REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

Medidas en espacios topológicos

DISCURSO

LEIDO EN EL ACTO DE SU RECEPCION

POR EL

EXCMO. SR. D. BALTASAR RODRIGUEZ-SALINAS
PALERO

Y

CONTESTACION

DEL

EXCMO. SR. D. GERMAN ANCOCHEA QUEVEDO

EL DIA 19 DE MAYO DE 1976

MADRID
DOMICILIO DE LA ACADEMIA:
VALVERDE, 22.—TELEFONO 221-25-29
1976

Depósito Legal: M. 15.980.-1976

TALLERES GRÁFICOS VDA. DE C. BERMEJO - J. GARCÍA MORATO, 122 - MADRID

DISCURSO

DEL

EXCMO. SR. D. BALTASAR RODRIGUEZ-SALINAS PALERO

TEMA

MEDIDAS EN ESPACIOS TOPOLOGICOS

Excmo. Sr. Presidente.
Excmos. Sres. Académicos.
Señoras y Señores.

En un acto tan importante para mí como éste, me es difícil expresar exactamente los sentimientos que me embargan hacia tan ilustre Corporación, que se ha dignado elegirme, por unanimidad, para formar parte de ella. Justicia es que reconozca y agradezca profundamente el gran honor que se me ha concedido con esta elección, en la que se manifiesta el afecto y simpatía que me une con sus miembros. Tanto honor me obliga a mucho, tanto que no puedo saber yo mismo si podré ser útil para los altos fines que tiene encomendados esta Real Academia.

Solamente puedo asegurar, reiterando mi gratitud, que intentaré corresponder a él y a las esperanzas que han puesto en mí, poniendo todo mi fervor y entusiasmo en las tareas que me sean encomendadas como miembro de ella. No he de negar que me siento abrumado por la responsabilidad que he contraído al aceptar tal distinción, pero siento un gran alivio pensando que siempre podré contar con la ayuda y dirección de los miembros tan valiosos con que cuenta la Real Academia de Ciencias de Madrid.

Debo ocupar en esta Academia la vacante producida por el fallecimiento de D. Antonio Torroja Miret, quien ostentaba la medalla número 18.

Don Antonio Torroja nació el 12 de septiembre de 1888 en Tarragona. Era hijo del ilustre y conocido matemático don Eduardo Torroja Caballé, catedrático de Geometría de la Posición en la Universidad de Madrid. Sus hermanos: José María, Eduardo y Juan, los dos primeros miembros de esta Academia, fueron también figuras científicas relevantes en sus respectivas especialidades. Estudió en Madrid, simultáneamente y con gran brillantez, la licenciatura en

Ciencias Exactas y la carrera de Ingeniero de Minas, doctorándose en Ciencias en 1911. Al año siguiente ingresó en el Instituto Geográfico y Catastral como Ingeniero Geógrafo.

En 1917 obtuvo por oposición la Cátedra de Geometría Descriptiva de la Universidad de Zaragoza, pasando un año después por concurso de traslado a desempeñar la misma Cátedra de la Universidad de Barcelona, en la que sirvió cuarenta años, hasta su jubilación. Aquí desempeñó además, como acumulada, la asignatura de Geometría de la Posición, después Geometría Proyectiva y hoy Geometría III. El mismo año de su llegada a Barcelona fue nombrado Profesor titular de Mecánica Aplicada de la Escuela Industrial, hoy Escuela de Ingenieros Técnicos, de la que fue director de 1928 a 1936.

En la Universidad de Barcelona ocupó importantes cargos de gobierno. Decano de la Facultad de 1939 a 1941. Rector de la Universidad desde 1957 hasta 1963, para ser nombrado después Rector Honorario de la misma hasta su fallecimiento.

Fue nombrado Corresponsal de esta Academia en 1919. El 19 de mayo de 1924 leyó el discurso de recepción en la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona, siendo contestado por don Esteban Terradas. Más tarde, el 21 de abril de 1943, fue elegido Numerario de la Real Academia de Ciencias de Madrid, leyendo su disertación de ingreso el 7 de diciembre de 1947, en donde puso de manifiesto su preocupación constante sobre la íntima conexión que debe guardar la Matemática con la Técnica.

Junto a la labor docente se consagró con igual entusiasmo a la investigación. A sus 22 años, en 1910, presentó en el Congreso para el Progreso de las Ciencias, celebrado en Valencia, una nota «Sobre un Problema de Geometría» en la que dio una solución de un problema de Fotogrametría, que volvió a resolver de otra forma en «Nueva solución de un problema de Fototopografía». A estos trabajos, sucede el que publicó en 1915 sobre «El Estereógrafo», que inventó en colaboración con su hermano José María, introductor de la Fotogrametría en España. En 1912 publicó en nuestra Revista «Estudio geométrico de la curvatura de las superficies alabeadas en general», al que siguieron los trabajos: «Representación gráfica de espacios superiores», «Cuádricas invariantes en una homografía», «Determinación gráfica de la curvatura de una superficie alabeada» y «Estudio de las homografías cíclicas en un espacio de n dimensiones».

Posteriormente, su labor al frente de la Sección de Geometría del Seminario Matemático de Barcelona se dirigió principalmente a la formación de investigadores. Habiendo sido desde antes Director efectivo del mismo y después honorario hasta su fallecimiento el 4 de mayo de 1974.

Antes de tratar de la teoría de la medida en espacios topológicos, creemos conveniente hacer una breve exposición previa de carácter general.

Una medida es una función real de conjunto μ, no negativa, definida sobre una clase $\mathcal{H}$ de partes de un conjunto E, finita para algún $A \in \mathcal{H}$ y tal que $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ para dos cualesquiera conjuntos disjuntos A y B, siempre que A, B y la unión $A \cup B$ pertenezcan a $\mathcal{H}$. Si $\mathcal{H}$ es la clase de los intervalos de la recta y μ es la función que asigna a cada intervalo A su longitud $\mu(A)$, se obtiene uno de los ejemplos más sencillos de medida. En el plano se puede dar otro ejemplo de medida tomando como $\mathcal{H}$ la clase de los polígonos y como $\mu(A)$ el área del polígono A. Ambas medidas son, respectivamente, invariantes por los grupos de movimientos euclídeos de la recta y del plano.

Uno de los primeros problemas que se plantean en la teoría de la medida es extender una medida μ en una nueva medida μ definida sobre una clase $\bar{\mathcal{H}}$ más amplia de conjuntos. Un problema semejante se resuelve en el plano cuando se define el área de un círculo, que sugiere el siguiente procedimiento de Peano-Jordan. Sea $\mathcal{H}^*$ la clase de los conjuntos A contenidos en algún $X \in \mathcal{H}$, entonces se define la *medida exterior* μ^* y la *medida interior* μ_* por

$$\mu^*(A) = \inf \{ \mu(X) : A \subset X \in \mathcal{H} \} \tag{1.1}$$

y

$$\mu_*(A) = \sup \{ \mu(X) : A \supset X \in \mathcal{H} \}, \tag{1.2}$$

es decir, $\mu^*(A)$ es el mayor número real, finito o infinito, no superior a las medidas $\mu(X)$ de los conjuntos X tales que $A \subset X \in \mathcal{H}$ y $\mu_*(A)$ es el menor número real, finito o infinito, no inferior a las medidas $\mu(X)$ de los conjuntos X tales que $A \supset X \in \mathcal{H}$.

Un conjunto $A \in \mathcal{H}$ se dice «medible» en el sentido de Peano-Jordan si ambas medidas, interior y exterior, son iguales. Si $\overline{\mathcal{H}}$ es la clase de tales conjuntos medibles y para cada $A \in \overline{\mathcal{H}}$ se denota por $\overline{\mu}$ (A) dicho valor común $\mu_*(A) = \mu^*(A)$, se obtiene una nueva medida $\overline{\mu}$ que es una extensión de μ. Por lo tanto, la medida $\overline{\mu}$ (A) de un conjunto medible A es el número real determinado por la propiedad de ser mayor o igual que las medidas μ (X) de los conjuntos $X \in \mathcal{H}$ contenidos en A y ser menor o igual que las medidas μ (X) de los conjuntos $X \in \mathcal{H}$ que contienen a A. De esta forma, en el plano, el área de un círculo A es no inferior a las áreas de los polígonos contenidos en A y no superior al área de los polígonos que contienen a A. El método de Peano-Jordan equivale en el caso del plano al proceso de tomar como medida de un conjunto acotado A el número real que resulta haciendo tender ε a 0 en la suma de las áreas de los cuadrados de un ε-reticulado que tienen algún punto común con A, con tal que la diferencia entre esa suma y la suma de las áreas de los cuadrados del mismo reticulado, contenidos en A, tienda a 0 con ε.

El método de Peano-Jordan se puede aplicar con ligeras modificaciones para definir la *integral* de una función. Así se definen las integrales *superior* e *inferior* $\int^* f\, d\mu$ y $\int_* f\, d\mu$, de una función real acotada f, definida sobre E y nula fuera de un conjunto de medida finita, por

(2.1) $$\int^* f\, d\mu = \inf \{ \int g\, d\mu : f \leqslant g \in \mathcal{F} \}$$

y

(2.2) $$\int_* f\, d\mu = \sup \{ \int g\, d\mu : f \geqslant g \in \mathcal{F} \},$$

siendo $\mathcal{F}$ la clase de las funciones simples, y $\int g\, d\mu = \Sigma\, a_i\, \mu(A_i)$ si g es la función simple $\Sigma\, a_i\, \chi_{A_i}$. Entonces una función f se dice *integrable Riemann-Stieltjes* si ambas integrales, superior e inferior, son iguales y se llama *integral de Riemann-Stieltjes* a dicho valor común, que se denota usualmente por $\int f\, d\mu$. Utilizando el valor $+\infty$ se pueden extender estas integrales para funciones reales, no negativas, cualesquiera. Así la integral superior (resp. inferior) de la función característica de un conjunto A es igual a la medida exterior $\mu^*(A)$ (resp. interior $\mu_*(A)$):

(3) $$\int^* \chi_A\, d\mu = \mu^*(A) \qquad (\text{resp. } \int_* \chi_A\, d\mu = \mu_*(A)).$$

La dificultad que presenta la extensión de una medida a una clase más amplia que la formada por los conjuntos medibles en el sentido de Peano-Jordan se debe, cuando existan tales extensiones, no a que existan «pocas» sino a que hay «demasiadas». En efecto, si como Borel y Lebesgue se buscan, por ejemplo en el plano, extensiones del área que sean *numerablemente aditivas*, se reduce el número de tales extensiones y se obtiene una medida, llamada de Borel o de Lebesgue, definida en una clase más amplia de conjuntos. Otro camino para probar la existencia de tales extensiones consiste en utilizar el axioma de elección u otro análogo. Así se halla una medida finitamente aditiva sobre la clase de todos los subconjuntos del plano, invariante por el grupo de movimientos euclídeos del plano, que es extensión de la medida de Peano-Jordan.

En general, como consecuencia del teorema de Hahn-Banach se deduce que toda medida μ, definida sobre una clase finitamente aditiva $\mathcal{A}$ de partes de un conjunto E, se puede extender en una medida $\bar{\mu}$, llamada ultracompleción de μ, definida sobre la clase $\bar{\mathcal{A}}$ de los conjuntos $\bar{A}$ contenidos en algún $A \in \mathcal{A}$. El conjunto de los valores $\bar{\mu}(A)$ de todas estas medidas es justamente el intervalo $[\mu_*(A), \mu^*(A)]$ de extremos $\mu_*(A)$ y $\mu^*(A)$.

Dentro de estas ideas se plantea la cuestión de estudiar los grupos G para los que existe una medida finitamente aditiva μ, definida para todas las partes de G con $\mu(G) = 1$ e invariante a la izquierda: $\mu(\sigma A) = \mu(A)$. El primero que estudió este problema de forma general fue Von Neumann en 1929, quien también llamó *medibles* a estos grupos. Entre las propiedades más importantes de los grupos medibles se debe citar que todo grupo resoluble y, en particular, todo grupo abeliano o conmutativo es medible. Por otra parte, según han demostrado S. Balcerzyk y J. Mycielski en 1956, todo grupo compacto conexo *no* abeliano y todo grupo localmente compacto conexo no resoluble no son medibles. Por ejemplo, el grupo de movimientos del plano euclídeo E_2 es medible por ser resoluble, pero el grupo de movimientos del espacio euclídeo E_n, para $n \geqslant 3$, no es medible por no ser resoluble. Análogamente, los grupos de movimientos de los planos no euclídeos, hiperbólico y elíptico, no son medibles. Como consecuencia de esto se deduce también que existe una medida finitamente aditiva μ sobre el plano euclídeo E_2, definida sobre $\mathcal{P}(E_2)$, invariante por el grupo de movimientos de E_2 y que extiende a la medida de Lebesgue de E_2, mientras que tal propiedad no vale para E_n cuando $n \geqslant 3$.

Las investigaciones de von Neumann han sido proseguidas por nosotros definiendo la *oscilación* ω (G) de un grupo G, número que hemos probado que vale 0 ó 1 según que G sea o no medible. Estos resultados los hemos extendido a los espacios homogéneos y, en general, a todo conjunto E sobre el que opera un grupo de permutaciones o movimientos. Así hemos probado, en particular, que cualquiera que sea la medida finitamente aditiva μ, definida para todas las partes de una esfera E, para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $A \subset E$ y una rotación σ, cuyo eje pasa por el centro de E, con la propiedad de ser $\mu(A) < \varepsilon$ y $\mu(\sigma A) > \mu(E) - \varepsilon$, si la medida $\mu(E)$ es finita.

