del siglo xvii decayó lastimosamente la filosofía escolástica y, en cambio, gracias al descubrimiento de combinaciones de lentes y a otros medios de observación, la astronomía y la filosofía natural adquirieron gran desarrollo, el atomismo volvió otra vez a ser expuesto, quitándole todo lo que arbitrariamente se le había imputado de materialista y ateo, y dándole un aspecto más objetivo que no chocase innecesariamente con otros principios.

Tres son las formas que adoptó el atomismo en los siglos xvii y xviii. La primera, debida al sacerdote francés Pedro Gassendi, apenas si difiere del antiguo de Leucippo, Demócrito y Lucrecio; consideraba a los átomos como esferitas iguales muy pequeñas, cuyo diámetro no apreció (no consideraba átomos de distintas formas), y las propiedades de los distintos cuerpos, incluso de los vivientes, las quería derivar, como los mecanicistas, por solas diversidades de movimientos de los átomos que los constituyen. Como sus predecesores, su concepción del Universo era exageradamente materialista.

La segunda, debida a Descartes, se refería sólo al mundo inorgánico; los cuerpos inorgánicos no son, según él, más que la extensión que ocupan, lo cual constituye su esencia. Las propiedades que observamos son resultados de movimientos de esa extensión, unos rectilíneos y otros de rotación torbellinar. El universo inorgánico viene a ser, según la concepción cartesiana, un fluido continuo y extenso (tal vez incomprendible), en el que con el tiempo ocurren movimientos, también continuos, que son la causa de las impresiones que producen en nuestros sentidos (1).

La tercera, a pesar de tener a su favor en distintos grados los ilustres nombres de Newton, Leibnitz, Jaime Bernouilli,

(1) Aunque en la forma en que se representan el atomismo de Gassendi y el torbellinismo de Descartes haya alguna diferencia, en el fondo son equivalentes, como en la actualidad lo son la mecánica puntual y la ondulatoria. Hay que exceptuar, con todo, la cuestión del principio vital de los seres animados, negado por Gassendi y afirmado por Descartes.

Kant y del jesuíta dalmata J. R. Boscovich, que quiso dar forma filosófica a las ideas y conclusiones físico-matemáticas de Newton, no tiene partidarios en la actualidad. Se le ha denominado *Dinamismo* o *energetismo*, porque supone que los átomos, mónades, o como quiera llamárseles a los últimos elementos integrales constitutivos de la materia inorgánica y aun orgánica, no tienen dimensiones, sino que son como puntos zenonianos, dotados no sólo de movimientos, sino de fuerzas y energías, que son las causas de las sensaciones que nos producen de resistencia, color, etc., y también de sus actividades propias.

De estas tres formas del atomismo, como del hilomorfismo, puede decirse que sus propugnadores no las idearon de la observación ni del cálculo, sino de su sola imaginación e inventiva.

Los descubrimientos de la Química de fines del siglo XVIII y principios del XIX, a la vez que la constituían en ciencia propiamente tal, independiente en sus métodos de la filosofía, sirvieron para comprobar que, en el mundo inorgánico, en lugar de los antiguos cuatro elementos de Empédocles, lo que en realidad existía eran cuerpos simples, cuya masa mecánica quedaba invariable en las transformaciones, y esas masas elementales se unían en proporciones constantes para formar compuestos determinados o en proporciones múltiples. Estas dos leyes del profesor de Mánchester J. Dalton, junto con las de Gay-Lussac sobre las relaciones de volúmenes de los gases de los elementos para formar los compuestos, y la del mismo Gay-Lussac y las de Dulong y Petit sobre el coeficiente de dilatación y los calores específicos de los gases, dieron a la teoría atómica en la primera mitad del siglo XIX una base objetiva que ni ella, ni sus análogas, ni el hilomorfismo, habían tenido antes. Además, la autoridad de los dos más ilustres físico-matemáticos franceses de ese período, A. M. Ampère y A. L. Cauchy, decididos partidarios de la teoría atómica y reconocidos como los principales promotores del movimiento intelectual antirrevolucionario y católico, quitó al atomismo el estigma materialista, del que con razón se le había tildado a sus partidarios desde hacía más de dos mil años (1).

(1) Una digresión sobre la actitud de la Iglesia docente, o sea del Papa y de la Jerarquía sobre el particular. Dado el carácter tradicional de la enseñanza eclesiástica y el espíritu anticatólico de los primitivos ato-

Sin embargo, y a pesar de los grandes progresos de la Química durante todo el siglo pasado, atribuidos (tal vez con exceso) a la teoría atómica, el lenguaje de los químicos y demás era siempre de mera *hipótesis*. De tal manera esto es así, que en el libro de vulgarización *La Théorie Physique*, de P. Duhem, ya citado, un autor tan competente en física y en filosofía pone al hilomorfismo y a los tres sistemas atomistas exactamente en el mismo grado de probabilidad. Con todo, por esa fecha ya estaban enunciados con claridad los fenómenos que parecen convencer la objetividad de la constitución discreta de la materia y de la radiación, tal como se pueden ver descritos en las conferencias tenidas en París en 1910, presididas por H. Poincaré, cuyo resumen puede encontrarse en un libro, que fué muy pronto conocido entre nosotros (1), o en las conferencias de 1915, dadas en Barcelona, por nuestro compañero D. Esteban Terradas.

mistas (que ridiculizaban sin fundamento objetivo y con exceso de mordacidad la doctrina peripatética, purificada y cristianizada por Santo Tomás de Aquino y demás lumbreras del escolasticismo medioeval y moderno), nada tiene de particular que su actitud fuese expectativa y no quisiese inmediatamente abandonar ideas antiguas muy arraigadas por corrientes modernas, cuando éstas no estaban ni perfectamente especificadas en teoría, ni mucho menos comprobadas en la práctica. Sin embargo, a mediados del siglo pasado la Iglesia dejó en libertad a los profesores de Teología y Filosofía el seguir con el hilomorfismo o enseñar el atomismo; entre los ilustres profesores que se decidieron por este último figuran los de la Universidad Gregoriana PP. Salvador Tongiorgi y Domingo Palmieri, de la Compañía de Jesús, el último de los cuales sostuvo una encarnizada polémica con el Card. Zigliara, dominico, que defendía que el hilomorfismo estaba declarado dogma de fe por el concilio ecuménico de Vienne en 1311 (Isère-Francia). El P. Palmieri demostró claramente que al afirmar el concilio ser herético el decir que «el alma racional o intelectual no es de suyo y esencialmente *forma* del cuerpo humano», para nada pretendía definir la cuestión de la constitución *esencial* de los cuerpos en general, mucho menos la de los inorgánicos, y todavía menos la constitución *integral* de todos ellos. Sin embargo, en la segunda mitad del siglo XIX, el deseo de restaurar las sanas doctrinas escolásticas y reprimir excesos de lenguaje en las afirmaciones y, sobre todo, en las pullas de los atomistas, éstos fueron algo preteridos y los dos PP., Tongiorgi y Palmieri, fueron depuestos de sus cátedras. El último, sin embargo, fué escogido personalmente por León XIII para la Sacra Penitenciaría. En el siglo actual, la Iglesia lo tolera todo menos el que se la acuse injustamente de retrógrada, o que se afirme la no realidad de los cuerpos.

(1) *Société Française de Physique*: Les idées modernes sur la constitution de la matière, París, 1913.

Actualmente se puede decir que esta composición de partes pequeñísimas constituyendo la extensión de la materia y de la energía, que aparentemente se ofrece a nuestros sentidos como continua, es cierta, o por lo menos, probabilísima, no por un solo fenómeno apodíctico, sino por *un cúmulo de indicios*. No quiero decir que cada uno de esos argumentos no tengan valor por separado ; pero es el conjunto de ellos el que llega a convencer nuestro entendimiento.

Los defensores del atomismo en el siglo XIX se basaban en hechos físicos (los tres estados de la materia, la presión y la difusión de los gases, muy sencillas de explicar mediante la teoría cinética de Maxwell y Boltzmann, la conversión del calor en trabajo y viceversa, con la consiguiente disipación de la energía, la propagación del sonido por ondas longitudinales, las deformaciones elásticas y, sobre todo, el movimiento browniano, que según Planck es argumento apodíctico, y la difracción de los rayos X), en hechos químicos (las leyes mencionadas de Dalton y Gay-Lussac) y hechos físico-químicos (electrólisis e ionización en soluciones y gases).

En el siglo XX el número de hechos observados y su concordancia con la teoría de la constitución discreta de la materia y la radiación es innumerable, y su completa bibliografía llenaría muchas páginas (1). Pero quisiera hacer resaltar el hecho de que, entre la muchedumbre de fluctuaciones que la observación ha producido en la teoría, imaginando no sólo iones y electrones en los átomos, considerados por Dalton como simples, rígidos e indivisibles, sino distinguiendo modalidades en estos elementos (protón de Rutherford, fotón de Einstein, neutrón de Chadwick, positrón de Anderson en el laboratorio Milikan y de Blackett en el laboratorio Cavendish), queda siempre en pie la idea de esa constitución discreta ; ésta, pues, puede considerarse como una verdad, si no cierta, por lo menos probabilísima, y éste es el sentido que hemos querido dar a nuestra tesis.

Y permítaseme una observación final sobre la misma : se consideran al tubo de Geiger y a la cámara de Wilson, junto con el espectroscopio moderno, capaz de analizar la estructura

(1) Un resumen sintetizador, saturado de amena profundidad, puede leerse en el artículo «Átomos y electrones» (*Cruz y Raya*, 1933), publicado por nuestro compañero D. Julio Palacios.

fina, como los medios de observación más convincentes para la prueba experimental del atomismo. Sin embargo, creo que los análisis microscópicos no dejan de aportar su grado de probabilidad a la tesis y, por lo tanto, su cooperación a la casi certeza de la misma que, a nuestro juicio, no se deriva de ningún hecho observado, y mucho menos de ninguna teoría ideada, sino del cúmulo de los primeros y adaptaciones de las segundas. No se acostumbra a mostrar en tratados y revistas de Física y Química las fotografías de estructuras metalográficas, porque la teoría atómica más bien se ha deducido de observaciones y fotografías de gases ultraenrarecidos y de espectros finos; pero creo que el hecho innegable de que, a medida que se perfecciona el instrumento, sobre todo gracias a la microscopia electrónica (1), el carácter granular de la materia va resaltando más y más, y es lógico pensar que nunca se llegará a la uniformidad de la extensión.

IX

Das Atom ist ein Planetensystem, die Planeten sind Elektronen, sie kreisen um den Zentralkörper, den Kern. Das Atom von der Ordnungszahl Z wird gebildet von Z einfach negativ geladenen Planeten und einer Z-fach positiv geladenen Sonne. (Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, II-2.)

Admitida la naturaleza discreta de la materia y de la radiación, expuesta en la tesis anterior, con todas las consecuencias derivadas de la química de los isótopos, de la mecánica relativista y de la mecánica ondulatoria, resulta que el átomo simple es todo un sistema planetario (el modelo más simple es el átomo de hidrógeno, ideado por N. Bohr (2), con un solo núcleo positivo y un solo electrón que, sin embargo, parece que

(1) Puede verse el folleto ya citado de la AEG: «Zehn Jahre Elektronenmikroskopie». Véanse, sobre todo, las descripciones de las páginas 63 y 77; en cuanto a las fotografías exhibidas, todas muy interesantes. Las contenidas en las páginas 68 y 69, de cristales de óxido de magnesio a 20.000 y 100.000 aumentos, sirven para comprobar muy bien esta tesis, ya que en la segunda se observan matices sombreados que no se perciben en la primera.

(2) Phil. Mag (1913-XXVI) (págs. 1-25, 476-502 y 857-875) «On the constitution of atoms and molecules», traducido al alemán por Hugo Stintzing. Abhandlungen über Atombau (Fr. Viewig u. Sohn, 1921), págs. 1-69.

tiene tres isótopos. Cada elemento tiene tantos electrones *planetas* como su número atómico, distribuidos en distintas capas (siete tienen los radioactivos); pero también existen *cometas* (las partículas positivas α , rechazadas por el núcleo y que, según la ley de Newton, describen una rama de hipérbola cuya foco exterior es el núcleo).

Adviértase que con tales hipótesis no se ha dado ni el más pequeño paso sobre la constitución *esencial de la materia*, sino sólo sobre la *integral* de los átomos, moléculas, cristales y rejillas de cristales. Más: así como por la analogía de la Tierra con los otros planetas y del sistema solar con los sistemas estelares y del conjunto estelar de las estrellas visibles y la vía láctea con los amasijos y nebulosas anulares y espirales, se cree posible (y aun probable [1]) la existencia de vivientes y aun de seres racionales en otros mundos distintos de la Tierra, llevados de la imaginación podríamos fingir continentes, mares, montañas, ríos, valles, minerales, vegetales, animales y hasta racionales en cada uno de esos electrones o, al revés, que cada sistema planetario conocido no es más que un átomo de un mundo sideral, con lo cual vendríamos a convertirnos en parásitos de seres gigantes.

