

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

PROBLEMAS DE VIBRACIONES
MECANICAS EN INGENIERIA

DISCURSO

LEIDO EN EL ACTO DE SU RECEPCION

POR EL

EXCMO. SR. D. FELIPE LAFITA BABÍO

Y

CONTESTACION

DEL

EXCMO. SR. D. JULIO PALACIOS MARTÍNEZ

EL DIA 29 DE MAYO DE 1963



M A D R I D

DOMICILIO DE LA ACADEMIA: VALVERDE, 22

TELEFONO 2 21-2 5-2 9

1 9 6 3

Depósito Legal M. 4.971-1968

TALLERES GRÁFICOS VDA. DE C. BERMEJO.—J. GARCÍA MORATO, 122.—MADRID

DISCURSO

DEL

EXCMO. SR. D. FELIPE LAFITA BABÍO

TEMA:

PROBLEMAS DE VIBRACIONES MECANICAS EN INGENIERIA

Excmos. Sres. Académicos:
Señoras y Señores:

En estos momentos tan solemnes para mí, me encuentro bajo la acción de tres causas emocionales superpuestas: agradecimiento, satisfacción y sentimiento.

Agradecimiento, porque entiendo que cuando se está libre de la soberbia, nadie mejor que uno puede valorar sus méritos, y creo muy sinceramente que entre mis múltiples defectos la Providencia con su indulgencia, ha querido librarme de aquélla. Por ello, no como un acto protocolario, o de falsa modestia, sino sentido de todo corazón, deseo expresar mi más sincero agradecimiento a todos los Sres. Académicos, ya que estoy seguro han estado impulsados para mi elección, mucho más por su afecto, que por mis propios merecimientos.

Se muy bien, que soy un vulgar ingeniero, que si tengo algún mérito, él no es otro, que el de poseer una verdadera obsesión por el progreso científico-técnico de nuestro país, habiendo puesto en ello todos los medios a mi alcance, negándome a admitir como dogma el mito que algunos han extendido sobre nuestra geografía, pretendiendo demostrar que los españoles somos una raza especial sin aptitudes para la investigación científica, olvidándose que aun bajo ese clima tan poco apto, han salido hombres como Peral, Cajal, Torres Quevedo, La Cierva, Terradas, Duperier, Rey Pastor, Torroja, Ochoa y otros muchos, que en las distintas ramas de la ciencia, han comprobado lo absurdo de tal pretensión. Además los que hemos tenido la suerte de haber enviado a Universidades extranjeras, con objeto de ampliar estudios, a jóvenes de distintas especialidades técnicas o universitarias, hemos comprobado, que sus calificaciones han estado siempre a la altura de los alumnos más aventajados de otros países.

Todo ello nos lleva a pensar, que tenemos un potencial científico técnico lo suficientemente elevado para poder emprender importantes labores de investigación, desterrando también la idea de que nuestra solución, es adquirir licencias de fabricación.

Hay que decir a los jóvenes, que esta política de licencias, no debe ser más que circunstancial, para un momento de atraso industrial como ahora nos encontramos, pero que su mira para el futuro debe estar en crear, para lo cual sin duda, tienen condiciones más que suficientes.

Es preciso tener presente, que lo que con tanta profusión oímos en nuestros días ¡exportar! ¡exportar! difícilmente podrá lograrse en toda su amplitud, con la política de licencias.

Mi agradecimiento es tan sincero, que deseo muy de veras tener la ocasión, y con ella la satisfacción, de ponerlo a prueba, con cualquiera de mis nuevos compañeros. Por otra parte, no creo me pueda resultar difícil hacerlo, ya que siempre he procurado en el transcurrir de mi vida, dejar tras de mí una estela de afectos y no de rencores.

Afortunadamente, no opino como Diderote, para el que el agradecimiento es una carga, y todos tienden a librarse de las cargas.

Satisfacción, no en el sentido de Horacio «Hoc erat in votis». Esto era lo que deseaba. Es decir, la satisfacción por el deseo cumplido, ya que nunca pensé pudiera ocupar un lugar en esta docta casa. Pero ya que ello ha ocurrido, mi satisfacción es grande, pues aparte de otras cosas, me lleva a una unión más íntima con aquellos de cuya amistad siempre me he honrado, y a colaborar dentro de mis posibilidades, con tan relevantes personalidades de la ciencia y de la técnica.

Sentimiento, porque si en circunstancias normales, no resulta agradable sustituir a otra persona por motivo de fallecimiento, ¿qué no me ocurrirá a mí, que no solamente sentía verdadera admiración por Eduardo Torroja, al considerarlo como uno de los hombres más capacitados, que en toda época ha dado la Técnica Nacional, sino que además me unía a él una antigua y entrañable amistad, que fue puesta de manifiesto principalmente en los últimos años de su vida, cuando por circunstancias especiales, hubiera podido aquélla ser enturbiada? Recuerdo siempre sus palabras, tú y yo hablemos de Elasticidad, que en eso estamos siempre de acuerdo.

Eduardo Torroja formaba parte de una familia digna de las mayores alabanzas, por poseer todos sus miembros, las mejores cualidades exigibles a un ser humano. Ninguna como ella, ha aportado tantos valores, y tan destacados a la ciencia y técnica nacionales. Bien puede decirse de ellos, que si uno es bueno, el que le sigue es mejor, Afortunadamente, la generación más joven conserva tan excelentes cualidades.

Desgraciadamente no soy ni mucho menos el más capacitado para enjuiciar su obra. Otros con más conocimiento de causa lo han hecho, calificándolo alguno de ellos por añadidura extranjero, como el ingeniero más grande de su tiempo.

A mi entender, era el mejor compendio de la «inspiración y la dedicación», ya que poseía esa clara intuición que Dios concede a los privilegiados, a la vez que una capacidad de trabajo sin límites, que sin duda alguna, fue la causante de que prematuramente, cuando aún podía dar días de gloria a la técnica, desapareciera físicamente de entre nosotros.

No sabía uno que admirar más en él, si su labor como ingeniero o como artista, ya que todas sus construcciones tenían un sello de su intuición estética.

Era un hombre de conocimientos universales, por lo que le resultaba angosto el horizonte nacional, y tenía constantemente que recorrer la amplia geografía de nuestro planeta, para darlos a conocer a los demás.

Su labor fue tan fecunda, que no solamente se limitó a encontrar los principios científicos básicos, para el cálculo de estructuras de hormigón armado, principalmente reticulares y laminares, sino lo aún puede tener mayor valor futuro, la creación de una escuela, en la que se da la importancia que en realidad tiene, a la introducción de la ciencia en los avances de la técnica. Los componentes del Instituto Técnico de la Construcción y del Cemento, que hoy día muy acertadamente lleva su nombre, a los que tanto quería, y a la vez era tan admirado por ellos, han adquirido sobre sí, la gran responsabilidad de continuar con todo afán su obra, y conseguir que más allá de nuestras fronteras, continúe el nombre de España en esta rama de la técnica, a la gran altura que él supo colocarlo.

Sería interminable citar el sin fin de trabajos y publicaciones a él debidas, tanto en España como en el extranjero. Únicamente me limitaré, a señalar algunas de ellas, tales como el libro «Leciones elementales de elasticidad» aparecido en 1945, modelo de síntesis didáctica, de las aplicaciones prácticas de la elasticidad, para el ingeniero constructor. Los trabajos de reología del hormigón, recogidos por M. Reiner en su libro «Building Materials: Their Elasticity and Inelasticity», así como los referentes al coeficiente de seguridad, que expuso en el Congreso de la A. I. P. C. celebrado en Lieja en el año 1948.

Era Doctor *Honoris causa* y Miembro de Honor de numerosas Universidades y Asociaciones Técnicas extranjeras.

En atención a sus extraordinarios méritos, S. E. el Jefe del Estado le concedió como homenaje póstumo, el título de Marqués de Torroja. Nunca recompensa más justamente otorgada.

Después de todo lo expuesto, creo puedo decir que el sillón de Eduardo Torroja, permanecerá científicamente vacante, por lo menos mientras sea yo quien lo ocupe.

PROBLEMAS DE VIBRACIONES MECANICAS EN INGENIERIA

GENERALIDADES

He elegido como tema de presentación en esta Academia el de «Problemas de vibraciones mecánicas en Ingeniería», que ahora únicamente expondré de un modo general, ya que aunque los hay lo suficientemente simples para ser resueltos mediante principios básicos sencillos, otros son tan sumamente complicados y áridos para los que no sientan un marcado interés por ellos, que estoy seguro, su exposición produciría el cansancio natural en este respetable auditorio.

En la publicación correspondiente se examinan algunos de aquellos de verdadera actualidad. Constituyen ellos un amplio campo de investigación para aquellos jóvenes que sientan inquietud por esta nueva rama de la ciencia.

El estudio de las vibraciones mecánicas, sólo desde hace pocos años, se encuentra dentro del curriculum de las principales universidades y escuelas tecnológicas del mundo. Sin embargo, en la Harvard Engineering School, ya en el año 1932, se inició un curso regular sobre ellas.

Puede decirse que actualmente, en todos los países, el dominio de las vibraciones, suscita la atención de numerosos técnicos.

Debemos rápidamente imitar a esos centros de enseñanza, ya que casi puede asegurarse, que los problemas estáticos están realmente superados, y que los fracasos que todavía se producen en este campo, son sin duda más debidos a faltas en la ejecución de los proyectos, que a la concepción de éstos. Sin embargo, son aún bastantes los que se originan por problemas vibratorios, debidos más que a otra cosa, a no poseer un conocimiento preciso de ellos.

El estudio de la teoría de vibraciones no puede considerarse en la actualidad como una actividad totalmente especialista, segregada de los demás problemas de un proyecto. Hoy día, para poder realizar nuevos progresos, y para mejor salvaguardia contra posibles fracasos, que normalmente dan lugar a un extraordinario tributo de vidas, tiempo y dinero, es indispensable a todo ingeniero poseer un amplio concepto por lo menos de los fundamentos de dicha teoría.

Conviene tener presente, no solamente que las vibraciones eléctricas y las mecánicas son enteramente análogas, sino que las térmicas y las acústicas, pueden tratarse de la misma manera, por lo que no puede extrañarnos que se llegue a la concepción de una teoría general de vibraciones, independientemente de la naturaleza de quien las soporta, ofreciendo aplicaciones diversas en dominios físicos, aparentemente muy diferentes.

Entre los fracasos más espectaculares de los últimos tiempos, ocasionados por fenómenos vibratorios, pueden citarse el del puente colgante de Tacoma sobre el río Narrow, en Wáshington, y el de varios aviones «Comet» de la Casa inglesa Havilland.

El primero, que dio lugar a la destrucción total del puente, después de estar en servicios varios años, se produjo ante la perplejidad de todos los técnicos. El viento que actuó sobre el puente durante una hora, lo hizo con una velocidad no muy elevada, unos 65 Km./h. Ensayos en túnel aerodinámico demostraron que el fracaso fue debido a una vibración auto excitada, observándose que existía un fenómeno de resonancia entre la frecuencia de vibración de torsión de la plataforma, que estaba constituida por una sección metálica en doble T, y la de la generación de torbellinos, en esencia calle Torbellinos del Prof. Von Karman, tan querido en nuestro país. Fue suficiente variar la sección, cambiándola por una de forma de cajón con agujeros, a fin de que pasase fácilmente el aire, y no se originasen torbellinos de mucha intensidad, para que desapareciesen todas las dificultades.

Tres aviones «Comet» de la Casa Havillands, en un espacio de tiempo muy corto, fueron aparentemente desintegrados en el aire antes de alcanzar la altura de vuelo de crucero, ocasionado la muerte de 99 pasajeros, y las tripulaciones correspondientes.

Ello dio lugar, probablemente, a la más exhaustiva y costosa serie de experiencias sobre el material y estructura de constitución de un avión.

La primera catástrofe fue atribuída a alguna condición anormal de vuelo. La segunda tampoco dió luz alguna sobre las causas del accidente. Sin embargo, se realizaron 50 modificaciones en el avión. La tercera, que se produjo en las proximidades de Nápoles, permitió recuperar el fuselaje en condiciones que condujeron a abrir el verdadero camino, a las investigaciones necesarias.

Se comprobó que estos accidentes ocurrieron en la subida, a una altura entre 9.900 metros y 11.500 metros. Precisamente bajo estas condiciones podía esperarse el fracaso del material de la cabina de pasajeros por fatiga. Como no se habían realizado pruebas de la cabina completa, se llegó a la conclusión de la necesidad de realizarlas, introduciendo el fuselaje total lleno de agua, dentro de un tanque de agua, con las alas en posición normal, sumergidas solamente en su empotramiento, haciendo que las variaciones de presión en el interior y el exterior siguieron un ciclo de sus diferencias, semejante al originado en vuelo. Se comprobó inmediatamente, la aparición de dos grietas de fatiga, una en el agujero de un remache, y otro en un ángulo de una ventanilla. Es decir, que una vibración de muy bajo período y después de muy pocos ciclos, era la causante de la rotura.

Fue suficiente cambiar el material empleado, sustituyéndolo por otro de mayor resistencia a la fatiga, y la forma de las ventanillas, para que afortunadamente no se produjeran más accidentes.

En mis comienzos como ingeniero, en el año 1926, en la Base Naval de Cádiz, tuve que construir y recepcionar un gran depósito de combustible. Para su prueba de estanqueidad lo llené de agua, sin tener la cubierta colocada. Se empezaron a notar grandes oscilaciones, e inmediatamente creyendo que ello era debido a faltarle la cubierta, ordené su vaciado. Hoy día puedo asegurar que las grandes oscilaciones eran debidas, efectivamente, a no estar colocada la cubierta, pero no por el refuerzo estructural que ella ocasionaba, sino porque en aquellos momentos había un gran viento de Levante, y éste originó una ola en la superficie del agua, cuya frecuencia debía coincidir con la de la estructura cilíndrica del depósito.

Se pueden citar infinidad de casos en la vida diaria, en los que aunque con menos espectacularidad, se producen los mismos fracasos. Pero, ¿cómo no ha de ser así, si desde que salimos de nuestras casas, en tranvías, coches, etc., estamos bajo la presencia de fenómenos vibratorios?

Algunos escritores presentan las vibraciones como detrimentales desagradables y hasta como categóricamente destructivas. Ello da lugar a que sean tomados con una actitud de aprensión fenómenos que debieran ser mirados con admiración y respecto, ya que una vez estudiados a fondo (lo que hoy se facilita por los enormes medios experimentales de que se dispone), puede cada vez con más seguridad, desecharse una comprensión imperfecta de ellos, y por tanto, se tiene la seguridad de poder encauzarlos por los derroteros deseados. Muchos de los avances en proyectos de Ingeniería durante estos últimos veinte años, han sido debidos a una apreciación apropiada de los problemas vibratorios implicados.

Es curioso observar que, mediante fenómenos vibratorios, se puede comprobar si una estructura bajo cargas estáticas, se encuentra cerca de los límites de pandeo o colapso. Es suficiente examinar su frecuencia natural de vibración; si ella es baja, están próximos los citados límite, si es alta, no.

En las dos últimas décadas, han hecho su aparición tres campos jóvenes y vigorosos: la electrónica, la aeroelasticidad y los servo mecanismos, en los que es indispensable hacer uso de la teoría vibratoria.

Los problemas vibratorios, pueden enunciarse así: Siendo dado un sistema físico susceptible de entrar en vibración, ¿cuál es su respuesta a una excitación cualquiera perfectamente conocida en función del tiempo?

Los efectos de la vibración pueden dividirse en dos grandes grupos.

- a) Efectos en la resistencia de los materiales.
- b) Efectos en el cuerpo humano.

Factor común a ambos, es que dichos efectos dependen en cierto grado, del tiempo de duración de la vibración. Es decir, que en cualquiera de los dos está implicada cierta fatiga.

a) Las vibraciones someten los materiales a esfuerzos alternativos, lo que sabemos reduce enormemente sus características físicas, al aumentar el número de ciclos. Como valores medios, para las re-

laciones entre las cargas que puede soportar un material bajo forma estática, pulsatoria (carga variando en magnitud, pero no en signo) y vibratoria, pueden aceptarse 3:2:1. Por añadidura, la vibración da lugar a la fractura del material, sin deformación alguna, y acelera la corrosión, ya que destruye la capa que la naturaleza con su sabiduría, sabe crear para proteger las superficies expuestas al aire ambiente. Ello además da lugar a puntos de concentración de esfuerzos, lo que aumenta el peligro de rotura.

En el acero afortunadamente, cuando ha sido capaz de resistir un cierto esfuerzo alternativo durante 10^6 ciclos, se admite que lo puede soportar indefinidamente. Desgraciadamente no sucede así, con las aleaciones ligeras de aluminio, lo que obliga en los aviones a que irremisiblemente se tengan que efectuar revisiones continuas, con los correspondientes cambios de material.

El máximo esfuerzo que pueden soportar alternativamente los materiales sabemos se denomina «esfuerzo límite de fatiga».

b) El cuerpo humano amortigua mucho más las vibraciones de alta frecuencia, que las de baja. Para 4 a 5 c. p. s. puede producirse la resonancia del cuerpo, siendo la amplitud de la cabeza aproximadamente un 5 por 100 mayor que la de los pies, manteniendo el cuerpo rígido.

La sensación subjetiva de incomodidad, aumenta con la frecuencia para amplitud constante.

Vibraciones de 300 c. p. s. y 0,05 mm. de amplitud, es decir, muy pronunciadas, dan lugar a una sensación de pinchazos, y al cabo de unos cinco minutos conduce a una relajación general, que en algunos casos puede llegar a ser tan pronunciada, que para cualquier movimiento, se necesita realizar el máximo esfuerzo.

Sin embargo, parece que la vibración aun después de varias horas, no ocasiona en el hombre lesión permanente.

Las vibraciones de muy alta frecuencia solamente son perceptibles a través del oído.

La pérdida de productividad es mucho mayor con ruido intermitente que con ruido constante. Así se comprueba que la productividad es mucho mayor con una intensidad de ruido de 60 dB que cuando varía de 50 a 70 dB, y aún es menor para esta intermitencia que para una constante de 70 dB.

Para ruidos con frecuencia inferior a 512 c. p. s. no se aprecian pérdidas en el rendimiento de trabajo, pero por encima de este

valor, ellas aumentan extraordinariamente con el incremento de frecuencia. T. C. Rathbone ha realizado un gran trabajo en esta materia sobre máquinas rotativas publicando un gráfico, en el que se muestra el grado de severidad, y la necesidad de corrección de la instalación, para diferentes frecuencias y amplitudes.

VIBRACIONES LATERALES.—VELOCIDAD CRÍTICAS DE EJES

Los primeros estudios sobre problemas vibratorios, en los que a diferencia de los estáticos es preciso tener en cuenta la masa de los sistemas en deformación, se hicieron como es norma corriente con carácter especulativo (vibraciones de cuerdas, membranas, etcétera), pero al producirse la revolución industrial, y con ella la necesidad de transmitir grandes velocidades, se presentó un problema hasta entonces desconocido: los ejes de transmisión, a pesar de estar perfectamente equilibrados, en algunas circunstancias, experimentaban unas oscilaciones transversales, que en muchas ocasiones daban lugar a su rotura. Fue el profesor Rankine, el primero que intentó explicar la conducta de un eje giratorio sin carga alguna, y más tarde el también Prof. Osborne Reynolds, llevó las investigaciones a un eje giratorio con cargas concentradas, pero fue en 1884 al publicar Dunkerley dos trabajos sobre el problema, cuando éste adquirió verdadero interés. De dicho estudio sacó la consecuencia que la inestabilidad de dichas oscilaciones, es decir, su movimiento divergente, se producía para ciertas velocidades críticas, que coincidían con las frecuencias naturales de vibración lateral del eje, en el supuesto de estar apoyado sobre sus cojinetes. El mismo problema se presentó en el eje «Laval», constituido por un eje con varios discos.

Fundamentaba su estudio Dunkerley, en el supuesto de que la masa desequilibrada (que prácticamente siempre existe alguna) da lugar a una fuerza de inercia, equilibrada por las fuerzas elásticas del eje.

El hecho de que la expresión que obtuvo para la amplitud de las oscilaciones, fuese igual a la de la vibración forzada de un sistema de un grado de libertad sin amortiguamiento, dió lugar a que otros investigadores, principalmente el Doctor Chréé tratase de explicar este fenómeno como un caso de vibración forzada. Fueron por úl-

timo el Prof. H. H. Jeffcott y con posterioridad Frith y Buckingham los que explicaron perfectamente el problema.

VIBRACIONES DE TORSIÓN

Más tarde, principalmente durante la primera guerra mundial, en la que el transporte por vía marítima se hizo intensísimo, se produjeron grandes fracasos, a causa de la aparición de un nuevo fenómeno vibratorio, las «vibraciones de torsión». Hoy día precisamente, ellas constituyen una de las aplicaciones más importantes de la Teoría de Vibración, ya que aparecen en un sin número de aplicaciones prácticas, relacionadas con la transmisión de potencias.

Este tipo de vibración tiene la desventaja, que así como las vibraciones laterales son denotadas fácilmente, ya que producen ruido y fuerte vibración en los cojinetes, en los que se encuentra apoyado el eje, y, por tanto, puede tratar de corregirse, él no puede observarse más que cuando se ha producido el fracaso del material.

Dichos fracasos motivaron que se iniciase un estudio a fondo de este tipo de vibración. Sin embargo, la aparición de la turbina de vapor con su par constante hizo perder importancia a este problema, principalmente en la técnica naval, que era donde la tenía mayor. Pero más tarde, con los grandes motores de combustión interna de los submarinos, así como con los motores rápidos de los dirigibles, en los que se produjeron nuevamente grandes fracasos, su estudio recobró actualidad. Hoy día puede decirse, que es un problema realmente resuelto, ya que en los millones de C. V. que se encuentran instalados en motores de combustión interna, los fracasos constituyen un porcentaje realmente insignificante

Para dicho estudio, dado lo complicado que era el sistema real, constituido por el motor con sus masas en movimiento alternativo y rotativo (émbolos, bielas y cigüeñal), el eje de transmisión, el volante y la hélice, fue necesario sustituirlo por un sistema elástico ideal», que fuera dinámicamente equivalente a aquél, sobre el que podía atacarse matemáticamente el problema. Dicho sistema, se supone constituido, bien por unas masas concentradas, unidas por ejes elásticos pero sin masa, bien por un eje elástico con masa distribuida, o aún por la combinación de ambas disposiciones.

Como consecuencia de gran número de experiencias, Carter y Ker Wilson han dado fórmulas para la determinación de la longitud de un eje de diámetro constante, equivalente dinámicamente a un cigüeñal. Igualmente, gran número de experiencias han permitido determinar, la inercia equivalente a la muñequilla del cigüeñal, y las partes del émbolo y biela afectos a ésta.