Estas investigaciones sobre la teoría de la medida en relación con la teoría de grupos pueden extenderse al problema de determinar si existe una medida μ, no nula y definida para todas las partes de un conjunto E, tal que, dada una relación de equivalencia en el conjunto $\mathscr{P}(E)$ de dichas partes, sea $\mu(A) = \mu(A')$ para todo par A, A' de conjuntos equivalentes. Cuando E sea un grupo una de tales equivalencias viene definida por la propiedad de ser A y A' equivalentes si y sólo si $\sigma A = A'$ para un cierto $\sigma \in E$. El problema anterior, que comprende por consiguiente a los análogos para la teoría de grupos, ha sido estudiado sistemáticamente por primera vez, según creemos, por nosotros, que hemos dado condiciones necesarias y suficientes para que existan dichas medidas.

A finales de siglo pasado y principios de éste, Borel y Lebesgue llevaron la teoría de la medida por otros caminos. El punto de partida de Borel es la definición de medida de un abierto acotado G de la recta real R. Con este objetivo, en lugar de utilizar cubrimientos finitos de G, formados por intervalos, como se procedía antes, Borel propone tomar como medida de G la suma de las longitudes de los intervalos componentes, basándose en un resultado conocido desde Cantor, según el cual todo abierto G en R es unión numerable de intervalos abiertos y disjuntos. El concepto de medida lo extiende Borel a la clase de los conjuntos por él llamados «medibles» y después llamados por otros «conjuntos de Borel» o «medibles (B)» que se pueden obtener a partir de los abiertos por iteración indefinida de las operaciones de *unión numerable* y *diferencia de conjuntos*. Así el conjunto de los puntos racionales de R, que no es medible según Peano-Jordan, como conjunto numerable es un conjunto de Borel de medida nula.

La propiedad fundamental, completamente nueva, de la medida de Borel es la *aditividad numerable* (o *completa*): La medida de la unión de una sucesión de conjuntos medibles y disjuntos es igual a la suma de las medidas de estos conjuntos. Entonces, como todo conjunto es unión de los conjuntos unitarios formados por sus puntos, resulta inmediatamente, como hemos afirmado, que todo conjunto numerable es de medida nula y, por tanto, que todo conjunto de medida positiva no es numerable. De esta propiedad se deduce que la generalización de la aditividad numerable para una familia no numerable de conjuntos disjuntos no es válida.

Creemos importante destacar que en la teoría de la medida de Borel tiene un papel fundamental el conocido teorema de Heine-Borel, demostrado por Borel en su tesis, según el cual todo conjunto cerrado y acotado A de la recta real R es numerable compacto, esto es, que de todo cubrimiento numerable y abierto de A se puede extraer un subcubrimiento finito del mismo.

Estas ideas de Borel inauguran una nueva era en el Análisis Matemático, pues además de servir de base para la generalización del concepto de integral, llevada a cabo por Lebesgue en los primeros años de este siglo, son el punto de partida, junto con los trabajos de Baire, de una serie de investigaciones sobre la clasificación de los conjuntos y de las funciones, desde un punto de vista puramente topológico.

René Baire procediendo de manera semejante que Borel, para definir los conjuntos borelianos, define las llamadas hoy *funciones de Baire* como aquellas funciones que se pueden obtener a partir de las funciones continuas por iteración indefinida de la operación de paso al límite de sucesiones funcionales, sirviéndose del mismo proceso para clasificar dichas funciones. Otros conceptos importantes, que se deben también a Baire, son el de *semicontinuidad* y el de *conjunto de primera categoría*, este último introducido para la caracterización de las funciones que son límite de una sucesión de funciones continuas.

Estas investigaciones de naturaleza topológica de Borel y Baire, en unión de una famosa memoria de Lebesgue de 1905 sobre las «*funciones representables analíticamente*», en donde quedaron identificadas éstas con las funciones de Baire y con las medibles B (o de

Borel), y del descubrimiento hecho por M. Suslin en 1917 de que la imagen continua de un boreliano puede no ser un boreliano, fueron el origen de la *teoría de conjuntos analíticos* tan íntimamente ligada a N. Lusin y a un grupo de matemáticos polacos entre los que figura W. Sierpinski.

Lebesgue en su trascendental tesis doctoral *Intégrale, longueur, aire,* completa las ideas de Borel, modificando ligera pero esencialmente el método de Peano-Jordan, mediante el uso de cubrimientos numerables de intervalos o de abiertos. Así en la teoría de Lebesgue se define la *medida exterior* de un conjunto $A \subset R$ como el ínfimo de las medidas de los abiertos que contienen a A, y la *medida interior* de A, si A es acotado e I un intervalo finito que contiene a A, como la diferencia de las medidas exteriores de I y de $I - A$ para definir después la medida interior de un conjunto no acotado A como el supremo de las medidas interiores de los conjuntos acotados A' contenidos en A. Un conjunto A es *medible* según Lebesgue si dichas medidas, exterior e interior, son iguales y finitas. Si A es de medida exterior infinita, A se dice *medible* si la intersección de A con cada intervalo finito I es medible. Entonces resulta que la clase de los conjuntos medibles (L), o según Lebesgue, es más amplia que la formada por los medibles (B) y tal que para cada conjunto A medible (L) existen dos conjuntos B_1 y B_2, medibles (B), con igual medida que le limitan por dentro y por fuera: $B_1 \subset A \subset B_2$. Esta definición se extiende inmediatamente a todos los espacios R^n. Así la antigua concepción de integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ de una función acotada $f \geqslant 0$ como área del conjunto limitado por la curva $y = f(x)$ y las rectas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ da una generalización inmediata de la integral de Riemann para todas las funciones para las cuales dicho conjunto es medible (L).

Pero el genial analista, guiado por el llamado símil del comerciante ordenado, sigue también otro método para definir la integral de una función acotada f, que consiste en subdividir el intervalo, que tiene por extremos los de la función dada mediante un número finito de puntos y_i y considerar los conjuntos E_i, formados por los puntos x que satisfacen $y_{i-1} \leqslant f(x) < y_i$, para formar las sumas $S = \Sigma\, \bar{y}_i\, \mu(E_i)$, donde $\bar{y}_i$ es cualquier número entre y_{i-1} e y_i y $\mu(E_i)$ es la medida de E_i en el supuesto de que todos estos conjuntos E_i sean medibles, es decir, que f sea medible. Nos hemos referido a funciones acotadas, pero Lebesgue define también la integral para funciones no acotadas utilizando con este fin series en lugar de sumas finitas.

Otros conceptos de integral equivalentes al de Lebesgue se deben a W. H. Young, F. Riesz, C. de la Vallé Poussin, J. Rey Pastor, L. Tonelli, etc.

Conviene destacar que la originalidad de Lebesgue no reside tanto en la idea de generalizar el concepto de integral como en el descubrimiento del teorema fundamental de paso al límite, válido para la integral (L), que no es más que una consecuencia de la aditividad completa de la medida.

Aunque no es nuestro propósito detenernos a describir aquí las innumerables aplicaciones que encuentra la teoría de la integral de Lebesgue en todo el Análisis, nos parece obligado recordar los grandes progresos que se han logrado con ella en los conceptos de longitud de una curva y área de una superficie curva, en las series de Fourier y en los espacios de Hilbert, junto con la definición de los espacios L^p.

Por su extraordinario interés, dedicaremos más atención al problema de hallar la relación entre los conceptos de integral indefinida y primitiva, en el que también Lebesgue hizo importantes contribuciones. Este problema se plantea ya con la integral de Riemann, puesto que es fácil dar ejemplos de funciones integrables Riemann con la propiedad de que su integral indefinida carezca de derivada en algunos puntos. Por otra parte, según demostró Volterra en 1881, una función continua puede tener derivada acotada en un intervalo I que no es integrable Riemann. Estos resultados se pueden mejorar cuando se trata de la integral de Lebesgue. En efecto, si F es la integral indefinida de una función f, integrable (L) en $I = [a, b]$, se tiene $F'(x) = f(x)$ en casi todo I según probó Lebesgue. Análogamente, si F es derivable en I y su derivada $F' = f$ es acotada, f es integrable y se puede aplicar la regla de Barrow. En el caso de que f no sea acotada el problema es más complejo, pero Lebesgue lo abordó también caracterizando las funciones continuas F para las cuales existe F′ en casi todo I y es integrable. De manera semejante a como se logró esto mediante el concepto de variación acotada, las integrales indefinidas fueron también caracterizadas por Lebesgue por la propiedad de ser absolutamente continuas.

La existencia de funciones con derivada no integrable (L) ha conducido a una nueva generalización, llamada *totalización* y debida a

Denjoy, del concepto de integral indefinida, que consiste en una iteración transfinita de ciertas operaciones, logrando así que el concepto de integral indefinida comprenda al de primitiva. Para establecer la equivalencia que había entre estos conceptos cuando las funciones son continuas, Denjoy y Khintchine introdujeron el concepto de *derivada aproximativa.*

En todos estos procesos el cálculo de la primitiva se efectúa recurriendo a la integral indefinida, pero Perron, en 1914, invirtió el método, utilizando la primitiva para obtener la integral indefinida. Como toda función se puede acotar entre otras dos, llamadas mayorante y minorante de La Vallée Poussin, que sean derivadas superior e inferior, en el sentido de Dini, de sendas funciones nulas en el origen, cuando éstas coinciden, se adopta la función resultante como integral (P), o mejor primitiva (P), de la función dada. Esta integral de Perron resulta así idéntica a la integral de Lebesgue para funciones acotadas, pero existen funciones integrables (P) que no lo son (L). Finalmente, Hake y Alexandroff, Ridder y Burkill, mediante sendas generalizaciones de la integral (P), han logrado la equivalencia de ésta con las integrales restringida y generalizada de Denjoy.

En 1894, T. Stieljes en su trascendental memoria *Récherches sur les fractions continues,* considera por vez primera integrales del tipo $\int_a^b f(x)\, d\, g(x)$ en donde f es una función continua y g es no decreciente. De esta forma, el concepto de «distribución de una masa», familiar desde hace tiempo en la Física, se introduce también en la Matemática. Sin embargo, han de pasar algunos años hasta que este concepto vuelva a atraer la atención. Con motivo de resolver un problema propuesto por Hadamard, años antes, F. Riesz demuestra en 1909 que los funcionales lineales continuos sobre el espacio de las funciones reales continuas en $[a, b]$, dotado de la topología uniforme, se pueden expresar por una integral de Stieljes: $f \to \int_a^b f\, d\, \varphi$. Estas ideas encuentran acogida en J. Radon que en 1913, combinando las ideas de Riesz y Lebesgue, define la llamada *integral de Lebesgue-Stieljes* a partir de una función completamente aditiva de conjunto. Esta memoria de Radon y la marcada orientación hacia lo abstracto de comienzos de este siglo, señalan el tránsito a la teoría de la integración sobre espacios abstractos.

Después de las importantes contribuciones de Borel, Lebesgue y Radon a la teoría de la medida e integración sobre R^n, M. Fréchet define las medidas «abstractas» sobre un conjunto cualquiera E, dotado de una tribu o σ-álgebra, y las integrales con relación a estas medidas. Fréchet observa que se pueden establecer así los principales resultados de la teoría de Lebesgue sin utilizar ninguna topología sobre E. Aunque el interés de estas y otras medidas abstractas fue puesto en duda por algunos, por ejemplo, por Bourbaki, basándose entre otras razones en un famoso teorema de Kakutani, creemos que esta observación de Fréchet pone de manifiesto claramente la importancia que tienen dichas medidas.

Las investigaciones de Fréchet fueron completadas por Carathéodory, a quien se debe un importante teorema de extensión de una función de conjunto en una medida. El método de Carathéodory consiste en extender primero dicha función de conjunto μ_0 en una medida exterior μ^* para obtener después, mediante la restricción de μ^* sobre la clase de los conjuntos medibles, una medida μ que es una extensión de la función de conjunto dada μ_0, cuando ésta cumple ciertas condiciones. Recordamos que un conjunto A ($\subset$ E) se dice μ^*-medible, según Carathéodory, cuando

$$\mu^* (X) = \mu^* (X \cap A) + \mu^* (X - A)$$

para toda parte X del conjunto E sobre cuyas partes está definida la medida exterior μ^*.

