

**REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE ESPAÑA**

**DINÁMICA NO LINEAL, CAOS Y
COMPLEJIDAD: INTERDISCIPLINARIEDAD
EN LAS CIENCIAS**

DISCURSO LEÍDO EN EL ACTO DE SU RECEPCIÓN
COMO ACADÉMICO DE NÚMERO POR EL

EXCMO. SR. D. MIGUEL ÁNGEL FERNÁNDEZ SANJUÁN

Y CONTESTACIÓN DEL

EXCMO. SR. D. JESÚS MARÍA SANZ SERNA

EL DÍA 27 DE JUNIO DE 2024



MADRID

Domicilio de la Academia: Valverde, 22

www.rac.es

ISSN: 0214-9540

ISBN: 978-84-87125-87-4

Depósito Legal: M-14481-2024

Índice

Agradecimientos	7
Introducción	9
En los comienzos	19
Premios Nobel de Física. Física, Emergencia, No linealidad, Indeterminismo y Ciencias de la Vida	43
Interdisciplinariedad en las ciencias	61
Perspectivas. Complejidad e Interdisciplinariedad	75
Conclusiones	85
APÉNDICE	
Investigación interdisciplinar en Dinámica No Lineal, Caos y Sistemas Complejos	89
Discurso de contestación del Excmo. Sr. D. Jesús María Sanz Serna	91

DISCURSO DE INGRESO
DEL
EXCMO. SR. D. MIGUEL ÁNGEL FERNÁNDEZ SANJUÁN

Agradecimientos

Excmo. Sr. Presidente de la Real Academia de Ciencias,

Excmos. Miembros de la Academia,

Señoras y Señores,

Quisiera expresar mi satisfacción y profundo agradecimiento a todos los miembros de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de España por la distinción de haberme elegido como Académico Numerario. Es un gran honor y un privilegio formar parte de esta institución de prestigio y de excelencia académica que ha acogido a lo largo de los últimos dos siglos, desde su fundación, a una destacada representación de la ciencia española. Al mismo tiempo, asumo con gran responsabilidad el compromiso de servir a la institución.

Mi agradecimiento es muy especial para los Académicos don Juan María Marcaide Osoro, don Miguel Ángel Alario y Franco y don Manuel Aguilar Benítez de Lugo por haber sido quienes hicieron la propuesta para que forme parte de la Real Academia como miembro de número ocupando la medalla número 60 de nueva creación en la Sección de Ciencias Físicas y Químicas.

Desde el momento en que fui elegido Académico Correspondiente en el año 2015, sentí el deseo de colaborar en la medida de mis posibilidades a las diversas iniciativas de la Academia y de responder a los servicios que la institución me ha ido encomendado. Se han presentado diversas oportunidades para colaborar en áreas como comunicación y divulgación de la ciencia, además de participar activamente en distintas comisiones, entre las cuales se incluyen la Comisión de Relaciones Internacionales y la Comisión organizadora de la Conferencia General anual, un evento significativo para nuestra Academia.

En este sentido, mi gratitud se extiende al Académico Supernumerario y Ex Presidente de la Academia don José Elguero Bertolini, al Presidente de la Academia, don Jesús María Sanz Serna, así como a la Secretaria General de la Academia doña Ana María Crespo de las Casas, por el continuo apoyo, afecto y confianza que han depositado en mí en todo momento. Además,

agradezco especialmente a don Jesús María Sanz Serna por haber accedido a realizar el discurso de contestación en el acto de mi recepción a la Academia.

En el ámbito de mi labor científica, quiero hacer una mención especial al Prof. James A. Yorke de la Universidad de Maryland, quien es Académico Extranjero de la Sección de Matemáticas de esta Academia. El Prof. Yorke es un verdadero pionero en la teoría del caos, siendo él quien acuñó el término *caos* en la literatura moderna de la Dinámica No Lineal. Sus destacadas contribuciones le valieron el prestigioso *Japan Prize* en 2003 por sus logros en Ciencia y Tecnología de la Complejidad. Reconozco al Prof. Yorke como mi mentor y le agradezco enormemente por la profunda influencia que ha tenido en mi trayectoria académica.

Me gustaría expresar mi profundo agradecimiento a todas las personas e instituciones que han contribuido a mi formación y me han brindado su apoyo en mi trayectoria hasta este momento. Un agradecimiento especial a mis colaboradores del Grupo de Dinámica No Lineal, Teoría del Caos y Sistemas Complejos de la Universidad Rey Juan Carlos, del cual tengo el honor de ser creador y director, así como a todos mis más de veinte estudiantes de doctorado, de quienes he aprendido tanto. A lo largo de mi carrera científica, he tenido el privilegio de colaborar estrechamente con más de doscientos investigadores de veinticinco nacionalidades diferentes, a quienes asimismo quiero expresar mi más sincero agradecimiento.

Ni que decir tiene, que agradezco de corazón el apoyo que siempre me han dado mis padres y hermanos, y muy especialmente mi mujer Céline y mis hijas Alicia y Mónica.

En resumen, este ingreso a la Real Academia de Ciencias de España representa un acontecimiento significativo en mi carrera, y me siento agradecido por la oportunidad de poder contribuir a los objetivos y responsabilidades de esta Academia.

Concluyo con unas palabras parafraseando al gran poeta Dante Alighieri y al Premio Nobel de Física de 1938, Enrico Fermi, quien empleó una expresión similar en circunstancias análogas: **Nunc incipit vita nova, gaudeamus igitur.**

Introducción

Le savant n'étudie pas la nature parce que cela est utile; il l'étudie parce qu'il y prend plaisir et il y prend plaisir parce qu'elle est belle. Si la nature n'était pas belle, elle ne vaudrait pas la peine d'être connue, la vie ne vaudrait pas la peine d'être vécue.¹

Henri Poincaré

En este discurso voy a hablar de ideas y conceptos como la no linealidad, el caos, la complejidad², y la interdisciplinariedad, muy relevantes en física y en otras ciencias. La Dinámica No Lineal, la Teoría del Caos y los Sistemas Complejos^{3,4,5,6} es la disciplina intrínsecamente interdisciplinar en su naturaleza a la que desde la Física he dedicado toda mi vida científica.

Podría decirse que la dinámica es una de las primeras ciencias ya que está en el origen de la misma idea de movimiento y su conocimiento nos llevaría a poder predecirlo. Pero la noción de dinámica ha evolucionado con el tiempo. Tradicionalmente cuando nos referíamos a la dinámica se entendía que fundamentalmente considerábamos el movimiento de los cuerpos celestes y de los sistemas mecánicos sólidos. Cuando ahora hablamos de dinámica estamos pensando en cualquier cambio con respecto al tiempo, lo que implica que podamos encontrar dinámica en todos los campos de la ciencia, incluyendo la economía, las reacciones químicas, la ecología, la fisiología o la neurodinámica, lo que sin duda nos aporta una visión de la naturaleza más interdisciplinar. Además, las interacciones entre las partes de un sistema y sus mecanismos de retroalimentación constituyen una fuente de no linealidad y complejidad, que, sumada a la dependencia sensible a las condiciones iniciales, distintiva del comportamiento caótico, conducen a un cambio de perspectiva crucial con importantes consecuencias en la comprensión de la ciencia.

¹ Henri Poincaré. *Science et Méthode* (Ernest Flammarion, Paris, 1908), p. 20.

² Editorial. Complexity matters. *Nature Physics* 18, 843 (2022).

³ James Gleick. *Chaos: The Creation of a Science. Chaos: Making a New Science* (Penguin Books, 2008).

⁴ Ian Stewart. *Does God Play Dice?: The New Mathematics of Chaos* (Penguin Books, 1997).

⁵ Lenny Smith. *Chaos: A Brief Introduction* (OUP, Oxford, 2007).

⁶ Manuel de León y Miguel A.F. Sanjuán. *Las matemáticas y la física del caos* (La Catarata, Madrid, 2010).

A lo largo del discurso pretendo dar una visión panorámica de la disciplina presentando los conceptos fundamentales que han impulsado el desarrollo de las ideas esenciales, así como las diversas fuentes que han contribuido a su construcción, tal y como la entendemos en la actualidad. Me gustaría destacar dos aspectos fundamentales en esta exposición: la interdisciplinariedad y la internacionalización. Indudablemente, la ciencia ha sido no lineal desde sus inicios: las ecuaciones de Newton son no lineales. Sin embargo, las dificultades de afrontar los fenómenos no lineales han conducido con frecuencia a hacer aproximaciones lineales al modelizar ciertos problemas que, lógicamente, eran más sencillos de abordar. No es por tanto difícil de comprender que la mayoría de los sistemas dinámicos no sigan un comportamiento lineal.

Para ilustrar la construcción de la dinámica no lineal, me gusta concebirla como la analogía de un extenso río alimentado por numerosos afluentes. Entre los problemas más relevantes se encuentran el problema de los tres cuerpos en mecánica celeste, la turbulencia en dinámica de fluidos, la irreversibilidad y los fundamentos de la física estadística, el estudio de los osciladores no lineales, así como la ecuación logística derivada de la dinámica de poblaciones en biología. Estos han sido los orígenes de este fascinante campo de la dinámica no lineal, el caos y los sistemas complejos. Resulta igualmente asombroso observar las numerosas escuelas de matemáticas y física que han desempeñado un papel esencial en el desarrollo de esta disciplina, como la escuela francesa, rusa, japonesa y americana. La comprensión de esta perspectiva histórica permite apreciar la amplitud de la disciplina en sí misma y sus múltiples aplicaciones interdisciplinarias en diversos campos de las ciencias.

Entre las diferentes situaciones con las que nos podemos encontrar en dinámica, tenemos los puntos de equilibrio, los movimientos periódicos y cuasiperiódicos y, por último, el comportamiento caótico. Posiblemente una de las ideas más profundas sobre la naturaleza de lo que se conoce como comportamiento caótico es la idea de la dependencia sensible a las condiciones iniciales. Es decir, las trayectorias de un sistema caótico se alejan unas de otras a medida que avanza el tiempo cuando parten de puntos iniciales muy cercanos. Este hecho tiene consecuencias muy drásticas en la previsibilidad de un sistema.

Quizás uno de los sistemas caóticos más reconocidos sea el sistema de Lorenz, el cual ha sido extensamente estudiado y posiblemente sea uno de los más conocidos en la cultura popular.

La Fig. 1 presenta un atractor caótico del sistema de Lorenz en el espacio de las fases. Este sistema fue introducido por el meteorólogo americano Edward Lorenz para investigar la convección térmica en un fluido y, mediante simulaciones numéricas por ordenador, pudo observar la propiedad de la dependencia sensible a las condiciones iniciales, que es distintiva del comportamiento caótico.

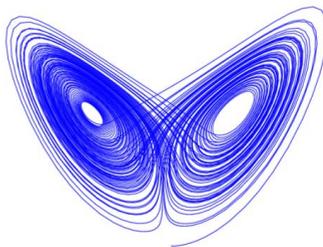


Fig. 1. La figura representa el atractor caótico del sistema de Lorenz.

La Fig. 2 muestra la evolución temporal en el espacio de las fases de dos órbitas (una roja y otra azul) cuyas condiciones iniciales son muy próximas. Después de un cierto tiempo, aproximadamente 24 unidades de tiempo, las órbitas correspondientes comienzan a separarse, resultando ser muy diferentes a largo plazo, lo que refleja muy bien la idea de la dependencia sensible a las condiciones iniciales en el sistema caótico de Lorenz.

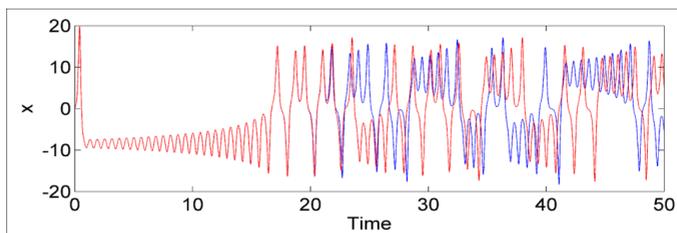


Fig. 2. Evolución temporal en el espacio de las fases de dos órbitas del sistema de Lorenz inicialmente muy próximas, donde se muestra la propiedad de la dependencia sensible a las condiciones iniciales.

Sensibilidad a las condiciones iniciales. A poco que pensemos en esta idea podremos tener la intuición de que es cierta en nuestras vidas. Lo cual explica que no sea sorprendente que la misma idea haya aparecido en la literatura a lo largo de la historia en múltiples fuentes. En este sentido, resulta muy pertinente mencionar una famosa rima tradicionalmente asociada a Benjamín Franklin, si bien antecedentes de la misma idea se remontan al siglo XV, y que se conoce como "*Por culpa de un clavo*", que ofrece una imagen intuitiva y poética de la idea de la dependencia sensible a las condiciones iniciales, que es la huella del movimiento caótico:

“Por culpa de un clavo, se perdió la herradura,
Por culpa de la herradura se perdió el caballo,
Por culpa del caballo, se perdió el jinete,

Por culpa del jinete, se perdió el mensaje,
Por culpa del mensaje, se perdió la batalla,
Por culpa de la batalla, se perdió el reino,
Y todo por culpa del clavo de la herradura.”

De especial relevancia es lo que Henri Poincaré escribe en el capítulo 4, dedicado al azar, de su famoso libro *Science et Méthode* publicado en París en 1908, donde realiza una magnífica descripción de la dependencia sensible a las condiciones iniciales: “Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. Si nous connaissions exactement les lois de la nature et la situation de l'univers à l'instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même univers à un instant ultérieur. Mais, lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation initiale qu'approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il nous faut, nous disons que le phénomène a été prévu, qu'il est régi par des lois; mais il n'en est pas toujours ainsi, il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux; une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit.”⁷

Más sorprendente aún nos puede resultar la afirmación de Charles Darwin en *El origen de las especies* ⁸: “Nacen más individuos de los que pueden sobrevivir. Un grano en la balanza puede determinar qué individuos vivirán y cuáles morirán, qué variedad o especie aumentará en número y cuáles disminuirán o finalmente se extinguirán”, que ilustra de nuevo la verdadera noción de la dependencia sensible a las condiciones iniciales.