Pero dejando a un lado imaginaciones a lo Flammarion o a lo Julio Verne, en la tesis afirmamos que queda por decir, y quedará probablemente para siempre por decir, la última palabra sobre la constitución de la materia. Por de pronto téngase en cuenta que el concepto de *unidad* en el mundo inorgánico es muy diferente del que tenemos nosotros de nuestro propio yo por la conciencia íntima; ese último nos es enteramente claro y evidente y, en cambio, el primero es sólo por analogía con él. Además, *en las apreciaciones numéricas* no se puede distinguir entre masa y energía, porque ambas tienen inercia: aproximadamente un ergio es equivalente a un gramo-masa dividido por el cuadrado c^2 de la velocidad c de la luz en el vacío, o, si se quiere hablar con propiedad desde el punto de vista de las unidades, la energía E encerrada en una masa m es

(1) Cuestión, por ahora, enteramente sin decidir. Los argumentos *a priori* nada prueban; y *a posteriori* ni se ha podido comprobar positivamente la existencia de habitantes en Marte o en donde sea, ni menos la imposibilidad de que pueda haberlos en alguno de tantos millones de cuerpos celestes, muy poco conocidos a tanta distancia.

$E=mc^2$ (1); pero a estas dificultades de orden metafísico hay que añadir otras de orden puramente físico. Se han podido evaluar con tres y hasta con cuatro cifras decimales ciertas cantidades denominadas *Constantes atómicas* (2); pero es evidente que tales constantes lo son en primera aproximación y que nadie puede darles más firmeza que a las viejas constantes de Mariotte, Gay-Lussac y Dulong-Petit. Como los trabajos de Regnault acabaron con estas últimas para los gases reales, no creo que sea muy aventurado el afirmar que no tardaremos mucho en ver muy modificadas las ideas que ahora tenemos sobre las constantes atómicas de las modernas teorías.

Lo mismo puede decirse de otras constantes físicas no tan directamente relacionadas con la teoría molecular y atómica, pero que en cierta manera influyen en ella, como el equivalente mecánico del calor y el valor del cero absoluto de temperatura. La misma naturaleza estadística de los movimientos de los electrones, átomos, moléculas, cristales elementales y rejillas de los mismos hace ver la necesaria imprecisión de tales constantes, de una manera análoga a lo que ocurre en la más matemática de las diversas ramas de las matemáticas puras: la teoría de los números.

Pero sobre todo hemos de tener por cierto (aunque tal vez no sea fácil declarar en términos científicos ni la razón ni mucho menos la naturaleza de esta certeza) que mientras dure la raza humana no se estancará la ciencia. Conocimientos y teorías irán cada vez desarrollándose y perfeccionándose más en lo futuro, como lo hemos visto en el pasado; y aunque no queremos quitar nada de la gran probabilidad que una discusión

(1) La masa de un gramo equivale a $9 \cdot 10^{20}$ ergios y un ergio equivale $\frac{1}{9} \cdot 10^{-20}$ gramos aproximadamente o en números redondos (ya que, aproximando más, la velocidad de la luz en el vacío es 299.776,105 cm. sec⁻¹ y no $3 \cdot 10^{10}$ cm. sec⁻¹; el error relativo es menor de una milésima). Así se evalúan los equivalentes en energía del electrón, del protón y del neutrón conocidas sus masas de inercia y, recíprocamente, el equivalente en masa de un *quantum* de luz, conocida su energía.

(2) Por ejemplo: Los números n y N (constantes de Ayogadro y de Loschmidt, cuyo cociente es el doble de la densidad a 0° y 760 mm. de un gas ideal cuyo peso atómico es uno), la constante k de Boltzmann, la constante n de Plack, la masa en reposo, el peso atómico y la carga específica de un electrón y de un protón, etc.

tan copiosa como a la que se refiere la tesis anterior acarrea a la teoría discreta de la constitución integral de la materia y la radiación, creo que podemos estar convencidos de que no sólo no es la última palabra, sino la primera de muchas que han de pronunciar las futuras generaciones.

Antes de dejar esta tesis enunciamos como sola convicción, pero no como tesis, que así como no hay dos entes iguales, sino sólo *parecidos* (ya que el análisis nos hace ver no sólo la distinción *numérica* de sólo lugar y tiempo, sino la *específica* de propiedades y actividades), de la misma manera no hay razón para establecer como postulados incontrovertibles la existencia de dos átomos iguales, ni de dos núcleos iguales, ni de dos electrones o, aun si se quiere, subelectrones iguales. Esto será contra dos principios ahora muy en boga (los quanta y la invariancia de la carga del electrón), pero no apodícticos.

X

El valor de una teoría será el valor de las leyes que contiene. Si, por lo tanto, las leyes son de igualdad, la teoría será a lo más probable. Si las leyes son de limitación, la teoría será cierta dentro de los límites que deben asignarse.

(Pérez del Pulgar. Introducción a la Filosofía de las Ciencias Físico-Químicas.)

Es esta tesis consecuencia primordial de la tesis sexta fundamental; porque si las mediciones son tanto menos ciertas cuanto más exactas, a las leyes que expresan relaciones entre las mismas les pasará lo mismo, según aquel antiguo principio de lógica: *Pejorem semper sequitur conclusio partem*, la conclusión siempre sigue la parte más débil (se entiende en virtud de la lógica, porque puede darse un razonamiento lógicamente impecable, cuya conclusión, por razones de la materia sobre que versa, sea más cierta que alguna de las premisas y aun que ambas a la vez [1]).

(1) Por ejemplo: Los cuerpos calentados se dilatan. Luego una moneda de oro calentada se dilata. (Se sobreentiende la menor de que una moneda de oro es un cuerpo). La mayor o antecedente admite excepciones, la conclusión no; luego es más cierta que el antecedente, pero por razón de la materia, no del silogismo.

Una ley físico-química (aunque también existen leyes biofísicas, bioquímicas y simplemente biológicas, su análisis filosófico es mucho más complicado que el de las que rigen el mundo inorgánico) no es más que la abstracción y la generalización de muchos *hechos brutos observados*, en que se procura discernir los elementos activos en el resultado y los concomitantes, que pueden influir más o menos en el mismo, en sentido positivo (favorable), negativo (nocivo) o meramente indiferente. Francis Bacon (1561-1626), el famoso canciller de Inglaterra, a quien muchos eruditos de su mismo país atribuyen la paternidad de las geniales tragedias de Shakespeare, fué el primero que al analizar el método de inducción dió los primeros preceptos para el establecimiento de las leyes naturales; sin embargo, no fué él, sino Galileo (1564-1642), el que llegó a positivos resultados en esta dirección, al descubrir las leyes de caída de los graves y del casi isocronismo de las pequeñas oscilaciones del péndulo. Hasta entonces las leyes físicas sólo habían sido enunciadas en forma cualitativa. Las leyes químicas no fueron enunciadas en forma cuantitativa hasta Lavoisier (1734-1794).

Desde Galileo y Newton hasta finales del siglo pasado (Mayer, 1814-1878; Helmholtz, 1821-1894; Maxwell, 1831-1879; Gibbs, 1839-1903, y, sobre todo, Boltzmann 1844-1901), las leyes se enunciaban en forma de igualdades matemáticas, ordinariamente de ecuaciones diferenciales o en derivadas parciales de segundo orden. Pero apenas se abandonaba el terreno de la pura especulación, tanto en la física y química de laboratorio como en la técnica, las ecuaciones diferenciales dejaban paso a las fórmulas empíricas, *válidas entre ciertos límites*, con un gran número de coeficientes prácticos, muy simplificadas desde el punto de vista matemático y muy inexactas.

No se dudaba sistemáticamente del valor objetivo de las leyes teóricas; las discrepancias entre teoría y práctica se atribuían a ignorancia de los elementos perturbadores secundarios. Hay que reconocer que la relativa perfección que habían adquirido las distintas ramas de la filosofía natural hasta fines del siglo pasado era debido en buena parte a la armonía entre los *hechos brutos* observados y las teorías físico-químicas que

los desarrollaban matemáticamente y los relacionaban entre sí (1).

La teoría de la constitución discreta de la materia, radiación y energía, con la multitud de hechos observados en espectroscopia, radioactividad, cristalografía y muchas más ramas, ha cambiado este aspecto de las ciencias físico-químicas. Las leyes infinitesimales han sido sustituidas por la de los grandes números; los resultados exactos de las primeras han dejado su lugar a los resultados probables de las segundas; el principio de determinación rigurosa se ha convertido en un principio de determinación sólo entre ciertos límites (2); el modelo matemático de los fenómenos físico-químicos, hasta entonces en forma de ecuaciones diferenciales, es ahora presentado según ecuaciones a las diferencias.

Con este preámbulo es claro el sentido de la tesis: Todo fenómeno observado que admite reproducción parecida, aunque no exacta, induce en primer término al enunciado de una ley

(1) Conviene tener presente que la más exacta de las ciencias de observación, la Astronomía, nunca ha dejado de desarrollarse y exponerse simultáneamente por los dos métodos matemático-teórico y empírico-práctico. Hasta mediados del siglo pasado la Astronomía matemática solamente; desde entonces acá, la Astronomía matemática, la Mecánica celeste, la Geodesia, la Astronomía física y todas las demás ramas de la Geofísica (Meteorología, Sismología, Magnetismo, Potencial atmosférico y Corrientes telúricas, mareas y corrientes marinas).

(2) Aunque no siempre se ha enunciado explícitamente, se ha supuesto siempre que la aparente indeterminación es debida al desconocimiento *actual* de la distribución completa de la materia, energía y velocidades en todos los puntos del Universo, como ocurre en la Teoría Matemática de Gauss de los errores de observación, acerca de las causas de los mismos. Las deducciones pseudo-filosóficas (en realidad puros sofismas), que se hayan querido sacar contra el verdadero principio de causalidad, en su antiguo y legítimo sentido, son puros delirios metafísicos, de carácter pseudo-místico. Un ejemplo claro de esto puede leerse en el último apartado (el 48) «Der Kausalbegriff in Naturphilosophie und Metaphysik; Wiedererscheinung des aktiv-personalen Ursachbegriffes auf höherer Ebene: Metapsychik» del libro recientemente publicado *Julius Robert Mayer Kausalbegriff Seine geschichtliche Stellung, Auswirkung und Bedeutung*, por *Arwin Mittasch* (Berlín, Springer, 1940). En él se ven desfilar toda clase de opiniones, desde Nicolás de Cusa y Miguel Servet hasta nuestros días, de filósofos y físicos de todas categorías; el método de citas cortas no es siempre el más fiel, pero es el único posible si se desea una gran multitud de testimonios en poco espacio; lo que sí queda claro entre tanta profusión es que es más fácil hacer afirmaciones que probarlas.

cualitativa. Esta podrá convertirse en cuantitativa con valor objetivo real dentro de los límites observados mediante ensayos o, por lo menos, observaciones realizadas, teniendo en cuenta las diversas influencias y perturbaciones y los límites de error correspondientes a las mismas. Tal enunciado es, muchas veces, sólo empírico; pero puede llegar a convertirse en racional cuando estudiando las relaciones con otra diversidad de fenómenos, se puede entrever una conexión real. Pero como nuestros medios de aproximación son limitados, también lo es la certidumbre (esa realidad, grado de probabilidad) de la ley correspondiente, sin que se le niegue la objetividad correspondiente a dicho grado de probabilidad.

En cuanto a las dos salvedades enunciadas al final, su sentido es claro. *A priori* no podemos afirmar ni negar, por ejemplo, que «Las aceleraciones (vectores) en un mismo cuerpo, son proporcionales a las fuerzas que las producen» (1); por la experiencia, hecha con todas las precauciones, podemos cerciorarnos de su valor aproximado; pero de ahí no podemos pasar y ni siquiera nos es lícito afirmar o negar que esa aproximación lo sea a otra ley matemática exacta, aunque ignorada. La casi imposibilidad de poder obtener dos estados de la materia exactamente iguales, no sólo no nos permite descubrir la ley exacta, sino que ni siquiera nos permite asegurar su existencia.

No cae dentro del cuadro de esta ya un poco larga exposición el asunto de si esta indeterminación de fenómenos, sea real o sea aparente solamente, en determinadas circunstancias puede dar lugar a fenómenos distintos partiendo de las mismas circunstancias iniciales.

