

ACADEMIA DE CIENCIAS  
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

---

---

# DISCURSO

LEÍDO EN EL ACTO DE SU RECEPCIÓN

POR

DON JULIO PALACIOS MARTINEZ

Y

# CONTESTACIÓN

DEL

EXCMO. SR. D. BLAS CABRERA FELIPE

EL DÍA 8 DE ABRIL DE 1932



TOLEDO

EST. TIP. DE A. MEDINA—LUCIO, 8 Y 10

1932

DISCURSO

DE

DON JULIO PALACIOS MARTINEZ

Váis a permitir, señores académicos, que mis primeras palabras en este acto sean un cordial y sentido tributo a la memoria de aquel compañero vuestro, D. Ignacio González Martí, cuyo lugar en esta Academia voy a ocupar gracias a vuestra benevolencia, que no a mis notoriamente escasos méritos.

Hace ya más de dieciocho años que ingresé en la Facultad de Ciencias de Madrid, comenzando precisamente por ser Auxiliar del malogrado catedrático Sr. Martí, y, desde entonces, viví en no interrumpido contacto con él. Además, han querido las circunstancias que fuese ocupando sucesivamente algunos de los cargos que, con especial cariño, había desempeñado él anteriormente. Primero fué la presidencia de la Sociedad Española de Física y Química de la que, juntamente con el Sr. Rodríguez Mourelo, fué el fundador y más eficaz propulsor y a la que siempre trató como a su hija predilecta. Hube luego de ocupar su sitio en su propia cátedra, cuando por achaques de su cuerpo, que no de su espíritu, tuvimos que repartirnos entre varios la tarea que, con esfuerzo de titán, había hasta entonces realizado él solo. Finalmente, vengo aquí a recibir la misma medalla que él honró y veneró como joya inestimable. Tengo, pues, sobrados títulos para exigir un lugar preeminente entre cuantos por conocerle bien, lloran hoy su irreparable pérdida, y, además, puedo

hacer de Martí el elogio más justo y que ha de serle más agradable y que se reduce a decir: González Martí ha sido uno de los mejores catedráticos de la Facultad.

Porque Martí fué eso por encima de todo; un gran catedrático que dió a la cátedra toda su clara inteligencia, su extensa cultura, sus singulares dotes de organizador, su férrea voluntad y su gran corazón; y que, no contento con ello, la instituyó heredera de su valiosa biblioteca y de sus ahorros, dando así un hermoso ejemplo de amor a la Facultad, amor más fuerte que cualquier otro afecto terreno.

Para la cátedra fué también el fruto más preciado de su vida de estudio. Su libro de Física, aprendido por numerosas generaciones de universitarios que ahora ocupan puestos destacados en las ciencias puras, en ingeniería, en medicina y en farmacia, abre una nueva época en la bibliografía física española, pues no tiene precedente en nuestro idioma. Yo estoy seguro de que cuantos recibieron de Martí la iniciación en los estudios físicos, tributan un afectuoso homenaje de agradecimiento a quien se desveló por lograr que la Ciencia fuese sencilla y amena y penetrase con vigor en las mentes juveniles.

Es lógico que la actividad de un gran trabajador como Martí puesta al servicio de un solo propósito, haya dado copiosos frutos, y así es, en efecto. La facultad de Ciencias de Madrid puede enorgullecerse por tener laboratorios de física y talleres perfectamente montados y en pleno rendimiento didáctico. Su gabinete de aparatos para experimentos de cátedra es un verdadero tesoro y cuantos tenemos el privilegio de utilizarlo no podemos menos de expresar nuestra admiración, porque puede decirse que todo ello es obra de Martí y que antes de Martí no había nada. Veneremos, pues, la memoria de quien supo crear rico huerto en terreno inculto y, al parecer estéril, y los encargados de seguir trabajando en él hagámonos cargo de lo mucho a que estamos obligados; si, como debemos, hemos de seguir su ejemplo.

Al elegir el tema de mi discurso he pensado más en vuestros grandes merecimientos que en la escasez de mis fuerzas. He querido daros, con ello, una prueba de cómo estimo el inmerecido honor que me habéis dispensado al elegirme para figurar entre vosotros. Cuando al escucharme podáis apreciar mi falta de aptitudes para abordar asunto tan difícil, os ruego que tengáis en cuenta que, si me atreví a ello, fué por el deseo de presentarme ante vosotros con algo digno de vuestro merecidísimo prestigio.

Dos grandes teorías ocupan actualmente la mente de los mayores ingenios que al cultivo de la física se dedican. Una, la teoría de la relatividad, ha tenido en España eximios comentaristas, algunos de los cuales, como los Sres. Cabrera y Plans pertenecen dignamente a esta Academia. Yo me propongo, señores académicos, deciros algo acerca de la novísima teoría de los cuantos, fijándome, en especial, en una de sus consecuencias que, por su trascendencia, ha merecido el nombre de *principio de indeterminación*.

Evidentemente, ningún hombre de ciencia hubiera pensado en sentar un nuevo postulado que se hallara en pugna con nuestras ideas preconcebidas, si no se hubiese visto inducido por razones poderosísimas. Por otra parte, el principio en cuestión no cuenta con más de cinco años de existencia y es notorio que en tan corto plazo no han podido agotarse las pruebas a que puede ser sometido; de modo que su justificación ha de buscarse, principalmente, en la importancia de los conflictos lógicos que ha permitido resolver. Por esta razón váis a permitirme que comience con una breve exposición histórica, que nos permita darnos cuenta de los motivos que han obligado a establecer el principio de indeterminación.

*Le siècle se terminait donc éclairé  
par l'espoir d'une synthèse prochaine et  
complete de toute la physique.*—LOUIS  
DE BROGLIE.

La ciencia a  
comienzos del  
siglo actual.

Todo parece indicar, señores académicos, que nuestra época será conocida en la historia de la Ciencia como el final de la era newtoniana y el comienzo de otra que no sabemos si se llamará era relativista o era cuantista, pues en el momento presente es difícil prejuzgar cuál de las dos grandes concepciones contemporáneas, la de Einstein o la de Planck, desempeñará un papel más decisivo en el futuro desarrollo de nuestros conocimientos.

Para bien comprender la génesis de estas dos grandes teorías, es preciso describir, siquiera sea de modo superficial, cómo se encontraba la ciencia en el momento en que se sintió la necesidad de tan transcendentales especulaciones.

A fines del siglo pasado había motivos para suponer que la pintura mental basada en los postulados fundamentales de la escuela mecanista newtoniana por una parte y en la doctrina ondulatoria de Maxwell-Hertz para ciertos y determinados fenómenos por otra, constituía un modelo perfecto, que daba cuenta exacta de todos los hechos naturales. Podía creerse que lo único que quedaba por hacer en el terreno científico era estudiar experimentalmente los fenómenos todavía no bien conocidos o totalmente ignorados, con el sólo fin de comprobar que las relaciones existentes entre las magnitudes que en ellos interviniesen podían ser previstas mediante la aplicación adecuada de los postulados fundamentales de las citadas teorías.

Esta posición del espíritu humano, de casi ciega confianza en la tradición científica acumulada en el transcurso de los siglos, tiene su justificación, ante todo, en los progresos inusitados de la técnica que en ella se inspiraba y también en esa especie de inercia de la mente humana que se opone a los cambios bruscos en la trayectoria de las ideas. No carecen de importancia,

sin embargo, las razones de orden histórico, que resaltan claramente si se echa una rápida ojeada sobre la evolución científica desde fines del siglo XVI hasta el comienzo de nuestro siglo.

Todos saben que Newton consiguió sistematizar la Dinámica, formando con ella un conjunto armónico que, gracias a la ley de la gravitación, se encontró con un extenso campo de aplicaciones. Gracias a los esfuerzos de las generaciones que se sucedieron durante los siglos XVIII y XIX, alcanzó la Mecánica tal grado de perfección, que casi perdió su carácter de ciencia experimental. Su sistematización completa se logró gracias al principio de Maupertuis-Hamilton, sobre el cual se construye el edificio de la mecánica clásica de modo perfectamante lógico.

Éxitos del mecanismo.

Además de esta razón de suprema elegancia que, naturalmente, había de producir profunda impresión, contribuyeron a robustecer la fe en la mecánica racional los éxitos logrados al ser aplicada en hidrodinámica, en capilaridad y en acústica, y ello explica la tendencia a extender el mismo orden de razonamientos a todos los capítulos de la física, considerando un fenómeno suficiente y satisfactoriamente conocido en cuanto se había logrado idear el correspondiente modelo mecánico.

Dos capítulos de la física merecen especial mención desde el punto de vista que nos ocupa: la óptica y la termología. En lo que a la primera se refiere, los fenómenos que hoy se reúnen para formar la óptica geométrica (propagación rectilínea, reflexión y refracción), fueron, como es natural, los primeramente estudiados. Sus leyes fueron descubiertas, principalmente, por Descartes y Huygens y su sistematización se logró gracias al principio de Fermat, que, enunciado en la forma matemática usual hoy en día, recuerda el principio de la menor acción de Hamilton. De entonces data la famosa controversia entre los adictos a la teoría corpuscular de Newton y los partidarios de la ondulatoria de Huygens. A principios del siglo XIX parecía ya definitivamente fallado el pleito en favor de esta última, pues si bien Newton había logrado explicar con su teoría corpuscular algunos fenóme-

La teoría ondulatoria vence la corpuscular.

nos de los que hoy se consideran netamente ondulatorios (los anillos de Newton), todos los fenómenos interferenciales que se descubrieron como consecuencia del clásico experimento de Young y, sobre todo, la teoría mecánica de la propagación de ondas de Fresnel, con la que se pudo explicar la propagación rectilínea, dieron el golpe de gracia a la teoría corpuscular.

Mecanización  
de la termodinámica.

En el siglo XIX, los trabajos de Clausius, Carnot y Joule primero, y los de Gibbs y Helmholtz después, hicieron nacer un nuevo capítulo de la física, la termodinámica. Tal disciplina surgió completamente desligada de las ideas mecanistas y bien pronto se logró formar con ella un conjunto sistemático que en nada cedía en belleza y armonía a la llamada mecánica racional. Todo su contenido, que alcanza los más remotos confines de las ciencias naturales, se deduce sencilla y rigurosamente de dos solos principios, el principio de la equivalencia y el principio de Carnot. Es natural que los entusiastas del mecanismo viesan con desagrado la existencia de un cuerpo de doctrina independiente, la llamada energética, y que trataran de dar una interpretación mecanista a sus dos postulados fundamentales, con lo cual toda la termodinámica quedaría englobada en la mecánica. La empresa resultaba obvia para el primer principio, pero tropezaba con serias dificultades en lo referente al principio de Carnot, que precisamente era el primero en orden histórico. Para lograr el éxito fué preciso que la mecánica perdiera algo de su pristina pureza, y así, precedida por los trabajos de Maxwell, nació la mecánica estadística de Gibbs y Boltzmann, en la que se introdujo la noción de probabilidad, que tan importante papel había de desempeñar en lo sucesivo. Su fruto no consistió tan sólo en unificar las dos escuelas; dando interpretación mecánica a las magnitudes termodinámicas, resultaron claros e intuitivos conceptos que, como el de entropía, resultaban demasiado artificiosos; al mismo tiempo, fueron aclarados ciertos fenómenos que, como el movimiento browniano y la opalescencia crítica, no tenían explicación satisfactoria en la teoría termodinámica.

En el siglo XIX se descubrió un nuevo agente que había de revolucionar la ciencia y la técnica: la electricidad. Con ello, gracias a los trabajos de Volta, Ampère, Laplace, Faraday, etcétera, nació una nueva disciplina, que culminó en la electrop-tica de Maxwell y Hertz. J. J. Thomson descubrió los electrones y Lorentz los introdujo en la teoría electromagnética. Con todo ello resultó incluida la luz en el cuerpo de doctrina basado en las ecuaciones del campo electromagnético, perdiendo su signifi-cación netamente mecánica. El propio Maxwell no estaba satis- fecho de tal estado de cosas, y considerando más perfectas las consideraciones mecánicas, abrigó la esperanza de que se llegase pronto a mecanizar el éter, lo cual equivaldría a incluir nueva- mente la óptica en la mecánica y, de paso, a hacer lo mismo con la electricidad y el magnetismo. Para mostrar cuán lejos nos hallamos de la realización de estas esperanzas optimistas, nos limitaremos a reproducir las siguientes frases que, con motivo del fallecimiento de Fresnel, escribía Brillouin hace nada más que cuatro años.

La teoría elec-  
tromagnética.

*«Nous sommes donc actuellement dans l'anarchie, en présence de deux vues sur la constitution de l'univers mécanico-électrique-optique, indispensables chacune dans son domaine, et jusqu'à présent sans aucun point commun, malgré l'unité certaine de l'ensemble des phé- nomenes.»*

*Die neue Entwicklung bedeutet nicht einen Umsturz, sondern eine erfreuliche Weiterbildung des Bestehenden mit vie- len grundsätzliche Klärungen und Vers- chärfungen.—SOMMERFELD.*

Con espíritu profético señaló Lord Kelvin, justamente en 1900, dos fenómenos que se resistían a encajar en el cuadro de la ciencia clásica. El acierto del eminente sabio inglés resalta ahora al ver que las dos lagunas por él señaladas han consti-

Dos hechos  
inexplicados en  
1900.

tuído el punto de arranque de sendas teorías alrededor de las cuales gira todo el movimiento científico contemporáneo. Los fenómenos aludidos son: la invariancia de la velocidad de la luz, observada en el clásico experimento de Michelson-Morley y la distribución de la energía en el espectro del cuerpo negro medida por Lummer y Pringsheim.

Es ya de todos conocido cómo Einstein, impulsado por el deseo de resolver el conflicto planteado por el experimento de Michelson-Morley, revisó los conceptos fundamentales de la mecánica clásica e hizo surgir una nueva imagen mental mucho más satisfactoria que la primitiva, por agrupar conceptos y magnitudes (masa y energía, espacio y tiempo, gravitación y electromagnetismo) a los que antes se atribuía naturaleza diferente.

Origen de las teorías cuantistas.

La otra escuela científica contemporánea, que nos ha obligado a retocar los principios tenidos casi por dogmáticos de la mecánica clásica, es la conocida con el nombre de teoría de los cuantos o teoría cuantista, que nació de una audaz hipótesis lanzada por Planck con el solo fin de explicar las mencionadas medidas de Lummer y Pringsheim en el espectro del cuerpo negro.

En el estudio de este fenómeno encajaban de lleno los métodos estadísticos, pero se daba el caso singular de que la aplicación del principio de equipartición, consecuencia rigurosa de los postulados fundamentales, conducía a la fórmula de Rayleigh-Jeans, en flagrante contradicción con los números hallados experimentalmente, y que puede tacharse de absurda, pues conduce a un valor infinito para la densidad total de la energía.

El cuanto de acción.

Para resolver la dificultad se vió obligado Planck a admitir que un *resonador*, es decir, un sistema elemental capaz de vibrar con una frecuencia determinada  $\nu$ , sólo podía absorber energías que fuesen un múltiplo entero del *cuanto elemental*  $h\nu$ , siendo  $h = 6,55 \cdot 10^{-27}$  una constante universal llamada *cuanto de acción*. Para darnos cuenta del radicalismo de esta afirmación, nos bastará decir que, según ella, el movimiento de un péndulo permanecerá imperturbado aunque sobre él se lancen proyectiles cuya

energía cinética sea inferior al producto de  $h$  por la frecuencia propia del péndulo y, lo que es más extraño, si el péndulo recibe un impacto cuya energía valga un número entero  $n$  de veces  $h\nu$  más una fracción, tomará la energía  $n h\nu$  y rechazará el resto.

La hipótesis de Planck ha tenido un éxito rotundo al ser extendida a los campos más diversos de la física, aclarando hechos mal explicados y prediciendo nuevos fenómenos que luego resultaron confirmados experimentalmente. Citaremos de paso la teoría de los calores específicos de Debye, Born y Karman y la interpretación estadística del llamado tercer principio de termodinámica o principio de Nernst.

Pero donde más se ha dejado sentir la influencia cuantista es en espectroscopía. El conocimiento experimental de los fenómenos espectroscópicos, había alcanzado un grado de perfección sólo comparable al logrado en las medidas astronómicas, a pesar de lo cual las únicas regularidades encontradas se reducían a unas cuantas reglas empíricas faltas en absoluto de interpretación teórica.