⁷ “Una causa muy pequeña, que se nos escapa, determina un efecto considerable que no podemos dejar de ver, y entonces decimos que este efecto se debe al azar. Si conociéramos exactamente las leyes de la naturaleza y la situación del universo en el momento inicial, podríamos predecir exactamente la situación de ese mismo universo en un momento posterior. Pero aunque las leyes naturales ya no nos guarden ningún secreto, sólo podremos conocer la situación inicial de forma aproximada. Si esto nos permite predecir la situación posterior con la misma aproximación, es todo lo que necesitamos, decimos que el fenómeno fue previsto, que se rige por leyes; pero no siempre es así, puede suceder que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales generen diferencias muy grandes en los fenómenos finales; un pequeño error al principio producirá un error enorme al final. La predicción se vuelve imposible y tenemos el fenómeno fortuito”. Henri Poincaré, *Science et Méthode* (Ernest Flammarion, París, 1908), pp 71-72.

⁸ Charles Darwin. The Origin of Species. 1859. Capítulo XIV. <http://www.talkorigins.org/faqs/origin.html>

Sobre interdisciplinariedad. Relaciones entre las diferentes ciencias. En los últimos años hemos podido comprobar cómo se ha ido desarrollando a nuestro alrededor el fenómeno de la super especialización, con el riesgo de dar a entender que nada tiene que ver con nada, cuando a mi juicio la realidad es justamente lo contrario. Que todo o casi todo tiene que ver con todo. Todo esto nos lleva de modo natural a la idea de la interdisciplinariedad y de las mutuas relaciones entre las diferentes ciencias. Podríamos preguntarnos al menos de modo retórico sobre cuáles son las relaciones existentes entre la física, la química, la biología, la geología y las matemáticas, o bien en qué se beneficia su interrelación. Como no es sencillo dar una breve respuesta a algunos de estos interrogantes, me ha venido a la cabeza una famosa cita del físico Richard Feynman, Premio Nobel de Física en 1965 y que ilustra esta cuestión:

“Un poeta dijo en cierta ocasión: *“Todo el universo está en un vaso de vino”*. Probablemente nunca sabremos en qué sentido lo decía, pues los poetas no escriben para ser entendidos. Pero es cierto que, si miramos un vaso de vino lo suficientemente cerca, vemos el Universo entero. Ahí están los objetos de la física: el líquido que se mueve y que se evapora dependiendo del viento y del tiempo, los reflejos en el vaso y nuestra imaginación añade los átomos. El vaso es una destilación de las rocas terrestres, y en su composición vemos los secretos de la edad del universo y la evolución de las estrellas. ¿Qué extraña ordenación de elementos químicos hay en el vino? ¿Cómo llegaron a formarse? Existen los fermentos, las enzimas, los substratos y los productos. Allí en el vino se encuentra la gran generalización: toda la vida es fermentación. [...] Aunque, por conveniencia, nuestras pequeñas mentes dividan este vaso de vino, este universo en partes -física, biología, geología, astronomía, psicología y demás- es bueno recordar que ¡la naturaleza no lo sabe! ⁹ Así que volvamos a situarlo todo en su sitio, sin olvidar en última instancia para qué sirve. Permitámonos un último placer: ¡bebámoslo y olvidémoslo todo!” ¹⁰

A mi juicio ilustra claramente la idea de que las disciplinas que hemos creado son únicamente una forma posible de poder acometer el estudio de ciertos fenómenos, olvidándonos de que todo o casi todo está relacionado con todo.

Física y Complejidad: Problemas Abiertos. En relación con los contenidos de mi discurso, considero pertinente evocar un acontecimiento que tuvo lugar en el año 2005 con motivo de la

⁹ He puesto esta frase en cursiva para enfatizar la idea de la interdisciplinariedad.

¹⁰ R.P. Feynman, RB Leighton, and M. Sands. *The Feynman Lectures on Physics. Vol. I Mainly Mechanics, Radiation and Heat* (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1963), pp. 3-10.

celebración del Seminario “100 años de las teorías de Einstein: presente y perspectivas de futuro” que tuvo lugar durante los días 1 y 2 de junio en la Residencia de Estudiantes del CSIC con motivo de las celebraciones del Año Mundial de la Física. Entre las actividades del seminario, hubo una Mesa Redonda dedicada al análisis de “Problemas Abiertos”, en la que participaron don Alberto Galindo Tixaire, a la sazón Presidente de la Real Academia de Ciencias de España, don Francisco José Yndurain Muñoz, entonces Presidente de la Sección de Ciencias Físicas y Químicas de la Real Academia de Ciencias de España, y el autor de este discurso, actuando como moderador el Prof. Gerardo Delgado Barrio, que era Presidente de la Real Sociedad Española de Física. En dicha mesa redonda, se plantearon nuevos retos y perspectivas de futuro en el mundo de la física de las partículas elementales, de la cosmología y en la física de la complejidad. Mi modesta contribución fue sobre “Física y Complejidad: Problemas Abiertos.”

Referencias y menciones a académicos de la RAC. Como ya he indicado, los contenidos de mi discurso están orientados a describir la disciplina a la que he dedicado mi vida científica. Aunque voy a ocupar una medalla de nueva creación, siendo nueva también la denominación de la plaza, quisiera resaltar brevemente a aquellos académicos que de una u otra manera han contribuido o mencionado en sus discursos a materias a las que me referiré en mi discurso.

Hace ahora más de 40 años que tuvo lugar el discurso de recepción de don Alberto Galindo Tixaire sobre *No-linealidad en las ciencias de la naturaleza*.¹¹ A pesar de haberlo leído hace varios años, no puedo dejar de asombrarme por su carácter pionero y premonitorio sobre el papel de la no linealidad y los fenómenos no lineales en física. Además, expresa su admiración por este campo, resaltando su riqueza y la profusión de conexiones interdisciplinares con una notable clarividencia. De hecho, en las conclusiones señala toda una profecía: “Supliendo con vuestra imaginación la aridez de mi prosa, no dudo de que ya os habréis compuesto una idea del variopinto panorama de los fenómenos no-lineales. Su carácter aglutinador de disciplinas diversas les asegura un futuro brillante, en el que todas las ciencias desde la matemática pura hasta la tecnología avanzada, codo con codo, fecundándose mutuamente, irán desvelando la maravillosa riqueza de estos procesos y sus principios unificadores.”

¹¹ Alberto Galindo Tixaire. *No-linealidad en las ciencias de la naturaleza*. Discurso de recepción. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 11 de junio de 1980.

No quiero evitar mencionar otros ejemplos como este: “Cuando la más simple de las leyes de la naturaleza, la ley de la gravitación conduce a ecuaciones no-lineales de difícil análisis, a nadie sorprenderá que otro tanto o más ocurra en la dinámica de sistemas complejos.” Y otro con mayor profundidad: “Pero también en otras ciencias experimentales, como la química, la biología y la medicina, irrumpe con fuerza la descripción no-lineal, al simplificar, en esquemas matemáticos manejables, comportamientos dinámicos enormemente enrevesados y a veces mal conocidos.”

Numerosas referencias a la dinámica no lineal y a sus aplicaciones a las ciencias biomédicas aparecen también en el discurso de recepción de don Pedro García Barreno¹², como magistralmente expresa la siguiente afirmación: “La dinámica no lineal ofrece, por tanto, un lenguaje que hace posible describir diferentes aspectos de la función cerebral, pues los conceptos de intermitencia, períodos alternantes de comportamiento periódico y caótico, transitividad o fluctuación, tienen cabida en dicho contexto. Puede hipotetizarse que el conjunto de leyes generales que gobiernan los flujos es universal, y que el cerebro es una localización posible de sistemas dinámicos abstractos con distribución espacial. Recordemos que el registro EEG en situación basal normal es un ejemplo de comportamiento caótico, mientras que el registro correspondiente a una crisis epiléptica representa un comportamiento periódico regular.”

Asimismo, en el discurso de don Amable Liñán Martínez¹³ se hace referencia al fenómeno del caos y a las propiedades fractales de los fluidos turbulentos en las reacciones de combustión. Además, aborda la teoría no lineal de la estabilidad hidrodinámica, destacando el comportamiento caótico de sistemas dinámicos sencillos, la teoría ergódica, los atractores extraños, y los horizontes de predictibilidad en la descripción de los fluidos.

Del mismo modo, está lleno de referencias a la dinámica no lineal y la teoría del caos en química, en general, y a las reacciones químicas en particular el discurso de don Jesús Santamaría Antonio¹⁴. No en vano el estudio teórico de la reacción química no puede explicarse sin el contexto de la mecánica estadística del no equilibrio para procesos irreversibles a los que

¹² Pedro García Barreno. De lo Exacto, lo Físico, lo Natural y la Medicina. Discurso de recepción. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 12 de diciembre de 1984.

¹³ Amable Liñán Martínez. El papel de la mecánica de fluidos en los procesos de combustión. Discurso de recepción. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 23 de enero de 1991.

¹⁴ Jesús Santamaría Antonio. Evolución de ideas en torno a la reacción química. Discurso de recepción. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 29 de enero de 2003.

hace mención en su discurso, así como a algunos de los pioneros de la complejidad en el mundo de la física. Asimismo, es destacable el papel que juega la dinámica no lineal en el contexto de los mecanismos de transferencia de energía. La conexión con los sistemas no lineales es clara: “Las moléculas son sistemas hamiltonianos conservativos constituidos por osciladores anarmónicos acoplados, donde las frecuencias varían con la energía, y por ende, son sistemas no lineales.” En este sentido, no es de extrañar que en su discurso haga continuas referencias a la teoría del caos, especialmente a lo que se conoce como caos hamiltoniano y teoría KAM. En contraposición a las tradicionales divisiones disciplinares, es también destacable la defensa que hace de la interdisciplinariedad no solamente en el campo de la dinámica de reacciones químicas, sino de la ciencia en general: “La superación de esas divisiones, ocurrida en las últimas décadas del siglo XX, ha conducido al florecimiento de las áreas interdisciplinares, no sólo dentro de la Química sino, en general, dentro de las ciencias experimentales.”

En el discurso de don Jesús María Sanz Serna¹⁵ sobre *integración geométrica* se mencionan métodos numéricos, métodos simplécticos en sistemas hamiltonianos, caos y *shadowing*, ideas todas ellas fundamentales en física y en dinámica no lineal y teoría del caos. Además, se hace mención del influyente artículo de Sussman y Wisdom publicado en *Science*¹⁶ donde probaron la evolución caótica del sistema solar tras arduas simulaciones numéricas con ordenadores dedicados, lo que asimismo planteaba interesantes retos a los matemáticos trabajando en métodos numéricos.

En el discurso sobre las teorías de la turbulencia de don Javier Jiménez Sendín¹⁷, también se describen cuestiones muy familiares como la turbulencia y el caos, la relevancia de los métodos numéricos, así como la complejidad en fluidos. Es precisamente la mecánica de los fluidos y la meteorología uno de los caminos que nos ha aportado el conocimiento del caos como disciplina que tenemos en la actualidad. Lógicamente dedica una parte de su discurso a la no linealidad y los sistemas dinámicos, al sistema de Lorenz y a la teoría de Ruelle y Takens de la turbulencia, reivindicando asimismo el importante papel de las simulaciones numéricas.

¹⁵ Jesús María Sanz Serna. Integración Geométrica. Discurso de recepción. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 28 de noviembre de 2007.

¹⁶ G.J. Sussman and J. Wisdom. Chaotic evolution of the solar system. *Science* 257, 52-62 (1992).

¹⁷ Javier Jiménez Sendín. Las Teorías de la Turbulencia y la Imaginación en la Física. Discurso de recepción. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 23 febrero de 2011.

Los procesos difusivos no lineales son el objeto del discurso de don Juan Luis Vázquez Suárez¹⁸, los cuales se ubican en el ámbito de las ecuaciones en derivadas parciales. Si bien la metodología para abordar estos procesos es claramente distinta de la empleada en ecuaciones diferenciales ordinarias, el texto está impregnado de la no linealidad. Además, sus aplicaciones abarcan campos diversos como la física, biología, ingeniería, física estadística y sistemas dinámicos complejos, mostrando así su relevancia en múltiples disciplinas.

El discurso de don Pedro Miguel Echenique Landiribar¹⁹ dedica un capítulo entero a glosar algunas de las ideas de las que hablaré en mi discurso sobre complejidad, emergencia y reduccionismo, donde afirma una idea muy clara sobre la complejidad que deriva de las ideas del Premio Nobel de Física de 1977 Phil Anderson en su artículo *More is Different* del que hablaré en mi discurso. “La física de la materia condensada nos enseña que el paso de un nivel de complejidad a otro superior no es posible simplemente mediante la aplicación directa de los resultados del nivel anterior, sino que requiere nuevas ideas, nuevos principios que son característicos del nivel superior.” Otras frases remarcables del discurso son: “Una tarea esencial de la física teórica del futuro no será tanto escribir la ecuación última como entender el comportamiento emergente de varias maneras, incluida, en su día, la emergencia de la vida misma. Seguiremos conservando los preciosos valores del reduccionismo, pero adentrándonos más y más en la emergencia que surge de complejidades de todo tipo.” [...] “Las dos visiones, reduccionista y emergentista, se complementan y no son enemigas. Necesitamos reduccionismo con emergencia y emergencia con reduccionismo.”