Los fracasos pueden producirse con pocas o muchas horas de funcionamiento. Probablemente en el primer caso, son debidos a que el sistema se encuentra en resonancia o muy próximo a ella. Es decir, que alguna de las frecuencias naturales del sistema, coincide con la frecuencia de alguno de los armónicos menores del par aplicado al cigüeñal. En el segundo, a que los esfuerzos vibratorios son superiores a los correspondientes al esfuerzo cortante límite de fatiga.

Primeramente, debido a que en todo sistema elástico siempre existe amortiguamiento, y que éste ejerce gran influencia sobre las amplitudes del movimiento, pero no sobre su forma (frecuencia, etcétera), se conformaban con determinar las frecuencias naturales que, como es sabido, son tantas como grados de libertad tiene el sistema, y procurar que ellas permaneciesen alejadas de la velocidad de regimen del sistema.

Para ello es suficiente establecer las ecuaciones del movimiento del sistema para la vibración libre. A este fin, sobre todo en sistemas complicados de muchos grados de libertad, es preferible hacer uso de las ecuaciones de Lagrange, a quien sin duda se debe un gran progreso de la mecánica newtoniana, al introducir en ella el análisis matemático, lo que le permitió decir:

«Los que amen el análisis verán con placer que la mecánica se reduce a una rama de aquél».

Bien es verdad, que la aplicación de dichas ecuaciones resuelve automáticamente los problemas sin necesidad de razonamiento alguno, por lo que M. Mach, en su obra «Mechanics in Development», decía: «desde el punto de vista de reducir el trabajo de pensar, las ecuaciones de Lagrange aportan una gran contribución a la ciencia de la mecánica. Naturalmente, quien únicamente se preocupe de aplicar ecuaciones, no verá muy claro el aspecto físico del movimiento real del sistema. Sinceramente entiendo, que en los problemas vibratorios esto no es muy necesario.

Para atacar matemáticamente el problema, se supone que los

pares elásticos restauradores son proporcionales al ángulo de deformación, lo que es efectivamente cierto dentro del límite elástico. El amortiguamiento se desprecia, porque como hemos indicado, casi no influye en la forma del movimiento. De acuerdo con estas suposiciones, las ecuaciones del movimiento, dan lugar a un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden sin segundo miembro (tantas como grados de libertad del sistema). En el supuesto de ser el movimiento armónico, lo que puede admitirse en la mayoría de los casos prácticos, dichas ecuaciones diferenciales se transforman en un sistema de ecuaciones algebraicas lineales homogéneas, de las cuales se obtiene la ecuación de «frecuencias naturales» de la condición que el determinante de sus coeficientes ha de ser nulo. El grado de dicha ecuación, es igual al de grados de libertad, por lo que en general es muy elevado, y por tanto implica una gran laboriosidad, lo que ha dado lugar a que se empleen para la resolución de los problemas vibratorios métodos aproximados sin relación alguna con dicha ecuación, tales como los de Holzer Lewis y Porter, Mikelestad, Ritz-Garlekin. Sin embargo, cuando los grados de libertad no son muchos, se pueden utilizar cualquiera de los métodos conocidos, tales como el de *a*) Horner, *b*) Newton, *c*) Iteración matricial, *d*) De las raíces cuadradas de Graeffe. Creo que este último es el más recomendable.

Conocidas las frecuencias naturales se obtienen la velocidades críticas o de resonancia, y se dan las instrucciones precisas para el paso rápido por dichas velocidades, a fin de que las amplitudes de la vibración no sean excesivas.

Esto no es suficiente para estar libre de fracasos, sino que es necesario examinar, si los esfuerzos alternativos a que se encuentra sometido el material, son inferiores al «límite de fatiga». Este problema, es ya mucho más complicado por la dificultad que presenta la determinación del amortiguamiento. En todo sistema elástico existe amortiguamiento, siendo su forma más corriente alguna de las siguiente: *a*) amortiguamiento viscoso (proporcional a la velocidad del movimiento relativo). Este tipo es el más fácil para realizar el estudio matemático del problema; *b*) fricción seca o de Coulomb, el cual es constante variando de signo con la velocidad; *c*) de histéresis (proporcional al área del ciclo de histéresis); *d*) electro dinámico (proporcional a la velocidad).

Otra de las dificultades era fijar en el proyecto los diversos ar-

mónicos del par, producidos por la explosión fluida en el cilindro, los que unidos a los armónicos seno del par de inercia, nos dan el par motor excitante.

Los armónicos correspondientes a la explosión fluida son de orden $\frac{1}{2}$ — 1 — $1\frac{1}{2}$, etc., en un motor de cuatro tiempos y de 1 — 2 — 3, etc, en el que los dos tiempos. Los de inercia son senos de orden 1 — 2 y 3.

Hoy día existe una gran información sobre este particular, debida a E. P. Porter (Armonic Coefficients of Engine Torque Curves), que corresponden a ocho tipos muy distintos de motor (diesel, gasolina y gas).

A pesar del avance en los métodos experimentales, no existe uniformidad de criterio entre las autoridades en la materia, sobre el amortiguamiento en los motores de combustión interna. El amortiguamiento se supone dividido en real y aparente. El real es producido como consecuencia de la transformación de energía vibratoria en calor, y el aparente es el que previene el crecimiento indefinido de las amplitudes de oscilación, evitando que se produzcan las características de la resonancia. El Mayor Carter supone que las fuerzas amortiguadoras son proporcionales a la velocidad de vibración. De este modo, obtiene para coeficiente de amortiguamiento

$$C = 20 N VI^{0.8}$$

N = número de émbolos aplicados a cada muñequilla.

V = constante que varía entre 12 y 40, según que el tipo de motor corresponda a Diesel marinos lentos, pesados o aéreos y de automóviles rápidos. I = momento de inercia de la masa equivalente a la guitarra del cigüeñal. Los valores más corrientes oscilan entre 15 y 25. Ker Wilson admite que el amortiguamiento se produce principalmente por histéresis elástica, el cual es independiente de la frecuencia de vibración y proporcional a una potencia próxima a tres del margen de esfuerzos a que se encuentra sometidos el material. El factor de proporcionalidad varía bastante con el tipo de acero considerado.

Lewis-Porter obtienen una fórmula para el amortiguamiento mas aproximada a la realidad, cuando el cigüeñal puede sustituirse mejor por un eje de masa distribuída, que por un eje con masas con-

centradas. Por último, más recientemente, el Dr. P. Draminsky ha obtenido fórmulas sencillas para el amortiguamiento en cigüeñales, según que se trate de motores marinos sin volante, o de motores terrestres con volante, las cuales son dadas en función del número de vibraciones por revolución, y en el supuesto de que el amortiguamiento por histéresis es del 0,6 por 100.

El amortiguamiento aparente es debido a que el momento de inercia de las masas alternativas no es constante durante cada revolución, sino que durante este período varía dos veces, entre cero y un máximo. Por tanto, la frecuencia natural para la resonancia no se producirá más que para una posición determinada, pero no en toda la revolución. La cíclica irregularidad de la velocidad de rotación de la muñequilla, es también otro tipo de amortiguamiento aparente. Esto ha inducido a M. J. Many a exponer una teoría según la cual demuestra que aunque no exista amortiguamiento real, siempre los hechos anteriores reducen las amplitudes dinámicas.

Conociendo el coeficiente de amortiguamiento y los armónicos del par excitante, se pueden determinar los esfuerzos para la resonancia siguiendo el método sencillo preconizado por Ker-Wilson en virtud del cual se determina el factor de ampliación dinámica (relación entre la amplitud para la resonancia y la amplitud de equilibrio), igualando las energías introducidas y disipadas por ciclo en el sistema. Conocido el esfuerzo de equilibrio lo que se logra de una manera inmediata, por ejemplo de la tabulación de Holzer, se obtiene el esfuerzo dinámico multiplicando aquél por el factor de ampliación dinámica.

El factor de ampliación dinámica depende del orden de encendido de los cilindros, así como de la disposición de cigüeñal. Por tanto, para evitar los grandes esfuerzos, disponemos además de los medios para alejarnos de la resonancia (variación de velocidades, inercias, elasticidades) de la posibilidad de variación en el orden de encendido, y en la disposición del cigüeñal. En general, puede decirse que en los motores de combustión interna, el orden de encendido está determinado por el límite de las amplitudes de las vibraciones de torsión, y por las fuerzas o pares de inercia no equilibrados.

Determinado el esfuerzo medio, correspondiente al par me-

dio, mediante las sencillas fórmulas de la teoría de torsión, será suficiente agregarle el esfuerzo vibratorio para obtener el esfuerzo total.

Es necesario tener presente, la concentración de esfuerzos originada por las variaciones bruscas de sección, agujeros, trabajos mecánicos, tratamientos térmicos, etc. La mayor fuente de error en el cálculo de cigüeñales, está constituida por los denominados «esfuerzos residuales», los cuales se producen accidental o intencionadamente durante su proceso de fabricación. Es tan difícil tener en cuenta estos errores, que en general cuando se produce el fracaso de un cigüeñal de proyecto normal, en la mayoría de los casos debería ser achacado sin duda a defectos en la fabricación, que dan lugar a esfuerzos residuales que unidos a los originados por las cargas normales exteriores, y a los factores de concentración, producen la rotura por fatiga del material. Pues bien, a pesar de ello, lo que generalmente suele hacerse es variar su geometría, es decir su forma, de tal modo que permita reducir los esfuerzos bajo las cargas exteriores, y los factores de concentración, sin pararse a pensar, sobre los esfuerzos residuales que son seguramente a los que debiera prestarse principal atención. La única disculpa para ello, es la enorme dificultad que representa su determinación; pero hoy día que sobre todo en motores de aviación, se ha llegado al máximo aprovechamiento del material, es muy difícil que por otro camino que no sea el de los esfuerzos residuales pueda evitarse el fracaso del material. Por este motivo, en la actualidad debe dedicarse a este problema la máxima atención.

Los esfuerzos residuales son siempre el resultado de tratamientos térmicos o trabajos mecánicos, siendo las causas más corrientes de su aparición accidental, el temple con calentamiento por inducción, el maquinado tosco y el rectificado. Los esfuerzos residuales son totalmente inevitables, pero ellos pueden lo mismo aumentar que disminuir la resistencia a la fatiga. Basta observar, que los únicos esfuerzos que producen la rotura por fatiga, son los de tracción, por tanto, si conseguimos por tratamientos térmicos o trabajos mecánicos apropiados, que se produzcan esfuerzos residuales de compresión en los lugares donde las cargas exteriores producen los esfuerzos máximos de tracción, habremos aumentado la resistencia a la fatiga.

Por el contrario, si los esfuerzos residuales originados, son de tracción, habremos disminuido dicha resistencia.

Conviene tener presente que cuando se produzcan esfuerzos muy grandes de este tipo, aunque resulte paradójico, ellos no son peligrosos, ya que si son superiores a la carga de rotura pueden detectarse fácilmente mediante los métodos no destructivos (magnéticos o ultrasónicos). En cambio cuando no llegan a la rotura no pueden detectarse, y unidos a los esfuerzos alternativos de tracción originados por las cargas exteriores, pueden originar el fracaso.

Conviene asimismo tener presente, que lo que ha sido norma corriente principalmente con los cigüeñales, realizar sus pruebas bajo cargas estáticas no tiene gran valor, ya que en estas condiciones no puede comprobarse la influencia de los esfuerzos residuales, puesto que si en algún punto el esfuerzo resultante es superior al límite elástico, los esfuerzos se reducen a causa de la plasticidad en la región que rodea al punto. En cambio en la realidad, cuando el cigüeñal se encuentra sometido a cargas dinámicas, la rotura se produce por fatiga sin llegar al límite elástico (por lo que los esfuerzos no pueden reducirse por la plasticidad).

Los malos efectos del rectificado pueden ser contrarrestados o aun convertidos de signo contrario mediante el «Shot peening», bombardeo con perdigones fríos, lanzados con gran velocidad sobre la superficie rectificada.

MÉTODOS EXPERIMENTALES

Como se ha indicado, los medios de experimentación en los problemas vibratorios, han realizado un progreso en estos últimos quince años realmente extraordinario. Con anterioridad se utilizaban únicamente instrumentos mecánicos, en general de mucho peso, que era imposible adaptarlos a ciertos tipos de estructuras, hélices, bielas, cigüeñales, etc. Sin embargo la aparición de la electrónica, y los nuevos sistemas constructivos de los aviones, han dado lugar a la creación de un sin fin de aparatos medidores de vibraciones, de peso reducidísimo. Los sistemas de transformación mecánico-eléctrico más corrientes pueden dividirse en:

- 1) Electrodinámico.
- 2) Electromagnéticos.

- 3) Piezo-eléctrico.
- 4) Resistencia variable.
- 5) Capacitancia variable.
- 6) Autoinductancia variable.
- 7) Acoplamiento variable (transformador diferencial).
- 8) Magneto estricción.

Los instrumentos de medida eléctrica tienen grandes ventajas sobre los mecánicos, pudiendo citarse entre ellas:

- a) Facilidad de medida a distancia.
- b) La ampliación es continuamente variable y mucho mayor que con cualquier procedimiento mecánico.
- c) Las masas de los elementos de medida son muy pequeñas, por tanto, su interacción con el elemento a probar, es muy pequeña.
- d) El margen de frecuencias que puede examinarse, es mucho más elevado.

Como desventajas pueden indicarse únicamente:

- a) Mayor complejidad del equipo, desde el punto de vista del entrenamiento del personal operador.
- b) Necesidad de una fuente de energía.

De entre todos ellos, el que probablemente es más utilizado hoy día, corresponde al tipo de resistencia variable, el denominado «strain gage» (galga de deformación) de peso reducidísimo. Está constituido por un hilo de acero finísimo, que se pega al material a examinar mediante un cemento especial, y por tanto sufre sus mismas deformaciones. Estas si son extensiones reducen la sección, y por tanto aumentan su resistencia eléctrica. Lo contrario sucede si son compresiones. Por medio de este instrumento se han podido determinar los esfuerzos en palas de hélices, bielas, cigüeñales, etc., a los que hubiera resultado imposible adaptar los mecánicos.

M. A. Prohl y F. L. Weaver, para confirmar la teoría del primero, sobre determinación de las frecuencias naturales de los peines de alabes de turbina, han empleado en vez de hilo de acero, láminas de «titanato de bario» que es mil veces más sensible que aquel a los alargamientos longitudinales. Hasta hace muy poco tiempo, se consideraba para estos fines a cada alabe, como si fuese una viga aislada, empotrada en su pie y libre en el extremo, lo cual no es cierto en la realidad, ya que cada grupo de cinco o seis alabes están unidos en sus extremos por una cinta metálica, lo que hace que la vibración sea de su conjunto.

Mediante análisis experimental, se ha comprobado, que la suposición que inicialmente se hizo, para el cálculo de las frecuencias naturales, de sustituir la masa de la hélice en una instalación aérea con hélice de madera, por un volante del mismo momento de inercia, era completamente errónea, al considerar una instalación aérea, grupo motor-hélice metálica, por ser ésta muy flexible y estar a su vez sometida a vibraciones de flexión. Esto dio lugar a la aparición del problema «vibraciones acopladas —torsión— flexión, cuyo análisis matemático es extremadamente complicado, y únicamente puede atacarse sustituyendo la hélice por una viga supuesta de sección rectangular constante. Sin embargo, los métodos experimentales, resuelven el problema con relativa sencillez.

El Capitán J. Morris B. A., realizó un estudio teórico sobre un grupo moto propulsor elegido, teniendo en cuenta el acoplamiento de las vibraciones de flexión y torsión, determinando que la resonancia debía producirse a 2.600 r. p. m. Sin embargo en el supuesto, hasta entonces admitido, de sustituir la hélice por un volante rígido de la misma inercia, dicha resonancia debía producirse a 1.050 r. p. m. Las pruebas experimentales determinaron para ella el valor de 2.400 r. p. m.

MÁQUINAS DIGITALES Y CALCULADORES ANALÓGICOS

A pesar de los enormes progresos realizados, en los problemas de vibraciones torsionales, de tal modo que hoy pueden resolverse los que aún no hace mucho eran completamente impenetrables, siguen existiendo sin embargo, como ya hemos indicado anteriormente, dos grandes dificultades.

a) La determinación de los datos físicos, es decir, las inercias y elasticidades del sistema elástico ideal equivalente, así como la magnitud de las fuerzas excitantes y amortiguadoras, para su introducción en las ecuaciones matemáticas, que han de resolver el problema, ya que a pesar de que cada día aumenta la profusión de datos experimentales, todavía todo depende en una gran extensión de la experiencia y juicio del proyectista.

b) La gran cantidad precisa de cálculos, los cuales implican métodos de aproximaciones sucesivas, guiados por la consigna, «cuanto mayor es el trabajo, mayor es la exactitud».

Dichos cálculos han sido afortunadamente apreciablemente aligerados mediante el desarrollo de procedimientos matemáticos mejores, apoyados además en el empleo de máquinas calculadoras digitales y calculadores analógicos.

Aún con estos avances, cuando se trata de sistemas complicados, tales como los engranados con varios ejes o de motor-hélice aérea, con vibraciones acopladas flexión-torsión, era tendencia general hacer el estudio matemático sobre un sistema equivalente sencillo, dejando la solución definitiva para ser obtenida por vía experimental. En general, como los cálculos resultaban muy costosos en tiempo y dinero, existía la tendencia natural a adoptar el primer resultado aceptable, que se obtuviera con el prototipo, aunque desde el punto de vista del rendimiento funcional y del económico, no fuera la mejor solución.

Por otra parte la mejor solución, es siempre el resultado de un compromiso entre un cierto número de requerimientos encontrados, y por tanto no puede ser fijada, más que después de un gran número de tanteos. Así por ejemplo, en un motor policilindro de combustión interna, el orden de encendido se obtiene de un compromiso, entre la necesidad de que las amplitudes de la vibración de torsión no sean muy elevadas, y de que las fuerzas o pares de inercia, de los elementos del motor en rotación o movimiento alternativo, no sean excesivos.

Como el cigüeñal es el elemento principal de un motor, el orden de encendido hay que fijarlo primeramente en la etapa de proyecto.

Pues bien, en la actualidad las máquinas digitales con sus posibilidades de cálculos masivos extremadamente rápidos, dan la solución para escapar de esa situación tan poco satisfactoria.

Es también de gran aplicación, para el estudio de fenómenos vibratorios, el empleo de las analogías. Estas fueron definidas por Maxwell, no como la semejanza entre fenómenos físicos, sino como la igualdad de las expresiones matemáticas que los definen.

Por tanto, cualquier fenómeno regido por una ecuación diferencial lineal de segundo orden, constituirá una analogía de un sistema vibratorio con un grado de libertad.

Basándonos en esta analogía, podemos reemplazar un sistema vibratorio mecánico por otro eléctrico, en el cual es mucho más fácil, obtener resultados experimentales.

Existen dos tipos de analogía eléctricas denominadas a) antigua y b) moderna.

La antigua, se obtiene de comparar la ecuación del movimiento de un sistema mecánico de un grado de libertad, constituido por una masa a la que se aplica una fuerza armónica, un muelle y un amortiguador, estos en paralelo unidos a una base fija, y la de la carga de corriente de un circuito en serie constituido por, una fuente de energía electromotriz, una capacitancia, una autoinductancia y una resistencia.

Dichas ecuaciones son idénticas, sin más que sustituir los elementos del sistema mecánico, desplazamiento, masa, velocidad, rigidez del muelle, coeficiente de amortiguamiento y amplitud de la fuerza excitante, por la carga del condensador, el coeficiente de autoinducción, la intensidad de la corriente, la inversa de la capacitancia, la resistencia y la amplitud de la fuerza electromotriz respectivamente.

Esta analogía presenta el inconveniente, aunque éste no sea realmente trascendente, de sustituir un sistema mecánico en paralelo, por un sistema eléctrico en serie.

La nueva analogía sustituye un sistema mecánico en serie por un sistema eléctrico en serie. Esta analogía debida a F. A. Firestone, consiste en establecer en vez de una ecuación de fuerzas, que es lo que ocurre con la ecuación del movimiento de un sistema mecánico, una ecuación de velocidades. La velocidad total en el extremo del muelle, de un sistema mecánico constituido por una masa, un amortiguador y un muelle en serie, es la suma vectorial, de las velocidades en cada uno de los elementos.

En estas condiciones, la ecuación de la carga del circuito eléctrico, es igual a una ecuación en el sistema mecánico, en el que la variable es la impulsión de la fuerza excitante, sin más que sustituir la masa, la velocidad, la fuerza impulsante y el impulso del sistema mecánico, por la capacitancia, la inversa de la resistencia, la inversa de la auto-inductancia, la fuerza electromotriz, la intensidad y la carga respectivamente.

Ahora bien, la verdadera analogía, se obtendrá mediante un modelo eléctrico, exactamente del mismo modo que ocurre en otros campos de la ingeniería, tales como en la Mecánica de Fluidos, y en la Resistencia de Materiales para la determinación de los esfuerzos. Como en estos casos, será preciso que en el modelo eléctrico y en el sistema mecánico se conserven ciertos números adimensionales.

Para determinar estos números adimensionales pueden seguirse dos caminos: a) El análisis dimensional; b) El cambio de variable en las ecuaciones diferenciales.

Para hacer uso del análisis dimensional, se anotan primeramente los factores físicos o cantidades dimensionales fundamentales, que entran en el problema, de acuerdo con las ecuaciones del movimiento del sistema considerado, afectándolas de las dimensiones de cada una de ellas. Se hace aplicación del teorema π desarrollado por Buckingham, tan magníficamente expuesto por el Profesor Palacios en su Análisis Dimensional. En virtud de él, si n es el número de dichos factores físicos, y p el de las dimensiones fundamentalmente implicadas ($n - p$) es el número de parámetros o funciones adimensionales que intervienen en la resolución del problema.

En un sistema con un grado de libertad, entran tres unidades fundamentales $F =$ fuerza en Kgs.; $L =$ longitud en cms.; $T =$ tiempo en segundos, y como factores físicos principales, la masa, la rigidez del muelle, el coeficiente de amortiguamiento, la frecuencia natural circular, la frecuencia forzada, la amplitud de la fuerza excitante y el desplazamiento.

Lo que da como número de funciones o parámetros adimensionales $7 - 3 = 4$.

Para determinar éstos, se eligen tres factores físicos, que contengan las variables implicadas, afectándolas de unos exponentes desconocidos, los cuales constituyen un grupo y se forman los cuatro grupos correspondientes a los parámetros adimensionales indicados, agregando a cada uno de dichos factores, cada uno de los cuatro factores físicos restantes. Como los cuatro grupos han de ser adimensionales, es preciso que los exponentes de las unidades fundamentales se anulen, lo que nos da los valores de dichos coeficientes. Con ellos determinamos dichos grupos, en el sistema mecánico, y para obtenerlos en el sistema eléctrico, es suficiente hacer las sustituciones indicadas en las analogías.