La elección del camino actual quedaría, según Boussinesq (2), sometida a causas o entidades *no energéticas* (biológicas, psíquicas, espirituales) y éstas gozarían de libertad, aunque no define el sentido riguroso de esta última. Por lo que toca a acciones biológicas o de cualquier otra naturaleza dentro del

(1) Segunda ley de Newton: «Mutiationem motus proportionalem esse vi motrici impresae et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur». Puede leerse la paráfrasis a este enunciado (en oración indirecta u oblicua) contenido en los 251-252 (pág. 243) del famoso *Treatise on Natural Philosophy* de Lord Kelvin y Tait.

(2) Véase la «Introducción a la Filosofía de las Ciencias Físico-Químicas» ya citada (pág. 28 y siguientes).

mundo mineral, vegetal o animal (pero no anímico), no se ve por parte de un profano en las mismas si pueden influir o no y, en caso afirmativo, en qué forma puede dejarse sentir esa influencia en la determinación actual de una *línea de universo*, físicamente indeterminada en cuanto a la materia inerte (siempre bajo el supuesto de que tal indeterminación exista, ya que en la tesis mantenemos que no vemos razones positivas *a priori* ni en sentido afirmativo ni negativo). Pero suponer que ese poder determinativo es equivalente a la libertad de nuestra voluntad, de la cual tenemos conciencia tan íntima como de nuestra propia existencia (y, por lo tanto, no necesitamos estudios especiales para cerciorarnos de la objetividad de la misma, sino que nos basta la introspección), es no sólo gratuito, de sabor materialista místico depravado (1) y nada científico, sino que no tiene ningún fundamento real, ni siquiera de analogía. Todos sabemos que a toda determinación consciente y libre de nuestra voluntad ha precedido, más o menos confuso, un juicio práctico; este juicio práctico supone alma intelectual y, por tal razón, salvo prejuicios de educación, escuela o de otra naturaleza extrínseca, estamos convencidos de que, aunque en el análisis inmediato la libertad y la intelectualidad sean enteramente diversas, en el análisis último no se concibe ser intelectual que no sea libre (en todo lo que no se manifieste esencialmente bueno o malo, que son muchos objetos) o ser libre que no sea intelectual. Ahora bien, en el mundo inorgánico no hay nada objetivo que nos induzca a creer que tienen vida y sólo los hombres nos dan señales de vida intelectual; suponer a la materia inerte dotada de determinación libre o cosa equivalente es una pura afirmación.

Las dos últimas tesis no tienen que ver directamente con el valor objetivo de los conocimientos y teorías científicas que rigen el mundo inorgánico, sino con discusiones sobre las relaciones entre las matemáticas y el mundo real y sobre la naturaleza de la evidencia matemática, tal cual lo conciben los matemáticos puros. No se las puede omitir por razones de actualidad científica.

(1) A eso es lo que sabe el párrafo citado de la obra de *Alwin Mittasch*.

XI

Quoi de plus compliqué que les mouvements troublés des planètes, quoi de plus simple que la loi de Newton? Là, la nature, se jouant, comme disait Fresnel, des difficultés analytiques, n'emploie que des moyens simples et engendre, par leur combinaison, je ne sais quel écheveau inextricable.

(H. Poincaré, La Science et L'Hypothèse, IX, Les Hypothèses en Physique.)

La necesidad intelectual que desde el siglo XVII, se ha sentido de expresar las leyes físicas en forma cuantitativa o de igualdad matemática, y la dificultad que para esto se ha experimentado, indujo a los fundadores de la ciencia moderna y a sus seguidores durante casi tres siglos, a buscar leyes simples *en el sentido matemático*. Las matemáticas se encargaban de complicar los resultados como consecuencias de operaciones de cálculo.

Un ejemplo manifiesto de esta tendencia lo presenta Poincaré en el problema de los tres cuerpos. Su enunciado es sencillísimo; pero su análisis complicadísimo (1). Lo mismo puede decirse sobre la propagación de ondas en medios isótropos o anisótropos y todos los demás problemas que presenta la física clásica.

Hay que hacer constar, y este es el sentido que queremos dar a la actual tesis, que esa supuesta sencillez de enunciado matemático es tan gratuita como la de la continuidad y uniformidad de la materia que, según dijimos en la tesis VIII, puede considerarse como definitivamente abandonada en la física moderna. Sin embargo, nos cuesta abandonar la idea de simplificación, por ahorrarnos trabajo y por una tendencia que, según las escuelas, se ha querido denominar *pragmatismo*, *edonismo*, *estetismo* y otros nombres derivados del griego, cuya única razón de ser es nuestra limitación matemática.

(1) Véase H. Poincaré, «Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste», tres tomos. En el primero, es de especial interés el cap. V «Non-existence des intégrales uniformes», pues se refiere no sólo al problema de los tres cuerpos, sino a las ecuaciones canónicas de Hamilton-Jacobi de los sistemas dinámicos en general.

Aunque el cálculo infinitesimal debe su origen a la Geometría, sin embargo fueron sus aplicaciones a la Mecánica y a la Física (y en el siglo xx podemos decir que a la Química) lo que le hizo un instrumento matemático fecundo para la investigación y, sobre todo, para la exposición de las ciencias del mundo inorgánico. Esta fué la causa de su éxito y del por qué los grandes analistas de los siglos xvii, xviii y xix fueron, en general y en diverso grado, investigadores de las ciencias aplicadas y, aunque las excepciones son algo numerosas, también los grandes físicos fueron buenos matemáticos. Conviene, además, observar que el número de postulados se procuraba fuera lo más reducido posible y el enunciado de las leyes lo más simplificado desde el punto de vista matemático.

Lagrange fué el primero que en su Mecánica Analítica intentó generalizar los conceptos de coordenadas, fuerzas y momentos a otros elementos distintos de las coordenadas rectangulares de Descartes y las cantidades de movimiento y momentos respecto de las mismas. Este intento también fué llevado al terreno de la Física Matemática durante todo el siglo pasado y principios del presente. Con ello las sencillas ecuaciones de Newton y Euler resultaron algo más complicadas; por ejemplo, en vez de $m \frac{d^2 x}{dt^2} = X$ del segundo principio de Newton, resulta:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial g'} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q$$

que para ponerla explícita respecto de la aceleración q'' , exige el uso de los símbolos u operadores de Chistoffel de segunda especie.

Esta idea de Lagrange tendía a expresar las leyes mecánicas y, en consecuencia, las físicas, mediante ecuaciones matemáticas, en lo posible independientes del andamiaje de coordenadas. Pero hasta principios del siglo actual, esta tendencia no había tenido otro carácter que el meramente matemático.

Einstein en su célebre artículo (1) dió más alcance filosófico a este sentido de independendencia de las leyes físicas respecto de

(1) *Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie*; por A. Einstein Ann. der Phys. 49 (1916), reproducido en el folleto Lorentz, Einstein, Minkowski DAS RELATIVITÄTS-PRINZIP (Teubner, Leipzig, 1920).

las representaciones matemáticas. Los principios por él sentados: *Las leyes físicas* (se entiende en sentido cuantitativo) *han de ser enunciadas de tal manera, que sean satisfechas por sistemas en cualquier clase de movimientos* y *Las leyes generales de la naturaleza son expresables por ecuaciones que son satisfechas para cualquier sistema de coordenadas* y, por lo tanto, *permanecen covariantes para cualquier sustitución*, expresan una simplificación en sentido físico; pero la complicación matemática es extraordinaria, pues como observa muy bien Eddington (1), hay que calcular 40 símbolos de Chistoffel, cada uno de los cuales contiene 12 términos, y establecer las 10 ecuaciones que expresan la anulación de los 10 componentes del tensor de Einstein (o tensor contracto de Riemann-Chistoffel), cada una de las cuales contiene 25 términos, casi todos productos o derivados de los símbolos de Chistoffel, para obtener con detalle las ecuaciones de movimiento de un punto material en un campo gravitatorio (2).

Es, pues, bien claro que, aun por consideraciones teóricas y casi apriorísticas, no hay que suponer que la *naturaleza* (3) se ciña en sus leyes a nuestros conocimientos matemáticos, sino al contrario. Este hecho ha dado lugar a una controversia, cuya síntesis es escolio obligado de la presente tesis.

¿Cuál es la fuente principal del progreso, de las matemáticas puras? ¿La naturaleza o el espíritu humano?

Según la inmensa mayoría de los matemáticos puros, la razón de ser de la Ciencia matemática está en sí misma. Un teorema puramente matemático es una verdad en sí, prescindiendo de todas las aplicaciones; por lo tanto, bella y útil; así, por ejemplo, el estudio de los griegos antiguos acerca de la elipse, hipérbola y parábola era un progreso, prescindiendo de que, con el tiempo, habíase de descubrir que las trayectorias de

(1) «*Report on the Relativity Theory of gravitation*», por A. S. Eddington (pág. 43).

(2) De hecho, Eddington explica con detalle la aplicación de esta teoría al elemento lineal de Schwarzschild. Téngase en cuenta, que las 10 ecuaciones aludidas, no son independientes entre sí y se reducen a sólo 6.

(3) Esa es la palabra consagrada, por no decir su *Autor inteligente*, que ciertamente sabe infinitamente más matemáticas que todos los matemáticos juntos. No en vano dijo San Pablo lo que se lee en su Epístola a los Romanos, I 18-32, pero no es esta la ocasión apropiado para perorar sobre este tema.

los graves son casi parábolas (de lo que habían de hacerse tantas aplicaciones a la balística exterior) y de que las órbitas de los planetas eran, en primera aproximación, círculos y, en segunda, elipses, uno de cuyos focos está en el centro atrayente; los ejemplos podrían multiplicarse.

En cambio, según la mayoría de los aficionados al estudio matemático de la naturaleza (1), sin afirmar que las matemáticas tengan solamente razón de medio (como, por ejemplo, el lenguaje) aseguran que los matemáticos abandonados a sí mismos irían detrás de caprichos intelectuales, no sólo sin interés práctico, pero sin conexión mutua y acabarían por no entenderse entre sí (2). Tales son, no sólo las observaciones de los que han buscado y seguirán buscando siglo tras siglo la solución de problemas imposibles y absurdos como la trisección del ángulo, la cuadratura del círculo, la demostración del postulado de Euclides, etc. (3), sino la de los que sin desbarrar, se dedican a temas raros, como el de averiguar qué números primos existen entre un billón y un billón diez mil y otros, si no tan chocantes como éste, por lo menos igualmente infecundos; también podrían multiplicarse los ejemplos de este género.

La verdad, como ocurre frecuentemente, está en el medio. *La naturaleza* puede guiar con provecho a los matemáticos en sus investigaciones; pero hay que confesar que, en general, esa misma independencia que hemos afirmado en la tesis de cualquier traba matemática, impide que se la pueda tomar como única guía. Raras veces se preocupa la naturaleza de un concepto muy necesario en la vida civilizada: el rendimiento. Las abejas; al construir sus panales, parece que tienden a resolver a la vez un problema de máxima estabilidad y otro de economía de material; es dudosa la *absoluta* exactitud de la solución de ambos; pero aun sólo como aproximación, precisamente por

(1) Véase H. Poincaré, *La Valeur de la Science*, Cap. V, L'Analyse et la Physique. Su lectura es muy interesante e instructiva.

(2) Algo de esto ocurre con los filósofos antiguos y modernos de diversas escuelas.

(3) Aunque todavía no esté demostrada la imposibilidad de la ecuación de Fermat: $x^n + y^n = z^n$ (x, y, z , enteros y n también entero, mayor que 2), cuando alguien pretende haber demostrado algo positivo en ese campo, puede casi asegurarse que está débil mentalmente.

lo raro del ejemplo, ha llamado la atención a los observadores. En cambio el contemplar la profusión, magnitud y variedad de los astros del cielo, de los elementos en la tierra, de las especies entre los vivientes, de las fallas innumerables para obtener un resultado (por ejemplo, la propagación de las especies vivientes) y de la enormidad de las fuerzas que pone en juego, cuya causa final es enigmática, con relación a la pequeñez del efecto, hace comprender que su *modus operandi* está muy fuera de nuestra comprensión y alcance en la mayoría de los casos. No hay ningún animal terrestre que se mueva con ruedas, ni marino con hélice, a pesar de la variedad que en ellos se descubre de modos de locomoción; y ambos órganos de máquinas exceden en rendimiento a los de la naturaleza. Y aunque es verdad que nuestros aeroplanos se parecen mucho a las aves, acordémonos de que todos los que tenemos más de cuarenta años hemos visto nacer la aeronáutica y en ella se han de verificar grandes, rápidos y esenciales progresos.

