REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DISCURSO

LEÍDO EN EL ACTO DE SU RECEPCIÓN

POR EL SEÑOR

D. JOSÉ MARÍA PLANS Y FREYRE

Y

CONTESTACIÓN

DEL ILMO. SEÑOR

D. LUIS OCTAVIO DE TOLEDO Y ZULUETA

EL DIA 18 DE MAYO DE 1924

MADRID
TALLERES «VOLUNTAD»
SERRANO. 48
1924

DISCURSO

DEL SEÑOR

D. JOSÉ MARÍA PLANS Y FREYRE

SEÑORES ACADEMICOS:

ANTE todo debo hacer constar pública y solemnemente mi más sincero reconocimiento por el inmerecido favor que me dispensasteis al elegirme para tomar parte en vuestras tareas, otorgándome así un honor al que sólo vuestra bondad pudo elevarme. Creo que me conocéis y estáis bien convencidos de que podéis contar con la modesta cooperación que puedan prestaros mis escasas fuerzas, que no van, desgraciadamente, al unísono de mi profunda gratitud.

El motivo que hoy nos congrega recuerda la gran pérdida sufrida por esta Corporación en el fallecimiento de vuestro nunca bastante llorado compañero, el insigne hombre de Ciencia, honra y prez del prestigioso Cuerpo de Ingenieros de Caminos, Excmo. Sr. D. Juan Manuel de Zafra y Estevan. Puede afirmarse en esta ocasión, como dijo en otra análoga uno de los más esclarecidos Académicos (*), que «el sillón que él ocupó debiera quedar vacío para siempre»; y ahora debo decirlo con más motivo, ya que es a todas luces eviden-

(*) Discurso leído por D. Julio Rey Pastor en el acto de su recepción en la Real Academia de Ciencias exactas, físicas y naturales de Madrid (día 14 de noviembre de 1920).

te que el sucesor no está, como entonces, a la altura que las circunstancias de la sustitución reclamaban.

En varias Revistas se han publicado bien escritas necrologías (*); y ya en esta Casa, en la sesión inaugural del presente curso, se trazó su silueta científica y moral de mano maestra, como sabe hacerlo vuestro respetado y querido Secretario. Pero, a pesar de ello, es para mí en estos instantes un sagrado deber que me obligaría a hacerlo, aunque no fuera costumbre establecida, recordar a grandes rasgos los méritos relevantes de quien tanto lustre dió y hubiera dado a esta Academia, si una muerte prematura no lo hubiera arrebatado, a una edad en que tanto cabía aún esperar de su saber y actividad.

Todos conocéis su brillante carrera y sus éxitos técnicos y científicos. Salido con el primer número de su promoción, comenzó su vida profesional en las obras del Puerto de Sevilla; y planteándose a la sazón el problema de las construcciones de hormigón armado, se dedicó de lleno a su estudio, no exento ciertamente de dificultades, y proyectó y construyó diversas obras, modelos en su género.

Deseando, con gran acierto, la Escuela de Caminos que la actuación de Zafra no se limitara a sus trabajos particulares, sino que diera el máximo rendimiento en beneficio del progreso de la Ingeniería española, le llamó a formar parte de su Profesorado, en el que continuó hasta su muerte, encargándole de la cátedra de *Puertos*. Sabedores sus alumnos (de los cuales el número uno, que fué el comisionado al objeto, se sienta ahora entre vosotros) de las singulares condiciones del Profesor que habían tenido la dicha de que les

(*) *Revista Matemática Hispanoamericana*, mayo de 1923, por Fermín Casares Bescansa. *Revista de Obras Públicas*, 1.º de mayo de 1923, por Enrique Colás. *Ibérica* .Año X, núm. 474, 21 de Abril de 1923.

cupiera en suerte, le rogaron que les diera unas Conferencias sobre *Construcciones de hormigón armado*, a lo que Zafra accedió gustoso; dando esto por resultado que luego se incluyera oficialmente esta enseñanza en la asignatura que le estaba encomendada. Entonces publicó su tratado de *Construcciones de hormigón armado*, que tanto contribuyó a la formación de los nuevos ingenieros, precursor de su obra más importante, a la que debió principalmente su nombradía, su famoso *Cálculo de estructuras*. Debe citarse también de un modo especial su última publicación titulada: *Modelos de puentes de hormigón armado para caminos vecinales y para carreteras*, sumamente práctica y útil. Estaba preparando, cuando le sorprendió la muerte, la segunda edición del primer libro citado, que se ha llevado a efecto bajo la dirección de uno de sus discípulos predilectos, por una muy laudable iniciativa de la Escuela de Caminos, como homenaje póstumo.

Fué un entusiasta de la Mecánica, especialmente de la aplicada a las Construcciones, renunciando, llevado de su afición, a la posición envidiable que le brindaba el cargo de Director del Puerto de Sevilla, que con insistencia le fué ofrecido, para dedicarse a sus estudios favoritos, publicando numerosos artículos y memorias interesantes y disfrutando en transmitir sus conocimientos a sus alumnos y en ver en las obras por él proyectadas los resultados de sus cálculos e investigaciones. Entre sus trabajos más notables figura, como es sabido, aquel célebre proyecto de bóveda en forma de superficie velaria aplicada a un contorno rectangular, consiguiendo con ello el mínimo de material resistente por no haber tendencia a la flexión, que ideó para el tercer depósito de aguas de Lozoya; que si bien no fué, en definitiva, el preferido, por razón de economía (aunque ésta era bien exigua, por cierto), virtualmente fué reconocido como el mejor, toda vez que el Consejo de Obras públicas obligó a introducir en el aceptado algunas modificaciones, y se dijo en el dictamen que si se adoptaba el de Zafra, podía llevarse a la práctica sin la más mínima alteración. También es obligado mencionar su estudio de presas de embalse de gran altura con pantallas constituídas por contrafuertes y bóvedas de hormigón armado.

Como profesor, ha dejado en su Escuela huellas indelebles; y la pléyade de ingenieros que pasó por su aula siempre pronunciará reconocida, con respeto y veneración, el nombre inolvidable del maestro de sólida y extensa cultura, solícito en resolver las dudas y atender a cualquier consulta, cuyas explicaciones eran escuchadas con avidez y tenían el atractivo del interés y de la originalidad.

En premio a sus indiscutibles méritos, le fué concedida en 1919 la Gran Cruz de Alfonso XII, que S. M. el Rey le impuso personalmente con la mayor solemnidad, habiendo sido costeadas las insignias por el Cuerpo de Caminos, en testimonio del sincero afecto que todos le profesaban. El mismo año le fué otorgado el primer premio anual creado para recompensar los trabajos meritorios de los ingenieros de Caminos. Y vosotros completasteis el cuadro de tan justificadas distinciones trayéndole a esta Academia.

A todas las cualidades intelectuales de que Dios le había dotado y a su gran tenacidad en el trabajo, con que tan bien supo administrar los talentos recibidos, unía una honradez acrisolada, una gran modestia y una bondad sin límites. De mí sé decir que no tuve la honra de tratarle hasta los últimos años de su vida; pero en poco tiempo quedé encantado de su trato agradable y selectas condiciones personales, que en seguida hicieron le respetara y apreciara sinceramente. No le faltaron amarguras y tremendas desgracias de familia, que sobrellevó, así como la enfermedad que le llevó al sepulcro, con la resignación cristiana propia del elevado temple de su espíritu.

Descanse en paz el sabio ingeniero, el caballero intachable, el amigo bondadoso; y procuremos que su recuerdo quede bien grabado en nuestras almas y nos sirva de estímulo para estudiar con entusiasmo y sin desmayos, honrando así la memoria de quien nos dejó tan acabado ejemplo que imitar.

* * *

Ahora es preciso que cumpla con la obligación que contraje, en justa correspondencia, para con vosotros. Y ciertamente os ruego no juzguéis mi buena voluntad, que, podéis creerlo, es muy grande, por el resultado obtenido la primera vez que la habéis puesto a prueba. Una enfermedad, no grave, a Dios gracias, pero sí persistente, me obligó a tomar la firme resolución de guardar, el pasado verano, un descanso absoluto. Yo bien hubiera querido presentaros un trabajo, si no de mérito relevante, que esto no está a mi alcance, siquiera desarrollado más concienzudamente. La circunstancia antes indicada me lo ha impedido y os ruego me dispenséis que, por la premura del tiempo, no haya podido hacer lo que era mi deseo y correspondía a la deuda por mí contraída con esta docta Corporación.

Pocas vacilaciones, francamente, tuve en la elección de tema. Todos sabéis que, en estos últimos tiempos, el asunto a que más me he dedicado es la llamada teoría de la Relatividad y el Cálculo diferencial absoluto como instrumento matemático de la misma. Por esto me pareció en seguida lo más adecuado hablar de los últimos adelantos realizados en estas materias, proponiendo a vuestra atención: *Algunas* *consideraciones sobre los espacios de Weyl y de Eddington y los últimos trabajos de Einstein.*

* * *

Desde que Riemann generalizó a las variedades de un número cualquiera de dimensiones la Geometría intrínseca de las superficies dada por Gauss, los matemáticos ya se habían dedicado a tales estudios. Pero el interés despertado por éstos se acrecentó sobremanera cuando Einstein, con su teoría de la gravitación, vino a confirmar las palabras proféticas del gran matemático de Gotinga en su famoso trabajo de Habilitación (*), estableciendo que la métrica de la variedad espacio-tiempo viene determinada por la forma diferencial cuadrática

$$ds^2 = \sum_{i,k} g_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

en que los coeficientes g_{ik} son los llamados potenciales gravitatorios.

Desde entonces, la *Geometrización de la Física* ha constituído una de las supremas aspiraciones de la Ciencia moderna; y el cuerpo de doctrina que, con el expresado fin, se ha ido elaborando, ha ido adquiriendo un desarrollo cada vez más amplio. Entre los muchos que han trabajado en el asunto, los grandes hombres cuyas investigaciones marcan las sucesivas etapas del proceso hasta llegar al estado en que la cuestión se halla en la actualidad, son, aparte del propio Einstein,

(*) RIEMANN: *Gesammelte Werke*, páginas 267 y 268. Puede verse también el Discurso inaugural de la Sección de Ciencias matemáticas del Congreso celebrado en Oporto por la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias: «Proceso histórico del Cálculo diferencial absoluto y su importancia actual»; donde las referidas palabras se hallan transcritas.

Levi-Civita, Weyl y Eddington. Vamos a indicar brevísimamente sus principales aportaciones.