Empleando la sustitución de variables en las ecuaciones diferenciales, es suficiente elegir las nuevas, de modo que los nuevos coeficientes de las ecuaciones sean adimensionales.

Al tratar de analogías, no pueden dejar de citarse los calculadores analógicos, ya que constituyen uno de los medios más eficaces para el estudio de vibraciones mecánicas, por lo que se han extendido universalmente con gran rapidez.

Con ellos se han logrado grandes avances. Básicamente los empleados para estos fines están constituidos por la conexión en diversas disposiciones, de varios amplificadores de alta relación, y elementos electrónicos y electromecánicos.

MÉTODOS ALGEBRAICOS

Recientemente, con el fin de sustituir las ecuaciones diferenciales del movimiento por relaciones algebraicas, en el supuesto de movimientos armónicos, se han desarrollado por diversos autores, nuevos métodos para el estudio de fenómenos vibratorios.

Por otra parte, los sistemas con amortiguamiento, que presentan ciertas dificultades para su resolución, mediante el método clásico de las ecuaciones diferenciales, dejan de tenerlas con estos nuevos métodos.

Entre ellos los más extendidos son a) de la impedancia mecánica, b) de la movilidad.

a) *Impedancia mecánica.*—La notación compleja, nos lleva en la ecuación del movimiento, a la noción de la impedancia mecánica, relación de la amplitud de la fuerza a la del desplazamiento, y a la de impedancia de la masa, muelle y amortiguador.

Por tanto multiplicando en cada elemento (masa, muelle y amortiguador) su impedancia mecánica por el desplazamiento nos da la fuerza en dichos elementos, cuya suma igualada a la amplitud de la fuerza exterior, nos da la ecuación del movimiento bajo forma algebraica.

b) *La movilidad.*—Hansen y Chanea definen la movilidad de cualquier elemento (masa, muelle o amortiguador) como la relación entre la unidad y la amplitud del desplazamiento de cada elemento bajo una carga unidad. Es decir, como un caso particular de la impedancia mecánica, en el que la fuerza aplicada es la unidad. Estos métodos tienen gran utilidad en un problema de gran interés práctico, la transmisibilidad y aislamiento de vibraciones».

TRANSMISIBILIDAD Y AISLAMIENTO DE VIBRACIONES

Son innumerables los casos en los que se producen vibraciones forzadas, tales como masas no equilibradas en máquinas rotativas

o pares periódicos en motores de combustión o eléctricos, que se encuentran instalados en lugares donde producen molestias a las personas (hospitales, casas de vecindad, talleres, buques, aviones, etcétera), perturbaciones en otras máquinas o instrumentos de precisión instalados en sus proximidades.

Puede también suceder que alguna estructura, tal por ejemplo, una viga metálica, que soporte dichas máquinas entre en resonancia, en cuyo caso los efectos perturbadores aumentan extraordinariamente.

También se producen vibraciones libres muy peligrosas. Ellas son debidas a la aplicación brusca de una fuerza, o al cambio repentino de la dirección o amplitud de la velocidad, por lo que constituyen un estado transitorio.

Este problema ha adquirido extraordinaria actualidad, sobre todo desde el punto de vista militar, no solamente por la necesidad de transportar aparatos electrónicos, muy sensibles a las vibraciones, con peligro de caídas, etc., sino aun más por el efecto de explosiones próximas, cargas de profundidad en los submarinos, o aún simplemente en buques y aviones por la variación de su velocidad a causa de disparos de sus propios cañones.

En el transporte por avión se producen grandes choques en el despegue y aterrizaje.

Hoy día existen laboratorios especiales para el estudio de estos problemas.

Para este fin, probablemente mejor que el camino de la integral de Duhamel o la integración gráfica de Lamoen es el empleo del cálculo operacional de Heaviside, que reduce la resolución de ecuaciones diferenciales a operaciones algebraicas, o la transformada de Laplace.

Como saben, Heaviside fue más un ingeniero que un matemático, por ello se limitó a comprobar que su método daba perfectos resultados, más que a tratar de demostrarlos matemáticamente. Fueron Bromwich utilizando las funciones de variable compleja y Carson por medio de las ecuaciones integrales, los que lo hicieron de un modo riguroso. Ello motivó ciertas críticas, que por las mismas causas y hacia otros autores, aún no se han extinguido. Así, algunos ingenieros han realizado publicaciones haciendo una exposición del cálculo operacional, que suponen apropiada a sus necesidades. Pues bien, los matemáticos Carlaw y Jaeger en su «Operational Methods in Applied Mathematics Oxford University —Press New York 1945,

dicen que dicha exposición no es satisfactoria, ya que omiten demostraciones correctas, y extienden por analogía resultados de un caso particular, a otro general.

Entiendo que desde el punto de vista del ingeniero, efectivamente es necesario un cierto grado de competencia en el análisis matemático, pero es muy difícil llegar a tener rápidamente un conocimiento completo de todas las pruebas y teoremas. Si así fuera, serían matemáticos y no ingenieros. De mismo modo que los hombres aprenden a contar sin tener conocimiento de la teoría de los números, podemos admitir que algo se puede hacer con los métodos operacionales, sin una comprensión completa de su teoría.

SITUACIÓN ACTUAL

Hoy día, son numerosísimos los problemas que considerados como vibraciones lineales pueden resolver, tanto teórica como experimentalmente. Sin embargo, son extraordinarias las dificultades que presenta la resolución de los casos de vibraciones auto-excitadas y no lineales.

Las vibraciones auto-excitadas, conocidas por sus efectos desde hace muchísimo tiempo (el arpa eólica y la cuerda de violín excitada por el arco, son un ejemplo de ellas), no han sido comprendidas hasta fecha muy reciente.

Hoy día, en instalaciones eléctricas, mecánicas, aeronáuticas, y estructuras normales de construcción se presentan este tipo de vibraciones. En la ingeniería electrónica y en la del sonido, son utilizadas deliberadamente. En cambio, en otras ramas de la ingeniería, como hemos visto, al referirnos al puente de Tacoma, así como en los aviones en los que se denominan flameo, son totalmente indeseables, ya que pueden dar lugar a hechos catastróficos.

Están caracterizadas por el hecho de ser la posición de reposo una situación de inestabilidad, ya que para velocidades pequeñas las amplitudes son grandes, sucediendo lo contrario cuando aquéllas aumentan.

Quizá la forma más seria de vibración es la autoexcitada, ya que por lo que acabamos de indicar, si por cualquier causa se separa el sistema de su posición de reposo, entran en juego fuerzas o pares

de una fuente exterior que acentúan el movimiento. Así se da el caso de que la fricción que normalmente es un agente amortiguador, puede por el contrario, transformarse en excitador, introduciendo energía en el sistema. No hace mucho se produjo este fenómeno en un puente levadizo, originando la rotura de una de las columnas soporte de la mitad de la plataforma giratoria.

A primera vista son muy parecidas una vibración autoexcitada y una forzada en resonancia, sin embargo, no deben confundirse. La autoexcitada es una vibración autónoma o autogobernada, obteniendo la energía necesaria de una fuente exterior originada a causa de su propio movimiento. En cambio, la forzada está caracterizada por la existencia de una fuente de energía externa alternativa. Por ello, en este caso, la frecuencia de la vibración es la de la fuente exterior, en cambio, en el primero no depende para nada de aquella fuente, sino que aproximadamente corresponde a la vibración natural del sistema.

Matemáticamente en el supuesto de linealidad, en la vibración forzada únicamente pueden tomar valores infinitos las amplitudes si no existe amortiguamiento, y ello para ciertos valores de la frecuencia excitante. En cambio, en la autoexcitada pueden adquirirlo aunque exista amortiguamiento, y para una gama continua de valores del parámetro que caracteriza la acción de la fuente de energía.

Tanto en el ámbito de las vibraciones autoexcitadas como en el de las no lineales existe un enorme campo para la investigación, y sin duda alguna aquellos que sientan vocación por ella, serán fuertemente atraídos por esta rama de la ciencia.

Una vez hecha una exposición general sobre problemas vibratorios realizada como he indicado anteriormente, con el fin de no cansar a este respetable auditorio, lo que dudo haber conseguido, como sería dar demasiada dimensión a este trabajo ocupándome, aunque no fuera más que de una manera sucinta, de los problemas posibles de investigación sobre aquellas materias, a continuación únicamente se han impreso algunos sobre vibraciones no lineales.

VIBRACIONES NO LINEALES

Generalidades

En la exposición general anterior se ha supuesto que la masa permanece constante, que la fuerza restauradora es proporcional al desplazamiento, la de amortiguamiento lo es a la velocidad, y la fuerza excitante es independiente del desplazamiento de la velocidad y de la aceleración. Es decir, que los coeficientes de la ecuación diferencial del movimiento en el caso de un sistema de un grado de libertad, que es al que únicamente nos vamos a referir, son constantes. Ello puede considerarse se verifica muy aproximadamente en muchos problemas prácticos. Tal suposición simplifica aquéllos. Sin embargo, se ha comprobado que en la práctica aparecen otros muchos problemas en que esto no ocurre, por lo que dicha ecuación deja de ser lineal, y las vibraciones correspondientes se denominan no lineales

En los últimos años se han realizado grandes progresos en problemas no lineales, correspondientes a la mecánica de fluidos y a la plasticidad. La fuente matemática, para este fin, ha salido de los trabajos de Poincaré, y los problemas físicos básicos de Raileigh, Van der Pol y Duffing.

Recientemente en Rusia diversos autores, entre ellos N. Minorokryloff, Bogolinhoff-Andronow y Caikin, han realizado numerosos trabajos sobre este problema.

En el campo occidental, probablemente la mejor publicación, es la debida a J. J. Stoker «Non linear Vibrations» Interscience Publishers I. N. C. New-York.

Existen también problemas en los que los coeficientes no son constantes, sino funciones del tiempo. En estas condiciones, las ecuaciones siguen siendo lineales, pero su resolución se complica extraordinariamente. En el caso particular de ser dichas funciones periódicas existe una teoría completa, que por otra parte tiene gran importancia para la estabilidad de las soluciones periódicas de sistemas no lineales.

El problema que nos ocupa es extremadamente complicado, de tal modo que sólo se han realizado algunos estudios sobre sistemas

con un solo grado de libertad, en general mediante métodos aproximados, y ello reducidos únicamente a algunos casos especiales.

Los más corrientes en la práctica se producen como consecuencia de que la fuerza restauradora y la de amortiguamiento del muelle, no son proporcionales al desplazamiento y velocidad respectivamente.

Sin embargo, también pueden considerarse los casos de la «masa relativista» y de fuerza excitante, función de desplazamiento.

Como acabamos de indicar, es corriente que la fuerza restauradora no sea proporcional al desplazamiento, ya que ello puede ocu-

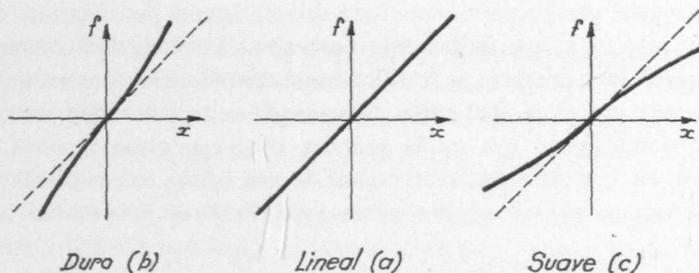


Fig. 1.

rrir bien: a) porque las amplitudes de las oscilaciones sean suficientemente grandes. Así la conducta de materiales, tales como el acero, cuando son llevados por encima del límite elástico, hacen al sistema no lineal, además de introducir un elemento friccional, debido al trabajo de histéresis.

En cambio, por debajo del límite elástico, es decir, para desplazamientos normales, el diagrama cargas/alargamientos es el indicado en la figura 1 (a), y por tanto, el sistema es lineal. En este caso, la frecuencia natural del sistema es independiente de la amplitud de la vibración.

Con materiales orgánicos tales como el caucho, fieltro y corcho, tan empleados como aislantes de vibraciones, y aun también para acomplamientos elásticos, por el hecho de que su módulo de elasticidad aumenta con la carga, el citado diagrama toma la forma indicada en la figura 1 (b). A los muelles de este tipo se denominan «muelles duros», en ellos la rigidez aumenta con la deflexión, y por tanto, lo mismo ocurrirá a su frecuencia natural.

En otros materiales, tales como el hormigón y la fundición, el diagrama toma la forma de la figura 1 (c). Por tanto, la rigidez disminuye con la amplitud, y lo mismo sucede a la frecuencia natural del sistema. Estos se denominan «muelles suaves».

La variación de frecuencia natural indicada, ejerce un efecto favorable, ya que ella puede ser muy grande para una pequeña variación de amplitud, y por tanto reducir el pernicioso efecto de la resonancia, ya que si debido a esta se produce un aumento en la amplitud, la frecuencia de resonancia aumenta o disminuye mucho más.

También puede producirse la falta de linealidad, a causa de la geometría del sistema. Tal sucede, por ejemplo, en el péndulo matemático, en el que por ser grandes las amplitudes, la fuerza restauradora, es proporcional al seno de la amplitud, en vez de a ésta. En este caso, el efecto amortiguador proviene del rozamiento del péndulo en el aire que le rodea, el cual puede considerarse proporcional a la potencia enésima de la velocidad. La fuerza restauradora aumenta menos deprisa que la amplitud, es decir, el péndulo es semejante a un muelle suave.

Se producen otros casos de fuerzas restauradoras no lineales, con muelles cuyas características elásticas varían con la amplitud, pero no como consecuencia de la deformación del muelle, como en los casos anteriores, sino a causa de elementos externos, tal sucede con los muelles de las figuras 2.

En la figura 2 (a) el muelle con holgura a no entra en acción hasta que la masa m se haya separado de su posición de equilibrio la cantidad a . Por tanto, de 0 a a la fuerza restauradora es nula, y a partir de esta posición kx . Esta configuración puede presentarse en la práctica por holgura de cojinetes, o por equipos montados en aislantes como deficiente fijación a sus bases rígidas, y en estructuras mecánicas con deficiencias en el remachado.

En la figura 2 (b) el muelle se encuentra con una tensión inicial, y en la figura 2 (c) uno de los muelles entra en acción al sufrir cualquier desplazamiento la masa, pero el otro no lo hace, hasta que sea superior a la distancia a . Este sistema se denomina bilineal.

A continuación vamos a resolver algunos problemas de vibraciones libres y forzadas no lineales, pero antes conviene indicar que un método gráfico general, muy útil principalmente para el estudio de la vibración libre en sistemas con un grado cualquiera de no linea-

lidad, y en especial para el estudio de fenómenos transitorios, es el denominado plano-fase-delta, por lo que vamos primeramente a exponerlo.

Es un método aproximado, que en muchos casos da resultados prácticos más que suficientes.

Sea la ecuación

$$m \ddot{x} + f(x, \dot{x}, t) = 0 \quad (1)$$

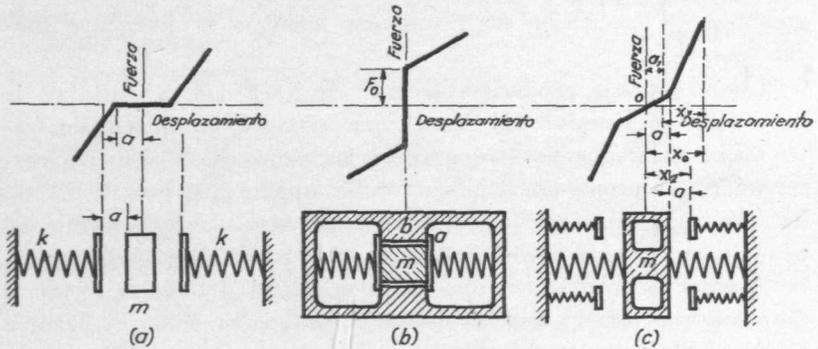


Fig. 2.

Si sumamos y restamos un término lineal $k x$ tenemos

$$m \ddot{x} + f(x, \dot{x}, t) + k x - k x = 0 \quad (2)$$

Si designamos por

$$f' = f(x, \dot{x}, t) - k x$$

(2) puede ponerse en la forma

$$m \ddot{x} + f'(x, \dot{x}, t) + k x = 0 \quad (3)$$

o también

$$\ddot{x} + \frac{1}{m} f'(x, \dot{x}, t) + w_n^2 x = 0 \quad (4)$$

siendo

$$w_n^2 = \frac{k}{m} = \text{frecuencia natural del sistema lineal.}$$

La ecuación (4) puede ponerse en la forma

$$\ddot{x} + w_n^2 (x + \Delta) = 0 \quad (5)$$

con

$$\Delta = \frac{1}{k} f'(x, \dot{x}, t) \quad (6)$$

La ecuación (5) se dice está puesta en forma «delta».

Las dimensiones de Δ son las mismas de x .

La significación geométrica de (5) en el plano fase (x, v) puede obtenerse fácilmente, ya que las nuevas coordenadas son

$$x = x \quad y \quad v = \frac{\dot{x}}{w_n} \quad (7)$$

de (7)

$$\dot{x} = w_n \frac{dv}{dt} = w_n \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = w_n \frac{dv}{dx} \dot{x} = w_n^2 v \frac{dv}{dx} \quad (8)$$

Por tanto, la ecuación diferencial de segundo orden de (5) se transforma en la ecuación diferencial de primer orden

$$v \frac{dv}{dx} + x \Delta = 0 \quad (9)$$

que nos da la siguiente relación geométrica:

$$\frac{dx}{dv} = \frac{-v}{x + \Delta} \quad (10)$$

Δ puede representarse a lo largo del eje x en el plano-fase $\left(x - \frac{\dot{x}}{w}\right)$ (fig. 3).

Si suponemos que P es un punto representativo de la curva solución de (10), y que el punto Q establece la localización correspondiente al valor de Δ , la inclinación de la línea P Q es

$$\text{inclinación de P Q} = \frac{x + \Delta}{v}$$

Por tanto, la ecuación de la normal a PQ , pasando por P , será idéntica a la (10).

Si suponemos que para un pequeño intervalo de tiempo δt , Δ permanece constante, puede hacerse la integración de (10), lo que nos da

$$(x + \Delta)^2 + v^2 = c^2 = (QP)^2 \quad (11)$$

ecuación de una circunferencia de radio QP , y centro en Q .

Por tanto, la curva de la trayectoria en el intervalo de tiempo δt es un arco de circunferencia pasando por P y con centro en $Q = -\Delta$.

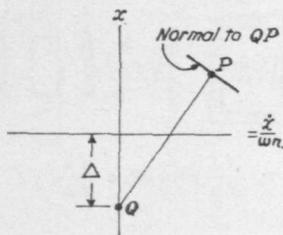


Fig. 3.

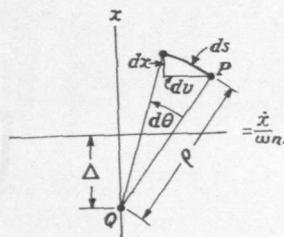


Fig. 4.

Para determinar la amplitud del arco correspondiente al tiempo elemental δt , observemos que

$$dt = \frac{dx}{\dot{p}v}$$

De la figura 4

$$d\theta = \frac{ds}{\dot{p}} = \frac{dx^2 + dv^2}{v^2 + (x + \Delta)^2} = \frac{1 + (dv/dx)^2}{1 + (x + \Delta)^2/v^2} \frac{dx}{v} = \frac{dx}{v} \quad (12)$$

luego

$$dt = \frac{d\theta}{\dot{p}} \quad (13)$$

y por tanto

$$t_1 - t_0 = \frac{1}{\dot{p}} (\theta_1 - \theta_0) \quad (14)$$

Ecuación que nos da la relación entre el incremento de tiempo δt y el desplazamiento angular. De ella se desprende, que el tiempo positivo es proporcional a la rotación en sentido sinestrosu.

Para ilustración del método indicado, examinemos el contactor vibrador de la figura 5, en el que entre la masa y el muelle k_2 existe una luz a .

$$\text{Si } x - S_0 > a \quad c = c_1 \quad k = k_1 + k_2$$

$$\text{Si } x - S_0 < a \quad c = 0 \quad k = k_1$$

La ecuación diferencial del movimiento en el primer caso es:

$$m \ddot{x} + k_1 x = k_1 S_0 \quad (15)$$

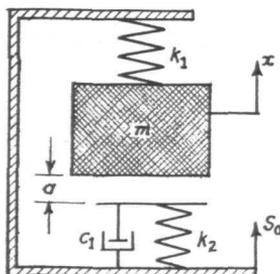


Fig. 5.

que en forma delta se convierte en

$$\ddot{x} + p_1^2 (x + \Delta_1) = 0 \quad (16)$$

siendo

$$p_1^2 = \frac{k_1}{m} \Delta_1 = -S_0$$

La correspondiente al segundo caso es

$$m \ddot{x} + c_1 (\dot{x} - S_0) + (k_1 + k_2) (x - S_0) = 0 \quad (17)$$

que en forma delta se convierte en

$$\ddot{x} + p_2^2 (x + \Delta_2) = 0 \quad (18)$$

con

$$p_2^2 = \frac{k_1 + k_2}{m} \quad \text{y} \quad \Delta_2 = (2b/p_2^2) \dot{x} - (2b/p_2) S_0 - S_0$$

$$b = \text{relación de amortiguamiento viscoso} = \frac{c_1}{2m\omega_n}$$

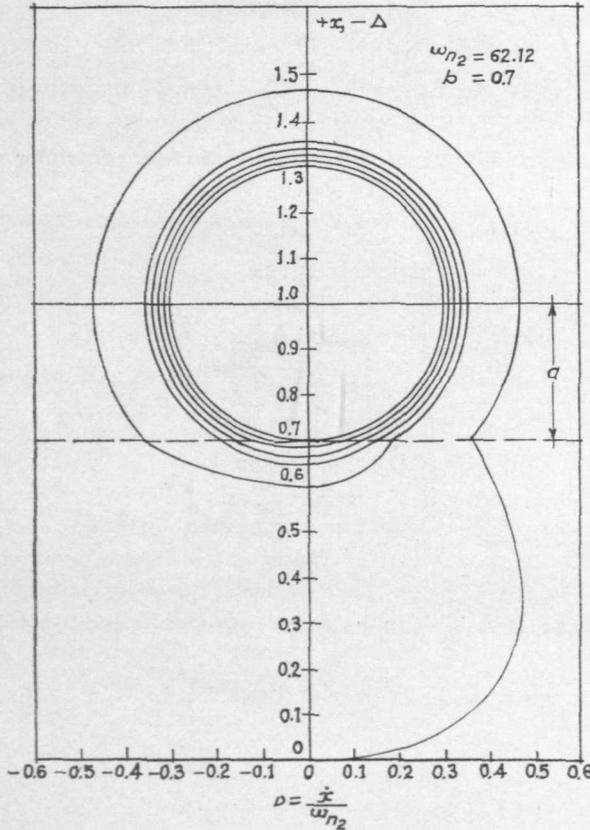


Fig. 6.