Además, aunque es verdad que *la naturaleza* ha impuesto a la mente humana ciertos problemas, por ejemplo, el de la numeración, la solución final que han encontrado los hombres a esos problemas es mediante recursos casi puramente intelectuales. El algoritmo de la numeración, el más admirable descubrimiento de los hombres en matemáticas, se basa en tres conceptos: suma, potenciación y orden de colocación, de los cuales sólo el primero nos lo induce la naturaleza; los dos restantes son puro producto del ingenio humano.

Lo que sí hay que reconocer en la naturaleza (y no sólo en la inerte, sino en toda, sin excluir la sociabilidad humana) es que puede ayudar a que las investigaciones matemáticas no se individualicen demasiado. Este es un grave escollo que hay que evitar, la excesiva absorción. Afortunadamente, *la naturaleza* está por encima de las pretensiones humanas y consigue su resultado, con mal rendimiento, si se quiere, pero infaliblemente; si un hombre quisiese ejercitar su libertad, aun en el terreno de la pura investigación, sin ninguna consideración a los que le rodean, acabará por tenerse que retirar a un desierto intelectual, y allí, falto de la ayuda de los demás, se marchitará irremisiblemente lo poco que pueda haber de fecundo en su pensamiento; y, en cambio, si la sociedad pretende destruir la personalidad del investigador, por ejemplo, negándole re-

cursos que facilita profusamente a otros menos dignos pero más halagadores, ahogará tal vez iniciativas de segunda categoría y promoverá en su lugar otras de tercera, pero no apagará jamás la llama del genio; retardará y hasta cierto punto desviará el verdadero progreso, pero éste se realizará también inelectablemente en una u otra forma, en uno u otro lugar, en una o en otra época. Las historias de Abel, de Galois, de Ramanujan son ejemplos sueltos; pero existen otros muchos, no tan salientes, pero mucho más frecuentes.

XII

Il rigore matematico esige che ogni qualvolta si assume una proprietà geometrica como data dall'intuizione si enunci esplicitamente como un postulato: ogni altra proprietà geometrica, dei'essere dimostrata matematicamente cioè dedotta con ragionamento logico dai postulati già introdotti.

F. Enriques, *Lezioni di Geometria proiettiva*.
Introducción.

Como la anterior, esta tesis se sale algo del cuadro de las precedentes. Pero como no sólo en matemáticas, pero aun en las ciencias aplicadas, se han acumulado en el presente siglo grandes censuras contra *la intuición*, esa especie de demonio que nos induce a toda clase de errores, y que, por lo tanto, hay que excluir en cuanto es posible de la investigación de la verdad, he creído conveniente terminar esta serie de tesis con la presente reivindicación de la calumniada intuición matemática.

Pocos hay que definen claramente lo que entienden por *intuición* y menos por *rigor matemático*. La opinión más común es que *intuición* es la VISTA de una verdad independiente de otras, y *rigor matemático* (o científico, en general) es la vista de la misma en cuanto está ligada lógicamente con otras, de las cuales se escogen las necesarias como postulados indemostrables. Pero en esta suposición hay una *intuición lógica* que no he visto nunca señalar y que, no obstante, me parece muy necesaria.

Al discutir Aristóteles en su *Lógica* las formas silogísticas, hace notar que sólo los silogismos de la primera figura, o sea aquellos que tienen el término medio como sujeto de la premi-

sa mayor (o sea de aquella cuyo predicado lo es también de la conclusión) y como predicado de la premisa menor (o sea de aquella cuyo sujeto lo es también de la conclusión), gozan de la evidencia lógica, pues proceden del principio de que lo que se afirma o niega de *todos* los individuos de un agregado, se afirma o niega de uno cualquiera de ellos (1); las demás formas silogísticas no gozan de esa evidencia lógica, sino sólo pueden alcanzarla indirectamente, ya sea por convenientes inversiones y transposiciones, ya sea (y esto es general) por reducción al absurdo, la cual se funda en el llamado principio *de tertio excluso*, o sea de la imposibilidad de una proposición intermedia entre dos contradictorias (A es B, A no es B), de las cuales, necesariamente, una ha de ser verdadera y otra falsa.

Luego (y esto es lo que hace al caso para nuestra tesis) *esa evidencia lógica* (realmente verdadera, eso no lo discutimos; y como ya lo hemos dicho más arriba, se guardan bien todos los filósofos de cualquier escuela de ir contra ella) *no es más que una intuición*. Al poner reparos algunos matemáticos de oficio a los llamados *postulados o principios intuitivos no demostrables*, y, por tal razón, al impugnar los procedimientos de intuición que emplean casi todos los investigadores de las ciencias naturales y muchos otros matemáticos, hacen una distinción insuficientemente justificada. Deberían, por lo menos, hacer constar que aceptan la *intuición lógica*, pero no la física o de los sentidos.

Hay que notar, además (2), que no sólo pedagógicamente resulta muy poco favorable el método de la suspensión total de la intuición geométrica para la enseñanza de la geometría o de cualquier otra ciencia, y que las más de las investigaciones en todas las ramas se valen de la intuición, a la que se deben casi todos los descubrimientos y adelantos, sino que esa misma suspensión, propia solamente de los ya avezados en el estudio, es solamente fecunda (y entonces en alto grado, como la hace ob-

(1) *Dictum de omni y dictum de nullo*.

(2) Véase el prólogo que el Prof. Francisco Severi, nuestro ilustre colaborador y conferenciante de hace pocos meses, redactó para sus *Elementos de Geometría*, traducidos al español por D. T. Martín Escobar (Editorial Labor).

servar Hilbert (1) cuando pueden analizarse las proposiciones bajo varios aspectos; cuanto más, mejor). La sola supresión, como toda acción negativa, no puede conducir a ningún resultado positivo.

Es triste tener que confesar que nuestra inteligencia, lo más precioso que conocemos naturalmente, puede equivocarse, y de hecho se equivoca en sus apreciaciones; pero esto es sólo en estadios avanzados de conocimiento, y por eso es inadmisibile el escepticismo bajo cualquier forma (y son muchas) que se quiera presentar. El antiguo principio de las escuelas, *lo evidente es cierto* (2), no es una fuerza ciega que nos induce a error, sino una luz inapreciable que nos muestra la verdad, la lógica o la sensible, y nos la hace apreciar como tal cuando se nos presenta objetivamente. Nuestra es la culpa si juzgamos precipitadamente; pero más vale resbalar algunas veces que quedarse inmovilizado para siempre por miedo de resbalar. La experiencia de los errores en la historia de la ciencia muestra que, en general, se exageran las llamadas *revoluciones científicas*; nuevos hechos y nuevas teorías modificarán antiguas ideas, pero raras veces las destruyen por completo; y en ese caso, es más eficaz la *evolución lenta*, pero segura y positiva, que el deseo de demolerlo todo, como si se pretendiese edificar sobre la nada. Queramos o no queramos, tenemos que respetar a nuestros predecesores.

En particular, los principios fundamentales de la aritmética, como la persistencia del número cardinal, las propiedades formales de la suma y de la multiplicación, la posibilidad de coordinar dos conjuntos y otros muchos, son principios intuitivos; pero no se refiere a ellos, ni solamente ni principalmente, el sentido de la tesis, sino a la falsa concepción del papel preponderante, en realidad casi exclusivo desde el punto de vista criteriológico, que se ha querido dar a la intuición lógica en matemáticas a fines del siglo pasado y a principios del pre-

(1) *Grundlagen der Geometrie* por D. Hilbert (Teubner). En su epílogo hace la observación que *de hecho*, cuando tratamos de resolver un problema matemático o establecer un teorema, nuestro trabajo es completo, sólo cuando vemos *claramente*, o todos los aspectos de las soluciones cuando éstas son posibles, o las razones de la imposibilidad y la necesidad de introducir nuevos elementos e ideas para dar con el verdadero camino.

(2) Quod evidens est, verum est.

sente y que se ha pretendido llevar a las ciencias de observación. La intuición lógica no es más que una de tantas intuiciones (o evidencias, como se dice en un lenguaje corriente), y ni por su origen ni por su propia esencia supera a la evidencia que se deriva del análisis formal de sujeto y predicado de una proposición cualquiera (1).

Por fin, el llamado *rigor matemático*, que se pretende ser el ideal de la matemática novecentista (con la consecuencia de que las ciencias de aplicación serán tanto más ciertas cuanto más participen de dicho rigor matemático) y que fuera de dicho rigor no hay nada cierto, es enteramente gratuito. Su valor criteriológico no llega (aunque no sea por otra razón que por la larga cadena de silogismos) al del solo principio de contradicción en el cual se funda, y éste no supera al llamado postulado de la propia existencia, de la posibilidad y aun necesidad de la certeza formal y del *tertio excluso*. El papel que le toca al *rigor matemático* no es exclusivo, sino sólo analítico; y en este sentido ha sido un auxiliar magnífico en matemáticas, no sólo desde hace un siglo, sino en manos de todos los grandes genios, desde Arquímedes y Euclides hasta Gauss y Cauchy.

En las ciencias de observación su función ha sido mucho más restringida; pero no ha dejado de ser también fecunda, cuando no se le ha tomado con carácter exclusivo; así, aun en las modernas especulaciones sobre la constitución del átomo, de los *quanta*, de la relatividad y de la mecánica ondulatoria, es muy probable que lo que es pura intuición sensible será enteramente rechazado dentro de pocos años; pero las relaciones matemáticas establecidas perseverarán con otra interpretación sensible hasta que nuevos refinamientos de medición y análisis obligen a precisarlas o generalizarlas.

Con esto doy por terminada mi tarea, y casi diría mi disertación, si no tuviese que contestar a tres observaciones que se derivan de ella, que son: 1.ª Por qué no he expuesto un tema

(1) De hecho, así como para *demostrar* (en realidad, sólo ilustrar de alguna manera) las leyes formales de la adición y multiplicación, se dejan los conceptos abstractos y se concretan los elementos en puntos o rayas, para ilustrar las leyes silogísticas es muy útil usar imágenes geométricas; se obtiene el mismo efecto mediante conversiones lógicas. Pero dado nuestro modo de discurrir, siempre operamos con algún elemento intuitivo, aunque no sea otro que las palabras empleadas.

más adecuado a mis estudios particulares. 2.^a Por qué no he querido aludir a nuestro actual movimiento científico en nuestras actuales circunstancias políticas que, aunque no queramos, absorben nuestra atención en muchos aspectos. 3.^a Por qué no he hecho casi ninguna alusión a mi profesión de creyente, que no puedo ocultar.

Respecto de la elección de tema, he de ser sincero al decir que dudo que mis estudios particulares sobre magnetismo terrestre, teoría de la relatividad y teoría de funciones de variable compleja pudieran interesar más; y, en cuanto a la teoría de los números y formas numéricas, se refieren a matemáticas puras. Pero tengo además que declararos que ningún tema me ha apasionado más que el de investigar en lo posible la certeza de los conocimientos adquiridos. Hace ya más de veinticinco años publiqué un artículo sobre este asunto, que mereció la benévola atención y hasta inmerecidas alabanzas de D. Rufino Blanco (1); tal vez él, por aquella benignidad, es el más responsable de que otra vez haya tocado este asunto al cabo de tanto tiempo y muchas reflexiones.

Respecto al momento político he de confesar que, como a todos, también absorbe mi atención; además, me halaga la idea de creer que nadie sea más patriota que yo. No puedo decir que soy ex combatiente, ni ex cautivo y ni siquiera ex capellán militar de nuestra Cruzada, como muchos de mis compañeros; pero me cabe la inmensa satisfacción de poder afirmar que viví más de seis meses en el frente, hablando y comiendo con jefes, oficiales y soldados (2), compartiendo sus angustias durante toda la campaña del Ebro desde el principio al fin y despidiéndome de la para mí inolvidable y simpática División 105 el 12 de enero de 1939, cuando iba ya en camino del brillante avance que había de terminar en la frontera el mes siguiente. No cambiaría las emociones de esos días, sobre todo aquella Misa de Nochebuena celebrada con nuestros soldados de Transmisiones en la sala de visitas del Observatorio, y la fiesta de la

(1) Bárbaramente asesinado por los rojos en 1936; descanse en paz.

(2) Especiales gracias deseo manifestar en esta ocasión al general Excelentísimo Sr. D. José Kindelán y al servicio meteorológico del Ejército del Aire, pues gracias a su ayuda, pude comenzar a reorganizar el departamento meteorológico del Observatorio del Ebro, bárbaramente saqueado por el ejército rojo al retirarse de Roquetas, en abril de 1938.

Patrona, o sea la Inmaculada Concepción, en la misma trinchera, a doscientos pasos de los rojos, por ninguna otra satisfacción mundana.