Si E es un espacio topológico es deseable que haya alguna conexión entre la topología de E y las propiedades de las medidas sobre E. Para los espacios métricos, Carathéodory intentó una teoría de la medida exigiendo que las medidas exteriores μ^* sobre E verifiquen $\mu^* (A \cup B) = \mu^* (A) + \mu^* (B)$ cuando A y B sean dos conjuntos de E cuya distancia d (A, B) > 0. Para estas llamadas medidas exteriores métricas, Carathéodory prueba que los conjuntos cerrados son medibles y, por tanto, también los conjuntos de Borel. Esta teoría no es satisfactoria, pues aparte de que sólo es válida para los espacios métricos, tiene propiedades bastante pobres desde el punto de vista topológico. La que sí se puede considerar completamente satisfactoria, dentro de su generalidad, es la teoría de la medida (de Radon) para los espacios localmente compactos, tanto si se desarrolla definiendo las medidas como funciones aditivas de conjunto como, hace por ejemplo, Halmos, o bien definiendo las medidas como formas lineales continuas sobre el espacio K (E) de las funciones continuas con soporte compacto. Este método, para el que se solía reservar el nombre de teoría de la medida de Radon, se encuentra expuesto en la *Intégration* de Bourbaki y últimamente también en otras muchas obras, recibiendo un gran impulso en la década de 1940-1950 después de los trabajos de A. Weil y de I. M. Gelfand en Análisis Armónico y con el descubrimiento de la teoría de las distribuciones por L. Schwartz. Ambas versiones de la teoría de la medida en espacios localmente compactos son equivalentes y su utilidad está suficientemente probada; por ello nosotros somos partidarios de utilizar en cada momento una u otra según las conveniencias y desistimos de entrar en bizantinas discusiones para ver cuál de ellas es la mejor.

Los años 1960-1970 significan un cambio tan radical en la forma de pensar sobre la teoría de la medida en los espacios topológicos, que incluso Bourbaki publica en 1969 un volumen sobre la integración en espacios topológicos no localmente compactos. Este cambio de mentalidad se debe, en gran parte, al nuevo punto de contacto que se establece por esa época entre el Análisis Matemático y el Cálculo de Probabilidades, en donde había tenido años antes lugar un desarrollo importante de la teoría de la medida en virtud de los trabajos de P. J. Daniell, H. Steinhaus, B. Jessen, P. Lévy, N. Wiener, Ju. V. Prokhorov, L. Le Cam, R. A. Minlos, etc. Así se ve nacer la teoría general de la medida sobre los espacios topológicos y sobre los espacios vectoriales topológicos.

Una de las ramas más desarrolladas del Cálculo de Probabilidades clásico es la de los teoremas del límite. La formulación matemática correcta de estos problemas exige la introducción de medidas sobre los espacios le sucesiones. Estos espacios son objeto de las investigaciones emprendidas hacia 1920 por Fréchet, Lévy, Lusin... No es pura casualidad que Khintchine y Kolmogoroff, los creadores de métodos nuevos del Cálculo de Probabilidades, sean ambos discípulos de Lusin y que Lévy se preocupe de problemas de Probabilidades.

La teoría del movimiento browniano ocupa un lugar excepcional en el desarrollo científico por el intercambio constante y fecundo entre los problemas físicos y las matemáticas «puras». El estudio del movimiento browniano, descubierto en 1829 por el botánico Brown, ha sido llevado a cabo intensivamente en el siglo XIX por numerosos físicos, pero el primer modelo matemático satisfactorio ha sido descubierto por Einstein en 1905. En el caso simple de una partícula desplazándose a lo largo de una recta, las hipótesis fundamentales de Einstein se formulan así: Si $x(t)$ es la abscisa de la partícula en el instante t y si $t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n$, los desplazamientos sucesivos $x(t_i) - x(t_{i-1})$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ son variables aleatorias gaussianas.

Otra corriente de ideas tiene su origen en la teoría cinética de los gases, desarrollada entre **1870** y **1890** por Boltzmann y Gibbs. Según las ideas de Gibbs, la multitud de choques entre las moléculas no permite determinar con precisión las velocidades de las moléculas, y conviene por ello introducir una ley de probabilidad P sobre el espacio de dimensión 3 N. La hipótesis «microcanónica» consiste en suponer que P es la medida de una distribución de masa 1 invariante por rotación sobre la esfera S de centro el origen y radio $(6\,\mathrm{N}\,k\,\mathrm{T}/m)^{1/2}$ de dicho espacio, donde N es el número de moléculas de masa m a la temperatura absoluta T y k es la constante de Bolzmann. Por otra parte, la ley de las velocidades de Maxwell enuncia que la ley de probabilidad de una componente de la velocidad de una molécula es una medida gaussiana de varianza conocida $2\,k\,\mathrm{T}/m$. Borel parece haber sido el primero que observó en **1914** que la ley de Maxwell es consecuencia de la ley de Gibbs y de propiedades de la esfera cuando el número de moléculas es muy grande. El considera una esfera S en un espacio euclídeo de dimensión grande y la medida P de masa 1 invariante por rotación sobre S y demuestra que la proyección de P sobre un eje de coordenadas es aproximadamente gaussiana. Dados un entero $n \geqslant 1$ y un número $r > 0$, sean $S_{n,r}$ el conjunto de las sucesiones $(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$ con $\sum_1^n x^2_k = r^2$ y $\sigma_{n,r}$ la medida de masa 1 invariante por rotación sobre $S_{n,r}$. Enunciado en lenguaje moderno, el resultado de Gateaux y Lévy, que precisa los resultados precedentes es el siguiente: La sucesión de medidas $\sigma_{n,1}$ tiende vagamente hacia la masa unidad en el origen y la sucesión de medidas $\sigma_{m,\sqrt{m}}$ tiende vagamente hacia una medida Γ de la forma

$$d\,\Gamma(x_1, x_2, \ldots) = \prod_{n=1}^{\infty} d\,\gamma(x_n),$$

siendo γ la medida gaussiana de varianza 1 sobre R.

La medida Γ precedente desempeña el papel de una medida gaussiana en dimensión infinita. De hecho la medida Γ es invariante en un cierto sentido por los automorfismos de l^2, pero desgraciadamente el conjunto l^2 es de medida nula para Γ.

Se debe a Wiener la siguiente idea esencial: Si no hay ninguna medida de Gauss sobre un espacio de Hilbert de dimensión infinita, se puede construir por la operación de primitiva una medida μ sobre un espacio de funciones continuas. Para cada entero $n \geqslant 1$, sea H_n el conjunto de las funciones sobre $T = (0, 1]$ que son constantes en cada intervalo $((k-1)/n, k/n]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, y μ'_n la medida de masa 1 invariante por rotación sobre la esfera de radio 1 en R^n. Sea π_n el isomorfismo de H_n sobre R^n que asocia a la función que toma el valor a_k sobre el intervalo $((k-1)/n, k/n]$ el vector $(a_1, a_2 - a_1, \ldots, a_n - a_{n-1})$, y sea μ_n la medida sobre H_n imagen de μ'_n por π_n^{-1}. Wiener define la medida buscada μ como el límite de las medidas μ_n.

No es el momento de exponer los numerosos e importantes trabajos sobre el Cálculo de Probabilidades ocasionados por el descubrimiento de Wiener. Hoy día el movimiento browniano no aparece más que como uno de los ejemplos más importantes de los procesos markovianos. Mencionaremos también la aplicación hecha por Kac de la medida de Wiener a la resolución de ciertas ecuaciones en derivadas parciales parabólicas; se trata en ella de la adaptación de las ideas de Feynmam a la teoría cuántica de campos.

El estudio de las relaciones entre la topología y la teoría de la medida ha sido concebida sobre todo como el estudio de las propiedades de la regularidad de las medidas, y en particular de la regularidad «exterior» y de la regularidad «interior». Una medida μ definida sobre la σ-álgebra de Borel de un espacio topológico se dice exteriormente regular si la medida de todo conjunto boreliano es el ínfimo de las medidas de los abiertos que le contienen. La medida μ se dice interiormente regular si la medida de todo conjunto boreliano es el supremo de sus partes cerrado-compactas. Entre las primeras contribuciones sobre este aspecto de la teoría de la medida se deben destacar los trabajos de A. D. Alexandroff (1940-45), P. R. Halmos y J. von Neumann (1950), E. Marczewski (1953), C. Ryll-Nardzewski (1953), B. V. Gnedenko y A. N. Kolmogoroff (1954) y D. Blackwell (1955). Alexandroff pone en evidencia el papel de la regularidad interior y prueba que las medidas sobre un espacio polaco son interiormente regulares, resultado que es redescubierto más tarde, en

1956, por Prokhorov. A Marczewski se debe un importante trabajo sobre las *medidas compactas*. Una medida μ definida sobre un álgebra $\mathcal{A}$ se dice *compacta* si existe una clase compacta $\mathcal{C}$ que aproxima a $\mathcal{A}$ con respecto de μ, es decir, si para cada $A_0 \in \mathcal{A}$ y cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $C \in \mathcal{C}$ y un conjunto $A \in \mathcal{A}$ tales que $A \subset C \subset A_0$ y $\mu(A_0 - A) < \varepsilon$. Una clase $\mathcal{C}$ de partes de un conjunto E se dice *compacta*, si para cada sucesión de conjuntos $X_n \in \mathcal{C}$ la relación $\bigcap_1^n X_k \neq \emptyset$ para todo $n \in N$ implica $\bigcap_1^\infty X_k \neq \emptyset$. Por tanto, un espacio topológico es numerablemente compacto si y sólo si la clase de todos los conjuntos cerrados es compacta. Ryll-Nardzewski continúa las investigaciones sobre las medidas compactas de Marczewski, estudiando las *medidas* (o σ-medidas) *casi compactas*, concepto equivalente al de *medida perfecta* introducido por Gnedenko y Kolmogoroff. Es conocido que la función de conjunto μ_f, definida por la fórmula $\mu_f(E) = \mu(f^{-1}(E))$ para una función f medible, se puede considerar para los conjuntos de Borel de E, o para todos los conjuntos cuya imagen inversa $f^{-1}(E)$ sea medible. En el caso de las medidas de Lebesgue estas dos variantes no son esencialmente diferentes como ha demostrado Hartman. Un teorema de Ryll-Nardzewski prueba que esta propiedad es característica de las medidas casi compactas. Aplicando el teorema de Marczewski sobre la invariancia de la compacidad para la multiplicación cartesiana, Ryll-Nardzewski prueba que la casi compacidad tiene la misma propiedad.

Entre los conceptos importantes, usuales en la teoría de la medida, relativos a las funciones reales de conjunto τ definidas sobre una clase $\mathcal{A}$ de partes de un conjunto E, merecen recordarse los siguientes: 1) τ es *creciente* si $\tau(A) \leqslant \tau(B)$ cuando $A \subset B$. 2) τ es *subaditiva* si $\tau(A \cup B) \leqslant \tau(A) + \tau(B)$. 3) τ es *aditiva* si $\tau(A \cup B) = \tau(A) + \tau(B)$. 4) τ es *modular* si $\tau(\emptyset) = 0$ cuando $\emptyset \in \mathcal{A}$ y si $\tau(A \cup B) + \tau(A \cap B) = \tau(A) + \tau(B)$. 5) Una función monótona de conjunto τ, definida sobre $\mathcal{A}$, es *σ-lisa* (resp. *τ-lisa*) *respecto de una clase* $\mathcal{C}$ de partes de E si, para cada subclase contable (resp. arbitraria) $\mathcal{C}^*$ de $\mathcal{C}$, filtrante a la izquierda y con intersección $\bigcap \mathcal{C}^* = A_0$, se tiene

$$\tau(A_0) = \inf\{\tau(A) : A \supset X \text{ para algún } X \in \mathcal{C}^*\}$$

siempre que el miembro de la derecha sea finito. Si $\emptyset \in \mathcal{A}$ y se requiere solamente que la última igualdad valga para $A_0 = \emptyset$, se dice que τ es *σ-lisa en* $\emptyset$ (resp. *τ-lisa en* $\emptyset$) respecto de $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{C} = \mathcal{H}$ se dice abreviadamente, en dichos casos, que τ es *σ-lisa*, *τ-lisa*, *σ-lisa en* $\emptyset$ y *τ-lisa en* $\emptyset$. 6) τ es *regular respecto de* $\mathcal{C}$ si $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}$ y si

$$\tau(A) = \sup \{ \tau(X) : X \subset A, X \in \mathcal{C} \}.$$

7) τ es *tensa* si es finita y si, cuando $A \supset B$, se tiene

$$\sup \{ \tau(X) : X \subset A - B \} = \tau(A) - \tau(B).$$

8) τ es un *contenido* si $\mathcal{H}$ es un anillo y τ es finita, creciente y aditiva.

Sea E un espacio topológico y μ una medida definida sobre la clase $\mathcal{B}$ de los conjuntos de Borel de E. μ es *regular* si μ es regular respecto de la clase $\mathcal{F}$ de cerrados de E. μ es *tensa* si μ es regular respecto de la clase $\mathcal{K}$ de compactos de E. μ es *τ-lisa* si

$$\mu(\bigcap_{i \in I} F_i) = \inf_{i \in I} \mu(F_i)$$

para toda familia $(F_i)_{i \in I}$ de conjuntos cerrados filtrante a la izquierda.

Una de las más destacadas teorías sobre los espacios topológicos se debe a L. Schwartz, quien dio, en 1964, en el Instituto Gulbenkian de Lisboa, una conferencia sobre la teoría de la medida de Radon en espacios topológicos no localmente compactos, seguida de otra en 1965, en el Instituto Tata de Bombay. En 1973 apareció por fin la esperada obra «Radon Measures on Arbitrary Topological Spaces and Cylindrical Measures» de Schwartz, publicada por el citado Instituto Tata de Bombay, que contiene, prácticamente, todos los resultados del capítulo IX de la Integration de Bourbaki. Justamente en 1964 presentábamos una comunicación, en Valencia, en la V Reunión Anual de Matemáticos Españoles sobre la teoría de la medida en espacio topológicos a la que siguieron otras publicaciones, entre ellas la de una conferencia plenaria en las Primeras Jornadas Luso-Españolas de Lisboa en 1972. El desarrollo de esta teoría en el que ha intervenido nuestro discípulo Pedro Jiménez Guerra, será publicado en la Revista de esta Real Academia.