EL PROFESOR TULLIO LEVI-CIVITA. Este sabio matemático italiano, que con Ricci comparte la gloria de haber preparado el algoritmo adecuado para el desarrollo de la teoría de la Relatividad (*), ha desempeñado también, en el momento histórico a que ahora nos referimos, un papel trascendental, introduciendo, en su famosa Memoria de los *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* (**) la noción de paralelismo en una variedad cualquiera, que tuvimos la satisfacción de oirle explicar magistralmente, con la claridad en él característica, en una de las Conferencias que nos dió cuando tuvimos la dicha de tenerle entre nosotros.

Considerando sumergida la variedad de que se trata en un espacio euclídeo de un número suficiente de dimensiones, se caracteriza el paralelismo en dos puntos infinitamente próximos por la condición de formar iguales ángulos con una dirección cualquiera imaginada en uno de ellos perteneciente a la variedad, que expresada analíticamente da las relaciones

$$\sum_{v=1}^{v=N} \frac{d\alpha_v}{ds} \frac{\partial y_v}{\partial x_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

a las cuales se llega también, sucesivamente, comenzando por estudiar el caso de una superficie desarrollable, en que se llama *paralela superficial* la que lo es en el sentido ordinario después del desarrollo de la superficie sobre un plano; y considerando después una superficie cualquiera, que se reduce al

(*) Véanse los números I-II y III-IV de la *Revista Matemática Hispano-americana* del año 1921, donde se inserta una reseña de la labor llevada a cabo por el profesor Levi-Civita y una lista de sus principales publicaciones.

(**) T. XLII, 1917.

caso anterior mediante la desarrollable circunscrita a lo largo de una línea que una los dos puntos en que se imaginan las dos direcciones propuestas: por consideraciones geométricas y cinemáticas se obtienen las condiciones anteriores, que luego se hacen extensivas a una variedad de un número cualquiera de dimensiones (*).

Pero dichas ecuaciones tienen el inconveniente de que intervienen cantidades (las a_v y las y_r), que se refieren al espacio euclídeo auxiliar en que se ha considerado sumergida la variedad en cuestión. Buscando una expresión intrínseca de la condición de paralelismo, es decir, tal que en ella sólo intervengan elementos referentes a la métrica de dicha variedad, fácilmente se transforman las ecuaciones anteriores en las siguientes

$$(1) \qquad \frac{d\lambda^{(k)}}{ds} + \sum_{h,j=1}^{h,j=n} \left\{ \begin{matrix} hj \\ k \end{matrix} \right\} \frac{dx_j}{ds} \lambda^{(h)} = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots n).$$

Procediendo por este corrimiento paralelo infinitesimal a lo largo de una línea, la dirección obtenida depende del camino recorrido, salvo el caso de las variedades euclidianas, único en que queda unívocamente determinada. Si la línea que se considera es una geodésica de la variedad, las direcciones de sus tangentes satisfacen a las ecuaciones (1), de modo que, por sucesiva traslación paralela infinitesimal, se va siguiendo la dirección de la geodésica. Por corrimiento paralelo infinitesimal (en los espacios de Riemann, que son de los que ahora se trata) no altera la longitud de los vectores, ni el ángulo que forman sus direcciones.

Esta noción, que tan rápidamente acabamos de bosquejar,

(*) *Qüestions de Mecànica clàssica i relativista:* T. LEVI-CIVITA; Institut de Ciencies. Barcelona.

ha sido en rigor el punto de partida del camino emprendido en las modernas orientaciones de que pensamos ocuparnos. Difícilmente su autor podía llegar a sospechar la gran trascendencia que iba a tener. Se ha cambiado la forma de presentarla y se han desarrollado generalizaciones; pero la idea primera sobre el particular siempre será uno de los mayores timbres de gloria que ostenta en su brillante historial el ilustre profesor de la Universidad de Roma, uno de los más genuinos representantes de la brillante Escuela Paduana.

Aunque no es la primera vez que lo digo públicamente (*), nobleza obliga a no dar por terminadas estas líneas referentes al profesor Levi-Civita, sin hacer constar lo mucho que debemos a los consejos de nuestro eximio colega, que, con sus frases de aliento, ha contribuído no poco a que procuremos estar al día en lo referente a la teoría de la Relatividad.

EL PROFESOR HERMANN WEYL. Este ilustre profesor de la Escuela politécnica federal de Zürich, por donde han pasado figuras de tanto relieve cono Christoffel, Minkowski y, finalmente, Einstein, es uno de los matemáticos contemporáneos más eminentes y profundos, como pudimos tener el gusto de apreciar de cerca durante su estancia en nuestra tierra, cuando vino a darnos aquellas inolvidables Conferencias sobre el «Análisis matemático del problema del espacio». Une a su ciencia una amabilidad exquisita, con la cual se digna atender a nuestros ruegos y animarnos en la empresa de elevar nuestra cultura matemática. Aprovecho la ocasión para proclamar en nombre de todos nuestro más sincero agradecimiento.

Empapado en las ideas de Riemann, comenzó por ser el comentador del célebre trabajo de Habilitación antes alu-

---

(*) Véase el Discurso de Oporto anteriormente citado.

dido: *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (*), obra en la cual parece como si Riemann hubiese presentido la teoría que había de venir más de medio siglo más tarde. Luego publicó su hermoso artículo en el *Mathematische Zeitschrift*, dando a conocer la que él llama *Geometría infinitesimal pura* (**).

Los agentes productores de los fenómenos físicos se reducen a dos campos: el gravitatorio y el electromagnético (***). El primero quedó geometrizado, constituyendo la métrica del Universo espacio-tiempo, y dando lugar a la curvatura del mismo, en la bella teoría de Einstein; pero subsistía el dualismo. Era una aspiración legítima llegar a la síntesis completa unificando los dos campos en un espacio cuyos caracteres vinieran definidos por ellos, logrando así la total Geometrización de la Física, una de las conquistas teóricas más sublimes de la Ciencia actual.

El profesor Weyl tomó el asunto por su cuenta, y para acometer la empresa, ardua por cierto y necesitada de talentos privilegiados como el suyo, tuvo una idea, que ahora acaso parezca muy natural, pero que es de un mérito extraordinario. Hasta entonces se había razonado en la Geometría de Riemann; en ella se admitía lo que implícitamente es una restricción: la posibilidad de la comparación geométrica de las longitudes a distancia. Cabía prescindir de esta condición y edificar una Geometría más general que no implicara dicho postulado. Y esta es la ruta que emprendió valientemente, sin arredrarse ante las dificultades que en tamaño cometido

---

(*) B. RIEMANN: *Ueber die Hypothesen...*; neu herausgegeben und erläutert von H. Weyl. (2.ª edición). Berlín. Springer, 1921.

(**) *Reine Infinitesimalgeometrie*. Math. Zeits. Bd. 2. 1918.

(***) Véase, p. e., B. CABRERA: *Principio de Relatividad*: Madrid, 1923, página 296.

pudieran surgir. Las ideas esenciales de su teoría son las siguientes:

I. Adopta la noción de traslación paralela infinitesimal de Levi-Civita como expresión de lo que él denomina *conexión afín*. A cada vector en P corresponde un vector en un punto infinitamente próximo P', viniendo dadas las diferencias entre los componentes de ambos por expresiones lineales con respecto a dichos componentes y a las proyecciones del corrimiento

$$dA^s = -\sum_{t,m} \Gamma^s_{tm} A^t \, dx_m \tag{2}$$

Siendo la conexión afín, rige en lo infinitamente pequeño la ley del paralelógramo, y esto exige la condición de simetría

$$\Gamma^i_{sr} = \Gamma^i_{rs}$$

entre las *componentes* de dicha conexión afín.

Pero ahora, en la traslación paralela infinitesimal, varía la longitud de los vectores según una fórmula del tipo

$$\frac{dl}{l} = -\sum_{\sigma} \varphi_\sigma \, dx_\sigma \tag{3}$$

y, por lo tanto, la variación de la longitud de un vector, seguida por traslación paralela infinitesimal, dependerá del camino recorrido; por lo cual, evidentemente, no puede así establecerse correspondencia entre vectores cuyos puntos de aplicación estén a distancia finita, y no hay comparabilidad de longitudes por este prodecimiento.

II. El patrón de longitud de intervalo se considera variable de un punto a otro, constituyéndose así un sistema de patrones o de unidades de medida, lo que el insigne académico y querido compañero nuestro de la Universidad Sr. Cabrera, designa por *aforo* del Universo, traduciendo así la palabra alemana *Eichung* y la inglesa *gauge*.

Se cambia de sistema de medidas o *aforamiento*, alterando en cada punto la longitud del patrón; si éste disminuye en una cierta razón λ (función arbitraria de las coordenadas), la longitud del intervalo (corrimiento en el espacio de cuatro dimensiones) evidentemente queda aumentada en la misma razón; y lo mismo ocurre con la longitud de un vector; de modo que se tiene

$$\widehat{ds} = \lambda ds \quad ; \quad \widehat{l} = \lambda l$$

y, por efecto de esto, los coeficientes de la forma diferencial cuadrática fundamental quedan multiplicados por

$$\widehat{g}_{\mu\nu} = \lambda^2 g_{\mu\nu}.$$

Al cambiar de sistema de aforo, las φ_σ se transforman, según la fórmula

$$\widehat{\varphi}_\sigma = \varphi_\sigma - \frac{\partial \log \lambda}{\partial x_\sigma}$$

de donde se deduce que, en cada punto P, hay un sistema especial de aforo, para el cual las φ_σ son nulas, es decir, no altera la longitud del vector en la traslación paralela infinitesimal; este sistema de aforo se llama *geodésico*.

Entonces, al hablar de invariancia, hay que distinguir entre invariancia con respecto a toda transformación de coordenadas (única de que se hablaba en la Geometría riemanniana) e invariancia con respecto al cambio de sistemas de medidas. Los invariantes con respecto a ambas cosas, siguiendo la nomenclatura de Eddington, se llaman in-invariantes, así como se denominan co-invariantes aquellos invariantes de la Geometría de Riemann que, por un cambio de aforo, quedan multiplicados por una potencia de la función λ. Así también hay in-tensores y co-tensores, diferenciación in-covariante y, en general, expresiones que gozan de la propiedad *in* o de la *co*. Se obtienen un tensor de Riemann-Christoffel generalizado, que goza de la propiedad *in*, el correspondiente in-tensor reducido, un co-invariante generalización de G y varias densidades tensoriales in-invariantes.