Pero una vez lograda la victoria, si deseo continuar siendo patriota, tengo que sacrificarme por la Patria como todos (1), a fin de que se saque de ella el mayor provecho posible a mayor gloria de Dios y de España. Y así como hace ya casi veinte años, cuando cierta persona (no importa quién) me insinuaba el que cambiara mi nacionalidad por la de alguna otra nación más poderosa, le contesté que no amaba a España porque fuese poderosa, sino porque era mi madre y la nación más noble que existe actualmente, así ahora pienso que el mejor servicio que puedo prestar a mi patria, dada mi edad y condición, es el cooperar a la reviviscencia del genuino espíritu español de nuestro Siglo de Oro; España fué grande no arrebatando provincias, ni usurpando reinos, ni esclavizando pueblos, sino cristianizando y civilizando los continentes descubiertos por el genio y valor de sus hijos. Tal fué la tarea de nuestro Marcellino Menéndez Pelayo, cuya fecunda vida estuvo totalmente consagrada a demostrar que la verdadera ciencia española surgió de la idea católica de la igualdad de todos los hombres ante Dios y de que la verdad y la certeza objetiva eran los únicos motivos por los que valía la pena derramar la sangre; España combatió con inigualado valor, no por obtener tantos por cientos ni materias primas, sino por cuestiones de teología. No os extrañe, pues, que en esta ocasión haya yo tan incompletamente tratado un tema que juzgo ser el más español de todos, cuando durante toda mi vida, en distintos tonos, no he oído más que dogmatismos intolerables de cátedra y conferencia o escépticismos sombríos de pedantería intelectual; no eran así nuestros antepasados y, con todo, no valían menos que nosotros ni que nuestros contemporáneos de otras naciones que se llaman civilizadas y que se matan sin saber por qué. En cambio, ¡Viva Cristo Rey! era el grito final de nuestros mártires, ¡Viva España! el de nuestros héroes de todos los siglos, no sólo en las

(1) No creo que haya expresión más española del patriotismo, que la que en labios del Alcalde de Zalamea, inmortalizó nuestro primer dramaturgo: Al Rey la hacienda y la vida se ha de dar; pero el honor es patrimonio del alma y el alma sólo es de Dios.

victorias, sino en los reveses ; tenían fe y sabían por qué luchaban y por qué morían.

Y en cuanto a mi carácter de creyente, de sacerdote católico, sólo he de deciros que grande es el honor que me dispensáis en este momento y por él os estoy agradecidísimo ; pero al ver que ya no están entre vosotros dos, uno profesor y otro compañero mío, los cuales no sólo fueron eminentes académicos y excelentes compañeros vuestros, sino fervorosos cristianos, modelos de toda clase de virtudes y dignos por su conducta ejemplar de que se abriese sobre su vida un proceso de canonización (ya sabéis a quiénes me refiero, pues uno de ellos está virtualmente entre vosotros y del otro su caso es muy reciente para haberlo olvidado), sólo se me ocurre decir que así como habéis tenido la condescendencia de franquearme la entrada a vuestra corporación en la tierra por pocos años (y tal vez por pocos días), me abran ellos la del cielo, donde se disiparán todas nuestras dudas al ver claramente y para siempre la Eterna Verdad cara a cara ; porque, ¿de qué le aprovecha al hombre ganar todo el mundo si pierde su alma?

חֲסֵדֵי יְהוָה עוֹלָם אֲשִׁירָה

CONTESTACION

DEL

EXCMO. SR. D. JULIO PALACIOS MARTINEZ

Señores Académicos:

Claras y convincentes fueron las razones por las que esta Real Academia llamó a su seno al P. Enrique de Rafael Verhulst. Se daba el caso de ser escasísimo el número de académicos que dedicasen su actividad al cultivo de la Física, tan escaso que puede decirse que quedaba reducido a la modesta persona que tiene el honor de dirigiros la palabra en estos momentos. Y ello sucedía cuando, como es bien sabido, se llevan a cabo descubrimientos de tal importancia que obligan a revisar hasta los que se consideraban cimientos inquebrantables, y cuando un escogido número de físicos españoles había conseguido en pocos años que sus trabajos ocupasen lugar destacado en las publicaciones científicas de todos los países, poniendo así un rotundamente a cuantos mostraban morbosa complacencia en afirmar nuestra incapacidad para crear ciencia propia.

Cuando por iniciativa de Ramón y Cajal se promovió en nuestra Patria el resurgimiento científico a cuyos halagüeños resultados acabo de aludir, se pensó muy acertadamente que convenía empezar por la formación de experimentadores y dejar para más adelante la preparación de teorizantes, pues la labor de éstos había de ser necesariamente estéril mientras no hubiera quien les planteara problemas y les confirmara los resultados de sus especulaciones. Pero ahora, cuantos hemos dedicado nuestra actividad a la labor experimental, sentimos ya la falta de personas que, por sus conocimientos teóricos, nos puedan ayudar en la interpretación correcta de nuestros resultados y, sobre todo, que sean capaces de abarcar con visión panorámica las modernas teorías físicas para servirnos de guía en la renovación de nuestros métodos de trabajo. Portugal, la nación hermana, que se halla en circunstancias muy parecidas a las nuestras, no escatima medios para asegurar la vida de su ya brillante plantel de jóvenes investigadores, y para ello estimula ahora preferentemente el cultivo de la Física Teórica, gracias a lo cual han al-

canzado estos estudios envidiable nivel, según se ha puesto de manifiesto en el reciente Congreso de Oporto.

Puestas en evidencia cuáles eran nuestras necesidades, era ya obvia la designación del P. Enrique de Rafael. Pese a su modestia, que le hace encontrar más atractivos en la labor callada y recóndita que en la vana exhibición espectacular, y pese sobre todo al hecho de haber estado fuera de España una buena parte de su vida, la fama daba testimonio de sus profundos conocimientos de Matemática y de Física. Era, pues, lo que necesitábamos y por eso fué elegido.

El discurso que acabáis de escuchar, no sólo prueba que nuestras esperanzas han sido cumplidas, sino que, por añadidura, nos encontramos con algo de valor inestimable por su rareza. Tenemos ya al Físico teórico que nos hacía falta, pero además se da la peregrina circunstancia de que sea además un filósofo de recia raigambre española, y ello es importantísimo según vamos a ver.

Quizás el rasgo más saliente de nuestra cultura consista en el divorcio entre la Filosofía Pura y las ciencias que, desgajadas de ella, constituyen lo que en Inglaterra se llama todavía Filosofía Natural. Tal escisión, justificada por la diversidad de objetos, por la diferencia entre los métodos de trabajo y, sobre todo, por la necesidad de establecer una clasificación en el creciente y cada vez más abrumador caudal de los conocimientos humanos, ha tenido un resultado sumamente provechoso. ¿Qué hubiera sido de la Medicina si los médicos no hubieran admitido a ciegas la necesaria conexión entre la causa y el efecto? o ¿qué hubiera sido de las ciencias experimentales en general si el experimentador hubiera puesto en duda el carácter objetivo y universal de sus mediciones y hubiera sospechado que todo era ilusión y que el asentimiento de sus colegas era fruto de morboso contagio? Es seguro que en vez de lograr el portentoso desarrollo de la Ciencia y de la Técnica que constituye verdadera maravilla, estarían aún los sabios atascados en cuestiones previas o descarriados por los vericuetos del agnosticismo, del escepticismo, del idealismo, del materialismo, del positivismo o de cualquiera de los múltiples sistemas filosóficos que de modo tan magistral acaba de traer a colación el P. de Rafael.

Todo parecía indicar que la separación de la Filosofía Pura y de las Ciencias de observación era un hecho consumado, y

que, en lo sucesivo, cada una había de seguir su propio derrotero sin posibles interferencias. Pero he aquí que en el dominio de la Física surgen cuestiones que obligan a los filósofos a preocuparse seriamente de lo que ocurre en el campo ajeno. Fúé primero la teoría de la relatividad al tratar de fundir el espacio y el tiempo en una entidad de orden superior, el universo cuadrimensional, intento que tan acertadamente acaba de refutar nuestro nuevo académico y que no planteaba, en realidad, un problema tan grave como se creyó, ya que en el fondo y aun dando por válidas las escasas pruebas experimentales logradas en apoyo de la teoría de la relatividad generalizada, podemos perfectamente no ver en tal universo cuadrimensional más que una ficción mental que ofrece la curiosa circunstancia de unificar los fenómenos gravitatorios y los electromagnéticos; pero como no hay razón para creer que tal unidad existe realmente, no tenemos tampoco necesidad de mezclar conceptos que, como el espacio y el tiempo presentan diferencias tan marcadas como las que señala el P. de Rafael.

Aun no aquietado del todo el bullicio provocado por las teorías relativistas, surge otra cuestión físico-filosófica mucho más grave. Me refiero al principio de indeterminación, del que os hablé hace diez años desde el mismo lugar que ocupa nuestro nuevo compañero. Esta vez el pleito no ha trascendido al gran público, pero en cambio ha convertido el mundo de los físicos y el de los filósofos en verdadero campo de Agramante. Salvo excepciones muy escasas y de poca monta, todos los físicos admiten la Mecánica Ondulatoria por el modo portentoso con que llena las lagunas de la teoría de los cuantos, y todos están de acuerdo en que, con el estado actual de cosas, nos es imposible aplicar el principio de causalidad a los procesos internos de la Física del átomo, esto es, que no podemos predecir el futuro a partir del conocimiento del presente. Las discrepancias sobrevienen cuando se trata de si tal principio rige o no en la realidad externa. La posición más firme por lo ponderada es, seguramente, la de Planck, quien se limita a decir que del hecho de que hayamos deducido leyes estadísticas para los procesos atómicos no se infiere necesariamente que la realidad exterior no esté regida por el principio de determinación. Por otra parte, ha demostrado von Neumann que está condenado al fracaso todo intento de completar la Mecánica Ondulatoria de modo que las leyes estadísticas

que nos suministra en su estado actual se conviertan en leyes causales, de donde resulta que, de ser ciertos los principios de la Mecánica Ondulatoria, nos es imposible formar un modelo mental y determinista del mundo físico. En ello se fundan Jordan y los antideterministas para negar que el mundo exterior esté regido por el nexo rígido entre causa y efecto.

La cuestión se complica más aún por la circunstancia de que los físicos teóricos se extralimitan y traen a colación asunto de tanta monta como el del libre albedrío. También en este caso adopta Planck, que se ocupa largamente en este problema, una posición prudente, pues tras de admitir la libertad del alma humana como una realidad indudable, viene poco más o menos a parafrasear la sentencia de Schopenhauer «el hombre puede hacer lo que quiera, pero no puede querer como quiera». En cambio, Einstein quiere salvar del naufragio los restos del viejo materialismo, y afirma enfáticamente que «no puede comprender lo que la gente quiere decir al hablar de la libertad de la voluntad humana».

Es natural que los filósofos de oficio hayan opinado sobre tema que tan directamente les afecta y, si los físicos no han llegado a un acuerdo sobre si el mundo físico es o no determinista, a pesar de saber de qué se trata, es también natural que los filósofos incurran en los desatinos que subraya el P. de Rafael al referirse al libro de Alwin Mittasch.

Creo que es suficiente este ligero bosquejo para que nos demos cuenta de la suerte que representa para esta Real Academia el contar en su seno con una persona que, como el P. de Rafael, reúne las tres circunstancias de ser un buen matemático, un físico sagaz y un profundo filósofo, pues todo ello, y además el ser católico de amplio criterio ortodoxo, necesita quien haya de servirnos de mentor en cuanto atañe a los mismos fundamentos de la Ciencia.

Estoy seguro de que todos sentís curiosidad por saber cómo ha podido darse el caso singular de que una misma persona cultive a fondo la Filosofía Pura y la Filosofía Natural, incluyendo las Matemáticas. Nadie se extrañará de que el P. Enrique tenga una sólida formación filosófica viendo que viste la sotana de la Compañía de Jesús. De tal formación nos ha dado espléndida muestra en el discurso del que acabáis de escuchar un breve resumen, redactado a la buena manera escolástica, con sus tesis

bien ordenadas, sus razonamientos de impecable lógica y, por añadidura, citas eruditas y notas y ejemplos de deleitosa amenidad. Yo he tenido el privilegio de leerlo íntegro, mejor diría de sorberlo de un golpe, y puedo aseguraros que he pasado un rato agradabilísimo. Todo filósofo suele ser buen literato y, si además es matemático, podemos prever que su estilo será bello y conciso. Y, en efecto, en el discurso que comento hay perfecta armonía entre el fondo y la forma. Las palabras forman sentencias y las sentencias períodos como los mármoles y los bronce se ubican en una obra maestra de Arquitectura, o como los metales preciosos y las piedras finas en una joya. Para cada idea, la palabra justa y precisa, pesada, medida y aquilatada como cuando se busca un diamante, una perla o un rubí para lograr un efecto determinado.

