DISCURSOS

LEÍDOS ANTE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

EN LA RECEPCIÓN PÚBLICA

DEL

SR. D. EDUARDO TORROJA Y CABALLÉ

el día 29 de Junio de 1893

MADRID.—1893
IMPRENTA DE LUIS AGUADO
8, *Pontejos*, 8

DISCURSO

DEL

SR. D. EDUARDO TORROJA Y CABALLÉ

Señores:

Ha sonado la hora, agradable y á la vez comprometida para mí, de corresponder á la muy señalada honra que me hicisteis, llamándome á tomar parte en las arduas é importantes tareas que á la Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales están encomendadas. Llego, no por merecimientos propios, sino por suma indulgencia vuestra, á poseer un puesto que nunca ambicioné; y, por lo mismo que no logro hoy satisfacer aspiración alguna de mi vida, no existe velo que me impida ver con claridad la alta distinción con que me habéis favorecido, ni pasión que menoscabe el sentimiento de gratitud profunda que embarga mi alma por la benevolencia que conmigo habéis usado.

Vengo á ocupar la vacante, no á llenar el vacío que dejó entre vosotros el sabio Director del Instituto Geográfico y Estadístico, Excmo. Sr. D. Carlos Ibáñez, cuya larga carrera y numerosos trabajos científicos ofrecen evidente contraste con las modestas tareas é insignificante notoriedad del humilde catedrático que le reemplaza. No he de repetiros yo ahora la relación de los hechos y triunfos gloriosos del que tantos años fué uno de los miembros más notables de la Academia, y muchos también Vicepresidente de la misma, que presente está en la memoria de todos la historia del insigne geodesta, y trazada se halla, además, por mano maestra su biografía en vuestras publicaciones. Permitidme, sin embargo, que para más cabal apreciación de las circunstancias en que me veo colocado, recuerde que sucedo á un hombre que por su propio valer mereció verse elevado á los más altos grados de la milicia; que organizó sabiamente el Instituto Geográfico y Estadístico, dando con ello prueba palpable, no sólo de poderosa iniciativa, inteligencia fecunda y extensos conocimientos científicos, sino de exquisito tacto para rodearse de hombres peritísimos, que, no obstante ser de distintas y aun opuestas procedencias, marchasen harmónicamente y sin rozamientos á un mismo fin; que perfeccionó los procedimientos geodésicos hasta tal punto, que la fama de los resultados obtenidos traspasó las fronteras y atrajo sobre nuestro compatriota muy estimadas pruebas de la consideración de los sabios y especiales distinciones de los Gobiernos.

Crece más aún mi confusión al considerar que, cuando me acerco á puesto tan honrado por mi predecesor, no veo entre vosotros á dos Académicos también ilustres, quienes, como yo actualmente, pertenecieron á la sección de Físico-matemáticas de la Facultad de Ciencias en la Universidad Central, y quizá esta circunstancia hizo que fijaseis en mí vuestra mirada. Sabéis ya que me refiero á D. Simon Archilla, tan justamente estimado de todos por su afabilidad exquisita, su claro talento y sus extensos conocimientos matemáticos, á los que dedicaba atención preferente, hallando aún tiempo que dedicar á la Filosofía y á la Física, habiendo sido la afición que sentía por esta última, causa ocasional de la enfermedad que troncó definitivamente aquella vida, minada ya por largos padecimientos; y á D. Gumersindo Vicuña, á quien los afanes absorbentes de la política, que le ocupaban, sobre todo al fin de su vida, no impidieron publicar utilísimas obras científicas y dirigir importantes revistas técnicas, ó colaborar en otras nacionales y extranjeras, no menos importantes.

El recuerdo de personas que tanto y por tan diversos modos trabajaron en la obra científica, pesa sobre mi ánimo como carga abrumadora, aliviada tan sólo por la consideración de que vuestra anterior indulgencia es prenda segura de que en lo futuro encontraré constantes motivos de aumentar más y más el eterno reconocimiento de que os soy deudor.

La distinción que me dispensáis llamándome á vuestro lado, no puede tener otro fin que estimular mi actividad en el estudio de la Geometría, á que me he visto empujado, no sólo por la obligación aneja á mi cargo, sino también por la afición que hacia esta rama de las Matemáticas supo inspirarme desde niño mi nunca bastante querido y llorado padre, que, como cariñoso maestro, me inició en los primeros conocimientos científicos, gracias á su vasta instrucción, constante laboriosidad y decidida vocación por la enseñanza, á la que consagró su vida entera con gran provecho para la juventud.

Las verdades geométricas tienen para mí especial encanto, no sólo cuando admiro la belleza y transcendencia de las más importantes, sino también al contemplar la sorprendente harmonía que del conjunto de todas resulta. Entre ellas hay algunas ciertas y evidentes, no susceptibles de demostración, que forman como la base ó suelo firme en que asienta todo el edificio científico; otras fundamentales, inmediatamente derivadas de las anteriores, constituyen el cimiento en que apoya el verdadero cuerpo de la construcción, compuesto éste de todas las que dan la parte utilizable, á donde acuden en demanda de amparo otras muchas Ciencias y Artes. Por último, encuéntranse otras que sirven de enlace á las diversas partes y ponen de manifiesto la unidad del conjunto, las cuales aparecen como coronación y remate del edificio, desdeñosamente miradas por algunos, que, no viendo inmediata su aplicación á las Artes ó á otras Ciencias, las juzgan simples figuras decorativas, sin fijarse, en su mezquina manera de ver, en que las que hoy parecen simple remate, pueden bien pronto convertirse en base sobre que se levante nuevo cuerpo de edificio, desde el cual, como situado á mayor altura, se difundan sus benéficas aplicaciones á campos mucho más dilatados. Que no es el edificio científico como las pobres construcciones materiales, destinadas á un uso concreto previamente determinado, cuyo plan completo concibe el arquitecto, y que, una vez terminadas, se enriquecerán acaso con algunos detalles de ornamentación, pero sin que puedan en manera alguna modificarse sus líneas generales ni sus agujas terminales.

El edificio científico obedece á un plan demasiado vasto para que pueda abarcarlo la mente del artista, ni de hombre alguno, por sabio que queráis imaginarlo; está como escondido en la mente de Dios que, en su infinita Bondad, permite al hombre estudioso labrar algunos de sus materiales y, cuando están reunidos en número suficiente, descubre al hombre de genio el enlace que entre todos existe y como el plan y norma de una parte del edificio; y al observar su conjunto harmónico, descúbrese al mismo tiempo el molde ó patrón que permitirá á los simples obreros acumular sin gran esfuerzo multitud de nuevos materiales y acabar de labrar y asentar mejor los ya reunidos.

Muchos de estos que pudiéramos llamar cuerpos de edificio ó partes del conjunto, encontramos diseminados en el campo de la Ciencia, así en los tiempos antiguos como en los modernos. Me permitiréis, sin embargo, que fije vuestra atención en estos últimos, no porque niegue su importancia á los trabajos antiguos, sino porque han llegado á nosotros tan mutilados y maltrechos, por las inclemencias de los tiempos, que sólo por el examen de los fragmentos dispersos puede vislumbrarse confusamente la belleza del conjunto.

Díganlo si no los nombres de Euclides, Arquímedes, Apolonio y Pappus, de cuyas obras sólo conservamos trozos aislados, suficientes para comprender la grandeza de aquellos genios y para ejercitar la paciencia y perspicacia de los modernos, que se han esmerado en adivinar cuáles serían las líneas generales de sus respectivas obras: trabajo no menos difícil y digno de loa que el empleado por el paciente paleontólogo, que se esfuerza en reconstituir el animal antidiluviano, guiado tan sólo por el conocimiento de algunos restos de su esqueleto.

En todos los trabajos de los antiguos geómetras se nota, sin embargo, un carácter que los distingue de los modernos, y es el cuidado con que demuestran cada verdad sobre una disposición especial de la figura á que se refiere; en términos que hay tantos teoremas y tantas demostraciones distintas, relativos á un mismo tema, cuantas son las disposiciones diversas de la figura correspondiente. Los modernos, por el contrario, procuran enunciar las verdades con la mayor generalidad posible, y buscan demostraciones independientes de la disposición especial en que se imagine colocada la figura.

Prescindiendo de algunos ensayos aislados, el primer paso verdaderamente transcendental é importante que inició este cambio en el método de exposición, lo dió Descartes al crear la Geometría analítica, con la cual llevó á la Geometría la generalidad del Álgebra, acrecentada al poco tiempo con el descubrimiento del Cálculo infinitesimal.

Desde aquel momento, la casi totalidad de los geómetras se lanzaron afanosos por la nueva senda, admirados de la facilidad relativa que proporciona de transportar al Álgebra las teorías y los problemas geométricos y de traducir en verdades geométricas las propiedades de las funciones algébricas; consorcio admirable que tanto ha contribuído á ensanchar el campo de la Geometría á medida que iba progresando la teoría de las funciones y de las formas algebraicas, y también á llevar al estudio de éstas el grado de claridad, en cierto modo intuitiva, propio de la Geometría.

Es tan grande para el Álgebra esta ventaja que, lamentando algunos analistas no poder traducir al lenguaje geométrico las propiedades de las funciones de más de dos variables independientes, han ideado esos espacios de cuatro ó más dimensiones, desprovistos por completo de realidad objetiva, pero que contribuyen poderosamente á estimular al descubrimiento de notabilísimas propiedades de las ecuaciones diferenciales de un número cualquiera de variables, y permiten enunciarlas con sencillez mediante el lenguaje geométrico, por corresponder á otras ya conocidas de las líneas y superficies del espacio de tres dimensiones: propiedades que, de otro modo, no se hubieran quizá descubierto ni sería fácil enunciar en lenguaje ordinario, y cuya importancia y trascendencia, en el terreno puramente científico, no es aún fácil apreciar en toda su extensión.

La Geometría analítica constituye un método nuevo para el estudio de las propiedades de la extensión, método excelente con el cual se resuelven sin esfuerzo cuestiones que habían ejercitado el ingenio de los más ilustres matemáticos de la antigüedad, y que hoy, gracias á ella, parecen elementalísimas; método que permite plantear y resolver con toda generalidad otras cuestiones, que sólo en reducido número de casos particulares habían podido antes abordarse por caminos diversos y sin enlace unos con otros. Pero, aparte de estas y otras importantes ventajas, no está exento de defectos, y su empleo exclusivo presenta inconvenientes que bien pronto se pusieron de manifiesto. Por una parte hay cuestiones que parecen refractarias al nuevo método y que se resuelven con más facilidad por el antiguo; y por otra, no es raro que los analistas, ocupados en combinar las ecuaciones que les han de llevar á la resolución de un problema ó demostración de un teorema, lleguen á la solución como por ensalmo, sin haberse ocupado en buscar la interpretación geométrica de las diferentes fases de transformación por que las fórmulas van pasando; con lo cual se encuentra, sí, una verdad geométrica, pero ésta aparece como aislada y desligada de las demás, que con ella debían constituir cuerpo de doctrina, por lo que permanece infecunda, sin que se descubran las múltiples consecuencias á que de otro modo hubiera dado origen, como oportunamente observa Chasles al exponer sus ideas sobre los métodos en Geometría.

Por esto, pasada la primera época de entusiasta efervescencia, volvieron los geómetras la vista hacia los antiguos métodos y trataron de darles nueva vida; pero como no había de ser infructuosa la influencia que la Geometría analítica había ejercido, trataron de llevar á la Geometría pura el grado de generalidad de que tanto se vanagloriaba aquella: y hasta tal punto lo han llegado á conseguir, que ha superado, bajo más de un concepto, la generalidad de la Geometría pura á la de la analítica; y que, reaccionando á su vez sobre ésta, le ha impreso en estos últimos años grandes adelantos con el uso de los sistemas de coordenadas proyectivas, ensanchando su campo en términos que no hubiera conseguido probablemente sin el eficaz auxilio de las teorías nacidas en el campo de la Geometría pura.

Puesto que mi deber en este momento me obliga á desarrollar ante vosotros algunas consideraciones científicas, ya que nada nuevo y que no tengáis sobradamente conocido pueda deciros, me permitiréis que recorra á grandes rasgos las principales etapas por que han pasado los geómetras en este trabajo generalizador, sin que pretenda hablaros de los progresos de la Geometría en la última mitad de este siglo, que sería trabajo superior á mis fuerzas y de extensión desmesurada para este acto, atendido el inmenso cúmulo de materiales reunidos en pocos años.

Mi propósito es más modesto, y se reduce á hacer una «Reseña de los medios empleados por la Geometría pura »actual para alcanzar el grado de generalidad y de simpli»ficación que la distingue de la Geometría antigua».

Y como al aplicar una cuestión á las diversas disposiciones de una figura, puede ocurrir: que sus elementos cambien simplemente su posición relativa; ó que se deformen en términos que algunos de ellos se alejen indefinidamente; ó también que en una disposición contenga la figura elementos de que no se encuentra vestigio en la otra; de aquí las tres fases principales por que ha pasado el trabajo generalizador, respectivamente resueltas por las teorías de los signos, de los elementos del infinito y de los imaginarios. A las cuales debe agregarse la de la proyectividad, que es indudablemente la que más ha contribuído á dar á la exposición el grado de unidad y sencillez que hoy admiramos en la Geometría: teoría que contiene en sí la ley de dualidad, acaso la más importante de cuantas rigen la extensión.

De aquí la división natural de mi trabajo, bien que el orden de exposición sea algo distinto del indicado: porque los elementos del infinito nacieron con la proyección, y son indispensables para generalizar las relaciones proyectivas; mientras que la teoría de los imaginarios se funda en la involución, que á su vez deriva de la proyectividad y sirve para dar á dichas relaciones el último grado de generalidad.

Penoso será para vosotros seguir paso á paso esta exposición de cuestiones sobradamente conocidas, hecha por quien no tiene condiciones de ninguna especie para presentarla bajo forma que las haga menos áridas, y ponga de relieve su importancia y la belleza que naturalmente tiene la verdad cuando se la estudia convenientemente; pero habréis de llevarlo con calma, en justa penitencia de vuestro desacierto al llamarme á este lugar sin merecimientos ni condiciones apropiadas. Dispensadme también si en el desarrollo de mi tema encontráis en ocasiones una forma didáctica impropia de este acto, que no es fácil renunciar á los hábitos adquiridos en la enseñanza: y además, ¿por qué no decirlo? si mi trabajo no ha de ser del todo infructuoso, ya que vosotros ningún provecho podáis sacar de él, me alienta, al menos, la ilusión de que acaso sea de alguna utilidad para los jóvenes entusiastas por la ciencia, que nunca dejan de concurrir á actos de esta especie.

I

El convenio adoptado en la Geometría analítica de incluir en la designación de las coordenadas de un punto el doble concepto de magnitud y signo, no sólo sirve para determinar por completo el punto mediante sus coordenadas, sino que hace que los resultados obtenidos sean independientes de la posición de los elementos constitutivos de la figura.

Parecería natural que en la Geometría pura se siguiese este ejemplo, y que las diferentes magnitudes que intervienen en el enunciado de un teorema llevasen también, mediante su signo, la designación de la posición relativa que ocupan; y, sin embargo, no sucedió así, y lo único que se hizo en un principio fué estudiar cada cuestión sobre una figura determinada, y, comparándola luego con otra cualquiera referente al mismo asunto, ver los cambios de posición que habían ocurrido en los diversos elementos, para deducir los de signo que correspondía introducir en las magnitudes cuya relación expresa el enunciado del teorema. Así lo propuso Carnot en su *Géométrie de Position*, casi exclusivamente destinada á este objeto, y así lo adoptaron todos los geómetras, en cuyas fórmulas era preciso efectuar los cambios de signo correspondientes á los de la figura.

La introducción sistemática de los signos en la Geometría pura parece debida á Möbius, que la consignó en su obra *Der barycentrische Calcul* (1827), mediante el sencillo convenio de expresar la dirección de un segmento por el orden de colocación de las letras que designan sus extremos; adoptando en la misma obra otros convenios semejantes para distinguir los signos de los ángulos y también de las áreas de los triángulos y volúmenes de los tetraedros (1).

Estos convenios tan fecundos y que tan sencillos parecen después de conocidos, no deben serlo tanto cuando no los descubrió la perspicacia de Poncelet, ni del mismo Chasles, que fué quien más contribuyó después á generalizar entre nosotros su uso; con la circunstancia casi inexplicable de que los teoremas de la teoría de las transversales, demostrados por la Geometría analítica, y que llevaban, por tanto, impreso el sello de generalidad propio de esta Ciencia, lo perdían al traducirlos al lenguaje geométrico, exigiendo tantos enunciados cuantas eran las diversas posiciones relativas que podían considerarse.

Enunciados y demostrados los teoremas fundamentales con entera independencia de la posición relativa de los elementos que en ellos intervienen, esta misma generalidad subsistirá para todos los que de ellos se deduzcan; á menos que las consideraciones que sirven para esta deducción se refieran á alguna disposición especial de la figura, en vez de ser aplicable á todas. Para evitar este peligro

---

(1) Las áreas de dos triángulos, situados en un mismo plano ó en planos paralelos, son del mismo signo ó de signo contrario, según el sentido en que se imaginan recorridos sus contornos: así ABC y BCA son del mismo signo, y el triángulo ACB es del contrario. Los volúmenes de dos tetraedros son del mismo signo ó del contrario, según que desde sus primeros vértices se vean recorridos los contornos de las caras opuestas en un mismo sentido ó en el contrario: así $ABCD$, $ACDB$ y $BADC$ son del mismo signo, y $ACBD$ es del contrario.

Sólo he citado estos ingeniosos convenios, que entran hoy en el cuadro de las obras elementales, para llamar la atención sobre la notable simetría de las siguientes relaciones á que condujeron á Möbius, entre tres puntos de una recta, cuatro de un plano ó cinco cualesquiera:

$$\mathrm{BC}+\mathrm{CA}+\mathrm{AB}=0, \qquad \mathrm{AB}=\mathrm{CB}-\mathrm{CA};$$
$$\mathrm{BCD}-\mathrm{CDA}+\mathrm{DAB}-\mathrm{ABC}=0, \qquad \mathrm{ABC}=\mathrm{DBC}+\mathrm{DCA}+\mathrm{DAB};$$
$$\mathrm{BCDE}+\mathrm{CDEA}+\mathrm{DEAB}+\mathrm{EABC}+\mathrm{ABCD}=0, \qquad \mathrm{ABCD}=\mathrm{EBCD}-\mathrm{ECDA}+\mathrm{EDAB}-\mathrm{EABC}.$$

podrían repetirse dichas consideraciones sobre cada una de las disposiciones posibles; pero esto, que es fácil en cuestiones elementales y sencillas, se hace casi imposible en las más complejas, por lo cual es preferible, como dice Poncelet (*Traité des Propriétés projectives des figures*, tomo I, pág. 12), hacer la demostración sobre una disposición general de la figura, prescindiendo de pintarla y razonando sin ella. Esto han procurado hacer todos los geómetras modernos, sin perjuicio de usar figuras en la enseñanza á los principios, hasta ir desarrollando en los alumnos la facultad de intuición geométrica, y acostumbrarlos á prescindir de pintar figuras. Buen ejemplo de esta manera de proceder nos dió Monge, uno de los que más contribuyeron á principios de este siglo á los progresos de la ciencia de la extensión, quien en su curso de Geometría descriptiva usaba las figuras sólo en las aplicaciones efectivas y mecánicas, donde desempeña el papel de instrumento, mientras que en las explicaciones teóricas sabía hacer concebir en el espacio las formas más complicadas de la extensión, y penetrar en sus relaciones generales y en sus propiedades más ocultas sin el auxilio de figura alguna (1).