Me ha llamado poderosamente la atención una idea que expresa en su discurso don Luis Manuel Liz Marzán²⁰ que quiero reseñar porque resulta muy pertinente en relación con el contenido de mi discurso: “Términos como fractales, fluctuaciones críticas, microemulsiones, teoría de caos o sinérgica, nos eran completamente ajenos e inmediatamente atrajeron mi atención a la hora de seleccionar el tema de trabajo para lo que entonces se denominaba “tesina de licenciatura”. ¿Estábamos siendo guiados hacia el concepto de interdisciplinariedad? Probablemente, aunque no soy consciente de haber manejado ese término por aquel entonces.”

¹⁸ Juan Luis Vázquez Suárez. Senderos de la Ciencia. Del operador Laplaciano a los procesos difusivos no lineales. Discurso de recepción. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 26 de marzo de 2014.

¹⁹ Pedro Miguel Etxenike Landiribar. Dinámica de iones y electrones en sólidos y superficies y pequeñas pinceladas sobre ciencia. Discurso de recepción. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 31 de mayo de 2017.

²⁰ Luis Manuel Liz Marzán. Nanomateriales plasmónicos y nanomedicina. Ciencia multidisciplinar en el siglo XXI. Discurso de recepción. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 27 de octubre de 2021.

Dados los contenidos de mi discurso y la intrínseca naturaleza interdisciplinar de la dinámica no lineal, la teoría del caos y los sistemas complejos es de especial interés mencionar algunas frases del discurso inaugural del curso 2014-2015 de don Carlos Belmonte Martínez²¹: “No obstante, para confirmar estas especulaciones será necesario individualizar los componentes de la actividad unificada del cerebro y modelar las capacidades computacionales de las redes neuronales interactivas que lo forman. En 1943, Warren McCulloch y Walter Pitts diseñaron matemáticamente la primera neurona artificial y postularon que el pensamiento podía ser reducido a los conceptos básicos de la lógica binaria.” [...] “La moderna neurobiología ha abordado el cerebro, tanto a partir de una perspectiva reduccionista que intenta comprender el todo mediante su descomposición en partes, como con planteamientos holistas, que tratan de explicar de manera integrada su funcionamiento. Aunque los reduccionistas son criticados por caer en un determinismo simplificador y se reprocha a los holistas proponer, sin base mecanicista, constructos teóricos especulativos sobre las funciones cognitivas, ambas aproximaciones son válidas y complementarias para entender científicamente el cerebro.” Por último, señala de una manera visionaria que “No es descabellado imaginar que, en unos años, el estudio de los mecanismos cerebrales de computación pase de los biólogos a los físicos, matemáticos e informáticos, que deberán liderar el intento de modelar los aspectos cognitivos del cerebro y clarificar si nuestro pensamiento tiene además componentes no computables, como todavía discuten los investigadores en inteligencia artificial.”

Quisiera finalizar ahora esta parte para contar una anécdota personal que viví en 1990 cuando el 10 de septiembre decidí escribir a don Ángel Martín Municio, Presidente de la RAC y Académico de la RAE, sugiriendo incluir la palabra “Caos” en el Diccionario de la Real Academia Española. Mi propuesta era: “Caos: (3) mat. (fis.) Comportamiento estocástico en un sistema determinista”. Me respondió después de meses el Académico de la RAE, don Rafael Alvarado, informándome que sería considerada por la Comisión de Vocabulario Técnico de la RAE y que en todo caso pasaría a los archivos de la RAE como autoridad original. Cual sería mi sorpresa ver que en la 22ª edición del Diccionario de la Real Academia Española se incluyó la tercera acepción de la voz como: “Caos: 3. m. Fís. y Mat. Comportamiento aparentemente errático e impredecible de algunos sistemas dinámicos deterministas con gran sensibilidad a las condiciones iniciales.”

²¹ Carlos Belmonte Martínez. Desenmarañando el cerebro. Los caminos de las neurociencias. Discurso de inauguración del curso 2014-2015. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 16 de octubre de 2014.

En los comienzos

Never in the annals of science and engineering has there been a phenomenon so ubiquitous, a paradigm so universal, or a discipline so multidisciplinary as that of chaos. Yet chaos represents only the tip of an awesome iceberg, for beneath it lies a much finer structure of immense complexity, a geometric labyrinth of endless convolutions, and a surreal landscape of enchanting beauty. The bedrock which anchors these local and global bifurcation terrains is the omnipresent nonlinearity that was once wantonly linearized by the engineers and applied scientists of yore, thereby forfeiting their only chance to grapple with reality.²²

Leon Chua

Hablar de los orígenes de las cosas nunca es fácil y, por supuesto, los orígenes de cualquier disciplina no son una excepción. Como ya anuncié en la introducción, mi objetivo es aportar una visión panorámica e histórica que nos permita comprender la riqueza y la amplitud de sus múltiples aplicaciones a la ciencia.

Inestabilidades en fluidos y soluciones singulares

Claude Navier (1785-1836), Barré de Saint-Venant (1797-1886) y Joseph Boussinesq (1842-1929) fueron destacados ingenieros y matemáticos, cada uno conocido por contribuciones significativas en sus respectivos campos. Claude Navier fue un ingeniero y físico francés que realizó importantes trabajos en la teoría de la elasticidad y fluidos. La ecuación de Navier-Stokes, que describe el movimiento de fluidos, lleva su nombre, que comparte con el físico inglés George Stokes. Por otro lado, Barré de Saint-Venant, ingeniero y matemático francés, es conocido por sus contribuciones en la mecánica de fluidos y la teoría de la elasticidad. Formuló las ecuaciones de Saint-Venant para el flujo de agua en canales abiertos. Joseph Boussinesq fue un matemático y físico francés, conocido por sus contribuciones a la teoría de fluidos y la geofísica. Desarrolló las ecuaciones de Boussinesq, utilizadas para modelar el comportamiento de las olas en fluidos. Los tres han dejado un legado duradero en sus respectivos campos, y sus contribuciones siguen siendo fundamentales en la física y la ingeniería. En sus estudios sobre la modelización matemática de los fluidos, estaban fascinados por la investigación de las llamadas soluciones singulares de algunas ecuaciones diferenciales,

²² Leon Chua. International Journal of Bifurcation and Chaos 1(1), 1-2 (1991).

donde diferencias infinitamente pequeñas producirían efectos enormemente diferentes. Karl Pearson, uno de los fundadores de la estadística matemática escribió “tengo una carta de Clerk Maxwell en la que dice que el trabajo de Saint-Venant y Boussinesq en soluciones singulares está marcando un hito...”²³

Determinismo, singularidades e inestabilidades

A lo largo del siglo XIX aparecieron ciertas limitaciones en torno al mito del determinismo. Por un lado, es fundamental tener un conocimiento completo de las condiciones iniciales del problema. Por otro lado, surgieron notables dificultades para resolver la dinámica de un sistema físico formado por un gran número de partículas. Esto último llevó a la introducción de conceptos relacionados con la teoría de la probabilidad en el estudio de las leyes físicas de los sistemas formados por muchas partículas, como gases, líquidos y sólidos, dando lugar al nacimiento de la mecánica estadística. Los padres fundadores de la disciplina incluyen a Ludwig Boltzmann (1844-1906), Josiah Willard Gibbs (1839-1903) y James Clerk Maxwell (1831-1879).

Sobre Maxwell y el caos

El físico escocés James Clerk Maxwell (1831-1879), es conocido fundamentalmente por haber unificado las leyes de la electricidad y el magnetismo. Sin embargo, sus contribuciones a la física han sido de las más prolíficas de la historia. Entre su gran labor científica, es importante mencionar que es considerado el padre de la automática y la mecánica estadística. Sin embargo, el papel que desempeñó en el desarrollo de la teoría moderna del caos es en gran parte desconocido.

De uno de sus escritos: *¿Tiende el progreso de la ciencia física a dar alguna ventaja a la opinión de la necesidad (o determinismo) sobre la de la contingencia de los acontecimientos y el libre albedrío?*²⁴ de una conferencia pronunciada en Cambridge, el 11 de febrero de 1873 son las siguientes extractos que muestran hasta qué punto James Clerk Maxwell era conocedor

²³ Ian Hacking. *The Taming of Chance* (Cambridge: Cambridge University Press, 1990).

²⁴ James Clerk Maxwell, ‘Does the Progress of Physical Science tend to give any Advantage to the Opinion of Necessity (or Determinism) over that of the Contingency of Events and the Freedom of the Will?’, in *The Life of James Clerk Maxwell, with selections from his correspondence and occasional writings*, by Lewis Campbell and William Garnett (MacMillan and Co., London, 1884), pp. 357-366

de lo que hoy llamamos dependencia sensible a las condiciones iniciales, que es la huella del caos en un sistema físico.

"La consideración de la estabilidad y la inestabilidad puede arrojar mucha luz sobre algunas de estas cuestiones. Cuando el estado de las cosas es tal que una variación infinitamente pequeña del estado presente altera sólo una cantidad infinitamente pequeña el estado en algún momento futuro, se dice que la condición del sistema ya esté en reposo o en movimiento, es estable; pero cuando una variación infinitamente pequeña del estado presente produce una diferencia finita en el estado del sistema en un tiempo finito, se dice que la condición del sistema es inestable. Es evidente que la existencia de condiciones inestables hace imposible la predicción de acontecimientos futuros, si nuestro conocimiento del estado presente es sólo aproximado y no exacto."

Esta misma opinión ha sido defendida por Brian Hunt y James Yorke en el artículo titulado *Maxwell on Chaos*²⁵, donde se cita textualmente: "En nuestra opinión, Maxwell fue la primera persona en comprender el caos, es decir, reconoció la existencia y la importancia de sistemas con "una dependencia sensible de los datos iniciales". Dejaremos que Maxwell explique su comprensión con sus propias palabras".

Maxwell concluye su ensayo de 1873 alentando a sus colegas científicos a no limitarse al estudio de modelos no caóticos de sistemas físicos: "...pero es de esperar que en fenómenos de mayor complejidad haya un número mucho mayor de singularidades, cerca de las cuales el axioma de que causas similares producen efectos similares deja de ser cierto." [...] "Por lo tanto, si los cultivadores de la ciencia física... son llevados al estudio de las singularidades e inestabilidades en la búsqueda de los arcanos de la ciencia, en lugar de las continuidades y estabilidades de las cosas, la promoción del conocimiento natural puede tender a eliminar ese prejuicio a favor del determinismo que parece surgir de asumir que la ciencia física del futuro es una mera imagen ampliada de la del pasado."²⁶

²⁵ Brian R. Hunt and James A. Yorke. *Maxwell on Chaos*. *Nonlinear Science Today* 3(1), 1-4 (1993).

²⁶ Lewis Campbell and William Garnett. *The Life of James Clerk Maxwell, with selections from his correspondence and occasional writings* (MacMillan and Co., London, 1884), pp. 364 y 366.

Una herramienta muy importante en dinámica no lineal es la noción geométrica de espacio de fases. La noción de espacio de fases ²⁷ se atribuye al físico estadounidense Josiah Willard Gibbs (1839-1903), quien fue uno de los pioneros de la teoría cinética y también es considerado uno de los padres fundadores de la *mecánica estadística*, término que también acuñó. El concepto de espacio de fases juega un papel crucial en la dinámica no lineal, de cuyo análisis podemos obtener mucha información sobre un sistema dinámico dado. El estudio del espacio de fases de un sistema dinámico permite obtener estructuras fractales complejas cuyas consecuencias físicas se reflejan en la incertidumbre asociada a la predicción del estado futuro del sistema.

La mecánica estadística es una parte esencial de la física teórica cuyo propósito es describir las propiedades macroscópicas de un sistema muy grande de partículas en términos de sus propiedades promediadas. Es una disciplina que combina las leyes básicas de la dinámica de un sistema de partículas junto con las leyes de la estadística, especialmente las relativas a la ley de los grandes números. El descubrimiento del caos determinista ha estimulado a algunos físicos a reconsiderar desde una nueva perspectiva los fundamentos de la mecánica estadística. Esto se debe a que el caos determinista implica que no solo los sistemas con un gran número de partículas, sino incluso los sistemas deterministas con muy pocos grados de libertad pueden presentar comportamientos que requieren de herramientas estadísticas para su estudio. Durante este último siglo se han hecho muchos esfuerzos para dar una interpretación correcta de los orígenes dinámicos de la irreversibilidad. A pesar de todos los esfuerzos realizados hasta la fecha, todavía no existe un acuerdo general sobre cuáles son los ingredientes esenciales necesarios para fundamentar la mecánica estadística.



Fig. 3. Los padres fundadores de la Mecánica Estadística: Ludwig Boltzmann (1844-1906), James Clerk Maxwell (1831-1879) y Josiah W. Gibbs (1839-1903)

El problema de la irreversibilidad fue una de las principales preocupaciones de uno de los "padres fundadores" de la mecánica estadística (Fig. 3), el físico vienés Ludwig Boltzmann

²⁷ D.D. Nolte. The tangled tale of phase space. *Physics Today* 63 (4), 33–38 (2010).