Así estaban las cosas cuando Bohr, utilizando la hipótesis cuantista de Planck y admitiendo con Rutherford y van der Broek que el átomo de un cuerpo cuyo número ordinal en el sistema periódico de Mendeleieff es  $N$ , está constituido por un núcleo con  $N$  cargas elementales positivas y otros tantos electrones, ideó su famoso modelo atómico que, no sólo explicó satisfactoriamente buena parte de los hechos observados, sino que al constituir lo que Ramón y Cajal llama una hipótesis de trabajo, encauzó y abrió nuevos derroteros a la investigación espectroscópica, que han conducido a una porción de descubrimientos a los que tan eficazmente han contribuido nuestros espectroscopistas Catalán, Del Campo y Piña de Rubies.

La teoría de Bohr permitió calcular inmediatamente las rayas del hidrógeno y las del helio ionizado y sirvió de guía para estudiar los espectros roentgenianos.

Sommerfeld, Schwarzschild, Epstein, Heisenberg, Landé y

Éxitos de la hipótesis de Planck.

Cuantización de la espectroscopía.

Pauli, gracias a una generalización hecha por el primero en los postulados cuantistas de Bohr, lograron resolver el complejo problema de los multipletes y el de las separaciones producidas en el fenómeno de Zeeman. Considerábase dividido el átomo en tres porciones: el núcleo, el corazón y el electrón de serie y cada estado estacionario se caracterizaba por tres números cuantistas,  $l$ ,  $s$  y  $j$ , relacionados, respectivamente, con los momentos angulares del electrón de serie, del corazón y de la totalidad del átomo. Cuando éste se halla en un campo magnético es preciso agregar otro número cuantista  $m$ . Gracias a esta representación consiguieron dar cuenta, si bien de modo cualitativo, de los multipletes hallados en los metales alcalinos y en los alcalinos-térreos y, en lo que al fenómeno de Zeeman se refiere, se logró establecer empíricamente la ya célebre fórmula de Landé, que da cuantitativamente la separación magnética de las rayas de un multiplete.

El principio de exclusión.

De grandísima importancia para el avance de la física del átomo fué el haber enunciado Pauli (1924) su famoso *principio de exclusión* (*Paulische Verbot*). Comenzó Pauli por señalar las dificultades que desde el punto de vista relativista se encontraban al atribuir al corazón del átomo el número cuantista  $s$ , pues la variación de carga nuclear que ello lleva consigo exigiría que la naturaleza del fenómeno de Zeeman dependiese del valor de dicha carga, cosa en contradicción con los experimentos. Propuso entonces transferir el número  $s$  al electrón de serie y enunció el aludido principio en la siguiente forma: *Todo electrón que forma parte de un átomo posee cuatro números cuantistas ( $n, l, j, m$ ) y no puede haber dos electrones en el mismo átomo que tengan los mismos números cuantistas*. Este principio conduce de modo sorprendentemente sencillo y natural a fijar los números máximos 2, 8, 18, 32,.... que, de acuerdo con Bohr, existen en los pisos K, L, M, N,....

El electrón gira en torno de sí mismo.

La dificultad de atribuir al electrón de serie el número cuantista  $s$ , además de los otros tres, estribaba en que, conside-

rado como punto, carecía del número suficiente de grados de libertad. Pronto quedó resuelto el nuevo conflicto gracias a Goudsmit y Uhlenbeck (1925), quienes supusieron que el electrón giraba sobre sí mismo como una peonza (*spinning electron*), resultando con ello el momento de giro  $s$  que antes se atribuía al corazón. Con esto se completaba la analogía entre el átomo y un sistema planetario, pues en éste, como es sabido, cada planeta gira en torno del Sol, y, al mismo tiempo, en torno a su propio eje.

Todos estos éxitos hicieron concebir las más halagüeñas esperanzas y todo parecía indicar que muy pronto nos sería conocida, hasta en sus mínimos pormenores, la estructura íntima del átomo, por ejemplo las fuerzas que actúan entre sus distintos elementos, y, como consecuencia, las posiciones y velocidades que, en un momento dado, poseen los electrones que giran en torno del núcleo. Así pudimos ya ver en las revistas científicas preciosos dibujos en que se representaban los modelos atómicos de los diversos cuerpos y poco faltó para que se construyesen a modo de planetarios que dieran una representación plástica y animada de lo que sucedía en los átomos.

El átomo de Bohr incompatible consigo mismo.

Pero el modelo atómico de Bohr, que de modo tan satisfactorio y eficaz se prestaba a la clasificación e interpretación de los espectros, era incompatible consigo mismo. Para su elaboración se utilizaban elementos contradictorios, pues por un lado se echaba mano de las magnitudes y leyes de la mecánica clásica y por otro se introducían los postulados cuantistas que limitaban arbitrariamente el número de estados de movimiento y concedían a los que quedaban el carácter privilegiado de estados estacionarios. Por otra parte, demostró Poincaré, poco antes de su muerte, la absoluta necesidad de los postulados cuantistas.

Si los inconvenientes del modelo atómico de Bohr hubieran consistido simplemente en dificultades de orden especulativo, quizás los físicos no se hubieran sentido muy acuciados por el deseo de lograr un esquema mental más satisfactorio y se

Fracaso del modelo atómico de Bohr.

hubieran dado por satisfechos con una teoría que, si bien deficientemente cimentada, se mostraba tan fecunda y de tan fácil aplicación. Pero había razones fortísimas que obligaban a pensar que en la que ya puede llamarse mecánica cuantista clásica no se recogía sino una parte de la verdad. La marcha triunfal de la teoría cuantista que, por otra parte, iba degenerando en un cúmulo de reglas empíricas, tales como las abundantes reglas de selección en las que intervenían números enteros o semi-enteros, tuvo ya un serio tropiezo al ser aplicada al espectro del helio neutro, el más sencillo de todos los problemas en que intervienen más de un electrón, pues sucedió que todas las predicciones teóricas estaban en abierta contradicción con los experimentos.

Los fotones de  
Einstein.

Había aún otras razones para no considerar definitivo el modelo atómico de Bohr. Poco después de haber expuesto Planck su primitiva hipótesis de los cuantos, publicó Einstein (1905) la teoría de los fotones o cuantos de luz, hecha con el propósito de explicar el fenómeno foto-eléctrico o arranque de electrones por acción de la luz, fenómeno cuya explicación no se lograba tampoco con la teoría ondulatoria clásica. Según Einstein, el hecho de que un resonador absorbiese la energía por cuantos completos era debido a que la energía radiante de frecuencia  $\nu$ , se presentaba siempre en forma de individualidades indivisibles de valor  $h\nu$ . Cada uno de estos fotones constituye una individualidad completa, lo mismo que un átomo o una molécula y, al mismo tiempo, lleva asociada una frecuencia que indica su condición típicamente ondulatoria. La atrevida hipótesis de Einstein, en pugna con las ideas anteriores que establecían una barrera infranqueable entre lo corpuscular y lo ondulatorio, no sólo dió el resultado cuantitativo correcto al ser aplicada al efecto foto-eléctrico, sino que sirvió para dar cuenta de la presión de radiación de Maxwell y, sobre todo, alcanzó un éxito resonante cuando Compton (1923) descubrió el fenómeno que lleva su nombre, el cual obliga a atribuir carácter material a los fotones.

Al contemplar la evolución científica desde el Renacimiento hasta nuestros días, se echa de ver lo que pudiéramos llamar *espíritu conservador* de la ciencia. Procédese siempre por generalizaciones sucesivas, de donde resulta que, en general, las teorías primitivas están contenidas en las nuevas como casos particulares. Esta circunstancia destaca notablemente en la teoría de los cuantos, tanto en su forma primordial como en las más modernas, que reseñaremos a continuación. El desarrollo de las ideas cuantistas ha sido siempre presidido por el *principio de correspondencia* de Bohr, que puede considerarse como la declaración expresa del principio conservador a que aludíamos. No es posible enunciar dicho principio brevemente, pero podemos decir, de modo si no muy concreto, cuando menos muy expresivo, que «al elaborar las modernas teorías debe tomarse de las clásicas todo cuanto se pueda, no sólo en cuanto a los conceptos básicos, sino hasta en el aspecto formal». La ciencia no ha dado pasos en balde. Si es preciso modificar sus principios no es porque sean falsos, sino más bien porque conteniendo la verdad no contienen toda la verdad.

La ciencia no  
desanda lo an-  
dado

*The origin of the new quantum mechanics was an epoch-making memoir by Werner Heisenberg.—BIRTWISTLE.*

Así estaban las cosas cuando Heisenberg y Kramers (1925) abordaron el estudio de la dispersión de la luz dejándose llevar por las nuevas ideas. Tal estudio sugirió a Heisenberg su nueva mecánica de matrices que el mismo año fué ya utilizada por Born y Jordan y por el mismo Heisenberg en diversas cuestiones, tales como el estudio del oscilador y el de las perturbaciones, logrando deducir directamente la fórmula de la dispersión y la que sirve para calcular las intensidades en el fenómeno de Zeeman.

Origen de la  
mecánica de ma-  
trices

Pronto pudo apuntarse la teoría nuevos éxitos. En marzo de

1926, Heisenberg y Jordan, utilizando el «spinning electron» de Goudsmit y Uhlenbeck, calcularon la estructura fina de los dobletes de los álcalis, sus separaciones e intensidades en el fenómeno de Zeeman y dedujeron la fórmula de Landé y la de Sommerfeld para el fenómeno de Paschen-Back, aclarando numerosos puntos que permanecían confusos desde hacía muchos años. En junio y julio del mismo año, resolvió Heisenberg el problema del espectro del helio neutro, que hasta entonces constituía un verdadero misterio.

Teoría de  
Dirac:

Mientras la mecánica de matrices de Heisenberg daba los primeros y afortunados pasos, Dirac trataba de elaborar una mecánica cuantista racional utilizando un instrumento matemático distinto. Descubrió que las condiciones cuantistas para un sistema múltiplemente periódico, podían expresarse por medio de los llamados «paréntesis de Poisson», usados ya en la mecánica clásica, que tienen la propiedad de ser invariantes con respecto a cualquier transformación canónica de las coordenadas y de los momentos y con cuya ayuda pueden expresarse todos los coeficientes diferenciales que intervienen en las ecuaciones de movimiento. Con ellos se logra conservar en la nueva mecánica cuantista la forma canónica o hamiltoniana de las ecuaciones.

La teoría de Dirac permitió a su autor demostrar las fórmulas halladas por Heisenberg, Bohr y Jordan referentes al momento angular, halló la fórmula  $g$  de Landé y explicó la intensidad relativa de los componentes de un multiplete en un campo magnético débil. Finalmente, extendió su teoría a la mecánica relativista y la aplicó al fenómeno de Compton, obteniendo una concordancia superior a la lograda por el propio Compton al aplicar la teoría de Einstein.

Heisenberg ha acogido y utilizado las ideas de Dirac mostrando que son un complemento o generalización de las suyas propias.

Tanto Heisenberg como Dirac preocupáronse, en primer término, en buscar un instrumento matemático adecuado al

problema que se trataba de resolver, procurando no modificar las ideas básicas sino lo estrictamente indispensable. En particular, el misterio de la doble naturaleza del fotón de Einstein, partícula y onda al mismo tiempo, no entraba para nada en su teoría.

El año 1925, el mismo en que Heisenberg publicaba su primer trabajo sobre mecánica de matrices, apareció en los *Anales de Physique* una transcendental memoria del príncipe Louis de Broglie, que había sido ya impresa como tesis doctoral y cuyas ideas, al ser luego confirmadas, habían de producir un cambio radical en nuestro concepto del mundo atómico, al mismo tiempo que alumbraban vivísimamente la cuestión que nos ocupa. Todos saben que la idea genial de De Broglie, que valió a su autor el ser recompensado con el premio Nobel, consiste en considerar toda partícula material como algo pulsátil que hace vibrar sincrónicamente todo el espacio. Basta luego suponer que la partícula se mueve con respecto a un observador para deducir que lleva consigo una *onda asociada* de longitud perfectamente determinada.

Hipótesis de  
Broglie.

Schrödinger recogió las ideas de De Broglie y se propuso construir una mecánica en la que, en vez de considerar el electrón como un punto que se mueve en el espacio sometido a fuerzas determinadas, fuese tratado como una onda, estableciendo a este fin una ecuación diferencial que debía ser satisfecha por la «función de ondas  $\psi$ » y en la que figura la energía  $W$  como parámetro. Quizá la novedad más sorprendente de esta teoría consiste en que, de momento, no atribuyó su autor significación ninguna a dicha función  $\psi$ , a pesar de ser la que pudiéramos llamar protagonista en dicha ecuación diferencial; ni siquiera se trata de averiguar su valor, sino más bien se buscaban los llamados *valores propios* (*Eigenwerte*) del parámetro  $W$ , es decir, los valores que era preciso atribuirle para que la ecuación de ondas tuviese una solución continua, única y limitada en todo el espacio. Los valores propios de  $W$  resultan

Mecánica on-  
dulatoria.

ser los niveles energéticos del átomo. Más adelante dió Born una interpretación física de la función de ondas  $\psi$ , y según la cual, su cuadrado  $|\psi|^2$  no era otra cosa que la densidad de carga que la presencia del electrón producía en cada punto del espacio.

Hé aquí que cuando se creía estar a punto de penetrar en el misterio del átomo y ver cómo estaban en él los electrones, ocurrió lo que al abrir la caja de Pandora: cada electrón se desvanecía y convertía en una nube que llenaba todo el espacio.

Enlace de las teorías cuantistas.

Poco después de haber expuesto su teoría mostró Schrödinger el punto de enlace con la mecánica de matrices de Heisenberg, e hizo ver cómo usando las funciones propias  $\psi_1, \psi_2, \dots$  correspondientes a los valores propios  $W_1, W_2, \dots$  de  $W$ , podían hallarse las matrices de Heisenberg por una serie de cuadraturas.

Las bases de la teoría de Schrödinger se encuentran en tres memorias publicadas en los *Annalen der Physik* los meses de enero, febrero y marzo de 1926. En mayo aplicó su teoría Schrödinger a las perturbaciones y pudo calcular la intensidad de las rayas del hidrógeno en el fenómeno de Stark; en junio llegó a la fórmula de la dispersión, obtenida antes por Heisenberg y Kramers. Estos éxitos hicieron que pronto lograrse gran crédito la «mecánica ondulatoria de Schrödinger». Lo que más fuerza le da es el utilizar las ecuaciones diferenciales, que constituyen un auxiliar mucho más perfeccionado que las matrices.

Difracción de los electrones.

Las ideas de De Broglie tuvieron bien pronto una confirmación que probablemente no esperaba su propio autor. En 1928 una porción de experimentadores (Davisson y Germer, Thomson, Rupp, Kikuchi) descubrieron casi simultáneamente que los electrones, considerados siempre como algo específicamente corpuscular, eran capaces de producir interferencias exactamente lo mismo que si fuesen radiaciones con una longitud de onda igual a la prevista por De Broglie. No es preciso encarecer la importancia de tales hechos que suministran firme base expe-

rimental a la mecánica ondulatoria. Nos contentaremos con decir que, gracias a los trabajos de Schrödinger, pudo Bethe (1928) desarrollar una teoría completa de la difracción de electrones, teoría que ha sido confirmada en todas sus consecuencias y que, gracias a la introducción de un *índice de refracción* para las ondas electrónicas, permite explicar cuantitativamente los resultados experimentales.

La difracción de electrones constituye ya un poderoso medio de investigación que se utiliza con gran éxito en varios laboratorios. Mark, Wierl y Hengstenberg, huéspedes de la cátedra Cajal durante el presente curso, han investigado la difracción de electrones en moléculas libres y han logrado fijar exactamente la posición de los átomos en gran número de compuestos cumpliéndose así el sueño de los químicos orgánicos que ven directamente confirmadas sus fórmulas estructurales. Gracias a la generosidad de los fundadores de la Cátedra Cajal, nuestro Instituto Nacional de Física y Química está ya provisto de todo lo necesario para estas investigaciones y en él han logrado ya Hengstenberg, Bru y Garrido averiguar la estructura molecular de distintos compuestos orgánicos.

Como vemos, la nueva mecánica cuantista se halla en pleno florecimiento y cada día nos sorprende con nuevos descubrimientos. Si hubiéramos de prolongar esta rápida reseña hasta el preciso momento en que escribimos estas líneas, habríamos de referir que Schrödinger propone atribuir al electrón, además de sus movimientos de traslación y de giro, una especie de trepidación (*Zitterbewegung*) con la que pretende vencer ciertas dificultades de la teoría de Dirac (valores negativos de la energía). Pero ya es hora de que abordemos nuestro tema. Creemos que la enumeración precedente, que no pretende ser completa, pues nada hemos dicho, por ejemplo, de los trabajos referentes a los electrones libres en el seno de un metal, de las teorías estadísticas de Einstein y de Fermi y Dirac, etc., etc., bastará para infundir un elevadísimo grado de confianza en los postulados y

métodos de la nueva teoría. Siendo esto así, habremos de reconocer que tal doctrina tiene autoridad suficiente para imponer sus consecuencias lógicas, por sorprendentes e inverosímiles que nos parezcan. Una de ellas, verdaderamente insólita, es el *principio de indeterminación*, a cuya exposición dedicaré lo que pueda de mi discurso.