Staudt llevó esta idea á tal extremo, que nunca consintió en publicar sus obras acompañadas de figuras; y aun en la clase las escaseaba cuanto podía, á fin de acostumbrar al alumno á ver las relaciones puramente racionales que deben existir entre los elementos geométricos, según la hipótesis del enunciado del teorema, y á razonar, no sobre la figura que allá en nuestra imaginación formemos, sino sobre los elementos que en ella considera puestos nuestra razón.

---

(1) Así lo asegura Chasles en su interesante obra *Apperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie* (página 209 de la tercera edición).

Y es tal la importancia que á esto atribuyen los matemáticos que en nuestros días se esfuerzan en depurar los principios fundamentales de la Ciencia, y asentarlos sobre sólida base que resista el examen de la más severa crítica, que algunos no vacilan en asegurar que la piedra de toque para reconocer si una demostración es ó no rigorosa, consiste precisamente en ver si subsiste, sin necesidad de atender á la figura correspondiente. Porque ocurre á veces que, al pintar la figura, incluímos en ella, sin apercibirnos, más condiciones de las contenidas en la hipótesis del teorema, en cuyo caso deducimos falsamente que la conclusión está contenida en la hipótesis sin estarlo; y aun sin llegar á este caso extremo puede ocurrir que el simple trazado de la figura exija la verdad de ciertos axiomas ó postulados, que debieran haberse formulado explícitamente con anterioridad, para que la exposición tuviese todo el rigor lógico que la ciencia demanda.

II

Otro medio que contribuye á generalizar las propiedades de la extensión, sin el cual apenas sería posible la Geometría moderna, es la introducción en ella de los elementos del infinito, cuyo origen se encuentra en el deseo de evitar las excepciones que presenta la correspondencia de los puntos y rectas homólogos en dos formas planas que son proyección una de otra. Este resultado se consigue admitiendo en toda recta un punto en el infinito y en todo plano una recta en el infinito. Además, el estudio de las figuras homológicas en el espacio, llevó á Poncelet á admitir el plano del infinito, como lugar geométrico de todos aquellos puntos y rectas especiales, puesto que á ellos corresponden como homólogos los situados en un plano propiamente tal.

La admisión de estos elementos del infinito, que tanto contribuye á generalizar las cuestiones, presenta, sin embargo, gravísimos inconvenientes, cuando se les atribuye realidad objetiva; pues al aplicarles algunas propiedades de los puntos, rectas y planos propiamente tales, llevan á absurdos manifiestos, aparte de la falta de rigor científico que constituye el fundar en una simple analogía la introducción de nociones que distan mucho de tener el grado de claridad de todas las demás que admite la Geometría. De aquí la necesidad de sustituir la noción obscura y falsa de estos elementos del infinito por otras perfectamente claras y definidas, aun cuando, para abreviar el lenguaje, se conserven dichas denominaciones convencionales, que ningún inconveniente presentarán entendidas en su verdadero sentido; pues él nos enseñará á distinguir los casos en que desempeñen dichos elementos el mismo papel que los puntos, rectas y planos propiamente tales, de aquellos otros en que no se verifique tal circunstancia.

Este resultado lo ha conseguido Staudt, considerando que en toda recta hay un elemento que llamamos ordinariamente su *dirección*, y que es común á todas las rectas paralelas á ella; y que un sistema de planos paralelos tiene un elemento común á todos, que podemos llamar su *orientación* (1). Mediante estas denominaciones, los enunciados de los teoremas de la teoría de las paralelas toman nueva forma, que los asemeja á otros relativos á rectas y planos que se cortan: así, para expresar que por un punto pasa una recta paralela á otra y un plano paralelo á otro, diremos que un punto y una dirección determinan una recta, y que un punto y una orientación determinan un plano.

Estas formas de expresión nada prejuzgan respecto á la naturaleza de los elementos que hemos denominado dirección y orientación, cuya esencia íntima corresponde investigar al filósofo más que al geómetra. Bástale á éste saber que existen los elementos designados con estos nombres, y que no son puntos ni rectas; y al observar que desempeñan el mismo papel que éstos, no ve inconveniente en llamarles punto y recta impropiamente tales, ó si se quiere, punto y recta del infinito, á fin de comprender en un enunciado solo multitud de teoremas, bajo condición, sin embargo, de saber darles la forma ordinaria cuando alguno de los puntos ó rectas sean direcciones ú orientaciones.

Mas con el afán por depurar los conceptos y afianzar

---

(1) Esta denominación he adoptado en mis lecciones, á falta de otra más adecuada, porque creo que no puede dar lugar á confusión.

cada vez sobre más sólidas bases las verdades geométricas, observando que toda la teoría de las paralelas descansa en el postulado de Euclides, que tanto y tan infructuosamente ha ejercitado la paciencia é ingenio de los más eminentes geómetras, han pensado algunos en agrupar en cuerpo de doctrina todas las verdades independientes de este postulado.

Pues bien, prescindiendo de que sea ó no verdadero, es fácil demostrar que el sistema de las infinitas rectas que están de dos en dos en un plano, sin pertenecer todas á uno mismo, queda completamente determinado cuando se fijan dos de ellas y que por todo punto que no sea común á éstas pasa una sola recta del sistema. Si dos rectas de este sistema tienen un punto común, éste pertenecerá también á todas los demás, y será el vértice de la radiación que todas ellas constituyen. ¿No parece natural conservar el mismo nombre de radiación para el sistema de rectas, aun en el caso de no tener ningún punto común? Y si al punto común á todas las rectas de la radiación se le llama su vértice, natural parece también conservar, en el otro caso, el nombre de vértice de la radiación á este elemento común á todos sus rayos, que está perfectamente determinado por dos de ellos cualesquiera. Aunque este vértice no sea en tal caso punto, no dejan de llamarle punto impropiamente tal, puesto que desempeña análogo papel que el punto ordinario.

Haz de rectas será, en este supuesto, el conjunto de todas las de una radiación, contenidas en un plano; ó, si se quiere, el de todas las rectas de un plano que tienen un punto común, ya sea éste propio ó impropio; pues, en uno y otro caso, dos rectas del haz determinan su vértice, que es el de la radiación á que pertenecen.

Llámase haz de planos el sistema de todos los que cumplen la condición de ser cortados por otro cualquiera según un haz de rectas; siendo fácil demostrar que dos planos determinan un haz, y que por todo punto que no les sea común, pasa un solo plano del haz, independientemente de que aquellos dos tengan ó no una recta común. En el primer caso, esta recta es la arista del haz, y en el segundo, podemos decir que la arista es una recta impropiamente tal, dando este nombre á ese algo determinado por dos cualesquiera de los planos del haz y que tiene común con todo plano no perteneciente al haz un punto impropiamente tal, el vértice del haz de rectas, sección del haz de planos por este nuevo plano.

Dos radiaciones tienen un haz de planos común, cuya arista es la recta que une sus vértices, y el plano de este haz que pasa por un punto queda determinado por las dos rectas, una de cada radiación, trazadas por dicho punto.

Por último, así como dos rectas que se cortan determinan un plano, es decir, que otras dos cualesquiera que las cortan en cuatro puntos distintos tienen entre sí uno común, también podrá demostrarse que esta última circunstancia se verifica aun cuando las rectas consideradas sean impropiamente tales, en cuyo caso podremos decir que dichas cuatro rectas están en un plano impropiamente tal, determinado por dos de ellas cualesquiera.

Atiéndase á que todo lo dicho es independiente de que en un plano haya una ó muchas rectas que pasen por un punto y no corten á otra del mismo plano; es decir, que cada recta contenga uno ó muchos puntos impropiamente tales.

Si, conformándonos con el postulado de Euclides, admitimos un solo punto impropiamente tal en cada recta, con lo anterior tendremos la base de la teoría de las paralelas, y á dicho punto llamaremos, con Staudt, la dirección de la recta, ó su punto del infinito. Sobre cada plano habrá una sola recta impropia, que es su orientación ó su recta del infinito; y en el espacio habrá un solo plano impropiamente tal, plano del infinito, que contiene todas las direcciones y orientaciones posibles.

Pero si admitimos que por un punto exterior á una recta pasan varias que no la corten, estando todas en un plano, habremos de admitir en toda recta infinitos puntos impropios; y las rectas que los proyectan desde aquel punto forman un ángulo plano completo que, junto con el de las proyectantes de los puntos propiamente tales, constituyen todo el haz. De tal modo, que los últimos puntos están separados de los primeros, por los que corresponden á los lados de dichos ángulos, los cuales suelen llamarse puntos del infinito de la recta. En este caso, todo plano contiene infinitas rectas impropiamente tales, y en el espacio existen infinitos planos que merecen esta misma calificación.

Por último, si supusiésemos que dos rectas de un plano se cortan siempre, cualquiera que sea su posición relativa, esto equivaldría á admitir que no existe ningún punto, recta ni plano impropios ó en el infinito. Estos tres supuestos corresponden á las llamadas por algunos respectivamente Geometría parabólica, hiperbólica y elíptica.

III

Con la admisión de los puntos, rectas y planos impropiamente tales, se hace posible enunciar con toda generalidad las relaciones que existen entre dos formas homológicas; y en ellas á los puntos, rectas y planos de una corresponderán en la otra, sin excepción, puntos, rectas y planos; pudiendo los dos elementos homólogos ser propios ó los dos impropios, ó uno de una especie y otro de la contraria. Tanto el centro de proyección ó de la homología, como el eje ó el plano central, podrán indistintamente ser de una ú otra especie, sin que deje de subsistir la relación de homología; logrando con esto generalizar también los conceptos de proyección y de sección.

La consideración de estos elementos impropios da lugar á una división importantísima de todas las propiedades de la extensión en dos grandes grupos, cu o estudio da origen á dos distintas ramas de la Geometría: el primero comprende las propiedades descriptivas, cuyo carácter distintivo es el de poderse aplicar indistintamente á los elementos propios y á los impropios, sin variación alguna, y expresan relaciones en las cuales no interviene la noción de magnitud; mientras que constituyen el segundo grupo las propiedades métricas que no son aplicables á los elementos impropios, sin experimentar profundas é importantes modificaciones.

Las propiedades descriptivas tienen el carácter proyectivo, es decir, que subsisten para todas las formas homológicas de una misma, y al aplicarse á los elementos impropios, permiten extender, no sólo las propiedades, sino aun los conceptos geométricos. Así, observando que á un segmento rectilíneo, á un polígono y á una curva, con sus secantes ó tangentes, corresponden en la proyección otras formas análogas, se obtienen los conceptos de segmentos con algún punto impropio, ya sea un extremo ó puntos interiores al segmento, ó también segmentos exclusivamente compuestos de puntos impropiamente tales; de triángulos y polígonos de muy diversas especies, según la posición que ocupen respecto de los elementos impropios de su plano; de curvas de segundo orden, homológicas de la circunferencia, que tienen puntos ó tangentes impropias, á las cuales serán aplicables todas las propiedades descriptivas de la circunferencia, como son, por ejemplo, muchas de las relativas al polo y polar, á los centros de semejanza de dos circunferencias, ó á su eje radical.

Las propiedades métricas no tienen todas el carácter proyectivo, bien que muchas de ellas pueden transformarse en otras que lo tengan, ó aparecer como casos particulares de verdades más generales que revisten este carácter. Pero sin entrar en este examen analítico, me permitiréis que, como ejemplo de relación métrica proyectiva, limitándome á la Geometría euclidiana, os cite la que usa Poncelet, quien demuestra que tienen tal carácter todas las que pueden expresarse por una ecuación racional y entera entre segmentos rectilíneos, de tal manera dispuestos que en cada término haya un mismo número de los situados en cada recta de la figura é igual número también de los terminados en cada uno de sus puntos. A este grupo pertenecen la razón doble ó anarmónica, tan usada por Steiner y Chasles, y también la razón de sección poligonal (1),

(1) Da Möbius este nombre *(ratio sectionalis poligonica)* á la derivada de un polígono, en cada uno de cuyos lados se considera un punto que lo divide en dos segmentos, cuando se forma el producto de todos los que de dos en dos no tienen ningún punto común y se divide por el producto de todos los demás.

de que tanto partido sacó Möbius en su *Der barycentrische Calcul.*

Para mostrar cómo por este medio se extienden las verdades geométricas, citaré sólo el conocido teorema de Menelao, que establece la relación entre los segmentos que una transversal determina en los lados de un triángulo; teorema que sirvió á Carnot de base á su teoría de las transversales y que puede extenderse á un polígono cualquiera y enunciarse brevemente en esta forma. «La razón »de sección poligonal que un plano determina en un polí»gono cualquiera es igual á la unidad positiva». Como esta relación es de carácter proyectivo, basta demostrarla en una proyección de la figura para admitirla como general. Pero la indicada relación se reduce á una identidad, proyectando el polígono alabeado desde un punto del plano secante sobre otro que le corte, y después el polígono plano, así obtenido, sobre una recta de su plano desde un centro situado en la intersección de este plano con el secante. Se ve, pues, que de una simple relación de identidad entre segmentos situados sobre una recta, el proceso de la proyección permite deducir otra mucho más compleja entre segmentos situados sobre los lados de un polígono.

Mucho mas que la transformación deducida de la proyección, contribuye á dar á las doctrinas geométricas el grado de sencillez y unidad, que persiguen los geómetras de este siglo, la ley de dualidad que ya desde antiguo se descubrió en algunas verdades geométricas, como, por ejemplo, en las relaciones que enlazan los elementos de un triángulo esférico. Pero, por más que los casos de aplicación de esta importantísima ley fuesen multiplicándose de día en día, su demostración general, que permite aplicarla sin recelo, es gloria de este siglo. De las teorías del polo y polar en las líneas y superficies de segundo orden dedujo el general Poncelet la de las figuras polares recíprocas, así planas como del espacio, y por su medio demostró que á toda propiedad proyectiva, tanto descriptiva como métrica, coresponde otra correlativa.

Esta demostración contribuyó poderosamente á que los geómetras tratasen de extender cada vez más el campo de aplicación de la ley de dualidad: pero desde luego se inició una divergencia importante en la manera de aplicarla; pues mientras Poncelet se limitaba á deducir, por su medio, de las verdades ya conocidas y demostradas sus correlativas, Gergonne prefería colocar una al lado de otro, no sólo los teoremas correlativos, sino también sus demostraciones, estableciéndolos con entera independencia uno de otro. Como si temiera que la demostración de Poncelet no tuviese todos los caracteres requeridos para una ley tan fundamental, por no arrancar de las primeras verdades de la Ciencia, en cuyo principio parece debe colocarse dicha ley; ó acaso por estar persuadido de que no basta asegurarnos de que es cierta una verdad particular, por serlo su correlativa, si no se estudia el conjunto de todas las que la enlazan con las demás de la teoría á que pertenece. El camino iniciado por Gergonne siguieron también Steiner, Plücker, Staudt y Chasles, y en general ha prevalecido, á pesar de las protestas de Poncelet, que creía era tiempo perdido el empleado en la demostración de un teorema, cuando se conoce la de su correlativo.

Aplicando desde los principios, como propone Gergonne, la ley de dualidad, aparecen de igual importancia ó valor los dos elementos constitutivos de las formas geometricas: el punto y el plano; mientras que la recta queda como elemento intermedio que participa de las propiedades de uno y otro, sirviéndoles como de lazo de unión. De tal modo que, si bien en las formas planas parece de igual valor que el punto, y en las radiadas se equipara con el plano, en las formas en el espacio su función es bien distinta, y, al parecer, más importante que la de sus compañeros, como se descubre cada vez con más claridad á medida que se avanza en el estudio de las propiedades íntimas de la extensión.

Según este principio de la dualidad, las series rectilíneas, los haces de rectas y los de planos aparecen como formas de la misma importancia, por lo que se las comprende bajo el nombre genérico de formas uniformes ó de primera categoría; lo propio sucede con las formas planas y las radiadas, pudiendo denominarlas en común formas de segunda categoría; en fin, las formas más generales del espacio habrán de constituir, en tal caso, una tercera categoría más elevada. Conviene estudiar siempre á la par las formas de una misma categoría, estudio que se facilita con la costumbre, cada día más generalizada, de escribir á dos columnas las proposiciones correlativas, lo cual no puede ofrecer dificultad, especialmente al tratar de propiedades descriptivas.

Por lo general, las propiedades de las formas planas son percibidas con más claridad que sus correspondientes de las radiadas, por ser aquéllas más fáciles de pintar ó de representar en la imaginación; pero tampoco faltarán ocasiones en que suceda lo contrario, pues la radiación cuyo vértice es un punto propiamente tal, tiene sobre la forma plana la ventaja de que todos sus elementos son de la misma especie, mientras que los puntos impropios que contiene la forma plana le dan cierto carácter de discontinuidad que dificulta algunas investigaciones. ¿Quién duda, en efecto, de que es más fácil estudiar las diferencias esenciales que distinguen las superficies cónicas de orden par de las que son de orden impar y la continuidad en estas últimas, que hacer el estudio análogo en las líneas planas?;

por no ser posible la línea de orden impar sin algún punto impropiamente tal. Y la ventaja de la radiación sobre la forma plana aparece más clara todavía en la Geometría hiperbólica: en general, siempre que se trate de estudiar propiedades relacionadas con puntos, rectas ó planos impropiamente tales, será más cómodo deducirlas mediante sus correspondientes de la radiación que proyecta la figura desde un punto propiamente tal.

En las formas planas correlativas á los puntos y tangentes de una curva, corresponden respectivamente las tangentes y puntos de otra, y á los puntos encerrados dentro de una línea las rectas excluídas por el contorno de otra; y en el espacio á los puntos, tangentes y planos osculadores de una curva corresponden, respectivamente, planos osculadores, tangentes y puntos de otra; á los puntos y planos tangentes de una superficie, los planos tangentes y puntos de otra; y al conjunto de puntos encerrados en una superficie convexa, el de los planos excluídos por otra, ó que no tienen con ella ningún punto común. De donde resulta la conveniencia de estudiar el conjunto de los puntos de una curva con el de las tangentes y planos osculadores que les corresponden y con la superficie desarrollable tangencial de la línea que por su reunión engendran; y á la par de la superficie no desarrollable engendrada por una línea móvil, conviene estudiarla también como envolvente de las diferentes posiciones de una superficie desarrollable, que cambia de forma y de posición en el espacio.

Quien se habitúa á poner al lado de cada propiedad y de la solución de cada problema sus correlativas, se sorprende al ver la facilidad con que se agrupan en derredor de una otras muy importantes que difícilmente hubiera descubierto sin aquella precaución.