III. En la métrica de los espacios de Weyl figuran, como se ve, 14 funciones del lugar que se considere (las diez $g_{\mu\nu}$ de la Geometría de Riemann y las cuatro φ_i). Alterando las coordenadas y el aforo, varían éstos 14 coeficientes; pero las propiedades intrínsecas del Universo quedan intactas. Pero si sustituímos las $g_{\mu\nu}$ y las φ_i por otras que no puedan deducirse de ellas por ninguna transformación de coordenadas ni cambio en los patrones, tendremos una métrica distinta: la Geometría intrínseca del nuevo espacio será diferente de la del anterior y sus manifestaciones físicas variarán. La sustitución de la forma diferencial cuadrática por otra no equivalente a ella significa, como es bien sabido, que estamos en presencia de un nuevo campo gravitatorio; ¿qué significarán las φ_i y, por lo tanto, su alteración? Si el campo físico que quedaba por geometrizar, según hemos dicho, era el campo electro-magnético, lógica es la interpretación; si las $g_{\mu\nu}$ son los potenciales gravitatorios, las φ_i constituirán el potencial electro-magnético. Así, la generalización de la Geometría nos conduce como de la mano a la unificación anhelada.

Introduciendo un tensor de segundo orden, que Weyl denominó *torbellino métrico*

$$\psi_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$$

este corresponde al campo electromagnético de la Física; su anulación es la condición necesaria y suficiente para que el transporte de longitudes sea integrable.

Finalmente, así como de un principio de Hamilton generalizado pueden deducirse las ecuaciones gravitatorias de Einstein, así también Weyl establece un principio estacionario, de donde se deducen las ecuaciones correspondientes de su teoría.

IV. Dada la métrica, la conexión afín queda determinada por las fórmulas

$$\Gamma_{rik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r}\right) + (g_{ir}\varphi_k + g_{kr}\varphi_i - g_{ik}\varphi_r)$$

$$\Gamma_{rik} = g_{rs}\,\overset{s}{\Gamma}_{ik}$$

Existe en cada punto un sistema de coordenadas que puede llamarse *natural*, en que se cumple la condición (*)

$$\frac{\partial g_{ir}}{\partial x_k} = -2 g_{ir}\,\varphi_k$$

y, por lo tanto, son nulas las componentes de la conexión afín

$$\overset{s}{\Gamma}_{ik} = 0$$

(*) Usamos la denominación de *natural* empleada por D. Fernando Peña en un trabajo publicado en la *Revista Matemática Hispanoamericana* que después se menciona, y no la de *geodésico*, porque ésta se reserva para otro sistema de coordenadas, como puede verse en dicho artículo.

o sea, los componentes de un vector no varían en la traslación paralela infinitesimal.

Si, además, se adopta el sistema de aforo geodésico, resulta

$$\frac{\partial g_{ir}}{\partial x_k} = 0$$

es decir, los coeficientes de la forma diferencial cuadrática toman en el punto de que se trata valores estacionarios. En el caso particular de la Geometría riemanniana, pueden anularse los símbolos de Christoffel que figuran en la expresión (1) de Levi-Civita; lo cual significa, en la teoría de Einstein, que siempre puede anularse el campo gravitatorio *en un punto*, eligiendo convenientemente el sistema de coordenadas en él.

Precisamente Weyl adopta como definición de la traslación paralela infinitesimal la de que el vector correspondiente, en un punto infinitamente próximo, a otro dado en P, es el que tiene los mismos componentes que él en el sistema de coordenadas natural. Y partiendo así de esta condición de que dA^s sea nula en dicho sistema, se llega, en coordenadas cualesquiera, a la fórmula (2) antes escrita.

Hay que dejar bien sentado, pues esto es importante, que Weyl establece la métrica mediante dos formas diferenciales, una cuadrática y otra lineal; y partiendo de los coeficientes g_{ik} y φ_i, de éstos deduce las componentes de la conexión afín, estableciendo como teorema fundamental de su Geometría infinitesimal que: «todo espacio métrico lleva consigo por naturaleza una conexión afín«. Como vamos a ver, Eddington sigue un camino inverso.

De la importancia de lo hecho por Weyl puede juzgarse por la rapidez vertiginosa con que se han agotado las ediciones de su libro *Raum, Zeit, Materie* (desde la primera, en 1918, hasta la quinta, en 1923, casi edición por año), a pesar de ser de tan difícil lectura. Aparte de lo brevemente reseñado que constituye su gran trabajo original, hay una serie de ideas propias, y todo está expuesto con el sello peculiar e inconfundible del profesor de Zürich.

Finalmente, sus profundas investigaciones sobre el problema del espacio por medio de la teoría de grupos, acerca de cuyo asunto dió sus interesantes Conferencias en España, se han publicado recopiladas en una obra que, por cierto (caso del cual no sé si hay precedente en materias de esta índole), está dedicada a un español, al corresponsal de esta Academia y catedrático de la Universidad de Barcelona, Sr. Terradas, en frases laudatorias que demuestran el concepto que se forman de este físico-matemático nuestro los profesores extranjeros que, al tratarle personalmente, pueden apreciar su inmensa cultura científica; como pudimos oir también de labios del propio Einstein, de quien es esta frase: «Terradas es el hombre más extraordinario que he conocido.» Perdonadme esta digresión en honor de nuestro sabio compañero.

El profesor Eddington. Es este distinguido astrónomo inglés y profesor de la Universidad de Cambridge, como es bien notorio, uno de los más acérrimos partidarios de la teoría de Einstein y de los que más han contribuído a su divulgación. Publicó en 1918 su *Report on the Relativity theory of Gravitation,* la mejor síntesis del estado de la teoría en aquella fecha. Habiendo presidido luego la Comisión que fué a la Isla del Príncipe cuando ocurrió el eclipse de Sol de 29 de mayo de 1919, los resultados entonces obtenidos acabaron de infundir en su ánimo tal convencimiento en favor del nuevo orden de ideas, que se constituyó uno de sus más entusiastas propagandistas. Bien conocido es su famoso libro:

Space, Time, Gravitation, escrito en lenguaje ameno muy a propósito para su objeto, que tuve el honor de traducir. A la traducción francesa añadió un Apéndice de carácter matemático; y, por fin, ha publicado su obra maestra: *The mathematical Theory of Relativity,* recomendable por la claridad de su exposición y por hallarse en ella desarrollados sus trabajos originales.

Le somos también deudores de una singular merced, pues cuando quisimos publicar un número extraordinario de la *Revista Matemática Hispanoamericana,* para conmemorar la visita de Einstein a España, acudimos a él (como hicimos con los profesores Weyl y Levi-Civita) solicitando de su amabilidad que se dignara honrarnos con algún artículo; y accedió atentísimo a nuestros ruegos enviándonos uno acerca del debatido e intrincado asunto de la *Rotación absoluta.*

Los rasgos principales de la aportación personal del profesor Eddington al proceso de que nos estamos ocupando, son los siguientes:

I. En vez de partir del tensor $g_{\mu\nu}$ y el vector φ_i, viniendo en función de ellos los coeficientes Γ que figuran en la expresión de la conexión afín, parte de la

$$dA^s = -\sum_{tm} \Gamma^s_{tm} A^t dx_m$$

como fundamental. Basándose en esta noción de corrimiento paralelo infinitesimal, donde figuran los 64 coeficientes Γ^s_{tm} arbitrarios, llega a una teoría más general todavía que la de Weyl. El postulado de Eddington es que el corrimiento paralelo infinitesimal desempeña un papel esencial en la estructura del Universo, no importando cuál sea su significación real. En el cuerpo de vectores que tienen su origen en un punto P' infinitamente próximo a P hay uno $A' + dA'$ que corresponde al vector A' en P y puede decirse que guarda cierta *equivalencia* con él. Esta equivalencia o correspondencia sólo se supone existir en el límite, cuando P y P' son infinitamente próximos. Para puntos a distancia finita, sólo queda determinada la correspondencia especificando el camino recorrido al pasar de P a P', y entonces se establece siguiendo paso a paso dicho camino y determinándola para puntos infinitamente próximos, conforme se ha dicho. No se supone que pueda comprobarse tal correspondencia por la observación; es decir, que por la observación puedan distinguirse los vectores correspondientes. Eddington admite también, como Weyl, la condición de geometría afín

$$\Gamma^i_{rs} = \Gamma^i_{sr}$$

Por esta simetría, el número de coeficientes Γ^i_{rs} (variables de un punto a otro) independientes entre sí se reduce a 40.

Fundándose en los dos postulados de correspondencia y afinidad, pueden expresarse matemáticamente todas las relaciones de estructura inherentes al espacio. De modo que dichas Γ^i_{rs} encierran en sí la geometrización de la Física. Queda por ver cómo se deducen de estas cantidades, desprovistas de interpretación real, las que tengan significación física.

II. La variación de los componentes de un vector en un circuito cerrado infinitesimal viene dada por

$$\delta A^{\mu} = -\frac{1}{2}\int\!\!\int {}^{*}B^{\mu}_{\varepsilon\nu\sigma} A^{\varepsilon} dS^{\nu\sigma}$$

donde $*B^{\mu}_{\varepsilon\nu\sigma}$ es un in-tensor dado por la fórmula (*)

$$*B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma} = -\frac{\partial}{\partial x_{\sigma}}\Gamma^{\varepsilon}_{\nu\mu} + \frac{\partial}{\partial x_{\nu}}\Gamma^{\varepsilon}_{\sigma\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu}\Gamma^{\varepsilon}_{\nu\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}\Gamma^{\varepsilon}_{\sigma\alpha}$$

Por reducción, haciendo $\varepsilon = \sigma$ y sumando para todos los valores de σ, se obtiene un in-tensor de segundo orden

$$*G_{\mu\nu} = -\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} + \frac{\partial}{\partial x_{\nu}}\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}\Gamma^{\beta}_{\beta\alpha}$$

Estos dos tensores $*B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma}$ y $*G_{\mu\nu}$ son fundamentales en la estructura intrínseca del Universo; constan de parte simétrica y parte antisimétrica, como puede verse en el tensor $*G_{\mu\nu}$, descomponiendo sus componentes, del siguiente modo, en dos sumandos:

$$*G_{\mu\nu} = \left[-\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\nu\alpha}}{\partial x_{\mu}}\right) + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\right] +$$

$$+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\nu\alpha}}{\partial x_{\mu}}\right)\right] \qquad (4)$$

de los cuales, el primero es simétrico y el segundo antisimétrico.