(1844-1906). La objeción planteada por Josef Loschmidt (1821-1895) al programa de Boltzmann, consistente en derivar las leyes de la termodinámica directamente del comportamiento mecánico, revelaba lo paradójico de una situación en la que, mientras que las leyes de la mecánica son reversibles bajo inversión temporal, el comportamiento termodinámico de los sistemas es fundamentalmente irreversible. Ciertamente, en este siglo se ha avanzado mucho en el intento de aclarar el origen dinámico de las ecuaciones cinéticas, aunque el problema sigue abierto hasta cierto punto. Siguiendo a Boltzmann, los primeros intentos de fundamentar la mecánica estadística clásica se basaron en la supuesta validez de la hipótesis ergódica, que, después de realizar considerables esfuerzos teóricos, condujo a un verdadero callejón sin salida. Siguiendo el trabajo de Maxwell y Boltzmann, Gibbs introdujo el concepto de *mixing* asociado a un sistema que utiliza el símil de una gota de aceite en un fluido inmiscible, una pequeña región en el espacio de fase que simula la gota de aceite, la evolución dinámica ayudaría a llenar todo el espacio de fases.

Esta idea implica que para un sistema dinámico dado, dos puntos suficientemente cercanos se separarían exponencialmente después de un cierto período de tiempo, ligado a la dependencia sensible a las condiciones iniciales y a la dinámica caótica. Uno de los métodos cuantitativos para determinar cuándo un sistema dinámico es caótico es mediante los llamados exponentes de Lyapunov²⁸, que derivan del trabajo del matemático ruso Alexander M. Lyapunov (1857-1918) sobre la estabilidad del movimiento con una enorme influencia en Física. Sus ideas fueron publicadas en el famoso artículo *El problema general de la estabilidad del movimiento*²⁹. Cuando un exponente de Lyapunov de un sistema dinámico es positivo, decimos que dicho sistema dinámico es caótico, lo que indica que la predicción de la evolución del sistema a largo plazo resulta imposible.

²⁸ Arkady Pikovsky and Antonio Politi. *Lyapunov exponents: a tool to explore complex dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2016).

²⁹ А. М. Ляпуновъ, “Къ вопросу объ устойчивости движения”, Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер., 3 (1893), 265–272. А. Liapunoff. Problème général de la stabilité du mouvement. Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2e série, tome 9 (1907), p. 203-474. A. M. Lyapunov. The general problem of the stability of motion. Int. J. Control. 55(3), 531- 773 (1992).

Poincaré, el problema de los tres cuerpos y el nacimiento del caos

Para entender el problema de los tres cuerpos³⁰, nos tenemos que remontar a los inicios de la ciencia moderna con los trabajos de Isaac Newton sobre el campo gravitatorio y la ley universal de la gravitación. El llamado problema de los dos cuerpos consiste básicamente en analizar el movimiento de un sistema formado por dos cuerpos que se atraen bajo la acción de fuerzas gravitatorias. Newton resuelve el problema reduciendo el movimiento de los dos cuerpos al movimiento de cada uno de ellos alrededor del llamado centro de masas, que es un punto cuya masa es la masa total del sistema.

Más tarde, se intentó resolver el problema de los tres cuerpos, que se puede formular de una manera sencilla: supongamos que 3 cuerpos de masas arbitrarias m_1 , m_2 y m_3 se atraen mutuamente por la ley de la gravitación de Newton. Suponiendo que pueden moverse libremente en un espacio tridimensional y con condiciones iniciales arbitrarias, determinar la evolución del movimiento. A pesar de la sencillez de su formulación, los intentos para su resolución han causado verdaderos quebraderos de cabeza a muchos científicos. Entre ellos podemos destacar a Isaac Newton (1642-1727), Alexis Clairaut (1713-1765), Leonhard Euler (1707-1783), Pierre-Simon Laplace (1749-1827), Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), Carl Jacobi (1804-1851), George Hill (1838-1914) y Henri Poincaré (1854-1912).

Es precisamente este último quien escribió unas famosas memorias en 1889 *sobre el problema de los tres cuerpos y las ecuaciones de la dinámica*³¹, tras ganar el premio del concurso sobre la estabilidad del sistema solar convocado por el rey Oscar II de Suecia y Noruega con motivo de su 60 aniversario. Este concurso³² había sido propuesto por el matemático sueco Gösta Mittag-Leffler³³, quien había recibido de su maestro el matemático alemán Karl Weierstrass, la idea de que los concursantes escribieran un trabajo original enfrentándose a una de entre cuatro preguntas. Una de las cuatro preguntas de Weierstrass tenía que ver con la Mecánica Celeste. La pregunta nació de una sugerencia formulada por el matemático Peter Gustav Lejeune Dirichlet de la Universidad de Göttingen, quien en 1858 le había dicho a su estudiante Leopold

³⁰ M. Valtonen, J. Anosova, K. Kholshevnikov, A. Mylläri, V. Orlov, K. Tanikawa. *The Three-body Problem from Pythagoras to Hawking* (Springer, Cham, 2016).

³¹ Henri Poincaré. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. *Acta Mathematica* 13, 1-270 (1890).

³² M. Mikael Rågstedt. From Order to Chaos: The Prize Competition in Honor of King Oscar II. <http://www.mittag-leffler.se/library/prize-competition>

³³ Arild Stubhaug. *Gösta Mittag-Leffler. A Man of Conviction* (Springer, Berlin, 2010).

Kronecker que había descubierto un nuevo método para resolver ciertas ecuaciones diferenciales y señaló que aplicándolas a las ecuaciones de la mecánica celeste podría demostrar con todo rigor que el sistema solar era estable. El comité que evaluó este concurso estuvo formado por los matemáticos Karl Weierstrass, el francés Charles Hermite y el sueco Gösta Mittag-Leffler. El lema de Poincaré era: “*Nunquam praescriptos transibunt sidera fines*”.³⁴

Posteriormente, en 1892, Poincaré publicó su gran obra *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*³⁵ (Fig. 4) en tres volúmenes donde aparecen numerosos conceptos nuevos que han dado lugar al desarrollo de la teoría de sistemas dinámicos, como suelen llamarla los matemáticos o dinámica no lineal, término más utilizado por los físicos, así como por otras disciplinas matemáticas como la topología. Esta es una de las razones por las que Poincaré es considerado uno de los padres de la teoría del caos, ya que muchas ideas fundamentales de la teoría están contenidas en este libro.

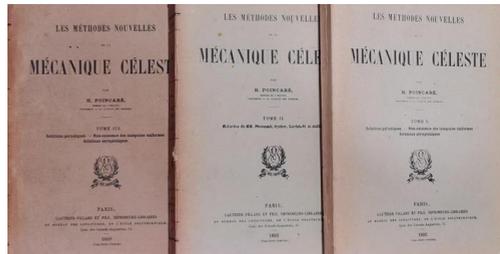


Fig. 4. Los Nuevos Métodos de la Mecánica Celeste en tres tomos fueron publicados por Henri Poincaré en 1892, 1893 y 1899.

A pesar de la dificultad del problema general de los tres cuerpos, hay un caso que se llama restringido, circular y plano, que es el que ha sido estudiado por muchos de los científicos a los que me he referido anteriormente. Fundamentalmente, se asume que el sistema no está formado por tres masas cualesquiera, sino que una de ellas se supone que es mucho más grande que las demás y la tercera de ellas es de masa despreciable en comparación con el resto. La analogía ciertamente proviene de considerar sistemas como el Sol, la Tierra y la Luna, o la Tierra, la Luna y un satélite, donde la aproximación de moverse en un plano también es correcta. En estas circunstancias y con un sistema de referencia adecuado, se pueden encontrar sin dificultad las ecuaciones de movimiento, de las que se deriva un potencial que nos da una idea de las posiciones de equilibrio en las que se puede encontrar un tercer cuerpo. Estas son las cinco

³⁴ Nada excede los límites de las estrellas.

³⁵ Henri Poincaré. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste* (Gauthiers-Villars et Fils, Paris, 1892, 1893, 1899).

posiciones de equilibrio que encontró Lagrange, por lo que actualmente se conocen como los puntos de Lagrange (Fig. 5).

El conocimiento de los puntos de Lagrange es muy útil. De hecho, en el punto L1 se encuentra el *Solar and Heliospheric Observatory* (SOHO), que es una sonda espacial para estudiar el Sol. Desde el 6 de enero de 2024 Aditya-L1 entró en la órbita de halo alrededor del punto de Lagrange L1. Se trata de una misión de observación solar

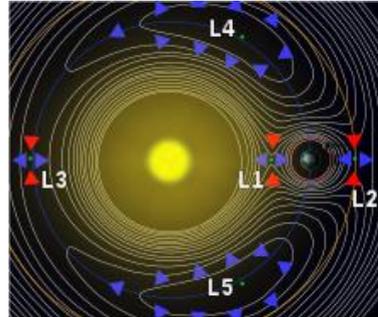


Fig. 5. La figura muestra las curvas equipotenciales del problema restringido de los tres cuerpos, en este caso, Sol-Tierra-Luna, donde se ilustran los cinco puntos de Lagrange.

de la Indian Space Research Organisation (ISRO) que estudiará la atmósfera solar, las tormentas magnéticas solares y su impacto en el medio ambiente alrededor de la Tierra. En el punto de Lagrange L2, el *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (WMAP) se posicionó para estudiar la radiación del fondo de microondas del universo, logrando que permanezca en su lugar con un consumo mínimo de combustible, manteniendo siempre sus sensores apuntando lejos de la Tierra y el Sol. En 2021 se lanzó el *James Webb Space Telescope* (JWST), que es un observatorio espacial que estudiará el cielo en frecuencia infrarroja y que orbita alrededor del punto de Lagrange L2. En 2022 se lanzó la misión *Euclid* por la ESA que también orbita alrededor del mismo punto L2.



Fig. 6. El matemático y físico francés Henri Poincaré (1854-1912)

Como se señaló anteriormente, Poincaré (Fig. 6) no abordó el problema de los tres cuerpos de manera general, sino que se centró en estudiar lo que se conoce como el "problema restringido de los tres cuerpos", que es un caso particular en el que se considera que una de las masas es muy pequeña en comparación con las demás. En este estudio encontró lo que denominó órbitas doblemente asintóticas u homoclínicas, que se caracterizan por tener un punto homoclínico en

el espacio de fases. La presencia de uno de estos puntos tiene implicaciones muy serias en la complejidad dinámica del sistema. Después de estudiar el problema, Poincaré escribió: "On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien n'est plus propre à nous donner une idée de la complication du problème des trois corps et en général de tous les problèmes de Dynamique."³⁶

Y es que al tratar de resolver este problema creó un método geométrico por medio del cual vislumbró que este problema tenía una dinámica muy compleja que es básicamente lo que ahora llamamos *caos determinista*. En la Fig. 7 se muestran las variedades invariantes de un punto fijo cuya intersección da lugar a la aparición de un punto homoclinico, generando la maraña caótica.

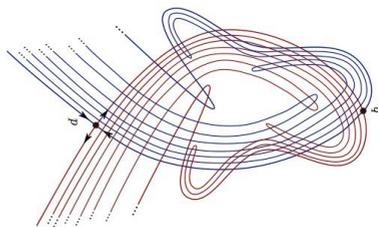


Fig. 7. Representación de la llamada maraña caótica, donde se muestra un punto homoclinico y la figura a la que se refería Poincaré.

La influencia de Poincaré al desarrollo de los sistemas hamiltonianos es muy significativa. En este sentido, resulta interesante señalar que su legado fue continuado por el matemático estadounidense George David Birkhoff (1884-1944), a quien se le atribuye haber acuñado el término *sistemas dinámicos*. Birkhoff, a su vez, ejerció una considerable influencia en Edward Lorenz, quien redescubriría la dependencia sensible a las condiciones iniciales a mediados del siglo XX.

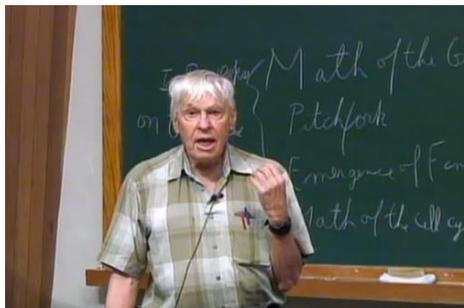


Fig. 8. Steve Smale, Medalla Fields 1966.

Dentro de esta corriente de pensamiento, y en el contexto americano, es necesario mencionar al matemático Steven Smale (Fig. 8), que recibió la medalla Fields en 1966 por sus grandes aportaciones a la teoría de los sistemas dinámicos. Es precisamente a él a quien se debe el concepto de *herradura de Smale*, que fue

³⁶ "Nos sorprenderá la complejidad de esta figura, que ni siquiera intento trazar. Nada es más adecuado para darnos una idea de la complicación del problema de los tres cuerpos y, en general, de todos los problemas de Dinámica". Henri Poincaré. *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste*, Tome 3, 1899.

un paso importante en la comprensión de la relación entre la existencia de un punto homoclínico y la noción de caos determinista, a través de la simple idea de la dinámica simbólica utilizando el llamado mapa de desplazamiento de Bernoulli.

Otra escuela clave dentro de esta misma tradición es la de Andrei N. Kolmogorov (1903-1987). Todos ellos desarrollaron nuevos métodos e hicieron notables contribuciones a la construcción de la dinámica no lineal. En el año 1954, en el Congreso Internacional de Matemáticas que tuvo lugar en Amsterdam, Kolmogorov enunció un teorema para los sistemas hamiltonianos que posteriormente fue demostrado por su estudiante Vladimir I. Arnold (1937-2010) y por el alemán Jürgen Moser (1928-1999), que ha resultado ser de considerable importancia. Este teorema se conoce actualmente como teorema KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser)³⁷ y tiene que ver con el problema de la estabilidad de toros invariantes en los sistemas integrables de la mecánica hamiltoniana bajo la acción de pequeñas perturbaciones. Este trabajo, de hecho, enlaza naturalmente con los trabajos pioneros de Poincaré sobre mecánica celeste, ya que había sacado a relucir la idea de la complejidad de las órbitas en el problema de los tres cuerpos, y el teorema KAM puede considerarse como una culminación de estas ideas. Como ya hemos visto, la estabilidad del sistema solar es un problema de especial importancia en mecánica celeste y el teorema KAM muestra que bajo ciertas condiciones estas órbitas permanecen confinadas en ciertas regiones.