IV

A poco que se examinen las relaciones que enlazan dos figuras polares recíprocas y las propiedades que de su estudio se deducen, se comprende que, en su mayor parte, son independientes de la posición que ocupan respecto de la línea ó superficie de segundo orden que las ha originado. De aquí que, aunque esta manera de considerarlas baste para afirmar la existencia de la ley de dualidad ó de correlación, se haya tratado de estudiar de una manera general el problema de establecer entre dos formas una relación que incluya sólo las condiciones que lógicamente derivan de aquella ley. Esta tendencia aparece tanto más justificada cuanto más se estudia la cuestión; pues se encuentran en la misma Geometría y en la Mecánica otros muchos procedimientos para relacionar entre sí dos formas, de modo que á los puntos de una correspondan planos en la otra; y á los puntos de un plano de la primera, planos que pasan por el punto correspondiente de la segunda A las formas que cumplen estas condiciones, llamó Chasles *correlativas*, y así las denominamos también nosotros siguiendo la costumbre francesa, mientras que los alemanes han conservado la primera denominación de *recíprocas* con que las distinguía Poncelet en el caso antes mencionado, que es el único que estudió. También se da el mismo nombre á dos formas planas cuando á los puntos y rectas de una corresponden rectas y puntos de la otra; y á dos radiadas en que las rectas de cada una corresponden con planos de la otra.

Una cosa análoga pasa con las formas homológicas que aparecen como caso particular de otras que se correspondan sin más condición que la de tener cada punto otro homôlogo, y que los homólogos de todos los de una recta ó plano estén sobre la recta ó plano homólogos; á cuyas formas llama Chasles y los franceses *homográficas* y los alemanes *colineales*. Las mismas denominaciones son aplicables, no sólo á dos formas planas ó á dos radiadas que cumplen análogas condiciones, sino también á una forma plana relacionada con una radiación, de tal modo que á los puntos y rectas del plano correspondan rectas y planos de la radiación.

Faltaba investigar cuáles eran las condiciones más generales en que podían tomarse dos formas geométricas para realizar estas definiciones; cuestión importantísima, como fundamental de toda la teoría de la proyectividad, y, por tanto, de la Geometría pura, tal como se encuentra hoy constituída; cuestión que desde luego aparece compuesta de otras dos, una que estudia la manera más general de hacer que á cada punto de la primera forma corresponda, por ejemplo, un plano determinado de la segunda; y la otra examina las condiciones necesarias para que á los diferentes puntos de la primera situados en una recta ó plano correspondan en la segunda planos que pasen todos por una recta ó un punto.

Esta doble cuestión resolvieron, casi simultáneamente, Möbius (1827) y Chasles (1837) (1) mediante la Geome-

(1) Las obras en que respectivamente se ocuparon de esta cuestión fueron *Der barycentrische Calcul* y *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie*; pero, aunque esta última no se imprimió hasta el año 1837, había sido remitida á la Academia de Bruselas en Diciembre de 1829, y ni en esta fecha ni en la de la impresión de su obra, tenía Chasles, noticia de la de Möbius. Así se desprende de una nota de la pág 215 de la citada obra, en la cual dice Chasles hablando del *Journal du Crelle* «Plusieurs géomètres allemands: MM. Steiner, Plücker,

tria analítica: Steiner (1832) intentó darle una base geométrica pura, apoyándose en la igualdad de las razones dobles de los grupos de elementos homólogos; pero la exposición de estos fundamentos, con absoluta exclusión de toda idea de coordenadas y aun de magnitud, no se consiguió hasta algunos años más tarde por Staudt (1847). Me permitiréis que reseñe brevemente la marcha que en manos de estos eminentes geómetras ha seguido la cuestión, en gracia de la importancia capital que presenta en la ciencia que nos ocupa.

Möbius empieza por estudiar la homografía (colineación) en las figuras planas, y de su definición deduce que tomando uno, dos ó tres pares de puntos homólogos, no queda definida la correspondencia entre las dos formas; pero que si en una se toman cuatro puntos que de tres en tres no estén en línea recta, y en la otra sus homólogos que cumplan igual condición, queda determinada la correspondencia unívoca de los demás pares de puntos homólogos de las dos formas.

Para convencerse de esto último basta unir por rectas los cuatro puntos fundamentales de cada una de las dos formas, y entre sí los puntos en que estas rectas se cortan y los que resultan dela intersección de las rectas de unión, y así sucesiva é indefinidamente; con lo cual se construye

---

»Möbius, etc., dignes collaborateurs des célèbres analystes Gauss, Cre»lle, Jacobi, Lejeune-Dirichlet, etc., écrivent. dans ce dernier recueil, sur »les nouvelles doctrines de la Géométrie rationelle. Nous éprouvons un »vif regret de ne pouvoir citer ici leurs ouvrages, qui nous son incon»nus, par suite de notre ignorance de la langue dans laquelle ils sont »écrits.»

Por lo demás, es evidente que, si Chasles hubiese conocido la obra de Möbius, no hubiera dejado de adoptar el principio de los signos que contiene, y á que tan grande importancia dió desde el momento que llegó á su conocimiento. (Véanse las notas de la pág. XIII del Prefacio de la *Géométrie supérieure* del mismo Chasles).

en cada uno de los planos una red, cuyos puntos, si no llenan por completo el plano, pueden acercarse indefinidamente á uno cualquiera de sus puntos. De aquí se deduce que, considerando como homólogos los puntos de intersección de rectas homólogas, á un punto cualquiera de uno de los planos corresponde en el otro uno determinado fácil de construir.

Para demostrar que en las formas construídas en estas condiciones, á puntos en línea recta de una, corresponden puntos de una recta en la otra, basta referir las dos á triángulos fundamentales homólogos y observar que las coordenadas barycéntricas (1) de un punto tienen con las de su homólogo razones numéricas constantes; de donde se deduce que las expresiones barycéntricas de dos líneas

---

(1) Para determinar Möbius la posición de un punto respecto de otros dos que están en línea recta con él, ó de los tres vértices de un triángulo cuyo plano pasa por dicho punto, ó de los cuatro vértices de un te traedro cualquiera, toma números proporcionales á los pesos que deberían colocarse en estos puntos fijos ó fundamentales para que el centro de gravedad de su conjunto sea el punto que se trata de determinar. Estos números son las coordenadas barycéntricas (de βαρύς, pesado, y de κέντρον, centro) del punto, y constituyen el primer sistema de coordenadas homógeneas empleado; no siendo difícil encontrar su definición geométrica, independiente de toda noción mecánica, que es la que tomó Möbius desde el principio de su obra.

Llama *expresión barycéntrica* del punto P, cuyas coordenadas barycéntricas, respecto del tetraedro fundamental $ABCD$, son p, q, r y s, el polinomio simbólico

$$pA + qB + rC + sD;$$

y, según el conocido teorema de los momentos, para determinar la distancia de este punto á un plano cualquiera π, basta substituir las letras A, B, C y D por las distancias á dicho plano de los puntos designados por ellas, y dividir el resultado por la suma

$$p + q + r + s$$

de los coeficientes.

Mientras las razones entre los coeficientes sean constantes, la exhomólogas cualesquiera son del mismo grado, es decir, que dichas líneas son de igual orden.

El mismo camino lleva á estudiar las formas homográficas en el espacio, sin más diferencia que tomar cinco pares de puntos homólogos fundamentales en vez de cuatro, y enlazarlos entre sí mediante rectas y planos para construir las redes homólogas que les corresponden.

El estudio de las propiedades de las formas homográficas se simplifica mediante el *cálculo barycéntrico abreviado*, que parece ser el primer sistema de coordenadas proyectivas empleado; en él se toma, para determinar un punto del plano, las razones entre sus coordenadas barycéntricas y las del cuarto punto fundamental de la red en el plano ó las del quinto en el espacio: y con esto resultan

---

presión barycéntrica designará un solo punto; pero si dichos coeficientes son funciones de una ó de dos variables independientes, dicha expresión designará á la vez respectivamente todos los puntos de una línea ó de una superficie.

De análoga manera se escribe la expresión barycéntrica $pA + qB$ de un punto P respecto de los A y B y la $pA + qB + rC$ de Q respecto de los A, B y C, si A, B y P están en una recta y los A, B, C y Q están en un plano. Si $\frac{p}{r}$ y $\frac{q}{r}$ son funciones de una variable, la expresión $pA + qB + rC$ designa una línea plana.

Estas expresiones barycéntricas se prestan á resolver todos los problemas á que se aplican los demás sistemas de coordenadas.

De la expresión barycéntrica de uno de los cuatro puntos fundamentales de una red en el plano respecto de los otros tres, se deduce sin esfuerzo la de otro cualquiera de los puntos de la red; y se observa que las coordenadas barycéntricas de éste tienen con las de aquél razones comensurables dependientes tan sólo del número de operaciones que ha sido preciso efectuar para llegar á este punto desde los cuatro fundamentales, y del orden en que se han llevado á cabo. Recíprocamente, todo punto cuya expresión tenga sus coeficientes en razón comensurable con los del cuarto punto fundamental pertenece á la red; y puede, por tanto, acercarse indefinidamente á otro cualquier punto del plano cuyas coordenadas tengan con las del primero razones incomensurables.

completamente idénticas entre sí las expresiones barycéntricas de los puntos, líneas y superficies homólogos.

Para establecer la relación correlativa (recíproca) entre dos formas planas, sigue Möbius en la obra citada una marcha puramente analítica, que consiste en establecer, entre las expresiones de un punto y de la recta correspondiente, una relación tal, que á los puntos de una recta correspondan rectas que pasan por un punto (1).

Análogo procedimiento permite establecer la relación de correlación entre dos formas en el espacio; pero, pocos años después de aparecer el Cálculo barycéntrico, publicaba el mismo Möbius, en el *Journal de Crelle* (1833), el estudio de estas formas correlativas en el espacio, mediante el sistema ordinario de coordenadas cartesianas, en una forma idéntica á la empleada por Chasles en la Memoria que acompaña á su *Apperçu historique*.

---

(1) Si las distancias de los tres puntos fundamentales A, B y C á una recta x son proporcionales á $\frac{p}{\alpha}$, $\frac{q}{\beta}$ y $\frac{r}{\gamma}$, las expresiones barycéntricas de sus puntos de intersección con las rectas BC, CA y AB son

$$\frac{\beta}{q} B - \frac{\gamma}{r} C, \quad \frac{\gamma}{r} C - \frac{\alpha}{p} A \quad \text{y} \quad \frac{\alpha}{p} A - \frac{\beta}{q} B,$$

y la de la recta x será

$$\frac{1-v}{p} \alpha A - \frac{1}{q} \beta B + \frac{v}{r} \gamma C;$$

en la que v es una variable independiente que toma los valores respectivos 1, ∞ y 0 para aquellos tres puntos. Para que otro punto

$$s\alpha A + t\beta B + u\gamma C$$

esté sobre aquella recta x basta que se verifique la ecuación de condición

$$ps + qt + ru = 0,$$

como se ve identificando las expresiones del punto y la recta, y eliminando v ó, más sencillamente, aplicando el teorema de los momentos.

Si α, β, γ, α', β' y γ' son constantes arbitrarias, quedarán relaciona-

Este procedimiento es, en efecto, tan natural, que no debe sorprender ocurriese al mismo tiempo á estos dos eminentes geómetras; pues se reduce á decir que si á cada punto de la primera forma ha de corresponder un plano en la segunda, los coeficientes de la ecuación de este plano han de ser funciones racionales de las coordenadas de aquel punto; y para que á los planos de la segunda forma que pasan por un punto correspondan puntos de la primera situados en un plano, es necesario que aquellas funciones sean lineales. De modo que una ecuación entre las tres coordenadas de los puntos de una forma y las tres de los de la otra, que sea de primer grado respecto de aquellas, y también con relación á éstas, basta para establecer la relación de correlación entre las dos formas del espacio, y de ella se deducen todas sus propiedades.

Una marcha análoga permite establecer las relaciones de homografía entre dos formas en el espacio, pero Chas-

---

das correlativamente dos formas planas suponiendo que á todo punto

$$p\alpha A + q\beta B + r\gamma C$$

de la primera, corresponde la recta

$$\frac{1-v}{p}\alpha' A' - \frac{1}{q}\beta' B' + \frac{v}{r}\gamma' C'$$

de la segunda; y á toda recta

$$\frac{1-v}{s}\alpha A - \frac{1}{t}\beta B + \frac{v}{u}\gamma C$$

de aquella, corresponde el punto

$$s\alpha' A' + t\beta' B' + u\gamma' C'$$

de ésta.

Para fijar la relación proyectiva entre las dos formas correlativas pueden tomarse arbitrariamente los puntos

$$A,\ B,\ C \text{ y } \alpha A + \beta B + \gamma C$$

de la primera forma, y las rectas

$$B'C',\ C'A',\ A'B' \text{ y } (1-v)\,\alpha' A' - \beta' B' + v\gamma' C'$$

de la segunda; lo cual determina los triángulos fundamentales y las constantes

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \alpha',\ \beta' \text{ y } \gamma'.$$

les prefirió deducirlas de las de correlación, fundándose en la reflexión sencillísima de que dos formas correlativas con una tercera son homográficas entre sí.

Al dar una base analítica al estudio de las formas correlativas asegura Chasles que lo hace únicamente para conformarse con los hábitos de la mayor parte de los geómetras y hacer más fácil la lectura de su Memoria (la primera de las que acompañan al *Apperçu historique*, en su 1.ª parte, § 1.°); pero asegurando que le parece más natural estudiarlas de una manera puramente geométrica. Y en efecto, esta ha sido la tendencia constante de la Geometría pura, claramente expuesta por Poncelet y que se revela en todas las páginas de su *Traité des propriétés proyectives des figures.*

Esta misma tendencia se nota en Möbius; pero, si bien la consideración de las redes le permitió determinar geométricamente pares de puntos homólogos, no le bastó para probar que á los puntos de una recta ó plano corresponden puntos de otra recta ó plano; lo cual sólo lo consigue por el cálculo barycéntrico. Y es que, sin haber hecho el estudio previo de la relación proyectiva entre las series y los haces, no es fácil abordar la que corresponde á las formas planas y las del espacio, así homográficas como correlativas.

La definición geométrica de la relación proyectiva entre las series y los haces no es tan sencilla como á primera vista pudiera creerse, pues la misma simplicidad de estas formas dificulta el establecimiento de relaciones entre los elementos de una de ellas que subsistan entre sus homólogos. Parece natural definir como proyectivas dos series ó haces cuando pueden colocarse en posición perspectiva, ó ser la primera y última de una serie de formas, cada una de las cuales es perspectiva con la anterior, pero ¿cuáles son las relaciones íntimas que deben existir entre dos formas para que cumplan estas condiciones?

Steiner adoptó para caracterizarlas la igualdad de las razones dobles de los diversos grupos de cuatro elementos de una forma y de sus homólogos en la otra (1); y en efecto, esta es la relación métrica de carácter proyectivo más sencilla á que satisfacen dichas formas, por intervenir en ella sólo cuatro pares de elementos homólogos, que es el número mínimo; puesto que tres pares pueden tomarse de una manera del todo arbitraria en dos formas que deseamos sean proyectivas. Por esto, bajo una ú otra forma, reconocieron esta identidad de razones anarmónicas todos los geómetras que de relaciones proyectivas se ocuparon: no solo en la antigüedad Euclides en sus porismos (según se desprende de los comentarios de Pappus), sino en época moderna, Pascal y Simpson, y recientemente Brianchon, Poncelet y Möbius: pero ninguno parece haberle dado antes la importancia que le dieron Steiner y Chasles, ni constituido con ella la base del estudio de las series y haces proyectivos, como preliminar para el de las formas más complejas, así las homográficas como las correlativas.

La *Géométrie Supérieure* (1852), en que Chasles trata esta cuestión, tiene sobre la citada obra de Steiner la ventaja de introducir sistemáticamente en todas las proposiciones los signos que deben tener los segmentos, mientras que Steiner usa la razón doble sin tener en cuenta dichos signos; pero uno y otro deducen sencillamente de la definición de las series y haces proyectivos las demás relaciones que los enlazan, ya se los considere separadamente, ya en posición perspectiva, ya superpuestos: con cuya base pueden dar grande unidad y sencillez á la exposición de casi todos los teoremas, porismos y problemas que

(1) La obra en que Steiner desarrolló este asunto es el *Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander*. Berlín, 1832.

tanta celebridad tuvieron en la antigüedad, y que, en su mayor parte, son consecuencias inmediatas de dicha relación proyectiva. Esta relación les permitió también dar una definición descriptiva sencilla de las secciones cónicas, de la cual derivan naturalmente la mayor parte de las propiedades de estas curvas.

Pero á poco que se reflexione, se verá que la razón anharmónica es un sistema especial de abscisas; pues determina un punto de una recta por la razón de sus distancias á otros dos fijos en la misma dividida por una constante, que es la razón análoga correspondiente á un tercer punto fijo; y determina un rayo de un haz, sea de rectas ó de planos, respecto de otros tres rayos del mismo haz por una expresión análoga, en la que se substituyen los segmentos por los senos de los ángulos que entre sí forman dichos rayos. Este sistema no es otro, en el fondo, que el cálculo barycéntrico abreviado aplicado á los puntos de una recta, con la ventaja de aplicarse con igual facilidad á los haces que á las series, circunstancia que no parece haber observado Möbius.

La razón anharmónica se aplica sin dificultad á la determinación de un punto ó recta de un plano respecto de otros cuatro fijos en el mismo, y de un punto ó plano cualquiera respecto de otros cinco fijos, como hace el cálculo barycéntrico.

La definición de las formas homográficas ó correlativas adoptada por Chasles en su *Géométrie Supérieure*, se reduce á decir que dos elementos son homólogos cuando tienen idénticas sus coordenadas en este sistema especial, á condición de que los elementos fundamentales ó de referencia sean homólogos entre sí.

Para probar después que en dos formas planas homográficas, por ejemplo, á los puntos de una recta corresponden puntos de otra recta, basta observar que los haces de rectas que proyectan los primeros desde dos puntos fundamentales son perspectivos, y que, por tanto, también deben serlo sus homólogos.

Este sistema de coordenadas es indudablemente el que mejor se presta al estudio de las relaciones proyectivas entre dos formas, y es, por tanto, con ligeras variantes de forma, el que se usa hoy casi universalmente para estudiarlas en la Geometría analítica; siguiendo el sabio consejo de emplear en el estudio de cada cuestión el sistema de coordenadas que le sea más apropiado.

No vayáis á deducir de aquí que considere yo la *Géométrie supérieure* de Chasles, y mucho menos el *Systematische Entwickelung* de Steiner, como obras de Geometría analítica, limitándome á afirmar que la base en que apoyan los principios sobre la relación proyectiva son de carácter analítico; pero los desarrollos ulteriores de estos principios procuran uno y otro exponerlos geométricamente, como hizo el mismo Chasles en su primer trabajo sobre este asunto, teniendo sobre él la *Géométrie Supérieure* las ventajas que proporciona el estudio previo de las series y haces para abordar el de las formas planas y en el espacio. Por lo demás, no deja de transparentarse en la obra de Chasles aquel fondo analítico en la tendencia y la facilidad grande que encuentra en pasar á las abscisas cartesianas y en resolver por ecuaciones varios problemas que hubieran podido resolverse con igual ó mayor facilidad geométricamente sin recurrir á estas expresiones analíticas; bajo cuyo concepto forzoso es confesar que lleva Steiner alguna ventaja sobre Chasles.