Para Schwartz existen esencialmente dos métodos de presentar la teoría de la medida: La teoría abstracta y la teoría de la medida de Radon sobre los espacios localmente compactos. Justifica la teoría abstracta en que, esencialmente, la topología no tiene, «a priori», nada que ver con el problema. Igualmente, Schwartz justifica las medidas de Radon basándose en que todo conjunto en Análisis está dotado de una o varias topologías. Nuestra posición es algo diferente: el interés del estudio de las medidas en espacios topológicos se debe a que las relaciones entre los conceptos de medida y topología proporcionan una mayor riqueza de las propiedades de las medidas con repercusión en multitud de aplicaciones.

Según Schwartz los defectos de la teoría abstracta son: 1) la catástrofe de las medidas imagen, 2) que el producto de σ-álgebras de Borel de espacios Hausdorff no es, en general, la σ-álgebra de Borel del producto, 3) que una medida abstracta sobre una σ-álgebra de Borel no tiene en general soporte, etc. El fundamental defecto de la usual teoría de la medida de Radon es que los espacios de funciones que aparecen en la teoría de probabilidades no son localmente compactos. También aquí discrepamos de Schwartz. En primer lugar, desde el punto de vista del Análisis porque se podía prever «la poca» generalidad de la teoría de la medida de Radon en espacios localmente compactos, sin necesidad de que el Cálculo de Probabilidades lo pusiera de manifiesto. Para nosotros, lo único que prueba esto es que el limitarse a la teoría de la medida en espacios localmente compactos es hoy rotundamente insostenible. Por otra parte, nuestras investigaciones prueban que existen medidas abstractas que deben distinguirse por tener propiedades análogas a las medidas de Radon en espacios topológicos cualesquiera.

La teoría de las medidas de Radon sobre un espacio topológico de Hausdorff, debida a Schwartz presenta las ventajas de ambos métodos. Las medidas de Radon estudiadas por Schwartz tienen las propiedades buenas y agradables de las medidas de Radon sobre los espacios localmente compactos. Se halla en la literatura matemática, anterior a los trabajos de Schwartz, numerosos teoremas que con hipótesis adicionales sobre las medidas abstractas se logran dar para ellas las mismas propiedades que tienen las medidas de Radon sobre los espacios localmente compactos; sin embargo, los resultados nunca han tenido la adecuada cohesión. La noción de medida de Radon, presentada por Schwartz, logra una unificación. Estas ventajas y otras más las presenta nuestra teoría de las medidas de Radon de tipo $(\mathcal{H})$, principalmente, por ser más general, por poner en evidencia las propiedades esenciales desde el punto de vista de los fundamentos y por tener las mismas propiedades deseadas que las medidas de Radon sobre los espacios localmente compactos. No obstante, debido a que en muchos espacios las medidas de Borel finitas son medidas de Radon y a que se simplifican las demostraciones, tienen un gran interés las medidas de Schwartz, es decir, las medidas de Radon sobre espacios de Hausdorff arbitrarios.

Con objeto de exponer nuestras ideas sobre las medidas en espacios topológicos cualesquiera, vamos a comenzar dando algunos conceptos básicos. Una *medida exterior topológica* sobre un espacio topológico E es una medida exterior sobre E que satisface: 1) Los conjuntos de Borel son μ^*-medibles. 2) μ^* es localmente finita. 3) Si $(G_i)_{i \in I}$ es una familia de abiertos, filtrante a la derecha y $G = \lim_i G_i$ se verifica $\mu^*(G) = \lim_i \mu^*(G_i)$. 4) Para todo $A \subset E$ se tiene $\mu^*(A) = \inf \{\mu^*(G) : A \subset G \in \mathcal{G}\}$, donde como es usual se designa por $\mathcal{G}$ a la clase de los abiertos de E. Las medidas exteriores topológicas tienen propiedades tan agradables como poseer soporte y ser regulares cuando μ^* es finita y E es un espacio regular, no necesariamente separado, además de otras muchas. No obstante, la principal contribución nuestra a esta parte de la teoría, consiste en dar un método de construcción de medidas exteriores topológicas, que se ha manifestado como extraordinariamente fecundo en diversas cuestiones y del que ya hablaremos más adelante.

Otros conceptos importantes nuestros son el de conjunto τ-compacto, el de clase generatriz y el de contenido respecto de una clase generatriz. Dada una función real de conjunto τ, definida sobre la clase $\mathcal{P}(E)$ de las partes de E, monótona y con $\tau(\emptyset) = 0$, se dice que una parte A de E es un *conjunto τ-compacto* si, para todo cubrimiento abierto $\mathcal{G}_0$ de A y, para todo $\varepsilon > 0$, existe un número finito de $G_k \in \mathcal{G}_0$ que satisfacen $\tau(A - \bigcup_1^n G_k) < \varepsilon$. Es obvio que todo conjunto compacto es τ-compacto y que, para la función τ definida por $\tau(\emptyset) = 0$ y $\tau(A) = 1$ para cada conjunto $A \neq \emptyset$, resulta que todo conjunto τ-compacto es compacto. Una *clase generatriz* en un conjunto A ($\subset E$) es una clase $\mathcal{U}$ de partes de E tal que: 1) $U_1 \cup U_2 \in \mathcal{U}$ si $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$. 2) Para todo $x \in A$, la intersección $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}_x$ es una base de $\mathcal{V}_x$, siendo $\mathcal{V}_x$ la clase de los entornos de x.

Un *contenido respecto de una clase generatriz* $\mathcal{H}$ (en E) es una medida exterior λ, finitamente subaditiva, tal que: 1) λ es localmente finita. 2) Todo $H \in \mathcal{H}$ es λ-compacto. 3) Para cada $H \in \mathcal{H}$ hay una clase generatriz $\mathcal{F}_H \subset \mathcal{H}$ en $H^c = E - H$ que verifica $\lambda (H \cup F) = \lambda (H) + \lambda (F)$ para todo $F \in \mathcal{F}_H$.

La construcción de medidas, antes anunciada, se puede expresar en la forma siguiente:

TEOREMA.—*Sean E un espacio regular (no necesariamente separado), $\mathcal{H}$ una clase generatriz de cerrados en E y λ un contenido respecto de $\mathcal{H}$. Entonces la función real de conjunto μ^* definida mediante:*

$$\mu^* (A) = \inf \{ \lambda_* (G) : A \subset G \in \mathcal{G} \}$$

y

$$\lambda_* (G) = \sup \{ \lambda (H) : G \supset H \in \mathcal{H} \},$$

es una medida exterior topológica.

Se llama *medida topológica* a la restricción a la clase de los conjuntos de Borel (o también sobre la clase de los conjuntos medibles) de una medida exterior topológica. Toda medida de Radon es una medida topológica.

Sobre un grupo topológico arbitrario G se llama *medida* (resp. *medida exterior*) de Haar a toda medida (resp. medida exterior) topológica no nula e invariante a la izquierda: $\mu^* (x A) = \mu^* (A)$ para todo $x \in G$ y todo $A \in \mathcal{B}$ (resp. $A \in \mathcal{P} (E)$).

Es conocido que todo grupo localmente compacto posee una medida de Haar unívocamente determinada salvo un factor constante. Nosotros inspirándonos en un resultado de A. Weil hemos obtenido varias proposiciones entre las que destacamos aquí las siguientes:

TEOREMA.—*Un grupo topológico G posee una medida de Haar si y sólo si es un subgrupo denso de un grupo localmente compacto G_0 tal que, si μ^*_0 es una medida exterior de Haar sobre G_0, existe un abierto U en G que verifica $0 < \mu^*_0 (U) < +\infty$. Esta medida de Haar μ, si existe está unívocamente determinada salvo un factor constante.*

Si μ^* es una medida exterior topológica sobre E, se define la medida *exterior esencial* $\mu^{\bullet}$ asociada a μ por

$$\mu^{\bullet} (A) = \sup \{ \mu^* (A \cap G) : G \in \mathcal{G}_0 \}$$

para todo $A \subset E$, siendo $\mathcal{G}_0$ la clase de los abiertos de medida $\mu^* (G) < + \infty$.

Recíprocamente, como $\mu^{\bullet} (G) = \mu^* (G)$ para todo abierto G resulta

$$\mu^* (A) = \inf \{ \mu^{\bullet} (G) : A \subset G \in \mathcal{G} \}$$

para todo $A \subset E$.

Es obvio que $\mu^{\bullet} \leqslant \mu^*$ y que $\mu^{\bullet} (A) = \mu^* (A)$ cuando $\mu^* (A) < < + \infty$. Es de destacar que la clase de los conjuntos $\mu^{\bullet}$-medibles coincide con la de los conjuntos μ^*-medibles. La restricción de $\mu^{\bullet}$ a la clase $\mathcal{B}$ de los conjuntos de Borel (o a la clase de los conjuntos μ -medibles) se llama medida esencial.

Sea $\mathcal{H}$ una clase de conjuntos cerrados de un espacio topológico E. Entonces llamamos *medida de Radon de tipo* $(\mathcal{H})$ a toda medida μ definida sobre la clase $\mathcal{B}$ con las propiedades: 1) Todo $H \in \mathcal{H}$ es μ-compacto y de medida $\mu (H)$ finita. 2) $\mu (B) = \sup \{\mu (H) : B \supset \supset H \in \mathcal{H}\}$ para todo $B \in \mathcal{B}$.

Si $\mu^{\bullet}$ es una medida exterior esencial sobre un espacio regular E y $\mathcal{H}$ es la clase de los conjuntos cerrados F de medida $\mu^{\bullet} (F)$ finita, la restricción μ de $\mu^{\bullet}$ a $\mathcal{B}$ es una medida de Radon de tipo $(\mathcal{H})$. Una medida de Radon de tipo $(\mathcal{H})$ se dice *propia* si es localmente finita. Una medida de Radon, en el sentido de Schwartz, es una medida de Radon propia de tipo $(\mathcal{K})$, en donde como es usual se denota por $\mathcal{K}$ la clase de los compactos de E y se supone E separado. Entonces nuestra teoría comprende efectivamente a la de Schwartz por las razones siguientes: 1) No exigimos que E sea de Hausdorff. 2) $\mathcal{H}$ puede ser una subclase de los conjuntos compacto-cerrados de modo que las medidas de algunos compacto-cerrados pueden ser infinitas. 3) No exigimos que μ sea propia.

Existen ejemplos muy sencillos de medidas de Radon de tipo $(\mathcal{H})$ que no son medidas de Radon según Schwartz. En efecto, la funcion real de conjunto μ definida sobre la recta real poniendo $\mu (A) = n$ si A consta de n puntos y $\mu (A) = + \infty$ si A es un conjunto infinito, no es localmente finita y, por tanto, no es una medida de Radon en el sentido de Schwartz, si bien es evidente que μ es una medida de Radon de tipo $(\mathcal{H})$ cuando $\mathcal{H}$ es la clase de los conjuntos finitos de $\mathbf{R}$.

Las medidas de Radon sobre los espacios topológicos pueden definirse de varias maneras. El método de Schwartz es uno de tantos.

Varios autores han introducido otros métodos semejantes de los cuales vamos a describir algunos.

El hecho de que todo espacio completamente regular E puede sumergirse en un espacio compacto $\tilde{E}$ sirvió al mismo Schwartz, en 1964, para un primer paso en la ampliación de la teoría de la medida. Esta elección de $\tilde{E}$ puede ser arbitraria. En particular, se puede tomar la compactificación $\check{E}$ de StoneČech. Se conoce que las funciones (reales) acotadas continuas sobre E pueden identificarse con las funciones continuas sobre $\check{E}$. Una medida de Radon finita sobre $\check{}$ es una medida μ sobre $\check{E}$ concentrada sobre E. Esto es lo mismo que decir que una medida de Radon es una forma lineal positiva μ sobre la clase $\mathscr{B}_0$ (E) de las funciones acotadas continuas sobre E que verifican la llamada (ε, K) condición: Para todo $\varepsilon > 0$, existe un compacto $K \subset E$ tal que, para toda $f \in \mathscr{B}_0$ (E) que verifique $0 \leqslant f \leqslant 1$ y $f = 0$ sobre K, se tenga $\mu(f) < \varepsilon$. De manera análoga y con las convenientes modificaciones se definen las medidas de Radon finitas complejas.

Las medidas de Radon sobre los espacios completamente regulares han sido estudiadas, aparte de Schwartz, por A. D. Alexandroff, V. S. Varadarajan y Khélifa Zizi.

La definición de una medida en un espacio localmente compacto o completamente regular E como funcional lineal positivo (o continuo) sobre un espacio conveniente de funciones continuas no se puede extender para los espacios topológicos generales. En efecto, como es conocido, existen espacios de Hausdorff regulares E, no vacíos y no reducidos a un solo punto, en los que toda función continua es una constante. Entonces si se pone $\mu(f) = f(x) - f(y)$, en donde x, y son dos puntos distintos de E, para toda función acotada f sobre E, resulta que μ es un funcional continuo sobre el espacio de dichas funciones acotadas, que representa muy bien el dípolo formado por $+1$ en x y -1 en y; sin embargo, $\mu(f) = 0$ para toda función continua.