En el magnífico artículo³⁸ de Phil Holmes se describe la historia que conecta a Poincaré, con la mecánica celeste, con la teoría de sistemas dinámicos, y con el caos. Ya en 1890 Poincaré comprendió que la presencia de puntos homoclínicos en el espacio de las fases, como consecuencia de la ruptura de las separatrices que conformaban las variedades estables e inestables constituían una fuente del caos. El método de Melnikov³⁹ permitió probar la existencia de puntos homoclínicos transversales en los mapas de Poincaré que surgen de ejemplos específicos de ecuaciones diferenciales perturbadas, lo que contribuyó a aportar un método analítico perturbativo para determinar condiciones para la aparición del caos en sistemas dinámicos no lineales. La transición de un sistema regular a un sistema caótico es

³⁷ H. Scott Dumas. *The KAM Story. A Friendly Introduction to the Content, History, and Significance of Classical Kolmogorov – Arnold – Moser Theory* (World Scientific, Singapore, 2014).

³⁸ P. Holmes. Poincaré, celestial mechanics, dynamical-systems theory and “chaos”. *Physics Reports* 193(3), 137-163 (1990).

³⁹ V.K. Melnikov. On the stability of the center for time periodic perturbations. *Trans. Moscow Math. Soc.* 12, 1-57 (1963).

bastante abrupta. En sistemas hamiltonianos esta transición se debe a un fenómeno que se conoce como superposición de resonancias⁴⁰ debido fundamentalmente al trabajo del astrónomo griego George Contopoulos. Si una perturbación va más allá de un cierto valor crítico, el sistema puede convertirse en muy caótico como en el caso del hamiltoniano de Hénon-Heiles⁴¹. Finalmente el método se popularizó con el trabajo del físico ruso Boris Chirikov llegando a llamar el criterio de Chirikov⁴². El hamiltoniano de Hénon-Heiles es un modelo de dinámica galáctica y constituye un paradigma en la dinámica no lineal en sistemas hamiltonianos bidimensionales e independientes del tiempo, que ha sido profusamente utilizado para estudiar caos numérico hamiltoniano, así como estructuras fractales en el espacio de las fases⁴³.

Dimensiones fraccionarias, fractales y caos

El desarrollo de la geometría fractal iniciado por el físico y matemático Benoit Mandelbrot⁴⁴ (1924-2010) (Fig. 9), quien había sido alumno del matemático francés Gaston Julia, ha jugado un papel fundamental en la comprensión y análisis del comportamiento complejo de los sistemas dinámicos no lineales. En cualquier caso, es importante no olvidar el papel desempeñado en muchos aspectos del desarrollo de la dinámica no lineal del matemático alemán Georg Cantor (1845-1918), particularmente con respecto al conjunto de Cantor del tercio mitad y su aparición constante en muchos problemas dinámicos.

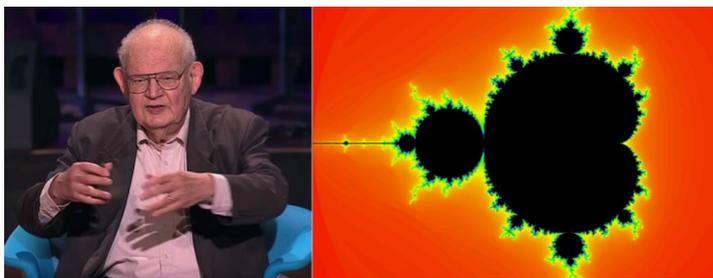


Fig. 9. Benoit Mandelbrot (1924-2010) y el famoso conjunto que lleva su nombre.

⁴⁰ G. Contopoulos. Resonance phenomena and the non applicability of the “third” integral. *Bulletin Astronomique* 2, 223-241 (1967).

⁴¹ M. Hénon and C. Heiles. The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments. *Astronomical J.* 69, 73-79 (1964).

⁴² B.V. Chirikov. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Phys. Rep.* 52, 263 (1979).

⁴³ J. Aguirre, J.C. Vallejo, M.A.F. Sanjuán. Wada basins and chaotic invariant sets in the Hénon-Heiles system. *Phys. Rev. E* 64 (6), 066208 (2001).

⁴⁴ Benoit B. Mandelbrot. *The Fractalist: Memoir of a Scientific Maverick*. Vintage. (2014).

Hay muchas formas geométricas complejas en la naturaleza, como las costas, los lechos de los ríos, las formas biológicas e incluso las complejas curvas de los mercados financieros. Una característica común en todos ellos es la autosemejanza. Esta es la propiedad que consiste en que cuando se aumenta una parte de esta forma, aparece el mismo tipo de estructura. Para caracterizar objetos con esta propiedad universal, es necesario el uso de dimensiones fraccionarias, lo que llevó a Benoit Mandelbrot a llamar a estos objetos *fractales*. La enorme labor de recopilación de los trabajos que habían realizado matemáticos antes que él, como el francés Gaston Julia, el sueco Helge von Koch, el polaco Waclaw Sierpiński, así como los trabajos sobre dimensiones del alemán Felix Hausdorff y el ruso Abram S. Besikovich tuvieron una notable influencia creando el campo de la geometría fractal.

La curva de Koch fue ideada por el matemático sueco Helge von Koch (1870-1924), y se construye iterativamente dividiendo un segmento de línea en tres partes iguales y reemplazando el segmento del medio con dos segmentos más grandes que forman un triángulo equilátero. Este proceso se repite en cada nuevo segmento, generando un fractal autosemejante. El fractal de Sierpinski se debe al matemático polaco Waclaw Sierpiński (1882-1969) y está formado por la eliminación sucesiva de triángulos más pequeños en el interior de un triángulo equilátero inicial. En cada iteración, se quitan triángulos, dejando un patrón recursivo. El proceso se repite, creando un diseño geométrico con autosemejanza a diferentes escalas.

La noción de dimensión es fundamental a la hora de medir objetos geométricos. Hay varias formas de definir el concepto de dimensión, pero está claro que un punto tiene dimensión cero, una línea recta tiene dimensión uno, un plano tiene dimensión dos y un cubo tiene dimensión tres. Sin embargo, y por extraño que parezca, existen objetos geométricos cuyas dimensiones no son un número entero, resultando ser un valor fraccionario. Esta es una noción simple de lo que se entiende por una dimensión fractal o una dimensión de Hausdorff, de modo que el conjunto de Cantor, mencionado anteriormente, tiene una dimensión de $\log 2 / \log 3 \approx 0.63$, la curva de Koch tiene una dimensión de $\log 3 / \log 4 \approx 1.26$ y el conjunto de Sierpinski tiene una dimensión de $\log 3 / \log 2 \approx 1.585$. Todos ellos son conjuntos fractales autosemejantes, ya que se obtienen mediante una regla iterativa de manera que la estructura básica se repite a todas las escalas.

Aunque en principio la geometría fractal y la dinámica no lineal son dos disciplinas que aparentemente no tienen nada que ver, sin embargo, como se señaló anteriormente, el caos y los fractales⁴⁵ están íntimamente ligados. Una de las ideas principales se debe a que asociada a la noción de caos existe la del atractor caótico que constituye un objeto geométrico de naturaleza fractal que vive en el espacio de fases, por lo que es imposible hablar de caos sin hablar de fractales y viceversa.

Complejidad en el movimiento de fluidos

El fenómeno de la turbulencia en el movimiento de fluidos es uno de los casos más espectaculares de comportamiento caótico. El matemático americano Norbert Wiener⁴⁶ lo llamaba “el problema de las ondas”, que había descubierto en Cambridge en los escritos de Geoffrey I. Taylor que luego inspirarían los estudios sobre el caos.⁴⁷ Aunque las ecuaciones de Navier-Stokes, que son las ecuaciones fundamentales del movimiento de fluidos, se conocen desde finales del siglo XIX, debe recordarse que aún no se conoce

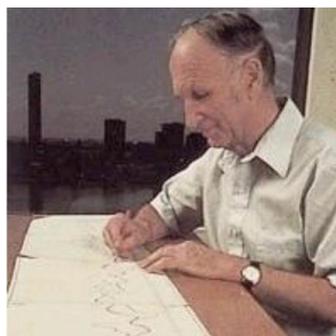


Fig. 10. Edward N. Lorenz (1917-2008)

la forma de sus soluciones en régimen turbulento. El *Clay Mathematics Institute* lo propuso en el año 2000 como uno de los *problemas del milenio*. En 1963, el meteorólogo del *Massachusetts Institute of Technology* (MIT) Edward N. Lorenz⁴⁸ (Fig. 10) desarrolló un modelo de tres ecuaciones diferenciales ordinarias para describir el movimiento de un fluido bajo la acción de un gradiente térmico.

A la hora de encontrar soluciones numéricas con la ayuda de un ordenador, volvió a encontrarse con el fenómeno de la dependencia sensible a las condiciones iniciales. Es decir, el sistema era inherentemente impredecible, de modo que pequeñas variaciones en la determinación de las condiciones iniciales conducían a soluciones drásticamente diferentes. En ese momento, muy

⁴⁵ H.-O. Peitgen, H. Jürgens, and D. Saupe. *Chaos and Fractals. New Frontiers of Science* (Springer, New York, 2004), Second edition.

⁴⁶ Norbert Wiener. *I Am a Mathematician* (MIT Press, 1964).

⁴⁷ Flo Conway and Jim Siegelman. *Dark hero of the information age. In search of Norbert Wiener the father of cybernetics* (Basic Books, New York, 2005).

⁴⁸ T.N. Palmer. Edward Norton Lorenz. 23 May 1917 — 16 April 2008. *Biogr. Mem. Fell. R. Soc.* 55, 139–155 (2009).

pocos le dieron importancia a este hecho, tal vez porque los resultados del trabajo de Lorenz se publicaron con un título un tanto críptico, *Deterministic Nonperiodic Flow*⁴⁹ en una revista de meteorología y pasaron desapercibidos para muchos científicos.

La teoría del físico ruso Lev D. Landau, y del alemán Eberhard Hopf que proponía la existencia de un conjunto infinito de frecuencias inconmensurables para explicar la turbulencia, fue superada en la década de 1970 por las aportaciones teóricas de David Ruelle y Floris Takens, quienes introdujeron en 1971 el concepto fundamental de *atractor extraño*⁵⁰. Se trata de un objeto geométrico atractivo, diferente de los casos previamente conocidos de puntos fijos periódicos, puntos fijos cuasi-periódicos o ciclos límite, de ahí el nombre de *extraño*, y que además tiene una dimensión fractal, no entera o fraccionaria.

Muy poco tiempo después, el físico alemán Hermann Haken escribió un artículo⁵¹, donde establece una analogía entre las ecuaciones de la dinámica de los láseres y el modelo de Lorenz siendo uno de los pioneros en el estudio de las inestabilidades y caos en láseres, así como en la comprensión teórica de fenómenos complejos en sistemas ópticos no lineales.

Mecánica Estadística, Origen de la Irreversibilidad y Teoría Ergódica

En este sentido, destacan científicos como George Birkhoff (1884-1944), quien propuso el teorema ergódico, que posteriormente fue demostrado por el matemático alemán Eberhard Hopf (1902-1983) utilizando el hecho de la ergodicidad de las trayectorias sobre superficies de curvatura negativa constante que el matemático francés Jacques Hadamard (1865-1963) había señalado unos años antes. Sin embargo, estos resultados tuvieron poco impacto en la fundamentación de la mecánica estadística de no equilibrio. Detalles sobre la teoría y el teorema ergódicos pueden verse en el magnífico artículo de Calvin Moore⁵², y en su relación con el caos y la aleatoriedad en el de Daniel Ornstein⁵³.

⁴⁹ E.N. Lorenz (1963). Deterministic Nonperiodic Flow. Journal of Atmospheric Sciences 20, 130-148 (1963).

⁵⁰ D. Ruelle and F. Takens. On the Nature of Turbulence. Commun. Math. Phys. 20, 167-192 (1971).

⁵¹ H. Haken. Analogy between higher instabilities in fluids and lasers. Physics Letters A 53, 77-78 (1975).

⁵² C. Moore. Ergodic theorem, ergodic theory, and statistical mechanics. Proc. Natl. Acad. Sci. USA 112, 1907-1911 (2015).

⁵³ D.S. Ornstein. Ergodic theory, randomness, and "chaos". Science 243 (4888), 182-187 (1989).

La importancia del gas de Lorentz, propuesto inicialmente por el físico holandés Hendrik A. Lorentz (1853-1928) en 1905 como modelo para el estudio de la conductividad eléctrica en metales, radica en sus propiedades físicas termodinámicas, en que es ergódico y tiene un exponente de Lyapunov positivo. El gran logro del matemático ruso-estadounidense Yakov G. Sinai, que recibió el Premio Abel en 2014, fue precisamente mostrar la conexión entre el clásico conjunto de Boltzmann-Gibbs para un gas ideal y un billar caótico de Hadamard⁵⁴.

Las ideas de la teoría del caos se han empleado para fundamentar la mecánica estadística, estableciendo conexiones profundas entre las propiedades dinámicas de un sistema, como los exponentes de Lyapunov y las propiedades de transporte. El conocimiento tanto de la mecánica estadística de no equilibrio como de la dinámica no lineal resulta fundamental para comprender los estudios sobre estados de no equilibrio. A pesar de los numerosos esfuerzos y las aparentes nuevas perspectivas para respaldar la mecánica estadística del no equilibrio basada en la teoría del caos, las extraordinarias dificultades conceptuales de tal empresa han impedido hasta ahora su consecución.