(*) En algunas fórmulas como ésta y las siguientes suprimimos, para mayor sencillez en la notación, conforme al convenio ordinariamente establecido, el signo Σ, sobreentendiéndose éste cuando un índice α se halla repetido en un mismo término, debiendo, por lo tanto, suponerse que se suma para todos los valores de él.

Se obtiene un invariante regional sencillo formando el llamado «volumen generalizado»

$$\iiiint \sqrt{-|{}^*G_{\mu\nu}|}\, d\tau \qquad (5)$$

donde $|{}^*G_{\mu\nu}|$ representa el determinante formado por los componentes del tensor ${}^*G_{\mu\nu}$.

La métrica puede ser de momento arbitraria, como ocurre en el establecimiento de los sistemas de medidas de Weyl.

III. Se introduce el tensor

$$2K_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - \Gamma_{\sigma\mu\nu} - \Gamma_{\sigma\nu\mu}$$

$$2K_{\mu\sigma\nu} = \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} - \Gamma_{\nu\mu\sigma} - \Gamma_{\nu\sigma\mu}$$

$$2K_{\nu\sigma\mu} = \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} - \Gamma_{\mu\nu\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma\nu}$$

En el caso particular en que este tensor de tercer orden $K_{\mu\nu\sigma}$ sea de la forma $K_{\mu\nu\sigma} = - g_{\mu\nu}\, \varphi_\sigma$, es decir, sea el producto de uno de segundo por otro de primero, se va a parar a la teoría de Weyl.

La métrica natural se ha de obtener midiendo el Universo por medio de él mismo; esto matemáticamente significa que el tensor $g_{\mu\nu}$ que define la métrica natural ha de estar ya contenido en la Geometría del Universo; por lo tanto, ha de ser el de segundo orden de los dos establecidos como fundamentales, ${}^*G_{\mu\nu}$; de modo que

$$l^2 = {}^*G_{\mu\nu} A^\mu A^\nu$$

donde, en $*G_{\mu\nu}$ sólo hay que considerar la parte simétrica, toda vez que la antisimétrica desaparece. De suerte que, introduciendo una constante universal λ, que depende de la unidad de longitud que se adopte, resulta

$$\lambda g_{\mu\nu} = - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\nu\alpha}}{\partial x_{\mu}} \right) + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} \Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} \tag{6}$$

* * *

A la teoría de Eddington le faltaba un complemento. Quedaba por resolver el problema de hallar las ecuaciones necesarias para la determinación de las 40 cantidades $\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}$ funciones de las coordenadas x_i; es decir, las que han de desempeñar aquí el papel de las ecuaciones gravitatorias que determinan los 10 potenciales $g_{\mu\nu}$, o coeficientes de la forma fundamental cuadrática, en la primitiva teoría de Einstein.

Dichas ecuaciones gravitatorias pueden deducirse, según es bien sabido, del principio de Hamilton generalizado, conforme hicieron Lorentz, Hilbert, Einstein, Palatini; y Weyl también ha obtenido las suyas por este método. Parece como si una ley general de economía informara las leyes físicas (economía de tiempo en Optica, mínimo de esfuerzo en Mecánica). Lo natural era, pues, partir, como fundamento, de un principio estacionario. Este ha sido, efectivamente, el camino emprendido por Einstein en el trabajo, de que hizo un resumen en la tercera de las Conferencias dadas en nuestra Facultad de Ciencias (¡feliz circunstancia que hizo que en España tuviéramos el honor de recibir las primicias!) y que luego se ha publicado en los *Sitzungsberichte* (*) de la

(*) A. Einstein: *Zur allgemeinen Relativitätstheorie;* págs. 32 y 76 de los *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*. Berlín, 1923.

Academia de Ciencias de Prusia, a cuya Corporación dió cuenta el profesor Planck, en nombre del autor, en sesión de 15 de febrero de 1923.

Se sienta, como principio fundamental, una ecuación del tipo

$$\delta \left\{ \int H d\tau \right\} = 0$$

donde H es una densidad invariante función sólo de las $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ y sus primeras derivadas; y se supone que las variaciones $\delta \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ de las $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ se anulan en el límite del dominio de integración. Esta ecuación se desdobla en las siguientes

$$H^{\mu\nu}_{\alpha} = \frac{\partial H}{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}} \left(\frac{\partial H}{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\sigma}} \right) = 0$$

siendo

$$\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\sigma}$$

Einstein, guiado por la conveniencia de que figure el tensor $*G_{M}$, toda vez que los dos sumandos en que éste se descompone, el simétrico y el antisimétrico, son los únicos tensores de que se dispone, de posible significación física, adopta como función H la siguiente

$$H = 2 \sqrt{- |*G_{M}|}$$

que no es otra (prescindiendo del factor 2) que la que figura en la integral in-invariante (5) hallada por Eddington, que viene a ser una generalización de la expresión $\int \sqrt{-g} d\tau$ que tanta importancia tiene en la teoría de la Relatividad; como se ve, la $\sqrt{-|{}^*G_{kl}|}$ es una densidad tensorial de volumen.

Esta función de Hamilton realiza el ideal apetecido de la unificación de la Gravitación y la Electricidad, toda vez que no está constituída por dos sumandos, independientes uno de otro, correspondientes a cada uno de dichos campos, respectivamente. Así la aspiración teórica de los físicos está alcanzada, toda vez que no tenemos más que las $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$, como determinativas de ambos campos, y la función hamiltoniana H que goza del mismo carácter, de intervenir en ella los dos de consuno, no por separado.

Restaba justificar la adopción de tal función hamiltoniana. Para ello, Einstein sigue el procedimiento de siempre. Fijémonos en que en la sucesiva construcción del gran edificio de la teoría de la Relatividad que ahora admiramos, aparte de la lógica de los razonamientos y la brillantez de sus éxitos en las comprobaciones experimentales, ha habido siempre una idea directora que ha servido de pauta y guía, cual es, al desarrollar una nueva generalización, que ésta sea tal que de ella resulte como caso particular, en las circunstancias respectivas, la teoría anteriormente establecida. Era cuestión, pues, de ver si de las nuevas ecuaciones resultaban en especial las gravitatorias primitivas, en ausencia de campo electro-magnético.

Efectivamente; Einstein, mediante cálculos, cuya inserción aquí estaría fuera de lugar, ha obtenido las fórmulas generales, que luego, aplicándolas al caso particular en que no haya campo electro-magnético, dan para expresiones de las Γ^{α}_{kl} las siguientes

$$\Gamma^{\alpha}_{kl} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{k\beta}}{\partial x_l} + \frac{\partial g_{l\beta}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_\beta} \right) \tag{8}$$

las cuales, sustituídas en las igualdades (6), dan ecuaciones que coinciden con las gravitatorias primitivas, en el vacío (es decir, en ausencia de materia), cuando en éstas se tiene en cuenta el término cosmológico. No hay duda de que este es un argumento poderoso en favor de la nueva teoría.

Considera después el caso en que exista campo electro-magnético; y obtiene la relación

$$\lambda\phi_{kl} = \frac{1}{6}\left(\frac{\partial i_k}{\partial x_l} - \frac{\partial i_l}{\partial x_k}\right) \tag{8}$$

donde $\lambda\phi_{kl}$ es igual a la parte antisimétrica del tensor $^*G_{kl}$. En rigor esta fórmula dice que si la densidad de corriente i^l es rigurosamente nula, no puede haber campo electro-magnético. Pero, en virtud de la pequeñez de λ, por insignificante que sea el valor de la densidad de corriente, el potencial electro-magnético tendrá un valor apreciable, y exceptuando puntos singulares en que ϕ_{kl} tenga un valor excepcionalmente grande, se comprende que para valores finitos usuales del potencial electro-magnético, la densidad de corriente ha de ser muy pequeña, prácticamente nula, con mucha aproximación (*). En vista de esto, en primera aproximación, resulta

$$\frac{\partial\phi_{kl}}{\partial x_l} = 0$$

y como, por otra parte, de la fórmula general de ϕ_{kl}, hallada por Einstein, se deduce rigurosamente la relación

$$\frac{\partial\phi_{kl}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial\phi_{l\sigma}}{\partial x_k} + \frac{\partial\phi_{\sigma k}}{\partial x_l} = 0$$

se ve que, en campos suficientemente débiles, rigen las ecuaciones de Maxwell correspondientes al vacío.

(*) A. Einstein: loc. cit., pág. 37.

Se infiere, por lo tanto, como conclusión, que de esta teoría se deducen, en los casos particulares pertinentes: por un lado, las ecuaciones del campo gravitatorio; por otro, las de Maxwell; aumentando así su garantía.

Queda por ver lo que ocurre al aplicarla al estudio del campo en el interior de los electrones, efectuando el cálculo riguroso de un campo estático simétrico alrededor de un punto. Este es el estado de la cuestión en este momento histórico.

Así queda constituída esta nueva teoría de la Gravitación y la Electricidad, fundada solamente en la conexión afín.

Contra lo que en un principio creyó, Einstein, en una nota ulterior presentada a la Academia de Ciencias de Berlín el día 12 de Abril de 1923, llega a la consecuencia de que a toda solución de las ecuaciones corresponde otra que sólo difiere de la primera en el signo de los componentes del campo electro-magnético; y añade que, siendo esto así, la Teoría no puede dar cuenta de la diversidad de masa entre los electrones positivos, o protones, y los negativos, o electrones propiamente dichos (*).

* * *

Riemann, según ya hemos recordado antes, abrió una nueva era a la Geometría y a la Ciencia en general, considerando los espacios, o variedades, definidos por una forma diferencial cuadrática, o sea, en definitiva, por un tensor $g_{\mu\nu}$ simétrico de segundo orden. De éstos, cuando las $g_{\mu\nu}$ eran constantes y, por consiguiente, se podía expresar el cuadrado del elemento lineal *ds* por una suma de cuadrados de diferenciales de las coordenadas, resultaban como caso particular los euclidianos.

(*) A. Einstein: loc. cit., pág. 77.

Ahora se consideran, en la teoría de Eddington, espacios más generales que los riemannianos, que requieren para quedar determinados, además de un tensor simétrico de segundo orden, otro tensor, de tercer orden, $K_{\mu\nu\sigma}$, simétrico en μ y ν. Cuando éste es el producto del primero por un vector φ_σ, o sea, $K_{\mu\nu\sigma} = - g_{\mu\nu} \varphi_\sigma$, se obtienen, según se dijo anteriormente, los espacios de Weyl; de modo que éstos están definidos por un tensor simétrico de segundo orden y un vector; o por una forma diferencial cuadrática y otra lineal.