*Der neue Ansatz von Heisenberg ist aus der konsequenten Bestrebung entstanden, jeden Zahlwert einer dynamischen Variablen als Ergebniss eines möglichen Experiments aufzufassen.—*  
KENNARD.

Justificación  
de la mecánica  
de matrices.

La idea directriz que condujo a Heisenberg a la elaboración de su mecánica de matrices, se desprende claramente de la lectura de su teoría de la dispersión publicada poco antes. Sigue en ella los procedimientos un poco arbitrarios que caracterizaban la que pudiéramos llamar época cuantista preheisenbergiana, en los que se utilizaban conjuntamente los principios de la mecánica clásica y los postulados cuantistas, estableciendo con el principio de correspondencia de Bohr un puente o punto de enlace entre los mismos. Así, en el trabajo que nos ocupa, planteó y resolvió Heisenberg el problema por los métodos clásicos, considerando el átomo como un sistema múltiplemente periódico, perturbado por una radiación incidente y calculó el resultado en función de las frecuencias y amplitudes atribuidas a los electrones en su movimiento alrededor del núcleo. Finalmente, aplicó el principio de correspondencia para traducir el resultado en función de las frecuencias y amplitudes de las rayas espectrales, que constituyen el verdadero dato experimental. Heisenberg se propuso entonces aplicar el principio de correspondencia desde el momento en que se planteaba el problema, con objeto de no introducir a sabiendas magnitudes que, como las características

de las órbitas, no pueden ser observables y carecen, en consecuencia, de realidad física.

Decir que el átomo se comporta como un sistema múltiplemente periódico, significa, en el lenguaje de la mecánica clásica, que los valores que una cualquiera de las coordenadas generalizadas  $q_k$  o del momento correspondiente  $p_k$  toma al transcurrir el tiempo, pueden expresarse por un desarrollo de Fourier

$$q_k = \sum_{\tau_1, \tau_2, \dots} q_{\tau_1, \tau_2, \dots}^{(k)} e^{2\pi i(\tau_1\nu_1 + \tau_2\nu_2 + \dots)t} \quad [1]$$

donde  $\nu_1, \nu_2, \dots$ , son las frecuencias fundamentales del sistema y  $\tau_1, \tau_2, \dots$ , números enteros cualesquiera. Las  $q_{\tau_1, \tau_2, \dots}^{(k)}$  son coeficientes de amplitud independientes del tiempo. La suma debe extenderse a todos los valores enteros, positivos y negativos de los números  $\tau_1, \tau_2, \dots$ , de modo que si hay  $f$  frecuencias fundamentales aparecerán todos los términos que resulten de combinar de todas las maneras posibles  $n$  números enteros cualesquiera.

Físicamente, el desarrollo [1] equivale a afirmar que el movimiento de un sistema periódico con  $f$  frecuencias fundamentales, puede considerarse como la superposición de los  $f$  movimientos fundamentales y de la escala completa de sus armónicos, afectados unos y otros de coeficientes convenientes.

Ahora bien; al representar el estado de movimiento interno de un átomo por el desarrollo [1], introducimos magnitudes, cuales son las frecuencias fundamentales y las amplitudes de los movimientos de los electrones, que son inaccesibles a la observación, mientras que no se toman en cuenta las frecuencias de las rayas espectrales ni sus intensidades que son las magnitudes que verdaderamente tienen realidad física. Por otra parte, así como en mecánica clásica las frecuencias fundamentales de un sistema múltiplemente periódico pueden ser completamente independientes entre sí, las frecuencias espectrales han de cumplir

Principio de  
combinación.

un requisito que la experiencia impone en forma ineludible. Nos referimos al conocido principio de combinación de Rydberg-Ritz, cuya interpretación más clara resulta de la existencia de estados estacionarios en el átomo, que fué demostrada por Franck y Hertz mediante colisiones de electrones con átomos. El principio de combinación y la existencia de niveles energéticos discretos se resumen en la famosa relación postulada por Bohr al construir su modelo atómico:

$$h \nu (m n) = W_m - W_n \quad [2]$$

que, traducida en palabras, expresa que si  $W_m$  y  $W_n$  son las energías correspondientes a dos configuraciones o estados estacionarios que llamaremos  $m$  y  $n$ , al pasar de una a otra configuración es emitida una raya espectral cuya frecuencia  $\nu$  está dada por [2], siendo el fenómeno reversible.

Aparición de  
las matrices.

Notemos ahora que, según toda la información recogida en la que pudiéramos llamar primera etapa cuantista, cada estado estacionario resulta de combinar adecuadamente los números cuantistas correspondientes a los distintos electrones, de donde resulta su analogía inmediata con los armónicos del sistema múltiplemente periódico de la mecánica clásica. Sin embargo, existe una diferencia fundamental, pues mientras en esta última podíamos establecer una correspondencia unívoca entre los armónicos y las respectivas frecuencias, el principio de combinación obliga a relacionar cada frecuencia espectral  $\nu (m n)$  con dos estados estacionarios  $m$  y  $n$ . Dicho de otro modo; en mecánica clásica podemos escribir en una sola línea la serie completa de armónicos, determinado cada uno por una combinación de números enteros  $\tau_1, \tau_2, \dots$  y atribuir a cada armónico la frecuencia  $\tau_1 \nu_1 + \tau_2 \nu_2 + \dots$ . Tal representación es imposible en mecánica cuantista y lo más parecido consistirá en construir una especie de tabla de doble entrada en la que, tanto las filas como las columnas, estén encabezadas con los símbolos  $m$  y  $n$  que

sirvan para designar los distintos estados estacionarios y cuyos elementos sean de la forma

$$q(mn) e^{2\pi i\nu(mn)t}$$

con lo cual resulta que toda coordenada o momento queda representada, en función del tiempo, por una ordenación de términos dispuestos como los elementos de una matriz.

La primera dificultad que surge al adoptar esta representación estriba en que, mientras el desarrollo en serie de Fourier permite calcular el valor de las coordenadas y de los momentos en cualquier valor del tiempo, nada parecido puede lograrse con las matrices. En mecánica clásica, en efecto, cada término del desarrollo representaba un movimiento posible y bastaba aplicar el principio de la composición de los pequeños movimientos para deducir que el valor de una coordenada en un instante dado debía ser la suma de la serie correspondiente. En las matrices, por el contrario, las matrices no representan movimientos posibles en el átomo, sino que se refieren a datos de observación (frecuencias e intensidades) recogidos durante la transición entre dos estados estacionarios, y, en consecuencia, carece de sentido el tratar de sumarlos. Esto significa que debemos renunciar a saber cuánto valen en un instante dado las coordenadas generalizadas o los momentos de un electrón que forma parte de un átomo lo cual es lógico si, como elemento informativo, sólo disponemos de los datos espectrales.

*Al representar una magnitud por una matriz, renunciamos a saber cuánto vale en un instante dado.*

En cambio, podemos pretender el conocimiento del *valor medio temporal* de una coordenada, o de un momento, es decir, de la media de los valores (desconocidos) que dicha magnitud toma en el transcurso del tiempo. En efecto, en el desarrollo de Fourier, el término independiente del tiempo representa, evidentemente, la media temporal de la magnitud en cuestión. Por

otra parte, en las matrices deberá suceder que los elementos de la diagonal principal sean independientes del tiempo, pues

$$v(n n) = W_n - W_n = 0$$

y, además, cada uno se refiere a un sólo estado estacionario. En virtud de estas consideraciones y guiados siempre por el principio de correspondencia, podemos sentar el siguiente postulado:

I. *El término diagonal (n n) de una matriz es la media temporal de la magnitud por ella representada, cuando el átomo se halla en el estado estacionario n.*

Para que el desarrollo de Fourier tenga un valor real, es preciso que cada término vaya acompañado de su conjugado. Trasladando esta propiedad a la nueva representación, admitiremos que

II. *Las matrices que representan una magnitud en la mecánica cuantista son del tipo de Hermite, es decir, cada dos elementos que ocupan posición simétrica con respecto a la diagonal principal son imaginarios conjugados.*

Como en virtud del principio de combinación, esta condición se cumple ya para el factor exponencial, pues

$$v(m n) = -v(n m)$$

bastará que se cumpla para el factor de amplitud, es decir:

$$Q(m n) = Q^*(n m).$$

En particular, todos los elementos diagonales deberán ser reales.

*Nous devrions tenir compte du fait que l'esprit humain est doué d'une tres grande inertie, et aussi pourrions-nous dire, d'une grande viscosité.—C. G. DARWIN.*

La mecánica clásica operaba con números ordinarios, resultado de comparar cada magnitud con la unidad correspondiente.

Esto tenía la inmensa ventaja de que bastaba aplicar los principios fundamentales, generalmente en forma de ecuaciones diferenciales, para que quedase convertido el problema en una cuestión meramente matemática, para cuya resolución podía echarse mano de los potentísimos medios de la teoría de ecuaciones diferenciales. Todas las operaciones del cálculo podían aplicarse sin parar mientes en su sentido físico, si es que alguno tenía, y sin otra restricción que la de operar siempre con ecuaciones dimensionalmente homogéneas. La legitimidad del método dependía de que se cumpliesen o no los principios fundamentales a los que, quizá por un efecto de familiarización, solemos atribuir carácter axiomático y de que el razonamiento humano sea un medio infalible para deducir consecuencias necesarias de los mismos. En todo caso, y prescindiendo de honduras filosóficas que no son de nuestra competencia, no puede negarse que tal procedimiento estaba asentado sobre bases firmísimas.

Nuestra situación es mucho más precaria cuando las magnitudes con que hemos de operar no son ya números, sino ordenaciones de los mismos formando una matriz. Para poder desarrollar la teoría, necesitamos dos cosas: un instrumento matemático adecuado y unos principios fundamentales que nos permitan plantear en forma algorítmica los problemas que tratemos de resolver. Afortunadamente, los matemáticos se habían adelantado, de modo admirable, a remediar la primera necesidad, y en el libro de R. Courant y D. Hilger «*Methoden de mathematischen Physik*», cuya primera edición se publicó en 1924, se encuentra un álgebra de matrices y una teoría de valores propios (*Eigenwerte*) que han proporcionado a las nuevas doctrinas cuantistas el aparato matemático que necesitaban. Para los matemáticos, acostumbrados a sus hermosas abstracciones, no constituirá el cambio de algoritmos dificultad ninguna, antes al contrario, serán quienes mejor puedan apreciar este gran triunfo de sus métodos especulativos,

Dificultad del empleo de matrices como magnitudes mecánicas.

pero quienes se dedican al cultivo de las ciencias experimentales, acostumbrados a las reglas aplicables a los números ordinarios, tropezarán seguramente con serias dificultades al tener que aceptar otras que se hallan en pugna con las que nos son familiares. No está de más advertir, sin embargo, que gran parte de tal dificultad procede del hecho de que, quizá por un efecto de inercia mental, manifestamos respecto de las innovaciones un espíritu crítico que contrasta con la facilidad con que damos por evidentes las cosas que fuimos aprendiendo desde niños, aunque al analizarlas cuidadosamente no sean, ni con mucho, inmediatamente intuitivas. Así, por ejemplo, cuando en el álgebra de matrices nos veamos obligados a aceptar la no conmutabilidad de la multiplicación, sentiremos el vehementemente deseo de darnos cuenta de lo que tal cosa significa y quedaremos altamente defraudados al no lograr tal propósito, olvidando que nos veríamos probablemente en un grave aprieto si tratásemos de darnos cuenta del sentido físico de algunas de las más sencillas operaciones que, con toda naturalidad, realizamos en mecánica clásica, quitar denominadores, por ejemplo.

Notación.

Comenzaremos por exponer la notación que hemos de emplear. Representaremos una matriz por una letra mayúscula y uno cualquiera de sus elementos, que serán números ordinarios, por la misma letra seguida de un paréntesis con los símbolos de la fila y de la columna en que dicho elemento se encuentra. Así,

$$P(m\ n) e^{2\pi i\nu(n\ m)}$$

será el elemento que se encuentra en la fila  $m$  y la columna  $n$  de la matriz  $P$ . Tengamos presente que, en virtud de la manera como han aparecido las matrices, todo elemento consta siempre de dos factores, un factor de amplitud  $P(m\ n)$  independiente del tiempo y otro exponencial  $e^{2\pi i\nu(m\ n)}$

Álgebra de matrices.

Por ahora, el álgebra de matrices se encuentra en estado verdaderamente rudimentario, pues se reduce a dos algoritmos: la suma y la mutiplicación. No obstante, ello basta para calcular

cualquier función de matrices con tal de que sea desarrollable en serie de potencias.

Ya hemos dicho que las operaciones con matrices fueron definidas y estudiadas por los matemáticos antes que apareciese la nueva mecánica cuantista. Sin embargo, es sumamente interesante ver cómo por un procedimiento inductivo fundado en la aplicación del principio de correspondencia se llega a las mismas definiciones y reglas establecidas por los matemáticos.

Para definir la suma y la multiplicación de matrices se procura guardar la mayor analogía posible con las operaciones de igual nombre aplicadas a las series de Fourier, pero imponiendo la condición de que el resultado sea otra matriz en la que también se cumpla el principio de combinación de Rydberg-Ritz, ya que si tal magnitud ha de significar algo, cada uno de sus elementos deberá referirse al tránsito entre dos estados estacionarios. Ello obliga a que en el elemento  $(m n)$  del resultado figure también el factor  $\exp [2 \pi i \nu (m n)]$ .

Se llega así a las siguientes definiciones:

$$(P + Q)(m n) e^{2\pi i \nu (m n)} = [P(m n) + Q(m n)] e^{2\pi i \nu (m n)}$$

$$P Q(m n) = \sum_k P(m k) Q(k n) e^{2\pi i \nu (m n)}$$

o bien:

$$(P + Q)(m n) = P(m n) + Q(m n)$$

$$P Q(m n) = \sum_k P(m k) Q(k n).$$

Nótese que, en virtud de estas reglas, el factor exponencial que figura en un elemento queda determinado sin ambigüedad en cuanto se sabe el lugar que éste ocupa en la matriz, razón por la cual puede omitirse su escritura. Nos interesa también llamar la atención sobre el hecho singular de que la multiplicación de matrices no es conmutativa, pues de su definición se desprende que, en general,

$$P Q(m n) \neq Q P(m n)$$

Este hecho tiene la mayor importancia para el desenvolvimiento ulterior de la teoría.

Las precedentes son, precisamente, las reglas a que habían llegado los matemáticos al tratar de constituir un sistema lógico que permitiese operar con matrices y resulta verdaderamente sugestivo el que tales reglas vengan impuestas por el principio experimental de Rydberg-Ritz.

La definición de derivada de una matriz respecto del tiempo es obvia. Basta recordar cómo se halla la derivada de una serie de Fourier para escribir, después de suprimir las exponenciales:

$$\dot{Q}(m n) = 2 \pi i \nu Q(m n).$$

Finalmente, se adoptan en la mecánica de matrices las definiciones y convenios establecidos en la teoría matemática. Así, se llama *matriz unidad* aquella cuyos elementos diagonales son todos iguales a la unidad y los restantes son nulos. La representaremos por  $I$  y sus elementos habrán de ser tales que

$$I(m n) = \begin{cases} 1, & \text{si } m = n \\ 0, & \text{si } m \neq n \end{cases}$$

La *matriz recíproca*  $X^{-1}$  de otra dada  $X$  es la que cumple con las dos condiciones siguientes:

$$X^{-1} X = X X^{-1} = I.$$

Finalmente, la *matriz transpuesta*  $\tilde{X}$  de otra dada  $X$  es la que se obtiene cambiando las filas por columnas y las columnas por filas, o sea

$$\tilde{X}(m n) = X(n m).$$

Los números  
de Dirac.

La representación por matrices lleva consigo la condición de que al expresar el estado de un sistema en función de determinadas variables (por ejemplo, de las integrales primeras de las ecuaciones de movimiento), ocurra que estas variables sólo puedan tomar los valores discretos, pues sólo en tal caso podremos

tomar los valores que caracterizan cada estado estacionario como encabezamiento de las filas y de las columnas de la tabla de doble entrada que ha de conducirnos a la matriz representativa de la magnitud dada. En general, tales variables podrán tomar o sólo valores discretos o sólo valores continuos o valores discretos en una región y continuos en otra. Si queremos abarcar todos estos casos, habremos de considerar matrices en las que las filas y las columnas se hallan infinitamente próximas entre sí siempre que haya continuidad en la variación de los parámetros. Como este caso es el más general, es el que Dirac adopta en su representación, a reserva de hacer las modificaciones necesarias cuando los parámetros sólo puedan tomar valores discretos. Al proceder así, se transforman, evidentemente, las sumas en integrales y la regla de multiplicación se convierte en

$$P Q(m n) = \int P(m k) Q(k n) d k,$$

que sigue siendo no conmutativa.