Las doce tesis sentadas por el P. Enrique de Rafael en su discurso invitan a la polémica. Todas hacen meditar, y con la meditación se plantean al lector nuevos problemas que quisiera ver resueltos. Séannos permitidos algunos comentarios hechos con el único propósito de incitar al autor a que complete su obra.

Satisfactoria en sumo grado, sobre todo para un experimentador, es la tesis en que se afirma el valor objetivo de los conocimientos. En lo que se refiere a la Aritmética la argumentación nos parece concluyente, pero en todo lo demás la cuestión es tan debatida que desearíamos un análisis más detenido y profundo. Aun dentro del campo de las Matemáticas son muchas las cuestiones que agradeceríamos ver a la luz de la referida tesis. ¿Cuál, por ejemplo, de las diversas teorías creadas por los matemáticos tiene valor objetivo? Manejan los matemáticos entes de razón, y con sus definiciones y axiomas construyen una teoría lógicamente perfecta, sin recurrir para nada a la experimentación. Hasta hace poco, no se preocupaban los matemáticos de si tales entes y tales teorías tenían valor objetivo y, cuando más, veían tras de sus símbolos magnitudes numéricas. Al aplicar las teorías matemáticas en la Física se pensaba tan sólo en los números y, por tanto, no se sospechaba que tal aplicación fuese de dudosa legitimidad.

Ahora, en cambio, se inicia la tendencia entre los matemáticos a operar con magnitudes y no con números, y precisamente el profesor don Ricardo San Juan explica en una de las cáte-

dras de la fundación del Conde de Cartagena una nueva e importantísima teoría de las magnitudes físicas. Con este punto de vista, un tensor por ejemplo no es una mera colección de números reales o complejos ordenados de cierto modo, sino una individualidad que podrá ser el sistema de tensiones o deformaciones en cada punto de un sólido, el sistema de momentos de inercia, la masa en su sentido más amplio, etc., etc. Otras magnitudes se representan por operadores matemáticos, como ocurre tan frecuentemente en Mecánica Ondulatoria, y entonces se encuentra el físico con una teoría enteramente elaborada y la aplica de lleno a la interpretación de sus resultados experimentales. Ello sería legítimo si tuvieran carácter de indudable objetividad tales teorías matemáticas, pero ¿no podrá suceder algo parecido a lo que ocurre con la Geometría, y estemos tratando de meter a la fuerza el mundo físico dentro de una creación de nuestra mente? ¿No será ésta la causa de que, pretendiendo construir las llamadas ciencias positivas con datos tomados directamente de la experiencia externa, hayamos llegado a un caos que yo no podría describir mejor que copiando el siguiente párrafo de Eduard May? (1).

«Ha sido preciso separar el modelo mecanista del Universo del modelo electrodinámico, y queda sin resolver el fondo del problema, si la Mecánica ha de construirse sobre la Electrodinámica o ésta sobre aquélla. Nos encontramos, además, con el modelo vitalista, el finalista, el organocístico, el organológico, el relativista, el cuantista y quién sabe cuantos más. El substracto del Universo parece ser tan pronto «espíritu» como materia, tan pronto energía desmaterializada como corpúsculo o como onda o como ambas cosas a la vez, tan pronto con alma como sin ella. Aquí se proclama el libre albedrío; allí se proscribe. Acá impera la «mera probabilidad»; acullá rige el «determinismo riguroso». Ahí impera la ley de causalidad; allí ha perdido su dominio. Para unos, la «ciencia moderna» conduce hacia Dios; para otros es argumento en favor del ateísmo. El «monismo», convertido en «holismo» celebra su resurgimiento, mientras los partidarios de la concepción dualista siguen aferrados a su idea. Aquí rige el evolucionismo; allí se enseña la constitución esca-

(1) De un artículo en prensa para su publicación en «Investigación y Progreso».

lonada del Universo y se habla de diversos actos de creación. *Y para sostener tan contradictorios puntos de vista se apela siempre a la «experiencia» y a los resultados de las ciencias de la Naturaleza.»*

¡Ojalá que el P. de Rafael escriba pronto su anunciado libro de Criteriología Científica del que su actual discurso es tan sólo un anticipo.

La tesis número diez puede ser también objeto de largas y profundas disquisiciones. Afirma que las leyes físicas mencionadas cualitativamente o aun cuantitativamente son más ciertas si se precisan menos. La argumentación a su favor es clara a más no poder y por nuestra cuenta podemos aducir nuevas pruebas. Ingenieros y Arquitectos, una vez elaborados sus proyectos a base de las leyes de la Mecánica y de la Física introducen coeficientes de seguridad, y cuanto mayor es el margen que conceden a los posibles errores de las leyes utilizadas tanto mayor es la confianza que merece la solidez de sus construcciones. Las leyes mejor estudiadas son aquéllas en que se acotan las posibles divergencias. Ejemplo, la identidad entre la masa gravitatoria y la masa inerte, de la que podemos afirmar que es exacta con un error relativo inferior a dos unidades del séptimo orden decimal. Si Mariotte, Charles y Boyle hubieran expresados entre qué límites de temperatura y de volumen y con qué grado de precisión era satisfecha por los gases sometidos a estudio la proporcionalidad inversa entre la presión y el volumen, es indudable que hubieran enunciado una ley exacta. A esta norma prudente se atienen las numerosas «regularidades» que con tanta profusión descubrieron los precursores de la llamada Química física y nadie puede refutarlas porque en su misma imprecisión tienen la garantía de veracidad.

Pero, si calamos más hondo, brotan las dudas. ¿Qué significa lo de ser más o menos ciertas las leyes físicas? ¿Es que caben grados en la certeza? Ello parece indicar que se trata de una postura subjetiva frente a los hechos observados. He aquí, pues, un dilema que quisiéramos ver aclarado. La razón de que sea imposible coordinar la certeza con la exactitud, radica o en nuestra forma de conocer o en el mundo exterior. Examinémoslo.

En el primer caso tiene perfecto sentido hablar de mayor o menor certeza, pero es el caso que la historia de la Física nos revela que el perfeccionamiento de los métodos de medida se

consiguen leyes que hemos de reputar como más ciertas que las primitivas. Los ejemplos salen a cada paso. Las leyes de los gases en su primera forma son insostenibles, y de nada hubiera servido acotar su grado de precisión y el dominio en que son aplicables, porque éste cambia de unos gases a otros. En cambio, las leyes actuales, fruto de medidas más precisas, tienen un grado de certidumbre mucho mayor. Innumerables son los ejemplos que, como el anterior, prueban que «un conocimiento más preciso, conduce a leyes más exactas».

Si nos atenemos al otro término del dilema, esto es, si admitimos que la tesis sentada por el P. de Rafael tiene su fundamento en la realidad exterior, ¿no nos veremos conducidos al indeterminismo? Justamente el principio de indeterminación es la expresión concreta y cuantitativa de la imposibilidad de enunciar una ley que sea a la vez exacta y cierta. Resultaría, así fallado, el pleito acerca de si el mundo está regido por leyes causales o por leyes estadísticas, y el fallo recaería en favor de esta última presunción. Esto nos hace temer que nos hemos descarrilado al sacar consecuencias de la tesis décima y resalta una vez más la conveniencia de que el propio autor nos vuelva al buen camino.

Pero, ¿dónde ha aprendido lo que sabe el P. de Rafael de Matemáticas y Física? ¿Es un autodidacto? ¿Es un filósofo que ha estudiado las ciencias, o es un científico que ha aprendido Filosofía? Voy a satisfacer vuestra curiosidad y, con ello, cumpliré la misión que me incumbe en esta solemnidad, que es trazar una biografía, siquiera sea somera, del nuevo académico.

Sir. Olivier Lodge en su libro *Pioneers of Science*, al hablar de Descartes, hace notar que casi todos los grandes sabios pertenecen a familias acomodadas y que quien como Copérnico, nace y vive en lucha con la pobreza, se encuentra en condiciones tan desventajosas, que es seguro que muchos genios se malogran. Esto ocurre todavía en Inglaterra, donde el acceso a las grandes universidades de Oxford y de Cambridge, es privilegio reservado a las familias opulentas, pero no es aplicable en modo alguno a nuestro país, que ha sabido llevar a todos los órdenes de la vida y con todas sus consecuencias el principio católico, y por eso nos encontramos con descendientes de judíos conversos que han sido cardenales o Generales de la Compañía de Jesús, y con porquerizos que llegaron a ser Adelantados de Indias.

Ahora mismo, si repasáis la lista de los que descuellan en la Jerarquía Eclesiástica, en Medicina, en el Foro, en la Cátedra o en el Ejército, veréis que casi todos proceden de nuestra clase media, la cual se encuentra, por el nivel general de vida, en condiciones inferiores a las de la pequeña burguesía en países más ricos.

El caso del P. Enrique de Rafael Verhulst es uno de tantos. Familia numerosa y recursos escasos. Están atendidas las necesidades primordiales; se come lo suficiente, se viste con decoro y los hijos se educan e instruyen tan bien como cualquier otro, pero cualquier extraordinario desnivela el presupuesto casero y el déficit se salda a fuerza de orden en la economía doméstica. El pequeño Rafael, que nació en Barcelona el 10 de noviembre de 1885, tiene ahora quince años y acaba de terminar el Bachillerato. Como todos los chicos inteligentes y aprovechados, quiere ser Ingeniero y sus hermanos mayores le animan. Pero la carrera es cara. Hay que pensar cuando menos, en dos años de preparación en una academia costosa, y el ingreso no es seguro aunque se tenga inteligencia y se trabaje con denuedo. Es un lujo reservado a las familias de grandes recursos. En cambio, si va a la Universidad tendrá matrículas de honor gracias al premio extraordinario que, único entre quinientos compañeros, acaba de conseguir al revalidar sus estudios de Bachillerato. Rafael va, pues, a la Universidad y estudia Ciencias Exactas. La pensión que cobra la madre, viuda, no es bastante para atender al nuevo gasto, y ella misma tiene que dar lecciones de inglés y francés, a fin de que pueda estudiar el hijo menor. En cuatro años es Licenciado con Premio Extraordinario. Al siguiente, esto es, en 1905 y con el mismo éxito, se doctora en Madrid con una tesis sobre *Solución y discusión del problema de Malfatti y sus análogos*, en la que se hace una discusión completa de los métodos de Steiner y de Hart en el plano y se extienden a la esfera. Inmediatamente, cuando sólo tiene veinte años, es nombrado Auxiliar interino en su *Alma Mater* la Universidad barcelonesa. A los dos años adquiere por oposición el cargo y prosigue su labor investigadora con los siguientes trabajos:

1906. *Una generalización en el espacio de los haces y redes de cónicas de primer orden*. Este trabajo quedó inédito hasta 1916 en que, traducido al catalán, apareció en los «Arxius del Institut de Ciencies», de Barcelona.

1907. *Sobre el devanado del inducido en las dinamos.* «Anales de la Facultad de Ciencias de Zaragoza. núm. 3, septiembre.

1908. *Sobre la determinación de las tangentes y planos osculadores en los puntos singulares de las curvas alabeadas,* presentado en el primer Congreso de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias, Zaragoza 1908. Aunque fué leído y comentado en las sesiones, no fué publicado en los volúmenes por el cambio brusco que, como veremos, se produjo en la vida de nuestro biografiado. Era un trabajo enteramente original, que se refería a la determinación de las tangentes y de los planos osculadores a las distintas ramas de la curva de intersección de dos superficies, tanto en el caso en que el punto fuese ordinario en ambas, pero singular de la intersección por tener ellas el plano tangente y la indicatriz comunes, como cuando fuese singular de una o de ambas superficies.

Tan intensa labor en tan poco tiempo eran felices augurios, y es seguro, que el P. de Rafael sería ahora un gran profesor en alguna de nuestras universidades, si no hubiese ingresado en 1908 en la Compañía de Jesús, cuando no llevaba más que un año de Auxiliar en propiedad.

Como biógrafo, tengo el deber de averiguar y de referiros a qué se debió tan inesperado y trascendental cambio de rumbo. Dios llama de muchos modos a sus escogidos: unas veces con una honda sacudida espiritual, como a San Francisco de Borja, otras de modo más apacible. ¿Intervino algún fracaso amoroso en el caso del P. de Rafael? Quizás sí, aunque seguramente no fué a la manera violenta de la conversión de San Francisco. Cuantos conocemos a fondo al P. de Rafael, apreciamos su carácter afable y cariñoso, rayano en el sentimentalismo y, por tanto, no parece aventurado suponer que si hubiera encontrado un afecto terreno en que depositar su ternura, no hubiera sentido la vocación religiosa. En este caso, fué la suya una vocación tranquila; fe robusta, sin conflictos espirituales ni afectivos.