La gloria de haber logrado emancipar la Geometría pura de la analítica pertenece á Staudt, quien para evitar el peligro de emplear sistemas de coordenadas, más ó menos embozados, sentó el principio de que debe excluirse en absoluto la noción de magnitud de la demostración de todas aquellas verdades que no la contienen en su enunciado; lo cual le llevó á constituir un cuerpo de doctrina con todas las propiedades de carácter descriptivo, al cual llamó Geometría de la posición, *Geometrie der Lage*, con separación absoluta de las propiedades métricas, que deben formar, según él, una Geometría de la medida, que siga á aquélla y en ella se apoye.

Al seguir esta marcha realizó el ideal que, según expresión de Poinsot, debemos perseguir siempre, de estudiar las cosas en sí mismas, sin intermediarios extraños, que no pocas veces, ocultando el camino seguido para llegar á una verdad, hacen que ésta quede aislada y sin enlace lógico con las demás de la teoría á que pertenece. Pues bien, tratándose de propiedades descriptivas, la noción de magnitud es un intermediario que se introduce en la demostración y que, no estando en la hipótesis ni en la conclusión, deberá eliminarse para llegar al resultado.

Este es el defecto, que, como antes indicaba, achaca Chasles con razón á los que dan la preferencia á los métodos de la Geometría analítica para el estudio de las cuestiones geométricas, y bajo este aspecto es indudable la ventaja del método de Staudt sobre el de Steiner y Chasles; pues la razón anharmónica que constituye la base de la exposición de éstos, ¿qué otra cosa es sino un auxiliar estraño, como un andamio, cuando se trata del cuerpo de doctrina constituído por las verdades de carácter descriptivo? Y, á no dudarlo, es mucho más elegante construir el edificio sin andamios é ir derechamente al fin deseado sin extraños auxiliares.

Para determinar las relaciones de carácter descriptivo que enlazan dos series proyectivas, y que pueden servir como definición, le bastó, según parece, estudiar atentamente las redes de Möbius, en las que aparece construída sobre cada lado del triángulo fundamental una serie sucesiva é indefinida de series harmónicas, derivadas de los tres primeros puntos que los cuatro fundamentales determinan sobre dicho lado y de cada grupo de tres puntos que después se van obteniendo. Cada una de estas series harmónicas resulta allí construída mediante un cuadrilátero completo, una de cuyas diagonales es el lado considerado.

De aquí la idea natural de definir la serie harmónica de una manera puramente descriptiva, derivándola de la construcción del cuadrilátero completo. De la comparación de los varios cuadriláteros que pueden originarla se deduce, no sólo que tres puntos bastan para determinar la serie harmónica, y que ésta tiene el carácter proyectivo, sino también que sus dos pares de puntos conjugados desempeñan idéntico papel uno que otro. Y, conocida la serie harmónica, fácil es deducir de ella la definición geométrica y propiedades del haz harmónico de rectas ó de planos que corresponden con los de aquella serie.

Estudiadas así las formas harmónicas, con exclusión de toda noción de magnitud, de lo dicho antes respecto de las redes se desprende que dos series ó haces proyectivos son aquellos que se corresponden elemento á elemento, de tal modo que á toda forma harmónica contenida en uno de ellos, corresponde una forma también harmónica en la otra.

Esta propiedad es la que toma Staudt como definición de las formas proyectivas de primera categoría, y de ella deduce el teorema fundamental, base de toda la Geometría de la posición, á saber: que dos series ó dos haces proyectivos que tengan tres elementos confundidos con sus homólogos tienen también dobles todos los demás. Esta deducción es sencilla para todos los elementos que derivan de los tres primeros por la construcción de formas harmónicas sucesivas; pero, aunque Möbius demostró para las series que por este medio es posible construir todos los puntos de la red y aproximarse indefinidamente á cualquier otro de la recta, su demostración, como hemos dicho antes, es de carácter métrico, como fundada en el cálculo barycéntrico.

Por esto Staudt varió el plan que parecía más natural en su exposición, y para demostrar el citado teorema se limita á decir que si las dos formas proyectivas (series, por ejemplo) tienen un segmento cuyos puntos son todos dobles, lo serán también todos los demás, como harmónicamente separados de algunos de aquellos por los extremos de dicho segmento; y que, si no existe ningún segmento cuyos puntos sean todos dobles, será posible encontrar uno que no tenga ninguno doble, siéndolo sus extremos, en cuyo caso no puede serlo ningún otro de la recta; pues, de lo contrario, lo sería el harmónicamente separado de él por dichos extremos, el cual es interior al segmento en cuestión.

La demostración parece concluyente, y, sin embargo, atendiendo al carácter de fundamental que reviste dicho teorema, no es de extrañar que la severa crítica de estos tiempos haya querido depurarla por completo, dando lugar á una reñida controversia entre los partidarios y los adversarios de la escuela de Staudt, en la cual han tomado parte Klein, Lüroth, Darboux, Schur y otros no menos eminentes matemáticos, y que ha dado por resultado modificar dicha demostración, poniéndola, según parece, á cubierto de toda objeción seria (1).

---

(1) Quien desee enterarse de esta interesante controversia, encontrará los principales documentos á ella relativos en la importante revista *Mathematische Annalen* de Leipzig, tomos VI, VII, XVII y XVIII.

La objeción á la demostración de Staudt puede formularse brevemente diciendo que pudieran ser dobles todos los puntos de la serie derivados de una de las redes de Möbius, es decir, todos los que con tres fijos dan razones anharmónicas comensurables, sin serlo ninguno

Del citado teorema fundamental se deduce que tres pares de elementos homólogos definen la relación proyectiva entre las series y los haces, y que estas formas estarán en posición perspectiva si lo están tres pares de elementos homólogos, de donde se deducen las demás propiedades y las construcciones referentes á estas formas.

De la definición de las formas homográficas ó correlativas, tanto las planas ó radiadas como las más generales en el espacio, se deduce inmediatamente que las formas homólogas de primera categoría que contienen son proyectivas, puesto que en ellas no sólo se corresponden los elementos, sino también las formas harmónicas.

Con esta base no presenta dificultad la determinación de la relación proyectiva entre dos formas planas ó radiadas por cuatro pares de elementos homólogos, y entre dos cualesquiera del espacio por cinco pares convenientemente dispuestos, ni la deducción de todas las demás propiedades de estas formas proyectivas, ya se las considere aisladamente, ya en alguna posición relativa especial, dando lugar á la determinación del número máximo y disposición relativa de los elementos de una forma que pueden estar sobre sus homólogos de la otra.

Así se ve, por ejemplo, que mientras dos formas pla-

---

de los demás; en cuyo caso, ni habría en la recta ningún segmento cuyos puntos fuesen todos dobles, ni tampoco se podría encontrar en ella ningún segmento determinado que no contuviese puntos dobles en su interior; y, por tanto, no sería aplicable la demostración de Staudt.

La dificultad radica, pues, en la noción de continuidad, tan difícil de establecer, y que, donde quiera que interviene, suscita conflictos análogos. La manera de salvarla puede verse en la importante obra de Th. Reye, *Geometrie der Lage*, en cuya primera edición consignó la demostración de Staudt sin variación, pero en las sucesivas la modificó convenientemente: y también en la traducción italiana que C. Segre ha hecho de la *Geometrie der Lage* de Staudt, en la que, por respeto al texto original, ha suplido con notas su deficiencia en este particular.

nas homográficas no perspectivas pueden tener, á lo sumo, dobles los vértices y lados de un triángulo, dos formas análogas en el espacio pueden no tener más elementos dobles que los vértices, aristas y caras de un tetraedro; pero también pueden en ellas ser dobles todos los puntos de dos rectas que se cruzan, los planos que pasan por ellas y las rectas que las cortan.

V

Entre las diversas posiciones relativas que pueden ocupar dos formas proyectivas, acaso la más importante es aquella en que cada elemento pertenece á las dos formas y, ya se le considere como de una ú otra, le corresponde uno mismo como homólogo; en cuyo caso el conjunto de las dos formas así relacionadas constituye una forma en involución.

La teoría de la involución es una de las que más han contribuído al desarrollo de la Geometría pura, y la que, cuando adquiera todo el desarrollo de que es susceptible, parece ser la llamada á constituir la base de sus teorías más generales. Sus primeras nociones fueron ya conocidas por los geómetras griegos; después ha venido desenvolviéndose lentamente, apoyada siempre en sus propiedades de carácter métrico, hasta que la escuela de Staudt la ha incluído en la Geometría de la posición.

La involución es de una sola especie tratándose de series ó de haces; pero en las formas más complejas se divide en dos grupos distintos, según que las formas proyectivas, de cuya superposición resulta, sean homográficas ó correlativas. En el primer caso se obtiene la involución propiamente tal, mientras que las formas del segundo grupo suelen llamarse polares.

Una serie ó un haz en involución tendrá dos elementos dobles ó ninguno, según que un par de los que son conjugados esté ó no separado por otro par; quedando la involución definida por dos pares de elementos conjugados, á cada uno de los cuales puede substituir uno de los dobles.

Casos particulares importantes de los haces propiamente tales en involución son los haces rectangulares y los simétricos: los primeros sin rayos dobles, y los segundos con dos rayos dobles rectangulares, que son bisectores de los ángulos formados por cada par de rayos conjugados.

En cada recta propiamente tal, son dignas de mencionarse las series simétricas, que también están en involución y tienen como puntos dobles el centro de simetría y un punto impropio. En la Geometría euclidiana este segundo punto doble es común á todas las series simétricas; mientras que en la no euclidiana los diversos pares de puntos dobles de todas las series simétricas situadas sobre una misma recta forman lo que se llama la involución absoluta en la recta (1).

Las formas planas y también las radiadas en involución son todas homológicas.

Entre los casos particulares importantes de esta involución podemos citar las formas simétricas respecto de un punto ó centro, al cual corresponde como eje una recta impropiamente tal. Ésta es única en la Geometría euclidiana, mientras que en la no euclidiana es distinta para cada punto del plano, y se llama polar absoluta del punto correspondiente.

---

(1) Que estos pares de puntos dobles constituyen una involución, se deduce de un teorema de Schröter (*Journal de Crelle*, tomo LXXVII), que dice: «si en dos formas proyectivas superpuestas, que no están en »involución. se determina el elemento P_2 harmónicamente separado de »cada elemento P por sus homólogos P' y P_1, ya se considere el P per»teneciente á una ú otra de las dos formas, los diversos pares de ele»mentos P y P_2, así determinados, forman una involución». En efecto, aplicado este teorema á dos series iguales y acordes situadas sobre una recta, cuyos puntos homólogos conservan entre sí una distancia constante $P'P = PP_1$, se ve que el P es el centro de simetría de las series, cuyos puntos homólogos son P' y P_1, en las cuales el otro punto doble es el P_2.

Otras formas planas en involución son las simétricas respecto de una recta, en las cuales el centro es el punto común á todas las perpendiculares al eje, y suele dársele el nombre de polo absoluto de dicho eje.

Las formas en involución en el espacio ofrecen dos distintos géneros, según sean ó no homológicas.

Las primeras presentan dos casos particulares dignos de mención, relativos á la simetría respecto de un punto ó de un plano. En esta última, á cada plano de simetría corresponde un centro, que es su polo absoluto, punto común *á todas las perpendiculares á dicho plano*; y *en la* primera á todo centro de simetría corresponde el plano del infinito en la Geometría euclidiana, y planos distintos, que son sus planos polares absolutos, en la no euclidiana.

La involución no homológica contiene infinitas rectas conjugadas de sí mismas (directrices de la involución), pero, á diferencia de lo que en la homológica acontece, toda directriz contiene una serie en involución, y es á la vez arista de un haz de planos en involución; pudiendo la forma no tener ningún punto ni plano dobles, ó tener dos rectas especiales, que se cruzan, cuyos puntos son todos dobles, y también lo son todos los planos que pasan por cada una de ellas. Si existen estas rectas (que llamaremos centrales), todas las directrices las cortan, y toda recta que las corta es directriz; mientras que, si no existen rectas centrales, todas las directrices se cruzan de dos en dos.

Las formas no homológicas en involución, aparecen, según esto, divididas en dos especies, según tengan ó no rectas centrales: en el primer caso todas las series y los haces en involución tienen elementos dobles, mientras que en el segundo ninguna de estas involuciones las tiene.

La simetría respecto de un eje constituye una involución, uno de cuyos rayos centrales es este eje, y el otro es la recta común á todos los planos perpendiculares al mismo, y se llama su polar absoluta en la Geometría no euclidiana.

Las formas planas polares, ó sea las correlativas en involución, son las polares recíprocas de Poncelet, con la diferencia de que aparecen con más naturalidad y generalidad, y que pueden estudiarse sin el conocimiento de las líneas de segundo orden; constituyendo, por el contrario, el medio más sencillo de exponer toda la teoría y propiedades de estas curvas, así como del estudio de las radiaciones polares derivan sencillamente todas las propiedades de las superficies cónicas de segundo orden, de una manera directa é independiente de sus secciones planas.

Si en la forma plana polar hay algún punto situado sobre la recta que le corresponde, ó sea sobre su polar, el conjunto de todos los de esta especie constituye la curva de segundo orden directriz del sistema, y las polares correspondientes son las tangentes á la curva.

Otra recta del plano contiene una serie en involución cuyos puntos dobles son los de intersección con la curva, y proyectada esta serie desde el polo de la recta aparece un haz de rectas en involución, cuyos rayos dobles son tangentes á la curva, estando ésta en involución consigo misma respecto de dicha recta como eje, y su polo como centro.

Entre las radiaciones polares es digna de especial mención la radiación polar rectangular, por la circunstancia especial de que, comparada con otra radiación polar cualquiera del mismo vértice, permite determinar los ejes y planos principales de ésta, que son los de la superficie de segundo orden directriz de la misma.

Entre las formas planas polares en la Geometría euclidiana, es importantísima la rectangular del plano del infinito, y en la no euclidiana, la forma plana polar absoluta situada en cada plano propiamente tal, que podrá utilizarse para determinar el centro y ejes de toda curva de segundo orden situada en su plano, y para la clasificación completa de estas curvas.

Las formas polares en el espacio son de dos géneros distintos, según que todos los planos polares pasen por su polo respectivo ó que no se verifique esta condición. Las del primer género constituyen los sistemas que los franceses llaman focales y los alemanes sistemas nulos, formas que tan numerosas é importantes aplicaciones encuentran en la Estática y aun en toda la Mecánica.

Las formas polares propiamente tales son las polares recíprocas respecto de una superficie de segundo orden que estudió Poncelet; bien que, expuesta su teoría sin recurrir á dichas superficies, constituyen, por el contrario, la base más sencilla para deducir sintéticamente todas sus propiedades; las cuales son, en gran parte las mismas de las formas polares enunciadas bajo otra forma ó simples corolarios suyos. Estas formas polares se dividen en dos grupos distintos según admitan ó no rectas dobles, que corresponden á la división de las superficies en alabeadas y ordinarias; bien que en el segundo grupo se incluyen también los sistemas polares sin superficie directriz.

En la Geometría euclidiana la comparación de la forma polar propiamente tal con la polar rectangular del plano del infinito da origen á todas las propiedades relativas al centro, diámetros y planos diametrales y la ulterior clasificación de las superficies de segundo orden. En la Geometría no euclidiana se obtiene el mismo resultado por la comparación con la forma polar absoluta; aquella en que á cada punto, recta y plano propiamente tales, corresponden respectivamente su plano y recta polares absolutos y su polo absoluto. Este sistema polar absoluto tiene en la Geometría hiperbólica una superficie directriz de segundo orden, lugar de todos los puntos del infinito de todas las rectas posibles.

Las propiedades de las involuciones y de las formas polares absolutas conducen naturalmente al establecimiento de las relaciones métricas entre las formas proyectivas y al estudio de todas las propiedades métricas de la extensión; y constituyen, por tanto, la base de la Geometría de la medida; pero la organización completa de esta ciencia, así constituída, no está aún terminada, á pesar de los apreciables trabajos llevados á cabo sobre algunas de las teorías, precisamente las que parece debieran presentar mayores dificultades, tanto en la Geometría euclidiana como en las otras dos. Sin embargo, lo hecho hasta aquí paréceme suficiente para probar que el estudio de la Geometría, empezando por las propiedades descriptivas de la extensión, presenta ventajas sobre el sistema contrario; pues tiende á dar mayor generalidad y sencillez al conjunto de la exposición.

El concepto de proyectividad se aplica sin dificultad á las formas de segundo orden, y aun á las de tercero, lo mismo que á las de primero. Para abreviar, consideramos como series de puntos ó haces de planos de segundo orden el conjunto de todos los puntos de una curva ó de los planos tangentes á un cono de segundo orden; como haces planos, radiados ó alabeados de rectas, respectivamente el conjunto de todas las tangentes á una curva, de las generatrices de un cono ó de las generatrices de un mismo sistema de una superficie alabeada de segundo orden. A estas series y haces de segundo orden se aplican todos los teoremas y construcciones referentes á los de primero: su relación proyectiva queda definida por tres pares de elementos homólogos, y el mismo número determina también la relación proyectiva entre una forma de primero y otra de segundo orden, las cuales se llaman perspectivas, si, por ejemplo, el vértice de un haz de rectas es punto de una serie de segundo orden y los demás puntos están sobre los rayos homólogos de aquel; ó si la arista de un haz de planos es rayo director de un haz alabeado cuyos rayos estén sobre los planos correspondientes de aquel haz.

El estudio de las series y de los haces proyectivos superpuestos de segundo orden presenta sobre los de primero la ventaja de permitir la construcción sencilla de sus elementos dobles; y, como de las series y los haces de segundo, se pasa á los de primero y viceversa, aquellos permiten resolver todos los problemas de segundo orden, sin necesidad de acudir á las ecuaciones de segundo grado, ni al conocimiento previo de las propiedades métricas de la circunferencia.

Una serie de segundo orden en involución admite un centro, situado en línea recta con todos los pares de puntos conjugados; su polar es el eje de la involución, sobre el cual se proyecta ésta desde un punto cualquiera de la curva, según la involución de puntos conjugados respecto deesta curva. Estas dos involuciones tienen unos mismos puntos dobles y están determinadas por el solo conocimiento de la curva y el eje. Una cosa análoga sucede con las involuciones de tangentes á una curva y las de generatrices ó planos tangentes á un cono de segundo orden.

Pero un haz alabeado en involución admite infinitos pares de ejes, tales que todo plano que pasa por uno de ellos corta el haz según una serie en involución de segundo orden, cuyo eje es dicha recta, y su centro el punto en que corta al otro eje. De aquí se deduce que todo plano contiene una directriz del haz alabeado en involución, si pasa por uno de sus rayos; y, en el caso contrario, contiene un eje del mismo haz, que es el de la involución que determina en dicho plano. Y correlativamente, por todo punto del espacio pasa una directriz del haz alabeado, ó uno de sus ejes. Todos los haces de planos de primer orden perspectivos del haz alabeado cortan á uno cualquiera de sus ejes según una serie en involución, cuyos puntos conjugados lo son respecto de la superficie que contiene el haz alabeado, y sus puntos dobles están sobre los rayos dobles del haz.

Un haz alabeado en involución determina una involución no homológica en el espacio, en la cual se corresponden los pares de rayos conjugados y son directrices todas las del haz y además todos sus ejes; conteniendo la involución otros infinitos haces análogos al propuesto, todos los cuales determinan en cada una de las directrices unas mismas series y haces de planos en involución.