Oscilaciones y bifurcaciones. La ruta de los osciladores no lineales

Uno de los grandes caminos que nos han llevado al descubrimiento del caos es el estudio de los osciladores no lineales. Entre los pioneros en este camino podemos encontrar al físico inglés John William Strutt, Lord Rayleigh (1842-1919), quien se interesó en comprender la física de los instrumentos musicales. Para este tipo de sistemas, una aproximación inicial basada en osciladores lineales no es efectiva, ya que los instrumentos reales no producen un tono simple como lo hace un oscilador lineal. Por lo tanto, es necesario introducir fricción y términos no lineales de recuperación. Es decir, es necesario utilizar una fuerza elástica diferente a la proporcionada por la ley de Hooke: *ut tensio sic vis*. Rayleigh utilizó de manera ingeniosa estos elementos para crear modelos que explicaran el sonido emitido por los instrumentos musicales. En su célebre libro *The Theory of Sound*⁵⁵ publicado en 1877, Rayleigh introdujo una serie de métodos bastante generales como la noción de ciclo límite, que describe un movimiento periódico del sistema físico independientemente de sus condiciones iniciales. También existe un modelo de oscilador no lineal cuadrático conocido como oscilador de Helmholtz, en honor

⁵⁴ J. Hadamard. Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 4, 27-74 (1898).

⁵⁵ J.W. Strutt Baron Rayleigh. *The Theory of Sound. Vol. I* (London: Macmillan and Co., 1877.)

al físico y fisiólogo alemán Hermann von Helmholtz (1821-1894), quien publicó una monografía pionera sobre las sensaciones del tono⁵⁶ en 1863, que constituye una obra fundamental en acústica y percepción del sonido.

Le siguieron otros como el ingeniero holandés Balthasar van der Pol (1889-1959), así como el ingeniero alemán Georg Duffing (1861-1944) muy conocido por el oscilador de Duffing^{57,58}. Este modelo es paradigmático para el estudio de muchos fenómenos en dinámica no lineal. La teoría fue desarrollada más tarde a finales de la década de 1940, justo después de la Segunda Guerra Mundial, por dos matemáticos ingleses de la Universidad de Cambridge: Mary L. Cartwright (1900-1998) y John E. Littlewood (1885-1977), quienes demostraron que muchos de los experimentos de los físicos experimentales y muchas de las conjeturas de los físicos teóricos se derivaban directamente del análisis de las ecuaciones diferenciales del movimiento⁵⁹. De hecho, estos matemáticos habían seguido las ideas de George Birkhoff, y trabajaron en este problema cuando formaron parte del programa británico para desarrollar el radar durante la Segunda Guerra Mundial.

La escuela de pensamiento no lineal en Rusia se inició con el trabajo de Leonid I. Mandelstam (1879-1944) sobre osciladores no lineales. Esta línea de trabajo fue continuada por Alexander A. Andronov (1901-1952) (Fig. 11) y por Lev S. Pontryagin (1908-1988), quienes introdujeron la noción de estabilidad estructural de un sistema de ecuaciones, concepto asociado al de bifurcaciones de sistemas dinámicos.



Fig.11. El matemático ruso Alexander A. Andronov (1901-1952) fue uno de los pioneros de la ciencia no lineal.

El concepto de bifurcación de ciclos límite que había sido sugerido por Poincaré en 1892, fue demostrado por Andronov en 1930 y por Hopf en 1940, y se llama bifurcación de Andronov-Hopf, aunque es más conocida simplemente como bifurcación de Hopf. Esta escuela continuó más tarde en los años 50 y 60 en Gorki, actual Nizhni Novgorod,

⁵⁶ Hermann von Helmholtz. Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik [The Study of the Sensations of Tone as a Physiological Foundation for Music Theory]. (1863).

⁵⁷ G. Duffing, *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung* (Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1918). (Oscilaciones forzadas con frecuencias naturales cambiantes y su importancia técnica). K. Worden and H. Worden. Appendix: Translation of Sections from Duffing's Original Book. In *The Duffing Equation* (eds I. Kovacic and M.J. Brennan), 2011

⁵⁸ Ivana Kovacic and Michael J. Brennan, Eds. *The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behaviour*. (Wiley, 2011).

⁵⁹ M.L. Cartwright and J.E. Littlewood, On nonlinear differential equations of the second order, I, Jour. London Math. Soc. 20, 180–189 (1945).

obteniendo resultados paralelos al desarrollo de la teoría en Occidente. Todos los métodos de física no lineal se desarrollaron bajo el paradigma de osciladores no lineales y autooscilaciones.

Otra escuela importante sobre el pensamiento no lineal en la Unión Soviética fue la Escuela de Kiev de investigación de oscilaciones no lineales que fue iniciada por Nikolai M. Krylov (1879-1955) y su estudiante Nikolai N. Bogolyubov (1909-1992) (Fig. 12), a principios de la década de 1930.



Desarrollaron muchos trabajos fundamentales sobre soluciones cuasi-periódicas para sistemas

Fig. 12. Nikolai M. Krylov y Nikolai N. Bogolyubov que desarrollaron la Escuela de Mecánica No Lineal en Kiev en la década de 1930.

no autónomos y establecieron la disciplina de la Mecánica No Lineal como parte de la Física. La mayor parte de su trabajo fue publicado en el libro *Introducción a la Mecánica No Lineal* (1937)⁶⁰ en ruso. La versión en inglés realizada por el matemático ruso Solomon Lefschetz (1884-1973) fue publicada en 1943. Además, en 1946 comenzó a dirigir el proyecto sobre osciladores no lineales en Princeton financiado por la Office of Naval Research, recién fundada.

En Japón, la teoría de los osciladores no lineales y sus aplicaciones a la radiofísica se desarrollaron en la escuela del ingeniero japonés Chihiro Hayashi (1911-1986) en la Universidad de Kioto. Hayashi hizo notables contribuciones al estudio de los osciladores no lineales y sus aplicaciones prácticas en ingeniería eléctrica, publicando su famoso libro *Nonlinear Oscillations in Physical Systems*⁶¹ en 1964. En 1961 se produce un hecho notable por parte del ingeniero japonés Yoshisuke Ueda⁶², que era estudiante de doctorado de Chihiro Hayashi. Ueda estudió la dinámica de varios osciladores no lineales, como el oscilador de van der Pol y el oscilador de Duffing, y es precisamente en un modelo particular de este último donde aparentemente encontró por primera vez soluciones que ahora designamos como caóticas. En un escrito muy reciente⁶³ expone en primera persona como fueron los desarrollos que le llevaron a desvelar el caos.

⁶⁰ N.M. Krylov and N.N. Bogolyubov. *Introduction to Nonlinear Mechanics* (Ukrainian Academy of Sciences Publishers, Kiev, 1937). Traducción inglesa por S. Lefschetz. *Introduction to Nonlinear Mechanics*. (Princeton University Press, 1943).

⁶¹ Chihiro Hayashi. *Nonlinear Oscillations in Physical Systems* (Princeton University Press, Princeton, 2014).

⁶² Yoshisuke Ueda. *The Road to Chaos II* (Aerial Press, Santa Cruz, CA, 2001).

⁶³ Yoshisuke Ueda. *Uncovering the Nature of Chaos*. 27 November 2023.

<https://chaos.amp.i.kyoto-u.ac.jp/en/wp-content/uploads/2023/11/UNCyU.pdf>

La aplicación logística y dinámica de poblaciones



Fig. 13. Pierre François Verhulst (1804-1849)

Uno de los sistemas paradigmáticos donde se muestra una dinámica compleja incluyendo el comportamiento caótico es la llamada aplicación logística. A pesar de su aparente simplicidad, la aplicación logística deriva de la ecuación logística, que fue introducida en 1838 como modelo de crecimiento de la dinámica poblacional por el matemático belga Pierre François Verhulst (1804-1849) (Fig. 13) en su escrito *Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement*.⁶⁴

La aplicación logística fue popularizada por el australiano Robert M. May (1936-2020) (Fig. 14) tras la publicación de su influyente artículo *Simple Mathematical Models with very Complicated Dynamics*⁶⁵ y constituye uno de los paradigmas del comportamiento caótico de los sistemas dinámicos no lineales. Robert May comenzó su carrera científica como físico⁶⁶, pero pronto se trasladó a la biología convirtiéndose en uno de los pioneros de la ecología teórica, lo que además le llevó a convertirse en un pionero de la teoría del caos. La aplicación cuadrática, que es muy similar a la aplicación logística, también había sido ampliamente estudiada en otros contextos por el francés Gaston Julia (1893-1978), por el húngaro-estadounidense John von Neumann (1903-1957) y por el estadounidense Norbert Wiener (1894-1964) y Stanislaw Ulam (1909-1984).

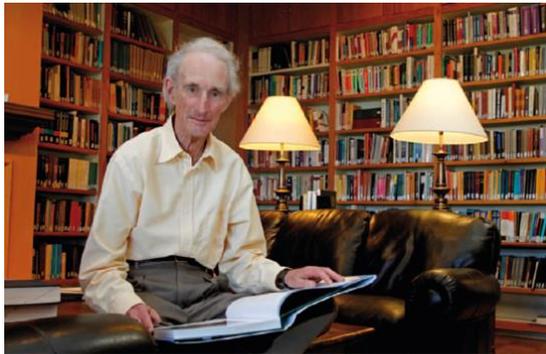


Fig. 14. Robert M. May (1936-2020), barón May de Oxford. Físico y pionero de la ecología teórica que lo llevó a contribuir a la teoría del caos.

⁶⁴ P. F. Verhulst. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. Correspondence Mathématique et Physique (Ghent), 10, 113-121 (1838).

⁶⁵ Robert M. May. Simple Mathematical Models with very Complicated Dynamics. Nature 261, 459 (1976).

⁶⁶ Miguel A.F. Sanjuán. Lord Robert May of Oxford: un científico excepcional que buscó la sencillez de lo complejo. Revista Española de Física 34(2), 47 (2020).

La ruta al caos por duplicación de periodo

Basta considerar uno de los sistemas caóticos más simples, como la aplicación logística (Fig.15), para observar uno de los fenómenos más sorprendentes de la dinámica caótica. Se trata de que a medida que variamos poco a poco el valor del parámetro del cual depende, la periodicidad de las soluciones se modifica en potencias de dos. Esto es, pasamos de tener órbitas de periodo 1 a órbitas de periodo 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, etc.

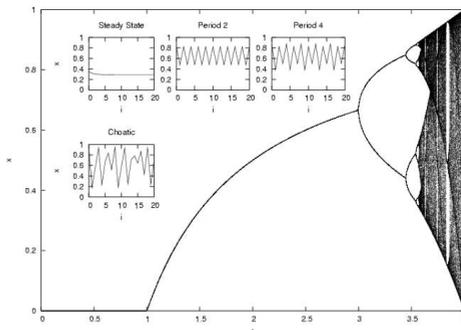


Fig. 15. Diagrama de bifurcaciones de la aplicación logística.

Uno de los artículos más influyentes en el campo fue, sin duda, el artículo anteriormente citado de Edward Lorenz *Deterministic nonperiodic flow*. El matemático y físico estadounidense de la Universidad de Maryland, el profesor James A. Yorke (Fig. 16), reconoció inmediatamente las implicaciones de tal descubrimiento, así como de sus repercusiones filosóficas, dando a conocer el trabajo de Lorenz a la comunidad científica.

Más tarde publicó el artículo titulado *Period Three Implies Chaos*⁶⁷ junto con su estudiante de doctorado Tien-Yien Li en 1975 donde introdujo el término caos además de demostrar un teorema riguroso. El físico y matemático Freeman Dyson escribió al respecto un artículo⁶⁸ donde afirma tajantemente: “El artículo de Li-Yorke es una de las joyas inmortales en la literatura matemática [...] El teorema dice que si existe una única órbita con período tres, entonces también existen órbitas caóticas.



Fig. 16. El matemático y físico estadounidense James Yorke. Acuñó el término caos en la literatura científica moderna.

⁶⁷ Tien-Yien Li and James A. Yorke. *Period Three Implies Chaos*. *Am Math Mon* 82, 985-992 (1975).

⁶⁸ Freeman Dyson. *Birds and frogs*. *Notices of AMS* 56(2), 212-223 (2008).

La prueba es simple y breve. A mi parecer, este teorema y su demostración arrojan más luz que mil imágenes hermosas sobre la naturaleza básica del caos.” En el año 1974, Robert M. May había dado a conocer el fenómeno de la duplicación de período que finalmente publicó en un famoso artículo publicado en *Nature* y que tuvo una enorme influencia en la comunidad científica. De hecho cuando Tien-Yien Li y James A. Yorke publican su famoso artículo *Period Three implies Chaos*, dan crédito de las cascadas de bifurcaciones de duplicación de periodo a un trabajo aún no publicado de Robert May. Sin embargo, en 1975, el propio James Yorke tiene conocimiento de un trabajo del matemático ucraniano Alexander N. Sharkovskii, publicado en ruso en una revista de matemáticas ucraniana en 1964, que contiene lo que ahora se conoce como “Teorema de Sharkovskii”, que fue publicado en ruso y donde parte del resultado de Li y Yorke aparecía como corolario. Sin embargo, una de las novedades fundamentales en el artículo de Li y Yorke es que demostraron que la aparición de una órbita de período tres implicaba la aparición de todas las demás, incluidas las órbitas caóticas, mientras que Sharkovskii no hablaba de las órbitas caóticas. Pero la historia no termina ahí. Es aquí donde aparece la figura del matemático finlandés, Pekka Juhana Myrberg (1892-1976)⁶⁹, que escribió una serie de artículos en 1958, 1959, 1962 y 1963, en revistas francesas y finesas, donde describe a la perfección las cascadas de bifurcaciones por duplicación de periodo para la aplicación cuadrática, de propiedades similares a la logística, usando cálculo numérico computacional. Ello explica que encontrara lo que él llamó el fin del espectro a lo que posteriormente se llamó punto de Feigenbaum, es decir el límite donde se producen las bifurcaciones de duplicación de periodo de potencias de dos.