Abrese ahora un largo paréntesis en la vida científica del novicio y prodúcese un cambio radical en su modo de vivir. A la rápida sucesión de triunfos en su carrera mundana, siguen largos años de disciplinado estudio en cuestiones que nada tienen que ver con sus anteriores actividades. Cinco años de Latín y Humanidades, dos de Filosofía, cuatro de Teología y Derecho Canónico y uno de Derecho especial. El mismo nos confiesa

que lo que más le costó, fué someterse a la voluntad ajena. Fueron, pues, doce años de severa disciplina intelectual y de recia forja de la voluntad.

Las ordenanzas de los estudios eclesiásticos, prohíben la redacción de trabajos que exijan largos desarrollos. No por eso cesó la actividad científica del P. de Rafael, pero se manifestó más bien en trabajos pedagógicos y de divulgación. De esta época son :

1912. Una conferencia en Zaragoza, con motivo del eclipse total anular del Sol de 17 de abril de 1912, último de los visibles como tales en España durante el presente siglo.

1914. *Lecciones sobre las teorías cosmogónicas*, cuyos extractos aparecieron en la revista «Ibérica» en el primer año de su publicación, junto con otras notas de menor importancia.

1916. *Sobre el problema de Malfatti*. «Arxius del Institut de Ciencies», Barcelona. Es un perfeccionamiento del tema sobre qué versó la tesis doctoral.

1917. *La obra científica y de divulgación de Don José Echegaray*. El extracto apareció en «Ibérica». Más tarde, otro trabajo análogo sobre *Don Eduardo Torroja*.

1917. *Las teorías del continuo, según el P. Suárez, y su comparación con las más modernas de H. Poincaré y E. Picard*. Dos conferencias pronunciadas en Barcelona con motivo del III centenario de la muerte del P. Suárez. Aparecieron, traducidas al catalán, en los «Arxius del Institut de Ciencies».

1917. *Sobre el valor objetivo de las teorías e hipótesis físicas*. Un extracto apareció en «Ibérica». Aunque el carácter de la conferencia era de vulgarización, en ella se apunta la teoría de que la evidencia y, por consiguiente, la certeza de las teorías es inversa al grado de precisión. Esta idea, algo antitética pero muy verdadera, había de ser el prólogo de una obra de criteriología científica, que ha quedado inédita y de ella nos ha dado una especie de programa en el discurso que acabáis de escuchar.

1918-1919. Los artículos *Movimiento, Móvil y Número*, en la Enciclopedia Espasa. Otro sobre *Notación*.

1918. *Una monografía sobre la obra de Don Eduardo Torroja*. Un catalán ilustre residente en Madrid. «Arxius del Institut de Ciencies».

1918. *¿De cuántas maneras se puede descomponer un nú-*

mero entero en tres factores enteros? «La Educación Hispano Americana». Abril, 1918.

Era propósito de la Compañía el que el P. de Rafael se dedicase a la Astronomía Física, y por eso, siendo ya jesuita hizo los estudios de la Licenciatura y del Doctorado en Ciencias Físicas.

Terminada su *Ratio studiorum* en 1920, encuentra lugar adecuado a su título de Doctor en Ciencias en el Observatorio del Ebro, que dirigía el P. Rodés, y ocupa el cargo de Jefe de la Sección Magnética. Al año escaso, cambia de ocupación y, cosa poco frecuente, cambia de Provincia dentro de la Compañía y viene a desempeñar el puesto de Profesor de Cálculo y Física Matemática en el Instituto Católico de Artes e Industrias que acababa de fundarse y al que el P. Pérez del Pulgar imprime orientación científica de altos vuelos.

Solo tres años, desde 1921 hasta 1923, permanece el P. de Rafael en el I.C.A.I. y durante ellos preparará tres meritísimos trabajos para el Congreso de Oporto, en los que trata de temas de Matemáticas, de Física Experimental y de Física Teórica:

1921. *Estudio sobre ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, algébricas en x e y , y de grado n respecto de y' .* Sección de Ciencias Exactas.

Una precaución que conviene tener presente al graduar los aparatos magnéticos de variaciones. Sección de Astronomía y de Física del Globo.

La teoría del experimento de Michelson. Sección de Ciencias Físico Químicas.

1922-23. *Ocho lecciones sobre la teoría de la relatividad restringida.* Conferencias de Física Matemática publicadas en los *Anales de la Asociación de Ingenieros I.C.A.I.*

1923. *Funciones eulerianas.* Enciclopedia Espasa.

Un buen día, el P. Rafael, como la cosa más natural del mundo, nos dió una gran noticia. Iba de Jefe del Observatorio Astronómico y de profesor de Matemáticas y de Astronomía al «St. Xavier's Collège» de Bombay. Con ello perdimos el contacto, pero la fama nos trajo de vez en cuando noticias de sus triunfos. Sus títulos universitarios españoles y sus méritos personales bastaron para que las autoridades inglesas le nombrasen Miembro Adjunto del Senado de la Universidad de Bombay, Presidente de la Comisión de Estudios de Matemáticas de la misma, así

como Lector y Examinador de Teoría de Variable compleja, de Mecánica Analítica y de Astronomía.

De su actividad científica en este período son fruto los siguientes trabajos :

1924. Dos conferencias, una sobre la relatividad restringida y otra sobre la relatividad generalizada, dadas en el Congreso de la «Indian Mathematical Society». Poona.

1926. *The developement of Mathematics on the Continent during the last Century.* Fergusson College Magazine.

1926. *The nature of the roots of an algebraic equation of third and fourth degree.* Dos conferencias en el Congreso de la I. M. S., Bombay, 1927. El trabajo todavía no está concluído y gran parte está aún inédita.

Tras la larga etapa que pudiéramos llamar misionera, porque cultivar la ciencia al servicio de Dios en país de infieles y en pugna con los protestantes es modo eficacísimo de propagar nuestra fe, fué trasladado el P. de Rafael a Lieja el año 1933, para explicar Cálculo y Mecánica Racional en el I.C.A.I. que, como es sabido, se había trasladado a Bélgica como consecuencia de una expulsión precedida de incendio y saqueo, que será un perpetuo baldón de ignominia para la bien fenecida república. En Bélgica permaneció el P. de Rafael, mereciendo ser nombrado miembro de la Société Scientifique de Bruselas hasta que, al estallar nuestra guerra de liberación, pudo volver a nuestra Patria tras una ausencia de trece años. El mismo os ha referido, con palabras de ardiente patriotismo de buena ley, sus vicisitudes, su vida en las trincheras, sus esfuerzos por poner en marcha el Observatorio del Ebro, saqueado y destrozado por los marxistas a quienes, doloroso es decirlo, capitaneaba un ex compañero nuestro.

Desde la liberación de Madrid está otra vez al frente del I.C.A.I., a cuyo servicio dedica toda su actividad y toda su ciencia, y de desear sería que sus títulos universitarios, que tuvieron valor ante el Gobierno inglés de la India, sirvieron para que el P. de Rafael reforzase el profesorado de nuestra Facultad de Ciencias, tan necesitado de ayuda sobre todo cuando, a raíz de la liberación, era el que os habla el único titular de la Sección de Físicas.

He aquí la lista de los trabajos publicados por el P. de Rafael desde su expatriación. Ella por sí sola da idea de la pasmosa ac-

tividad de nuestro nuevo cofrade y de la diversidad de sus conocimientos.

1932. *On Saturated numbers*, by H. Rafael. Bombay.

Verhandlungen des Internationales Mathematiker Kongresses Zürich, 1932, II Band (Sektions-Vortrage, págs. 8-9), resumen de la conferencia leída en la reunión de la sección de Algebra y Teoría de números del Congreso internacional de Zürich el 5 de septiembre de 1932. Por cierto que la extensión de las tablas adjuntas llenó de asombro e hizo reír al gran matemático E. Landau, presidente de la Sesión. El y el profesor Hasse, de Darmstadt, pidieron al autor detalles sobre el trabajo, que no se los pudo dar, pues todo ha quedado inédito, excepto:

1932. *Los números Saturados*. «Ibérica», diciembre 1932. Vulgarización.

1933. *Los números Saturados*. «Anales de la Asociación de Ingenieros del I.C.A.I.». Extracto de la conferencia de Zürich. Marzo 1933.

1933. *Trois propriétés asymptotiques des nombres saturés*. Sesión del 3 de mayo de 1933. «Annales de la Société Scientifique de Bruxelles». C. R. Tomo LIII-A, primera parte, págs. 33-40.

1934. *Détermination d'une cubique plane par un nombre suffisant de points d'inflexion et sextactiques et constructions des tangentes*. «Annales de la Société Scientifique de Bruxelles». Tomo LIV-A, págs. 139-146.

1935. *Los veintisiete puntos de una cúbica plana ordinaria en los que una cónica osculatriz tiene un contacto superosculador y las Cónicas que pasan por los puntos de inflexión y de superosculación de una cúbica plana*. «Anales de la Asociación de Antiguos Alumnos del I.C.A.I.». Marzo y abril 1934.

1936. *Synthetic Property of the Nine inflexion Points of an Ordinary Plane Cubic*. «Comptes rendus du Congrès international des Mathématiciens». Oslo, 1937. Tomo II. Conférences de Sections (págs. 134-136). Extracto de lo leído en la sesión de la Sección de Geometría el 15 de julio de 1936.

La parte principal de este trabajo sobre cúbicas referente a los 81 puntos, 9 de inflexión y 72 ordinarios en que una cúbica plana puede tener con otra distinta de ella un contacto de noveno orden, no ha sido terminada.

1940 *Las redes de períodos de las funciones elípticas*. «Ana-

les de Mecánica y Electricidad», Revista de los Ingenieros del I.C.A.I.

Hace cosa de un año fuí a visitar al P. Rafael, quien me recibió en su celda con su eterna sonrisa de sincera afabilidad, a pesar de que acababa de sucederle una gran desgracia, quizás la desgracia terrena que más pudiera impresionarle. De su colección inédita de tablas de números saturados, las que por su extensión habían producido el asombro del profesor Hasse de Darmstadt, le habían robado un centenar de hojas que representaban tres buenos años de minuciosos cálculos. Su pena era tan honda como evidente, pero su virtud podía más, y no escuché la menor palabra reveladora no ya de impaciencia, sino ni siquiera de desaliento.

Cuando el P. de Rafael me honró solicitando de nuestro Presidente que fuese yo el encargado de responder a su discurso, formé el plan de aprovechar la ocasión para exponer los grandes servicios prestados a la Ciencia por la Compañía de Jesús, en especial con su extensa red de observatorios astronómicos y de física del globo. Pero, al querer poner manos a la obra me encuentro con que, por una parte, esta respuesta va tomando ya proporciones inusitadas y, lo que es más grave, que la empresa está muy fuera de mis habituales ocupaciones. He de limitarme, pues, a un homenaje a dos insignes jesuitas, que son, en orden cronológico, el P. Rogerio José Boscovich y el P. Angel Secchi. El primero nació en Ragusa (1741-1787). Fué profesor en Pavía, físico matemático, astrónomo y diplomático. Admitió que los átomos eran puntos materiales (1) que ejercen entre sí fuerzas centrales. Reconoció la necesidad de que, para que hubiese equilibrio, las fuerzas atractivas a gran distancia, se hicieran repulsivas en cuanto la distancia fuese inferior a cierto límite. En su libro está representada la energía potencial de las partículas en función de su distancia y, en esencia, coincide con las figuras esquemáticas que se dan en los libros actuales, con la sola diferencia de que agregaba varios máximos y mínimos para explicar los distintos estados de agregación, pues entonces no se sabía que los equilibrios gaseosos estaban regidos por la condición de ser mínima la energía libre, y no la energía potencial.

(1) R. J. Boscovich, S. J.: «Teoria Philosophiae naturalis redacta ad unicam legem virium». Venecia, 1763.

El P. Angel Secchi (1818-1872) es lo suficientemente conocido para que tengamos que hacer otra cosa que evocar el recuerdo del Director del Observatorio Romano, fundador de la Física terrestre y de la Astronomía física.