Partiendo del concepto de compactología introducido por A. Weil, P. A. Meyer ha definido las medidas de Radon sobre los espacios de Hausdorff. Una *compactología* sobre un espacio de Hausdorff es una familia $(\mu_K)_{K \in \mathscr{K}}$ de medidas de Radon sobre los conjuntos compactos K tal que $\mu_{K_1}(B) = \mu_{K_2}(B)$ para todo conjunto de Borel $B \subset K_1 \cap K_2$ y $\mu_K(K)$ es uniformemente acotada para todo compacto K contenido en un cierto entorno de cada punto $x \in E$.

Si μ es una medida de Radon y μ_K es la medida inducida por μ sobre cada conjunto compacto K, la familia $(\mu_K)_{K \in \mathcal{K}}$ es una compactología. Recíprocamente, dada una compactología $(\mu_K)_K$ es fácil ver que la medida definida poniendo $\mu(B) = \sup \{\mu_K(B \cap K) : K \in \mathcal{K}\}$ es una medida de Radon. El método de Meyer consiste en estudiar la teoría de la medida partiendo de esta definición.

G. Choquet ha definido las medidas de Radon partiendo de una función real de conjunto, definida sobre la clase $\mathcal{K}$ de los compactos y que sea no negativa, finita, creciente, modular y continua a la derecha, es decir, que para todo $\varepsilon > 0$ y cada compacto K exista un entorno V de K tal que, para todo compacto K′ que verifique $K \subset K' \subset V$, sea $\mu(K') < \mu(K) + \varepsilon$.

A partir de una medida de Radon μ tiene interés construir las medidas exteriores μ^* y $\mu^{\bullet}$ mediante

$$\mu^*(A) = \inf \{ \mu(G) : A \subset G \in \mathcal{G} \}$$

y

$$\begin{aligned} \mu^{\bullet}(A) &= \sup \{ \mu^*(A \cap K) : K \in \mathcal{K} \} \\ &= \sup \{ \mu^*(A \cap G) : G \in \mathcal{G}_0 \}, \end{aligned}$$

en donde se emplean las notaciones usuales para $\mathcal{G}$ y $\mathcal{K}$, y $\mathcal{G}_0$ es la clase de los abiertos de medida finita. Esta construcción cae en defecto para las medidas de Radon de tipo $(\mathcal{H})$ cuando μ no es localmente finita, pero entonces se puede proceder poniendo

$$\mu_{\bullet}(A) = \sup \{ \mu(H) : A \supset H \in \mathcal{H} \}$$

para todo $A \subset E$,

$$\mu_H(A) = \mu(H) - \mu_{\bullet}(H - A)$$

para todo $A \subset H$ y $H \in \mathcal{H}$, y

$$\mu^{\bullet}(A) = \sup \{ \mu_H(A \cap H) : H \in \mathcal{H} \}$$

para todo $A \subset E$. La semejanza de este método con el de Meyer es evidente.

Entre las propiedades más importantes de $\mu^{\bullet}$ destacamos: 1) Todo conjunto de Borel B es $\mu^{\bullet}$-medible y $\mu^{\bullet}(B) = \mu(B)$. 2) Todo conjunto A de medida exterior μ (A) finita es $\mu^{\cdot}$-compacto. 3) Si $\mu^{\cdot}$ (A) $= +\infty$, para todo entero n, existe un conjunto $A_n \subset A$ tal que $n < \mu^{\cdot} (A_n) < +\infty$.

Dada una medida de Radon μ sobre un espacio de Hausdorff E, Schwartz se limita a definir las medidas inducidas para un conjunto medible A. Nosotros podemos hacerlo de manera general, procediendo como sigue: Si μ es una medida de Radon de tipo $(\mathcal{H})$ sobre un espacio topológico E y si A es una parte de E, la restricción μ_A de $\mu^{\cdot}$ a la clase $\mathcal{B}_A$ de los conjuntos de Borel de A es una medida de Radon de tipo $(\mathcal{H}_A)$, siendo $\mathcal{H}_A = \{A \cap H : H \in \mathcal{H}\}$. Entonces se llama a μ_A la *medida inducida* sobre A por μ.

En las condiciones precedentes, la inyección canónica i: $A \to E$ es μ_A-medible si y sólo si A es μ-medible. Una aplicación $T: E \to E'$ se dice *μ-medible*, siendo μ una medida de Radon de tipo $(\mathcal{H})$ sobre E, si tiene las propiedades: 1) Para todo $B \in \mathcal{B}$ de medida finita y todo $\varepsilon > 0$ existe un cerrado $F \subset B$ tal que $\mu (B - F) < \varepsilon$ y la restricción de T a F es continua y cerrada. 2) Si $X' \subset E$ y $\mu.\ [T^{-1} (X')] = +\infty$, para cada entero n existe un conjunto $X'_n \subset X'$ tal que $n < \mu.\ [T^{-1} (X'_n)] < +\infty$. Una aplicación $T: E \to E'$ se dice *μ-medible Lusin* si se verifica 1). Una aplicación $T: E \to E'$ se dice *μ-propia* si es medible Lusin y cada punto de E' tiene un entorno V cuya imagen inversa es de medida finita. Es claro que toda aplicación inyectiva μ-medible Lusin es μ-medible. Además toda aplicación μ-propia es μ-medible.

Sea μ una medida de Radon de tipo $(\mathcal{H})$ sobre un espacio topológico E y $T: E \to E'$ una aplicación μ-medible. Entonces se verifican: 1) La imagen recíproca $T^{-1} (B')$ de todo conjunto de Borel B' de E' es μ-medible. 2) La función real de conjunto μ', definida sobre la clase B' de los conjuntos de Borel de E', es una medida de Radon de tipo $(\mathcal{H}')$, siendo $\mathcal{H}'$ la clase de los conjuntos cerrados H' de E' de medida $\mu' (H')$ finita que son imagen $T (H)$ de algún $H \in \mathcal{H}$. Esta medida, que se denota por $T (\mu)$ o $T \mu$, se llama ***medida imagen*** de μ por T.

Entre los resultados que hemos obtenido recientemente sobre la medida imagen, debemos destacar el siguiente, cuya forma actual se ha logrado con la colaboración de nuestro discípulo P. Jiménez Guerra.

TEOREMA.—*Sean $T: E \to E'$ una aplicación y ν una medida de Ra-*

don de tipo $(\mathcal{H}')$ *sobre* E' *localmente* σ*-finita y* $\lambda(X) = \nu^{*}[T(X)]$ *para* $X \subset E$. *Sean además: a)* $\mathcal{H}_0$ *una familia filtrante a la derecha de conjuntos cerrados de* E *tal que cada* $H_0 \in \mathcal{H}_0$ *es regular para la topología relativizada y* λ*-compacto con* $\lambda(H_0) < +\infty$, $T(H_0)$ *es cerrado o de Borel en* E' *y la restricción* $T \mid H_0$ *es continua; b)* $\mathcal{H}$ *la clase de los conjuntos cerrados* H *de* E *que están contenidos en algún* $H_0 \in \mathcal{H}_0$ *dependiente de* H. *Entonces existe una medida de Radon* μ *de tipo* $(\mathcal{H})$ *tal que* $\nu = T(\mu)$ *si y sólo si, para todo* $H' \in \mathcal{H}'$ *y todo* $\varepsilon > 0$, *hay un* $H_0 \in \mathcal{H}_0$ *que verifica* $\nu[H' - T(H)] < \varepsilon$. *Si además las restricciones* $T \mid H$ *con* $H \in \mathcal{H}$ *son continuas y cerradas, entonces* T *es* μ*-medible.*

Un teorema de menor alcance que ésta ha sido dado por Schwartz para medidas de Radon finitas. Nosotros para demostrarle hemos tenido que extender el teorema del «concassage» para las medidas localmente σ-finitas, lo cual nos ha permitido también dar la siguiente formulación al teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym:

TEOREMA.—*Sean* μ *una medida de Radon localmente* σ*-finita de tipo* $(\mathcal{H})$ *sobre* E *y* ν *una medida de Radon de tipo* $(\mathcal{H})$ *absolutamente continua con respecto de* μ. *Entonces, existe una función* p *definida sobre* E, *no negativa y* μ*-integrable sobre cada* $H \in \mathcal{H}$ *que verifica* $\nu = p\,\mu$. *Esta función* p *está unívocamente determinada salvo en un conjunto de medida nula.*

Como vamos viendo gran parte de los teoremas que se dan en la teoría de la medida de Radon en espacios no localmente compactos se establecen para medidas finitas cuando se pueden dar de modo que sean también válidos para medidas no finitas. Ello se hace pensando, principalmente, en las aplicaciones al Cálculo de Probabilidades, pero en el Análisis conviene dar los teoremas de manera general para medidas no finitas, como se suele hacer en la teoría de la medida para los espacios localmente compactos.

En la actualidad, el punto culminante de nuestra teoría de la medida de Radón de tipo $(\mathcal{H})$ es, posiblemente alcanzado por los teoremas que hemos obtenido sobre el producto tensorial y el límite proyectivo de medidas.

Sea I un conjunto ordenado y filtrante de índices. Para cada $i \in$ I sea E_i un espacio topológico. Suponemos que, para todo par i, j con $i \leqslant j$, hay una aplicación continua $\pi_{ij}\colon E_j \to E_i$ tal que, para $i \leqslant j \leqslant k$, se verifica $\pi_{ik} = \pi_{ij} \circ \pi_{jk}$ y π_{ii} es la identidad para todo i. Existe entonces el límite proyectivo del sistema considerado que está definido por un cierto espacio topológico $E = \varprojlim E_i$ y ciertas aplicaciones π_i: $E \to E_i$ tales que la topología $\mathcal{C}$ de E es la menos fina que hace a las π_i continuas y, para $i \leqslant j$, se tiene $\pi_i = \pi_{ij} \circ \pi_j$.

Suponemos que, para cada i, $\mathcal{H}_i$ es una clase de conjuntos cerrados de E_i y μ_i es una medida de Radon de tipo $(\mathcal{H}_i)$ sobre E_i. Entonces, si $\mu_i = \pi_{ij}(\mu_j)$ para $i \leqslant j$ y $\mathcal{H}$ es una clase de cerrados de E se plantea el problema de hallar una medida μ de Radon de tipo $(\mathcal{H})$ sobre E tal que $\mu_i = \pi_i(\mu)$.

El sistema formado por E, los E_i, las π_{ij}, las π_i y las μ_i se llama *sistema proyectivo de espacios topológicos dotados de medidas de Radon de tipo* $(\mathcal{H}_i)$.

Uno de los resultados más importantes que hemos obtenido es el siguiente:

TEOREMA.—*Sea* $(E, E_i, \pi_{ij}, \pi_i, \mu_i)$ *un sistema proyectivo de medidas de Radon de tipo* $(\mathcal{H}_i)$. *Sean: a)* $\mathcal{H}$ *una familia filtrante a la derecha de conjuntos cerrados de* E *tal que cada* $H \in \mathcal{H}$ *es regular para la topología relativizada y, para todo* $H \in \mathcal{H}$ *y todo* $i \geqslant i_H$, $\pi_i(H)$ *es un conjunto cerrado en* E_i; *b)* $\mathcal{H}'$ *la clase de los conjuntos cerrados* H' *de* E *que están contenidos en algún* $H \in \mathcal{H}$ *dependiente de* H'; *c)* $\lambda(X) = \overline{\lim_i} \mu_i^{\cdot}[\pi_i(X)]$ *para todo* $X \subset E$ *de modo que* $\lambda(H) < +\infty$ *para todo* $H \in \mathcal{H}$. *Entonces existe una medida de Radon* μ *de tipo* $(\mathcal{H}')$ *sobre* E *tal que* $\mu_i = \pi_i(\mu)$ *si y sólo si se verifican:* 1) *Todo* $H \in \mathcal{H}$ *es* λ*-compacto.* 2) *Para todo* $\varepsilon > 0$, *todo* i *y todo* $H_i \in \mathcal{H}_i$, *existe un* $H \in \mathcal{H}$ *tal que*

$$\mu_j^{\cdot}[\pi_{ij}^{-1}(H_i) - \pi_j(H)] < \epsilon$$

para todo $j \geqslant i$. *Además, si esta medida existe, es única y se verifica* $\mu(H') = \lim_i \mu_i[\pi_i(H')]$ $(= \lambda(H'))$ *para todo* $H' \in \mathcal{H}'$.

El teorema precedente se puede generalizar, aunque perdiendo profundidad, del siguiente modo: Sean $(\varprojlim E_i, E_i, \pi_{ij}, \pi_i, \mu_i)$ un sistema proyectivo del tipo precedente y además E un espacio topológico y las T_i: $E \to E_i$ aplicaciones continuas tales que, para $i \leqslant j$, se tiene $T_i = \pi_{ij} \circ T_j$. Esto equivale a dar una aplicación continua T de E en el límite proyectivo $\varprojlim E_i$ de manera que $T_i = \pi_i \circ T$

para todo i. Este sistema $(E, E_i, \pi_{ij}, T_i, \mu_i)$ se llama también *sistema proyectivo generalizado de espacios proyectivos topológicos dotados de medidas de Radon de tipo* $(\mathcal{H}_i)$.