Uno de los haces alabeados en involución, contenidos en una involución no homológica, quedará completamente determinado cuando se fije una de sus rectas, sin más condición que la de no ser directriz del sistema, y dicho haz alabeado tiene como haz director el formado por las directrices de la involución que cortan á aquella primera recta arbitraria.

Si el haz alabeado en involución de que partimos, tiene rayos dobles, éstos son las rectas centrales de la involución no homológica que define; y, por tanto, son también rayos dobles de todos los haces en involución que contiene; pero si dicho haz no tiene rectas dobles, tampoco los tendrá ninguno de los otros, y la involución no tendrá puntos ni planos dobles. En uno y otro caso es fácil, según lo dicho poco antes, determinar la directriz de la involución contenida en cada plano y la que pasa por cada punto del espacio, que será única, á menos que el plano pase por una de las rectas centrales ó el punto esté en ella.

Dos involuciones cualesquiera, sean series ó haces, de primero ó de segundo orden, pueden relacionarse proyectivamente de infinitas maneras, si tienen las dos elementos dobles, ó si no los tiene ninguna. Fijando arbitrariamente un elemento que no sea doble, y el que deba corresponderle en la otra, y además los sentidos homólogos de las dos formas, queda determinada por completo la relación proyectiva entre las dos involuciones (1). De aquí que dos series rectilíneas en involución, sin puntos dobles, ó con ellos las dos, situadas sobre dos rectas distintas de un plano, admitan dos centros perspectivos harmónicamente separados por ellas, según la diversa manera como se correspondan los sentidos; y que dos haces de rectas en involución del mismo plano y distinto vértice, admitan dos ejes perspectivos distintos harmónicamente separados por sus vértices.

---

(1) Si A y A' son los dos elementos que se han tomado como homólogos en las dos involuciones, también habrán de serlo sus conjugados A_1 y A'_1 en cada una de ellas; y además á un elemento doble de la primera corresponderá uno de los dos dobles de la segunda, pudiendo distinguirse cuál de ellos deba tomarse, por la manera como se correspondan los sentidos de las dos formas.

Si ninguna de las involuciones tiene elementos dobles, se podrán encontrar en la primera dos elementos conjugados B y B_1 harmónicamente separados por los A y A_1; los cuales, si se trata de una serie en involución de segundo orden, se determinarán por la condición de estar sobre la recta BB_1 que une el centro de la involución con el polo de la recta AA_1; y su determinación en los demás casos podrá fácilmente reducirse al anterior. En la segunda involución también existirán dos elementos conjugados B' y B'_1, harmónicamente separados de los A' y A'_1; y las dos involuciones quedarán relacionadas proyectivamente por los elementos A, B y A_1, homólogos de los A', B' y A'_1, ó bien, de los A', B'_1 y A'_1, según cual de los dos sentidos $A'B'A'_1$ ó $A'B'_1A'_1$ deba corresponder con el sentido ABA_1.

VI

Fáltanos, para terminar esta rápida ojeada sobre la marcha generalizadora que ha seguido la Geometría pura, ocuparnos de los elementos imaginarios, cuyo estudio completo exigiría un grueso volumen; pero que no haremos más que bosquejar rápidamente en la parte más directamente relacionada con nuestro objeto.

Al estudiar mediante el Álgebra las cuestiones geométricas, no es raro encontrar soluciones imaginarias, que no tienen interpretación geométrica; pero que, combinadas entre sí, pueden dar lugar á proposiciones sobre elementos reales que corresponden á verdades geométricas; de modo que la demostración de algunas de éstas puede hacerse con el auxilio de expresiones imaginarias, que se eliminan en el curso del cálculo y no aparecen en el resultado.

Cuando se determinan, por ejemplo, analíticamente los puntos ó tangentes comunes á dos líneas, y sus expresiones analíticas son imaginarias, se dice que aquellas líneas tienen puntos ó tangentes imaginarios comunes; lo cual tiene un sentido claro en Geometría analítica, pero nada significa en la Geometría pura, puesto que dichas líneas aparecen sin puntos ó tangentes comunes. Pero el deseo de llevar á la Geometría la generalidad del Álgebra hizo que, desde los primeros ensayos de sistematización de la Geometría pura, se introdujesen en ella dichas denominaciones, sin ventaja ninguna para la ciencia; puesto que estaban enteramente desprovistas de sentido.

Pronto se observó, sin embargo, que hay en ocasiones elementos reales derivados de los imaginarios, como son las rectas que unen puntos imaginarios conjugados y los puntos de intersección de rectas imaginarias conjugadas, que tienen propiedades idénticas á las que corresponden á dichos elementos, cuando los que las determinan son reales, como sucede, por ejemplo, con las del eje radical y de los centros de semejanza de dos circunferencias.

Lo natural y verdaderamente científico, en tales casos, es demostrar dichas propiedades sin mencionar para nada los elementos imaginarios de que dependen; y así lo han hecho siempre los geómetras afectos á los antiguos métodos; pero, como en ocasiones esta demostración rigorosa es más difícil y complicada que la que corresponde al caso de realidad de los citados elementos, con el afán de avanzar y no quedar rezagados respecto de los analistas, dejando á un lado enojosos escrúpulos, admitieron algunos geómetros el principio que llamó Poncelet de la continuidad, en virtud del cual basta demostrar un teorema en una posición general de la figura á que se refiere, para considerarlo también cierto en otra cualquiera.

Así es como para extender, por ejemplo, á las secciones cónicas las propiedades de los centros de semejanza de dos circunferencias bastó á Poncelet, después de darles la forma proyectiva, demostrar que dos secciones cónicas situadas en un plano se pueden considerar como proyecciones de dos circunferencias de otro plano. Y, aun cuando esto no es cierto si las secciones cónicas tienen cuatro puntos reales comunes, no dejó de admitir como generales las propiedades deducidas por tal medio.

Al aplicar este principio de continuidad pueden presentarse dos casos, según que desaparezcan ó se hagan imaginarios algunos elementos que intervienen en la demostración, permaneciendo reales los contenidos en el enunciado, ó que también alguno de éstos pase á ser imaginario. En el primer caso, el principio de continuidad permite dar como cierto en su sentido propio el teorema, mientras que en el segundo no tiene éste ningún sentido, lo cual no impide que siga mirándolo como cierto Poncelet, puesto que, según dice, esta admisión á ningún resultado contradictorio ó absurdo puede conducir.

Pero tal forma de introducción de las imaginarias en la Geometría, que tanto contribuyó en manos de este eminente geómetra á generalizar algunas teorías, si puede admitirse como primer ensayo de método de investigación, en manera alguna responde á las justas exigencias de un método científico; por lo cual pronto se trató de estudiar más á fondo la cuestión y de analizar cuál es el concepto geométrico que corresponde á la noción de las imaginarias, que nada dice por sí misma. Después de varios ensayos y de perseverantes trabajos, se logró descubrir que á los teoremas en que intervienen las imaginarias corresponden otros equivalentes entre elementos reales perfectamente claros.

Así, decir que dos líneas de segundo orden cortan á una recta en unos mismos puntos, ó decir que determinan en ella una misma involución de puntos conjugados, son cosas idénticas, si esta involución tiene puntos dobles reales: mientras que, en el caso contrario, la segunda forma de enunciado subsiste, y la primera no tiene sentido geométrico ninguno, por más que, atendiendo á su expresión analítica, corten las dos curvas á la recta en unos mismos puntos, que son los imaginarios conjugados dobles de aquella involución.

Si entre las diferentes maneras como pueden determinarse á la vez dos puntos, rectas ó planos, escogemos una serie ó un haz en involución, que los tenga por elementos dobles, podremos considerar, en general, que una serie ó haz en involución define dos puntos ó rectas, no sólo en el caso en que sean reales dichos elementos dobles, sino también en el caso contrario, en el cual será esta manera de expresarnos puramente convencional, pero perfectamente clara.

Así, decir que una curva de segundo orden pasa por dos puntos imaginarios conjugados, definidos por una serie rectilínea en involución, es una manera convencional de expresar que los pares de puntos conjugados de esta involución son conjugados respecto de la curva.

Al concepto obscuro de imaginarias, se substituye así el de involución, perfectamente claro y definido, como antes al de punto del infinito se había substituído el de dirección, más claro y preciso: y así como en la Geometría euclidiana, al hablar de un punto del infinito, entendemos referirnos á una dirección, así al mencionar dos puntos imaginarios conjugados, entendemos hablar de una serie rectilínea en involución, que no tiene puntos dobles.

Pero esto no basta, puesto que por tal medio se designan á la par los dos elementos imaginarios conjugados dobles de la involución, y no permite, por tanto, aplicarles más que aquellos teoremas en que intervienen juntos de una manera simétrica. Para completar la determinación de un elemento imaginario y distinguirlo de su conjugado, basta agregar al concepto de la involución el del sentido, y, como en toda serie ó haz hay dos sentidos contrarios, una misma involución, con cada uno de estos sentidos, define los dos elementos imaginarios conjugados.

Para que se comprenda la manera cómo la reunión de estos dos conceptos, de involución y de sentido, desempeña el papel de elemento, análogo al de los reales, forzoso será entrar en algunos detalles sobre la manera cómo se les pueden aplicar las construcciones y propiedades relativas á los elementos reales, comenzando por indicar la manera más sencilla de representarlos.

Lo más natural es representar un elemento imaginario por una forma simple ordenada (1); puesto que ésta designa un sentido y á la par determina una involución sin elementos dobles, si en ella se consideran como conjugados el primero y tercero, y el segundo y cuarto.

Un punto imaginario de una recta real admite, según esto, infinitas representaciones, correspondientes á otros tantos grupos de dos pares de puntos conjugados de la misma involución (2), pudiendo elegir entre todas la que empiece en un punto arbitrario de la recta, y que además sea harmónica, ó bien proyectiva con una forma simple ordenada cualquiera, con lo cual ya quedará completamente determinada la representación.

En cada una de las infinitas curvas de segundo orden que determinan sobre una recta la misma involución de puntos conjugados respecto de la curva, hay una involución sin puntos dobles, cuyo eje es dicha recta, y que se obtiene proyectando aquella involución sobre la curva desde uno cualquiera de sus puntos: y á un sentido considerado en la recta corresponde uno determinado en la curva, independiente de la posición del centro, siempre que la recta y la curva no tengan ningún punto común. De aquí que el punto imaginario, además de las representaciones rectilíneas, admita otras infinitas de segundo orden, correspondientes á estas diferentes curvas.

El plano imaginario se representa por cuatro reales

---

(1) Llamo *forma simple* (*Wurf*, de los alemanes) á la que consta de cuatro elementos de una forma de primero ó de segundo orden, y será ordenada si están en la figura colocados en el mismo orden en que se los designa, es decir, que el primero y tercero estén separados por el segundo y cuarto.

(2) Aun con unos mismos pares de puntos AA', BB' hay cuatro representaciones de un punto imaginario, pues las $ABA'B'$, $BA'B'A$, $A'B'AB$ y $B'ABA'$ designan uno mismo, por indicar todas un mismo sentido; y las $AB'A'B$, $B'A'BA$, $A'BAB'$ y $BAB'A'$ son representaciones del punto conjugado.

que pasan por una misma recta, los cuales determinan á la vez el haz en involución y el sentido; pero puede también representarlo uno cualquiera de los infinitos haces en involución de planos tangentes á las diferentes superficies cónicas, que determinan desde aquella recta la indicada involución de planos conjugados.

La recta imaginaria puede ser de dos distintas especies, según que la forma simple que la representa sea plana ó alabeada. La de primera especie se define por cuatro rectas de un haz de primer orden; pero también puede representarla un haz en involución de tangentes á una curva de segundo orden situada en su plano ó de generatrices de un cono de segundo orden del mismo vértice, respecto de los cuales los pares de rectas conjugadas de aquella primera involución sean conjugados.

La recta imaginaria de segunda especie se representa por cuatro rectas de un haz alabeado de segundo orden, en el cual definen una involución sin rayos dobles, cuyos rayos conjugados son el primero y tercero, y el segundo y cuarto; pero tiene también otras infinitas representaciones sobre cada uno de los haces alabeados en involución contenidos en la involución no homológica que aquél determina; debiendo la recta en cuestión considerarse como una de las dos centrales de esta involución. Todos estos haces alabeados en involución determinan, en efecto, una misma recta imaginaria; puesto que, en cada una de las directrices del sistema, determinan todos una misma involución de puntos y un mismo sentido, es decir, que la cortan en un mismo punto imaginario; y, asimismo, determinan todos ellos con cada directriz un mismo plano imaginario.

El punto y el plano imaginarios y la recta imaginaria de primera especie admiten todos, según hemos visto, representaciones de primer orden, que son las empleadas de ordinario para designarlos, prefiriendo, por lo general, las harmónicas. Pero la recta imaginaria de segunda especie no tiene ningún punto real, ni pasa por ella ningún plano real; y no admite, por tanto, ninguna representación de primer orden, sino que todas son haces alabeados de segundo orden; pudiendo tomar arbitrariamente la primera recta de una de ellas, sin más condición que la de no ser directriz de la involución no homológica, es decir, de no cortar á la recta representada.

Todas las construcciones con elementos reales se reducen, en último extremo, á determinar una recta por dos puntos, un plano por tres y todos los análogos; las cuales se aplican á los elementos imaginarios, sin más que tener presentes las propiedades más sencillas de la involución. Así, para no citar más que un ejemplo, se obtiene una representación de la recta determinada por dos puntos imaginarios, uniendo por rectas los puntos homólogos de dos representaciones de aquellos puntos, que sean proyectivas y, á ser posible, perspectivas entre sí. Esto último ocurre cuando las rectas reales que contienen dichos puntos se cortan y, en tal caso, la recta determinada es imaginaria de primera especie; pero será de segunda cuando aquellas rectas se crucen, y real si se confunden en una.

Basta lo dicho, sin más antecedentes, para extender á los elementos imaginarios la mayor parte de las propiedades (con sus demostraciones) expuestas para los elementos reales: podremos efectuar proyecciones desde centros ó ejes imaginarios y cortar un haz ó una radiación por rectas ó planos imaginarios; y podrá ocurrir que, en estas proyecciones y secciones, á elementos reales de una forma correspondan otros imaginarios en la segunda; siendo natural llamar perspectivas dos secciones planas de una misma radiación, aun cuando su centro sea imaginario, y proyectivas, las formas que pueden colocarse en posición perspectiva entre sí ó con otras proyectivas.

No es, sin embargo, fácil formarse idea clara del conjunto de todos los elementos imaginarios pertenecientes á una misma forma, aunque ésta sea de primera categoría, ni de su disposición relativa, como nos la formamos, por ejemplo, de los puntos reales de una serie ó de las rectas reales de un haz; los cuales aparecen dispuestos como en una cadena continua, de tal modo que se pueden recorrer todos sucesivamente hasta volver al punto de partida, ya sea en uno ú otro de los dos sentidos; sin encontrar en esta cadena ninguno de los imaginarios, cada uno de los cuales sólo corresponde á un sentido y no al contrario.

Para ver como se distribuyen los elementos imaginarios empecemos por fijarnos en la serie de puntos ó en el haz de planos cuya base es una recta imaginaria de segunda especie. Ya hemos dicho que ésta viene definida por una involución no homológica; que corta á todas las directrices de la misma, mientras que se cruza con toda otra recta real; y que determina con cada una de las primeras un punto de la serie y un plano del haz considerados, es decir, una serie y un haz en involución con sentidos determinados. De una representación de uno de estos puntos se deducen las que corresponden á todos los planos del haz (excepto el que pasa por ella) proyectándola desde todas las demás directrices del sistema. Es, pues, fácil determinar el plano del haz que pasa por cada punto real del espacio, y el punto de la serie situado en cada plano real; puesto que la involución no homológica tiene una sola directriz que pasa por aquel punto y otra, también única, situada en este plano.

Según esto, el número de elementos de la serie ó del haz considerado es igual al de las directrices de la involución, cuyo conjunto forma un complexo de rectas de primer orden; y las diferentes maneras como pueden agruparse aquellos elementos corresponden á los modos de agrupación de estas directrices. Todas las que cortan á una misma recta real son las generatrices de un sistema de un hiperboloide y corresponden á elementos de la serie y del haz considerados, que están en posición perspectiva con el haz de planos reales cuya arista es dicha recta, ó con la serie de sus puntos reales; presentando, por tanto, los mismos caracteres de continuidad que las cadenas de elementos reales. Así, fijándonos en el haz de planos de arista imaginaria de segunda especie, todos los planos del haz, cuyas rectas reales (directrices de la involución) pertenezcan á un mismo hiperboloide, forman una cadena que es perspectiva con las cadenas de los puntos reales situadas sobre cada una de las generatrices del otro sistema del mismo hiperboloide; de donde deducimos que tres planos cualesquiera del haz determinan una cadena y que otro del mismo haz pertenece á esta cadena, si su recta real está en el hiperboloide definido por las rectas reales de aquellos tres planos; y, en el caso contrario, dicho plano estará, respecto de la cadena, en uno ú otro sentido, según que su recta real esté de uno ú otro lado de dicho hiperboloide. Exactamente lo mismo se puede repetir para las cadenas formadas por puntos de la recta imaginaria de segunda especie.

Si suponemos cortado por un plano real cualquiera el haz de planos antes considerado, obtendremos un haz de rectas cuyo vértice imaginario está situado en la directriz de la involución no homológica contenida en el plano secante, punto perfectamente determinado por esta involución. Por cada uno de los demás puntos reales del plano pasa otra directriz del sistema y, por tanto, uno de los rayos imaginarios del haz de rectas sección; de manera que este haz se compone de aquella recta real y de tantas imaginarias como son los puntos reales del plano no situados en ella. La representación de todas estas rectas se obtiene proyectando desde cada punto real del plano, la representación del vértice del haz.

A toda cadena del haz de planos corresponde una cadena del haz de rectas sección; y, puesto que las rectas reales de aquélla están en un hiperboloide, los puntos reales de ésta estarán sobre una recta ó sobre una curva de segundo orden, según que el hiperboloide sea tangente ó secante respecto del plano del haz, es decir, según que la cadena considerada en este haz contenga ó no su recta real. Toda recta real del plano, que no sea esta última, determina una cadena del primer género, y toda sección cónica que pase por el vértice y por su conjugado determina una cadena del segundo género (1). Esto permite determinar, operando exclusivamente con elementos reales, los rayos del haz de rectas que pertenecen á la cadena definida por tres cualesquiera y los elementos comunes á dos cadenas.

Correlativamente con lo anterior el haz de rectas de vértice real y plano imaginario, se puede obtener proyectando desde un punto real una serie de puntos situada sobre una recta imaginaria de segunda especie. Y cortando este haz por un plano real que no pase por su vértice, se obtiene la serie de puntos de una recta imaginaria de primera especie, cuya representación real es una forma plana correlativa con la empleada para estudiar el haz de rectas de plano real y vértice imaginario.

El examen de los demás casos que pueden presentar las series y los haces, se reduce fácilmente al de los ante-

(1) Que toda cadena de segundo orden debe contener el vértice y su conjugado, se deduce de que los puntos conjugados de la involución que define el vértice deben ser conjugados respecto de todos los hiperboloides formados por directrices de la involución no homológica que define la arista del haz de sus planos.

riores. Así, por ejemplo, para estudiar la serie situada sobre una recta real, lo más sencillo es proyectarla desde un punto imaginario cualquiera, situado en un plano real que pase por ella; en cuyo caso, á cada punto real de este plano no situado sobre la recta dada, ni sobre la real que contiene el centro de proyección, corresponde una recta del haz proyectante y un punto imaginario de la recta dada.