El concepto de grupo de renormalización se había usado en el campo de la mecánica estadística para estudiar los llamados fenómenos críticos y las transiciones de fase y su desarrollo en estos campos le había valido el Premio Nobel al físico Kenneth Wilson en 1982. Posteriormente, estos métodos fueron aplicados por el físico Mitchell Feigenbaum (1944-2019) quien descubrió la existencia de exponentes críticos universales que caracterizaban la transición del movimiento periódico al caótico en mapas unidimensionales con la propiedad de duplicación de período. Y tras su artículo publicado en 1978 se popularizó el diagrama de bifurcaciones de Feigenbaum, el punto de Feigenbaum y la constante universal de Feigenbaum. Simultáneamente, el mismo descubrimiento fue realizado por los franceses Pierre Couillet y Charles Tresser, que en ese

⁶⁹ <https://inaesp.org/Legacy/>

momento eran estudiantes de doctorado en la Universidad de Niza, y por los físicos alemanes de la Universidad de Marburgo, Siegfried Grossmann y Stefan Thomae.

Hasta principios de los años ochenta, la mayoría de los trabajos eran de carácter teórico o el resultado de exploraciones numéricas con ordenadores. En cualquier caso, siempre se consideraron las importantes consecuencias que estos descubrimientos teóricos tuvieron para la física, así como la posible importancia para comprender la transición a la turbulencia de los fluidos. El físico francés Albert Libchaber (Fig. 17), llevó a cabo uno de los primeros experimentos en los que se demostró el fenómeno de la duplicación de período al estudiar las células convectivas de Rayleigh-Bénard a finales de la década de 1970. El físico estadounidense Robert Shaw, de la Universidad de California en Santa Cruz, realizó un experimento simple y particularmente relevante con un simple grifo que gotea⁷⁰.

Otro hito experimental importante fue llevado a cabo por los físicos estadounidenses Jerry Gollub y Harry Swinney (Fig. 17), quienes también encontraron el fenómeno de duplicación de período reproduciendo el clásico experimento de Taylor-Couette del movimiento de fluidos. Sus contribuciones a la verificación experimental de algunas de las ideas derivadas de la teoría del caos han estimulado gran parte del trabajo experimental.



Fig. 17. Los físicos Albert Libchaber, Harry Swinney y Jerry Gollub han sido pioneros en el trabajo experimental sobre el caos

Sobre los orígenes de la complejidad

A principios del siglo XX se produjeron desarrollos fundamentales en dos nuevos campos de investigación en Física que representan una enorme revolución conceptual en el desarrollo de la ciencia. Por un lado, la teoría de la relatividad que nos ayudó a entender el mundo a escalas cósmicas y la mecánica cuántica que implicó el conocimiento y la exploración del mundo

⁷⁰ Robert Shaw. *The dripping faucet as a model chaotic system* (Aerial Press, Santa Cruz, CA, 1984).

microscópico a nivel atómico y subatómico. Por otro lado, durante la segunda mitad del siglo XX, hemos podido ver cómo la dinámica no lineal y la teoría del caos emergieron como uno de los campos de actividad más fructíferos en investigación. Asimismo, la disciplina de la complejidad, o la física de sistemas complejos, ha recibido un gran impulso, incluyendo nuevas líneas de investigación y aportando una nueva forma de hacer las cosas.

A pesar de que para muchos es una noción relativamente nueva, ya que su uso se ha generalizado en los últimos años, sus orígenes se remontan a épocas muy anteriores. A la hora de explorar ciertas ideas y actividades que han contribuido al desarrollo de este conjunto de ideas que engloba la complejidad, cabe mencionar al neurocientífico estadounidense Warren McCulloch⁷¹ (1898-1969), quien junto con el matemático Walter Pitts (1923-1969) (Fig. 18), propuso en 1943 tal vez el primer modelo matemático de una neurona en lo que se conoce como modelo neuronal de McCulloch-Pitts para analizar



Fig. 18. Walter Pitts (1923-1969) y Warren McCulloch (1898-1969)

las propiedades del cerebro. De hecho, más tarde John von Neumann adaptó dicho modelo al diseño lógico de los ordenadores. McCulloch también desempeñó un papel destacado organizando las Conferencias Macy (1946-1953) en la década de 1940, que tenían como objetivo comprender los mecanismos de feedback en los sistemas biológicos, tecnológicos y sociales, y constituyó uno de los primeros foros para promover la interdisciplinariedad. En ellas participaron numerosos científicos de diversas disciplinas, entre los que podemos mencionar al psiquiatra William Ross Ashby, el antropólogo Gregory Bateson, los matemáticos John von Neumann, Walter Pitts y Norbert Wiener, el biofísico Max Delbrück, el teórico de la información Claude Shannon y el propio Warren McCulloch como moderador.

Muy relevante en relación a los orígenes de la complejidad es el reciente proyecto del Instituto Santa Fe, que ha publicado 88 artículos considerados fundamentales y comentados en cuatro volúmenes bajo el título *Foundational Papers in Complexity Science*.⁷²

⁷¹ Tara H. Abraham. Rebel Genius. *Warren S. McCulloch's Transdisciplinary Life in Science* (The MIT Press, Cambridge, MA, 2016).

⁷² *Foundational Papers in Complexity Science*. Edited by David C. Krakauer. 4 volumes (SFI Press, Santa Fe, NM, 2024).

El advenimiento de los ordenadores y su impacto en ciencia

La ciencia ha evolucionado mediante la aplicación de diferentes métodos, entre los que se encuentran sin duda los métodos experimentales y los métodos analíticos. Sin embargo, no es posible comprender el desarrollo y evolución de los sistemas complejos sin la presencia de los ordenadores, y nada será igual en el futuro precisamente por este mismo motivo. Es por ello por lo que es importante reconocer la enorme influencia de dos gigantes de la ciencia que contribuyeron tanto al advenimiento de los ordenadores como son Alan Turing (1912-1954) y John von Neumann (1903-1957).

Por otro lado, es de especial interés mencionar la figura del científico estadounidense Warren Weaver (1894-1978) (Fig. 19), quien entre otras cosas fue coautor con Claude Shannon (1916-2001) del famoso libro *The Mathematical Theory of Communication*⁷³ publicado en 1949. Warren Weaver publicó en 1948 un interesantísimo artículo, premonitorio en algunos aspectos y considerado fundacional, titulado “Science and Complexity”⁷⁴ en *American Scientist*. Muchos aspectos de la complejidad que se han discutido en los últimos años ya se encuentran en su relevante artículo, donde analiza la complejidad de los problemas de la ciencia y ya en esa época



Warren Weaver

Fig. 19. Warren Weaver (1894-1978) pionero en el uso de computadoras en la investigación científica.

hace casi tres cuartos de siglo hace un análisis que puede considerarse contemporáneo. Habla de problemas simples, con un pequeño número de variables. Además, considera problemas complejos y organizados, con muchas variables, donde imagina predecir el estado final de todas las bolas de billar después de un golpe, así como problemas complejos y desorganizados. Este documento presenta un sólido argumento a favor de la informática como disciplina, especialmente su fortaleza como enfoque multidisciplinario para resolver problemas mediante el uso de ordenadores, defendiendo asimismo la creación de grupos interdisciplinarios de investigación.

⁷³ Claude E. Shannon and Warren Weaver. *The Mathematical Theory of Communication* (The University of Illinois Press, 1949).

⁷⁴ Warren Weaver. Science and Complexity. *American Scientist* 36 (4), 536-544 (1948).



Fig. 20. Norbert Wiener (1894-1964) uno de los fundadores de la Cibernética.

Otro personaje fundamental en esta relación que estamos haciendo es el matemático Norbert Wiener (1894-1964) (Fig. 20), profesor del MIT, quien supo crear un entorno altamente interdisciplinar a su alrededor con numerosas aplicaciones a las ciencias de la vida.

Entre sus contribuciones a la ciencia, destaca la creación de la cibernética, cuyas ideas principales las expuso en su famoso libro *Cybernetics*⁷⁵ cuya segunda edición apareció en 1961, tan solo unos años antes de su fallecimiento en 1964. Es de destacar que uno de los autores pioneros en las ideas de la cibernética es el físico escocés James Clerk Maxwell, también de intereses multifacéticos. Entre los intereses de Wiener pueden mencionarse diversos campos de la ingeniería, entre los que se incluye la teoría del control y de las comunicaciones, la computación, la mecánica estadística, los procesos estocásticos, la biología celular, las neurociencias, la psiquiatría, la economía y otras ciencias sociales. En este sentido se adelantó mucho a su época y se interesó por muchos temas de los que ahora podrían enmarcarse dentro de la ciencia de los sistemas complejos. Se trata sin duda de un personaje muy interesante que hace más de setenta años ya pensaba en muchos de los problemas que ocupan a muchos científicos en la actualidad, algunos de ellos dentro del mundo de la complejidad.

⁷⁵ Norbert Wiener. *Cybernetics or control and communication in the animal and the machine* (Paris: Hermann & Cie, 1948).

Premios Nobel de Física. Física, Emergencia, No linealidad, Indeterminismo y Ciencias de la Vida

I wish to emphasize again that the progress of physics certainly will depend to a large extent on the progress of nonlinear mathematics, of methods of solving nonlinear equations. It may still be that every such problem is individual and requires individual methods. Yet, as I have said, there are definitely some common features and therefore one can learn by comparing different nonlinear problems.⁷⁶

Werner Heisenberg

El enorme desarrollo de la actividad científica en los últimos años ha provocado que muchas disciplinas encuentren campos de aplicación en otras ciencias. Esto es lo que, entre otros muchos casos, ha ocurrido con la aplicación de disciplinas como la física, las matemáticas y la ingeniería en el desarrollo de algunos aspectos de las ciencias de la vida, en los que podríamos incluir no solo la biología, sino también las ciencias biomédicas y la biotecnología. Lejos de ser una moda pasajera, es importante recordar que la influencia de estas ciencias y sus contribuciones a las ciencias de la vida tiene una larga historia.

Entre los modelos matemáticos más utilizados en neurociencia computacional, que tienen como objetivo analizar el cerebro como un sistema complejo, podemos considerar el modelo de Hodgkin-Huxley. En 1952 Alan L. Hodgkin y Andrew F. Huxley (Fig. 21) escribieron una serie de cinco artículos⁷⁷ en los que describían los experimentos que llevaban a cabo para determinar las leyes del movimiento iónico en las células nerviosas durante un potencial de acción.

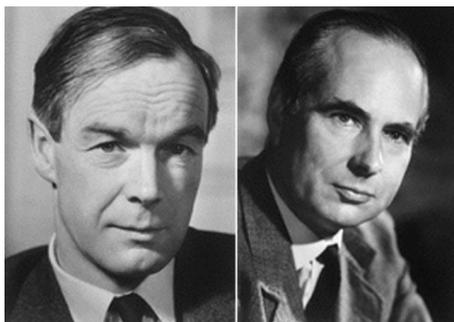


Fig. 21. Alan L. Hodgkin y Andrew F. Huxley recibieron el Premio Nobel de Fisiología o Medicina en 1963 por su modelo neuronal.

⁷⁶ Werner Heisenberg. Nonlinear problems in physics. Phys. Today 20(5), 27 (1967).

⁷⁷ A.J. Hopper, H. Beswick-Jones, and A.M. Brown. A color-coded graphical guide to the Hodgkin and Huxley papers. Advances in Physiology Education 46(4), 580-592 (2022).

Formularon un modelo matemático para explicar el comportamiento de las células nerviosas de un calamar gigante. Sorprendentemente, este modelo se formuló mucho antes de la existencia de los microscopios electrónicos y las simulaciones por ordenador, permitiendo a los científicos tener conocimientos básicos de cómo funcionan las células nerviosas sin saber cómo se comportaban las membranas. Sus investigaciones resolvían un misterio que provenía del año 1791 de los famosos experimentos del físico italiano Luigi Galvani⁷⁸ con ranas y la conducción de la electricidad. La relevancia del modelo neuronal de Hodgkin-Huxley en neurociencia matemática y computacional sigue siendo muy importante. Recibieron el Premio Nobel de Fisiología o Medicina en 1963, junto con Sir John C. Eccles por sus descubrimientos sobre los mecanismos iónicos implicados en la excitación y la inhibición en las porciones periféricas y centrales de la membrana de las células nerviosas.

Otro modelo de especial importancia en neurociencia computacional es el modelo de FitzHugh-Nagumo (1961), que es una simplificación del modelo de Hodgkin-Huxley propuesto en 1952. El modelo de FitzHugh-Nagumo es una reducción en dos variables, del modelo de Hodgkin-Huxley que tiene cuatro variables. La idea fundamental es mantener una variable llamada 'lenta' y otra llamada 'rápida'. Richard FitzHugh, quien en ese momento trabajaba en los National Institutes of Health en Bethesda, Maryland, Estados Unidos, también denominó al modelo como Bonhoeffer-Van der Pol (BVP), ya que en realidad conserva muchos de los ingredientes básicos del conocido oscilador de relajación de Van der Pol, formulado en 1928 por el ingeniero holandés Balthasar Van der Pol para modelar los latidos del corazón. La contribución del japonés Jinichi Nagumo, del Departamento de Física Aplicada de la Universidad de Tokyo, fue la de representar el modelo con un circuito electrónico. Básicamente se usa para modelizar los mismos fenómenos que el modelo de Hodgkin-Huxley, es decir, el control del potencial eléctrico de acción a través de la membrana de la célula. Este control se realiza a través del cambio del flujo de los canales iónicos de la membrana de la célula, dando lugar a cambios del potencial que se utiliza para enviar señales eléctricas entre las células. Como se ha indicado anteriormente, su uso no solamente se aplica para modelizar potenciales de acción en neuronas, sino también en otras células excitables.