La construcción gráfica de las ecuaciones (16) y (18) con los valores de $r = 0,7$ para grandes desplazamientos, y $p^2 = 62,12$, nos da la figura 6. El sistema comienza con el trazado espiral $S_0 = 0$ y $S_0 = 1$ en el momento inicial de un sistema amortiguado, para seguir con la respuesta circular típica de un sistema sin amortiguamiento, cuando el movimiento relativo se hace pequeño.

Igualmente si consideramos el péndulo físico cuya ecuación del movimiento sabemos es

$$\ddot{x} + p^2 \operatorname{sen} x = 0$$

que puesta en forma delta se convierte en

$$\ddot{x} + p^2 (x + \Delta) = 0 \quad (19)$$

con

$$\Delta = \operatorname{sen} x - x.$$

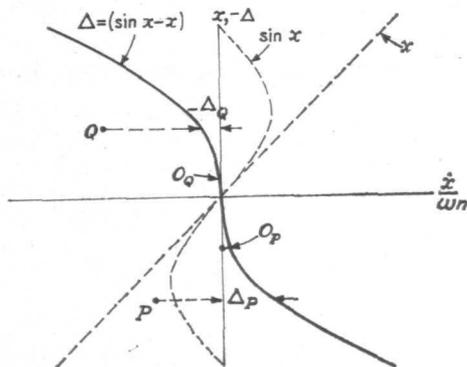


Fig. 7.

Se suele superponer en el plano fase delta, la curva de Δ tal como se indica en la figura 7. En ella vemos que para el punto Q el valor de Δ es negativo. En cambio, para el punto P es positivo. Por tanto, los centros para el trazado de los arcos de la trayectoria, estarán en los puntos O_p y O_q situados en el eje x , y a las distancias Δ_q y $-\Delta_p$, respectivamente.

La resolución gráfica de (19) está trazada en la figura 8 por los casos siguientes: *a*) casos oscilatorios con amplitudes máximas de 30° y 90° , *b*) caso con 180° , *c*) rotación continua con velocidad positiva, *d*) rotación continua con velocidad negativa. Los valores de Δ_1 y Δ_6 indicados en dicha figura, corresponden al caso *b*. En ella vemos que para ángulos menores de 180° todas las trayectorias rodean al centro.

MÉTODO ANALÍTICO. VIBRACIÓN LIBRE SIN AMORTIGUAMIENTO

Para resolver el problema analíticamente, examinemos primeramente el caso más sencillo de no existir amortiguamiento:

La ecuación del movimiento en el supuesto de no ser la fuerza restauradora lineal, toma la forma

$$m \ddot{x} + k f(x) = 0 \quad (1)$$

$$\ddot{x} + \omega_n^2 \sin x = 0$$

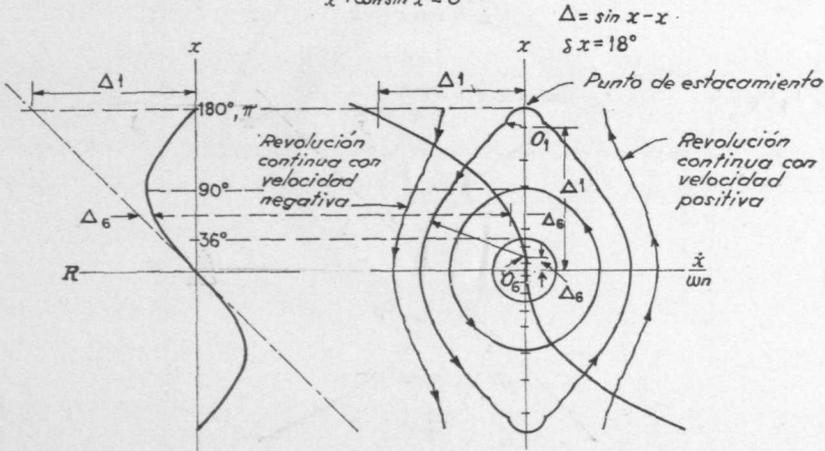


Fig. 8.

o

$$\ddot{x} + \omega_n^2 f(x) = 0 \quad (2)$$

siendo $k f(x)$ la fuerza restauradora no lineal.

La primera integral de (1) se puede obtener inmediatamente, ya que

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v$$

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v = v \frac{dv}{dx}$$

Por tanto, (1) puede ponerse en la forma

$$m v \frac{dv}{dx} + k f(x) = 0 \quad (3)$$

en que las variables v y x se encuentran separadas. De (3).

$$v \, d v = -\frac{k}{m} f(x) \, d x$$

La integración de ésta nos da:

$$\left. \begin{aligned} \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} &= -w_n^2 \int_x^{x_0} f(x) \, d x \\ v^2 - v_0^2 &= 2 w_n^2 \int_x^{x_0} f(x) \, d x = 2 w_n^2 [F(x_0) - F(x)] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

siendo x_0 la amplitud inicial del movimiento.

Esta ecuación representa la ley de conservación de la energía.
De ella obtenemos:

$$v = \frac{d x}{d t} = w_n \sqrt{2 \int_x^{x_0} f(x) \, d x}$$

que puede ponerse en la forma

$$d t = \frac{d x}{w_n \sqrt{2 \int_x^{x_0} f(x) \, d x}}$$

y por tanto

$$t = \frac{1}{w_n} \frac{d x}{\sqrt{2 \int_x^{x_0} f(x) \, d x}} + \text{conste} \quad (5)$$

La integración de esta ecuación nos da la variación del desplazamiento en función del tiempo $x = f(t)$. En general, aquélla será muy complicada. Siempre se podrá aplicar el método gráfico aproximado expuesto anteriormente.

Si examinamos el caso más sencillo en el que $f(x) = x$ (ecuación lineal con las condiciones iniciales $x_{t=0} = x_0$, $\dot{x}_{t=0} = v = 0$), la ecuación (5) se transforma en

$$w_n t = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x}} = \int_{x_0}^x \frac{d\left(\frac{x}{x_0}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2}} = \cos^{-1}\left(\frac{x}{x_0}\right) \quad (6)$$

luego $x = x_0 \cos w_n t$ (6).

El período del movimiento correspondiente a la ecuación (5), se obtiene de expresar, que él representa el tiempo necesario para realizar cuatro ciclos de 0 a x_0 .

Por tanto

$$T = 4t = \frac{4}{w_n} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{2 \int_{x_0}^x f(x) dx}} \quad (7)$$

En el caso lineal $f(x) = x$, esta expresión se convierte en

$$\begin{aligned} T &= \frac{4}{w_n} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{2 \int_x^{x_0} f(x) dx}} = \frac{4}{w_n} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{(x_0^2 - x^2)}} = \\ &= \frac{4}{w_n} \int_{x_0}^x \frac{d\left(\frac{x}{x_0}\right)}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{x_0^2}}} = \frac{4}{w_n} \int_{x_0}^x \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} \end{aligned}$$

siendo $u = \frac{x}{x_0}$. Como

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = [\arccos u]_1^0 = \frac{\pi}{2}$$

Luego

$$T = \frac{2\pi}{w_n}$$

Un tipo característico de muelle puede expresarse analíticamente mediante $k f(x) = k x^b$. Variando b , se obtienen muelles de características muy diversas. Si $b > 1$ los muelles son duros. Si $b < 1$ son suaves. Dicha expresión da una aproximación razonable del diagrama carga-deformación para muelles metálicos y no metálicos.

Este caso puede resolverse con relativa facilidad, mediante las funciones *gamma* y *beta*.

La función *gamma* de α sabemos se define mediante

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad (8)$$

Si $\alpha > 0$ la función de $\alpha + 1$ se obtiene de

$$\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx \quad (9)$$

que integrada por partes nos da

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx = \left[-x^{\alpha} e^{-x} \right]_0^{\infty} + \alpha \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \left[-x e^{-x} \right]_0^{\infty} + \alpha \Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha) \quad (10)$$

Por tanto, conocida la función *gamma* de α , podemos calcular la función *gamma* de $\alpha + 1$ mediante (10), y así sucesivamente.

Si, por ejemplo, $\alpha = 1$ de (8) $\Gamma(\alpha) = 1$ y de (10)

$$\Gamma(2) = 1 \Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(3) = 2 \Gamma(2) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\Gamma(4) = 3 \Gamma(3) = 3 \cdot 2 = 6$$

$$\Gamma(n) = n - 1 \Gamma(n - 1) = n - 1$$

La función $\Gamma(\alpha)$ está representada en la figura 9 para valores de α entre 0,1 y 3.

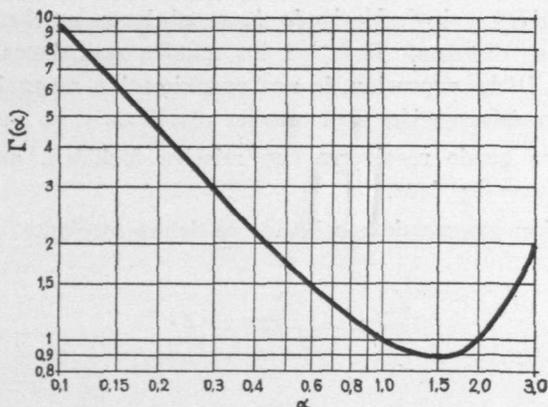


Fig. 9.

La función $\beta(m, n)$ sabemos está definida por la integral

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx \quad (11)$$

y está relacionada con la función gamma mediante

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad (12)$$

Con la suposición indicada $f(x) = k x^b$ podemos escribir:

$$\left. \begin{aligned} \int_{x_0}^x -f(x) dx &= \int_{x_0}^x -k x^b dx = \left[-\frac{k x_0^{b+1}}{b+1} \right]_{x_0}^x = \\ &= \frac{k x_0^{b+1}}{b+1} \left[1 + \left(\frac{x}{x_0} \right)^{b+1} \right] = \frac{k x_0^{b+1}}{b+1} [1 + (x)^{b+1}] \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Por tanto, de (7) la frecuencia tomará la forma

$$f_n = \left[\frac{k}{8m(b+1)} \right]_0^{\frac{1}{2}} \frac{x_0 \frac{b-1}{2}}{1} \quad (14)$$

siendo

$$I = \int_1^0 \frac{du}{(1-u^{b+1})^{1/2}} \quad (15)$$

Si hacemos $u^{b+1} = y$

$$I = \int_1^0 \frac{du}{(1-u^{b+1})^{1/2}} = \int_0^1 \frac{b+1}{1} y^{-b/1+b} (1-y)^{1/2} dy \quad (16)$$

Esta expresión tiene la misma forma que (11) sin más que hacer

$$m = 1 - \frac{b}{b+1} = \frac{1}{b+1} \quad \text{y} \quad n = 1/2$$

Por tanto, (16) se convertirá en

$$(b+1)I = \beta(m, n) = \beta\left(\frac{1}{b+1}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(1/b+1)\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/b+1+1/2)} \quad (17)$$

Esta expresión puede calcularse mediante la figura 10 para los valores de b comprendidos entre 0,5 y 2 en el supuesto de que se ha tomado para k el valor que da la misma frecuencia natural para una amplitud $x_0 = 0,1$ mm. En ella vemos que para $b > 1$ (muelles

duros), la frecuencia aumenta con la amplitud. Sucede lo contrario para $b < 1$.

El valor de I obtenido de (17) y sustituido en (14) nos da la frecuencia natural del sistema.

Examinemos ahora el caso en que la fuerza restauradora es de forma $f(x) = k(x + \alpha x^3)$ que para $\alpha > 0$ corresponde a lo que hemos definido como muelle duro.

La ecuación del movimiento será

$$m \ddot{x} + k(x + \alpha x^3) = 0$$

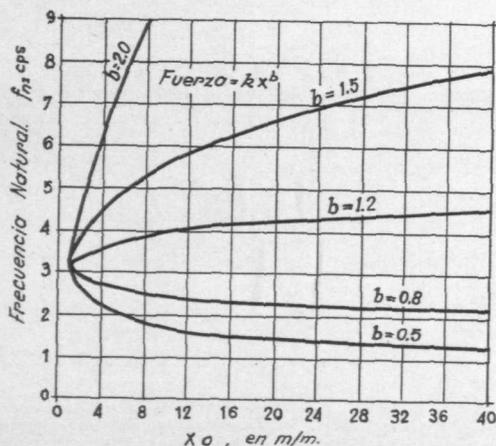


Fig. 10.

Como

$$\int_x^{x_0} f(x) dx = \frac{1}{2} \left(x_0^2 + \alpha \frac{x_0^4}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(x^2 + \frac{\alpha x^4}{2} \right)$$

La ecuación (7) se transforma en

$$\begin{aligned} T &= \frac{4}{w_n} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2} x_0^4 + x_0^2 \right) - \left(\frac{\alpha x^4}{2} + x^2 \right)}} \\ &= \frac{4}{w_n} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{(x_0^2 - x^2) \left(1 + \frac{\alpha}{2} x_0^2 + \frac{\alpha}{2} x^2 \right)}} \end{aligned}$$

Si hacemos

$$\frac{x}{x_0} = u \quad \text{y} \quad \Theta = a x_0^2$$

la expresión anterior se presenta bajo la siguiente forma normal de integrales elípticas de primera clase

$$\begin{aligned} T &= \frac{4}{w_n} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2) \left(1 + \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{2} \theta u^2\right)}} \\ &= \frac{4}{w_n} \sqrt{\frac{2}{\theta}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2) \left(\frac{2+\theta}{\theta} + u^2\right)}} \end{aligned} \quad (18)$$

En las tablas de funciones se encuentra

$$\int_0^z \frac{du}{\sqrt{(a^2 - u^2)(b^2 + u^2)}} = \frac{1}{c} F\left(\frac{a}{c} \phi\right) \quad (19)$$

donde $F\left(\frac{a}{c} \phi\right)$ es la integral elíptica de primera clase cuyos valores para los distintos de $\frac{a}{c}$ y ϕ son dados en las tablas indicadas, siendo

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{y} \quad \text{sen}^2 \phi = \frac{c z^2}{a^2 (b^2 + z^2)}$$

Comparando (18) y (19) obtenemos

$$a^2 = 1 \quad b = \frac{2+\theta}{\theta} \quad c^2 = \frac{2(1+\theta)}{\theta}$$

$$z = 1 \quad \text{sen}^2 \phi = 1 \quad \phi = \frac{\pi}{2}$$

De acuerdo con estos valores la ecuación (18) se convierte en

$$T = \frac{4}{w_n} = \frac{1}{\sqrt{1+\theta}} F\left(\sqrt{\frac{\theta}{2(1+\theta)}} \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad (20)$$

Si el muelle es lineal $\alpha = 0$, $\theta = 0$, y $T = \frac{2\pi}{w_n}$

Si α es muy grande, igual sucederá a θ ; por tanto, despreciando $\frac{2}{\theta}$ ante la unidad, la ecuación (18) se transforma en

$$T = \frac{w_n}{4} \sqrt{\frac{2}{\theta}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1+\alpha u^2)}} = \frac{4}{w_n} \sqrt{\frac{2}{\theta}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} \quad (21)$$

Su resolución es sencilla, ya que el valor de la integral es $1,8541/\sqrt{2}$, lo que nos da

$$T = \frac{4}{w_n \sqrt{\theta}} 1,8541 \quad (22)$$

Que nos muestra que la frecuencia no es independiente de la amplitud.

Si la fuerza restauradora es de la forma $k f(x) = kx(1 - \alpha x^2)$ que corresponde a un muelle suave, se puede resolver igualmente el problema mediante las integrales elípticas.

Si examinamos ahora el sistema elástico de la figura 2 (a) y suponemos que para $t = 0$ la masa está en su posición media, dándosele en este instante una velocidad inicial v , el tiempo que tardará en recorrer la holgura a , lo que hará con movimiento uniforme, será

$$t_1 = \frac{a}{v} \quad (23)$$

En el momento que la masa toque el muelle de rigidez k empezará a oscilar con un movimiento armónico, pasando en un cuarto de período su velocidad de v a 0. El tiempo que tardará en este paso, será

$$t_2 = \frac{\pi}{2} \frac{1}{w_n}$$

Por tanto, el período completo de vibración de la masa será

$$T = 4(t_1 + t_2) = \frac{4a}{v} + 2\pi \frac{1}{\omega_n} \quad (24)$$

Expresión que nos permite examinar la variación del periodo con a , v y ω_n . Si suponemos que la única variable es v , vemos que para $v = 0$ $T = \infty$, y para $v = \infty$ $T = 2\pi/\omega_n$.

De (24) se deduce que la mayor influencia de la holgura se ejercerá para valores de v alejados de los anteriores, ya que para ellos cualquiera que sea el valor de a , T adquiere los mismos. Ello, en el caso de vibración forzada, nos permite alejarnos o acercarnos al fenómeno de resonancia, actuando sobre v .

Teniendo en cuenta que si x_0 es la amplitud máxima de la oscilación de la masa, el recorrido bajo la acción del muelle es $x_0 - a$, y por tanto la velocidad v que corresponde al movimiento inicial de este recorrido, será $v = (x_0 - a)\omega_n$, con lo que la ecuación (24) puede ponerse en la forma

$$T = 4 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{a}{x_0 - a} \right) \left(\frac{1}{\omega_n} \right) = \left(2 + \frac{4}{\frac{x_0}{a} - 1} \right) \left(\frac{1}{\omega_n} \right)$$

y la frecuencia natural del sistema con holgura será

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = (\omega_n) \left(\frac{1}{1 + \frac{2}{\pi} \frac{1}{\frac{x_0}{a} - 1}} \right) \quad (25)$$

De esta expresión vemos que para $a = 0$ $\omega = \omega_n$ y que la frecuencia no depende de la amplitud.

Así si una turbina de 1.800 r. p. m. ha sido proyectada, para que en el supuesto de no existir holgura la frecuencia de resonancia, sea un 20 por 100 de dicha velocidad, es decir, 36 c. p. s., si ello no ocurre en la realidad, comprobándose que dicha holgura es de 0,005 mm. y midiéndose una amplitud de oscilación en la turbina de 0,001 mm., resultará que la frecuencia natural del sistema, de acuerdo con (25), bajará a 22 c. p. s. Del mismo modo en el muelle

de la figura 2 (c) si suponemos que la masa m se desplaza desde su posición inicial hasta un punto x_0 , y se le abandona sin velocidad inicial, la ecuación del movimiento en el intervalo $x_2 < x < x_0$ será

$$x = a + x_1 \cos \sqrt{\frac{k_1}{m}} t \quad (26)$$

que representa un movimiento armónico simple con centros A, siendo k_1 la rigidez del conjunto de los muelles.

El tiempo t_1 para pasar de $x = x_0$ a $x = x_2$ se obtiene de (26)

$$\begin{aligned} x_2 &= a + x_1 \cos \sqrt{\frac{k_1}{m}} t_1, & x_1 \cos \sqrt{\frac{k_1}{m}} t_1 &= x_2 - a = d \\ t_1 &= \frac{1}{\sqrt{\frac{k_1}{m}}} \arccos \frac{d}{x_1} \end{aligned} \quad (27)$$

En el intervalo $0 < x < x_2$ el movimiento es armónico simple con centro en 0 y con las condiciones iniciales

$$(x)_{t=0} = 2(\dot{x})_{t=0} = -x_1 \sqrt{\frac{k_1}{m}} \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k_1}{m}} t$$

Por tanto, la ecuación del movimiento será

$$x = x_2 \cos \sqrt{\frac{k_2}{m}} t - \frac{x_1 \sqrt{\frac{k_1}{m}} \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k_1}{m}} t_1}{\sqrt{\frac{k_2}{m}}} \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k_2}{m}} t \quad (28)$$

siendo k_2 la rigidez del muelle largo.

El tiempo necesario para llegar al punto 0 se obtiene de (28) haciendo $x = 0$

$$0 = x_2 \cos \sqrt{\frac{k_2}{m}} t - \frac{x_1 \sqrt{\frac{k_1}{m}} \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k_1}{m}} t_1}{\sqrt{\frac{k_2}{m}}} \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k_2}{m}} t_2$$

de donde

$$t_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{k_2}{m}}} \operatorname{arc. tang} \left(\frac{x_2 \sqrt{\frac{k_2}{m}}}{x_1 \sqrt{\frac{k_1}{m}} \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k_1}{m}} t_1} \right) \quad (29)$$

Por tanto, el período será

$$T = 4(t_1 + t_2) \quad (30)$$

CURVAS DE ENERGÍA

Hemos comprobado las dificultades que encierra la resolución analítica del problema que tratamos. Pues bien, mediante el método gráfico del plano-fase-delta anteriormente expuesto, que nos da las curvas $\left(x \frac{\dot{x}}{w_n}\right)$, o de las que Stoker denomina «curvas de energía», sin necesidad de llegar a la integración final $x = f(t)$ de las citadas curvas, pueden obtenerse fácilmente ciertas propiedades del movimiento. Para su trazado no emplea la citada construcción, sino que lo hace mediante su ecuación. Conviene tener siempre presente la diferencia de coordenadas indicadas plano-fase-delta $\left(x \frac{v}{w_n}\right)$ Stoker ($x v$). Así si examinamos el caso más sencillo correspondiente a la vibración libre lineal sin amortiguamiento, cuya ecuación sabemos es

$$m \ddot{x} + k x = 0, \quad k = \text{conste.}$$

Una primera integración nos da

$$m v \frac{dv}{dx} + k x = 0, \quad m \frac{v^2}{2} + k \frac{x^2}{2} = \text{constante}$$

o

$$\dot{x}^2 + k x^2 = \dot{x}_0^2 + k x_0^2 \quad (1)$$

siendo v_0 y x_0 la velocidad y desplazamiento iniciales.

Esta ecuación si $k > 0$, lo que ahora suponemos, representa una serie de elipses con el mismo centro; por tanto, el movimiento es siempre periódico.

Con la aplicación del plano-fase-delta, llegamos a la ecuación

$$\ddot{x} + w_n^2 (x + \Delta) = 0 \quad (2)$$

Con $\Delta = 0$.

Por tanto, todas las trayectorias tendrán como centro el de coordenadas $\left(x \frac{v}{m}\right)$ y serán circunferencias concéntricas.

El período puede determinarse mediante el cálculo de la integral

$$T = 4 \int_0^{x_0} \frac{dx}{v}$$

tomada a lo largo del cuarto de circunferencia, siendo x_0 la amplitud del movimiento, cuyo valor se obtiene de hacer $v = 0$ en la expresión anterior, es decir, $x_0^2 = 2 w_n/k$.

Por tanto

$$v = w_n (x_0^2 - x^2)$$

y

$$\begin{aligned} T &= \frac{4}{w_n} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} = \frac{4}{w_n} \int_0^{x_0} \frac{d(x/x_0)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2}} = \\ &= \frac{4}{w_n} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{4}{w_n} \left[\text{sen}^{-1} u \right]_0^1 = \frac{2\pi}{w_n} \end{aligned} \quad (3)$$

Es decir, que el período es independiente de la amplitud, lo que quiere decir «que todas las elipses o circunferencias son recorridas en el mismo tiempo».