Tanto en los espacios de Eddington como en los de Weyl, desempeña un papel esencial, como se ha visto, la noción de traslación paralela infinitesimal de Levi-Civita, generalizada, viniendo dados los coeficientes Γ^s_{tm} de la fórmula lineal que expresa a ésta, en función de las $g_{\mu\nu}$ (y sus derivadas) y las $K_{\mu\nu\sigma}$, o bien, de las $g_{\mu\nu}$ y las φ_σ, respectivamente.

Los matemáticos norteamericanos Eisenhart y Veblen (*), en un curioso trabajo, *La Geometría de Riemann y su generalización*, siguen un método distinto, que puede llamarse de las *trayectorias* (*paths*). Su punto de vista es que uno de los procedimientos más sencillos para generalizar la Geometría euclidiana es suponer que en el espacio, o variedad de n dimensiones, considerado, existe una red de curvas (trayectorias) que, como las líneas rectas en un espacio euclidiano, sirven de sistema de referencia para determinar los puntos y demás curvas del espacio. Dichas trayectorias son las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d^2x_i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx_j}{ds} \frac{dx_k}{ds} = 0 \quad (**)$$

(*) *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol. 8; February, 1922; núm. 2, pág. 19.

(**) Excusado es decir que el segundo término, aunque no figure explícitamente el signo Σ, en rigor es una suma efectuada para todos los valores de los índices j, k, según el convenio de que ya se ha hablado.

donde las Γ^i_{jk} son funciones analíticas de las coordenadas $(x_1, x_2, ..., x_n)$; y los índices i, j, k, varían de 1 hasta n: se supone también la condición de simetría $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$.

La geometría euclidiana se obtiene, cuando puede elegirse un sistema de coordenadas en que las Γ^i_{jk} se anulen y, por lo tanto, la red de trayectorias venga dada por

$$\frac{d^2x_i}{ds^2} = 0,$$

que son las ecuaciones de una recta en coordenadas cartesianas.

La Geometría riemanniana se obtiene cuando existe una forma cuadrática $\sum\limits_{i,k} g_{ik} dx_i dx_k$ con respecto a la cual las trayectorias son geodésicas, es decir, hacen estacionaria a la integral

$$\int ds = \int \sqrt{\sum_{i,k} g_{ik}\, dx_i\, dx_k}.$$

El método de las trayectorias de Eisenhart y Veblen, al ascender, en la generalización, más allá de la Geometría de Riemann, conduce a la de Weyl, acrecentando con ello el valor de ésta, como reconoce el mismo Eddington, al decir (*): «Esta sería la manera más lógica de llegar a la teoría de Weyl, revelando claramente que es, en esencia, un análisis de los fenómenos físicos con respecto a una red de referencia constituída por las trayectorias de partículas móviles y ondas de luz, que son dos de los procedimientos más universales de exploración práctica. Por otra parte, la teoría de Einstein es un análisis de los fenómenos con respecto a un molde mé-

(*) *The mathematical theory of Relativity;* nota al final de la Bibliografía, página 243.

trico caracterizado por transporte de objetos materiales. En ambas teorías se estudian los fenómenos con relación a ciertos caminos experimentales de exploración; pero siendo la posible existencia de tales medios de exploración (directa o indirectamente) un postulado fundamental de estas teorías, no puede ser ya dilucidada por ellas. Aquí la teoría generalizada (de Eddington) aporta su contribución, demostrando que el tipo más general de relación de estructura formulado encierra necesariamente en sí a entrambas, la métrica de Einstein y el armazón de trayectorias de Weyl.»

* * *

Como se ve, estamos en un momento culminante en la marcha de la Ciencia, en que, para lograr la anhelada Geometrización de la Física se hallan constituídas dos teorías: la de Weyl y la de Eddington. Los espacios de Weyl son suficientes para el objeto; pero introduciendo para ello los sistemas de aforo, adoptando una Geometría más general que la de Riemann. En ambas teorías es fundamental la conexión o correspondencia unívoca entre vectores en puntos infinitamente próximos dada por la llamada traslación paralela infinitesimal; pero, en la de Weyl, las funciones que caracterizan a ésta vienen expresadas por medio de las que definen la métrica del espacio; en cambio, en la de Eddington, a pesar de no tener significación real, ellas son el punto de partida y base del edificio; y merced al principio estacionario ideado por Einstein, se pueden obtener las ecuaciones que las relacionan con las cantidades a que puede atribuirse interpretación física, dándose la feliz circunstancia de que en las Γ^{i}_{kl} y en el tensor $*G_{\mu\nu}$ se cumple la bella unificación del campo gravitatorio y el electro-magnético deseada.

Las dos teorías son sugestivas y atrayentes. ¿Cuál de las dos reúne mayores ventajas?

En primer lugar, hay que precisar lo que se entiende por Geometrización de la Física; según que se trate simplemente de una representación en un espacio *conceptual*, o de la Geometría del espacio físico *real*.

Todos sabemos la gran utilidad que reportan las representaciones gráficas. Ahora bien; éstas, como dice Eddington (*), no sólo cabe trazarlas en una hoja de papel, sino que podemos idearlas en un espacio conceptual de cualquier número de dimensiones y en que rija una Geometría que no sea precisamente la euclidiana. Si logramos dar en él una representación adecuada a todas las cantidades físicas, habremos conseguido, indudablemente, una cosa de importancia; pues podremos emplear la nomenclatura geométrica que nos servirá de poderoso auxiliar para ilustrarnos en las cuestiones abstrusas y servirnos de los conocimientos de una Ciencia, tan desarrollada como la Geometría, en el estudio teórico de la Física. En este sentido, tanto la teoría de Weyl como la de Eddington, realizan una Geometrización y ambas son igualmente aceptables, revelando el ingenio matemático de sus autores.

Pero tal Geometrización no implica hipótesis alguna acerca de la verdadera índole de las cantidades representadas, ni en ella se trata de que el espacio elegido responda a la auténtica naturaleza del Universo real. Si lo que se pretende es esta segunda Geometrización, la cosa cambia por completo de aspecto, y cabe preguntar: ¿cuál de las dos teorías mencionadas se ajusta mejor a la realidad?

La de Weyl, desde que su autor la dió a conocer, ha tenido contradictores, entre los cuales figura el mismo Einstein,

(*) Loc. cit., pág. 196.

como pudimos oir de sus propios labios en la ya citada última Conferencia que dió en nuestra Facultad de Ciencias; aunque su opinión en el asunto era ya conocida, por haberla manifestado ante la Academia de Ciencias de Berlín y en su célebre Conferencia «Aether und Relativitätstheorie», dada en la Universidad de Leyden.

En dicha teoría; aunque puede conseguirse que la longitud de un vector en P no varíe en una traslación paralela infinitesimal, adoptando para ello el sistema de aforo geodésico en dicho punto; no ocurre lo mismo en un transporte a distancia finita, y la alteración que sufre depende del camino recorrido. Esto está en contradicción con la experiencia, como puede verse en seguida considerando el siguiente caso (*). Sean un campo electrostático y uno gravitatorio estático: en estas circunstancias los tres primeros componentes del cuadrivector potencial φ_σ (para $\sigma = 1, 2, 3$) son nulos; y el cuarto $\varphi_4 = \varphi$, así como las g_{ik}. son independientes del tiempo. Si aplicamos la fórmula

$$l_{P'} = l_P e^{-\int_P^{P'} \Sigma \varphi_\sigma dx_\sigma}$$

(obtenida integrando la (3)) al período de oscilación de un reloj en este caso, obtenemos

$$\tau = \tau_0 e^{-\varphi t}$$

(prescindiendo de un factor de proporcionalidad). Según esta fórmula; si disponemos de dos relojes que, colocados en un lugar en que el potencial electrostático es φ_1, marchan sincrónicamente, y luego, durante un cierto lapso de tiempo t,

(*) W. PAULI: *Relativitätstheorie. Die Theorie von Weyl.* Encyklopädie der Mathematischen Wissenschatfen. B. V_2; Heft 4; págs. 762, 763.

uno de ellos permanece en un sitio de potencial φ_2; al volver a compararlos nos encontramos con que ya no van acordes; las velocidades con que marchen ya no serán iguales: la razón entre los períodos será $e^{(\varphi_2 - \varphi_1)t}$. Es decir, la longitud de un vector (y, como caso particular, la duración de una oscilación, la longitud de un vector tiempo) varía según el camino recorrido, o sea, con el proceso a que se someta. Esto querría decir que la frecuencia de las oscilaciones interatómicas (reloj natural), revelada a nuestros sentidos por medio de las rayas espectrales, dependería de la historia del átomo; dos átomos de un mismo cuerpo no darían en general el mismo espectro, pues éste dependería de las vicisitudes por que hubiesen pasado; el proceso sufrido habría dejado su herencia; en el período de las oscilaciones, habría influencia hereditaria. Los cuerpos no tendrían un espectro determinado; no podría hablarse de espectro de tal o cual elemento.

En la teoría de Weyl, los segmentos situados en un mismo punto, aunque en direcciones distintas, son comparables; pero no existe la comparabilidad de magnitudes a distancia finita, como se desprende de la alteración de la longitud en el llamado por él *transporte congruente infinitesimal* de segmentos.

Es cierto que esto está en pugna con la realidad; pero tal objeción ha recibido una solución adecuada por parte de Weyl. Del tensor $*G_{\mu\nu}$ antes citado puede deducirse, según ya indicamos, por composición con el tensor contravariante fundamental $g^{\mu\nu}$, un co-invariante (escalar de curvatura) $*G$, el cual, al cambiar de sistema de aforo, queda dividido por λ^2; y puede determinarse un sistema de aforo (que cabe denominarlo *natural*) en el cual dicho escalar $*G$ sea constante, tenga el mismo valor en todos los puntos del espacio. Entonces, aunque no puedan compararse las magnitudes, transportándolas para ello de un lugar a otro por traslación paralela infinitesimal, sí se obtiene la comparabilidad a distancia, adoptando este sistema de aforo natural, pues pueden obtenerse las expresiones de las longitudes de que se trate en cada punto. Las magnitudes, en un punto, pueden quedar determinadas por *persistencia* (*Beharrung*) o por *ajuste* (*Einstellung*). El péndulo de Foucault y el trompo son ejemplos sencillos de lo primero; la aguja magnética, de lo segundo. En el primer caso, la posición inicial persiste, o, por lo menos, su efecto; en el segundo, la aguja magnética se ajusta al meridiano magnético del lugar en que se coloca, independientemente de la posición inicial y del camino por el cual se transporte. La traslación paralela infinitesimal es una noción que sirve para el desarrollo de la teoría; pero no responde a nada real; el comportamiento de los relojes y reglas de medida no se efectúa conforme a dicho concepto; en cada lugar se conducen por ajuste a la curvatura del Universo. Es verdaderamente clara y bonita esta solución de Weyl.