Cuando se consideran todos los puntos ó rayos, así reales como imaginarios, de una serie ó de un haz, no tiene sentido el hablar de segmentos ó de ángulos completos, ni tampoco decir que dos elementos están ó no separados por otros dos; pero estas denominaciones son perfectamente claras cuando nos referimos sólo á los elementos de una cadena contenida en la serie ó en el haz. Así, en un haz de rectas de vértice imaginario y plano real, dos rayos imaginarios correspondientes á dos puntos reales cualesquiera del plano limitan infinitos pares de ángulos planos completos, pertenecientes uno á cada una de las infinitas cadenas que contienen dichos rayos; cadenas que están representadas por las líneas de segundo orden que pasan por aquellos puntos reales y también por el vértice del haz y por su conjugado; las cuales puede decirse que forman un haz de cadenas.

De este estudio se deduce que si dos series ó haces se relacionan de manera que en ellos se correspondan los elementos y las cadenas, también se corresponderán las formas harmónicas; pero puede muy bien no ocurrir lo mismo con los sentidos, es decir, que el sentido en que un elemento esté respecto de otros tres (no pertenecientes los cuatro á la misma cadena), puede ser distinto del que corresponde á los elementos homólogos de la otra forma.

Para que dos formas sean proyectivas, basta que en ellas se correspondan los elementos y también los sentidos. Esta definición lo mismo se aplica á las formas homográficas y correlativas planas, radiadas ó del espacio, que á las series y los haces, é incluye la condición de que á toda cadena debe corresponder una cadena, y á toda forma harmónica otra también harmónica. De ella se deduce que bastan tres, cuatro ó cinco pares de elementos homólogos (1) para definir la relación proyectiva entre dos formas proyectivas de primera, segunda ó tercera categoría respectivamente, como sucedía con las formas compuestas de elementos reales. Pero es digno de notarse que, así como las series y haces reales, para ser proyectivos, basta que en ellas se correspondan los elementos y las formas harmónicas, y en las formas reales de segunda y de tercera categoría basta la primera condición, no se verifica otro tanto en este caso general; pues si suponemos, por ejemplo, que en una serie corresponde cada punto con su conjugado, se cumplirán las condiciones dichas sin que puedan considerarse proyectivas las series, puesto que tienen dobles todos sus puntos reales, y ninguno de los imaginarios; siendo fácil citar ejemplos análogos para las formas más complicadas.

La relación proyectiva, bajo este aspecto tan general, no se presenta en verdad tan sencilla como la establecida para las formas reales, y para ver con claridad cómo se corresponden los elementos homólogos y aprender á construirlos, es muy interesante estudiar la relación que enlaza los elementos reales que determinan elementos homólogos en dos formas proyectivas cualesquiera.

Si la relación es tal que á los elementos reales corresponden otros también reales, se llama real-proyectiva, y en ella á un elemento imaginario representado por una for-

(1) Los cuatro elementos de una forma de segunda categoría han de ser tales que de tres en tres no pertenezcan á una de primera, y los cinco de una del espacio han de ser puntos ó planos que, tomados de cuatro en cuatro, no pertenezcan á una misma forma plana ni radiada.

ma simple corresponde otro representado por la forma simple homóloga; lo cual no presenta dificultad tratándose de series de puntos situados sobre rectas reales, haces de rectas de vértice y plano reales y haces de planos de arista real.

Una cosa análoga puede también aplicarse á las series ó haces de planos proyectivos, cuyas bases sean dos rectas imaginarias de segunda especie: puesto que dichas formas pueden considerarse como homólogas en dos formas reales-proyectivas en el espacio, convenientemente determinadas (1); en las cuales aparece evidente la correspondencia entre las cadenas, las formas harmónicas, los sentidos, los ángulos completos y los segmentos.

Dos haces de rectas proyectivos de vértices imaginarios y planos reales también se pueden considerar como homólogos en dos formas planas reales-proyectivas y, por tanto, sus rayos homólogos correspondientes están determinados por dos puntos reales homólogos de estas formas planas, siempre que correspondan los rayos reales de dichos haces. Pero, si esta circunstancia no se realiza, no son proyectivas las formas planas en que se consideran correspondientes los puntos reales de cada par de rayos homólogos de los dos haces; puesto que en cada una se encuen-

---

(1) Sean, en efecto, a, b y c, las rectas reales de tres planos de uno de los haces, ó de tres puntos de la serie, a_1, b_1 y c_1 las de sus homólogos en la otra forma; $mpnq$ una representación de la arista del primer haz (ó de la recta que lleva la serie), que corta á las a, b y c, y $m_1p_1n_1q_1$ una representación, proyectiva con ella, de la arista del segundo haz (ó de la recta en que está la segunda serie) que corte á las a_1, b_1 y c_1. Las formas homográficas en el espacio definidas por los cinco puntos ó planos am, ap, bm, bp y cn y sus homólogos a_1m_1, a_1p_1, b_1m_1, b_1p_1 y c_1n_1, contienen como homólogos los dos haces ó series proyectivas de que se trata. Si el haz hubiese de ser proyectivo con la serie, las formas del espacio serían correlativas definidas por aquellos cinco puntos y los cinco planos homólogos.

tra un punto especial correspondiente con la recta real que contiene el vértice del otro haz. En este caso los puntos de un plano situados en línea recta con uno de estos puntos especiales, corresponden con otros que cumplen igual condición en el otro plano; mientras que los situados sobre otra recta cualquiera del primer plano corresponden con puntos de una sección cónica representante de una cadena que contiene el punto especial del segundo plano; y los de toda otra cadena de segundo orden (1) que no contenga este punto especial corresponde con otra de la misma especie; y, en todos los casos, las series de puntos reales representantes de dos cadenas homólogas son reales-proyectivas entre sí. Estas y otras muchas relaciones notables, que pueden utilizarse para la construcción de los rayos homólogos de los dos haces de rectas proyectivos, se deducen inmediatamente, si se consideran estos haces como secciones de dos haces de planos proyectivos cuyas aristas sean imaginarias de segunda especie (2). De ellas se

(1) Es decir, representada por una sección cónica.

(2) Para determinar estos haces de planos, si las rectas reales a y a_1, que contienen los vértices de los dos haces de rectas considerados, son homólogas, y designamos por B y B_1, C y C_1 los puntos reales de otros dos pares de rayos homólogos, trácense por B y C dos rectas b y c que se crucen entre sí y con la a, y por B_1 y C_1 otras dos b_1 y c_1 que se crucen entre sí y con la a_1; y además las rectas BC y B_1C_1 que designaremos por m y m_1. y las p, n y q que, cortando á las a, b y c, determinan con m en la recta a la representación $mpnq$ del vértice del primer haz; y las p_1, n_1 y q_1 que con la m_1 cumplan igual condición respecto del segundo haz, siendo proyectivas las dos representaciones. Si, hecho esto, relacionamos proyectivamente las dos formas del espacio, como se hizo en la nota de la página anterior, los planos am y a_1m_1 de los dos haces serán homólogos, de donde se deduce lo dicho en el texto.

Si á las rectas reales a y b_1, que contienen los vértices de los dos haces, corresponden respectivamente rectas que tienen los puntos reales A_1 y B, y además los C y C_1 corresponden á otros dos rayos homólogos, tracemos también las rectas b y c que pasen una por el punto B y otra por el C y se crucen entre sí y con la a, y otras dos a_1 y c_1 que, pasando deduce, entre otras varias consecuencias importantes, que dos haces proyectivos de rectas del mismo vértice, situados en un plano, admiten siempre uno ó dos rayos dobles.

Al caso que acabamos de indicar ó á su correlativo pueden reducirse, en último extremo, todos los demás en que se trate de estudiar la relación proyectiva entre dos series ó haces cualesquiera, y en todos ellos se encontrará, no sólo la correspondencia entre las cadenas, sino también la relación real proyectiva entre los elementos reales que determinan los homólogos pertenecientes á dos cadenas homólogas.

La involución y las formas polares obtienen por este medio inmensa latitud, pudiendo en ellas á uno ó varios

---

por A_1 y C_1 se crucen entre sí y con la b_1; y designemos por m y m_1 las rectas BC y A_1C_1, y por p, n y q, otras tres que corten á las a, b y c, y que con m determinen en a una representación del vértice del primer haz, y las p_1, n_1 y q_1 que corten á a_1, b_1 y c_1 y que con m_1 determinen en b_1 la representación del vértice del segundo haz proyectiva con aquella; relacionando proyectivamente las formas del espacio como en la nota de la página 62, en ellas no serán homólogos los planos am y $b_1\, m_1$ de los dos haces, y, por tanto, no serán proyectivas entre sí las formas planas en ellos contenidas; pero á las cadenas homólogas de los dos haces de planos, representadas por haces alabeados de segundo orden homólogos, corresponden cadenas homólogas de los dos haces de rectas, las cuales vienen representadas por las secciones de dichos haces alabeados; secciones que serán series de primero ó de segundo orden según que los planos de los haces de rectas estudiados contengan ó no alguno de los rayos de aquellos haces alabeados. Si el primer haz contiene las rectas a y b, su homólogo contiene las a_1 y b_1, y á ellos corresponden dos serie rectilíneas, una que contiene el punto B y otra el A_1; si el primer haz contiene la recta a y no la b, el segundo contendrá la a_1 y no la b_1, y les corresponderán respectivamente una serie rectilínea que no contiene el punto B y otra de segundo orden que contiene el A_1; y, por último, á un haz alabeado que no contiene la a ni la b, y su homólogo que no contiene la a_1 ni la b_1, corresponden dos cadenas homólogas de segundo orden que no pasan por los puntos B ni A_1. Pero, en todos los casos, las series que representan cadenas homólogas son proyectivas, como secciones de haces alabeados proyectivos entre sí.

elementos reales corresponder otros imaginarios; y todos los teoremas pueden enunciarse sin restricciones de ningún género; pero esta generalidad no menoscaba en manera alguna el rigor científico, como sucedía con la aplicación del principio de continuidad.

A las curvas y superficies de segundo orden reales se añaden, no solo la elipse y elipsoide imaginarios derivados de las formas polares reales, sino otras deducidas de estas formas polares más generales; como sería, por ejemplo, una curva de segundo orden determinada por cuatro puntos reales y la tangente imaginaria en uno de ellos, la cual no puede tener ningún otro punto real. Y cualquiera que sea la superficie de segundo orden considerada, admite, en este supuesto, doble generación rectilínea.

A estas líneas y superficies de segundo orden se aplica también, no solo la definición de sistemas simples (1), sino también la relación proyectiva que existe entre las secciones producidas en ellos por rectas que pasan por un punto común y el haz de rectas ó de planos tangentes en este punto, las involuciones que determinan en las rectas cualesquiera y, en general, todas sus propiedades. Y también se pueden establecer relaciones proyectivas entre dos de estos sistemas simples ó entre uno de ellos y una forma de primero ó de segundo orden, generalizando así el concepto de proyectividad, para el cual el sistema simple de líneas ó superficies desempeña un papel análogo al de los haces, puesto que todas las líneas que contiene pasan por cuatro puntos y todas las superficies del haz pasan por una misma línea de cuarto orden; así como sus correlati-

---

(1) Sistema simple de líneas ó superficies de segundo orden es el conjunto de todas las que cumplen la condición de que todo par de puntos conjugados respecto de dos de ellas, lo es también respecto de todas las demás.

vas podrían considerarse como series de líneas ó de superficies, puesto que contienen todas las líneas tangentes á cuatro rectas (1) ó todas las superficies inscritas en una misma desarrollable de cuarto orden.

Y, á pesar de esta gran generalidad, los teoremas en cuyos enunciados intervienen elementos imaginarios tienen un sentido perfectamente claro y definido, de tal modo, que es posible transformarlos en otros relativos únicamente á elementos reales; transformación fácil en algún caso, pero que en la mayor parte da lugar á enunciados de extraordinaria complicación, muy adecuada para poner de manifiesto las ventajas de la introducción de las denominaciones abreviadas de punto, recta y plano imaginarios, para designar los conceptos más complejos que resumen.

---

(1) Estas líneas tienen comunes todos los pares de rectas conjugadas que lo son respecto de dos líneas del sistema, como las superficies tienen comunes los pares de planos conjugados que lo son respecto de dos de ellas.

VII

Hora es de poner fin á mi trabajo, que bastante he abusado ya de vuestra nunca desmentida indulgencia; y termino sin haber acertado á bosquejar, cual convenía, la marcha que en el presente siglo ha seguido la Geometría pura para emanciparse de la tutela de la analítica, á que vivió sometida desde los comienzos de esta importante rama de las Matemáticas.

He tratado de exponeros cómo tras de la teoría de los signos ha venido la de los elementos del infinito, indispensable para sacar del estudio de las formas perspectivas todo el partido á que se prestan. A estas siguió la teoría general de la proyectividad en su doble aspecto de homografía y correlación; primero fundada en consideraciones puramente analíticas, después relegando esta base analítica al establecimiento de la relación entre las formas más sencillas, las series y los haces; y, por último, desterrándola por completo y, con ella, toda noción de magnitud, mediante el auxilio de la forma harmónica derivada del cuadrilátero completo. Con este motivo hemos visto aparecer la Geometría de la posición que, entre otras, presenta la ventaja de constituir sus teorías con entera independencia del postulado de Euclides; las cuales son aplicables, por tanto, á las Geometrías hiperbólica y elíptica lo mismo que á la euclidiana. Derivando de la proyectividad aparece la involución que, en cuanto se aplica á los elementos impropios, constituye la base de la Geometría de la medida; y, aplicada á las formas correlativas, da los sistemas polares que constituyen la teoría natural y sencilla de las líneas y superficies de segundo orden, y, por último, la misma involución contiene en sí la teoría de los elementos imaginarios, que parece formar la coronación y cubierta del edificio científico, puesto que se apoya en todas las anteriores, sirviéndoles de lazo de unión que las completa, simplifica y generaliza.

No se crea, sin embargo, que con esto ha terminado su misión la Geometría pura; pues el que mirado aisladamente parece edificio completo, es de esperar que en porvenir no lejano se convierta en simple basamento de otro mucho más vasto. A la involución de segundo orden, cuyos elementos conjugados están agrupados á pares, sigue de cerca la de orden superior, en la que cada grupo de elementos conjugados consta de un número cualquiera de éstos, constante para una misma involución, pero variable de una á otra.

Y como de aquella deriva la teoría de líneas y superficies de segundo orden, en ésta se apoya la de las líneas y superficies de orden superior; pues así como un sistema simple de líneas de segundo orden determina una involución en cada recta de su plano, que no pasa por ningún punto común; así todo sistema simple de líneas ó superficies de un orden cualquiera determina sobre cada recta una involución del mismo orden. Esta observación la habían hecho hace tiempo algunos geómetras, definiendo la involución por las relaciones métricas entre los segmentos que cada grupo de puntos determina, pero su introducción en el campo de la Geometría de la posición, es de época reciente. De modo que si la teoría puramente geométrica de las líneas y superficies de segundo orden está completa, y el estudio de las de tercero y cuarto orden se encuentra muy adelantado, la teoría general de las de un orden cualquiera está todavía en período de formación, á pesar de los importantes trabajos que á ellas han dedicado eminentes geómetras (1); y no es de estrañar que así suceda atendida la dificultad del asunto, cuya exposición analítica presenta aún tantas nebulosidades.

Pero la experiencia de lo pasado nos permite abrigar bien fundada esperanza de que pronto se encuentren á igual altura las dos teorías, analítica y geométrica, de las líneas y superficies, como ha sucedido con tantas otras á las cuales parecía adaptarse mejor una que otra de las dos formas de exposición de las verdades geométricas. Y no puede ser de otro modo, puesto que la mayor facilidad en estudiar una cuestión determinada por un sistema que por el otro, mas que de la naturaleza misma del asunto ó del método, depende del grado de adelanto del capítulo especial de cada una de las dos Geometrías que á su estudio debe aplicarse. Para quien se empeñase en no usar más sistema de coordenadas que el cartesiano, seguramente le parecerían poco adaptables los procedimientos de la Geometría analítica al estudio de cuanto se refiere á los elementos del infinito y á la correlación, que tan fácil encuentra el que está habituado al empleo de las coordenadas trilineales y tangenciales.

No debemos, pues, limitarnos exclusivamente á uno de los dos métodos de investigación, sino aplicarlos simultáneamente en todas las cuestiones: no sólo por la mayor facilidad que proporciona uno de ellos en cada caso, sino también porque esto servirá de estímulo para ahondar más en el otro hasta conseguir en él igual simplificación; siendo este segundo resultado de mayor estima aún que el primero, porque más importante que obtener una nueva verdad es, á no dudarlo, adquirir un nuevo instru-

---

(1) Es digna de especial mención la memoria *Grunzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraischen ebenen Curven*, de Kötter (Berlin, 1888), premiada y publicada por la Real Academia de Ciencias de Berlin.

mento para investigarlas ó perfeccionar el que ya poseemos, para que sea fuente de otras muchas.

Pero, si de este terreno puramente científico descendemos al de las aplicaciones, saltan á la vista las ventajas que la Geometría pura presenta sobre la analítica; ventajas que han hecho que en todo tiempo, y cada vez con más decidido empeño, la prefiriesen los hombres prácticos en la resolución de todos los problemas que tienen relación directa ó indirecta con la Geometría.

De la Geometría pura se vale el artista en todo lo referente á la Perspectiva lineal que utiliza el pintor, y á la Perspectiva relieve indispensable al escenógrafo, y de que tanto partido sacan el escultor en la composición de los bajo-relieves y el arquitecto para estudiar la conveniente disposición de las diferentes partes de una construcción, destinadas á producir determinado efecto. A ella acude exclusivamente el constructor en todos los problemas referentes á la Estereotomia; á ella pertenecen, y no siempre á sus teorías más elementales, muchas de las cuestiones de la Cristalografía, de la Optica geométrica, de la Cartografía y de tantas y tantas otras ciencias que sería prolijo enumerar.

Y no sólo en estas cuestiones de pura Geometría que constituyen el terreno propio de esta ciencia, sino también en otras muchas de carácter mixto, y aun en algunas que parecen más propias del Cálculo que de la Geometría, se aplica ésta con ventaja en muchas ocasiones. Porque las construcciones gráficas que proporciona la Geometría pura, no sólo son más sencillas é intuitivas que los cálculos que pueden llevar al mismo resultado, sino que tienen sobre ellos la ventaja de hacer más difíciles las equivocaciones y más fáciles de descubrir cuando ocurriesen. Y si bien los resultados del cálculo pueden alcanzar mayor grado de aproximación que la proporcionada por las construcciones gráficas, ésta es más que suficiente en casi todas las aplicaciones de carácter práctico, aparte de que aquella mayor aproximación es más ilusoria que real, puesto que, salvo rarísimos casos, la falta de precisión del resultado, más que del procedimiento aritmético ó geométrico que se emplea para deducirlo, procede de la que en sí mismos entrañan los datos de observacion ó experiencia que les han servido de punto de partida.