Si consideramos ahora un caso de fuerza restauradora no lineal, como el ya indicado anteriormente $f(x) = \alpha x + \beta x^3$

$$\text{con } \alpha > 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta < 0 \quad \text{muelles suaves} \\ \beta > 0 \quad \text{muelles duros} \end{array} \right.$$

Examinemos cualitativamente el movimiento, mediante las curvas de energía.

La ecuación del movimiento es

$$\ddot{x} + \alpha x + \beta x^3 = 0 \quad v \frac{dv}{dx} = -(\alpha x + \beta x^3)$$

y su principal integral

$$v^2 + \alpha x^2 + \beta \frac{x^4}{2} = h = \text{constante} \quad (4)$$

De esta expresión deducimos que para pequeños valores de x , es decir, para movimientos de muy pequeña amplitud, en los que puede despreciarse βx^3 , o sea, que son casi lineales, las curvas de energía son igualmente casi elipses, ya que con mayor razón $\beta \frac{x^4}{2}$ puede despreciarse, h será pequeña y positiva.

Utilizando el plano-fase-delta la ecuación será

$$\ddot{x} + \omega_n^2 (x + \Delta) = 0$$

siendo

$$\Delta = \frac{1}{\omega_n^2} [\alpha x + \beta x^3] - x$$

Se tratará la recta $\frac{1}{\omega_n^2} (\alpha - 1) x$ y la cúbica $\frac{\beta}{\omega_n^2} x^3$.

El desplazamiento máximo se obtiene de (4) haciendo $v = 0$, es decir,

$$x_0^2 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 2\beta h}}{\beta} \quad (5)$$

Hemos tomado el signo más del radical cualquiera que sea el signo de β , porque $h > 0$ y $\alpha^2 > 0$ y pequeño.

El período del movimiento en las curvas de energía cerradas correspondientes a los indicados valores pequeños de x independientemente del signo de β es

$$T = 4 \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{h - (\alpha x^2 + \beta x^4/2)}} \quad (6)$$

La resolución de esta integral puede realizarse introduciendo una nueva variable θ tal que $x = x_0$ sean θ .

Teniendo en cuenta que por ser x_0 una raíz de la ecuación

$$h - \alpha x^2 + \beta \frac{x^4}{2} = 0$$

podemos escribir

$$h - \alpha x^2 + \beta \frac{x^4}{2} = \beta/2 (x_0^2 - x^2) (b^2 + x^2)$$

siendo

$$\beta/2 (-b^2 + x_0^2) = -\alpha \quad \text{ó} \quad \beta b^2 = \beta x_0^2 + 2\alpha$$

Por tanto, (6) después de eliminar b se transforma en

$$T = 4 \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{2\alpha + \beta x_0^2 + \beta x_0^2 \sin^2 \theta}} \quad (7)$$

Expresión que nos muestra que T es función de Θ siempre que $\beta \neq 0$.

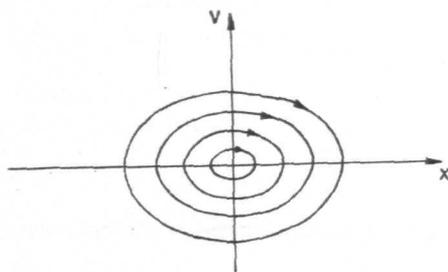
Con muelles duros $\beta > 0$ las curvas dadas por (4) son cerradas y, por tanto, los movimientos periódicos (fig. 11).

En cambio, con muelles suaves $\beta < 0$, las curvas únicamente son cerradas para una pequeña región del plano-fase, es decir, como ya hemos indicado anteriormente para pequeñas amplitudes. Por tanto,

la expresión (6) del período será siempre aplicable cuando $\beta > 0$, y únicamente para valores de x_0 muy pequeños si $\beta < 0$.

Para examinar este último caso, que como vemos presenta muchas más dificultades que cuando $\beta > 0$, sustituimos en (4) $\rho^2 = -\beta$, con lo que

$$v^2 + \alpha x^2 - \rho^2 \frac{x^4}{2} = h \quad (8)$$



Muelle duro, $\beta > 0$

Fig. 11.

Si x es próximo a cero $h \approx 0$, y las curvas, como ya indicamos, son aproximadamente elipses.

De (8)

$$v^2 = h - \alpha x^2 + \rho^2 \frac{x^4}{2} \quad (9)$$

Si $h > 0$ las curvas cortan al eje v ($x_0 = 0$) para

$$v = IV_0 = \sqrt{h} > 0 \quad \text{Fig. 12}$$

El discriminante de la cuádrica en x^2 del segundo miembro $\alpha^2 - 2\rho^2 h$ regula el que las curvas (xv) corten o no al eje v .

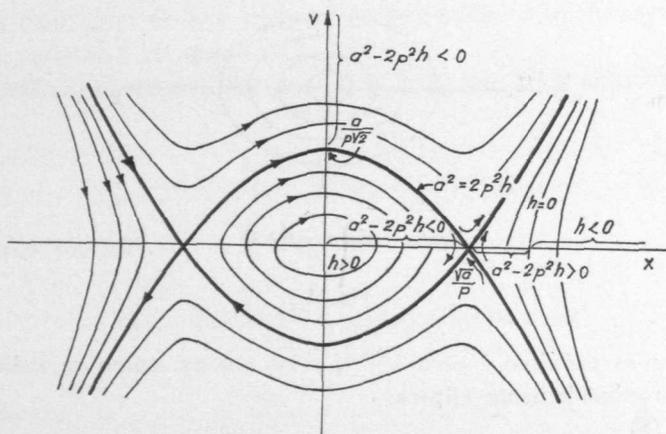
Así si $\alpha^2 - 2\rho^2 h < 0$ se produce dicho corte, lo que exige, por otra parte, que $h > 0$. Cuando $\alpha^2 = 2\rho^2 h > 0$ ya no se produce dicho corte. La curva transición entre ambas corresponde a

$$x^2 = 2\rho^2 h = 0 \quad \text{ó} \quad h = \alpha^2/2\rho^2.$$

Por tanto, el valor de v_0 en dicha curva ($x = 0$) será de acuerdo con $v_0 = \sqrt{h}$

$$v_0^2 = a^2/2\rho^2 \quad \text{,,} \quad v_0 = \frac{a}{\rho\sqrt{2}}$$

Para valores de $v_0 > \frac{a}{\rho\sqrt{2}}$ las curvas son abiertas y, por tanto, el movimiento no periódico. Cuando $v_0 < \frac{a}{\rho\sqrt{2}}$ son cerradas, y el movimiento es periódico.



Muelle suave $\beta < 0$

Fig. 12.

Los puntos de corte de la línea de transición con el eje, se obtienen haciendo $v = 0$ en (9) con la condición además que $a^2 - 2\rho^2 h = 0$, lo que nos da

$$x = \pm \frac{\sqrt{a}}{\rho}$$

Si el discriminante $a^2 - 2\rho^2 h > 0$ las curvas no cortan al eje v y al x únicamente en un punto, por tanto el movimiento en este caso tampoco es periódico.

En la figura 12 vemos que los puntos $(0, 0)$ para los cuales la fuerza restauradora $f(x) = ax^2 - \rho^2 x^3 = 0$, son puntos de equili-

brio. El origen es posición de equilibrio estable, ya que una pequeña perturbación origina únicamente una pequeña oscilación alrededor del punto $x = 0$. En cambio, los puntos $\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{\rho}, 0\right)$ lo son de equilibrio inestable, ya que una pequeña perturbación origina una oscilación de gran amplitud.

VIBRACIÓN LIBRE CON FUERZAS RESTAURADORAS Y AMORTIGUAMIENTO NO LINEALES

En este caso la ecuación del movimiento es

$$\ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + f(x) = 0 \quad (1)$$

que como anteriormente puede transformarse en una ecuación diferencial de primer orden mediante el cambio de variable $v = \frac{dx}{dt}$

Así obtenemos

$$\frac{dv}{dx} = \frac{-f(x) - \varphi(v)}{v} \quad (2)$$

en la que no pueden separarse las variables. Sin embargo, ella nos da la dirección de la curva integral en cualquier punto del plano (x, v) , y por tanto nos permitirá el trazado de aquélla. De todas formas, aun sin realizar este trazado, (2) nos permite obtener una interesante información cualitativa sobre el movimiento.

En determinadas circunstancias resulta ventajoso reemplazar la ecuación (2) por las dos ecuaciones de primer orden

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -f(x) - \varphi(v) \\ \frac{dx}{dt} &= v \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

que conduce a un campo vectorial de componentes

$$\frac{dv}{dt}, \text{ y } \frac{dx}{dt},$$

tangente a la curva solución.

En el plano-fase-delta, como ya indicamos, se trazan las curvas y ello se facilita en muchos casos por el empleo de «líneas isoclinas», que son aquellas que unen todos los puntos del plano $\left(x \frac{v}{w_n}\right)$ para los que la ecuación (2) expresada en las coordenadas de dicho plano es una cantidad constante. Así, por ejemplo, en el caso de vibración libre amortiguada y fuerza restauradora lineales, cuya ecuación es

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = 0 \quad (4)$$

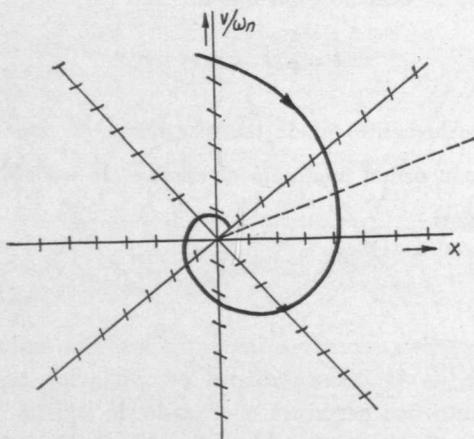


Fig. 13.

la ecuación (2) se transforma en

$$\frac{d(v/w_n)}{dx} = -\frac{c}{m w_n} - \frac{x}{v/w_n} \quad (5)$$

Por tanto, la ecuación de las isoclinas será

$$\frac{d(v/w_n)}{dx} = -\frac{c}{m w_n} - \frac{x}{v/w_n} = \text{concte.} \quad (6)$$

Para cualquier punto del plano $(x, v/w_n)$ podemos calcular la expresión anterior, que representará rectas que parten del origen (fig. 13). Para la línea horizontal $(v/w_n = 0)$ la constante se hace

infinita, y la dirección de las curvas es normal a la mencionada línea. En dicha figura se han trazado las direcciones correspondientes además de para $w/\tau w_n = 0$ las de $x = 0$, $x = \tau w_n$ (45°). Así se puede trazar cada curva como se indica en la figura.

Examinemos qué ocurre con los puntos de las isóclinas en los que la inclinación de éstas es la misma que la de las curvas ($v/\tau w_n x$), que pasan por ellos.

$$\text{Inclinación isoclina} = \frac{v}{w_n x} = \text{inclinación curva} = \frac{d(v/\tau w_n)}{dx}$$

De acuerdo con (6)

$$\frac{v}{w_n x} = -\frac{c}{m w_n} - \frac{x}{v/\tau w_n}$$

o

$$\left(\frac{v}{w_n x}\right)^2 + \frac{c}{m w_n} \left(\frac{v/\tau w_n}{x}\right) + 1 = 0,,$$

$$\frac{v}{w_n x} = -\frac{c}{2 m w_n} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2 m w_n}\right)^2 - 1}$$

Expresión que nos muestra que cuando $c < 2 m w_n = c_{cr}$ no existe ningún punto en que ocurra la particularidad indicada. Por el contrario, si $c > 2 m w_n$ existen dos isóclinas que cumplen con dicha condición, y ellas, por tanto, constituirán dos curvas integrales.

Si se aplica el método del plano-fase-delta, conviene observar que la ecuación (1) en forma delta será

$$\ddot{x} + w_n^2 (x + \Delta) = 0,$$

con

$$\Delta = \frac{1}{w_n^2} \left[\varphi \left(\frac{\dot{x}}{w_n} \right) + \varphi(x) - w_n^2 x \right] = \Delta_1 - \Delta_2$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{w_n^2} \varphi \left(\frac{\dot{x}}{w_n} \right), \quad \Delta_2 = \frac{1}{w_n^2} \varphi(x) - w_n^2 x$$

Por tanto será necesario determinar para cada punto los valores

de Δ_1 y Δ_2 y así obtendremos el de Δ , que nos dará la posición del centro del arco correspondiente.

Si examinamos ahora el caso de un sistema con amortiguamiento lineal $c \dot{x}$, pero fuerza restauradora no lineal $f(x) = \alpha x + \beta x^3$ ($\alpha > 0$ y $\beta > 0$ muelle duro), la ecuación (3) toma la forma

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{dt} &\equiv -f(x) - \varphi(v) = -(\alpha x + \beta x^3) - cv \\ \frac{dx}{dt} &= v \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Hemos visto anteriormente (fig. 11) que para $c = 0$ y $\beta > 0$ las curvas son cerradas, las que están trazadas en la figura 14 juntamente con un trozo de una curva integral obtenida de (8) para $c > 0$, de la que puede decirse que para todos los puntos excepto ($v = 0$

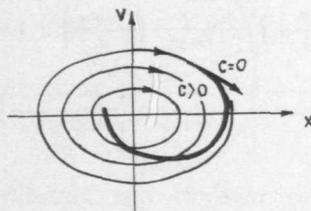


Fig. 14.

$x \neq 0$) el vector inclinación se dirige hacia el interior de las curvas.

En los puntos ($v = 0$, $x \neq 0$) el vector inclinación es el mismo tanto para $c = 0$ como para $c > 0$. Se comprueba igualmente, que para $c > 0$ la curva integral se dirige hacia el origen al aumentar t , dejando el movimiento de ser periódico. Si por el contrario $c < 0$, el desplazamiento aumenta indefinidamente con el tiempo.

Existen casos en los que la falta de linealidad, corresponde únicamente al amortiguamiento, lo que puede ocurrir en las vibraciones autoexcitadas. En ellos se puede resolver la ecuación diferencial de primer orden (2), mediante el método gráfico de Lienard.

Evidentemente, mediante la introducción de variables múltiples apropiados de las primitivas, podemos sin pérdida de generalidad poner la ecuación (2) en la forma

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\varphi(v) - x}{x} \quad (9)$$

De esta expresión Liernard obtiene el campo direccional mediante la siguiente construcción gráfica.

Se traza la curva $x = -\phi(v)$ como se indica en la figura 15. Si deseamos conocer la dirección de la curva (v, x) en un punto cualquiera $P(x, v)$, se traza por él una paralela al eje x , hasta que corte en R a la curva $x = -\phi(v)$; por este punto se traza una vertical hasta cortar en S al eje x , se une S con P y la perpendicular a SP nos da la dirección de la curva integral. Efectivamente, la recta SP tiene por inclinación $\frac{v}{x + \phi(v)}$. Tomando un pequeño trozo de la normal a SP en el punto P tendremos un elemento de la curva in-

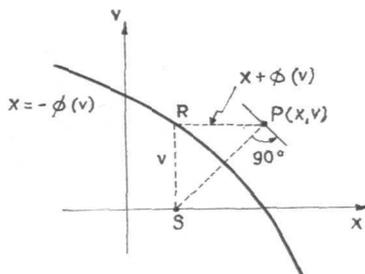


Fig. 15.

tegral. Se repite la construcción con el punto extremo de este elemento, y así paso a paso podemos dibujar la curva integral.

Igualmente podemos aplicar el plano-fase-delta teniendo en cuenta que en este caso

$$\Delta = \frac{1}{\omega_n^2} [\varphi(\dot{x})] = \frac{1}{\omega_n} [\varphi(\dot{x})]$$

Si aplicamos la construcción indicada de Lienard, al caso de amortiguamiento seco o de Coulomb, que sabemos está definido por

$$\varphi(\dot{x}) = \begin{cases} r & \dot{x} > 0 \\ -r & \dot{x} < 0 \end{cases} \quad r > 0$$

La curva $x = -\phi(v)$ está definida por

$$x = -r \quad \text{para } r > 0 \quad x = r \quad \text{para } r < 0$$

Una solución típica de la curva integral, está indicada en la figura 16, que vemos consta de arcos de círculo, teniendo como centros alternativamente S_1 y S_2 ; al cortar el eje pasa de un centro a otro. Cualquier curva solución, al incrementar el tiempo, se mueve en la dirección de las flechas; por tanto, entre dos valores consecutivos de $v = 0$, la amplitud se reduce en la cantidad r , hasta quedar reducida a cero, que corresponderá al momento en que la curva corta al eje x , en el segmento $S_0 S_1$, ya que en estas condiciones la fuerza restauradora es inferior al amortiguamiento.

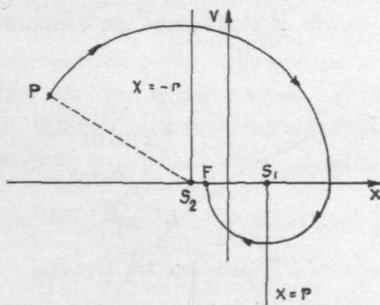


Fig. 16.

AMORTIGUAMIENTO EQUIVALENTE Y DECREMENTO DE LA AMPLITUD

De lo expuesto se desprende la dificultad que presenta, la resolución de la ecuación diferencial correspondiente, a un sistema con amortiguamiento no lineal. Sin embargo, hemos de señalar que un método que da resultados aceptables para muchos casos prácticos, consiste en sustituir el amortiguamiento no lineal por otro viscoso equivalente, lo que se hace remplazando todas las pérdidas originadas por aquél como si lo fueran por éste.

El trabajo por ciclo del amortiguamiento viscoso puede obtenerse fácilmente, ya que

$$\text{fuerza de amortiguamiento viscoso} = F_{av} = c \dot{x}$$

En el supuesto de ser el movimiento armónico

$$x = x_0 \cos \omega t, \quad F_{va} = -x_0 c \omega \sin \omega t.$$

El trabajo por ciclo será

$$T_{av}/\text{ciclo} = \int F_{av} dx = c x_0^2 w \int_0^{2\pi} \text{sen}^2 w t dt \quad (w t) = c x_0^2 w \pi \quad (1)$$

Si el amortiguamiento no es viscoso $F_a = f(\dot{x})$

$$\text{Trabajo por ciclo} = T_a/\text{ciclo} = \int f(\dot{x}) dx = \int_0^{2\pi} f(\dot{x}) dt \quad (2)$$

ya que

$$dx = \frac{dx}{dt} dt$$

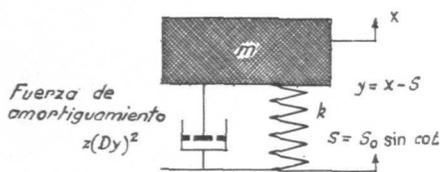


Fig. 17.

La igualdad de (1) y (2) nos da el valor del coeficiente o del amortiguamiento viscoso equivalente al no viscoso.

Este método está limitado a la suposición hecha de ser el movimiento armónico, lo que lleva consigo implícito que el amortiguamiento no es lo suficientemente grande, que varíe apreciablemente la forma del movimiento. Por ello no puede aplicarse en los casos de fricción seca o de Coulomb. Sin embargo, tiene gran utilidad en los amortiguadores hidráulicos corrientes, tales como el indicado en la figura 17, en los que la amortiguación se hace por el paso del aceite a través de los pequeños orificios indicados. Ella puede representar la carrocería de un coche (m) unida por un muelle y un amortiguador al chasis, que se mueve con las ondulaciones del terreno, de acuerdo con $S = S_0 \text{sen } w t$. La fuerza de amortiguamiento está

originada por el rozamiento del aceite en su paso por los orificios, la cual se puede suponer proporcional al cuadrado de la velocidad

$$\text{fuerza de amortiguamiento} = z (y)^2$$

siendo $z = \text{constante}$.

De (2) obtenemos

$$T/\text{ciclo} = 4 z y_0^3 \omega^2 \int_0^{2/\pi} \text{sen}^3 \omega t d(\omega t) = 2,66 \omega^2 y_0 z \quad (3)$$

Igualando (3) y (1) obtenemos para coeficiente viscoso equivalente

$$c_e = \frac{2,66 y_0^3 \omega^2 z}{y_0^2 \omega} = 0,8488 \omega y_0 z \quad (4)$$

Si en la figura 17 el amortiguamiento fuera viscoso, la ecuación del movimiento empleando notación compleja sería

$$-m \omega^2 x_0 + j c \omega y_0 + k y_0 = 0 \quad (5)$$

siendo $x = y + s$.

Dividiendo por k llegamos a

$$\frac{y_0}{S_0} = \frac{(\omega/\omega_n)^2}{\left\{ \left[1 - (\omega/\omega_n)^2 \right]^2 + (2 b \omega/\omega_n)^2 \right\}^{1/2}} \quad (6)$$

siendo $b = \frac{c}{c_r}$

Por no ser el amortiguamiento viscoso tendremos que sustituir en (6) b por

$$b = \frac{c_e}{2 m \omega_n} = \frac{0,8488 \omega y_0 z}{2 \omega_n m} = 0,4244 y_0 B \frac{\omega}{\omega_n}$$

siendo $B = z/m$.

Si hacemos $A = (w/w_n)^2$, tenemos

$$2b \frac{w}{w_n} = 0,8488 y_0 B. A.$$

lo que nos da para (6) en el supuesto de amortiguamiento no viscoso

$$\frac{y_0}{S_0} = \frac{A}{[(l - A)^2 + 0,72 (y_0 B A)^2]^{1/2}} \quad (7)$$

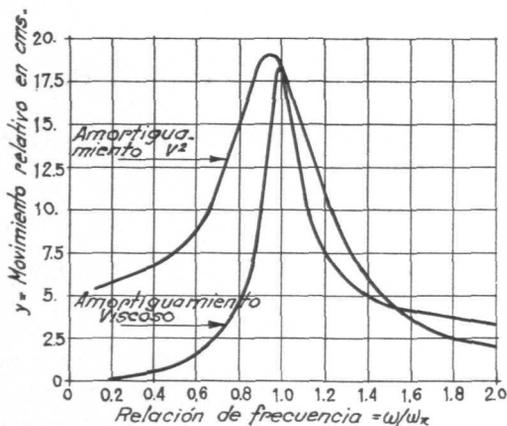


Fig. 18.

Ecuación que resuelta respecto a y_0 nos da

$$\left\{ -(l - A)^2 + \left[(l - A)^4 + 4 A^2 S_0^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2} \quad (8)$$

que nos muestra que el desplazamiento relativo no varía linealmente con el desplazamiento aplicado S , como ocurre cuando el amortiguamiento es lineal.