No obstante; aunque, efectivamente, una vez constituída la teoría, se puede llegar mediante la consideración del aforo natural a esta elegante interpretación de los hechos; como en el proceso de su desarrollo hay que considerar los sistemas de aforo con ambigüedad, y la no comparabilidad consiguiente de longitudes a distancia; no satisface todavía la solución a sus contradictores. Eddington dice (*): «En la teoría de Weyl, un sistema de aforo es en parte físico y en parte convencional; se supone que longitudes en diferentes direcciones, pero en el mismo punto, pueden ser comparadas por métodos experimentales (ópticos); pero que longitudes en diferentes puntos no son comparables por métodos físicos (transporte de relojes y reglas de medida); y el establecimiento de

(*) Loc. cit., pág. 217.

la unidad de longitud en cada punto es convencional. Yo creo que esta definición híbrida de longitud es inadmisible, y que el concepto de longitud debe tratarse como puramente convencional o puramente físico.»

Ciertamente, en el desarrollo de la teoría de Eddington dicho concepto es puramente convencional; y no se habla aparentemente de nada que, como los sistemas de aforo, no esté conforme con la realidad. Por esto, sin duda, Einstein es partidario de ella y se ha dedicado a complementarla con su teoría del campo afín. Pero no hay que olvidar que la noción de traslación paralela infinitesimal, que le sirve de punto de partida, y, por lo tanto, las funciones Γ^{s}_{tm} que en su expresión figuran, no tienen interpretación real. En el fondo de ambas teorías, la de Weyl y la de Eddington, late la misma idea, aunque su aspecto sea distinto. Optar por una u otra, a nuestro modesto entender, es cosa completamente opinable y depende incluso de la manera de discurrir peculiar de cada uno. Como dice el profesor Weyl en carta dirigida al que tiene el honor de dirigiros la palabra, el resultado final a que llega Einstein es exactamente el mismo de su teoría; entre una y otra ya no existe diferencia física alguna, sino que se trata sólo de una cuestión de vestidura geométrica. A Weyl continúa pareciéndole que su teoría es la más natural. Y, francamente, nos inclinamos a creer que está en lo cierto el profesor de Zürich. Aun concediendo que la de Eddington pueda tener sus ventajas, forzoso es reconocer que edificar la teoría sobre las funciones Γ^{s}_{tm} difícilmente hubiera podido ocurrírsele a nadie, si no hubiese sido precedida de todo lo hecho por Weyl, guiado por la idea natural de buscar la Geometrización de la Física por medio de una Geometría más general que la de Riemann.

En rigor, en las dos teorías, la longitud de un vector varía en la traslación paralela infinitesimal, y, por lo tanto, ésta no puede tener interpretación física. Para ver si sería posible obviar este inconveniente, cabía intentar dar otra definición de dicha traslación paralela infinitesimal, en que se conservara la longitud de los vectores y que, por consiguiente, careciera de dicho defecto. Esto lo ha realizado D. Fernando Peña, honra del Cuerpo de Ingenieros de Montes, a que pertenece, y del Profesorado de su Escuela, de que forma parte, en una Comunicación que presentó a la Sociedad matemática española, desarrollada después en un artículo publicado en la *Revista Matemática Hispanoamericana*, verdadero modelo, además, de exposición clara y original, que nos permitimos recomendar a cuantos quieran enterarse con detenimiento de estos asuntos y ver la deducción de las principales fórmulas que a ellos conciernen.

En vez de definir como vectores paralelos en puntos infinitamente próximos aquéllos que tengan iguales componentes en el sistema de coordenadas natural del punto considerado, define como paralelos aquéllos para los cuales, en dicho sistema natural, sea

$$d\overline{A}^{\mu} = \sum_{\alpha\sigma} - \overline{K}_{\alpha\ \sigma}^{\ \mu} \overline{A}^{\alpha} \overline{dx}_{\sigma}$$

(donde $K_{\alpha\ \sigma}^{\ \mu}$ representa el tensor $\sum_m g^{m\mu} K_{m\alpha\sigma}$, y la raya — indica que se trata del sistema de coordenadas natural). Busca entonces cuál es la fórmula de dA^s en un sistema cualquiera de coordenadas, y calculando luego la expresión de la diferencial de l^2 (donde l es la longitud del vector) correspondiente a la obtenida para dA^s, resulta

$$d(l^2) = 0$$

es decir, que la longitud del vector queda inalterada, conforme se deseaba.

Lo que ocurre es que los coeficientes Y^s_{tm} que figuran en

$$dA^s = \sum_{tm} - Y^s_{tm} A^t dx_m$$

ahora no cumplen con la condición de simetría $Y^s_{tm} = Y^s_{mt}$, y, por lo tanto, la nueva definición no es compatible con el postulado de afinidad admitido por Eddington y Weyl. Pero hay que advertir que, como se demuestra en el mismo trabajo, si partiendo de la relación lineal de la traslación paralela infinitesimal

$$dA^s = \sum_{tm} - C^s_{tm} A^t dx_m,$$

los coeficientes C^s_{tm} han de satisfacer a la condición de simetría $C^s_{tm} = C^s_{mt}$, al querer que se conserve la longitud de los vectores, se va a parar necesariamente a los espacios de Riemann. Imponiendo una condición un poco menos restrictiva que la de simetría, y buscando la conservación de la longitud de los vectores, llega de nuevo a sus fórmulas de los coeficientes de la traslación paralela en los espacios de Weyl.

De modo que el dilema es éste: o se insiste en no renunciar al postulado de afinidad, y entonces no puede lograrse la conservación de la longitud de los vectores en la traslación paralela infinitesimal, en un espacio que *no* sea riemanniano, es decir, la Física ha de geometrizarse involucrando un concepto que no tiene interpretación física; o, si se quiere la conservación de la longitud de los vectores, conforme a la experiencia, hay que prescindir de dicho postulado. No está demás hacer constar que el mismo Eddington reconoce que no es necesario, y hasta ha habido quien, como Schouten, ha prescindido de él.

* * *

Ya que os he hablado de este joven Ingeniero, permitidme que os diga que su actuación científica es una de las mayores satisfacciones de mi vida profesional. Tuve la suerte de que asistiera al curso de Cálculo diferencial absoluto que dí en nuestra Facultad de Ciencias, y logré la fortuna de que se aficionara a él con tal entusiasmo que, dedicándose con una labor perseverante, ha llegado adonde brevísimamente acabáis de ver. Os declaro ingenua y sinceramente que he podido apreciar cuán verdadera es la dicha que se experimenta al verse superado por los discípulos.

Confieso que, en los instantes de desfallecimiento, cuando me parece estar ya cercana la hora en que la necesidad de un descanso se impone y, mirando al pasado, la conciencia se tranquiliza por la satisfacción del deber cumplido, conforta mi ánimo, y me consuela el hecho de haber podido contribuir (permitidme esta vanagloria, aunque acaso peque de inmodestia) a despertar la afición de jóvenes entusiastas y de claro talento, que son nuestra esperanza. Ellos, siguiendo la ley del progreso, han de llegar más allá que sus maestros, y a su responsabilidad hay que dejar el afianzar aquí la investigación científica, en el extenso horizonte de las matemáticas puras y aplicadas, que los de las anteriores generaciones, salvo honrosísimas excepciones, algunas aquí presentes, bastante habremos hecho con iniciar.

Precisamente en la teoría de la Relatividad y estudios con ella relacionados contamos con un buen número de ilustrados cultivadores españoles; y puede afirmarse que los sucesivos adelantos de la obra de Einstein y sus colaboradores han llegado a nosotros sin retardo. Los profesores Terradas y Cabrera, con sus Conferencias, así como Rey Pastor, actualmente en la Argentina; Carrasco en las explicaciones de su cátedra de Física matemática; el P. Enrique de Rafael con sus lecciones en el Instituto Católico de Artes e Industrias; el P. Pérez del Pulgar y el ingeniero Sr. Burgaleta, con sus artículos en los *Anales* del mismo; Puig Adam con su tesis doctoral, incluso apreciada por profesores extranjeros; y físicos y matemáticos como Palacios, Herrera, Lorente de Nó y otros muchos, cuya lista no incluímos por temor de incurrir en alguna omisión, sostienen muy honrosamente nuestro pabellón científico. ¡Pero cuantísimo queda aún por hacer para irnos acercando algo al nivel de otras naciones!

Hay que reconocer que la teoría de Einstein, aparte del valor que en sí posee, ha tenido la virtud de atraer la atención de los grandes talentos contemporáneos, y estamos presenciando de unos años a esta parte una de las épocas de más prodigiosa actividad. Encanta al hombre estudioso ver estas maravillas, fruto de largas vigilias, que aparecen sin cesar en las Revistas, aun en las de países en que el estado de ánimo no parece debe ser muy propicio para tales producciones.

Es una felicidad de que disfrutamos los que vivimos en estos tiempos. Sepamos aprovecharla dedicándonos al estudio, con un sano optimismo que nos dé alientos en los momentos de cansancio, pero sin desconocer la realidad de nuestro estado, para acomodar a ella el impulso. Con esto haremos una verdadera labor patriótica, que tal es, y en mi concepto no pequeña, contribuir en la medida de nuestras fuerzas a que cada vez se cotice mejor el nombre de España en el concierto científico mundial.

CONTESTACIÓN

DEL ILMO. SEÑOR

D. LUIS OCTAVIO DE TOLEDO Y ZULUETA

SEÑORES:

POR tercera vez, en el transcurso de pocos años, cumplo la grata tarea de dar la bienvenida a esta Casa en nombre de la Academia a un amigo y compañero muy querido, trabajador infatigable y una de las inteligencias más claras y luminosas de cuantas al estudio de las ciencias Físico-matemáticas se consagran en nuestra patria. Yo agradezco muchísimo la honra que la Academia me dispensa por conducto de nuestro tan querido cuán respetado Presidente; pero temo que en esta ocasión, cual en las anteriores, mi pluma no sea digna del acto que hoy celebramos, y no sepa expresar cuánta y cuán legítima alegría experimenta la Corporación al recibir en su seno a persona tan merecedora de estar en ella como nuestro nuevo compañero D. José María Plans y Freyre. Mas si mi inteligencia no alcanza a cumplir debidamente su cometido, bien sabéis que el corazón procurará suplir sus deficiencias.