TEOREMA.—*Sea* $(E, E_i, \pi_{ij}, T_i, \mu_i)$ *un sistema proyectivo generalizado de espacios topológicos dotados de medidas de Radon de tipo* $(\mathcal{H}_i)$, *en el que* μ_i *sea localmente* σ*-finita para algún* $i \in I$. *Entonces, con las notaciones del teorema anterior y las condiciones a), b) c) y* 1) *del mismo para* T_i *en lugar de* π_i, *existe una medida de Radon* μ *de tipo* $(\mathcal{H}')$ *sobre* E *tal que* $\mu_i = T\ (\mu)$ *para todo* i *si y sólo si se verifica* 2) *para* T_i *en lugar de* π_i.

En la demostración de estos teoremas, como en la del teorema enunciado antes sobre la medida imagen, se utiliza nuestra construcción de medidas exteriores topológicas y el teorema del «concassage».

De manera análoga que se definen los espacios de Radon, se definen *los espacios de Radon de tipo* $(\mathcal{H})$ como aquellos espacios topológicos E que tienen la propiedad de que toda medida de Borel finita sobre E es una medida de Radon de tipo $(\mathcal{H})$. De manera análoga que los espacios de Radon son universalmente medibles, los espacios de Radon de tipo $(\mathcal{H})$ lo son también en ciertos casos. La propiedad de ser un espacio de Radon es hereditaria, es decir, todo subconjunto A de un espacio de Radon de tipo $(\mathcal{H})$ es un espacio de Radon de tipo $(\mathcal{H}_A)$, siendo $\mathcal{H}_A = \{A \cap T : H \in \mathcal{H}\}$. Todo espacio polaco es de Radon según demostraron J. C. Oxtoby y S. M. Ulam, así como también todo espacio de Suslin según demostró P. A. Meyer. Un *espacio fuertemente de Radon* es un espacio en el que toda medida de Borel localmente finita es una medida de Radon. Todo espacio de Suslin o que sea, simultáneamente, de Lindelöf y de Radon es fuertemente de Radon.

El problema de la existencia de «liftings» para el caso de medidas abstractas σ-finitas no idénticamente nulas está resuelto por Dorothy Maharam y A. y C. Ionescu Tulcea, y para medidas de Radon por Schwartz. Nosotros en colaboración con P. Jiménez Guerra lo hemos logrado también para medidas de Radon de tipo $(\mathcal{H})$ localmente σ-finitas.

Aunque nuestras investigaciones no las hemos extendido todavía a la teoría de la medida en espacios vectoriales topológicos vamos a dar una rápida visión de esta teoría, dejando para otra ocasión el dar una detallada exposición de ella.

La teoría de la medida en espacios vectoriales topológicos se limita prácticamente, en la actualidad, a medidas de Radon finitas y a espacios de Hausdorff. Las probabilidades o medidas positivas de masa total 1 sobre espacios de Banach o espacios vectoriales topológicos se han estudiado extensivamente, formando estos estudios una importante parte del Cálculo de Probabilidades.

Sea E un espacio de Hausdorff localmente covexo. Para un arbitrario subespacio cerrado de codimensión finita $F \subset E$ denotamos por $\pi_{E/F}$ la aplicación canónica $E \to E/F$. Los espacios E/F forman un sistema proyectivo. Supongamos ahora que en cada espacio de dimensión finita E/F se da una probabilidad $\mu_{E/F}$ de modo que $(\underleftarrow{\lim}\, E/F, E/F, \pi_{E/F, E/G}, \pi_{E/F}, \mu_{E/F})$ sea un sistema proyectivo de medidas de Radon (o de probabilidades). Entonces a tal sistema se llama una medida cilíndrica (o probabilidad cilíndrica). Una medida de Radon sobre $\underleftarrow{\lim}\, E/F$ es una medida cilíndrica, pero la inversa no es cierta según resulta del teorema del límite proyectivo de Prokhorov. Las más importantes aplicaciones se deben a V. V. Sazonov y a R. A. Minlos. El teorema de Sazonov caracteriza las aplicaciones 0-radonificantes $T: E \to F$ entre espacios de Hilbert como las aplicaciones de Hilbert-Schmidt, en otras palabras, la imagen $T(\mu)$ de una medida cilíndrica μ concentrada escalarmente sobre las bolas de E es una medida de Radon sobre F si y sólo si T es un operador de Hilbert-Schmidt. El teorema de Minlos dice que una medida cilíndrica sobre un espacio conuclear, concentrada escalarmente sobre la familia de los subconjuntos absolutamente convexos y compactos, es una medida de Radon.

Voy a terminar con el mismo lema que inicié hace veinticinco años mi tesis doctoral: A. M. D. G.

He dicho.

Bibliografía

En la redacción se han utilizado principalmente las obras y trabajos que a continuación se indica:

AUGÉ, J.: *Antonio Torroja Miret.* «Rev. de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona».

BOURBAKI, N.: *Intégration* (Cap. IX de «Eléments de Mathématique»). Hermann, París, 1969.

RODRÍGUEZ-SALINAS, B.: *Sobre la Teoría de la Medida y sus Fundamentos.* Discurso de ingreso en la Academia de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales de Zaragoza. Zaragoza, 1965.

RODRÍGUEZ-SALINAS, B.: *Teoría de la medida sobre los espacios topológicos no localmente compactos.* «Rev. Mat. Hisp.-Amer.» (4), *33* (1973), núms. 5-6.

RODRÍGUEZ-SALINAS, B. y JIMÉNEZ GUERRA, P.: *Medidas de Radon de tipo ($\mathcal{H}$) en espacios topológicos arbitrarios.* (Será publicado por la Real Academia de Ciencias de Madrid.)

RODRÍGUEZ-SALINAS, B. y JIMÉNEZ GUERRA, P.: *Espacios de Radon de tipo ($\mathcal{H}$).* «Rev. de la Real Academia de Ciencias de Madrid», 69 (1975), 761-774.

ROMAÑÁ, R. P.: *Antonio Torroja Miret.* «Rev. de la Real Academia de Ciencias de Madrid», 68 (1974), 433-435.

SCHWARTZ, L.: *Radon Measures on Arbitrary Topological Spaces and Cylindrical Measures.* Oxford University Press, 1973.

En estos trabajos se puede hallar una bibliografía más completa.

DISCURSO DE CONTESTACION

DEL

EXCMO. SR. D. GERMAN ANCOCHEA QUEVEDO

Agradezco sinceramente a la Academia el honor que me ha confiado, gratísimo para mí, de recibir en su nombre al que desde hoy va a ser nuestro compañero: el profesor Rodríguez-Salinas.

Varios son los motivos que contribuyen a hacer jubilosa mi tarea. Puesto a destacar alguno, señalaré el de que, en mi primer curso como catedrático en la Universidad de Madrid (1947-48) tuve la suerte de contar entre mis alumnos a Rodríguez-Salinas. Lo conocí entonces personalmente, aunque de nombre me era ya ventajosamente conocido por las elogiosas referencias que de él me había dado uno de sus maestros, nuestro llorado compañero Ricardo San Juan. Era dicho curso el último de la licenciatura de Salinas. Pronto se me hicieron patentes sus condiciones de profunda inteligencia, guiada por un agudo sentido crítico y una notable capacidad para extraer en cada cuestión lo esencial de las hipótesis de modo que, con una poda drástica de los supuestos, sabía llegar a la máxima generalidad posible, sin perder por ello el contacto con los problemas que constituían el núcleo de la cuestión inicial. Estas magníficas cualidades que ya entonces destacaban con nitidez, las ha conservado y perfeccionado a lo largo de su importante y densa labor científica y profesional.

Sucede Salinas a D. Antonio Torroja, ilustre geómetra y eximio maestro de varias generaciones de matemáticos catalanes. De apellido de noble solera en esta Casa, don Antonio unía a sus condiciones excelsas de científico y de maestro un fondo de cordialidad que, a menudo, había que buscar a través de una apariencia fría, que no era otra cosa que la máscara de una delicada timidez.

Nació Rodríguez-Salinas en Alcalá de Henares, ciudad e ilustre tradición universitaria, en 1925. Siguió allí sus estudios de bachillerato, sobresaliendo por sus extraordinarias aptitudes en el dominio de las matemáticas. Aptitudes justamente apreciadas por el catedrático D. Leoncio González Calzada, quien pronto lo puso en contacto con profesores universitarios: Terradas, Pineda y Ríos entre otros. En todos ellos Salinas hizo profunda impresión por sus precoces conocimientos, sus acertados juicios y las ingeniosas soluciones que ofrecía a problemas planteados sobre cuestiones delicadas de Análisis matemático contenidas en textos consagrados de la época: Goursat, Pincherle y Rey Pastor.

Cursó la licenciatura en Matemáticas en la Universidad de Madrid, donde, no es necesario insistir, alcanzó siempre las más brillantes calificaciones. De esta época datan ya importantes trabajos de investigación matemática, que habían sido precedidos por varias notas de menor pretensión, de sus años preuniversitarios, en las que se podía apreciar un fino y penetrante ingenio. En 1948 realizó las pruebas del Grado de Licenciatura, habiendo merecido la calificación de Sobresaliente con Premio extraordinario.

Terminados en nuestra Universidad sus estudios de doctorado, y tras un semestre pasado en Florencia como becario junto al profesor Sansone, presentó en 1952 su tesis doctoral en Ciencias Matemáticas, sobre una ecuación diferencial de segundo orden. También entonces alcanzó la calificación de Premio extraordinario.

En 1953 ingresó por concurso en el cuerpo de Ingenieros Geógrafos en el que fue titulado de Doctor Ingeniero en 1964. Este mismo año pidió la excedencia en dicho cuerpo, para poder dedicarse exclusivamente a la investigación y a la docencia.

En 1954 había ganado, tras brillante oposición, una cátedra de Análisis matemático en la Universidad de Zaragoza, en la que profesó hasta su incorporación en 1969 a la Universidad Complutense, hecho que colmaba sus mejores aspiraciones profesionales. Aspiraciones más que justificadas por sus méritos y que, por otra parte, tendían a satisfacer un naturalísimo deseo sentimental abrigado por quien, como el Recipiendiario, nació en la muy ilustre Complutum.

Durante su docencia en Zaragoza fue elegido miembro de número de la Academia de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales de aquella ciudad en 1957. Leyó en 1965 su discurso de ingreso en dicha Corporación, disertando sobre «La teoría de la medida y sus fundamentos».

Referente del Zentralblatt für Mathematik y de la Mathematical Reviews, es miembro Corresponsal de nuestra Academia desde 1971.

La labor investigadora de Rodríguez-Salinas abarca variados temas, la mayor parte de Análisis matemático, que pueden agruparse en las Secciones que enumeramos a continuación, destacando en cada una de ellas los trabajos que consideramos más relevantes y que señalamos por el número con que aparecen en la lista de publicaciones del final de este discurso.

1. Teoría de la medida e integración: 6, 30, 46, 51, 53, 56, 57, 59, 61.
2. Clases casi-analíticas y semi-analíticas. Momentos: 16, 17, 18, 20, 22, 23, 26, 29, 35, 38, 43, 44.
4. Ecuaciones diferenciales: 19, 24, 28, 33.
4. Teoría de la aproximación: 25, 66.
5. Transformación de Laplace: 31, 32.
6. Extensión de aplicaciones lineales: 40, 47, 60, 63.
7. Varias: 37, 42, 58, 62, 64.

Como detalle doméstico he de señalar que gran parte de los trabajos más importantes vieron la luz en la Revista de nuestra Academia.

Lejos de mi intención, y muy por encima de mis posibilidades científicas, está el intentar hacer un resumen inteligible de todos los trabajos que acabamos de destacar. Voy más bien a remitirme, con una sola excepción, al juicio que a autoridades en las respectivas materias han merecido algunos de ellos.

La publicación 6, que corresponde a los años de estudiante en la Facultad, es la única referencia utilizada por G. Aumann en su obra más importante «Reelle Funktionen», de la célebre colección amarilla de Springer, en el parágrafo 10 del capítulo 8 (Masstheorie) referente a la Extensión de un Contenido a una medida.

Los números 31 y 32 aparecen citados en el texto del «Handbucch der Laplace Transformation» de G. Doetsch, también de la editorial Springer.

En la Sección de Extensión de aplicaciones lineales, los trabajos 47 y 60 están considerados por J. Horváth en su comunicación en la Summer school on Topological Vector Spaces, de título «Convex Spaces» y en artículos publicados por M. Landsberg y W. Schirotzek de Dresden en las Mathematische Nachrichten, bajo el título «General Extension Theorems for Lineal functionals».

Citas del trabajo 17 sobre Momentos se encuentran en artículos publicados por M. M. Dyrbasahyan y G. S. Kolcharyan, en la Revista de la Academia de Ciencias de Moscú.