La figura 18 corresponde a la representación gráfica de las ecuaciones (6) y (8) para $z/m = 0,5$ y $S_0 = 2,5$ mm. De ella vemos que la mayor diferencia se presenta en la parte plana de la curva respuesta de amortiguamiento no lineal. Este resultado es típico en muchos problemas de este tipo. Como consecuencia interesante, ve-

mos que la variación en la frecuencia natural es muy pequeña, a causa de la no linealidad del amortiguamiento. Por esta razón, en este caso, se puede tomar con suficiente aproximación $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Igualmente hemos visto presenta dificultad determinar el decremento de la amplitud por ciclo. Por ello, en muchos casos prácticos, es suficiente obtener el citado decremento, igualando el trabajo por ciclo del amortiguamiento, a la disminución de energía cinética del sistema, en el mismo tiempo.

Si suponemos $x = x_0 \sin \omega t$ y $F_a = f(\dot{x})$, el trabajo por ciclo del amortiguamiento será

$$T/\text{ciclo} = x_0 \int_0^{2\pi} f(\dot{x}) \cos \omega t d(\omega t) \quad (9)$$

La pérdida de energía cinética por ciclo es

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 (x_0 - \Delta x)^2 &= m \omega^2 x_0 \Delta x = \\ &= \frac{1}{2} m \omega^2 (\Delta x)^2 = \sim m \omega^2 x_0 \Delta x \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Igualando (9) y (10) obtenemos

$$\Delta x = \frac{1}{m \omega^2} \int_0^{2\pi} f(\dot{x}) \cos \omega t d(\omega t)$$

En el caso considerado anteriormente de acuerdo con (3)

$$\Delta x = \frac{1}{m \omega^2} 2,66 \omega^2 y_0^3 z = 2,66 \frac{y_0^3 z}{m} \quad (11)$$

VIBRACIONES FORZADAS NO LINEALES

Un método aproximado que resulta extremadamente útil, tanto para las vibraciones lineales como para las no lineales, es el conocido bajo tres nombres. Método aproximado de Ritz, Segundo Mé-

todo de Ritz y Método de Ritz Galerkin, del cual hacemos un breve resumen a continuación:

Sea la ecuación diferencial no lineal

$$m \ddot{x} + c f_1(\dot{x}) + k f_2(x) = f_3(t) \quad (1)$$

en la cual las funciones de amortiguamiento y restauración $f_1(\dot{x})$ y $f_2(x)$, respectivamente, son funciones pares de la velocidad y del desplazamiento, es decir,

$$-f_1(\dot{x}) = f_1(-\dot{x}) \quad -f_2(x) = f_2(-x)$$

dividiendo por m , y teniendo en cuenta que

$$\frac{k}{m} = \omega_n^2 \quad \text{y} \quad \frac{c}{m} = 2b\omega_n$$

la ecuación diferencial (1) se convierte en

$$E|x| = \ddot{x} + 2b\omega_n f_1(\dot{x}) + \omega_n^2 f_2(x) - \frac{1}{m} f_3(t) = 0 \quad (2)$$

Esta ecuación (2), puede representar una ecuación de equilibrio del sistema, entre la fuerza de inercia por un lado y las de amortiguamiento, restauradoras y excitante por otro.

Para un desplazamiento virtual δx , la condición de equilibrio exige, que el trabajo virtual de dichas fuerzas se anule; por tanto,

$$E|x| = \left[\ddot{x} + 2b\omega_n f_1(\dot{x}) + \omega_n^2 f_2(x) - \frac{1}{m} f_3(t) \right] \delta x = 0 \quad (3)$$

Ritz supone que una solución aproximada de (2) es una serie de n términos apropiados, que designamos por \tilde{x} , ya que tiene que ser distinta de x . Por tanto

$$E|\tilde{x}| = \tilde{x} = a_1 \phi_1(t) + a_2 \phi_2(t) + \dots + a_n \phi_n(t) \quad (4)$$

siendo $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ funciones apropiadas del tiempo, y a_1, a_2, \dots, a_n parámetros que deben determinarse para que un limitado número de términos de la serie (4), den una buena aproximación de x .

El desplazamiento virtual para el término n será:

$$\delta_x = a_n \phi_n(t) \quad (5)$$

Si sustituimos en (3), x por la ecuación (4), y δx por (5) evidentemente no la satisfará para cualquier instante t , por ser x y \tilde{x} distintas.

Pues bien, la aproximación que establece Ritz para la determinación de los parámetros a_1, a_2, \dots, a_n , es que el trabajo virtual durante un cierto tiempo T de cada término sea nulo, es decir,

$$\int_0^T \{ E | \tilde{x} | \phi_1(t) \} dt = 0, \int_0^T \{ E | \tilde{x} | \phi_2(t) \} dt = 0 \dots \int_0^T \{ E | \tilde{x} | \phi_n(t) \} dt = 0 \quad (6)$$

Esto nos dará n ecuaciones algebraicas, de las cuales podemos obtener a_1, a_2, \dots, a_n .

La elección de la función aproximada \tilde{x} , se simplifica mucho, en el supuesto de ser la fuerza excitante función periódica del tiempo, ya que el tiempo T de las integrales es el correspondiente al período. Si además la fuerza excitante es sinusoidal $f_s(t) = F \cos \omega t$, intuitivamente llegamos a que un término aproximado, si no existe amortiguamiento, será $x_0 \cos \omega t$. Si existe amortiguamiento, debemos suponer una aproximación de dos términos, tal que

$$\tilde{x} = A_x \cos \omega t + B_x \sin \omega t = x_0 \cos(\omega t - \psi) \quad (7)$$

Hagamos aplicación del método a este último caso, en el que la aproximación se reduce a dos términos. El tiempo, como hemos indicado, corresponde al período $T = 2\pi/\omega$, o a un ángulo de 2π radianes.

Las condiciones que han de cumplirse son

$$\int_0^{2\pi} E | \tilde{x} | \cos \omega t d(\omega t) = 0 \quad (8)$$

$$\int_0^{2\pi} E | \tilde{x} | \sin \omega t d(\omega t) = 0 \quad (9)$$

Sustituyendo en (8) E $|\tilde{x}|$ por su valor de (7), obtenemos

$$\begin{aligned}
 & -w^2 x_0 \int_0^{2\pi} \cos(wt - \psi) \cos wt \, d(wt) + 2b w_n \int_0^{2\pi} f_1 [-w x_0 \sin(wt - \psi)] \\
 & \cos wt \, d(wt) + w_n^2 \int_0^{2\pi} f_2 [x_0 \cos(wt - \psi) \cos wt \, d(wt) - \\
 & - \frac{F}{m} \int_0^{2\pi} \cos^2 wt \, d(wt) = 0
 \end{aligned}$$

Si introducimos la nueva variable $\sigma = wt - \psi$, de tal modo que $d\sigma = d(wt)$ y $\cos wt = \cos(\sigma + \psi)$, las integrales anteriores toman los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \cos(wt - \psi) \cos wt \, d(wt) = \int_0^{2\pi} \cos \sigma \cos(\sigma + \psi) \, d\sigma = \\
 & = \int_0^{2\pi} (\cos \psi \cos^2 \sigma - \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \sigma \cos \sigma) \, d\sigma = \pi \cos \psi \\
 & \int_0^{2\pi} f_1 (-w x_0 \sin(wt - \psi) \cos wt \, d(wt) = \int_0^{2\pi} f_1 (-w x_0 \operatorname{sen} \sigma \cos(\sigma + \psi)) \\
 & \, d\sigma = \operatorname{sen} \psi \int_0^{2\pi} f_1 (w x_0 \operatorname{sen} \sigma) \operatorname{sen} \sigma \, d\sigma \\
 & \int_0^{2\pi} f_2 x_0 \cos(wt - \psi) \cos wt \, d(wt) = \int_0^{2\pi} f_2 [x_0 \cos \sigma \cos(\sigma + \psi)] \, d\sigma = \\
 & = \cos \psi \int_0^{2\pi} f_2 (x_0 \cos \sigma) \cos \sigma \, d\sigma, \\
 & \int_0^{2\pi} \cos^2 wt \, d(wt) = \pi
 \end{aligned}$$

Con estos valores (8) se transforma en

$$\begin{aligned}
 & -w^2 x_0 \pi \cos \psi + 2 b w_n \sin \psi \int_0^{2\pi} f_1(w x_0 \sin \sigma) \sin \sigma d\sigma + \sigma + \\
 & + w_n^2 \cos \psi \int_0^{2\pi} f_2(x_0 \cos \sigma) \cos \sigma d\sigma - \frac{\pi F}{m} = 0
 \end{aligned}$$

Introduciendo la notación

$$G(x_0 w) \equiv \frac{4}{\pi w_n x_0} \int_0^{\pi/2} f_1(w x_0 \sin \sigma) \sin \sigma d\sigma \quad (10)$$

$$H(x_0) = \frac{4}{\pi x_0} \int_0^{\pi/2} f_2(x_0 \cos \sigma) \cos \sigma d\sigma \quad (11)$$

las ecuaciones (8) y (9) toman la forma

$$\left. \begin{aligned}
 & -\left(\frac{w}{w_n}\right)^2 \cos \phi - 2 b (\sin \phi) (x_0 w) + \cos \phi H(x_0) = \frac{F}{k x_0} \\
 & -\left(\frac{w}{w_n}\right)^2 \sin \phi - 2 b (\cos \phi) G(x_0 w) + \sin \phi H(x_0) = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Ecuaciones que, resueltas respecto a x_0 y, nos dan:

$$\left[H(x_0) - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2 \right]^2 + 4 b^2 G^2(x_0 w) = \left[\frac{F}{k x_0} \right]^2 \quad (13)$$

$$\tan \phi = \frac{2 b G(x_0 w)}{H(x_0) - (w/w_n)^2} \quad (14)$$

Si aplicamos lo expuesto: a) a un sistema lineal con amortiguamiento viscoso

$$f_1(x_0 w) = \bar{x} = x_0 w \sin(w t - \psi) = x_0 w \sin \sigma$$

$$f_2(x_0) = x_0 \cos \sigma$$

Por tanto, (10) y (11) se convierten en

$$G(x^0 w) = \frac{w'}{w_n} \quad H(z_0) = 1$$

las (13) y (14) en

$$\left(1 - \frac{w^2}{w_n^2}\right)^2 + \frac{4 b^2 w^2}{w_n^2} = \left(\frac{F}{k x_7}\right)^2 \quad ,, \quad \text{y} \quad \tan \psi = \frac{2 b x / w_n}{1 - (w/w_n)^2}$$

que son los conocidos valores de la vibración forzada lineal.

b) a un sistema no lineal sin amortiguamiento:

$$H(x_0) - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2 = 1 - \frac{F}{k x_0} \quad \text{y} \quad 4 \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \quad (15)$$

A continuación vamos a examinar con más detenimiento el caso de vibración forzada con fuerzas restauradoras no lineales, y amortiguamiento viscoso, ya que este caso se presenta en muchos problemas físicos, sin ir más lejos, un péndulo simple al que se le aplica una fuerza externa periódica.

Suponemos que la fuerza restauradora tiene la forma ya indicada anteriormente

$$f(x) = \alpha x + \beta x^3 \quad \text{con} \quad \alpha > 0 \quad \text{y} \quad \beta > 0$$

para muelles duros y $\beta < 0$ para muelles suaves.

Si hacemos $\alpha = 1$ la ecuación del movimiento toma la forma

$$\ddot{x} + c \dot{x} + w_n^2 (x + \beta x^3) = F \cos(\omega t + \psi). \quad (16)$$

denominada «ecuación de Duffing», a quien se deben los primeros resultados significativos, concernientes a las soluciones armónicas.

Parece lógico pensar que la solución sea un movimiento armónico de la misma frecuencia que la fuerza excitante, es decir,

$$x = x_0 \cos \omega t \quad (17)$$

pero defasar el ángulo ψ respecto a la fuerza, ya que el hecho de

existir amortiguamiento da lugar en la vibración lineal a un desfase. Sustituyendo (17) en (16) tenemos:

$$\left. \begin{aligned} -x_0 w^2 \cos w t - c x_0 w \operatorname{sen} w t + w_n^2 x_0 \cos w t + w_n^2 \beta x_0^3 \cos^3 w t = \\ = F \cos \alpha \cos w t - F \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} w t \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Esta expresión nos muestra que (17) puede ser una solución de (16) únicamente para los valores de $t = n \pi / 2 \tau w$, si n está limitado a un número par o impar.

Timoshenko, en su «Vibration Problems in Engineering», página 158, realiza la aproximación de fijar los valores de x_0 y ψ de tal modo que verifiquen la ecuación (18), para las posiciones medias y extremas de la masa vibrante.

Para las posiciones medias $\operatorname{sen} w t = 0$, $\cos w t = \pm 1$, luego (18) se convierte en

$$w_n^2 x_0 + w_n^2 \beta x_0^3 = F \cos \psi + x_0 w^2 \quad (19)$$

Para las posiciones extremas $\operatorname{sen} w t = \pm 1$, $\cos w t = 0$ y (18) se transforma en

$$c x_0 w = F \operatorname{sen} \psi \quad (20)$$

De (19) y (20) deducimos

$$\cos \psi = \pm \sqrt{1 - \frac{c^2}{F^2} (x_0 w)^2} \quad (21)$$

$$w_n^2 x_0 + w_n^2 \beta x_0^3 = \pm F \sqrt{1 - \frac{c^2}{F^2} (x_0 w)^2} + x_0 w^2 \quad (22)$$

Si aplicamos el método aproximado de Ritz indicado anteriormente (caso de $c = 0$), sustituyendo (7) en (10) obtenemos:

$$H(x) = \frac{4}{\pi x} \int_0^{\pi/2} (x \cos^2 \sigma + \beta x^3 \cos^4 \sigma) d\sigma = 1 + \frac{3 \beta x^2}{4}$$

y las ecuaciones (13) y (23) se transforman en

$$\left(1 + \frac{3\beta x^2}{4} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4b^2\omega^2}{\omega_n^2} = \frac{F^2}{k^2 x^2} \quad (23)$$

$$\tan \psi = \frac{2b\omega/\omega_n}{1 + 3\beta x^2/4 - \omega^2/\omega_n^2} \quad (24)$$

ya que $G(\dot{x}\omega)$ es simplemente ω/ω_n

La interpretación de (22) se hace mucho más fácilmente de una manera gráfica. Para ello es suficiente observar, que su primer miem-

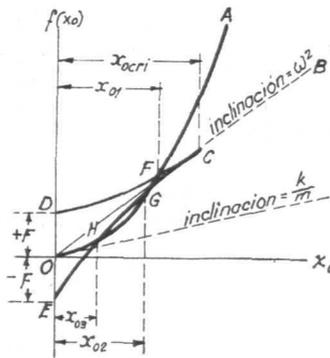


Fig. 19.

bro representa la fuerza restauradora del muelle por unidad de masa del sistema, función del desplazamiento x_0 que puede determinarse experimentalmente por una curva tal como la OA de la figura 19. El segundo miembro para cada valor de ω , supuestos dados F/c está representado por una curva de dos ramas DC y EC que tienen por ordenada en el origen $\pm F$, y por asíntota común una recta de inclinación ω^2 a la que cortan en el punto de abscisa

$$x_{cri} = F/c\omega. \quad (25)$$

Los puntos de intersección de la curva OA , con las DC y EC , nos dan la solución de (22), es decir, las amplitudes x_0 correspondientes al valor tomado para ω . En general, dichos puntos son tres: F , G y H . Repitiendo la operación para distintos valores de ω obtenemos las curvas $x_0 = f(\omega)$ denominadas curvas respuesta que

para $\beta = 0$, coinciden con las ya conocidas para el caso de vibración forzada lineal. Al repetir la figura 19 para distintos valores de ω , se comprueba que para pequeños valores la rama inferior se coloca completamente por debajo de $O A$, por lo que no la corta, no existiendo más punto de intersección que el F , correspondiente a la rama $D C$, es decir, x_{01} . Para grandes valores de ω , es esta rama $D C$ la que no corta a la $O A$, y solamente tiene el punto de intersección H de la rama $E C$. Por ello, la curva $x_0 = f(\omega)$ tomará la forma indicada en la figura 20. Ella nos muestra que desde $\omega = 0$ hasta $\omega = \omega'$ existe un solo valor de x_0 para cada valor de ω situado en la rama $A C$. Para $\omega = \omega'$, la rama inferior tangente a la curva $O A$, dándonos el punto D_0 y la rama $O C$ la corta en el punto correspondiente a B_0 . Entre $\omega' < \omega < \omega_{cr}$ se obtienen tres puntos de intersección F , G y H . que nos dan los puntos D'_1 , D_1 y B_1 . Cuando

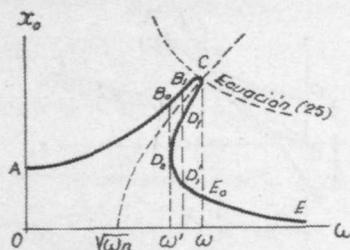


Fig. 20.

$\omega = \omega_{cr}$ se obtienen solamente dos puntos E_0 y C . Si $\omega > \omega_{cr}$ existe solamente un punto de intersección con la rama inferior, que corresponde al tramo $E_0 E$.

Si repetimos las figuras 19 y 20 para distintos valores de F/c , podemos construir curvas respuesta semejantes a las de la figura 20.

La forma de la figura 21 (a) corresponde a valores de $\beta > 0$ (muelles duros) y la figura 20 (b) a $\beta < 0$ (muelles suaves).

Si hacemos en (22)

$$F = 0, \omega_n^2 x_0 + \omega_n^2 \beta x_0^3 = x_0 \omega^2 \quad (26)$$

que corresponde al caso de vibración libre con fuerza restauradora no lineal. Por tanto, la intersección de la recta con inclinación ω^2 con la curva $O A$, nos da los valores correspondientes de x_0 y ω . De este modo se obtiene la curva de puntos de la figura 20. Si en ésta

trazamos la hipérbola (25) obtenemos la curva de puntos indicada en dicha figura, cuya intersección con la curva de vibración libre, es precisamente el punto C, que vimos corresponde al valor máximo para la amplitud de la vibración libre no lineal, el cual, como vemos, puede determinarse trazando únicamente las curvas de puntos.

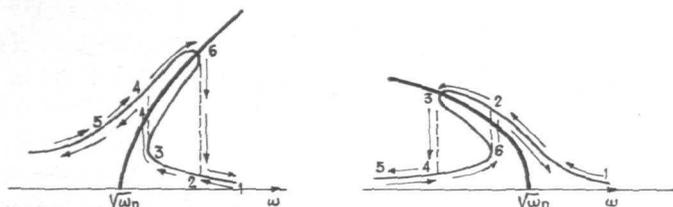


Fig. 21.

De la ecuación (23) vemos que, para valores pequeños de ω , el defasaje es pequeño. Cuando ω crece ψ aumenta, llegando a

$$\frac{\pi}{2} \text{ para } \frac{c^2}{F^2} (x_0 \omega)^2 = 1,$$

luego cuando $\omega = \omega_{cr}$ (resonancia) se produce como en el caso lineal un defasaje de 90° . Si ω sigue aumentando, es decir, para la curva

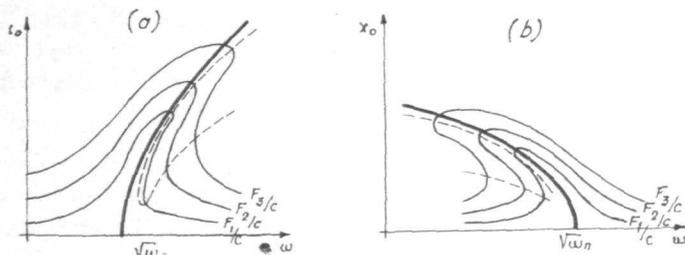


Fig. 22.

E_0 E correspondiente a los puntos de intersección de la rama inferior E C, y al signo menos del segundo miembro de (23), $\cos \psi$ se hace negativo y, por tanto, $\psi > \frac{\pi}{2}$.

Observando la figura 22 vemos, que si suponemos a F constante, hacemos a ω muy grande y que vaya disminuyendo, pasaremos del punto 2 al 3, al llegar a éste, se pasa rápidamente al 4, y a conti-

nuación al 5. Si inversamente, comenzamos por w muy pequeño y lo vamos aumentando, pasaremos por los puntos 5-4-6, y de éste al 2. Es decir, que en la zona de las curvas respuesta, entre dos tangentes verticales se produce un «fenómeno de salto». Experimentalmente, se han comprobado estos resultados, no pudiéndose producir los movimientos correspondientes a esa zona. Según Stoker, «Non linear Vibration», pág. 114, este fenómeno son soluciones inestables en un sentido u otro, es decir, que las regiones limitadas por las curvas de puntos en la figura 21 son regiones de inestabilidad de la ecuación (16).

SUBARMÓNICOS DE RESONANCIA O DE MULTIPLICACIÓN DE FRECUENCIA

En los problemas de vibraciones lineales, sabemos que únicamente se produce la resonancia cuando la frecuencia natural coincide con la de la fuerza impulsante si ésta es armónica, o con alguno de los armónicos múltiplos de aquélla, en el caso de ser periódica.

Sin embargo, en vibraciones no lineales en sistemas eléctricos, se ha comprobado experimentalmente, que principalmente en sistemas con fuerzas restauradoras no lineales, la resonancia puede producirse para frecuencias naturales submúltiplos de la frecuencia de la fuerza impulsante. Es decir, para frecuencias

$$w_n = \frac{1}{2} w \frac{1}{3} w \dots \frac{1}{n} w$$

que se denominan subarmonías de resonancia, o de multiplicación de frecuencia. No resulta muy sencillo dar una explicación física de este fenómeno, cuya presencia no se ha apreciado en sistemas mecánicos. Si la oscilación libre de un sistema lineal es de frecuencia w/n ($n =$ un entero), y la fuerza aplicada tiene una frecuencia w , ésta puede excitar la oscilación libre agregada a la oscilación forzada de frecuencia w . Como en todo sistema elástico siempre existe amortiguamiento, la vibración libre desaparece y no queda más que la forzada. En cambio, en sistemas no lineales la vibración libre contiene en profusión armónicos de alto orden, por lo que una fuerza impulsante con frecuencia igual a uno de estos armónicos puede ser capaz de excitar y sostener los armónicos de más baja frecuencia.

Timoschenko explica este fenómeno, en un caso sencillo, como sigue:

Considera la vibración libre no lineal definida por la ecuación

$$\ddot{x} + w_n x + \alpha x^3 = 0 \quad (26)$$

y mediante el método de aproximaciones sucesivas obtiene para solución

$$x = a \cos w t + b \cos 3 w t \quad (27)$$

Si suponemos que actúa en el sistema una fuerza impulsante $F \cos (3 w t + \beta)$ esta fuerza en el desplazamiento (27) efectúa un trabajo por ciclo $\left(\Gamma = \frac{2\pi}{w}\right)$ de

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{2\pi}{w}} F \cos (3 w t + \beta) \dot{x} dt &= -a w F \int_0^{\frac{2\pi}{w}} \sin w t \cos (3 w t + \beta) dt - \\ &- 3 b w F \int_0^{\frac{2\pi}{w}} \sin 3 w t \cos (3 w t + \beta) dt \end{aligned}$$

El primer término se anula, y el segundo se transforma en $3 \pi b F \sin \beta$. Es decir, que por existir el armónico de orden 3, la fuerza impulsante produce un trabajo función de β . Elegido convenientemente β , este trabajo puede compensar el disipado por el amortiguamiento. Por tanto, la fuerza por tener la pulsación $3 w$ igual al subarmónico de orden superior libre, puede mantener una vibración de frecuencia w , submúltiplo de la de la fuerza aplicada.