Tuve la satisfacción de conocer al Sr. Plans siendo juez del Tribunal que le concedió el Premio extraordinario de doctor en la sección de Exactas de nuestra Facultad de Ciencias en enero de 1901; y desde entonces he seguido con atención constante la labor científica, la carrera académica, la lucha continua que ha sostenido para ganar, tan noble y tan dignamente ganadas, la reputación de que goza entre compañeros, discípulos y extraños, de hombre culto, de profesor de dotes inapreciables, de investigador profundo y sagaz y de incansable trabajador. Y he seguido su labor con esa atención tan sostenida y continua, porque, formado aquel Tribunal por nuestro inolvidable y sapientísimo compañero D. Eduardo Torroja, por D. Cecilio Jiménez Rueda y por mí, a los tres nos llamó poderosamente la atención el trabajo que realizó para obtener el premio disputado, y que unánimemente le conferimos, por ser trabajo que excedía en mucho el nivel medio que alcanzan las disertaciones de esa índole.

Coronaba este acto académico una carrera seguida con brillantez en medio de lucha continua y tenaz con el medio en que su vida se desenvolvía. Huérfano de padre desde muy niño, el Sr. Plans hubo de seguir sus estudios universitarios en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Barcelona, repartiendo las horas del día entre sus cátedras, sus estudios y las lecciones particulares que le permitían allegar los recursos necesarios para auxiliar al sostenimiento de su hogar, en que vive cuidado y atendido por su afectuosa y buenísima madre. En ese ambiente de sacrificio y abnegación, tan digno de loa, el Sr. Plans obtiene notas brillantes en casi todos sus exámenes, y consigue al final de sus estudios el Premio extraordinario en la Licenciatura, cual luego lo obtuvo en el Doctorado, como antes he referido.

Dos cualidades esenciales forman el carácter distintivo de nuestro nuevo compañero; es el primero, su amor al trabajo, su laboriosidad infatigable, que le hace distribuir su vida entera en las diversas empresas que acomete, sin dar lugar a momento alguno de ocio o descanso: clases diversas, unas para cumplir los deberes de su cargo; otras, de propaganda y cultura científica; versiones de obras científicas extranjeras; investigaciones personales en ramas diferentes de la ciencia, que dan origen a obras por todos elogiadas, de temas siempre difíciles y sugestivos, que significan una preparación y una cultura tan sólida y profunda cual la que en él reconocemos cuantos le tratamos. La otra cualidad característica suya no puedo enunciarla siquiera, por dos razones: primera, porque no encuentro en nuestro léxico superlativo suficiente para calificarla; y segunda, y muy principal, porque tengo la convicción de que enunciarla en público causará a nuestro compañero profundo disgusto,y yo nunca, y menos en esta ocasión, me perdonaría el proporcionar al Sr. Plans la más leve contrariedad. Los que le conocéis, ya sabéis la cualidad a que me refiero; los que no le tratáis, preguntad a sus maestros, a sus discípulos, a sus compañeros todos, y veréis como, en secreto, todos os dan la misma contestación, todos pronuncian una misma palabra: la opinión es unánime, no hay discrepancia alguna.

Larga y variada es la carrera profesional del Sr. Plans: profesor auxiliar y secretario de la Escuela de Ingenieros Industriales de Bilbao durante el curso de 1901 a 1902; catedrático de Física y Química en el Instituto de Castellón en 1905, en virtud de lucida oposición obtiene por el mismo honroso procedimiento la cátedra de Mecánica racional de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza, puesto que acababa de dejar vacante su íntimo amigo D. Esteban Terradas, tan querido y admirado por todos nosotros. En 1917, y en virtud de nueva oposición, obtiene la cátedra de Mecánica celeste de la Facultad de Ciencias de Madrid, puesto que hoy desempeña con gran satisfacción de alumnos y compañeros. Y no creáis que al simple desempeño de sus cátedras se ha limitado la actividad profesional del Sr. Plans; su cultura científica es tan varia y extensa, que en la Universidad de Zaragoza se encarga de la cátedra de Cosmografía y Física del Globo durante los cursos de1911 a 1917; de la de Electricidad y Magnetismo durante el de 1915 a 1916; de la de Metodología y Crítica matemática en la Facultad de Madrid los cursos de 1921-22 y 1922-23; y la de Matemáticas especiales para los alumnos de la Sección de Químicas desde su creación,en enero de 1923, hasta la fecha.

Y aún le quedaron fuerzas, actividad e inteligencia para explicar dos cursillos de Termodinámica en Zaragoza (años 1911 a 1913), uno de Mecánica relativista en Madrid (1920), y para dirigir en el Seminario matemático los trabajos de varios alumnos que en él formaron sus tesis doctorales y otras investigaciones, y que hallaron en Plans el guía complaciente y competentísimo, el maestro sabio y el animador optimista que les infundía aliento y esperanza en los momentos de decaimiento y desilusión.

Varias corporaciones científicas han premiado con distinciones diversas los méritos del Sr. Plans: ha sido corresponsal de nuestra Academia desde 1914 hasta su elección como numerario; es corresponsal de la *Pontificia Academia Romana dei Nouvi Lincei*; de la de Ciencias de Lisboa, del Instituto de Coimbra, y de las Reales Academias de Ciencias de Barcelona y Zaragoza.

Múltiples y de temas muy variados son los trabajos que lleva publicados el Sr. Plans; para recordaros los temas de algunos de ellos, los agruparé en tres categorías: trabajos originales, versiones de obras extranjeras y artículos periodísticos.

Figura entre los primeros sus *Lecciones de Termodinámica con aplicación a los fenómenos químicos*; obra que resume las lecciones que acerca de esa materia explicó en la Universidad de Zaragoza, y en la cual, en forma tan sencilla como amena, se hallan condensados todos aquellos principios de la ciencia referida que pueden interesar a los químicos. Publicada una primera edición en Zaragoza en 1913, la casa editorial Calpe ha publicado una segunda en 1922; y con esto está hecho el mejor elogio de la obra: alcanzar en nuestro país, en tan breve lapso de tiempo, una segunda edición un libro que trata de Termodinámica, es un caso editorial que no es probable se repita.

Nuestro nuevo compañero ha sido, en unión de los señores Cabrera y Terradas, uno de los primeros y más entusiastas propagandistas en España de las Teorías de Einstein: a ellas ha dedicado conferencias, cursos, artículos, versiones de obras extranjeras y dos interesantes trabajos originales, premiados por esta Real Academia: el primero, *Nociones fundamentales de Mecánica relativista*, premiado en el concurso del año 1919, obra impresa y publicada, a la cual acuden en consulta cuantos en cuestiones de las teorías relativistas se ocupan, porque, como era de esperar, el público culto ha confirmado plenamente el fallo de la Academia. El segundo trabajo, premiado en el concurso de 1922, no está aún publicado, pues el premio se adjudicó en enero del presente; versa sobre el *Cálculo diferencial absoluto*, y yo tengo la convicción de que, como en el caso precedente, el público ha de dispensar a esta nueva labor del Sr. Plans tan cariñosa acogida como a la anterior.

A estos dos trabajos debe unirse el precioso discurso leído ante la Sección de Ciencias matemáticas de las Asociaciones española y portuguesa para el Progreso de las Ciencias en el Congreso celebrado en Oporto en junio de 1921; discurso en que, bajo el título de *Proceso histórico del Cálculo diferencial* *absoluto y su importancia actual*, no sólo se resume la historia, breve pero brillante, de este nuevo algoritmo matemático, sino que se hacen conocer sus múltiples aplicaciones y la necesidad de su estudio profundo, si de las teorías relativistas se desea conocer algo más que sus capas superficiales.

El Instituto de Ciencias de Barcelona premió al Sr. Plans en el concurso a premios del año 1918 por un curioso e interesante trabajo titulado *Sobre los movimientos vibratorios elipsoidales, o de Dirichlet, de una masa flúida en rotación que afecte la forma de elipsoide de Jacobi, y su estabilidad.*

Como antes he dicho, es el Sr. Plans uno de los más entusiastas partidarios de las teorías de Einstein, y a su difusión en nuestra patria ha contribuído muy eficazmente con la versión al castellano de la obra alemana de Erwin Freundlich y la inglesa de Eddington. La obra de Freundlich, titulada *Los fundamentos de la teoría de la gravitación de Einstein*, de la cual se han hecho dos ediciones en español, una en 1920 y otra en 1922, es de un carácter relativamente elemental, y como su lectura no requiere grandes conocimientos matemáticos ni físicos, ha contribuído de modo muy efectivo al conocimiento de las teorías relativistas en nuestro país, donde el nivel medio de la preparación científica de la masa de lectores no es muy elevado. La obra de Eddington, *Espacio, Tiempo y Gravitación*, es libro cuya lectura es menos fácil que la del anterior, pero que despierta, en cambio, en el lector más interés, excita más su inteligencia y le sugiere más profundas reflexiones y un mayor deseo de penetrar en los arcanos que las nuevas teorías encierran todavía. Las versiones del Sr. Plans están hechas con el esmero, escrupulosidad y conciencia científica que pone en todos sus trabajos.

Artículos en revistas varias ha publicado el Sr. Plans en número considerable; permitidme recordaros los títulos de algunos: *Pequeñas oscilaciones de sistemas no holónomos* (*Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid*; 1909); *Sobre el movimiento hiperbólico de Born en la Cinemática relativista* (*Revista de la Academia de Ciencias Exactas, Físico-químicas y Naturales de Zaragoza*; 1918); *Nota sobre alguna aplicación sencilla del método de las perturbaciones*; *Nota sobre la forma de los rayos luminosos en el campo de un centro gravitatorio según la teoría de Einstein* (*Anales de la Sociedad de Física y Química*, 1918 y 1920); *El problema de los tres cuerpos*; *J. Haclamard: su obra científica* (en colaboración con nuestro eminente compañero Sr. Rey Pastor); multitud de notas y biografías en la *Revista Matemática Hispanoamericana*, y varios artículos de vulgarización científica en la revista *Ibérica*, entre otros, los titulados *Sobre la hipótesis de los electrones*; *Cómo se pueden pesar los astros y medir sus distancias* ; *Algo acerca de la teoría de la Relatividad*.