La nueva mecánica cuantista se ve obligada a operar con magnitudes que no poseen las propiedades de los números ordinarios, pues no obedecen la ley conmutativa de la multiplicación. Otras, por el contrario, como todas las funciones del tiempo, mientras no se toman en cuenta las acciones relativistas, seguirán siendo números ordinarios. Para distinguir claramente entre unas y otras propone Dirac llamar *números q* las primeras (que no cumplen la ley conmutativa) y *números c* los números ordinarios. Según hemos visto, los números *q* pueden representarse por matrices, continuas o discontinuas, cuyos elementos son números *c*.

Es preciso ahora generalizar el concepto de matriz unidad en forma que sea aplicable al caso de matrices en que varían de modo continuo los parámetros que fijan el estado del sistema. Desde luego, la matriz unidad será aquella que multiplicada por otra cualquiera *P* da como producto esta misma matriz, es decir:

$$\int I(m k) P(k n) d k = P(m n).$$

Demuestra Dirac que los elementos de la matriz unidad generalizada pueden representarse por:

$$I(m n) = \delta(m - n)$$

siendo  $\delta$  una función que, aplicada a un número  $c$ , tiene las siguientes propiedades:

$$\delta(x) = 0, \quad \text{si } x \neq 0,$$

$$\int \delta(x) dx = 1,$$

si la integral se extiende a un intervalo que abarque el valor  $x = 0$ .

*For the derivation of the mathematical scheme of the quantum theory, whether based on the wave or the particle picture, two sources are available: empirical facts and the correspondence principle.—HEISENBERG, conferencias en Chicago.*

Ecuaciones de movimiento.

En disposición ya del instrumento matemático que ha de servirnos para operar con matrices o, más generalmente, con números  $q$ , debemos buscar ahora las expresiones que en la nueva mecánica han de reemplazar las ecuaciones canónicas de movimiento de la mecánica clásica.

El punto de partida para el logro de este propósito lo constituye la analogía descubierta por Dirac entre cierto operador usado en mecánica, llamado paréntesis de Dirac, y la multiplicación de matrices. El paréntesis de Poisson aplicado a dos funciones  $x$  e  $y$  de las variables dinámicas  $q_k$  (coordenadas generalizadas) y  $p_k$  (momentos) se define del siguiente modo:

$$[x y] = \sum_k \frac{\partial x}{\partial p_k} \frac{\partial y}{\partial q_k} - \frac{\partial y}{\partial p_k} \frac{\partial x}{\partial q_k}$$

y, evidentemente, sucede que

$$\begin{aligned}
 [p_r, q_s] &= \begin{cases} 1 & \text{si } r = s \\ 0 & \text{si } r \neq s \end{cases} \\
 [p_r, q_s] = 0 \\
 [q_r, q_s] = 0
 \end{cases} \text{ siempre} \tag{3}$$

Supongamos ahora que se efectúa simultáneamente el estudio de un problema dinámico aplicando las dos mecánicas, la clásica y la cuantista. Se demuestra entonces que, para números cuantistas muy elevados, la frecuencia espectral  $\nu(m, n)$  correspondiente al tránsito entre los estados estacionarios definidos por los números cuantistas

$$\begin{array}{c}
 m_1, m_2, m_3, \dots, m_f \\
 \text{y} \\
 n_1, n_2, n_3, \dots, n_f
 \end{array}$$

tiende a coincidir con la frecuencia

$$(m_1 - n_1) \nu_1 + (m_2 - n_2) \nu_2 + \dots$$

que la teoría atribuye al armónico definido por el grupo de números enteros  $m_1 - n_1, m_2 - n_2, \dots$ . Esta proposición, que es quizá la forma más concreta de enunciar el principio de correspondencia, conduce a esta otra:

*Si X e Y son dos magnitudes dinámicas (números q) en la mecánica cuantista y x e y sus correspondientes (números c) en la clásica, el elemento (m, n) de la matriz*

$$\frac{2\pi i}{h} (X Y - Y X)$$

*tiende a coincidir, para números cuantistas muy elevados, con el armónico (m - n) del paréntesis de Poisson [x, y].*

Las condiciones de conmutación.

Basta ahora tener a la vista las relaciones [3] de la mecánica clásica para *inducir*, aplicando una vez más el principio de correspondencia, que en la cuantista deben cumplirse las siguientes *condiciones de conmutación* entre las coordenadas generalizadas  $Q$  y sus momentos conjugados  $P$ :

$$\begin{aligned}
P_r Q_s - Q_s P_r &= \begin{cases} \frac{h}{2\pi i}, & \text{si } r = s \\ 0, & \text{si } r \neq s \end{cases} \\
P_r P_s - P_s P_r &= 0 \\
Q_r Q_s - Q_s Q_r &= 0
\end{aligned}
\quad \left. \vphantom{\begin{aligned} P_r Q_s - Q_s P_r \\ P_r P_s - P_s P_r \\ Q_r Q_s - Q_s Q_r \end{aligned}} \right\} \text{siempre} \quad [4]$$

lo cual se expresa diciendo que:

*Todas las coordenadas de posición conmutan entre sí y lo mismo sucede con los momentos.*

Las relaciones precedentes, que pueden considerarse como postulados que en la nueva mecánica cuantista sustituyen los de Bohr, ya que en ellos aparece por vez primera el cuanto de acción de Planck, constituyen requisitos *a priori* indispensables para que dos sistemas de números  $q$ , las  $Q$  y las  $P$ , puedan tomarse como variables dinámicas canónicamente conjugadas. Si fuese  $h = 0$ , la multiplicación de números  $q$  cumpliría la ley conmutativa de los números ordinarios  $c$ . Podemos, pues, decir que la única falta de la mecánica clásica consiste en haber ignorado la existencia del cuanto de acción de Planck (recuérdese que  $h = 6,55 \cdot 10^{-27}$ ).

En virtud de la correspondencia entre la expresión

$$\frac{2\pi i}{h} (XY - YX)$$

y el paréntesis  $[xy]$  podemos ya escribir las ecuaciones de movimiento en la nueva mecánica. En efecto, utilizando los paréntesis de Poisson, las ecuaciones canónicas de Hamilton se escriben así:

$$\dot{p}_k = [Hp_k]; \quad \dot{q}_k = [Hq_k],$$

donde  $H$  es la hamiltoniana. Es obvio, por consiguiente, escribir

$$\begin{aligned} \dot{P}_k &= \frac{2\pi i}{h} (H P_k - P_k H) \\ \dot{Q}_k &= \frac{2\pi i}{h} (H Q_k - Q_k H) \end{aligned} \quad [5]$$

siendo ahora  $H$  un número  $q$ .

Las condiciones de conmutación [4] y las ecuaciones de movimiento [5] constituyen los postulados fundamentales de la nueva mecánica cuantista. Para llegar a ellas nos ha servido de guía el principio de correspondencia, pero como es lógico, no podemos pretender que tengan el carácter de verdades demostradas. Una primera prueba en su favor estriba en el hecho de que de ellas se deduce inmediatamente el principio de conservación de la energía y el postulado de Bohr.

Con esto se dispone ya de todo lo necesario para demostrar una propiedad fundamental de la matriz  $H$ . En efecto, el principio de conservación de la energía se expresa analíticamente anulando la derivada de  $H$  con respecto al tiempo, es decir:

$$2\pi i \nu(mn) H(mn) = 0. \quad [6]$$

Ahora bien; llámense sistemas no degenerados aquellos en que no hay dos estados estacionarios que tengan la misma energía. En ellos ocurrirá, por consiguiente, que  $\nu(mn) \neq 0$  si  $m \neq n$ , y de [6] se deduce inmediatamente que *en los sistemas no degenerados la hamiltoniana es una matriz diagonal*. Ocurre, además, que los elementos diagonales de  $H$ , salvo una constante aditiva que puede suprimirse, no son otra cosa que las energías correspondientes a los respectivos estados estacionarios.

En los sistemas degenerados ocurre que se anulan las frecuencias correspondientes a estados de igual energía. En consecuencia, si llamamos *estigmas* los puntos de intersección de las

filas y las columnas definidas por cada dos de dichos estados, podremos decir, en general, que todos los elementos de  $H$  son nulos salvo los que se encuentran en la diagonal principal y en los estigmas.

Resumiendo lo que precede, resulta que los postulados de la nueva mecánica cuantista son una generalización de los de la clásica y que las matrices representativas de las variables dinámicas de un sistema, además de ser hermitianas y de cumplir las condiciones de conmutación, han de satisfacer las ecuaciones canónicas de movimiento, que son enteramente análogas a las clásicas de Hamilton expresadas en función de los paréntesis de Poisson y siendo nulos todos los elementos de la matriz hamiltoniana salvo los que se encuentran en la diagonal principal y en los estigmas de degeneración.

Planteamiento  
de un problema  
dinámico en me-  
cánica cuantista.

Todavía puede concretarse más la formulación de un problema dinámico en mecánica cuantista. Puede demostrarse, en efecto, que *si se logra encontrar un sistema de matrices  $Q_k$  y  $P_k$  que satisfagan las condiciones de conmutación y conviertan la hamiltoniana  $H$  en matriz diagonal, quedan ipso facto satisfechas las ecuaciones de movimiento y, por ende, se habrá resuelto el problema.*

Inútil sería que tratásemos de penetrar el sentido físico de la proposición precedente. No tiene, por ahora, sino un carácter meramente formal. Por un procedimiento inductivo y tomando como base ciertos hechos experimentales, se ha construido un aparato matemático y ahora se saca de él todo el partido posible. Si la metodología matemática es infalible, podemos estar seguros de que los resultados serán legítimos. Por otra parte, sucede que algunas operaciones de cálculo son susceptibles de interpretaciones geométricas sumamente claras, que hacen menos abstractos los razonamientos matemáticos y, al mismo tiempo, nos suministran un utilísimo medio de expresión. Tal ocurre con la teoría de transformación de matrices, felizmente aplicada por Dirac al problema que nos ocupa, y que vamos a exponer brevemente a continuación.

Transformar una matriz  $P$  tomando otra matriz  $S$  como *matriz transformadora* es efectuar la operación:

Transformación de matrices.

$$S^{-1} P S = P_1$$

con lo cual resulta otra matriz  $P_1$  que llamaremos *transformada*. La importancia de esta operación en mecánica cuantista radica en la siguiente interesantísima propiedad:

*Las condiciones de conmutación son invariantes con respecto a cualquier transformación de matrices.*

Ahora bien; hemos visto que resolver un problema dinámico en mecánica cuantista consiste en hallar dos series de matrices hermitianas  $P_k$  y  $Q_k$  que satisfagan los siguientes requisitos:

- a) *Cumplir las condiciones de conmutación;*
- b) *Convertir en diagonal la hamiltoniana H;*

y, por tanto, la proposición precedente nos autoriza a descomponer todo problema en otros dos problemas parciales, a saber:

- a) *Buscar matrices hermitianas cualesquiera que cumplan las condiciones de conmutación aunque en ellas H no sea diagonal.*
- b) *Hallar la transformadora S que convierta H en matriz diagonal.*

En particular, las *transformaciones unitarias* definidas por la condición de dejar invariante la forma

$$\sum_n t_n t_n^*$$

en que  $t_n$  son las componentes de un vector cualquiera en un espacio unitario de infinito número de dimensiones (espacio de Hilger), son análogas a las rotaciones de ejes rectangulares en el espacio real de tres dimensiones. Se demuestra que una transformación es unitaria cuando

$$\tilde{S}^* = S^{-1} \quad \text{o sea} \quad \tilde{S}^* S = I$$

Las transformaciones que cumplen esta *condición de ortogonalidad* se dice que están *normalizadas*.

Vemos que transformar una matriz es una operación análoga

::

al cambio de ejes que reduce a los elementos principales las componentes de un tensor. Es, por tanto, lo que los matemáticos llaman un *cambio a ejes principales*, que siempre puede lograrse con transformaciones ortogonales.

Esta interesantísima propiedad nos autoriza, desde un punto de vista puramente dialéctico, a considerar las matrices como entidades que subsisten con su propia individualidad cuando se someten a transformaciones (cambios de ejes) cualesquiera. En lo sucesivo nos veremos obligados a especificar el sistema de ejes, y para abreviar el lenguaje convendremos en llamar sistema  $(X)$  aquel en que la matriz  $X$  es diagonal.

En particular, podremos decir que *resolver un problema dinámico en mecánica cuantista es lo mismo que efectuar el paso al sistema  $(H)$* .

Tiene indudablemente gran interés saber qué matrices pueden llevarse simultáneamente a la forma diagonal mediante un cambio adecuado de ejes coordenados. La teoría de matrices nos suministra la siguiente respuesta: *Siempre puede encontrarse una transformación ortogonal que haga diagonales todas las matrices que conmutan entre si dos a dos*.

En virtud del teorema precedente, podemos afirmar, por ejemplo, que *siempre podrá encontrarse un sistema de ejes en el cual todas las coordenadas de posición sean matrices diagonales*.

Hemos visto que en la nueva mecánica cuantista todo problema dinámico se reduce, en esencia, a buscar la matriz transformadora que convierta en diagonal la hamiltoniana  $H$ . En la forma primitiva de Heisenberg, cuando se utilizaban matrices en las que había siempre discontinuidad entre cada dos filas o columnas consecutivas, el problema de buscar la citada transformadora  $S$  conducía a un número infinito de ecuaciones simultáneas que daban los elementos de  $S$  y que, por ser homogéneas, determinaban también los elementos de  $H$  en el nuevo sistema. Evidentemente, la resolución de tales ecuaciones sólo era posible en casos sencillos.

A mejorar considerablemente este estado de cosas contribuyó un trabajo de Schrödinger en el que lograba establecer los puntos de contacto entre la mecánica de matrices y su mecánica ondulatoria. Con ello se logra hacer aplicable al problema que nos ocupa la teoría de ecuaciones diferenciales, que está mucho más adelantada que la de matrices.

La base de la teoría de Schrödinger está constituida por su famosa ecuación de ondas:

$$H\left(\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_k}, q_k\right)\psi(q) - W\psi(q) = 0 \quad [7]$$

en la cual  $q_k$  ( $k = 1, 2, \dots, f$ ) son las coordenadas de posición y  $q$  representa, simbólicamente, el conjunto de todas ellas. El símbolo

$$H\left(\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_k}, q_k\right)$$

significa que en  $H(p_k, q_k)$  deberá reemplazarse  $p_k$  por el operador

$$\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_k}$$

En sus primeros trabajos consideró Schrödinger la cuantización de un sistema mecánico, es decir, la introducción de las condiciones cuantistas, como si se tratase de un problema de valores propios, consistente en buscar los valores del parámetro  $W$  para los cuales la solución de la ecuación de ondas es continua, única y limitada en todo el espacio. Tales valores propios  $W_1, W_2, \dots$  resultan ser los niveles energéticos del sistema y, una vez encontrados, basta aplicar el postulado de Bohr para deducir las frecuencias espectrales, sin necesidad de preocuparse del significado de la función de ondas  $\psi(q)$ .

Al comparar su teoría con la de Heisenberg, descubrió Schrödinger que su función de ondas estaba relacionada con la función

transformadora  $S$  de un modo altamente sugestivo, que vamos a exponer.

Determinación  
de la matriz  
transformadora.

Tomemos como punto de partida el sistema ( $Q$ ) en que son diagonales las coordenadas de posición. Notemos ante todo que, en general, cada elemento de una matriz corresponde al tránsito entre los dos estados estacionarios que encabezan, respectivamente, la fila y la columna en que se haya situado. Para los elementos diagonales, ambos estados estacionarios se reducen a uno y, por tanto, bastará una letra para representar un elemento cualquiera de una matriz diagonal. Así, el elemento  $Q_k(m)$  se referirá al estado estacionario  $m$ .

Se trata ahora de buscar la matriz  $S$  que sirve para pasar del sistema ( $Q$ ) al sistema ( $H$ ), o sea:

$$S^{-1} H^{(Q)} S = H^{(H)}$$

donde  $H^{(Q)}$  es la hamiltoniana en el sistema en que las  $Q$  son diagonales y  $H^{(H)}$  la hamiltoniana en el sistema en que ella misma es diagonal. Pues bien; según Schrödinger, la solución se encuentra sin más que hallar los valores propios  $W_1$ , y  $W_2$ , del parámetro  $W$  en la ecuación [7], pues se tiene:

$$H^{(H)}(n) = W_n$$

A continuación se busca la solución  $\phi_n(q)$  correspondiente a cada valor  $W_n$  y sustituyendo en ella  $q_1, q_2, \dots$  por los elementos  $q_1(mn), q_2(mn) \dots$  de la matriz  $Q_k$  se tendrá el elemento  $(m n)$  de la matriz buscada. Así:

$$S(m n) = \phi_n(q_m)$$

donde  $q_m$  representa, simbólicamente, el conjunto de los elementos que ocupan el lugar  $m$  en las matrices diagonales  $Q_k$ .