No quiero abandonar este lugar sin hacer constar que, al nombrar la Academia al P. de Rafael, ha realizado un acto de desagravio al P. Pérez del Pulgar. Cuantas veces propusimos su candidatura fuimos derrotados por el espíritu sectario de quienes, aun reconociendo la labor ingente del P. Pérez del Pulgar, dedicado de lleno a la investigación y que supo convertir una escuela de artes y oficios en el I.C.A.I., vivero de buenos Ingenieros y excelentes mecánicos, no transigían con que hubiese una sotana en los escaños académicos. Si la justicia no hubiese sido atropellada por las consignas masónicas, es seguro que el P. Pérez del Pulgar hubiera sido miembro de nuestra R. Academia y hubiese tenido aquí su bien merecido elogio póstumo. No quiero que éste le falte del todo, y, por eso, me vais a permitir que transcriba algunos párrafos del artículo que escribí el año 1932, con motivo del homenaje al P. Pérez del Pulgar en el número extraordinario de los «Anales de la Asociación de Ingenieros del I.C.A.I.», homenaje al que, por cierto, se asociaron, además, cuatro de nuestros compañeros: D. José María Plans, de inolvidable recuerdo; D. Luis Sánchez Cuervo, muerto por Dios y por España; D. Angel Herrera, que entonces era de los nuestros, y D. Esteban Terradas, que gracias a Dios se halla aún entre nosotros.

Basta una ojeada a las publicaciones del P. Pérez del Pulgar, a sus cuatro tomos de Electrodinámica industrial, a su curso de tracción eléctrica, a su Tratado de construcción y ensayo de motores de corriente continua y a los innumerables trabajos que han visto luz en la *Revista Matemática española*, en los *Anales de la Sociedad española de Física y Química*, en la *Asociación española para el progreso de las Ciencias* y en estos Anales, para convencerse de que el P. Pérez del Pulgar es un excelente modelo de investigador técnico. Si hubiera nacido el P. Pérez del Pulgar en otro país en que la Ciencia tuviera más numerosos cultivadores, le habría bastado marcar la ruta en una dirección determinada, hacia la Electrotecnia por ejemplo, dejando a otros la difícil misión de mostrar por sí sólo, la variadísima colección de estudios en que ha de ejercitarse la mente de todo investiga-

dor técnico y, al mismo tiempo, realizar investigaciones personales en distintos dominios, que hubieran podido ocupar la actividad de sendos especialistas. Así vemos que, en el primer orden de ideas, el P. Pérez del Pulgar sigue de cerca el desarrollo de las modernas teorías de la relatividad y de los cuantos y la expone con marcadísimo y certero carácter personal, haciendo otro tanto con cuestiones puramente matemáticas, cuyo análisis merece capítulo aparte.

Ya en el terreno práctico se ocupa de completar y dar carácter práctico a los más importantes estudios de Electrodinámica industrial y así descubre un método para el cálculo y el ensayo de un sistema monofásico cuyas características no están ni localizadas ni uniformemente distribuídas; de un nuevo diagrama para el cálculo de la capacidad de un condensador síncrono; muestra como debe calcularse y ensayarse un alternador; resuelve el interesantísimo problema práctico de medir la potencia en sistemas trifásicos no senoidales y estudia los problemas suscitados por el transporte de energía a grandes distancias.

Merecen especial mención, a nuestro juicio, los trabajos que, en colaboración con el P. Orland, ha realizado el P. Pérez del Pulgar acerca del paso de la corriente a través de los materiales ferromagnéticos, trabajos que se describen en varios artículos de estos ANALES. Nada de mayor actualidad que los estudios acerca de las propiedades magnéticas de la materia. En particular, los fenómenos que produce una corriente al pasar por una barra imantada, iniciados por haber descubierto Wiedemann que la barra se tuerce, han sido objeto de numerosos estudios por parte de eminentes Físicos contemporáneos, tales como Nagaoka, Onda, Shimizu, etc. Cabe al P. Pérez del Pulgar la gloria de haber descubierto un nuevo fenómeno que, a no dudar, ha de ser fecundo en consecuencias. Se trata de la acción que una corriente ejerce sobre el magnetismo permanente de una barra. Los lectores de estos ANALES conocen perfectamente el fenómeno a que me refiero y que debe llevar muy justamente el nombre de *efecto Pérez del Pulgar*, lo cual me dispensa de entrar en pormenores. Tuve el privilegio de presenciar algunos de estos experimentos y puedo decir que nada hay más vistoso ni más sugestivo, que ver en el oscilógrafo las corrientes inducidas por los cambios de imantación que una barra experimenta al ser atravesada por una corriente senoidal y observar cómo se deforman

cuando la barra es retorcida. Acompañábame entonces un eminente profesor de la Escuela Politécnica de Zurich, quien consideró tales experimentos de grandísima transcendencia y, al mismo tiempo, mostró la admiración por lo perfectamente que eran realizados gracias a los modernísimos medios con que contaba el I. C. A. I., para cuya organización, profesorado, laboratorios y talleres tuvo frases sumamente elogiosas, llegando a decir que, en algunos aspectos, quedaba atrás su propia escuela, que, como he sabido, es de las primeras del mundo.

¡Qué grato sería poder cerrar este artículo augurando nuevos triunfos al I. C. A. I. y haciendo votos porque siguiera contribuyendo tan eficazmente al progreso científico y técnico de nuestra Patria! He pasado mi vida en laboratorios y siento veneración por esos aparatos. Fruto exquisito de la técnica moderna, con que el hombre arranca poco a poco sus secretos a la naturaleza. Por eso siento una amargura inmensa al pensar que unos bárbaros, ignorantes o malvados, aniquilaron el I. C. A. I. en un día vergonzoso y me estremezco de indignación al imaginarme cómo aquellos delicadísimos bucles del oscilógrafo con que el P. Pérez del Pulgar estudiaba las bellísimas ondulaciones originadas por el fenómeno que él inventó, se retorcerían trágicamente al ser alcanzados por las llamas.

Descanse en paz el P. Pérez del Pulgar y sea bien venido a esta Real Academia el P. Enrique de Rafael Velhulst.

LOS COEFICIENTES NUMERICOS DE LA FUNCION σz DE WEIERSTRASS

En el invierno 1938-39, mientras a pocos kilómetros se libraban los últimos combates de la batalla del Ebro y comenzaba a iniciarse la *ofensiva de la victoria*, encontrándome enteramente solo en el Observatorio y no pudiendo reanudar las antiguas experiencias para determinar los coeficientes P y Q de la fórmula que se utiliza para la evaluación de las desviaciones magnéticas, mediante el método de Gauss, quise concluir, o por lo menos, adelantar en lo posible un trabajo que no requería más que largos cálculos; tal es la razón de esta labor, efectuada, en muchas ocasiones, a la luz de una débil bujía.

La función σz de Weierstrass es pseudo-periódica de segunda especie y finita en todo campo finito de la variable compleja z ; su desarrollo en serie de potencias de z es convergente para cualquier valor de z ; los coeficientes de este desarrollo son polinomios en g_2 y g_3 , los llamados *invariantes algebraicos* de la forma $4p^3z - g_2pz - g_3$. Por ser σz impar no aparecen más que coeficientes de potencias impares, de tal modo que

$$\sigma z = z + A_5 \frac{z^5}{5!} + A_7 \frac{z^7}{7!} + \dots + A_{2n+1} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

en que

$$A_1 = 1, \quad A_3 = 0, \quad A_5 = -\frac{1}{2}g_2, \quad A_7 = -6g_3, \quad A_9 = -\frac{9}{4}g_2^2, \\ A_{11} = -18g_2g_3, \quad A_{13} = \frac{69}{8}g_2^3 - 216g_3^2, \dots$$

A_{2n+1} es un polinomio homogéneo de grado $2n$, suponiendo g_2 de cuarto grado y g_3 de sexto. Los coeficientes de estos polinomios se determinan por la ley recurrente

$$a_{i,j} = 12(i-1)a_{i-1,j+1} + \frac{2}{3}(j+1)a_{i-2,j+1} - \frac{1}{6}(4i+6j-1)(2i+3j-1)a_{i-1,j}$$

en que $a_{i,j}$ es el coeficiente del término del desarrollo en serie de potencias de z de la forma

$$a_{i,j} g_2^i g_3^j \frac{z^{4i+6j+1}}{(4i+6j+1)!}$$

En las tablas de Schwarz están calculados los coeficientes hasta $A_{3,3}$. El trabajo realizado en las circunstancias dichas llega hasta $A_{5,1}$, con lo que el número de coeficientes numéricos queda duplicado.

Para evitar las potencias de 2 en los denominadores, basta considerar

$$g_2 = 2 \left(\frac{1}{2} g_2 \right) \quad \text{y} \quad g_3 = \frac{1}{6} (6 g_3)$$

de donde

$$a_{i,j} g_2^i g_3^j = 2^{i-j} 3^{-j} a_{i,j} \left(\frac{1}{2} g_2 \right)^i (6 g_3)^j = a'_{i,j} \left(\frac{1}{2} g_2 \right)^i (6 g_3)^j$$

La ley de recurrencia para $a'_{i,j}$ es

$$a'_{i,j} = (i+1) a'_{i+1,j-1} + 16(j+1) a'_{i-2,j+1} - \frac{1}{3} (4i+6j-1) (2i+3j-1) a'_{i+1,j}$$

He preferido, con todo, conservar la antigua notación para mayor conformidad con los autores clásicos. Así, pues, además de los resultados de Schwarz,

$$A_{15} = \frac{1}{2} 513 g_2^2 g_3$$

$$A_{17} = \frac{1}{16} 321 g_2^4 + 9936 g_2 g_3^2$$

$$A_{19} = 8397 g_2^3 g_3 + 119232 g_3^3$$

$$A_{21} = \frac{1}{32} 160839 g_2^5 + 257580 g_2^2 g_3^2$$

$$A_{23} = \frac{1}{8} 2808945 g_2^4 g_3 + 2008800 g_2 g_3^3$$

$$A_{25} = \frac{1}{64} 1416951 g_2^6 + 10009980 g_2^3 g_3^2 + 24105600 g_3^4$$

$$A_{27} = -\frac{1}{8} 20921571 g_2^5 g_3 + 324200890 g_2^2 g_3^3$$

$$A_{29} = -\frac{1}{128} 388946691 g_2^7 - \frac{1}{2} 188187705 g_2^4 g_3^2 + 6370643520 g_2 g_3^4$$

$$A_{31} = -\frac{1}{32} 6519779667 g_2^6 g_3 - 9465715080 g_2^3 g_3^3 + 7.6447722240 g_2^5$$

$$A_{33} = \frac{1}{256} 2.5514578881 g_2^8 - 2.6308660842 g_2^5 g_3^2 - 57.9664874880 g_2^2 g_3^4$$

$$A_{35} = -\frac{1}{8} 6.0646826331 g_2^7 g_3 - 229.1309723160 g_2^4 g_3^3 - 2063.9356554240 g_2 g_3^5$$

añadimos los siguientes, debidamente comprobados por tres métodos distintos

$$A_{37} = -\frac{1}{512} 764.7989401521 g_2^9 - \frac{1}{2} 522.0937845261 g_2^6 g_3^2 - \\ - 12129.7288466880 g_2^3 g_3^4 - 24767.2278650880 g_2 g_3^6$$

$$A_{39} = -\frac{1}{128} 54430.6979739483 g_2^8 g_3 - 25707.7819070316 g_2^5 g_3^3 - \\ - 306642.2921890560 g_2^2 g_3^5$$

$$A_{41} = -\frac{1}{1024} 101391.7176434889 g_2^{10} - \frac{1}{2} 119998.5922000755 g_2^7 g_3^2 - \\ - 1066586.3758194480 g_2^4 g_3^4 - 4300662.3711989760 g_2 g_3^6$$

$$A_{43} = -\frac{1}{128} 4321893.5759525085 g_2^9 g_3 - 4370774.3472940470 g_2^6 g_3^3 - \\ - 26491015.5916250880 g_2^3 g_3^5 - 51607948.4543877120 g_2 g_3^7$$

$$A_{45} = -\frac{1}{2048} 15531291.1328032651 g_2^{11} - \frac{1}{32} 107464074.7597549335 g_2^8 g_3^2 - \\ - 242477888.7497614200 g_2^5 g_3^4 - 547263967.2201999360 g_2^2 g_3^6$$

$$A_{47} = \frac{1}{512} 45700224.5380426137 g_2^{10} g_3 - 247822160.3084441655 g_2^7 g_3^3 - \\ - 1.2366711621.2483454240 g_2^4 g_3^5 - 4619023718.3108259840 g_2 g_3^7$$

$$A_{49} = \frac{1}{4096} 5853193102.3896704641 g_2^{12} - \frac{1}{16} 1921788780.0887034315 g_2^9 g_3^2 - \\ - 1.8353000580.3217788120 g_2^6 g_3^4 - 51.6558877077.8650798080 g_2^3 g_3^6 - \\ - 5.5428284619.7299118080 g_2 g_3^8$$

$$A_{51} = \frac{1}{256} 8.9243276558.6711979063 g_2^{11} g_3 - \frac{1}{4} 5.0415531220.7829110745 g_2^8 g_3^3 - \\ - 96.3776072329.9526905920 g_2^5 g_3^5 - 1798.6408443986.1138432000 g_2^2 g_3^7$$