Detenemos aquí las referencias para no hacer interminable nuestro discurso. Vamos, en cambio, a examinar con cierto detalle el trabajo número 42 de Varia, de título «Una generalización de los teoremas de von Staudt y Darboux», publicado en la Revista de la Facultad de Ciencias de Lisboa. El tema concerniente al llamado teorema fundamental de la Geometría proyectiva, que ocupó lugar preeminente en la matemática de fines del siglo pasado y comienzos del nuestro, y que fue objeto de estudio detallado por ilustres geómetras que nos precedieron en esta Casa. Yo mismo me ocupé de la cuestión durante la década de los 40, considerando los casos de cuerpos no conmutativos. El problema es el siguiente: ¿Qué se puede decir de una proyectividad sobre la recta cuando son invariantes tres puntos? Se puede suponer, sin restricción de la generalidad, que los tres puntos son el cero, el uno y el del infinito. La respuesta depende de la definición que se adopte para proyectividad y de la naturaleza del cuerpo base de la recta. En el caso clásico, recta sobre los reales, se tenían dos definiciones de proyectividad. La de Poncelet mediante proyecciones y secciones y la de von Staudt por conservación de cuaternas armónicas. Aunque, en apariencia, la segunda pide menos que la primera, el teorema de von Staudt probaba la equivalencia de ambas y la respuesta a la pregunta anterior es la de que la transformación deja invariantes todos los puntos de la recta. Si se pasaba al campo complejo, las dos definiciones dejaban de ser equivalentes y las respuestas a la cuestión daban la identidad para la proyectividad de Poncelet y un automorfismo cualquiera del campo complejo (¡existen infinitos!) para la de von Staudt.

Para el caso complejo, el mismo von Staudt dio una tercera definición de proyectividad basada en el concepto de cadena. Cuatro números complejos están en una cadena si su razón doble es real. En la representación de Gauss, los puntos correspondientes están en una recta o en una circunferencia. Von Staudt define entonces la proyectividad como correspondencia biyectiva que transforma cadenas en cadenas. Con esta definición se obtiene, como respuesta a la pregunta inicial, que la transformación es la identidad o el paso de cada complejo a su conjugado (teorema de Darboux).

El desarrollo del Algebra abstracta durante la primera mitad del siglo actual llevó de modo natural a considerar el problema en el caso de cuerpos no conmutativos. Subsisten entonces tres tipos posibles de proyectividad para la recta que extienden los considerados en el caso del cuerpo complejo. Para el tercero la generalización adecuada, considerada por Rodríguez-Salinas, es como sigue: Sea K un cuerpo cualquiera y H un subcuerpo de K invariante frente a los automorfismos interiores de K. Se dirá que cuatro números de K están en una cadena si la clase de su razón doble es un elemento de H. La definición de proyectividad se hace entonces por conservación de cadenas. En estas condiciones Rodríguez-Salinas demuestra que, en el caso de tres puntos dobles (tomados como fundamentales) la proyectividad da lugar a un automorfismo directo o a un automorfismo inverso de K. Estableciendo así un resultado que extiende el dado para el segundo tipo de proyectividad por mí en el caso de cuerpos no conmutativos especiales y por Hua en el caso general. Rodríguez-Salinas obtiene su demostración con procedimientos de gran sobriedad y de una elegancia extraordinaria.

Me he detenido en el estudio de esta publicación, aparte de que su tema me es familiar, por tratarse de una cuestión puramente algebraica; el lenguaje geométrico utilizado resulta cómodo pero no es en modo alguno esencial. Resulta interesante observar cómo Rodríguez-Salinas, que podría catalogarse como analista profesional, maneja con soltura y eficacia métodos sutiles de Algebra. En realidad Rodríguez-Salinas había mostrado ya en otras ocasiones, verbigracia en sus estudios sobre medidas abstractas, su sólida formación algebraica. Y en este sentido es un ejemplo a seguir por nuestros jóvenes matemáticos, si no quieren caer en el riesgo de una compartimentación de especialidades matemáticas que podría resultar funesta para nuestra ciencia.

Paso ahora a considerar, en forma breve, la magnífica lección que, sobre Medida y Topología, ha desarrollado el Recipiendiario y a la que resultaría pretencioso y superfluo añadir muchos comentarios. Se trata de un tema profundo y difícil y sólo con un conocimiento esencial de la cuestión, como el que posee Rodríguez-Salinas, se puede aspirar a hacerlo comprensible para el no especialista. La multitud y la complejidad de los conceptos necesarios: funciones de Baire, conjuntos borelianos, sousliniano y lusinianos, espacios polacos, medidas lisas y tensas, etc., constituyen otros tantos escollos en los que es muy probable que naufrague el profano ingenuo. Habré de refugiarme en la contemplación de algunas etapas del devenir histórico del tema; aunque también en este aspecto la exposición brillante de Rodríguez-Salinas resulta difícil de apostillar.

La idea de medida en matemáticas es tan antigua como la Geometría misma, y justamente a ella debe ésta su nombre. Longitudes, áreas y volúmenes de figuras elementales son los primeros ejemplos de medidas. Son números positivos asignados a las figuras y que satisfacen la propiedad aditiva, es decir, son tales que a la unión de dos figuras (de la misma clase) sin parte común corresponde la suma de las medidas fijadas para éstas. Definidas primero para quebradas, polígonos y paralelepípedos, se consideran luego longitudes de curvas, áreas de porciones plano limitadas por curvas y rectas, volúmenes de pirámides, etc., cuyas medidas obtienen los griegos por el llamado método exhaustivo. Se tienen así los primeros ejemplos de extensión de medidas.

Las teorías de la medida en el sentido actual no aparecen, sin embargo,, hasta mediados del siglo pasado y están motivadas por la evolución de la idea de función. El cálculo de los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de una función cualquiera hizo necesaria la consideración de integrales definidas de funciones con discontinuidades. Se presenta entonces la cuestión ¿qué discontinuidades puede admitir una función en un intervalo para que la integral definida exista? La respuesta depende evidentemente de la definición de integral que se utilice. Para Dirichlet, al parecer, una función es integrable si y sólo si el conjunto de puntos de discontinuidad es raro en la denominación actual. Mientras que Riemann, definiendo la integral mediante las sumas que hoy llevan su nombre, da ejemplos de funciones integrables cuyas discontinuidades forman un conjunto denso. Las condiciones que establece Riemann para la integrabilidad conducen de modo natural a la noción de medida de conjuntos de puntos de un segmento. En el discurso de Rodríguez-Salinas seguimos con detalle la evolución de dicho concepto a través de Cantor, Peano, Jordan, Borel, Lebesgue, Radon y otros. Todos ellos utilizan esencialmente las propiedades topológicas del espacio euclidiano. Vemos cómo Frechet es el primero en considerar medidas abstractas en conjuntos generales y en observar que se pueden obtener los principales resultados de la teoría de Lebesgue sin hacer uso de consideraciones topológicas. La corriente de ideas iniciada así culmina en la «Mass und Integral» de Caratheodory en la que se desarrolla con gran abstracción la teoría axiomática de la medida, que pasa de instrumento auxiliar de la integración, como lo fue en esencia para Lebesgue, a constituir una de las teorías fundamentales de la matemática actual.

A partir de entonces se dibujan dos tendencias que, esquematizando de modo un poco simplista, se podrían personalizar en Halmos para las medidas abstractas obtenidas a partir de funciones aditivas de conjunto y en Bourbaki para las definidas por métodos funcionales. Tendencias que dieron lugar a discusiones apasionadas que, según frase feliz, hicieron correr, si no sangre, al menos mucha tinta.

En lo que se refiere a la topología de los espacios sobre los que definen las medidas, durante algún tiempo se consideraron casi exclusivamente espacios compactos o localmente compactos como generalización suficiente de los espacios R^n. Así se estableció, en particular, la medida de Haar invariante para la multiplicación a la izquierda, para los grupos topológicos localmente compactos. Sin embargo, con tal limitación quedaban excluidos capítulos tales como los de medidas en espacios métricos generales y la teoría de la medida de Hausdorff. Más grave todavía, quedaban fuera las importantes aplicaciones de la medida a la teoría moderna del Cálculo de Probabilidades en la que los espacios que aparecen naturalmente no son, en general, localmente compactos. Para obviar estos inconvenientes, a partir del año 60 se extiende la medida a espacios topológicos más generales, siendo Rodríguez-Salinas uno de los primeros en señalar la urgente necesidad de tal ampliación. Se consideran primero espacios generales de Hausdorff y posteriormente L. Schwartz y Rodríguez-Salinas trataron el caso de espacios que no son de Hausdorff. Aunque Schwartz se limita a los espacios casi-compactos, sin desarrollar con detalle su generalización y expresando su reserva acerca de su posible utilidad en vista de que apenas se conocen aplicaciones.

La semblanza que he querido presentar de nuestro nuevo compañero quedaría amputada de uno de sus méritos más elogiables si no destacara con énfasis su labor como profesor y, sobre todo, su extraordinaria capacidad para iniciar y orientar en la investigación matemática a su mejores alumnos. Capacidad de la que es muestra relevante el elevado número, insólito en nuestro país en el campo matemático, de tesis doctorales dirigidas por él desde su acceso a la cátedra y que se detallan al final. De ese plantel de seguidores de Rodríguez-Salinas esperamos que, haciendo honor a su maestro, perseveren en su labor a fin de lograr los mejores frutos para la investigación matemática española.

Al daros hoy nuestra más cordial bienvenida, querido Rodríguez-

Salinas, quiero acompañarla de nuestra enhorabuena por lo que este acto significa de reconocimiento de vuestros méritos científicos y de las magníficas condiciones personales que os adornan. Quiero también dar la enhorabuena a nuestra Academia que, al recibiros en su seno, se enriquece con una mentalidad brillante y profunda y de infatigable laboriosidad que augura una inapreciable colaboración en nuestro futuro quehacer.

Publicaciones del profesor Rodríguez-Salinas

1. *Determinante que da* f (x + y) *en función de* f (x) *y de* f (y). «Rev. Euclides», año II (1942), 159-162.
2. *Resolución de la ecuación funcional:*

$$F(x) = \pm \frac{F[x + 2F(x)F'(x)(1 + F'(x)^2)]}{1 + 2F'(x)^2}$$

«Rev. Euclides», año II (1942), 349-351.
3. *Una demostración sobre la integral de Dirichlet.* «Rev. Euclides», año II (1942), pág. 90.
4. *Modo de sumar algunas expresiones.* «Rev. Euclides», año III (1943), 343-348.
5. *La inversión en el orden de la derivación.* «Rev. R. Acad. de Ciencias de Madrid», vol. 42 (1948), 37-70.
6. *Sobre la teoría de la medida.* «Rev. R. Acad. de Ciencias de Madrid, vol. 42 (1948), 465-491.
7. *Sobre una función meromorfa y sus aplicaciones a la suma de series.* «Rev. Gaceta Mat.», vol. 3 (1951), 6-17.
8. *Sobre la determinación de una función analítica conocida su parte real.* «Rev. Gaceta Mat.», vol. 4 (1952), 44-46.
9. *Sobre el comportamiento asintótico de la aplicación reiterada de una sucesión de funciones.* «Rev. Gaceta Mat.», vol. 4 (1952), 81-90.
10. *Sobre la región de los valores de una función lisa.* «Rev. Mat. Hisp.-Amer.», vol. 12 (1952), 223-228.
11. *Sobre una generalización de las fórmulas de Taylor, Darboux y Euler-Mac-Laurin.* «Rev. Mat. Hisp.-Amer.», vol. 12 (1952), 281-289.
12. *Sobre varias formas de proceder en la determinación de períodos de las mareas y predicción de las mismas en un cierto lugar.* «Rev. R. Acad. de Ciencias de Madrid», vol. 46 (1952), 17 págs.
13. *Transformadas de Laplace de algunas funciones integrales.* «Rev. Gaceta Mat.», vol. 5 (1953), 157-158.
14. *Sobre ciertos desarrollos asintóticos de integrales de Laplace curvilíneas.* «Rev. Mat. Hisp.-Amer.», vol. 13 (1953), **120-127.**

15. *Exposición de algunos teoremas conocidos y otros nuevos sobre convergencia ordinaria y uniforme de la integral de Fourier*. En colaboración con Ricardo San Juan. «Rev. R. Acad. de Ciencias de Madrid», vol. 47 (1953), 495-510.
16. *Complemento a un teorema de Ahlfors-Heins sobre funciones sub-armónicas*. «Rev. Acad. de Ciencias de Zaragoza», vol. 9 (1954), fasc. 2.º, 119-125.
17. *Funciones con momentos nulos*. «Rev. R. Acad. de Ciencias de Madrid», vol. 49 (1955), 331-368.
18. *Los problemas de la unicidad en la teoría de series asintóticas. Expresión de funciones semi-analíticas mediante algoritmos de Borel y Stieltjes*. «Rev. R. Acad. de Ciencias de Madrid», vol. 50 (1956), 191-227.
19. *Sobre la ecuación diferencial*:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \left[\frac{a_0 + a_1 \cos 2x}{b_0 + b_1 \cos 2x} - \frac{m (m-1)}{\cos^2 x} - \frac{n (n-1)}{\operatorname{sen}^2 x} \right] y = 0$$

Tesis doctoral. «Rev. Mat. Hisp.-Amer.», vol. 15 (1955), 31-47, 121-135, 182-208; vol. 16 (1956), 49-71, 122-150, 229-263. Memorias de Mat. del Instituto «Jorge Juan», núm. 18, 145 págs. (Contiene seis apéndices.)
20. *Moments de fonctions analytiques et problème de Watson*. «J. de Math. Pures et Appl.», vol. 9 (1956), 359-382.
21. *Ceros de las funciones de una clase no cuasi-analítica en R^n. Prolongación no cuasi-analítica*. «Collectanea Math.», vol. 9 (1957), 65-77.
22. *Una desigualdad entre las cotas de las derivadas de una función analítica en un ángulo*. Rev. «Las Ciencias», de Madrid, año XXIII (1958), 533-539.
23. *Disuguaglianze tra limiti e coefficienti dello sviluppo asintotico di una funzione in un angolo*. «Ann. di Mat. Pura ed Appl.», vol. 48 (1959), 147-159.
24. *Sulla stabilita delle soluzioni per l'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti periodici*. «Rend. Circolo Mat. di Palermo», vol. 8 (1959), 206-224.
25. *Aproximación uniforme de una función continua por un conjunto convexo de funciones continuas*. «Collec. Math.», vol. 11 (1959), 175-202.
26. *Equivalenza di classi di funzioni con sviluppo asintotico in un angolo. Funzioni caractteristiche*. «Boll. Unione Mat. Italiana», vol. 14 (1959), 525-531.
27. *Sobre la estabilidad de la ecuación funcional* f (x + y) = = f (x) + f (y). «Rev. Acad. de Ciencias de Zaragoza», vol. 14 (1959), fasc. 1.º, 5-7.