Como vemos, cada valor propio  $W_n$  de  $W$  suministra la columna  $n$  de la matriz transformadora y el conjunto de los elementos que en las matrices diagonales  $Q_k$  ocupan el lugar  $m$ , nos dan la fila  $m$  de  $S$ . De un modo general podemos decir que

en la matriz transformadora  $S_{(X)}^{(Y)}$  que sirve para pasar del sistema  $(X)$  al sistema  $(Y)$ , el símbolo  $m$  que encabeza las filas se refiere a los elementos de  $X$  en el sistema primitivo  $(X)$  y el símbolo  $n$  que encabeza las columnas se refiere a los elementos de  $Y$  en el sistema final  $(Y)$ .

La ecuación de Schrödinger es aplicable no sólo cuando se quiere convertir en diagonal la hamiltoniana  $H$ , sino siempre que se quiere pasar del sistema  $(Q)$  al sistema en que es diagonal una función cualquiera  $F$  de las coordenadas de posición  $Q$  y de los momentos  $P$ .

Notaremos que, si bien para establecer la teoría cuantista se ha tomado como punto de partida el caso de un sistema múltiplemente periódico, sus postulados pretenden tener una validez general.

El instrumento matemático así elaborado adolece, por ahora, del defecto de ser meramente formalista. De las magnitudes que en él intervienen sólo sabemos que los elementos diagonales representan las medias temporales correspondientes a los respectivos estados estacionarios y que, en particular, los elementos de la hamiltoniana  $H$  en el sistema  $(H)$  son los niveles energéticos del sistema. Se comprende la necesidad de llegar a una interpretación física más completa si queremos lograr consecuencias prácticas.

Interpretación física de la función transformadora.

En la mecánica clásica se consideraba resuelto un problema cuando se había averiguado el valor de las variables dinámicas en función del tiempo, pues con ello se podía calcular cualquier constante física en un instante cualquiera. Es evidente que en mecánica cuantista no poderemos lograr nunca tal propósito, pues al adoptar la representación por matrices renunciamos a ello expresamente. Sin embargo, las investigaciones de Heisenberg y de Dirac han permitido llegar a interpretaciones físicas gracias a las cuales es posible hallar la solución *estadística* de un problema determinado. He aquí las interpretaciones a que acabamos de referirnos

a) *La magnitud representada por la matriz X sólo puede tomar como valores los elementos de X en el sistema (X).*

b) *Si  $S_{(X)}^{(Y)}$  es la matriz que sirve para pasar del sistema (X) al sistema (Y), la expresión  $|S(mn)|^2$  representa la probabilidad de que X valga X(m) cuando se sabe que Y vale Y(n).*

De aquí resulta que, si bien la representación por matrices nos obliga a renunciar al conocimiento del valor que una magnitud tiene en un instante dado, podremos pretender el conocimiento no sólo del valor medio temporal, sino de la probabilidad de que, en un instante dado, dicha magnitud tenga un valor determinado. La nueva mecánica tiene, por consiguiente, un carácter eminentemente estadístico, pues en ella se reemplaza la certeza por la probabilidad y ello, no a causa de la limitación de nuestros sentidos o por ser inabordables los problemas complejos a nuestros medios de cálculo, como ocurría en mecánica clásica, sino en virtud de la misma naturaleza de las cosas.

Observemos que las probabilidades cuantistas vienen dadas por los *cuadrados* de los elementos de la matriz transformadora. Esta circunstancia hace plausible la denominación de *amplitudes de probabilidad* aplicada a tales elementos. Con esta circunstancia se halla también relacionada la llamada interferencia de probabilidades, que sólo podemos mencionar.

*.....y doscientos diera yo ahora en albricias a quien me dijera con certidumbre que la señora D.<sup>a</sup> Melisendra y el señor D. Guiferos estaban ya en Francia y entre los suyos.—D. QUIJOTE a maese PEDRO.*

La nueva mecánica es esencialmente estadística.

Por muy en pugna que con nuestras ideas preconcebidas se halle el carácter estadístico que la nueva mecánica impone a la información que podemos lograr acerca del estado dinámico de un sistema, hemos de reconocer que no hay en ello la menor

contradicción con la experiencia. Antes al contrario, en el caso más sencillo, si tratamos, por ejemplo, de obtener la posición de un punto y realizamos para ello gran número de medidas, obtendremos la conocida curva de repartos de errores y como resultado de nuestra investigación, sólo podremos afirmar que existe determinada probabilidad de que el punto se halle en este o en el otro lugar. La nueva mecánica se limita a afirmar que, por muy precisos que sean nuestros instrumentos de medida, jamás llegaremos a la certidumbre absoluta. Si no hubiera más que esto, ninguna modificación esencial habríamos introducido desde el punto de vista práctico, pues nada se opondría a que dispusiésemos las condiciones experimentales de tal modo que la curva de probabilidades presentase un máximo sumamente abrupto, lo cual equivaldría a limitar nuestra incertidumbre en un intervalo menor que cualquier cantidad fijada de antemano. Un examen más detenido de las consecuencias de la teoría cuantista revela, sin embargo, que no es posible lograr tal propósito sin que, *ipso facto*, aumente sin fin y sin límite la incertidumbre de otra magnitud, de donde resulta que *en nuestro conocimiento del estado dinámico de un sistema cualquiera existe siempre una indeterminación o incertidumbre ineludible.*

Esta interesantísima consecuencia que, por su excepcional trascendencia, ha merecido ser llamada *principio de indeterminación* de Heisenberg, se desprende de un modo lógico de las propiedades de la matriz transformadora. Hemos visto, en efecto, que el elemento  $S_{(X)}^{(Y)}(x_1, y_1)$  representa la amplitud de la probabilidad de que  $X$  tenga el valor  $x_1$  cuando se sabe que  $Y$  vale  $y_1$ . Si queremos calcular la probabilidad de que sea  $X = x_1$  sin ninguna restricción, bastará hacer uso de un teorema de la teoría de transformaciones, en virtud del cual la aplicación sucesiva de dos transformaciones equivale a una sola transformación obtenida multiplicando aquéllas en el mismo orden en que se aplican, es decir,

$$S_{(X)}^{(Z)} = S_{(X)}^{(Y)} S_{(Y)}^{(Z)}$$

Derivación del principio de indeterminación.

de donde resulta la siguiente ecuación:

$$S_{(X)}^{(Z)}(x_1 z_1) = \sum_y S_{(X)}^{(Y)}(x_1 y) S_{(Y)}^{(Z)}(y z_1)$$

que es válida para cualquier valor de  $z_1$ . En consecuencia, si designamos por  $F_1(x)$  la probabilidad de que sea  $X = x$  y por  $F_2(y)$  la probabilidad de que sea  $Y = y$ , tendremos:

$$F_1(x_1) = \sum_k S_{(X)}^{(Y)}(x_1 y) F_2(y),$$

o bien, si consideramos matrices continuas a fin de reemplazar las sumas por integrales:

$$F_1(x_1) = \int S_{(X)}^{(Y)}(x_1 y) F_2(y) dy.$$

Resulta que, para calcular  $F_1(x)$ , basta conocer la función de probabilidad  $F_2(y)$  relativa a otra magnitud cualquiera  $Y$ , así como la matriz transformadora que sirve para pasar del sistema  $(X)$  al sistema  $(Y)$ .

Correlativamente, podríamos deducir que

$$F_2(y_1) = \int S_{(Y)}^{(X)}(y_1 x) F_1(x) dx,$$

y como

$$S_{(X)}^{(Y)} S_{(Y)}^{(X)} = S_{(X)}^{(X)} = I,$$

resulta

$$S_{(Y)}^{(X)} = (S_{(X)}^{(Y)})^{-1}.$$

De este modo, haciendo para abreviar  $S = S_{(X)}^{(Y)}$ , y teniendo presente que

$$S^{-1}(y_1 x) = \tilde{S}^*(y_1 x) = S^*(x y_1),$$

resulta

$$\begin{aligned} F_1(x_1) &= \int S(x_1 y) F_2(y) dy \\ F_2^*(y_1) &= \int S^*(x y_1) F_1(x) dx \end{aligned} \quad [8]$$

El cálculo es relativamente sencillo si tomamos como magni-

tud  $X$  una coordenada de posición  $Q_k$  y como magnitud  $Y$  el momento conjugado correspondiente  $P_k$ , es decir, la magnitud que cumpla la condición

$$P_k Q_k - Q_k P_k = \frac{h}{2\pi i} I.$$

En estas circunstancias, las ecuaciones [8] se convierten en

$$\begin{aligned} F_1(q_1) &= \int S(q_1, p) F_2(p) dp \\ F_2(p_1) &= \int S^*(q, p_1) F_1(q) dq \end{aligned} \quad [9]$$

y la transformadora  $S$  que ha de servir para el paso  $(Q) \rightarrow (P)$  se calculará con la ecuación de Schrödinger:

$$F\left(\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q}, q\right) S(q, p) - W_p S(q, p) = 0,$$

que, haciendo  $F = p$ , se convierte en

$$\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial S(q, p)}{\partial q} - W_p S(q, p) = 0,$$

en la que  $p$  figura como parámetro. Resolviendo esta ecuación se tiene:

$$S(q, p) = C e^{\frac{pq}{\epsilon}}, \quad \text{siendo} \quad \epsilon = \frac{h}{2\pi i}$$

y  $C$  una constante cuyo valor se halla expresando que  $S$  ha de ser unitaria, es decir:

$$\int S(q, p) \tilde{S}^*(p, q) dp = 1.$$

Resulta así  $C = 1/\sqrt{h}$  y, en definitiva:

$$S(q, p) = \frac{1}{\sqrt{h}} e^{\frac{pq}{\epsilon}},$$

con lo cual las ecuaciones [9] se convierten en

$$F_1(q_1) = \frac{1}{\sqrt{h}} \int e^{\frac{p q_1}{\epsilon}} F_2(p) dp \quad [10]$$

$$F_2(p_1) = \frac{1}{\sqrt{h}} \int e^{-\frac{p_1 q}{\epsilon}} F_1(q) dq \quad [11]$$

En estas expresiones se halla encerrado el principio de indeterminación. Si, por ejemplo, queremos saber con gran precisión el valor de la coordenada  $Q$ , tendremos que hacer de modo que la función  $F_1(q)$  presente un máximo muy abrupto, pero la ecuación [10] nos dice que ello no puede lograrse sin atribuir una forma conveniente a la función  $F_2(p)$ , y ocurre que, cuanto más abrupta sea la curva representativa de la primera, tanto más achatada será la correspondiente a la segunda, y recíprocamente. Cuanto más gane la precisión en la medida de una coordenada, tanto más aumenta la indeterminación del momento conjugado.

Todavía puede concretarse más el enunciado del principio de indeterminación. Si representamos por  $(\Delta p)^2$  y  $(\Delta q)^2$  los duplos de los errores medios cuadráticos, se demuestra que

$$\Delta p \Delta q \geq \frac{h}{2\pi} \quad [12]$$

Enunciado del principio de indeterminación.

y resulta así claramente que cuanto más se restrinja el intervalo  $p$  tanto más se amplía el  $q$  y recíprocamente. Podemos, pues, decir que *es imposible idear un experimento que permita simultáneamente la medida de una coordenada y de su momento conjugado sin que resulten sendas indeterminaciones que, multiplicadas entre sí, den un producto superior al cuanto de acción de Planck dividido por  $2\pi$* . En el límite, cuando llegásemos a fijar con precisión geométrica la posición de un punto, nos sería imposible saber si, si en el mismo instante, se hallaba en reposo o se movía con la velocidad de la luz.

..... *this restriction may be deduced from the principle that the processes of atomic physics can be visualized equally well in terms of waves or particles.*— N. BOHR.

Siendo el principio de indeterminación consecuencia necesaria de los postulados de la nueva mecánica, redundan, desde luego, en su apoyo todos los éxitos alcanzados por aquéllos. Sin embargo, el carácter eminentemente formal de la teoría de Heisenberg es causa, indudablemente, de que el principio de indeterminación se nos presente como un verdadero arcano, como algo ante cuya evidencia hemos de rendirnos, pero cuya razón de ser nos escapa por completo. Por esta razón, no estará de más justificar dicho principio desde otro punto de vista.

El principio de indeterminación es también consecuencia de la mecánica ondulatoria cuantista.

Hemos dicho que, además de la teoría cuantista de Heisenberg, que tiene marcado carácter corpuscular, existe otra, de naturaleza ondulatoria, cuyo punto de arranque se encuentra en los trabajos del príncipe de Broglie y a la que dió forma matemática Schrödinger. Ambas teorías pueden ya considerarse fundidas en una sola y hemos tenido ocasión en este discurso de utilizar los recursos de la segunda para desarrollar la primera. La teoría cuantista ondulatoria tiene la ventaja de que, desde su principio, es rica en interpretaciones físicas, lo cual nos facilita la adquisición de formas de pensamiento que nos permitan prever fenómenos cuando sean demasiado complicados para ser sometidos a un tratamiento matemático riguroso, al paso que con las concepciones de Heisenberg pudiéramos decir que la imaginación va a remolque del cálculo y se detiene en cuanto éste tropieza con alguna dificultad.

Toma de Broglie como punto de partida la ecuación relativista que liga la masa con la energía y, sentando además el postulado de que toda energía ha de valer un número completo de cuantos, escribe

Las ondas de De Broglie.

$$E = mc^2 = h \nu,$$

interpretando estas relaciones en el sentido de que toda masa  $m$  lleva asociado algo periódico de frecuencia  $\nu$ . Para fijar las ideas podemos suponer que hay algo en cierta extensión del espacio que rodea el corpúsculo que vibra sincrónicamente, es decir, sin diferencia de fase, en todos sus puntos. Basta suponer ahora que el corpúsculo se mueve con cierta velocidad  $v$ , llevando consigo, dicha vibración, para deducir la existencia de un movimiento ondulatorio cuya longitud de onda vale

$$\lambda = \frac{h}{m v}$$

donde  $m$  es la masa actual de la partícula, ligada con la masa en reposo  $m_0$  por la fórmula relativista

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad [13]$$

siendo  $\beta$  la relación entre la velocidad  $v$  de la partícula y la velocidad de la luz.

Velocidad de fase y velocidad de grupo.

La primera dificultad con que tropezó de Broglie al desarrollar sus ideas consistió en que la onda asociada a un electrón habría de propagarse con una velocidad

$$V = \frac{c^2}{v}$$

no sólo superior a la velocidad  $v$  del corpúsculo, sino superior también a la velocidad de la luz. Obvió este obstáculo observando, en primer término, que tal *velocidad de fase* es un concepto meramente matemático, que no corresponde a nada real y no puede usarse, por ejemplo, para transmitir señales. Supuso, además, que la onda asociada no es monocromática, sino que está formada por un *paquete de ondas* que abarca un intervalo espectral más o menos considerable. Gracias a la teoría de la dispersión de Lord Rayleigh se sabe que, en estas circunstancias, además de la mencionada velocidad de fase existe la *velocidad del grupo*, que es

aquella con que se traslada la amplitud resultante de las interferencias entre las distintas ondas que constituyen el paquete. Esta última velocidad es la que tiene importancia, pues evidentemente es la velocidad con que es transportada la energía. En el caso que nos ocupa demostró de Broglie que *la velocidad del grupo de ondas asociado a un corpúsculo coincide justamente con la velocidad  $v$  de ésta*. Se logra así una imagen mental altamente sugestiva que da cuenta del hecho singular de que una misma entidad posea la doble naturaleza de onda y de corpúsculo.

La hipótesis del paquete de ondas nos permite explicar el que el corpúsculo-onda suela presentarse como si poseyese dimensiones bien definidas. Basta, en efecto, suponer que las ondas del paquete se anulan por interferencia en todos los puntos del espacio salvo en la región en que es perceptible el corpúsculo.

Todo parece indicar que de Broglie no atribuyó sino un carácter formal a las relaciones precedentes. Sin embargo, los recientes experimentos acerca de la difracción de electrones han demostrado de modo terminante la realidad de las ondas previstas por de Broglie y han confirmado la exactitud de la notabilísima relación:

$$\textit{longitud de onda} = \textit{velocidad de la luz dividida} \\ \textit{por la cantidad de movimiento.}$$

Veamos ahora cómo del concepto de corpúsculo-onda se deduce sencillísimamente el principio de indeterminación.