ESTABILIDAD E INESTABILIDAD DE LAS SOLUCIONES PERIÓDICAS

Hemos indicado anteriormente que con las soluciones periódicas se produce el fenómeno del salto, el cual representa que las zonas de las curvas $|x_0| = f(w)$ (fig. 21), comprendida entre las curvas de puntos, son regiones de inestabilidad para la ecuación

$$\ddot{x} + c \dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = F \cos w t \quad (1)$$

En general, se define la estabilidad denominada estabilidad infinitesimal, del siguiente modo (J. J. Stoker, «Non linear Vibrations», pág. 115).

Sean $x(t)$ y $x(t) + \delta x(t)$ dos soluciones de la ecuación (1) para dos condiciones iniciales muy próximas. Si llevamos la segunda solución a la ecuación (1), y despreciamos las potencias de δx de orden superior al primero, se obtiene una ecuación diferencial variacional en δx . Si todas las soluciones δx de esta ecuación son limitadas, se dice que $x(t)$ es estable. En caso contrario es inestable. La aplicación de esta definición a (1) (ecuación de Duffing) en el supuesto de $c = 0$, nos conduce a la ecuación diferencial homogénea

$$\delta \ddot{x} + (\alpha + 3\beta x^2) \delta x = 0 \quad (2)$$

Ahora es preciso comprobar si todas las soluciones δx son limitadas o no.

Para cada valor de $x(t)$, o sea para cada punto del plano (x_0, ω) corresponderá una ecuación particular (2). Cuando $x(t)$ es periódica la expresión (2) constituye la ecuación de Hill.

Si suponemos que la solución corresponde a la primera aproximación de la solución de la ecuación de Duffing $x = x_0 \cos \omega t$, la ecuación (2) toma la forma

$$\delta \ddot{x} + (a + b \cos 2\omega t) \delta x = 0 \quad (3)$$

siendo

$$a = \alpha + \frac{3}{2} \beta x_0^2$$

$$b = \frac{3}{2} \beta x_0^2$$

Si designamos

$$z = 2\omega t$$

$$\delta = a/4\omega^2$$

$$e = b/4\omega^2$$

(3) toma la forma

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \delta x}{d z^2} + (\delta + \epsilon \cos z) \delta x &= 0 \\ \frac{\partial^2 w}{d z^2} (\delta + \epsilon \cos z) \delta w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

que es llamada ecuación de Mathieu, caso particular de la ecuación de Hill, ya que la fuerza restauradora se convierte ahora en armónica simple.

Ecuación lineal cuyo estudio matemático, aunque no se haya llegado a determinar su solución general, ha sido realizado muy profundamente, principalmente en lo referente a las regiones estables e inestables en el plano $(\delta - \epsilon)$, especialmente para valores muy pequeños de ϵ , ya que son muchos los problemas prácticos, algunos de los cuales expondremos más tarde, en los que se verifica dicha condición.

Aunque por ser dicha ecuación lineal, su estudio no corresponde a la materia que tratamos, dada su importancia para determinación de la estabilidad o inestabilidad en los problemas no lineales, vamos a hacer un pequeño examen resumen sobre ella.

Se ha comprobado que la ecuación (4), por tener el coeficiente periódico el período 2π , tiene para cada valor de δ y ϵ_0 soluciones periódicas de período 2π y 4π .

Por ser dichas funciones periódicas regulares para todos los valores de z , se pueden desarrollar según la serie de Fourier de período 2π ó 4π .

Así para el primero

$$w(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n z + b_n \operatorname{sen} n z) \quad (5)$$

Si se lleva este valor a (4) se comprueba que las soluciones han de ser de la forma

$$\left. \begin{aligned} w(z) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n z \\ \text{o} \quad w(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n z \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Igualmente se pueden establecer las soluciones para el período 4π . Sin embargo, se ha demostrado que para los valores de δ y ε , que dan lugar a la transición entre las regiones estables e inestables que realmente es lo que interesa, más que la forma del movimiento, no existe más que una solución de período 2π ó 4π .

Esta propiedad permite calcular los valores de δ y ε correspondientes a la transición. Para ello es suficiente sustituir (6) en (4), lo que nos da

$$\left. \begin{aligned} \delta a_0 + \frac{\varepsilon}{2} a_1 &= 0 \\ (\delta - n^2) a_n + \frac{\varepsilon}{2} (a_{n-1} + a_{n+1}) &= 0 \quad n = 1, 2, 3 \dots \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} (\delta - 1) b_1 + \frac{\varepsilon}{2} b_1 &= 0 \\ (\delta - n^2) b_n + \frac{\varepsilon}{2} (b_{n-1} + b_{n+1}) &= 0 \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Si tomamos para n un valor finito, (7) y (8) nos suministrarán dos juegos distintos de ecuaciones lineales homogéneas, que para que sean verificadas por valores a_n y b_n distintos de cero, es preciso que el determinante de sus coeficientes se anule.

De dicha condición obtenemos una ecuación en δ y ε , que nos define la curva de transición. El mismo camino puede seguirse para el período 4π . Así se han trazado las curvas de la figura 23.

En ella vemos que para $\varepsilon = 0$, las regiones estables están conectadas en los puntos $\delta = \frac{n^2}{4}$ ($n =$ número entero). Los puntos indicados son los únicos que, siendo de transición, son estables; todos los demás son inestables.

Cuando ε es muy pequeño, que, como hemos indicado, es realmente lo que ocurre en muchos casos prácticos, Stoker emplea para la resolución del problema el método de las perturbaciones, para lo que desarrolla en potencias ε las soluciones $w(x, \varepsilon)$ y $\delta(\varepsilon)$, y así obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} w &= w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \dots \\ \delta &= \delta_0 + \varepsilon \delta_1 + \varepsilon^2 \delta_2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Las cantidades δ_i son constantes y las w_i son funciones de z , las cuales deben ser determinadas de la condición, que si w es una solución de (4) con período 2π ó 4π , se reduce a $\cos \frac{n}{2} z$ ó $\sin \frac{n}{2} z$ si $\varepsilon \rightarrow 0$.

Si llevamos (9) a (4), obtenemos:

$$(w''_0 + w''_1 + \dots) + (\delta_0 + \delta_1 + \dots) + \cos z (w_0 + w_1 + \dots) = 0$$

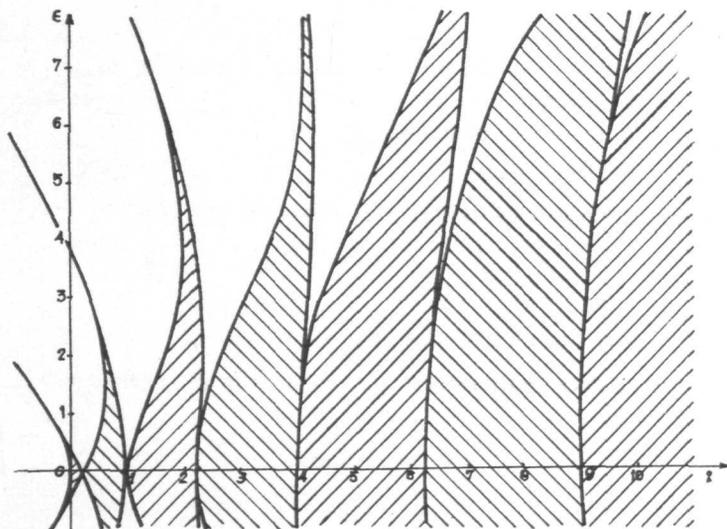


Fig. 23.

que únicamente será satisfecha si los coeficientes de todas las potencias de ε desaparecen. Por tanto, podemos establecer las siguientes ecuaciones diferenciales para la función w_i :

$$w''_0 + \delta_0 w_0 = 0$$

$$w''_1 + \delta_0 w_1 = -\delta_1 w_0 - w_0 \cos z$$

$$w''_2 + \delta_0 w_2 = -\delta_2 w_0 - \delta_1 w_1 \cos z$$

De esta expresión y de la condición que w_i tiene por período 2π ó 4π , la primera nos da para δ_0 y w_0

$$\delta_0 = \frac{n^2}{2} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$w_0 = \cos \frac{n}{2} z$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$w_0 = \operatorname{sen} \frac{n}{2} z$$

que naturalmente coinciden con los valores obtenidos en el estudio de la ecuación hecho anteriormente, en el supuesto de no ser ε muy pequeño.

Stoker estudia una mayor aproximación para $n = 0 - 1 - 2$.

Para $n = 0$, $\delta_0 = 0$, $w_0 = 1$ y la ecuación para w_1 es $w''_1 = -\delta_1 - \cos z$. Como w_1 ha de ser periódica es preciso que $\delta_1 = 0$, luego $w_1 = \cos z + c$ (constante).

La ecuación para w_2

$$w''_2 = -\delta_2 - (\cos z + c) \cos z = -\delta_2 - \frac{1}{2} \cos z - \frac{1}{2} \cos^2 z$$

por ser w_2 periódica, es preciso que $\delta_2 = -\frac{1}{2}$

Por tanto, para los términos por encima de ε^2

$$\delta = -1 \frac{1}{2} \varepsilon^2 + \dots$$

Para $n = 1$, $\delta_0 = \frac{1}{4}$, ó $w_0 = \cos \frac{z}{2}$ ó $w_0 = \operatorname{sen} \frac{z}{2}$. Si tomamos $w_0 = \cos \frac{z}{2}$ encontramos para w''_1 la ecuación

$$\begin{aligned} w''_1 + \frac{1}{4} w_1 &= (-\delta_1 - \cos z) \cos \frac{z}{2} = \\ &= \left(-\delta_1 - \frac{1}{2}\right) \cos \frac{z}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{3z}{2} \end{aligned}$$

Para que w_1 sea periódica, es preciso que $\delta_1 + \frac{1}{2} = 0$ y

$$\delta_1 = -\frac{1}{2}$$

luego

$$\delta = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \varepsilon^2$$

Si tomamos $w_0 = \text{sen } \frac{x}{2}$ se llega igualmente a

$$\delta = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$

Para $n = 2$, se obtiene $\delta_0 = 1$ y $w_0 = \cos x$ ó $w_0 = \text{sen } x$.

Con $w_0 = \cos x$, $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = \frac{5}{12} \epsilon^2$ y $\delta = 1 - \frac{5}{12} \epsilon^2$.

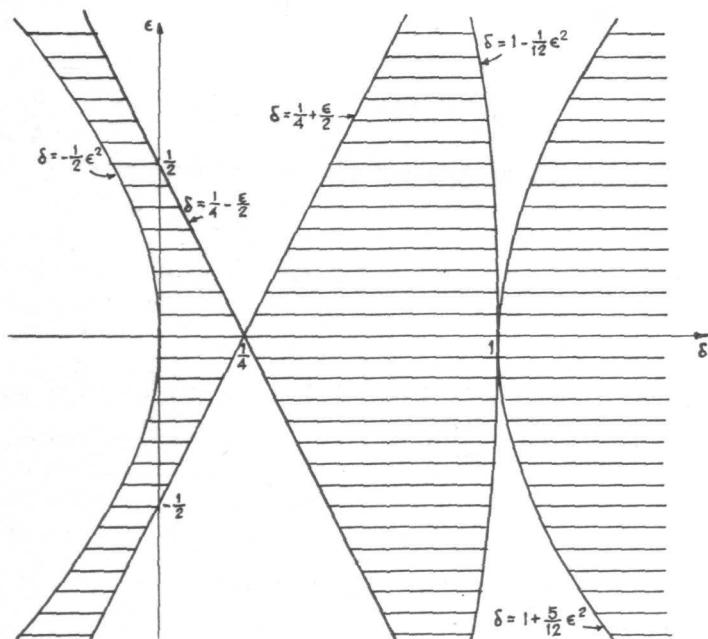


Fig. 24.

Con los resultados anteriores se ha construido la figura 24.

A continuación vamos a examinar algunos ejemplos guiados por dicha ecuación de Mathieu, y en los cuales se puede comprobar los efectos de inestabilidad indicados.

1.º Consideremos una varilla (fig. 25 a) de longitud $2l$ que lleva una masa m en su sección media, sometida a tracción vertical por

una fuerza S . Si desplazamos aquélla de su posición de reposo en la dirección x , la tensión de la barra en esta posición será

$$S' = S + AE \frac{x^2}{2l^2} \quad (7)$$

siendo:

A = área de la sección transversal de la varilla.

E = módulo de elasticidad de la varilla.

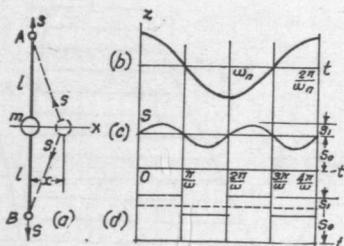


Fig. 25.

Por tanto, la ecuación del movimiento de la masa en el supuesto de x , muy pequeño, será

$$m \ddot{x} + \frac{2Sx}{l} = 0 \quad (8)$$

Si suponemos S constante, (8) representa un movimiento armónico simple de frecuencia $\omega_n = \frac{2S}{lm}$, y cuya amplitud depende de las condiciones iniciales. Si $x_0 = 0$ y $\dot{x}_0 = 0$ la masa permanece en su posición media y el equilibrio es estable.

Si ahora suponemos que

$$S = S_0 + S_1 \text{ sen } \omega t \quad (9)$$

la ecuación (8) toma la forma

$$m \ddot{x} + \frac{2(S_0 + S_1 \text{ sen } \omega t)x}{l} = 0 \quad (10)$$

Expresión que, según hemos indicado anteriormente, es la «ecuación de Mathieu».

Si admitimos que S_0 es bastante mayor que S_1 (caso de ε muy pequeño) podemos suponer que el movimiento de la masa m es armónico simple de período

$$T = \frac{2}{\omega_n} = 2\pi \sqrt{\frac{l m}{2 S_0}} \quad (11)$$

tal como se indica en la figura 25 b).

En la figura 25 c) está trazada la tracción fluctuante $S = S_1 \sin \omega t$ en el caso de que su período sea

$$T = \pi \sqrt{\frac{l m}{2 S_0}}$$

es decir, $\omega = 2\omega_n$. De dicha figura observamos que en el primer cuarto de período del movimiento, es decir, cuando la masa m va de su posición extrema a la media, y por tanto la fuerza restauradora y su camino recorrido tienen la misma dirección, lo que quiere decir que el trabajo por ella realizado es positivo, dicha fuerza es mayor que en el cuarto de período siguiente en el que dicho trabajo es negativo. Luego por cada medio período hay una introducción de energía en el sistema, y por tanto la amplitud de las oscilaciones crece sin cesar, a no ser que exista un amortiguamiento capaz de absorber la diferencia entre los trabajos positivo y negativo, durante aquel tiempo.

Experimentalmente puede comprobarse no solamente lo indicado, sino también que la posición media no es de equilibrio estable, si se aplica una tracción fluctuante S de frecuencia $\omega = 2\omega_n$.

La figura 25 d) corresponde al caso en que la fuerza restauradora cambia bruscamente cada cuarto de período de $+S_1$ a $-S_1$ en el que se produce el mismo fenómeno.

2.º Consideremos la figura 26 que representa un eje giratorio vertical, con secciones circular y rectangular, que lleva un disco en su mitad, al cual no se le permite flexarse más que en el plano del papel mediante las piezas A. Si producimos en el eje sin giro vibraciones laterales darán lugar a un movimiento vibratorio armónico del disco cuya frecuencia natural depende de la rigidez del eje en el plano

de la figura. Si se hace girar al eje, esta rigidez varía pasando en cada vuelta por dos máximos y dos mínimos. Como la fuerza restauradora es proporcional a dicha rigidez la podemos representar por $k + \Delta k \text{ sen } \omega_k t$, siendo $\omega_k = 2 \omega$, $\omega =$ velocidad angular del eje.

Por tanto, la ecuación del movimiento será

$$m \ddot{x} + (k + \Delta k \text{ sen } \omega_k t) x = 0 \quad (12)$$

que es también la ecuación de Mathieu.

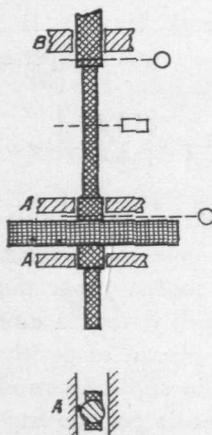


Fig. 26.

Si suponemos que Δk es muy pequeño de tal modo que las rigideces máxima $k + \Delta$ y mínima $k - \Delta$ se diferencian en una cantidad del orden de un 10 por 100, la diferencia entre las frecuencias naturales será del orden de un 5 por 100.

Podemos razonar como en el ejemplo anterior, y suponer primero que $\Delta k = 0$, con lo que el movimiento oscilante del eje será el indicado en la figura 27 (a) de frecuencia ω_n .

Si ahora suponemos que $\omega_k = 2 \omega_n$, la figura 27 (b) representa la oscilación de la fuerza restauradora. La parte baja de dicha figura indica las posiciones de la sección transversal del eje.

Del conjunto de la figura 27 vemos que cuando el disco se mueve de su posición extrema a la media (primer cuarto de período) en el que se produce trabajo positivo, la fuerza restauradora es mayor que

su valor medio. Lo contrario ocurre en el cuarto de período siguiente. Existe introducción de energía en cada medio ciclo, y por tanto las amplitudes pueden crecer indefinidamente, si no existe amortiguamiento suficiente.

Cuando el eje en vez de ser vertical como hemos supuesto, es horizontal, habrá que tener en cuenta las fuerzas de la gravedad. Si

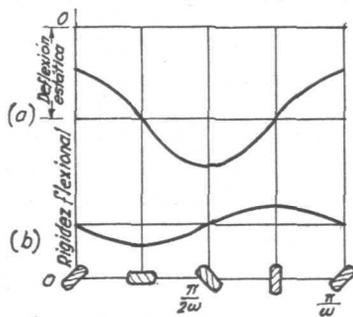


Fig. 27.

suponemos que la deflexión estática del eje, bajo las fuerzas de la gravedad, es mayor que sus amplitudes de vibración, las deformaciones totales siempre estarán por debajo del eje no flexado, tal como

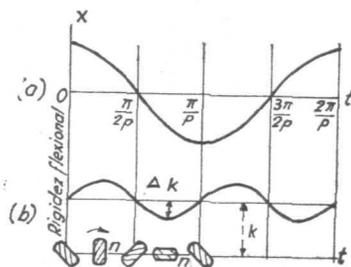


Fig. 28.

se indica en la figura 28. Sobre el disco actúan en todo instante dos fuerzas, una constante debida a la gravedad y otra variable, la reacción elástica del eje. El trabajo por ciclo de la primera es nulo. El trabajo de la segunda en el primer medio ciclo, en que el eje se mueve hacia abajo, como la reacción es hacia arriba, es negativo. En el segundo medio ciclo el trabajo es positivo. Si suponemos que el eje gira con la misma velocidad angular, que la correspondiente

a la vibración lateral (caso de la fig. 27 b), el trabajo positivo es igual al negativo. En cambio, si la velocidad del eje es la mitad de la correspondiente a la vibración lateral (caso de la fig. 28 b), el trabajo negativo del primer semiperíodo por ser la reacción elástica menor que su valor medio, es inferior al trabajo positivo del otro semiperíodo, en el que dicha reacción es mayor que aquel valor ; por tanto, se producirán grandes amplitudes de vibración.

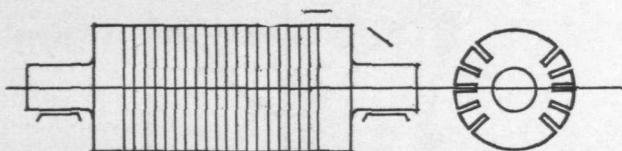


Fig. 29.

Este fenómeno se produce en a) rotores bipolares de máquinas eléctricas (fig. 29), en ejes corrientes con chaveteros que hacen no sea constante su flexibilidad. En este caso puede lograrse esta constancia, haciendo tres chaveteros a 120° (fig. 30) en un péndulo simple de longitud variable, donde se produce un fenómeno semejante

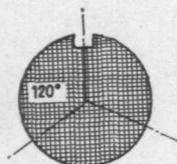


Fig. 30.

al de variación de la flexibilidad (fig. 31). Supongamos que mediante la fuerza S , podemos reducir la longitud l del péndulo.

La ecuación del movimiento es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{w}{g} l^2 \dot{\theta} \right) = -w l \sin \theta \quad (13)$$

El primer miembro representa la variación de la cantidad de movimiento angular respecto al punto O , y el segundo el momento de las fuerzas exteriores respecto al mismo punto.

La expresión (13) puede ponerse en la forma

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{l} \frac{dl}{dt} \dot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (14)$$

Si θ es muy pequeño

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{l} \frac{dl}{dt} \dot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (15)$$

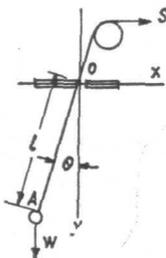


Fig. 31.

Cuando l es constante

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (16)$$

que es la ecuación del péndulo simple.

En el supuesto de l variable, el término $\frac{2}{l} \frac{dl}{dt} \dot{\theta}$ viene a representar una fuerza de amortiguamiento no viscoso. Además, un cambio periódico en la longitud l significa un cambio periódico en la fuerza restauradora. Si $\frac{dl}{dt}$ se hace negativo (amortiguamiento negativo) tendremos una introducción de energía en el sistema, y por tanto grandes amplitudes de vibración. Evidentemente, esta energía tiene que ser debida al trabajo de la fuerza S , al acortarse la longitud l del péndulo. Como en casos anteriores, si suponemos que $\frac{d\theta}{dt}$ es casi constante, podemos trazar las curvas $\theta = f(t)$ y $\frac{d\theta}{dt}$. Si ha-

cemos que el período de $\frac{dl}{dt}$ sea la mitad que el de $\theta = f(t)$, y ha-
 cemos que la línea $\frac{dl}{dt}$ tome una posición tal respecto a $\frac{d\theta}{dt}$, que el
 máximo amortiguamiento negativo coincida con la máxima veloci-
 dad (fig. 32), se producirá una disminución en la longitud l , en tan-
 to que la velocidad $d\theta/dt$ es grande, y lo contrario cuando ésta es
 pequeña. Puede lograrse prácticamente esto, haciendo que en la po-
 sición media del péndulo, θ máximo, se produzca el acortamiento del
 hilo, y en las posiciones extremas, θ nulo el alargamiento. La masa
 péndulo describe así un ocho. Como la fuerza S debe equilibrar la

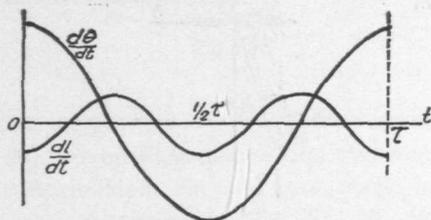


Fig. 32.

componente radial y la fuerza centrífuga del peso W , será mayor en
 la posición central que en las extremas. Por tanto, el trabajo por ella
 realizado es mayor en los períodos de acortamiento (trabajo positivo)
 que en los de alargamiento (trabajo negativo), existiendo una intro-
 ducción de energía en el sistema.