28. *Variación de las raíces características de una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes periódicos.* «Ann. di Mat. Pura ed Appl.», vol. 52 (1960), 107-161.
29. *Solución de un problema de Bang de la teoría de clases cuasi-analíticas.* Rev. «Las Ciencias», de Madrid, año XXV (1960), 257-261.
30. *Sobre el cambio de variable en las integrales múltiples.* «Collec. Math.», vol. 12 (1960), 139-153.
31. *Una fórmula asintótica para algunas transformadas de Laplace.* «Rev. R. Acad. de Ciencias de Madrid», vol. 54 (1960), 177-187.
32. *Un desarrollo asintótico de ciertas transformadas de Laplace.* «Rev. R. Acad. de Ciencias de Madrid», vol. 54 (1960), 167-176.
33. *Funciones que verifican en cada punto de un intervalo a una ecuación diferencial variable con el punto.* «Rev. R. Acad. de Ciencias de Madrid», vol. 54 (1960), 301-311.
34. *Estabilidad y ceros de las soluciones de una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes periódicos.* «Rev. Acad. de Ciencias de Zaragoza», vol. 15 (1960), fasc. 2.°, 5-9.
35. *Solución del problema de equivalencia de clases de funciones con desarrollo asintótico.* «Rev. Acad. de Ciencias de Zaragoza», vol. 16 (1961), fasc. 1.°, 47-51.
36. *Existencia de puntos de Weierstrass de funciones reales. Máximos y mínimos en espacios casi numerablemente compactos.* «Rev. Acad. de Ciencias de Zaragoza», vol. 16 (1961), fasc. 2.°, 5-10.
37. *Conjunto de valores de un coeficiente diferencial.* «Collec. Math.», vol. 13 (1961), 3-13.
38. *Crecimiento de una función analítica en un ángulo.* «Collec. Math.», vol. 13 (1961), 197-217.
39. *Existencia de máximo de funciones reales continuas en espacios casi numerablemente compactos.* «Ann. di Mat. Pura ed Appl.», vol. 56 (1961), 375-413.
40. *Generalización sobre módulos del teorema de Hahn-Banach y sus aplicaciones.* «Collec. Math.», vol. 14 (1962), 105-151.
41. *Sobre el último teorema de Fermat y la ecuación*

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} + \frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \frac{\partial^n u}{\partial z^n}$$

«Rev. Fac. de Ciencias de Lisboa», vol. 9 (1962), 35-44.
42. *Una generalización de los teoremas de von Staudt y Darboux.* «Rev. Fac. de Ciencias de Lisboa», vol. 9 (1962), 77-86.
43. *Clases de funciones analíticas. Clases semi-analíticas y cuasi-analíticas.* «Rev. Acad. de Ciencias de Zaragoza», vol. 17

(1962), fasc. 1.º, 5-75. Publicaciones del Seminario Mat. García de Galdeano, núm. 6, Zaragoza, 1962.

44. *Crecimiento de una función analítica en una banda de anchura no constante.* «Collec. Math.», vol. 15 (1963), 5-22. Actas de la III Reunión Anual de Mat. Españoles.

45. *Una clase de grupoides: tribus. Inmersión en una tribu.* «Collec. Math.», vol. 15 (1963), 153-167. Actas de la III Reunión Anual de Mat. Españoles.

46. *El problema de la extensión.* «Ann. di Mat. Pura ed Appl.», vol. 64 (1964), 133-189.

47. *Sobre la prolongación de funcionales lineales.* «Collec. Math.», vol. 16 (1964), 67-78. Actas de la IV Reunión Anual de Mat. Españoles.

48. *Sobre la Teoría de la Medida y sus Fundamentos.* Discurso de ingreso en la Academia de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales de Zaragoza el día 2 de mayo de 1965.

49. *El método de iteración en la teoría de puntos fijos.* «Rev. Mat. Hisp.-Amer.», vol. 25 (1965), 174-185. Actas de la IV Reunión Anual de Mat. Españoles.

50. *Sobre la ecuación funcional* $f(x + y) = f(x) f(y)$ *y las funciones* a^x y $\log_a x$. «Rev. Mat. Hisp.-Amer.», vol. 25 (1965), 112-129. Actas de la V Reunión Anual de Mat. Españoles.

51. *Sur la décomposition d'ensembles en parties respectivement equivalentes. Quantité et Mesure.* Comptes Rendus da la III^e Réunion du Groupement des Mathématiciens d'expression latine. Centre Belge des recherches mathématques, pp. 139-152. Namur, septembre 1965.

52. *Sobre un teorema del punto fijo.* «Rev. Mat. Hisp.-Amer», vol. 26 (1966), 148-150.

53. *Construcción de medidas de Borel sobre los espacios regulares.* «Actas de la V Reunión Anual de Mat. Españoles», páginas 16-33.

54. *Sobre los cuerpos no conmutativos de rango cuatro respecto de su centro.* «Actas de la V Reunión Anual de Mat. Españoles», págs. 137-152. (En colaboración con J. Garay de Pablo.)

55. *Panorama de la Teoría de la Medida.* Conferencia pronunciada en el Ciclo organizado por la Academia de Ciencias del Colegio Mayor Universitario La Salle de Zaragoza el día 15 de febrero de 1967.

56. *Sobre el paso al límite bajo el signo integral.* «Rev. R. Acad. de Ciencias de Madrid», vol. 61 (1967), 471-499.

57. *Sobre las medidas invariantes en un grupo topológico.* «Collec. Math.», vol. 18 (1966-67), 207-223.

58. *Puntos fijos en conjuntos ordenados.* Homenaje al Profesor Dr. Iñiguez y Almech. Pub. del Seminario Mat. García de Galdeano, núm. 10, Zaragoza, 1969, págs. 166-172.

59. *El problema de la medida.—I. Extensión de medidas en semigrupos.* «Rev. Mat. Hisp.-Amer.», 30 (1970), 141-171; II. *Funciones aditivas sobre un semigrupo ordenado.* «Rev. Mat. Hisp.-Amer.», 30 (1970), 219-250; III. *Teoría de la medida exterior en un semigrupo de Lebesgue.* «Rev. Mat. Hisp. Amer.», 31 (1971), 46-85; IV. *Extensión de funciones biaditivas.* «Rev. Mat. Hisp.-Amer.», 31 (1971), 155-159; V. *Extensión de A-homomorfismos.* «Rev. Mat. Hisp.-Amer.», 31 (1971), 160-180; VI. *Módulos normados inyectivos.* «Rev. Mat. Hisp.-Amer.», 31 (1971), 223-238; VII. *Medidas invariantes sobre A-módulos normados inyectivos.* «Rev. Mat. Hisp.-Amer.», 31 (1971), 253-306. (El trabajo completo, realizado con la Ayuda «Juan March», 1966 de Matemáticas (Grupo II), ha sido publicado como Memoria de Matemática núm. 26 del Instituto «Jorge Juan» y consta de 205 páginas.)
60. *Algunos problemas y teoremas de extensión de aplicaciones lineales.* «Rev. R. Acad. de Ciencias de Madrid», 65 (1971), 677-704.
61. *Teoría de la medida sobre los espacios topológicos no localmente compactos.* (Conferencia Plenaria dada en las Primeras Jornadas Matemáticas Luso-Españolas, Lisboa, 1972.) «Rev. Mat. Hisp.-Amer.», 33 (1973), 178-192 y 257-274.
62. *The Tychonoff product theorem for compact Hausdorff spaces does not imply the axiom of choice: A new proof. Equivalent propositions.* (En colaboración con F. Bombal Gordón.) «Collec. Math.», 24 (1973), 219-230.
63. *A theorem of Hahn-Banach type for arbitrary vector spaces* (En colaboración con L. Bou García.) «Boll. della Unione Mat. Italiana» (4), 10 (1974), 390-393.
64. *Representación de inf-semirretículos en las partes de un espacio topológico.* (En colaboración con F. Bombal Gordón.) «Collec. Math.», 26 (1975), 67-94.
65. *Los axiomas de la teoría de conjuntos.* Real Acad. de Ciencias de Madrid. Volumen en homenaje al Prof. D. Manuel Lora-Tamayo (págs. 41-51). Madrid, 1975.
66. *Algunos resultados sobre aproximación de funciones continuas vectoriales.* (Dedicado al Prof. Giovanni Sansone.) «Boll. della Unione Mat. Italiana» (4), 11 (1975), 142-147.
67. *Espacios de Radon de tipo* ($\mathcal{H}$). (En colaboración con P. Jiménez Guerra.) «Rev. R. Acad. de Ciencias de Madrid», 69 (1975), 761-774.

Trabajos inéditos y en preparación

1. *Sobre las funciones convexas y sus aplicaciones a la determinación del comportamiento asintótico de las transformadas de Laplace-Stieltjes.* (Parte se encuentra publicado en las publicaciones 31 y 32 anteriores.)
2. *Solución del problema de equivalencia de clases de funciones con desarrollo asintótico.* (Memoria completa, una parte de ella se ha dado a conocer en la publicación 29 citada anteriormente.)
3. *Variedades invariantes respecto de una aplicación.*
4. *Medidas de Radon de tipo ($\mathcal{H}$) en espacios topológicos arbitrarios.* (En colaboración con P. Jiménez Guerra.)

Tesis doctorales dirigidas por el Prof. Rodríguez-Salinas

1. *Series asintóticas débiles.* Tesis de D. Diego Ramírez Duro. Calificada con Premio Extraordinario en 1960.
2. *Sobre la integración en espacios topológicos.* Tesis de D. José Garay de Pablo. Calificada con Premio Extraordinario en 1968.
3. *Funciones aleatorias periódicas.* Tesis de D. Manuel San Miguel Marco. Calificada con Sobresaliente «cum laude» en 1969.
4. *Resolución del problema de Cauchy para las ecuaciones en derivadas parciales totalmente hiperbólicas.* Tesis de D. Mariano Gasca González. Calificada con Sobresaliente «cum laude» en 1970.
5. *Medidas invariantes con valores en A-módulos normados.* Tesis de D. Fernando Bombal Gordón. Calificada con Premio Extraordinario en 1972.
6. *Teoría de la aproximación en espacios vectoriales sobre cuerpos valorados. Generalización del teorema de Kukutani-Stone para funciones con valores en R^n.* Tesis de D. Bienvenido Cuartero Ruiz. Calificada con Premio Extraordinario en 1972.
7. *Límites generalizados en A-módulos.* Tesis de D. Gabriel Vera Botí. Calificada con Sobresaliente «cum laude» en 1972.
8. *Propiedades extremales de los polinomios de coeficientes enteros y aproximación de las funciones mediante dichos polinomios.* Tesis de D. Emiliano Aparicio Bernardo. Calificada con Sobresaliente «cum laude» en 1973.
9. *S-Sistemas dinámicos abstractos.* Tesis de D. Ignacio Gracia Rivas. Calificada con Sobresaliente «cum laude» en 1974.

10. *Teoremas del gráfico cerrado, núcleo cerrado y aplicación abierta.* Tesis de D. Germán Giráldez Tiebo. Calificada con Sobresaliente «cum laude» en 1974.

11. *Generalizaciones del teorema de Hahn-Banach para semimódulos preordenados.* Tesis de D. Pedro Jiménez Guerra. Calificada con Sobresaliente «cum laude» en 1975.

12. *Espacios de convergencia en medida. Convexidad local.* Tesis de D. Jesús Fernández Novoa. Calificada con Sobresaliente «cum laude» en 1975.

13. *Espacios de Orlicz. Convexidad local.* Tesis de D.ª M.ª Pilar Pereda Vinuesa. Calificada con Sobresaliente «cum laude» en 1975.

14. *Desigualdades e interpolación de operadores.* Tesis de D. Javier Ruiz Fernández de Pinedo. Calificada con Sobresaliente «cum laude» en 1976.