Sea un paquete formado por la superposición de ondas sinusoidales planas cuyas longitudes de onda se hallan próximas a cierto valor medio  $\lambda_0$ . Si  $\Delta x$  es la longitud abarcada por el paquete, habrá en ella, en números redondos  $n = \Delta x / \lambda_0$  máximos o mínimos de la onda media; para que fuera del intervalo  $\Delta x$  se anulen por interferencia las ondas del paquete, es requisito indispensable que entre ellas haya alguna que quepa, cuando menos,  $n + 1$  veces en dicho intervalo. Esto equivale a decir que el intervalo espectral abarcado por el paquete habrá de

comprender longitudes de onda  $\lambda_0 - \Delta \lambda$ , tales que

$$\frac{\Delta x}{\lambda_0 - \Delta \lambda} \geq n + 1,$$

o bien:

$$\frac{\Delta x (\lambda_0 + \Delta \lambda)}{\lambda_0^2 - \Delta \lambda^2} \sim \frac{\Delta x}{\lambda_0} + \frac{\Delta x \cdot \Delta \lambda}{\lambda_0^2} \geq n + 1,$$

y, en virtud de que

$$n = \frac{\Delta x}{\lambda_0}$$

resulta

$$\frac{\Delta x \cdot \Delta \lambda}{\lambda_0^2} \geq 1. \quad [14]$$

Por otra parte, de la relación fundamental

$$\lambda = \frac{h}{m v}$$

se deduce que las diferentes ondas del paquete irán animadas de velocidades distintas, lo cual será causa de que éste pierda su cohesión a medida que avanza, pues

$$\Delta v = \frac{h}{m \lambda_0^2} \Delta \lambda,$$

de donde

$$\Delta p = m \Delta v = \frac{h}{\lambda_0^2} \Delta \lambda$$

y, reemplazando en [14], queda

$$\Delta x \Delta p \geq h$$

que es justamente el principio de indeterminación. El razonamiento anterior puede resumirse diciendo que, cuanto mejor queramos localizar la posición de una partícula-onda, tanto más amplio habrá de ser el intervalo espectral que lleva asociado; y como en virtud de la relación fundamental, a cada longitud de onda corresponde una velocidad distinta, tanto más grande será la incertidumbre en la medida de la cantidad de movimiento.

Esta forma de presentar el principio de indeterminación explica el dualismo onda-corpúsculo. Si las condiciones experimentales son tales que se logra localizar perfectamente la posición, la longitud de onda quedará absolutamente indeterminada y carecerá de sentido hablar de ella; si, por el contrario, disponemos las cosas de modo que quede muy restringido el intervalo espectral abarcado por el paquete, habrá gran incertidumbre en lo que a su posición se refiere y se desvanecerá uno de los rasgos que acostumbramos a considerar característico de los corpúsculos; el poder averiguar con precisión el lugar en que se encuentran.

El dualismo  
onda corpúsculo

*He that in ye mine of knowledge deepest  
diggeth, hath, like every other miner, ye least  
breathing time, and must sometimes at least  
come to terr. alt. for air.—NEWTON.*

Evidentemente, bastaría un solo experimento que permitiese averiguar *simultáneamente* la posición y la velocidad de una partícula, midiendo ambas magnitudes con una precisión superior a los límites impuestos por el principio de indeterminación para que toda la moderna teoría cuantista cayese por su base. No hay que decir que tal método de comprobación es irrealizable dada la pequeñez de  $h$ . Otro camino consistiría en someter al contraste con la experiencia cuantas consecuencias de él se deduzcan. Finalmente, podemos someter el principio en cuestión a un análisis crítico, a fin de ver si logramos descubrir alguna contradicción.

Comprobacio-  
nes experimen-  
tales.

Cuando comenzó a vulgarizarse el principio de relatividad, circularon profusamente por libros y revistas problemas en que se trataba de averiguar cómo tal observador, puesto en determinadas condiciones, apreciaría la longitud de ciertas reglas o la marcha de ciertos relojes. También ahora ponen los físicos a contribución su ingenio ideando lo que pudiéramos llamar *medidas estilizadas* que permitan descubrir algún punto flaco en el principio de indeterminación; pero éste sale siempre victorioso

si se tienen en cuenta todas las circunstancias de la medida planeada.

Paradoja de  
Heisenberg.

El mismo Heisenberg propone y discute la siguiente paradoja: El principio de indeterminación afirma la imposibilidad de la medida simultánea de la posición y de la velocidad de una partícula con grados de precisión superiores a ciertos límites. Nada impide, sin embargo, medir una de dichas magnitudes con toda la precisión deseable. Siendo esto así, podría medirse primero la velocidad y luego determinar la posición y así se habría llegado al conocimiento del valor que ambas magnitudes tienen simultáneamente en cualquier instante posterior, *ergo* el principio de indeterminación es contradictorio.

Esta interesante paradoja procede de dar como posible la existencia del que pudiéramos llamar *observador pasivo*, capaz de recoger información acerca de los hechos naturales sin influir para nada en su desenvolvimiento. Es evidente, sin embargo, que algún agente de enlace ha de haber entre el observador y el objeto observado y que, por muy sutil que sea, algo habrá de influir sobre este último. El contrasentido anterior quedará aclarado si se hace ver que no hay contradicción ninguna en la siguiente proposición.

*Conocida la velocidad (o la posición) de un corpúsculo es imposible hallar su posición (o su velocidad) sin que, al efectuar la medida, modifiquemos de modo desconocido entre ciertos límites la magnitud previamente conocida.*

Enunciado en esta forma el principio de indeterminación es ya susceptible de comprobaciones experimentales *sui generis*, que consisten no en realizar, sino en planear las medidas estilizadas a que aludíamos antes. En ellas se dan por eliminadas todas las causas de error, se utilizan mentalmente los más delicados medios de observación y se hace ver que, aun en circunstancias tan excepcionalmente favorables, nuestra información respecto del estado del sistema es tan deficiente como exige el principio de indeterminación.

Supongamos, en primer término que, mediante una medida previa hemos averiguado la cantidad de movimiento de un corpúsculo y que luego tratamos de hallar su posición. Vamos a demostrar que al efectuar la segunda medida destruimos parte de la información lograda en la primera de tal modo que nos queda, cuando menos, el grado de incertidumbre requerido por el principio de indeterminación. Utilizaremos, para ello, un aparato ideal que ha recibido el nombre de *microscopio de Heisenberg*. Si  $\epsilon$  es la abertura del cono de rayos que partiendo del corpúsculo penetra en el objetivo, se sabe por la teoría del microscopio que no es posible fijar la posición del punto objeto con un error inferior al cociente de la longitud de onda de la luz empleada por el seno de dicha abertura

Medidas de posición.

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\text{sen } \epsilon} \quad [15]$$

Pero, si la observación ha de ser posible, es preciso que, cuando menos, choque un fotón con el corpúsculo, atraviése el microscopio y llegue al ojo del observador. Interviene entonces el fenómeno de Compton en virtud del cual el corpúsculo recibe una cantidad de movimiento que vale  $h/\lambda$  (¡nuevamente la relación de De Broglie!), determinada en valor absoluto, pero cuya dirección es desconocida, ya que el fotón ha podido seguir una cualquiera de las direcciones contenidas en la abertura angular del objetivo, sin que nos sea posible distinguir unas de otras. De aquí resulta que al tratar de medir la coordenada  $x$  en la dirección normal al microscopio, modificamos la cantidad de movimiento correspondiente de tal forma que habrá una indeterminación

$$\Delta p_x = \frac{h}{\lambda} \text{sen } \epsilon \quad [16]$$

Basta ahora combinar [15] con [16] para deducir

$$\Delta x \Delta p_x \sim h$$

que es precisamente el principio de indeterminación.

He aquí otra paradoja propuesta también por Heisenberg. Hagamos incidir un chorro de electrones sobre una placa en la que hay una abertura de diámetro  $d$ . Yo podré afirmar que, en el instante en que un electrón pasa por la abertura, las coordenadas paralelas al plano de la placa son todas menores que  $d$  y, como he supuesto que la incidencia es normal, sabré también que los momentos conjugados son nulos, luego no hay indeterminación. Al razonar así no se tiene en cuenta que el electrón se difracta al atravesar la abertura y que esta difracción es causa de que sólo pueda afirmarse que se moverá dentro de un cono cuya abertura  $\alpha$ , en virtud de las leyes elementales de la difracción, es tal que

$$\text{sen } \alpha = \frac{\lambda}{d},$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda de las ondas de De Broglie. En consecuencia, la componente de la cantidad de movimiento de la que se sabía que era nula antes del paso por la abertura, queda ahora indeterminada y la incertidumbre vale

$$p \text{ sen } \alpha$$

y como  $p$ , la cantidad total de movimiento, vale  $h/\lambda$  en virtud de la relación de De Broglie, será:

$$\Delta p = \frac{h}{\lambda} \text{ sen } \alpha = \frac{h}{d}.$$

Finalmente, como la incertidumbre en la coordenada vale  $\Delta x = d$ , se tendrá:

$$\Delta x \Delta p = h.$$

Otro método para hallar la posición de un corpúsculo consiste en observar los efectos de su choque sobre una pantalla fluorescente o en determinar su trayectoria en una cámara de Wilson. En uno y otro caso la posición del corpúsculo se revela por la ionización de un átomo y la incertidumbre  $\Delta q_x$  en la posición de aquélla vendrá dada por las dimensiones de éste. Pero, a causa de la colisión, pierde el corpúsculo una cantidad de movi-

miento igual a la ganada por el electrón expulsado en la ionización. Esta ganancia será igual a la diferencia entre la cantidad de movimiento del electrón expulsado y la que tenía mientras recorría su órbita. Como no puede precisarse la fase en que se hallaba dicho electrón al ocurrir el choque, subsistirá una indeterminación  $\Delta p_x$  y ocurre también que

$$\Delta p_x \Delta q_x \geq \hbar.$$

Los ejemplos precedentes muestran cómo el principio de indeterminación se cumple en las medidas de posición. Vamos a ver que también al tratar de medir la velocidad de un corpúsculo-onda se destruye parte del conocimiento que previamente pudiera tenerse acerca de su posición y que resulta una incertidumbre de acuerdo con el principio de indeterminación. Medidas de velocidad.

Desde luego, si tratamos de medir la velocidad hallando la posición en dos instantes determinados, el principio en cuestión queda a salvo, pues ya hemos visto que no podemos efectuar la segunda observación sin alterar la velocidad que se trata de medir.

Un método directo para medir la velocidad consiste en utilizar el fenómeno de Doppler. Se ilumina el corpúsculo con luz de frecuencia  $\nu$  y se mide la frecuencia de la luz difundida. Pero esta última medida requiere utilizar un tren de ondas tanto más largo cuanto más grande sea la precisión requerida y la observación habrá de durar un tiempo finito  $T$ . Por otra parte, al alumbrar el corpúsculo con fotones cambia la velocidad y no se sabe en cuál de los instantes del intervalo  $T$  se produjo el cambio. El cálculo muestra que, en el caso más favorable, la incertidumbre es, como siempre, la exigida por el principio de indeterminación.

Un tercer método para medir la velocidad se funda en la desviación que sufre la trayectoria de un corpúsculo cargado cuando se mueve en un campo magnético. Para medir tal desviación es preciso hacer entrar el corpúsculo por una abertura

tanto más angosta cuanto mayor sea la precisión requerida. Pero entonces se difractan las ondas de De Broglie y nuevamente se llega a la tantas veces citada incertidumbre.

*Disquirenti nil perfecte notum.—VARRON.*

Electrones li-  
gados.

Tiene sumo interés el aplicar el principio de indeterminación a los electrones que forman parte de un átomo, pues ello limita *a priori* lo que podemos pretender de la física atómica y, además, pone de manifiesto que la imagen mental fundada en la existencia de órbitas no puede nunca ser comprobada experimentalmente, pasando así a la categoría de las proposiciones de las que no puede decirse si son verdaderas o falsas.

Dos caminos pueden seguirse para adquirir información del estado de movimiento de un electrón que forma parte de un átomo. El primero consiste en emplear un agente o medio de observación lo suficientemente delicado para estar seguros de que no se provoca el cambio de estado estacionario. En el segundo se opera sin restricciones de ningún género.

Al emplear el primer procedimiento renunciamos a recoger datos relativos a lo que ocurre dentro del átomo, pues si la observación ha de realizarse sin producir cambios energéticos, nada podremos averiguar y tendremos que conformarnos con la certidumbre de que el átomo se halla en un estado estacionario perfectamente determinado. Deseamos saber ahora lo que de tal certidumbre puede deducirse respecto de una coordenada  $q$  y del momento conjugado  $p$  para un electrón determinado. Supongamos que se trata del caso más sencillo, del átomo de hidrógeno. Entonces, empleando la forma dada por Sommerfeld a los postulados cuantistas, podremos afirmar que  $p$  y  $q$  están relacionados por la fórmula

$$\int p \, dq = n h$$

que, en el diagrama  $p - q$  significa que el área encerrada por la órbita es igual a  $n h$ . Como dicha área es necesariamente menor

que la del rectángulo circunscrito, ocurrirá evidentemente que

$$\Delta p \Delta q \geq n h$$

y se ve que la incertidumbre aumenta con el cuanto principal  $n$  y que, en el caso más favorable, es la impuesta por el principio de indeterminación.

Si no introducimos la condición de que subsista el estado estacionario, podremos emplear agentes de observación tan violentos que el electrón pueda ser considerado como libre y, en tal caso, de nada sirve el tener la certidumbre de que el átomo se hallaba en determinado estado estacionario, cuando se trata de averiguar el estado de movimiento de los electrones, pues precisamente para llevar a cabo este designio hemos de destruir dicho estado estacionario.

En resumen, podemos decir que *es imposible saber la fase en que se halla un electrón mientras el átomo se encuentra en determinado estado estacionario.*

Es esta ocasión de hacer ver que, a la luz del principio de indeterminación resulta claro el famoso principio de correspondencia, según el cual para grandes números cuantistas tienden a coincidir la teoría clásica y la teoría de los cuantos. En efecto, según el primero de dichos principios, las incertidumbres  $\Delta q$  y  $\Delta p$  en el conocimiento de una coordenada y del momento conjugado de un electrón han de ser tales que  $\Delta q \Delta p \geq h$ . Esto puede interpretarse diciendo que al tratar de dibujar la órbita en el diagrama  $q - p$  no podremos trazar una curva geométrica, sino un tubo cuya sección transversal valga, cuando menos,  $\Delta q \Delta p = h$ . En estas condiciones, es evidente que la palabra órbita sólo tendrá sentido cuando tal sección transversal sea pequeña en relación con el área total envuelta y esto, en virtud de la ecuación de Sommerfeld, sólo ocurre para grandes valores del cuanto total  $n$ . Si  $n$  es pequeño, el lugar de las posiciones del electrón es un espacio, relativamente considerable, que circunda el núcleo y no puede hablarse de órbitas electrónicas como algo real y observable.

El principio de correspondencia.

Imposibilidad  
de determi-  
nar las órbitas  
electrónicas.

Esta nueva consecuencia del principio de indeterminación es también susceptible de confirmación mediante experimentos estilizados análogos a los que hemos descrito antes. Supongamos que se trata de determinar la órbita de un electrón hallando sucesivamente varios de sus puntos. Como las dimensiones de un átomo, cuando se halla en su más ínfimo estado estacionario, son del orden  $10^{-8}$  cm, habremos de realizar la observación con luz cuya longitud de onda sea, cuando más, del orden  $10^{-9}$  cm, si queremos obtener resultados algo precisos. Pero basta un fotón de tal luz para expulsar el electrón de su órbita y, en consecuencia, sólo tendremos un punto de la misma. Por tanto, lo más que podremos lograr, si hacemos medidas en gran número de átomos, será el conocimiento de la *probabilidad* de que un electrón se encuentre en determinada posición. Esto, que equivale a la imposibilidad de trazar rigurosamente la órbita, se halla de acuerdo con la nueva mecánica cuantista, pues hemos visto que tal probabilidad se deduce de la teoría de transformación de matrices o bien, en la forma ondulatoria de Schrödinger, viene dada por el cuadrado  $|\phi|^2$  de la función de ondas. Resulta, pues, que aquello que puede calcular la teoría puede considerarse susceptible de medida experimental y recíprocamente.