Como veis, la labor del Sr. Plans es copiosa y varia; si hubiese seguido la costumbre de los autores de obras musicales de numerar correlativamente todas sus obras, la última publicada ostentaría un número ordinal bastante elevado. Al llamarle a su seno la Academia no ha hecho más que galardonar una vida plena de trabajo científico realizado con entusiasmo y tenacidad verdaderamente admirables.

Verdad es que al elegir la Academia al Sr. Plans no podía olvidar que el sillón que iba a ocupar lo acababa de dejar vacío un hombre de la talla científica y del valer personal del Excmo. Sr. D. Juan M. de Zafra, y el hueco dejado por éste no era fácil de llenar. Poco tiempo tuve el honor de tratar al Sr. Zafra; habíamos seguido en la vida caminos diferentes, trayectorias muy diversas, y no había tenido oportunidad de conocerle personalmente hasta que vino a esta

Casa; mas tan corto tiempo fué más que suficiente para quedar encantado de su caballerosidad y su bondad extraordinarias; y para admirarle en todo momento por su ciencia y su cultura, por su agudo entendimiento, que le hacía percibir en los hombres y en las cosas aquellos delicados matices sólo perceptibles por los espíritus de su elevación y alteza de miras. Unid mis más extremas alabanzas y mis más fervientes votos de pesar a los que hoy le ha dedicado el señor Plans, y a los justísimos que en ocasiones diversas le han tributado sus compañeros y amigos.

Y ahora pasemos a reseñar, siquiera sea brevemente, el nuevo trabajo de nuestro compañero. Como era de esperar, dada la dirección que ahora ha tomado en sus estudios e investigaciones, el Sr. Plans trata en su discurso, como habéis oído, de temas íntimamente relacionados con la teoría de la relatividad, pero elige algunos puntos de aquellos que exigen para su estudio una mayor y más profunda preparación matemática, especialmente geométrica, y analiza, con su acostumbrada sagacidad, ideas y temas cuyo desarrollo está apenas iniciado, y que es de esperar sean muy fecundos en resultados.

Comienza su labor analizando rápidamente las ideas del profesor Levi-Civita relativas a la noción de paralelismo en una variedad cualquiera, definiéndolo con precisión, tanto geométrica como analíticamente, mostrando con claridad las etapas diversas por las cuales puede llegarse a establecerla y los inconvenientes que tiene la introducción de cantidades que se refieren al espacio euclídeo auxiliar que se utiliza y las transformaciones que sufren las ecuaciones para llegar a obtener expresiones intrínsecas de la condición de paralelismo. Hace notar el Sr. Plans la importancia propia y la influencia extraordinaria que estas investigaciones del profesor

Levi-Civita tienen en todos los trabajos y descubrimientos posteriores.

Analiza después la obra admirable y profunda de Weyl, concretando el problema que este joven y eminente sabio se propuso resolver, problema que no es otro que el de *geometrizar* los campos gravitatorios y electromagnéticos, constituyendo así la métrica del universo espacio tiempo, llegando a la síntesis completa en un espacio cuyos caracteres vinieran definidos por ellos.

Concreta las ideas fundamentales en que Weyl se apoya en los puntos siguientes:

a) Adopción de la traslación paralela infinitesimal de Levi-Civita como expresión de la *conexión afín*, haciendo ver después cómo la conexión de longitud de un vector obtenida por traslación paralela infinitesimal depende del camino recorrido, impidiendo así el establecer correspondencia entre vectores cuyos puntos de aplicación estén a distancia finita, no habiendo comparabilidad de longitudes por este procedimiento.

b) Variabilidad del patrón de longitud de intervalo de un punto a otro constituyendo diversos sistemas de medidas, o *aforamientos*, para determinar el llamado *geodésico*, y estudiar las propiedades de *ininvariación* y *coinvariación*.

c) Sustitución de las *catorce* funciones que figuran en la métrica de estos espacios por otras que no puedan deducirse de las primeras por ninguna transformación de coordenadas ni cambio en los patrones; así se llega a una métrica distinta, a una Geometría intrínseca del nuevo espacio diferente de la del anterior y las manifestaciones físicas variarán. Busca el significado de tales funciones, e introduciendo un tensor de segundo orden halla, por su anulación, la condición necesaria y suficiente para que el transporte de longitudes sea integrable.

d) La demostración de la existencia en cada punto de un sistema de coordenadas *natural* en que se cumple la condición de ser muchas las componentes de la conexión afin, y la adopción del sistema de aforo geodésico lleva como consecuencia el que los coeficientes de la forma diferencial cuadrática tomen en el referido punto valores estacionarios.

Toda esta parte del discurso de nuestro nuevo compañero está tratada con tanto acierto como cariño, haciendo asequibles al lector las ideas de Weyl, y es una prueba más de sus excepcionales condiciones de expositor, porque la obra de Weyl requiere para su lectura un esfuerzo mental extraordinario a cuantos no poseemos la profunda preparación físicomatemática que el Sr. Plans atesora.

Pasa después a examinar la teoría de Eddington, haciendo ver que es más general que la de Weyl. El postulado fundamental de esta teoría es el de que el corrimiento paralelo infinitesimal desempeña un papel esencial en la estructura del universo, no importando cuál sea su significación real. Admite también, como Weyl, la condición de la Geometría afín, reduciendo así el número de coeficientes independientes entre sí de sesenta y cuatro a cuarenta, y, fundándose en los dos postulados de correspondencia y afinidad, expresa matemáticamente todas las relaciones de estructura inherentes al espacio.

La variación de las componentes de un vector en un circuito cerrado infinitesimal viene dada por una fórmula en que figura un intensor de forma muy complicada, que, por reducción, se transforma en uno de segundo orden, teniendo ambos partes simétricas y no simétricas de cálculo extraordinariamente complejo.

No me es posible seguir al Sr. Plans paso a paso en la exposición clara y concienzuda que hace de la teoría de Eddington y de las últimas investigaciones de Einstein para el cálculo de las cuarenta cantidades $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$, pues me vería precisado a repetir cuanto en su discurso dice; así que renuncio a comentar esta parte del trabajo de nuestro nuevo compañero.

Finaliza su discurso el Sr. Plans haciendo una sucinta y rápida exposición del método de las *trayectorias* de los norteamericanos Eisenhert y Veblen, del cual se derivan como casos particulares las geometrías euclidiana y riemanniana, y, por una conveniente generalización, la teoría de Weyl.

Como habéis podido observar, todo el nuevo trabajo del Sr. Plans es un canto entusiasta a las teorías relativistas y a todas aquellas ramas matemáticas, especialmente las geométricas fundamentales, y físicas que han prestado su apoyo o su auxilio a las ideas geniales de Einstein, o que de estas ideas han recibido una influencia notable; es natural que así suceda, pues, como antes os dije, el Sr. Plans es uno de los hombres de ciencia de nuestro país que han acogido con mayor fervor y entusiasmo esas modernas ideas y esos recientes descubrimientos.

Pero ha de permitirme mi buen amigo y compañero que yo no sienta esos mismos entusiasmos: es cuestión de edad, de educación científica y, tal vez, de temperamento también. Educado en la Mecánica newtoniana, el ver romper sus bases y fundamentos y sustituírlos por otras concepciones, me produce alguna sorpresa, y mi ánimo duda y vacila antes de admitir los nuevos principios. No es posible negar la necesidad de una revisión de las bases en que las ideas de Newton se apoyaban; no es tampoco posible negar solidez y profundidad a la forma en que las nuevas se nos presentan; pero yo no puedo entregarme a ellas plenamente sin que las pruebas experimentales en que hoy se apoyan presenten alguna mayor garantía de plena confianza de la que actualmente ofrecen.

De las tres pruebas experimentales que se presentan para confirmación de las teorías de Einstein, la más concluyente hasta ahora parece ser, a mi juicio, la del cálculo del movimiento del perihelio del planeta Mercurio, prueba a la cual, si algún reparo puede ponerse, es el de una excesiva coincidencia entre el valor observado y el calculado por las fórmulas de la nueva teoría. El corrimiento de las rayas espectrales no ha sido comprobado todavía, al menos que yo sepa, y en cuanto a la desviación de los rayos luminosos al pasar por las proximidades del campo gravitatorio solar, aunque parece confirmarse en las observaciones de los dos últimos eclipses de sol—no hablo de los resultados obtenidos en el de 29 de mayo de 1919, pues fueron un tanto contradictorios—, como se trata de magnitudes angulares tan pequeñas y tan cercanas a los errores probables de observación, exige determinaciones más numerosas en el mismo sentido confirmatorio antes de aceptar plenamente sus resultados.

Es evidente, para mí al menos, que los conocimientos científicos necesitan con frecuencia fuertes revulsivos que conmuevan sus cimientos para buscarlos nuevos, más sólidos que aquellos en que se asientan en cada momento, y, al propio tiempo, para explicar fenómenos antes no explicados, dar origen a verdades y teorías no sospechadas y práctica aplicación a principios que aparecen primero como de orden puramente ideal e imaginativo. Esta función renovadora la está desempeñando a maravilla la teoría relativista, pues ha servido para conmover los cimientos de la Mecánica y de la Física, ha excitado la creación de algoritmos tan sutiles como los utilizados en el Cálculo diferencial absoluto y ha dado valor práctico a teorías geométricas que parecían tan puras y libres de toda aplicación como las de Gauss, Lobatschewsky y Riemann. ¿A dónde llegará con sus avances y sus audaces hipótesis?

No es fácil preveerlo; pero entre tanto en Geometría y en Mecánica se van admitiendo varios nuevos postulados y deduciendo de ellos consecuencias que me hacen temer llegue a sospecharse tiene visos de verdad aquella definición de las Matemáticas de Bertrand Russel, citada por Eddington. en su obra *Espacio, Tiempo y Gravitación* (1), en que dice:

«Las matemáticas puras constan enteramente de afirmaciones como esta: si tal proposición es verdadera en algo, entonces tal otra proposición es verdadera en aquello mismo. No hay que discutir si la primera proposición es realmente verdadera ni averiguar la naturaleza del asunto de que se trata. Así, las matemáticas pueden ser definidas como la disciplina en que nosotros nunca sabemos de qué estamos hablando ni si lo que estamos diciendo es verdadero.«

Y termino, que harto he abusado de vuestra benevolencia. Bienvenido sea el Sr. Plans a esta docta Corporación, y tenga la evidencia de que cuantos en ella convivimos le acogemos con suma complacencia y admiración, y con más cariño que admiración, que bien merece acogida tan cordial quien, como él, ha dedicado su vida entera al estudio y al cultivo desinteresado de la ciencia.

---

(1) Página 28 de la edición española.