Por esto la representación y el cálculo gráfico, que tienen su base en las doctrinas de la Geometría pura, encuentran cada vez más partidarios y ensanchan el campo de sus aplicaciones; hasta el extremo de que apenas se encuentra hoy una ciencia de observación que no los utilice, no sólo para poner de manifiesto los resultados de sus observaciones, sino también para combinarlos y deducir de ellos las consecuencias á que naturalmente conducen.

Dígalo si no, para no citar más que un ejemplo, la *Estática gráfica* con su aplicación al cálculo de la resistencia de materiales, ciencia enteramente nueva, creada por Culman, como aplicación de la Geometría de la posición de Staudt, pocos años después de llegar esta obra á su conocimiento; ciencia que, sustituyendo por trazados gráficos sencillos los prolijos cálculos de resistencia empleados hasta hace pocos años, prepara una completa reforma en la enseñanza de las escuelas técnicas, dando en ellas la preferencia á los estudios de Geometría pura sobre los de cálculo, que dominaban casi por completo.

Y es que en realidad los polígonos de fuerzas y los funiculares que para Culman y sus sucesores resumen casi toda la Estática, junto con las líneas de presiones, tan fáciles de construir, ponen de manifiesto con extraorria claridad la manera de actuar de las diferentes partes de una construcción, y enseña á determinar la forma y dimensiones que se les debe asignar.

Poco podía pensar Staudt, cuando componía su obra, guiado únicamente por el deseo de dar á la Geometría más amplia y sólida base, en esta aplicación que tan pronto debía hacerse de las teorías en ella consignadas: lo cual es ciertamente un ejemplo muy apropiado para estimular al estudio de las cuestiones puramente científicas, y darles el más amplio desarrollo de que son susceptibles, prescindiendo de que puedan ó no encontrar aplicaciones prácticas; y también para contestar á aquellos que no dan importancia á los trabajos científicos de carácter elevado si no ven enseguida sus aplicaciones, y aun con preferencia, las que contribuyen á aumentar nuestras comodidades y fomentar este refinamiento de la vida material que, para no pocos, da la medida exacta del grado de civilización de un pueblo. ¡Como si el espíritu no distase infinitamente de la materia, y en igual proporción no aventajasen los adelantos intelectuales, y más aún los morales, á los puramente materiales!

DISCURSO

DEL

EXCMO. SR. D. FRANCISCO DE PAULA ARRILLAGA

Señores.

Para dicha vuestra y por fortuna mía, el discurso que acabáis de oir encierra una exposición acabada de las teorías fundamentales de la materia sobre que versa; y por mano tan maestra delineada, que me excusa de la parte, para mí ardua y dificilísima en otro caso, del encargo de llevar la voz y representación de la Real Academia en esta solemnidad.

De la tarea que por designación de nuestro ilustre Presidente hoy me incumbe, queda tan solo á mi cuidado la parte honrosa y placentera: la de saludar y dar la bienvenida, antes que los demás, al nuevo Académico, y acompañarle por breve rato á través de campos vastísimos de la ciencia, en los que, sin guía tan experto como él, no sabría yo aventurarme con pie seguro, por haberlos recorrido muy rara vez, siempre por deberes inexcusables, y nunca para cosechar frutos, y menos lauros, como el Sr. Torroja, sino á lo más para mostrar cómo se cultivan; y aun esto muy desmañada y someramente.

Tenéis hoy delante de vosotros al sabio Arquitecto y Doctor, á quien desde mucho tiempo antes de su elección deseabais con razón llamar á vuestro lado, por sus singulares merecimientos en la disciplina Matemática, que con verdadera vocación profesa; y á sentarse va entre vosotros el autor de libros aplaudidísimos, sin precedentes en nuestro idioma: el profesor ilustre que, renunciando á los triunfos de carrera de tantos atractivos como la Arquitectura, en que se suman á las satisfacciones supremas de las Ciencias físicas y exactas, las más delicadas y personales de las Bellas Artes, y no dejándose tampoco seducir en su cargo de astrónomo del Observatorio de Madrid por la arrobadora contemplación de los astros, fuente de altísimas concepciones y de inefables deleites, presuroso corrió á satisfacer anhelos más desinteresados, aspiraciones quizá más íntimas, ganando en buena lid una cátedra de Geometría y convirtiéndose en austero maestro, poseído de amor tan entrañable á la juventud estudiosa, hacia la que su corazón se inclina de modo irresistible, que ni este su primer trabajo académico se decide á dejar de dedicarle.

¿Son estos efectos hijos de un carácter moral, que rebosa con las ansias de prodigar el bien predicando la verdad, y de ejercer en conciencia uno de los más nobles oficios humanos, ó es que nuestro nuevo compañero tiene por de belleza más amable y exquisita las verdades y las indagaciones de la Geometría que la aplicación de las Ciencias y de la Estética al Arte de construir, y que la observación y estudio del firmamento con todas sus grandezas y con todos sus sublimes resplandores?

Ambos juicios serían, á mi entender, por igual exactos.

Cuando en una ciencia se llega á ciertas alturas, cuando con pleno dominio de las verdades adquiridas por todos los demás, se asienta firme la planta sobre las cimas, y por apropiación de la mente se tiene por conquistado todo lo que por debajo y por detrás queda recorrido, algo se debe sentir—yo no tengo de tales sentimientos experiencia—que impulse á subir más y más, sin dar valor á otros goces que no sean los de lanzarse á regiones superiores. Y debe al propio tiempo dejarse arrastrar el ánimo por el afán de comunicar lo pensado con aquellos que un día pueden abarcar nuevos horizontes, escalando otras cumbres y colocándose más cerca de la verdad absoluta, ó del límite que al hombre le está providencialmente asignado.

De todas las particulares materias que la Matemática comprende, ninguna como la Geometría para semejantes satisfacciones, y para tan acendrados propósitos. La aridez del puro cálculo necesita refrescarse á menudo con el encanto de sus portentosas aplicaciones, especialmente á la Mecánica y á la Física: el puro análisis de la cantidad deja á la imaginación casi inactiva, por ser, como lógica, ejercicio exclusivo de la razón.

La Geometría, en cambio, contentando á la razón en igual medida, lleva en sí una como visión objetiva é inmediata del espacio y de las infinitamente variadas formas con que la imaginación lo puebla, y á las que ajusta en el acto las verdades que investiga, las proposiciones que establece, y las relaciones que determina.

Pero antes de entrar en disquisiciones, que desde ahora os prometo que han de ser muy someras, sobre algunos de los puntos que el Sr. Torroja acaba de señalarnos como culminantes de la Geometría superior moderna, cúmpleme levantar el obscuro crespón extendido sobre el sitial, que por vuestros unánimes votos le está reservado.

Vacío se ha encontrado, con gran pena de todos vosotros, y muy particularmente mía, hasta hoy, en que va á ser ocupado, mucho más dignamente, por cierto, que algún otro puesto que el General Ibáñez, Marqués de Mulhacén, con sus méritos también enalteció.

Amargo, y tal vez no legítimo consuelo es para la pérdida de aquel hombre eminente, el de creer, como yo creo, que no dejan de resentirse de su ausencia eterna, no ya las instituciones patrias, que él dejó establecidas y que sostienen, aunque echando muy de menos su dirección, las personas que él educó para las aplicaciones de la ciencia geométrica, sino aquellas otras de carácter internacional, que, dicho sea con todos los respetos debidos, alcanzaron bajo su presidencia el apogeo de su brillo y del éxito en sus tareas.

Tampoco yo, como el Sr. Torroja, tengo necesidad de enumerar ahora las obras y encomiar las maravillosas dotes del insigne Ingeniero y General, del incomparable organizador de la Geodesia española y director de la medición internacional del Globo, del iniciador de la reforma y empleo universal de los nuevos metro y kilogramo, y del autor de tantas producciones y trabajos científicos; porque en las actas de esta Academia, y para el público en el Anuario, consignada está su necrología con los sentidísimos rasgos de la elegante pluma de nuestro Secretario perpetuo.

Las frases que el Sr. Torroja le ha consagrado, y estas mías, más sinceras que aliñadas, sirvan de justo complemento al epitafio escrito sobre la losa, que en extranjera tierra, al lado mismo de la de otro español ilustre, cubre los restos de D. Cárlos Ibáñez; y rinda de cuando en cuando piadoso recuerdo al Marques de Mulhacén el nuevo académico al sentir sobre su toga la medalla que sobre el uniforme de Ingeniero aquél con marcada preferencia solía ostentar, ya que el vestir la toga de la Universidad española le ha inspirado acentos de buena memoria, dirigidos á los preclaros Catedráticos, miembros de esta Academia, que asimismo la muerte, no ha mucho, nos arrebató.

En sus panegíricos se complace también la Academia entera, como se complace en procurar que la Facultad de Ciencias esté aquí siempre gallardamente representada.

Sí, señores: la Universidad, y, por lo que atañe á nosotros más directamente, la Facultad de Ciencias de la Central, no solamente excita de continuo nuestras ardientes simpatías, sino que nos congratulamos en reconocer que procura perseverantemente avanzar en la difusión y enseñanza de las ciencias, con mucho más ahinco del que vulgarmente se reconoce por espíritus descontentadizos en exceso, que, por hábito más que por malicia, no toman en cuenta nuestro propio carácter nacional.

Si no recelase que la modestia del Sr. Torroja me lo había de reprochar, no temería, por mi parte, entrar en comparaciones, de que su cátedra saldría airosa, con otras cátedras similares del extranjero.

Por lo menos, lícito me ha de ser poner públicamente en relieve, puesto que la ocasión se me brinda propicia, el progreso que revela el programa de la enseñanza de la Geometría, que, después de todo, constituye el fondo del discurso á que contesto.

Veinte años del segundo tercio de este siglo habían transcurrido desde que en Francia tomó carácter oficial la enseñanza de la Geometría superior, cuando un profundo matemático español, cuyo nombre acudirá á vuestros labios, aunque yo no le cite, porque, siendo gala de las ciencias y de las letras españolas, á cada paso damos con él, y dará la posteridad cuando la historia de nuestra actual cultura se escriba, publicó en la Revista de esta Academia, en la que acababa de entrar, una serie de artículos con el título de *Introducción á la Geometría superior*.

A su irrecusable autoridad me atengo para afirmar que hasta aquella fecha (1867) nunca se había explicado en España esta materia, ni jamás se había contado con ella en nuestros programas de enseñanza; y á su grave testimonio me remito para aseverar que no pasaron muchos años, después de tan enérgico aviso, sin que los programas de las Escuelas especiales de Ingenieros exigiesen las teorías que él expuso, y la Universidad Central contase con un profesor y un texto casi completo de aquella asignatura.

Y eso que la Universidad, para tales reformas, no goza de completa libertad; y no es cosa llana en ella aumentar una enseñanza.

Menester ha sido entender con lata interpretación cuál debe ser el contenido de la asignatura de Geometría Descriptiva, y formar de ésta un curso en que, antes de llegarse á su particular objeto, se enseñe á los alumnos la parte general de lo que hoy se da como Geometría *superior*, como Geometría de la *posición*, ó como Geometría *proyectiva.*

De propósito empleo todos estos nombres, á los cuales aún podría agregar los de Geometría *moderna*, y de Geometría *pura*, y de Geometría *no euclidiana*, porque todos ellos, y aun algunos más, se aplican, no indistintamente, pero sí con variedad é insuficiente determinación, á partes ó á conjuntos sistemáticos de las teorías de la ciencia geométrica.

Dividíase ésta á principios del siglo presente, para los efectos de la enseñanza, como todas las ciencias y como los tratados didácticos de todo género, en *elemental* y *superior:* disciplinada la primera con sujeción casi estricta al texto y severa doctrina de Euclides, y desarrollándose ámpliamente la segunda por su feliz alianza con el Algebra y el Cálculo infinitesimal.

Por resultado de alguna de las obras de Monge (1800), de Carnot (1803), y de Poncelet (1822), en Francia; por traducciones de Schumacher, y por trabajos originales de Möbius (1827), Plücker (1826 y 1846), y de Steiner (1832), en Alemania; inicióse una vigorosa restauración de la Geometría, que puede llamarse *pura*, por fundarse en estudios independientes del método cartesiano y de la discusión é interpretación de fórmulas algébricas: restauración, por supuesto, que, como acontece siempre en la ciencia y fuera de la ciencia, preparada estaba por autorizados precedentes, y fundada en verdaderas necesidades de saludable reacción.

Como los ilustres autores que la emprendieron no ejercitaran su inteligencia en la resolución y discusión de problemas y proposiciones elementales, á que tampoco descendieron los matemáticos, no menos ilustres, antecesores suyos, al aplicar el Algebra y el Cálculo transcendente al desenvolvimiento de la doctrina geométrica; el conjunto de las nuevas teorías recibió en Francia, y también en Inglaterra, donde el texto de Euclides, más que en parte alguna, se tenía por insustituible, el nombre de *Geometría superior*, no bien hubo quien, con el prestigioso talento de Chasles, dió con este epígrafe á luz un libro excelente (1852) de la nueva Geometría, adecuado á las exigencias de la enseñanza.

Mas ¿era, en realidad, este título correctamente opuesto al de *Geometría analítica*, consagrado ya á los estudios geométricos, superiores también, realizados hasta entonces, y que habían, no menos brillantes y progresivos, de continuar realizándose mediante la aplicación del análisis finito é infinitesimal?

A mi juicio, no: mejor quizá convenía al texto de Chasles el de *Geometría moderna*, con que su autor frecuentemente le designa; dado que otros matemáticos, ya por entonces consagrados á la completa depuración de la Geometría, habían de ver con intransigente recelo en la relación anarmónica, de que parte, una especie de sistema coordenado, y puesto que también estas investigaciones habían de engendrar en su propio seno sistemas nuevos de coordenadas, diferentes sí de las de Descartes, pero encaminadas al propio fin ó al planteo de análogas ecuaciones.

Geometría proyectiva habían otros de llamar á la Geometría restaurada ó instaurada en nuestro siglo, para expresar con tal nombre dos notas, no absolutamente características, pero sí señaladísimas del nuevo método general de transformación de figuras con que la Geometría se enriquecía para poder rivalizar con el Algebra y el Cálculo, que en esto la habían siempre aventajado, y que encerraban el germen fecundo de muy útiles aplicaciones y de futuros desarrollos.

El título de *Geometría de posición* usado por Carnot (*Géométrie de position*), para significar que en sus proposiciones abarcaba todas las posiciones de los elementos de las figuras, adoptado por los alemanes, aunque en sentido mucho más amplio y transcendente (*Géométrie der Lage*), sirvió, allende el Rhin, de enseña y guión á una verdadera escuela de sutiles geómetras, creadora de un sistema completo de exposición de la ciencia, á que dió forma en 1847 von Staudt, con una obra clásica y fundamental, no opuesta, pero sí radicalmente separada de la *Geometría de la medida* (*Géométrie des Masses*), ambas comprendidas dentro de la Geometría moderna. En ella se evitaba cuidadosamente tomar por punto de partida la relación *anarmónica*, y se enunciaba la *armónica* como propiedad del cuadrilátero completo, cuya figura, introducida por Carnot, cambió de definición más tarde.

No temáis, al verme así barajar nombres, que vaya ahora á dilucidar cuestiones filológicas, ni á puntualizar el contenido de los tratados que á cada título deba corresponder, ni mucho menos á proponer osadamente otros nuevos, convirtiéndome en atrevido censor de tantos y tan grandes maestros: me limito á mencionarlos, por lo que su evocación pueda contribuir á precisar la índole y alcance de la importante evolución que durante el siglo XIX se ha realizado en la ciencia del espacio.

Porque, bien pensado, debajo de estas cuestiones de palabras, á veces hueras, otras veces se ocultan tendencias, ó por lo menos matices, de concepciones fundamentales; sin contar que las definiciones nominales suelen aclarar en las ciencias especulativas las definiciones reales, marcando la génesis y el proceso de los humanos pensamientos y producciones.

El respeto mismo que los autores de novedades merecen debe siempre impulsarnos á meditar sobre las palabras con que las nombran, porque en ellas tal vez se encierra la genuína y originaria significación de la idea de que partieron, lograran ó no realizarla en sus obras.

Lo que importa en este punto es llegar á fijar bien por tal camino el sentido general de las nuevas teorías, y ver lo que entre sí tienen éstas de fundamentalmente común y distinto de las anteriores; y si se trata, como acontece en nuestro caso, de discurrir en términos amplios sobre los progresos de una ciencia determinada, en una determinada época también, diferenciándolos de los de otras épocas, para recrearse en las ventajas que hayan reportado, y estimularnos con halagüeñas esperanzas del porvenir, hay que reflexionar tanto sobre las discordancias de fondo ó de forma que presentan las distintas escuelas, tendencias, ó pretensiones científicas, como sobre las coincidencias substanciales de procedimiento bien encaminado al adelantamiento de tan hermosas y preciadas actividades del espíritu humano, cuales son las que en las Matemáticas se ejercitan.

Los Geómetras todos de este siglo, lo propio los que por más conspicuos se citan, que otros que con menos notoriedad han cultivado y cultivan de continuo, en innumerables libros, folletos y artículos de revistas, esta rama de la Matemática, han aspirado y aspiran á constituirla en ciencia independiente, hasta donde tan dificultosa empresa es asequible, ó en cuanto de independiente pueda tener, por el deslinde de su propio dominio, y por el empleo, para recorrer éste, de caminos ó métodos propios y adecuados á su peculiar índole.

En cuanto de independiente cada ciencia puede tener, he dicho, porque ninguna hay en realidad que del todo lo sea.

La Geometría está contenida en la Matemática, y, por tanto, sometida á la cantidad y al orden, categorías primarias, dentro de las cuales se ha de desenvolver. Tiene por objeto el espacio y las formas que en él se dan ó son posibles, y en tal sentido puede prescindir y prescinde de la cantidad, mientras no tenga que particularizar su contemplación en porciones de magnitud definida del espacio; y conserva, sin embargo, su caracter de Matemática, sabiendo que el espacio es medible y que se halla, por lo tanto, comprendido dentro de la categoría de cantidad, á la que será preciso acudir siempre que tenga precisión de determinar algo concreto. Pero así como la pura ciencia de la cantidad puede investigar propiedades de ella sin descender á lo particular, cabe en cierto modo concebir la Geometría como independiente de la magnitud. En tal sentido, natural es que la razón se ejercite en propiedades del espacio y que estudie en sus elementos originarios todas las formas, definiéndolas y clasificándolas en general, sin limitación alguna. Y, si en tales investigaciones avanza y va sentando verdades y proposiciones, no hay duda de que puede sistematizar conocimientos derivados exclusivamente de la propia naturaleza de su materia y por procedimiento deductivo.

Pudiera, de manera igualmente lógica, no haber prescindido del concepto de magnitud y haberlo desde luego aplicado al espacio, y, sumando nociones de cantidad y de orden, apreciar éste y á la vez hacerlo objeto de comparación y medida, caminando después siempre, y como antes, deductivamente, y constituir de golpe la ciencia geométrica completa.

En uno y otro caso puede además proceder por vía de inducción (variacion de método que no consiente con igual desembarazo de aplicación lógica la ciencia de la cantidad pura): es decir, elevándose de lo particular á lo general y, por abstracción de accidentes, pasar desde las figuras á las formas, clasificar éstas, y venir á la investigación de todas las posibles.