Veamos ahora en qué sentido puede hablarse de órbitas cuando el número cuantista total  $n$  es muy elevado. Entonces, la distancia del electrón al núcleo permite usar luz de mayor longitud de onda, y la energía de cada fotón no bastará para expulsar completamente el electrón, sino en todo caso, introducirá una modificación relativamente pequeña en el cuanto total. En tal caso, además de medidas en muchos átomos, que nos darían el tubo dentro del cual se hallan las órbitas posibles, podríamos realizar muchas medidas en el mismo átomo, pero cada vez resultaría indeterminada, dentro de ciertos límites, la órbita en que quedaba el electrón después del experimento y, en consecuencia, el comportamiento ulterior del electrón sólo podría ser predicho de modo estadístico.

*Nihil novum sub sole.*

Sería salirme de mi esfera y quizás sacar las cosas de quicio, tratar de buscar la raigambre del principio de indeterminación en la escuela de los excépticos, por ejemplo. Lo que sí puedo es decir que ya Planck, mucho antes de existir la nueva mecánica, emitió conceptos en los que se halla claramente contenido el citado principio.

Planck es precursor del principio de indeterminación.

En sus *Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung*, uno de los primeros libros que leí al terminar mis estudios universitarios, representa Planck el estado de un sistema elemental en el espacio fásico de Gibbs, es decir, en un sistema de tantos ejes coordinados como variables (coordenadas y momentos) fijan el estado del sistema y sienta la hipótesis de que dicho espacio puede dividirse en las *celdillas de igual probabilidad* (*Gebiete gleicher Wahrscheinlichkeit*) que tienen tamaño finito. Considera luego un sistema complejo formado por gran número de sistemas elementales repartidos por las distintas celdillas del espacio fásico y admite que el estado macroscópico del sistema total, es decir, el conjunto de las magnitudes observables, no se altera aunque un sistema elemental se mueva de cualquier modo sin salir de su celdilla. De aquí resulta, recíprocamente, que no habrá procedimiento experimental ninguno que permita averiguar cómo se hallan los sistemas elementales dentro de sus respectivas celdillas. Podremos saber cuántos hay en cada celdilla, pero no el lugar que ocupan. Cada celdilla de igual probabilidad está como rodeada de paredes opacas que impiden ver lo que pasa dentro.

Las celdillas de igual probabilidad

Según Planck, la forma y el tamaño de cada celdilla quedan perfectamente determinadas en cada caso. En particular, si sólo se considera una coordenada  $q$  y un momento  $p$ , sus dimensiones son tales que

$$\Delta q \Delta p = h.$$

El nuevo principio de indeterminación no ha rectificado las ideas de Planck sino en un solo punto: la forma de cada celdi-

lla no es invariable, sino que depende de las condiciones experimentales. Así, puede reducirse cuanto se quiere uno de los lados del rectángulo  $q \Delta p \Delta$  con tal de alargar proporcionalmente el otro, de donde resulta que podremos precisar cuando queramos el valor de una magnitud a condición de que aumente proporcionalmente la incertidumbre de la magnitud conjugada.

Demostrada la identidad de la vieja hipótesis de Planck con el nuevo principio de indeterminación, procele recordar las razones que motivaron aquélla, pues podrán también aducirse en favor de éste.

Valor absoluto de la entropía.

La termodinámica deja completamente indeterminada una constante aditiva en el valor de la entropía de un sistema, y tal indeterminación se manifiesta de modo sensible al tratar, por ejemplo, de calcular los equilibrios químicos. El nuevo principio de Nernst viene a llenar esta laguna, pero su enunciado aparece de un modo arbitrario, sin razones intuitivas que lo hagan plausible. Por otra parte, la mecánica estadística, gracias a la célebre ecuación de Boltzmann, permitió relacionar la entropía con la probabilidad, pero dejó también indeterminada una constante de integración. La hipótesis de las celdillas finitas de igual probabilidad permite calcular tal constante, pudiéndose así hallar el valor absoluto de la entropía. De este modo, el principio de indeterminación queda entroncado con el tercer principio de termodinámica y ambos son consecuencia de las celdillas finitas de igual probabilidad postuladas por Planck.

*Nature has made our gears in such a way  
That we can never get into reverse.*

EDDINGTON.

El principio de causalidad.

Cuando la ciencia clásica daba por plenamente conocido un fenómeno, aseguraba que siempre que se reuniesen tales o cuales circunstancias se producirían necesariamente estos o los otros acontecimientos. El éxito indiscutible logrado en infinidad de casos concretos y, sobre todo, el progreso alcanzado por la téc-

nica al utilizar los resultados teóricos, han sido causa de que, por un proceso de generalización, nos hayamos familiarizado con la idea de que el universo se halla regido por el principio de causalidad: *en el orden físico y en las mismas circunstancias, las mismas causas producen los mismos efectos*. Llevando las cosas a su extremo, podríamos decir con Eddington «si tuviésemos datos completos del estado del universo durante el primer minuto del año 1600, sería un mero problema matemático el deducir cuanto ha ocurrido u ocurrirá a partir de aquella fecha. El futuro estaría determinado por el presente lo mismo que la solución de una ecuación diferencial queda fijada por las condiciones en los límites».

El principio de indeterminación destruye de raíz tan ambiciosas ilusiones. *La ciencia es incapaz de predecir con exactitud el futuro* y esto no por razón de dificultades prácticas, sino por la esencia misma de las cosas. Tan desconsoladora limitación de nuestros conocimientos queda algo amortiguada si se advierte que la ciencia puede atribuir grados determinados de probabilidad a los diferentes acontecimientos posibles y que, en ciertos casos, la probabilidad de algunos de éstos es tan considerable que equivale a la certeza. Para restablecer algo la confianza que los principios clásicos merecen cuando se aplican a sistemas macroscópicos, es decir, en los que interesan a la ingeniería por ejemplo, cabe recordar que cuando se descubrió la naturaleza estadística que debía atribuirse a los principios de termodinámica, hizo ver Boltzmann que la probabilidad de que al manejar un gas en una vasija nos encontrásemos, por ejemplo, con que todas las moléculas se habían reunido en la mitad del espacio libre y dejaban vacío el resto, era comparable a la probabilidad de todos los habitantes de una ciudad populosa se suicidasen en el mismo momento sin acuerdo previo y por causas totalmente distintas.

De todos modos, el principio de indeterminación hace perder toda significación al célebre principio de causalidad, ya que siéndonos imposible el precisar exactamente las circunstancias que concurren en un hecho cualquiera, el enunciado en cuestión

El determinismo carece de sentido científico.

contiene lo que en lógica se llama una petición de principio y pasa a la categoría de las proposiciones que el lenguaje humano es capaz de construir, sin que pueda decirse que son verdaderas o falsas.

Pasado y futuro.

Dice Heisenberg expresamente que el principio de indeterminación no se refiere al pasado y aduce, en comprobación de su aserto, que si se mide primero la velocidad de un corpúsculo y luego se determina exactamente su posición, podrán calcularse con certidumbre las posiciones que ocupaba en tiempos anteriores a la segunda medida. De ser esto cierto, la ciencia podría aspirar a reconstituir exactamente el pasado a partir de datos actuales. Sin embargo, han demostrado Einstein, Tolman y Podolsky que tal afirmación es contradictoria con el propio principio de indeterminación, pues si se pudiese averiguar exactamente el pasado de un corpúsculo se podría predecir con certidumbre el porvenir de otro, sin más que efectuar el siguiente experimento:

La paradoja de Einstein, Tolman y Podolsky.

Sea una caja provista de dos orificios *A* y *B*, que pueden taparse y destaparse simultáneamente gracias a un obturador adecuado. Dicha caja contiene corpúsculos dotados de agitación térmica. Frente al orificio *A* y a suficiente distancia para que no haya efectos gravitatorios, se instala un aparato que permita medir velocidades utilizando, por ejemplo, el fenómeno de Doppler. Delante de la otra abertura *B* hay un espejo que desvía la trayectoria de los corpúsculos que salgan por aquélla y los manda hacia un punto *O* situado en la trayectoria de los corpúsculos que salen por *A* y más allá del sitio donde se halla el aparato medidor de velocidades. Se suponen conocidas todas las distancias que intervienen en este experimento estilizado y se efectúan las operaciones siguientes:

1.<sup>a</sup> Se pesa la caja para averiguar, por diferencia, la energía de los corpúsculos.

2.<sup>a</sup> Se abre por un instante el obturador y se deja escapar una partícula por cada una de las aberturas.

3.<sup>a</sup> El observador que se halla delante de la abertura *A* mide primero la cantidad de movimiento de la primera partícula, y luego determina el instante en que pasa por el punto *O*, con lo cual podrá calcularse su energía y el instante en que salió de la caja.

4.<sup>a</sup> Se pesa otra vez la caja y, por diferencia, se deduce la energía de la segunda partícula. Como además sabemos que salió de la caja al mismo tiempo que la primera, podremos predecir el instante en que llegará a *O*, conociendo además su energía.

Como resultado de estas operaciones y de los cálculos consiguientes, llegamos a predecir exactamente un acontecimiento futuro, pues se conoce exactamente la energía de la segunda partícula y el momento en que pasará por *O*. Esto se halla en contradicción con el principio de indeterminación porque la energía y el tiempo son magnitudes de las que hemos llamado conjugadas.

Esta aparente paradoja se remedia teniendo presente que, como ocurre en el fenómeno de Doppler, *es imposible medir una velocidad sin modificar su valor* y que, si bien es posible averiguar cuánto vale antes y después del choque con el fotón, no puede precisarse el instante del choque, dato necesario para calcular el tiempo en que el corpúsculo había salido de la caja.

*La tête semblait perdre de plus en plus le gouvernement des choses. —*  
CHARLES MAURRAS.

En resumen, podremos afirmar que *la ciencia es incapaz, a partir de datos actuales, de predecir con exactitud el futuro o de reconstruir fielmente el pasado, aun en los casos más sencillos*. Cuando más, la certidumbre sólo podrá lograrse para los acontecimientos que ocurran en el tiempo comprendido entre dos órdenes de medidas, uno que nos dé las velocidades y otro que fije las coordenadas.

Llegamos con esto al final de nuestro discurso. Nos hemos

esforzado en mostrar cómo la nueva mecánica cuantista pretende construir un cuerpo irrepachable de doctrina que, partiendo de ciertos principios y mediante razonamientos que no envuelvan contradicción alguna, explique los hechos conocidos y prediga otros susceptibles de comprobación. Estos propósitos se han satisfecho ya cumplidamente, pero si se da el nombre de intuitiva a una teoría que nos permita predecir mentalmente y de modo cualitativo lo que ocurrirá en casos sencillos, es preciso reconocer que, en su estado actual, la mecánica cuantista dista mucho de merecer tal calificación. Si ello obedece a una disposición especial de nuestro cerebro que no le permite abarcar los hechos naturales si no es con auxilio de las complicadas abstracciones que tanto abundan en estas modernas teorías o si hemos de esperar que nuevos descubrimientos alumbren el fondo de la cuestión y se nos revele ésta con una claridad de que ahora carece, es asunto que el tiempo ha de resolver. Deseemos que se cumpla la segunda alternativa, la más consoladora, y terminemos recordando las palabras que el Profesor Max Planck, padre de las ideas cuantistas, escribió hace ya cerca de veinte años y que no han perdido actualidad:

*«Wer gegenwärtig der Quantenhypothese seine Kraft widmet, muss sich insweilen mit dem Bewusstsein begnügen, dass der volle Erfolg der aufgewendeten Arbeit wahrscheinlich erst einer späteren Generation zugute kommen wird.»*



DISCURSO

DEL

EXCMO. SR. D. BLAS CABRERA FELIPE

## SEÑORES ACADÉMICOS:

Estas fiestas celebradas para recibir en nuestro seno a un nuevo compañero, son siempre motivo de franca alegría, pues significan la renovación de nuestras energías vitales, que asegura el porvenir de esta casa mucho más allá de quienes hoy la ocupamos. Pero en este día, quien tiene el honor de ostentar vuestra representación, es presa de un sentimiento más íntimo y más intenso llevando de la mano hasta vosotros a un hijo espiritual, en cuya formación e historia tiene la vanidad de creerse uno de los agentes determinantes. Hace bien pocos años, si mido su número con la escala de mis recuerdos, se presentó a las puertas de mi laboratorio un adolescente aragonés, que venía a Madrid para realizar sus estudios de doctorado, una vez concluidas las licenciaturas en Ciencias exactas y físicas en la Universidad de Barcelona. Pedía tema y elementos para trabajar experimentalmente, y en su labor puso voluntad e inteligencia que permitían descubrir un futuro físico capaz de prestigiar la ciencia nacional. Poco después aspiró inútilmente a ingresar en el cuerpo de Ingenieros geógrafos, y este fracaso resolvió su porvenir. Puedo deciros que no lo sentí, aunque cuidé de no exteriorizar la intimidad de mi pensamiento. Era el egoísmo por conservar a Palacios en funciones para mí más caras. Poco tiempo después obtenía una plaza de Auxiliar en la Facultad de Ciencias, con destino a la cátedra que regentaba nuestro llorado compañero el Sr. González Martí; y no tardó mucho en conquistar, en brillantes oposiciones, la cátedra de que es hoy titular.

Para quienes sienten como único móvil de la vida la satisfac-

ción de sus intereses materiales, marca este momento el fin del duro aprendizaje, que se sustituye con actividades más descansadas y lucrativas. Palacios tuvo un sentido más noble de su misión y comprendió que el profesor español necesitaba ganar con rapidez, para su patria, el prestigio científico que corresponde a las cualidades de su pueblo y por motivos históricos diversos no podía ni casi puede aún ostentar.

Eran los días difíciles de la guerra europea, y nuestro nuevo compañero no tuvo reparo en aventurarse en un viaje no libre de peligros, para ir al Laboratorio de Kamerlingh Onnes en la Universidad de Leiden. Su aparición allí produjo en aquellos profesores impresión, de la cual tuve más tarde testimonio directo. España era entoces un paraíso de tranquilidad, envidiado por quienes tenían que sufrir las consecuencias de una situación central respecto de los países en guerra. Desde este paraíso se trasladaba Palacios a los lugares más vecinos a la hecatombe, arrastrado por aspiraciones puramente espirituales.

Allí trabajó con entusiasmo, colaborando con Kamerlingh Onnes y Crommelin en el estudio de las isoterma del helio y el hidrógeno a bajas temperaturas.

Después de dos años de permanencia en Holanda, Palacios regresó a España con el primer tren que atravesó la frontera belga después del armisticio, y se reintegró a su cátedra y al Laboratorio de Investigaciones físicas, donde tuvo que emprender nuevos caminos por carecer de material apropiado para seguir el mismo orden de experimentos en que se amestró en Leiden. Pronto obtuvo resultados de interés para la ciencia en el estudio de los meniscos del mercurio y la tensión capilar, construyendo las tablas de corrección para manómetros y barómetros de mercurio que hoy se emplean en los laboratorios más acreditados. Estudió también el flujo de los gases en tubos capilares, haciendo una aplicación interesante a la construcción de las bombas de difusión de Langmuir, modificación que más tarde e independientemente han realizado los constructores.

Con ocasión de experimentos bien conocidos de Wien para determinar la duración de luminosidad de los átomos en los rayos canales, formuló una teoría perfectamente adaptada a las exigencias de las concepciones físicas de aquellos días, que mereció el honor de ser traducida al alemán y publicada en *Annalen der Physik* por el propio Wien. También yo he sido eficazmente auxiliado por Palacios en el desarrollo de la teoría del magnetismo dentro de las concepciones clásicas, puntos de vista que separadamente aplicó al caso de un cristal aislado.

En los últimos años Palacios ha dedicado su actividad a la investigación de la estructura de la materia mediante los rayos X y los electrones, con resultados igualmente halagüeños. Pero tiene otro aspecto este momento de su actividad, que yo quiero subrayar aquí. Una de las iniciativas más simpáticas surgidas en los días en que España entera quiso rendir homenaje a nuestra más excelsa gloria científica: D. Santiago Ramón y Cajal, fué la creación de la Cátedra de Cajal, por la colonia española de la República Argentina, enardecida y guiada por el meritísimo patriota D. Avelino Gutiérrez; Cátedra destinada a iniciar en nuestra patria el cultivo de un capítulo de las ciencias matemáticas y naturales que entre nosotros tuviese poca tradición, invitando con dicho fin, temporalmente, a profesores extranjeros especialistas. La idea es notoriamente plausible, pero su realización no deja de ofrecer dificultades prácticas de monta. La primera vez que ha sido posible llevarla a la práctica, corresponde a Palacios el mérito principal. El ha puesto al servicio de esta obra todo su entusiasmo y actividad, dando la continuidad indispensable para la eficacia a una labor esencialmente discontinua. Es pronto para formular un juicio definitivo, pero desde hoy tengo la convicción de que no se repetirá muchas veces el ejemplo que Palacios ha dado, pues para ello será indispensable igualar la elevación moral que a él caracteriza.