Del mismo modo que hemos comprobado que un péndulo nor-
 mal con su masa por debajo del punto de suspensión, y por tanto en
 posición de equilibrio estable, puede colocarse en situación de ines-
 tabilidad, mediante la aplicación de una fuerza periódica en el hilo,
 vamos a comprobar que un péndulo invertido, y por tanto en posi-
 ción de inestabilidad, puede transformarse en estable mediante la
 aplicación de una fuerza periódica en el punto de suspensión.

Consideremos un péndulo invertido, cuya masa se ha desplazado
 de la vertical (fig. 33).

Suponemos que además de la fuerza mg sobre la masa, actúa en
 el extremo de la varilla A una fuerza periódica de componentes $x(t)$

e $y(t)$. Si despreciamos la masa de la varilla la ecuación del movimiento se obtendrá de

$$m \ddot{x} = x \quad (17)$$

y

$$y l \sin \theta - x l \cos \theta = 0 \quad (18)$$

Esta (18) representa el momento de las fuerzas exteriores respecto a B, que debe ser nulo, ya que se supone la masa concentrada en dicho punto, es decir sin momento de inercia.

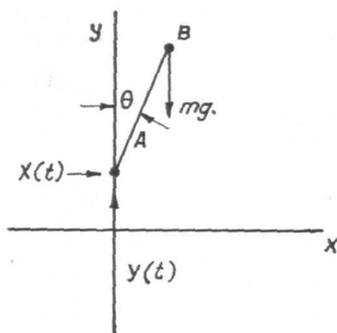


Fig. 33.

En el supuesto de ser θ muy pequeño $\sin \theta \approx \theta$ $\cos \theta \approx 1$, luego

$$\begin{aligned} y l \theta - x l &= 0, \\ x &= y \theta. \end{aligned} \quad (19)$$

Como además

$$x = l \sin \theta \approx l \theta \quad (20)$$

la ecuación del movimiento será

$$m l \theta - y \theta = 0 \quad (21)$$

Si suponemos que la componente y de la fuerza aplicada es de la forma $y = mg - m \varphi(t)$ la ecuación (21) toma la forma

$$\ddot{\theta} + \left(-\frac{g}{l} + \frac{1}{l} \right) \varphi(t) \theta = 0 \quad (22)$$

que es la ecuación de Hill, y sabemos que la función $\varphi(t)$ puede ser elegida de modo que se obtengan para (22) soluciones limitadas, es decir, estables.

d) También se presentan vibraciones de la clase expuesta en las

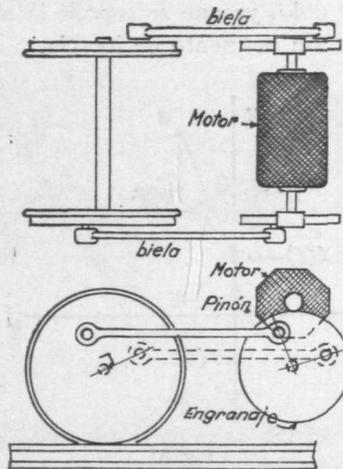


Fig. 34.

locomotoras eléctricas, de tipo de biela de costado, en las que se producen violentas vibraciones de torsión, dentro de ciertos márgenes de velocidad, debido a que la rigidez de la conexión elástica (bielas) varía con su posición angular, pasando cuatro veces por un máximo y un mínimo en cada revolución del motor conductor. Como vemos en la figura 34, un motor eléctrico colocado en una cuaderna de la locomotora, mediante un piñón y rueda dentada transmite el movimiento por dos bielas a dos ruedas motoras de la máquina. Las bielas están defasadas $\pi/2$.

VIBRACIÓN FORZADA CON AMORTIGUAMIENTO NO LINEAL

En este caso, la complicación de la resolución de ecuación diferencial es tal, que únicamente se ha logrado en el caso de fricción seca, por lo que se suele emplear el mismo método aproximado, indicado para la vibración libre. Es decir, determinar el amortiguamiento lineal equivalente, y sustituir este valor en las expresiones de la vibración forzada lineal con amortiguamiento.

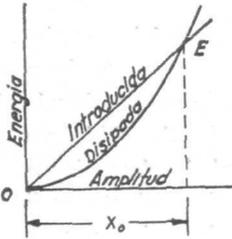


Fig. 35.

La amplitud del movimiento lineal, en la vibración forzada con amortiguamiento, sabemos es

$$x_0 = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{w^2}{w_n^2}\right)^2 + \left(\frac{c w}{k}\right)^2}} \quad (1)$$

Por tanto, cuando la vibración no sea lineal habrá que sustituir c por el coeficiente de amortiguamiento equivalente c_{eq} determinado como ya indicamos anteriormente.

Si aplicamos este método al caso de fricción seca o de Coulomb en el que $f(\dot{x}) = \pm F$,

$$c x_0^2 w \pi = 4 F x_0$$

luego

$$c_{eq} = \frac{4 F}{\pi w x_0}$$

Con lo que (1) se transforma en

$$x_0 = \frac{F_0^2}{4c} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{4}{\pi} \frac{F}{F_0}\right)^2}}{1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2} \quad (2)$$

La comparación de (2) con el valor obtenido mediante la resolución de la ecuación, comprueba que el error cometido es muy pequeño.

De la expresión (2) vemos que para valores de $\frac{F}{F_1} < \frac{\pi}{4}$ siempre que $w = w_n$, $x_0 = \infty$ a pesar del amortiguamiento, lo que por otra parte no debe extrañarnos, ya que la fuerza de amplitud F_0 introducirá en el sistema un trabajo proporcional a la amplitud x_0 , que puede ser mayor que el trabajo absorbido por el amortiguamiento, que también es proporcional al desplazamiento.

En cambio, si el amortiguamiento es lineal, la energía introducida es proporcional al desplazamiento x_0 , pero en cambio la disipada lo es a su cuadrado x_0^2 . Por tanto, podemos construir la figura 35 en la que la recta O E representa la energía introducida, y la parábola la energía disipada $E = c F x_0^2$. Ambas tendrán siempre un punto de intersección, es decir, de equilibrio.

* * *

Lo anteriormente expuesto comprueba una vez más la necesidad de una estrecha colaboración entre la ciencia y la técnica. Ello es debido a que en la actualidad los progresos en esta última son tan enormes, que no pueden realizarse como ocurría con anterioridad, basados casi exclusivamente en la experiencia, por lo que naturalmente eran lentos, sino que necesitan la aportación de grandes conocimientos matemáticos, físicos, químicos, resistencia de materiales, vibraciones, etc. A esa colaboración he dedicado los mejores afanes de mi vida.

Por último, deseo expresar mi más sincero agradecimiento a mi admirado y antiguo profesor Dr. Palacios, por su amabilidad al contestar mi discurso.

DISCURSO DE CONTESTACION

POR EL ACADEMICO NUMERARIO

EXCMO. SR. D. JULIO PALACIOS MARTINEZ

Señores Académicos :

Dentro de pocos momentos va a recibir D. Felipe Lafita Babío, de manos del Presidente, la medalla que simboliza su cargo de miembro numerario de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Voy a hablaros un poco de esta medalla para que os déis cuenta de la significación del acto a que asistimos.

La medalla está timbrada con la corona real y pende de un cordón azul, color que en España simboliza las ciencias matemáticas y de la naturaleza. En el anverso lleva una leyenda que dice: OBSERVACIÓN Y CÁLCULO. La observación está representada por un ojo y por una lupa ; el cálculo por un compás. En el reverso, llevan nuestras medallas el nombre de la Academia y un número que va del 1 al 36, pues este último es el número total de Académicos, doce por cada sección.

Al comparar unas medallas con otras, se nota una curiosa peculiaridad sobre la que quiero llamar la atención, porque se debe a una de esas anécdotas que retratan el espíritu de una época. Ocurre que en algunas medallas, por ejemplo en la mía, está grabada en el esmalte la palabra *Real*, la cual falta en otras. Todo en las Academias adquiere con el tiempo valor histórico, y es posible que algún curioso trate de averiguar, sin conseguirlo, el porqué de tales discrepancias. Para que la verdad quede en su punto, he aquí la explicación.

Prescindiendo de antecedentes que se remontan a los tiempos del Rey Felipe V, y que pueden calificarse de malogrados, nuestra Academia fue fundada por la Reina Isabel II, y por eso están timbradas nuestras medallas con los atributos de la realeza. El año 1931, al ser implantada la República, dispuso su Presidente, D. Niceto Alcalá Zamora, que la corona real fuese sustituida por la mural y que se suprimiese la palabra real. De estas alteraciones no se libraron más que las medallas que no estaban en uso o las pertenecientes a quie-

nes no obedecieron la orden por considerarse obligados a devolverlas tal como las habían recibido.

La medalla que ostentará el señor Lafita lleva el número 29, que sirve para reconstruir su historia, porque permite averiguar quiénes la utilizaron. Su primer poseedor fue el General del Cuerpo de Estado Mayor D. Manuel Monteverde y Bethencourt, que ingresó el año 1851. Siguieron el Capitán de Navío D. Salvador Moreno y Miranda, el Brigadier de la Armada D. Francisco de Paula Márquez y Roca, D. Simón Archilla y Espejo, Catedrático de la Facultad de Ciencias, D. Javier los Arcos y Miranda, Ingeniero Militar, D. Miguel Vegas, mi venerado maestro a quien rindo aquí mi homenaje de gratitud y, finalmente, nuestro malogrado compañero D. Eduardo Torroja y Miret, Ingeniero insigne que gozó de merecido prestigio dentro y fuera de España y de quien acabáis de oír el protocolario elogio.

La medalla 29 recae ahora en un dignísimo sucesor de los preclaros militares, marinos, matemáticos e ingenieros que la poseyeron en vida, y, por cierto que el lema OBSERVACIÓN Y CÁLCULO le viene como anillo al dedo según vamos a ver.

Nació Lafita en Portugalete el año 1902. Por imperativos geográficos es Vizcaya tierra de navegantes, y no es aventurado suponer que si nuestro protagonista hubiese seguido los naturales impulsos de su infancia sería ahora un buen marino. Pero, como ocurre con lo más selecto de la juventud española, aspiraba a ser ingeniero, y a los quince años dio prueba de sus dotes excepcionales aprobando el primer grupo de ingreso en la Escuela de Ingenieros Industriales de Bilbao.

Si nuestra juventud fuese tratada como merece, Lafita habría podido terminar su carrera con no más de veinte años edad y empezar a ser un hombre útil en pleno vigor juvenil. Pero las cosas fueron de otra manera, y hubieron de transcurrir tres años, los mejores de la juventud, hasta que ingresó en el cuerpo de Ingenieros Navales de la Armada. Oficialmente nada se puede averiguar de lo que hizo entre sus quince y dieciocho años, pero no es difícil averiguar que este injustificado y pernicioso retraso, que en mayor o menor grado sufre toda la juventud estudiosa, se debe a un malhadado sistema que convierte nuestras Escuelas Técnicas Superiores, y recientemente también nuestras Universidades, en reductos bien defendidos que hay que tomar a fuerza de asaltos que suelen terminar en descorazona-

dores descalabros. Muchos son los que fracasan en este empeño y, justamente amargados, pasan a constituir un proletariado intelectual propenso a todas las subversiones.

Felizmente, Lafita poseía la suficiente tenacidad, aparte de sus dotes intelectuales, para mantenerse a flote donde tantos naufragan, y no sólo esto, sino que pudo levantar el vuelo hacia regiones más elevadas. Tras de ejercer algunos cargos que, aunque prestigiosos, podemos calificar de casi burocráticos, nos lo encontramos el año 1930 como alumno de la Escuela Superior Aeronáutica, que dirigía el que fue compañero nuestro D. Emilio Herrera con la colaboración de otros insignes académicos como Terradas, Rey Pastor, Puig Adam y San Juan, que supieron dar a la incipiente Escuela un prestigio que todavía se refleja en los ingenieros que en ella se formaron.

Dos años bastaron a Lafita para especializarse en la nueva técnica, y de cómo lo hizo es buena prueba el que en ambos cursos obtuvo el primer puesto en una promoción formada por una selección de Ingenieros de Caminos, Industriales, Navales, de Minas, Ingenieros Militares y Artilleros. Por tan brillante actuación le fue concedida la Cruz de Mérito Naval de 2.^a clase. Por cierto que puedo alardear de haber sido profesor de tan sobresaliente alumno, aunque sólo sea por algunas semanas.

En 1932 comenzó Lafita a ejercer su nueva profesión con el cargo de Inspector de la Aviación Militar en Cádiz, y bien se puede afirmar que esta circunstancia ha tenido trascendentales consecuencias para la historia de nuestra patria. En Cádiz estaba Lafita cuando se produjo el alzamiento nacional contra el régimen republicano, y sin duda el prestigio logrado en el desempeño del cargo de Inspector, juntamente con su preparación teórica, le valieron el ser nombrado Jefe de los Servicios Técnicos de la Aviación Nacional, y así tuvo ocasión de contribuir a los brillantes éxitos de nuestras fuerzas aéreas.

Nuestra guerra partió en dos la vida de los españoles que tomaron en ella parte activa o pasiva y casi todos nos vimos obligados a cambiar de rumbo, unas veces para mal y otras para bien. Hubo que improvisar la vida pacífica en una España convertida en escombros en toda su geografía y en todos sus estamentos sociales. Todo estaba organizado para la guerra y desorganizado para la paz. Es natural que el reajuste fuese difícil y que no siempre encontrase cada cual el puesto más adecuado para el ejercicio de sus actividades. No

fue éste, por fortuna, el caso de Lafita. Fue nombrado Director y Profesor de Aerodinámica Aplicada en la Escuela Superior Aerotécnica, que, de este modo, inició su nueva etapa. Fue uno de los casos felices de perfecta adaptación entre el hombre y el cargo.

Bajo la dirección de Lafita siguieron en vigor las normas establecidas por Herrera. No bastaba para ser profesor el figurar en el escalafón de ingenieros, sino que era preciso el ser especialista en la materia y no se exigía el título de ingeniero.

Una especialización prematura es siempre nociva. La ciencia no está constituida por recintos inconexos, y mal se podrá cultivar una parcela sin tener ideas amplias sobre el conjunto. Lafita, a sus treinta y siete años, con ese vigor juvenil que le caracteriza, con una extensa cultura adquirida en el ejercicio de variadísimas actividades, estaba en perfectas condiciones para especializarse a fondo en la disciplina de que era profesor. Es la Aerodinámica una ciencia nueva que no puede cultivarse sin un perfecto dominio de la Física teórica y que exige estar al tanto de sus progresos para exponerlos en forma adecuada a la preparación de los alumnos .

Esta labor pedagógica fue llevada a cabo por Lafita en forma ejemplar. A mano tengo sus cinco volúmenes, que abarcan la Elasticidad, la Resistencia de Materiales, la Aerodinámica Aplicada y la Técnica del Hidroavión. Por no alargar excesivamente este acto no puedo comentarlos como se merecen, pero me bastará decir en su elogio que los utilizo frecuentemente como libros de consulta y que siempre he encontrado en ellos cumplida información, por lo que he hecho en mis publicaciones muchas citas de los mismos.

Permaneció Lafita en la Dirección de la Escuela hasta que se convirtió en Academia Militar de Ingenieros Aeronáuticos, pero persistió en su vocación docente explicando Elasticidad en la Escuela de Ingenieros Navales. Es miembro de honor del Instituto Aeronáutico Lilientahl de Berlín, y en 1942 fue nombrado Director del Instituto de Técnica Aeronáutica. Ha sido vocal de la Comisión Permanente de Pesas y Medidas.

Cuando se llega a los sesenta años con merecidos éxitos y honores y con holgada posición económica, es cosa insólita pensar en realizar nuevos exámenes. A cualquiera le faltaría fuerza de voluntad y confianza en sí mismo para someterse a prueba tan desagradable. No así a nuestro Lafita, quien no hace más de dos años obtuvo la calificación de sobresaliente en el examen de reválida que le valió

el título de Ingeniero Industrial, con lo que terminó una carrera iniciada cuarenta y tantos años antes.

Se ha especializado Lafita en los fenómenos vibratorios, de tan capital importancia, no sólo en ingeniería, sino en la ciencia pura. Sobre este tema tiene en preparación un libro, del que nos ha ofrecido las primicias en el discurso que acaba de leer.

Un universo en equilibrio sería un mundo muerto en el que nada podría suceder. Si estuviera formado por cuerpos rígidos con movimientos ordenados a la manera como se mueven los astros, no habría procesos irreversibles y todo se repetiría con arreglo a leyes inexorables. Quizá pudiese haber en él autómatas, pero no hombres capaces, a su capricho, de moverse a sí mismos y de mover otros cuerpos. De aquí que la llamada Mecánica Racional, que sirve admirablemente para explicar el movimiento de los astros, debiera llamarse, como hizo notar Sommerfeld, Mecánica Celestial, para distinguirla de la Mecánica que necesita el físico y el ingeniero.

Todos los cuerpos que manejamos son deformables y elásticos hasta cierto límite. Basta una percusión para que vibren, de modo que cada partícula oscila en torno de su posición de equilibrio, y si la percusión se repite con ritmo adecuado, esto es, si hay resonancia, crece más y más la amplitud de las oscilaciones hasta que sobreviene la rotura. Un pelotón de soldados que marchaba marcando el paso hundió en Manchester un puente colgante capaz de soportar una carga de muchas toneladas. En todo mecanismo hay piezas que ejecutan movimientos periódicos y que, por consiguiente, ejercen acciones que se repiten con intervalos regulares. El constructor ha de tener cuidado de que no haya concordancia entre el ritmo de estas acciones y el período propio de alguna pieza.

Lafita, que empezó construyendo buques y se apasionó luego por la Aerodinámica, dedica ahora su atención a los fenómenos de resonancia. A primera vista podría tildársele de versatilidad, pero, en el fondo, la trayectoria es perfectamente lógica, y prueba de ello son los dos casos de rotura imprevista que nos ha referido. Quien haya aprendido que la resonancia se produce cuando los materiales son sometidos a acciones intermitentes, no podrá explicarse por qué un viento de tan sólo 65 km/h. pudo destruir el puente colgante del río Tacoma, en Washington, ni por qué ocurrieron las reiteradas catástrofes de los *Comet*.

¿Cómo se explica que una acción, sin intermitencias, pueda pro-

vocar la resonancia? Y, sin embargo, este fenómeno ha sido observado desde los tiempos más remotos. Si a una cuerda tensa se aplica una fuerza constante cargándola con pesos, se producirá una deformación constante, pero si la fuerza es ejercida por una corriente fluida, resulta el arpa eólica, cuyo funcionamiento no ha sido explicado hasta que Kármán descubrió que tras la cuerda, y en general tras un cuerpo cualquiera bañado por una corriente, se originan dos rosarios o calles de remolinos que se suceden rítmicamente. He aquí la razón de que tan sólo con auxilio de la Aerodinámica se pueda explicar el hundimiento del citado puente y la rotura de los aviones *Comet*.

Entre los muchos fenómenos de resonancia estudiados por Lafita hay uno que me ha interesado de modo especial. Los árboles de transmisión, aunque estén perfectamente equilibrados, experimentan oscilaciones transversales que, en ocasiones, originan la rotura. Esto me ha hecho recordar un fenómeno que observé hace ya muchos años y que puede ser la causa de tales oscilaciones. Es sabido que en un sólido puesto en rotación y abandonado a sí mismo, son estables los ejes de máxima y de mínima inercia, de donde sacan todos los autores la consecuencia de que lo mismo sucederá cuando la rotación es mantenida mediante un motor. Pero al tratar de comprobar experimentalmente esta predicción, me encontré con la sorpresa de que solamente es estable la rotación en torno al eje de máxima inercia. Si se pone en rotación un cilindro alargado, mediante una conexión flexible aplicada a uno de sus extremos, nunca se logra que el cilindro gire en torno de su eje de revolución. Siempre cabecea, y, en cuanto la rotación es suficientemente rápida, acaba por colocarse en posición transversal, con lo que ya no gira en torno de su eje de revolución, sino en torno del eje de máxima inercia. En cambio, si se trata de un disco, la rotación en torno del eje de revolución es perfectamente estable. Esto revela que cuando un cuerpo es forzado a girar mediante una conexión flexible, sólo es estable el eje de máxima inercia. Pude demostrar que para explicar este hecho es preciso completar la teoría mediante un nuevo principio, que dice así:

Un cuerpo obligado a girar con velocidad constante, tiende a colocarse de modo que su energía cinética sea máxima.

La utilidad de este nuevo principio se puso de manifiesto al tratar de construir en el Instituto de Torres Quevedo un modelo reducido de los barcos veleros de Flettner, en los que el velamen es

sustituido por discos verticales giratorios con los que se aprovecha el efecto de Magnus. El modelo llevaba un solo cilindro que tenía libre el extremo superior y era puesto en rotación mediante un motorcito colocado en su parte inferior. En estas condiciones se producían en el cilindro violentas oscilaciones, pero bastó colocar un aro de plomo, a fin de que el eje de rotación fuese el de máxima inercia, para lograr una estabilidad perfecta.

En los árboles de transmisión se encargan los cojinetes de impedir las oscilaciones transversales, cosa que sucederá mientras no haya holguras. Sería muy conveniente tomar la precaución de que el eje del árbol sea el de máxima inercia, pues con ello se evitaría el desgaste prematuro de los cojinetes y las oscilaciones que, con ello, sobrevendrán inevitablemente. He aquí uno de los muchos temas de investigación que sugiere la lectura de las publicaciones de Lafita.

Hay otra faceta de las actividades de nuestro nuevo compañero que merece especial mención. Tenemos en él un hombre de empresa, cosa tan necesaria en estos tiempos en que el progreso industrial es asunto de vida o muerte para las naciones. Además, por su cargo de Director en una gran empresa eléctrica, está vinculado activamente a la Fundación Juan March. Es esta ocasión oportunísima para rendir público homenaje a la memoria del generoso mecenas y gran financiero, que de modo tan eficaz está fomentando la investigación pura y aplicada. Lo hago en nombre de nuestra Real Academia y en nombre propio, pues a ello me obliga un elemental deber de gratitud.

He dicho.