Convióneme hacer notar que estas consideraciones generales sobre métodos no se dirigen á discernir el carácter de analítica ó sintética que á la Geometría moderna deba atribuirse. Punto es este que Chasles en su discurso de inauguración de la cátedra de Geometría superior dilucidó largamente, haciendo notar el equívoco originado por el nombre de Geometría analítica, dado á la Geometría que se sirve del estudio y discusión de las ecuaciones, representativas de las líneas y superficies, para conocer sus propiedades, y demostrando la influencia que el nombre de análisis, con dudosa propiedad dado por antonomasia al Algebra y al Cálculo, ha ejercido en los juicios inexactos hechos sobre los métodos de los griegos en Geometría, y, por tanto, de los que se hagan sobre las teorías de aquellos ahora en cierto modo restaurados.

A lo que quiero referirme es á lo mismo que el señor Torroja se refiere, cuando, con razón manifiesta, expone que la Geometría moderna busca la mayor generalización posible en sus doctrinas, no limitando sus proposiciones á determinadas figuras, ni anticipando indebidamente el concepto de magnitud.

Y ha podido en este punto acentuar más el carácter de los esfuerzos hechos modernamente para constituir la ciencia geométrica en su mayor pureza, y por consiguiente, con mayor generalidad.

Verdaderamente la Geometría admite hoy por noción cardinal la del espacio ilimitado, considerado intuitivamente, no por abstracción del cuerpo geométrico. Contempla el espacio, que es, según definición de los metafísicos, posibilidad de posición de objetos, y mentalmente supone en él formas generales, cuyos elementos define y cuya generalidad marca en oposición á la noción de *figura*. Define lo que es una *radiación,* y un *angoloide,* y una superficie cónica de orden *par* ó *dispar*, antes que definir el plano, y por consiguiente que los *haces de rectas,* pues el plano es para la pura Geometría una superficie cónica de orden dispar.

Resulta, pues, que lo que se pretende ante todo es estudiar en términos generales el espacio como lugar de formas cardinales (radiaciones, angoloides, superficies cónicas, planos, haces y series de puntos), de las cuales sean dependientes ó derivados los cuerpos geométricos y las figuras, abarcando así imaginativamente todo el espacio y cuanto en él se pueda idear como objeto de la ciencia geométrica.

Esta misma consideración conduce desde los primeros pasos á la introducción del infinito en las definiciones y proposiciones, partiendo de la observacion del giro de una recta que se mueve al rededor de uno de sus puntos y cortando á otra: donde se advierte que hay un momento en que el punto de intersección de ambas ha llegado al infinito para reaparecer del otro lado sin solución alguna de tiempo ni de posición: observación que conduce á afirmar inmediatamente que dos rectas paralelas tienen común un punto del infinito, y que éste es único, en términos de que, aunque la frase extrañe, la recta se ha de mirar como línea cerrada, y como complementarios dos segmentos indefinidos, tomados á uno y otro lado de un punto de ella.

Por consideraciones igualmente lógicas, se viene á introducir el empleo de los *signos* desde estas primeras nociones y sin todavía haberse empleado para nada la noción de magnitud.

Sobre estas amplísimas bases—concepto general y clasificación de formas, consideración del infinito y de los signos—surgen inmediatamente los principios relativos á la dualidad y reciprocidad de las formas y de las figuras, á su proyectividad, y á nuevas investigaciones sobre las imaginarias, tales como el Sr. Torroja nos ha explicado, y que son los grandes capítulos abiertos por la Geometría moderna.

Ante tan importantes concepciones ¿no pierde algo de importancia la elección entre las dos tendencias ó procederes que dejo indicados?

Ambos estarán á mi juicio dentro de la Geometría moderna, de la Geometria pura, siempre que, cuando del Algebra y del Cálculo se use en las demostraciones y en las investigaciones, no se empleen las ciencias de la cantidad para deducir de las expresiones algébricas propiedades geométricas, sino que éstas, lleven ó no traducción algébrica, se deriven del estudio inmediato de las formas generales ó de las figuras particulares del espacio.

Me guardaré bien de entrar á discurrir sobre cuál de estos métodos es preferible. Con las condiciones que he apuntado, hecha dejo la declaración de que ambos me parecen racionales. Y, en punto á fecundidad, tengo para mí que ambos pueden producir frutos abundantes y sazonados, si quien los aplica despliega grandes recursos intelectuales. Respecto á las ventajas para la enseñanza de la Geometría por cada uno de los dos sistemas, allá también se me figura que han de andar compensadas las facilidades y llanezas de uno con la mayor amplitud y generalidad que el otro lleva consigo. Tal vez la elección más acertada haya de depender del carácter que al estudio de la Geometría elemental se dé previamente.

Por lo demás, y en cuanto al más rápido progreso científico importa, ¿quién sería capaz de profetizar, por conjeturas racionales ó por la experiencia, que la historia de las ciencias suministra, por dónde conviene enderezar el pensamiento para lograr más sólidos ensanches y alcanzar mayores alturas en las esferas del saber?

La razón humana, por ley de su naturaleza, no parece que se satisface con otro método que el deductivo para construir la ciencia, partiendo de las verdades ó axiomas más generales, y derivando de consecuencia en consecuencia proposiciones particulares. Pero como tal proceder supone, lo que al hombre está vedado, facultad de elevarse sobre sí mismo y sobre la naturaleza que le envuelve, de aquí que, al inquirir las verdades, se le imponga el estudio de lo contingente y de lo limitado, y satisfaga sus aspiraciones por el procedimiento precisamente contrario de la inducción ó de la abstracción.

Con ser tan perspicaz el entendimiento del Sr. Torroja, y precisamente por haber ahondado tanto en estas materias, no se ha decidido á deciros cuáles, en el inmenso edificio que la ciencia geométrica labra, son las partes principales, y hasta qué punto sobre ellas se ha de continuar edificando. Sólo ha afirmado juiciosamente que el terreno sobre que los matemáticos, y en este caso los geómetras, levantan las hermosas creaciones de su espíritu, se halla bien cimentado y es capaz de soportarlas, sin riesgo de que, con el transcurso del tiempo, flaqueen y se desmoronen.

Y, es verdad: mil y mil veces ocurre que los sabios, subiendo y subiendo á grandes alturas sobre el suelo en que edifican, páranse repentinamente, asombrados de que el sillar que acaban de asentar no necesitaba para formar parte naturalísima de la obra que van erigiendo, sino haberse continuado levantando directamente cierta columna, que otros dejaron truncada y que subía derechamente á aquel mismo punto del edificio, desde el suelo ó cimientos primeros de la construcción científica.

Cosa es entonces de deplorar que aquel fuste, que antiguamente comenzó á elevarse, quedase á corta altura incompleto; pero no tanto como para desdeñar la obra que por otras partes se fabricó, y que ahora adquiere nuevos enlaces y aplomos sobre verdades cardinales: sobre todo, si se considera que á la limitada vista de los constructores no le es dado abarcar desde el primer momento el plan entero y superior destino del edificio que se propusieron erigir.

La historia confirma en todas sus páginas la realidad de tales juicios. No es único, ni mucho menos, el caso de Colón, que por ir directa y más brevemente al Asia tropieza con una América, ni siquiera soñada, que vale más, para gloria de sus descubridores y provecho de la humanidad, que la empresa acometida, en justo premio de la fe inquebrantable, prestada á una verdad, como la de la redondez de la Tierra, superior en el orden científico á la verdad parcial que se persigue y á la misma verdad real que se descubre.

Si meditásemos, por ejemplo, y para no salir fuera de nuestra materia, sobre un punto determinado de la historia, en sus comienzos, de la nueva Geometría, advertiríamos cómo Monge atinó, ó pudo atinar, con la relación que sus procedimientos peculiares de Geometría Descriptiva tienen con las verdades más generales de la pura Geometría; y cómo también Desargues hubiera podido llegar al mismo término, de haber continuado edificando sobre algunos de sus teoremas; y cómo Carnot, para fundamentar su teoría de las transversales, buscó y encontró apoyo en el mismo lugar del suelo ya explorado por los geómetras griegos, y donde éstos empezaron á establecer iguales ó análogas proposiciones.

El hexagrama místico, ó aquella otra figura que cuentan trazó Mahoma, á guisa de rúbrica, sobre la arena del desierto, con la punta de su cimitarra, pudieron parecer símbolos misteriosos y raros, hasta que su exámen sugirió á Euler una teoría general sobre cierto género de figuras.

Dificilísima es para cualquiera, imposible para mí, hacer á este propósito la sinopsis del estado actual de los estudios geométricos. Es hoy tan copiosa la tarea á que se consagran los geómetras; son tantas las publicaciones que á diario ven la luz; son tan varios y entre sí tan distantes los puntos de vista que adoptan los autores de Geometría pura, ó los que se dedican á sus aplicaciones, que quizá no se está á la hora presente en el caso de emprender su cuenta y su resumen, por lo que toca al último tercio de este siglo.

Entre las dos ediciones de la conocida *Reseña histórica de los progresos de la Geometría*, tuvo Chasles que dar á luz un grueso volumen, en 1870, para completar su obra; y no se refirió más que á la ciencia francesa. Y Ball calcula en quince mil los artículos, memorias y tratados sobre asuntos matemáticos que al año se imprimen en Europa y América.

Lo que puede hacerse es condensar y resumir la historia de los progresos de la Geometría moderna en los doce primeros lustros del siglo XIX, tal como aparece bosquejada en la introducción á los *Elementos de la Geometría* *proyectiva*, por el malogrado profesor de Matemáticas de la Universidad de Tubinga, Doctor Hankel: obra póstuma (Leipzig, 1875), dada á luz por iniciativa de Klein, y por el celo del Doctor Harnack, y libro, en mi opinión, el más claro y mejor ordenado como texto didáctico elemental de cuantos corren con iguales y parecidos títulos.

La reacción que antes dije se inició en fin del siglo XVIII contra la absorción de la Geometría por el Algebra y el Cálculo, cobró vigoroso vuelo en Francia por el ingenio de Monge y sus creaciones de la Geometría Descriptiva. Maestro sin par en el arte de exponer, que rivaliza en elegancia con Lagrange y con Euler en sus lecciones, fundador de la Escuela Central de Obras públicas, transformada luego en Escuela Politécnica, Monge no inventó con su *Geometría Descriptiva* una simple manera de representación de los sólidos en el plano, para uso y provecho de los ingenieros, de los arquitectos y de los topógrafos; sino algo más transcendental para la ciencia: la doctrina del transporte de las propiedades de los cuerpos y de las formas generales á las figuras planas.

Aunque Monge no hubiese hecho más, aunque no hubiese después marcado nuevos rumbos á la Geometría Analítica, bastárale haber concebido y desenvuelto el método de mirar en las dos proyecciones las propiedades de los cuerpos geométricos, para merecer honores extraordinarios en la historia de las ciencias.

Reparad por un momento en la fecundidad de este principio, y considerad la virtualidad de tal proceder, no sólo porque, como dije antes, se dota con él á la Geometría de la flexibilidad del Algebra y del Cálculo, sino más principalmente porque constituye, á más de un sistema, un método natural y generalísimo, ajustado como ninguno á la índole del entendimiento. ¿Acaso el hombre puede por sí mismo, saliendo fuera de sí, aplicar su intelecto á cosa alguna que no sea él mismo? ¿No son proyecciones de las cosas nuestras ideas acerca de ellas?

La transcendencia de tan cardinal principio se quilató muy pronto, cuando Poncelet, prisionero de guerra en la dura campaña de Rusia, medita sobre las lecciones del maestro en las tristes orillas del Volga, y en sus soledades prepara el *Tratado de las propiedades proyectivas de las figuras;* ó cuando Gaultier, también discípulo de Monge, explana sus teoremas sobre el eje radical de dos circunferencias, aplicándolos en toda su generalidad á cualesquiera posiciones, para abrir campo al conocimiento de las imaginarias en pura Geometría.

Débese también á la escuela francesa del primer tercio del siglo la teoría de la *reciprocidad polar*, que, eliminando la cónica de referencia, Gergonne ensancha con la fundamental idea de la *dualidad*.

Los alemanes, hasta el año de 1820, no habían descollado en investigaciones matemáticas: tanto que, después de Euler, solamente Gauss había ganado justo renombre de matemático de primer rango.

Hasta que Möbius (1826), en su *Cálculo baricéntrico* inventa un sistema de coordenadas homogéneas, y deduce de las propiedades descriptivas muchas de las relaciones métricas, y presta al nombre de *Geometría de la posición* significado mucho más alto é independiente del que en boca de Carnot tuviera, Alemania no parecía rival de Francia en el palenque de la Geometría. Aseguran los historiadores que el profesor de Astronomía de Leipzig desconocía la obra de Poncelet, y á esta circunstancia atribuyen la diferente nomenclatura de la correlación de figuras que empleó y los alemanes mantienen.

No así Plücker, que estudió en París con Poncelet y Gergonne, antes de establecerse en Berlin y de publicar sus nuevos métodos de la *Geometría analítica pura.* ¡Lástima para la Geometría que abandonara después la ciencia del espacio por las ciencias físicas, y que sólo al fin de su vida (1868) volviera á sus primeras aficiones!

Con Möbius y con Plücker comparte las glorias de la Geometría alemana en esta primera época, Jacobo Steiner, autor de verdadero genio. Suizo de orígen, hombre singular que no aprendió á leer hasta los catorce años, estudiante de Heidelberg, amigo del infortunado Abel, generaliza la teoría de la transformación de figuras con sus *Systematische Entwickelungen der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander* (1832), y gana por el influjo de Humboldt la cátedra de *Geometría moderna*, creada en Berlin (1834), y que había de honrar hasta su muerte (1863), como honró las columnas de la Revista de Crelle.

En el segundo tercio del siglo los autores de obras que pueden llamarse generales de la pura Geometría, y son fundamento de la enseñanza, sirviendo de preparación necesaria al estudio de cuestiones especiales, se pueden agrupar alrededor de los nombres de Chasles, de von Staudt y de Grassmann: con el primero aquellos que, aunque no repugnan el empleo del Algebra y del Cálculo, cumplen con la condición de no deducir de los algoritmos y fórmulas, propiedades geométricas; con el segundo, los que construyen su doctrina sin la menor intervención de la magnitud, hasta haber agotado el concepto de la posición y de la dirección, y toman para pasar á la Geometría de la medida el camino que poco antes de morir marcó el profesor bávaro en sus *Beiträgen zur Geometrie der Lage*, y muy especialmente en su «Estudio (1867) de los semidiámetros reales é imaginarios de las curvas y superficies de segundo orden»; y con el tercero, en fin, aquellos que, partiendo de sus investigaciones filosófico-matemáticas (*Ausdehnungs lehre*), han creado el cálculo geométrico, ó concentrado sus esfuerzos en ciertas aplicaciones á la Estática, á la Mecánica, á la Física y á la Cristalonomía, tomando entre otras por base la teoría de la composición de figuras.

Y al llegar á este punto nos salen al paso las severas figuras de dos ilustres geómetras, ambos de fama imperecedera, aunque por conceptos algún tanto distintos: de Chasles y de von Staudt. De Chasles, preclaro académico del Instituto de Francia, autor de la *Reseña histórica de los progresos de la Geometría*, acogida en el mundo científico con estruendoso y merecido aplauso; del *Tratado*, más tarde, de *Geometría superior*; y de copiosos apéndices, complementarios á esta obra magistral. Y de von Staudt, modesto profesor bávaro, sin nombradía aparatosa y deslumbradora, que con la publicación de su, no más que en la apariencia, humilde *Tratado de Geometría de la posición*, en 1847, cinco años antes de ver la luz la Geometría de Chasles, conquistó puesto eminente entre los más aventajados creadores de la ciencia matemática moderna: puesto, en verdad, á que no ascendió de repente, ni sin porfiada lucha contra la indiferencia de sus contemporáneos, pero que en la actualidad nadie le disputa.

¿Desmerecen en algo, por su cotejo recíproco y por la discrepancia de método y estilo, los trabajos realizados por estos dos famosos geómetras, cada cual por cuenta propia, y siguiendo en prosecución de la verdad muy diversos caminos? Yo no lo creo así; y, antes bien, me parece que mutuamente se completan, y que los de uno cualquiera contribuyen á realzar, por efecto del contraste, el mérito é importancia de los del otro.

A estos dos esclarecidos nombres he agregado, renglones antes, el de Grassmann, no porque juzgue á éste como propiamente geómetra, sino porque me parecerían más incompletas de lo que en realidad resultarían por ser mías estas notas generales, si no hiciese mención especialísima de sus teorías sobre la extensión, expansión ó generación de formas lógicas en abstracto, que tanto han contribuído al sólido establecimiento de lo que con el nombre de *cálculo geométrico* hoy se propaga en provechosísimas aplicaciones prácticas.

En un concurso abierto en 1844 por cierta sociedad científica alemana, para premiar el mejor trabajo que tuviese por objeto renovar los ensayos de cálculo geométrico de Leibnitz, extendiéndolos y perfeccionándolos, Grassmann presentó su *Ausdehnungslehre* como nueva rama de la Matemática.

Y en este libro, cuya segunda edición (1878) acabó de salir de las prensas cuando su autor pasaba á mejor vida, la Geometría se define como ciencia del espacio, y se clasifica entre las ciencias *reales*, al igual de la Mecánica, y no entre las *formales*, que son la Dialéctica y la Matemática, pura por supuesto.

Esta ofrece un tronco común, que modernamente se llama *Lógica deductiva* (*Formenlehre*), y cuatro ramas, una de las cuales (la que Grasmann denominó *Ausdehnungslehre*) prepara nuevos fundamentos á la Geometría.

Schlegel, que, de conformidad con estos principios, escribió (1872-1875) su Sistema de la Geometría (*System der Raumlehre*), atribuye el poco ó ningún aprecio que de la obra de Grassmann se hizo por espacio de muchos años á la extrañeza que causaba en su época hablar de n dimensiones y emprender operaciones desacostumbradas con entes tan poco antes manejados, y también á lo abstruso de las ideas, expuestas en términos más propios de la Filosofía que de las Matemáticas.

Mas ¿á qué continuar fatigando vuestra atención sin provecho ni beneficio?

Baste con lo dicho para que yo, cumplido un deber de cortesía, pueda poner punto final á mi discurso, sin retardar por un momento más la toma de posesión de su plaza por nuestro nuevo compañero.

Mi cometido principal está cumplido: mostrar explícitamente lo que implícitamente en el profundo trabajo del Sr. Torroja se encierra, á saber: que en nuestro siglo la Geometría ha cobrado nueva y exuberante vida, con savia propia y sin dependencia alguna de las otras ramas de la Matemática, á las cuales ha igualado en amplitud y fecundidad; añadiendo de mi cuenta que el simple nombre de geómetra, amortiguado en los dos siglos anteriores por el deslumbrante resplandor que el de los grandes analistas de la cantidad despedía, hoy ha recobrado aquel magnífico realce y vivísima claridad con que brilló en la puerta de la Academia de Platón.

Con él se engalana el Sr. Torroja; por llevarle con prestigio conquistó envidiable derecho á contarse entre vosotros; y, por mantenerle y acrecentar sus timbres, tengo por seguro que ha de perseverar en el empeño de agrandar en nuestra patria la enseñanza de la ciencia del espacio.

¡Ojalá que, tomándole como guía y maestro, logren otros muchos dignos imitadores suyos vencer los obstáculos que en nuestra nunca bien desahogada vida nacional se oponen á que España alcance glorias propias en la historia de las Matemáticas!