En la vida va siempre junto a la alegría la pena, y por justa compensación la hermandad llega hasta la intensidad con que se

manifiestan. Os hablaba antes de mi satisfacción un poco interesada por apadrinar en sus nupcias académicas a Palacios. Permittedme que sea completamente sincero en la expresión de mis sentimientos y evoque también el recuerdo de quien fué nuestro compañero y ha dejado su lugar al nuevo académico: D. Ignacio González Martí.

Si considero justo reclamar un poco de paternidad en la formación espiritual de Palacios, estimo deber sagrado no menos grato el proclamarme discípulo de González Martí. También yo en una mocedad más lejana, pero no menos efectiva, llamé a las puertas de un laboratorio una veintena de años antes que lo hiciese Palacios. Estaba aquel laboratorio instalado en una mal construída barraca del viejo convento de la Trinidad, que hasta los últimos años del pasado siglo albergaba al Ministerio de Fomento. En ella pasaba toda la mañana nuestro viejo compañero, entonces Ayudante de Física de la Facultad de Ciencias. Allí dedicaba el tiempo a la realización de una serie de trabajos prácticos que no han sido aún superados en nuestra enseñanza, ni tampoco desdicen de los realizados en los Centros universitarios extranjeros que yo conozco. Pero su mérito no estaba en este paralelismo con lo que en otros lugares se hacía ya en el aquel tiempo, sino en que tales trabajos vinieron, iniciados por él, cuando faltaba totalmente la tradición. En una época en que además era moda proclamar nuestra incapacidad para la ciencia, dando la interpretación más cómoda a una realidad triste. Sin maestros que desbrozaran su camino, sin ambiente que estimulase su actividad y teniendo que atender sin recursos bastantes a sus padres y hermanos, a los cuales sacrificó todo su porvenir, con la grandiosidad moral del héroe eternamente ignorado, González Martí no ha dejado una labor científica personal que le asegure el recuerdo de algunas generaciones. Sólo perdurará su memoria mientras viva la generación que le vió en aquella barraca del convento de la Trinidad y pudo apreciar el contraste entre él y cuanto le precedió. Después, todo habrá terminado. Y este des-

pués se acerca a pasos acelerados. Más aprisa de lo que yo desearía. Por esto era menester que yo nublaste la alegría del momento con este recuerdo dedicado a mi viejo maestro. Palacios me lo perdonará, porque él sabe que no es buen padre sino quien fué buen hijo.

El discurso que habéis oído es índice justo del valer de nuestro nuevo compañero. Constituye un magistral bosquejo histórico del pensamiento físico desde que esta ciencia fué autónoma. Orientado hacia la comprensión del momento actual, de virtud creadora acaso nunca superado por la inteligencia humana. En el curso de los tiempos, nuestra ciencia ha tenido no pocos períodos de evolución rápida, seguidos de otros de ritmo más lento, generalmente aprovechados para la crítica del saber positivo ya logrado. Recordemos la publicación de los Principios de Filosofía natural de Isaac Newton; el descubrimiento del campo magnético de las corrientes y la Electrodinámica, por Ørsted y Ampère; la formulación de la Teoría ondulatoria de Fresnel; el descubrimiento de la inducción por Faraday y de la teoría electromagnética de la luz por Maxwell. Por último, el descubrimiento de la radiactividad en los años postreros del pasado siglo.

Todos estos momentos lo fueron de crisis para el pensamiento científico de la época; pero ninguno es comparable al período que se inició con el siglo actual y permanece aún abierto. Es ésta una crisis más profunda porque bordea los límites de nuestra capacidad comprensiva y en ocasiones se diría que impide la posibilidad de toda ciencia; al menos con el sentido que habitualmente atribuimos a esta forma del conocimiento.

Fueron Heisenberg y Bohr quienes con acierto genial descubrieron el postulado fundamental del nuevo modo de la teoría física: el *principio de indeterminación*, cuyo análisis ha sido el objetivo principal de Palacios en el discurso que acabáis de aplaudir. Los experimentadores nos sentimos inclinados a ver en él una simple generalización de la incertidumbre que los errores de observación producen en los resultados empíricos. Nuestro registro

de un hecho en el cuadro espacio-temporal cubre siempre un dominio finito que el perfeccionamiento técnico reduce cada día, pero sin llegar a anularlo. Sin embargo, la ciencia clásica no hallaba obstáculo de principio para imaginar un perfeccionamiento suprahumano en la observación, atribuyendo a sus resultados una precisión absoluta. Esta extrapolación de perfeccionamiento de los métodos experimentales es lo que la nueva ciencia impide al afirmar una indeterminación esencial en el conocimiento, indeterminación que las más de las veces se disimula por la más amplia incertidumbre empírica, pero en alguna ocasión llega a percibirse, al menos en sus consecuencias inmediatas.

Habréis ya visto en el discurso de nuestro compañero que la raíz de esta indeterminación está en la imposibilidad de obtener simultáneamente los valores de las parejas de variables que la Física clásica exige para la definición de cada sistema y que por ello se dicen canónicamente relacionadas: por ejemplo, una coordenada y su momento respectivo; la energía y el tiempo. La medición de una de ellas perturba a la otra al punto de que ignoramos su valor concreto dentro de un cierto intervalo definido por la teoría.

Desde el punto de vista epistemológico el postulado en cuestión significa que hemos de renunciar al principio de causalidad en las leyes de la Física; es decir, que el curso de la evolución de un sistema desde un estado que consideramos bien definido no es único. Si lo imaginamos representado por una línea, la realidad estará dada por un haz de curvas bien apretadas en el momento presente, pero que se abren a medida que avanzamos en el tiempo, dejando cada vez más borrosa la definición del porvenir. Es verdad que en todo caso la indeterminación teórica tiene importancia escasa en la práctica; pero además se puede atribuir a planteamiento incompleto del problema, pues toda observación significa la agregación de los aparatos empleados como elementos integrantes del sistema físico donde se produce el fenómeno estudiado. Sea cual fuere la delicadeza del mecanismo por el cual

se registra un fenómeno, dicho registro significa una acción sobre el aparato y por tanto éste ha de reaccionar sobre el sistema, que dejará de responder a su definición primera y modificará su evolución posterior en proporción a dicha influencia. El problema se complica notoriamente, pero no parece forzarnos a negar la posibilidad de una ciencia que responda al concepto clásico.

También es problema elaborar un algoritmo adecuado para construir una teoría que responda a las nuevas ideas, las cuales no fluyen con libertad por los cauces que ha labrado en nuestra inteligencia el viejo pensamiento. Se impone su reeducación para allanar obstáculos que, en definitiva, son fantasmas creados por los hábitos mentales. Lejos de mi ánimo el materialismo ingenuo del pasado siglo, que elevó el justo entusiasmo ante la aplicación de las leyes físico-químicas a la materia viva hasta negar toda realidad extramuros de esta ciencia. No olvido que el fino análisis histológico es incapaz de encontrar diferencias apreciables en la textura cerebral de representantes muy distanciados en la escala de la cultura. Pero sea cual fuere esta magnífica realidad que llamamos espíritu, sujeto de conocimiento que rebasa los límites de espacio y tiempo de su propia existencia, parécenos indispensable un instrumento cerebral adecuado para su actuación, de suerte que los nuevos modos de pensar requerirán un cambio paralelo de su estructura. Claro que por su finura ha de escapar a los métodos histológicos actuales, pero no olvidemos que las moléculas integrantes de la materia viva se distinguen por una riqueza prodigiosa de formas, la posibilidad de cuya investigación empieza a ser una esperanza utilizando métodos mucho más delicados que los ofrecidos por la microscopía clásica.

La realización de los cambios referidos en los mecanismos cerebrales, requiere un gasto de energía que podría explicar la inercia mental, notoria en los momentos críticos de la evolución de la Física y que tan netamente hemos sentido cuantos vivimos este período de rápida transformación.

Una de las características más señaladas de nuestra ciencia,

de la cual se hace depender con justicia su perfección lógica y su largo alcance, es la aplicación del cálculo matemático en el razonamiento. Como contrapartida en la cuenta de relaciones entre ambas disciplinas, figura la sugestión de ampliaciones sucesivas del concepto de número, indispensables para responder a la complejidad creciente de los fenómenos estudiados. Son muy escasas las magnitudes físicas estrictamente escalares; es decir, representables por los números con que opera la Aritmética. En muchos casos se añade la dirección al módulo y el cálculo algébrico ordinario debe ser reemplazado por el de vectores y tensores. Hoy nos parece evidente la necesidad, pero algunas docenas de años atrás fué novedad penosa para quienes habían rebasado el período de educación de la inteligencia, y frecuentemente se consideraba preferible disimular la naturaleza de las nuevas magnitudes, reemplazando los vectores por sus componentes. Cada una de éstas es sólo un aspecto del fenómeno, y por tanto, la noción de la realidad física no se adquiere sino por la reintegración de aquellos aspectos parciales en una unidad esencial. Así entendida la cuestión, es clara la ventaja que reporta prescindir del andamiaje que pudo facilitar la elaboración de la teoría, pero que siempre la afea, ocultando la simplicidad de su arquitectura.

La Mecánica cuantista pretende obtener ventajas del mismo género, representando cada sistema físico por un número de nuevo tipo que incluya cuanto podemos saber de él en un estado definido. Con un sentido amplio puede llamársele vector porque incluye, a modo de componentes, una serie de magnitudes que caracterizan aspectos particulares del sistema. Es interesante que estas componentes sean en número infinito, unas veces formando un conjunto numerable, pero otras cubriendo dominios donde la variación es continua. Ello depende de la clase de fenómenos de que obtenemos los datos relativos al sistema.

Por ejemplo: atendiendo a la energía, son posibles infinidad de valores de dicha magnitud, que forman un conjunto numera-

ble infinito. Cada uno corresponde a una configuración particular del sistema; pero el principio de indeterminación impide conocer para un instante dado el valor preciso de la energía, puesto que esta magnitud y el tiempo son conjugadas. Los experimentos necesarios para definir el sistema sólo suministrarán la estadística de infinitas realizaciones independientes del mismo para el instante elegido, o de la serie de valores que una de ellas toma en el curso del tiempo. En ambos casos, la estadística determinará la probabilidad atribuible a cada uno de aquellos valores particulares de la energía, o también de la configuración correspondiente, con cuyo conocimiento hemos de considerar el sistema como bien definido, puesto que es lo único que de él podemos averiguar. Así queda justificado que se consideren componentes del vector de estado las magnitudes que dan las referidas probabilidades.

Avanzando un paso más, observemos que un fenómeno físico es en último análisis una relación entre dos estados del sistema en que se produce, y, por tanto, su expresión matemática debe ser una ecuación que ligue los vectores respectivos. El caso más sencillo será una función lineal, de donde se deduce como algoritmo apropiado para los nuevos números el cálculo de matrices. Todo esto ofrece dificultades enfadosas para nuestro mecanismo mental insuficientemente preparado, pero vislumbramos claramente su origen netamente adjetivo.

El fracaso del determinismo, a que ya me he referido, y la intervención esencial de las probabilidades, plantean problemas de mayor transcendencia a la teoría del conocimiento. Las ecuaciones que permitían a la Física clásica deducir todo el porvenir de un sistema cerrado, una vez determinados los parámetros que definen el estado inicial, están reemplazadas en la nueva ciencia por otras relativas a la evolución del vector de estado, o sea de las probabilidades de cada configuración. En definitiva, se les puede dar la forma de la ecuación de propagación de ondas, con la consiguiente ventaja del empleo del análisis clá-

sico. El proceso de este importante descubrimiento, sugestivo ejemplo del modo como actúa la intuición en el progreso científico, está brillantemente expuesto en el discurso a que contesto. Sólo me permitiré algún comentario en relación con la crisis provocada por la nueva orientación.

Existe un paralelismo nunca ignorado entre las teorías corpuscular y ondulatoria. La sistematización más general de la Mecánica clásica se logró por Hamilton tratando la trayectoria de un punto al modo que se consideran los rayos de la luz en la concepción ondulatoria. Se comprende por esto mismo cómo fué posible durante mucho tiempo dudar entre la hipótesis de la emisión de Newton y las ondas de Huyghens. No se encontró razón suficiente para escoger entre ambas hasta que Young y Fresnel lograron comprobar experimentalmente la anulación de la luz por interferencias. Entonces pareció *indispensable* renunciar a las ideas de Newton, elevando las ondas a la categoría de realidad física, mientras los rayos luminosos se contrajeron a la simple función de trayectoria normal de la superficie de onda. No es comprensible que el encuentro de dos partículas que siguieron dos caminos cuyas longitudes difieren en un múltiplo impar de una cierta longitud produzca su destrucción, en tanto es forzosa la anulación de dos ondas superpuestas con una diferencia de fase de  $180^\circ$ .

Esta necesidad lleva a prever la producción de interferencias en todos los fenómenos a que alcance la teoría de las ondas de probabilidad, y en efecto, Palacios recordaba cómo la experiencia lo ha confirmado de manera concluyente. Davisson y Germer, con independencia de las concepciones teóricas que discutimos, dieron las primeras pruebas de este fenómeno, una de las manifestaciones del mayor arcano que se ofrece hoy a la inteligencia. Por muchas razones es notorio que los llamados rayos catódicos están constituidos por un enjambre de partículas que se mueven según las leyes de la Mecánica clásica, y, sin embargo, al cruzar por una abertura estrecha o bordear una pantalla, engendran fe-

nómenos de difracción, como en todos los casos donde una onda produciría interferencia, nacen también aquí las mismas anulaciones e intensificaciones de la radiación.

Ateniéndonos al sentido estricto de las ondas como expresión de la probabilidad de presencia de las partículas en un lugar definido, no hay nada incomprensible en estos hechos. Pero es difícil que un espíritu educado por la vieja ciencia renuncie sin protesta a averiguar cuál es la realidad encubierta por estas probabilidades.

La aplicación de la Mecánica estadística clásica se justificaba por nuestra limitada capacidad, en la cual no hay cabida para el juego de todos los elementos que intervienen en el fenómeno observado. Un dios a nuestra imagen y semejanza conocería con certeza, usando nuestra misma ciencia, todo el curso de los fenómenos. Para él las interferencias de los rayos corpusculares significan imposibilidad de presencia de las partículas en determinados lugares, sin que nosotros encontremos razón suficiente. En un primer momento se creyó en la posibilidad de reducir cada partícula a un grupo definido de ondas, pues estos grupos se hallan dotados de una cierta persistencia; sin embargo, una consideración más atenta de este fenómeno, evidencia que la dispersión del grupo es aún demasiado rápida para responder a las exigencias de la observación.

O nos resignamos con nuestra ignorancia, o ponemos toda la esperanza en una interpretación más satisfactoria que aún no atisbamos. En vena de descubriros la escasa fortaleza de mi espíritu, os diré que espero suene esa hora. No me resigno a aceptar un límite tan próximo a la admirable obra realizada por la inteligencia humana, elevándose desde el conocimiento rudimentario que apenas cubre las necesidades de la vida animal en los pueblos primitivos, hasta la ordenación y sistematización de los fenómenos naturales lograda por la ciencia de nuestros días, cuyos vastos dominios incluyen los detalles estructurales del núcleo atómico y el curso de la evolución del Universo.

Sostiene esta esperanza una declaración reciente de Bohr, quien considera alcanzados los límites de la mecánica cuantista por impotencia para abordar los problemas del núcleo atómico. Advierte por ello la necesidad de elaborar una tercera aproximación al conocimiento exacto de la naturaleza, claro que conservando cuanto de valor positivo contienen las dos primeras, pues como dice Palacios al comienzo del discurso que acabáis de oír, la ciencia no reniega nunca de su historia, pues «no desanda lo andado».

Hé aquí, Sres. Académicos, la obra que llama a la actividad de la nueva generación de físicos en que forma ya nuestro compañero. Las bajas naturales de nuestras filas irán seguramente cubriéndose con otros activos combatientes por la conquista del eterno ideal de la ciencia. Por mi función magistral conozco toda la capacidad de nuestra raza, y sé que su poco rendimiento en el capítulo de la Filosofía natural que me es más caro reconocer motivos puramente abjetivos. Auguro un brillante porvenir científico a nuestra patria y sus hombres.

Este juicio, que no es vano optimismo, despierta en mi ánimo una halagüeña esperanza. Que el día en que yo os abandone y cuando en sesión tan solemne como la de hoy se celebren los desposorios de mi inmediato sucesor con la Academia, aquél de vosotros que ocupe este puesto; quizá el propio Sr. Palacios, pueda contaros como nuestros hombres y él el primero, han jugado papel preeminente en la construcción de una ciencia que no tenga sólo el carácter de mayor aproximación, como Bohr vaticina, sino el de ser más definitiva que la actual.

HE DICHO.