⁷⁸ Luigi Galvani. *De viribus electricitatis in motu musculari* (Arnaldo Forni Editore, Bologna, 1998). Original 1791.

Física, Biología, Complejidad

Numerosos destacados matemáticos y físicos, entre ellos Premios Nobel, han abordado problemas biológicos y aspectos vinculados a la complejidad, demostrando que, más allá de sus campos de especialización reconocidos, también exploraron áreas que ahora consideramos dentro de las ciencias de la complejidad. Norbert Wiener, pionero en cibernética en los años cuarenta, es un ejemplo destacado, al igual que el físico Jack D. Cowan, pionero en la modelización matemática no lineal de neuronas en los años sesenta. Leo N. Cooper, ganador del Premio Nobel de Física en 1973, dedicó décadas al estudio del cerebro. Max Delbrück, ganador del Premio Nobel de Medicina en 1969, realizó trabajos innovadores en biología molecular. El físico Nicholas Metropolis, conocido por acuñar el término "métodos de Monte Carlo", trabajó con el MANIAC y en problemas de biología molecular computacional. Leo Szilard, quien se dedicó a la biología después de la Segunda Guerra Mundial, también influyó en el campo. Además, los Premios Nobel de Física Erwin Schrödinger y Niels Bohr, así como Philip W. Anderson, Murray Gell-Mann y otros, contribuyeron significativamente al desarrollo de ideas relacionadas con la complejidad.

En 1943, Erwin Schrödinger, premio Nobel de Física de 1933 y director del Dublin Institute for Advances Studies pronunció tres conferencias públicas tituladas *¿Qué es la vida?*. Las conferencias se publicaron como libro con el mismo título⁷⁹ (Fig. 22) en 1944 y tuvieron un enorme impacto en el desarrollo de la biología molecular, incluida la inspiración para el descubrimiento del ADN.

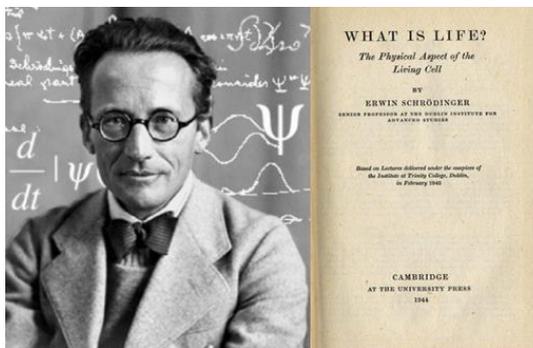


Fig. 22. Erwin Schrödinger, Premio Nobel de Física en 1933 y conocido sobre todo por sus contribuciones a la mecánica cuántica, autor del influyente libro *¿Qué es la vida?* publicado en 1944.

⁷⁹ Erwin Schrödinger. *¿Qué es la vida?* (Tusquets, Barcelona, 2019).

Física y emergencia

Uno de los conceptos fundamentales en el estudio de la complejidad es la noción de emergencia. En el ámbito de la física, se pueden observar numerosos ejemplos de sistemas donde las propiedades emergentes son evidentes, como en el caso de la superconductividad y la superfluidez. Es importante destacar que existe una investigación fundamental dedicada a explorar fenómenos complejos, donde el enfoque predominante no es el reduccionismo, que ha sido el paradigma principal en la evolución de la física en los últimos años, sino más bien la emergencia. Un aspecto esencial es que estos fenómenos complejos emergentes no se derivan directamente de las leyes microscópicas subyacentes, aunque, por supuesto, las cumplen.

Algunas de estas ideas fueron magistralmente presentadas por el físico norteamericano Philip W. Anderson (1923-2020)⁸⁰ (Fig. 23), Premio Nobel de Física en 1977, en un artículo



Fig. 23. Philip W. Anderson (1923-2020), Premio Nobel de Física 1977.

publicado en la revista *Science* en 1972 y titulado *More is different*⁸¹ donde deja muy clara la idea de que: "En cada nivel de complejidad aparecen propiedades completamente nuevas, y la comprensión de los nuevos comportamientos requiere una investigación que creo que es tan fundamental en su naturaleza como cualquier otra".

Philip W. Anderson introduce algunos aspectos de la física de los sistemas complejos en el artículo titulado *Physics: The Opening to Complexity*⁸², donde refiriéndose al trabajo de los físicos en complejidad señala: "Pero otra gran fracción se dedica a un tipo completamente diferente de investigación fundamental: la investigación de fenómenos que son demasiado complejos para ser analizados directamente mediante la simple aplicación de las leyes fundamentales. Estos físicos trabajan en otra frontera entre lo misterioso y lo comprendido: la frontera de la complejidad. En esta frontera, la

⁸⁰ Andrew Zangwill. *A Mind Over Matter: Philip Anderson and the Physics of the Very Many* (Oxford University Press, 2021).

⁸¹P. W. Anderson. *More is different*. *Science* 177, 393-396 (1972).

⁸²P. W. Anderson. *Physics: The Opening to Complexity*. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA* 92, 6653-6654 (1995).

consigna no es el reduccionismo sino la emergencia. Los fenómenos complejos emergentes no violan en modo alguno las leyes microscópicas, pero no aparecen como consecuencia lógica de estas leyes.”

También expresa muy bien el uso de modelos en física, donde necesariamente han de ser simplificados y contener la esencia del problema en estudio: "Con frecuencia, un modelo de este tipo arroja más luz sobre el funcionamiento real de la Naturaleza que cualquier cantidad de cálculos [más realistas]... Incluso cuando son correctos, [tales cálculos] a menudo contienen tantos detalles que ocultan la realidad en lugar de revelarla. Puede ser una desventaja más que una ventaja calcular con tanta precisión...Después de todo, la computación perfecta simplemente reproduce la Naturaleza, no la explica".⁸³

Resulta asimismo de gran interés leer lo que dice sobre el papel de la complejidad en física en un ensayo publicado en *Physics Today*: “Si la ruptura de la simetría, la localización, los fractales y los atractores extraños no son "fundamentales", ¿qué son? [...] “Mientras tanto, permítanme dar mis propias respuestas a mis preguntas iniciales: la complejidad, tal como se define en el párrafo anterior, es a menudo física. Es la vanguardia de la ciencia. Y seguramente es estimulante.”⁸⁴

Precisamente una de las ideas clave en la metodología de estudio de los sistemas complejos consiste en buscar las cuestiones esenciales que nos permiten comprender un problema sin necesidad de entender todos los detalles menores que contiene. Una representación pictórica de esta idea viene reflejada por la genial litografía de Pablo Picasso sobre el toro (Fig. 24). Es la misma idea la que se esconde cuando miramos a un modelo en física y lo comparamos con el objeto real.

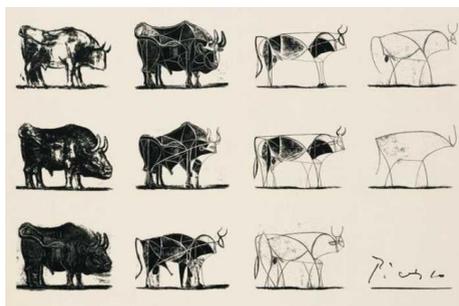


Fig. 24. Pablo Picasso destila la esencia de un toro en su famosa litografía "El Toro" (1945).

⁸³ P.W. Anderson. Local Moments and Localized States. *Reviews of Modern Physics* 50, 191–201 (1978).

⁸⁴ P.W. Anderson. Is Complexity Physics? Is It Science? What is It?. *Physics Today* 44(7), 9–11 (1991).

El fin del reduccionismo: La emergencia

En relación a la física de la emergencia, también cabe mencionar a Robert Laughlin, Premio Nobel de Física en 1998, quien propuso a sus mejores alumnos de la Universidad de Stanford el problema de deducir las leyes de la superfluidez a partir de primeros principios, a sabiendas de que es imposible. Precisamente para mostrarles la importancia de las propiedades emergentes en física, que es el argumento fundamental de su libro *A Different Universe: Reinventing physics from the bottom down*⁸⁵ con dos magníficas reseñas de los Premios Nobel de Física Anthony Leggett⁸⁶ y Phil Anderson.⁸⁷

El libro se basa en un interesante artículo titulado *La ciencia del todo*⁸⁸, donde entre las muchas cuestiones que señala podemos destacar los siguientes dos párrafos: “La tarea central de la física teórica en nuestro tiempo ya no es escribir las ecuaciones últimas, sino más bien catalogar y comprender el comportamiento emergente en sus muchas formas, incluida potencialmente la vida misma. Llamamos a esta física del próximo siglo el estudio de la materia adaptativa compleja. Para bien o para mal, estamos asistiendo a una transición de la ciencia del pasado, tan íntimamente ligada al reduccionismo, al estudio de la materia adaptativa compleja, firmemente basada en la experimentación, con su esperanza de proporcionar un punto de partida para nuevos descubrimientos, nuevos conceptos y nueva sabiduría.” [...] “Fin del reduccionismo, porque en realidad es un llamado a aquellos de nosotros preocupados por la salud de la ciencia física para enfrentar la verdad de que en la mayoría de los aspectos el ideal reduccionista ha alcanzado sus límites como principio rector. En lugar de una Teoría del Todo, parece que nos enfrentamos a una jerarquía de Teorías de las Cosas, cada una de las cuales emerge de su padre y evoluciona hacia sus hijos a medida que se reduce la escala de energía. El fin del reduccionismo no es, sin embargo, el fin de la ciencia, ni siquiera el fin de la física teórica.”

⁸⁵ R. Laughlin. *A Different Universe: Reinventing Physics from the bottom down* (Basic Books, 2005).

⁸⁶ A. Leggett. *A Different Universe: Reinventing Physics from the Bottom Down*. *Physics Today* 58 (10), 77–78 (2005).

⁸⁷ P.W. Anderson. *Emerging physics: a fresh approach to viewing the complexity of the universe*. *Nature* 434, 701, (2005).

⁸⁸ R.B. Laughlin and D. Pines. *The Science of Everything*. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* 97, 28-31 (2000).

Física, no linealidad e indeterminismo.

Debido a las enormes consecuencias sobre el determinismo en la física que la mecánica cuántica ha traído consigo a través del principio de incertidumbre de Heisenberg, la idea de indeterminismo se ha relacionado directamente con la mecánica cuántica. Esto ha llevado de alguna manera a considerar la mecánica clásica como completamente determinista y predecible, lo cual no es del todo cierto⁸⁹.

Max Born y el determinismo clásico

De nuevo se desprenden las mismas ideas que habíamos comentado sobre James Clerk Maxwell, el caos y el determinismo y la idea de la dependencia sensible a las condiciones iniciales, que es la huella del caos. Es fascinante corroborar que la idea de la dependencia sensible a las condiciones iniciales fue considerada en detalle por el físico alemán Max Born (1882-1970), Premio Nobel de Física en 1954, en un artículo titulado *¿Es la mecánica clásica de hecho determinista?*⁹⁰. En él presentó un estudio de un gas de Lorentz bidimensional propuesto inicialmente por el físico holandés Hendrik A. Lorentz (1853-1928) en 1905 como modelo para el estudio de la conductividad eléctrica en metales. En este modelo, una partícula se mueve en un plano lleno de esferas duras y choca con ellas, por lo que un pequeño cambio en las condiciones iniciales alterará significativamente la trayectoria de la partícula. Este hecho llevó a Born a concluir que el determinismo tradicionalmente relacionado con la mecánica clásica no es real, ya que no es posible conocer con infinita precisión las condiciones iniciales de un experimento físico.

Además, en la conferencia⁹¹ que pronunció con motivo de la concesión del Premio Nobel en 1954 aparecen las siguientes palabras: “La mecánica newtoniniana es determinista en el siguiente sentido: Si el estado inicial (posiciones y velocidades de todas las partículas) de un sistema se conoce de modo preciso, entonces el estado en otros instantes (antes o después) se puede calcular de las leyes de la mecánica. Todas las otras ramas de la física clásica han sido

⁸⁹ Una discusión interesante y reciente sobre el indeterminismo clásico en el contexto de la mecánica cuántica se puede ver en: Manabendra Nath Bera et al. Randomness in quantum mechanics: philosophy, physics and technology. Rep. Prog. Phys. 80, 124001 (2017).

⁹⁰ Max Born. Is Classical Mechanics in Fact Deterministic? Phys. Blätter 11(9), 49 (1955).

⁹¹ Max Born. Nobel Lecture. The Statistical Interpretations of Quantum Mechanics. Nobel Lecture, December 11, 1954.

construidas de acuerdo a este modelo. El determinismo mecánico se convirtió gradualmente en una especie de artículo de fe: el mundo como una máquina, un autómatas. En mi opinión esta idea no ha tenido antecedentes en la filosofía antigua y medieval. La idea es un producto del inmenso éxito de la mecánica newtoniana, particularmente en la astronomía. En el siglo XIX se convirtió en un principio filosófico básico para todas las ciencias exactas. Me pregunté a mí mismo si esto estaba realmente justificado. ¿Se pueden realmente hacer predicciones absolutas para todo momento en base a las ecuaciones clásicas del movimiento? Se puede ver fácilmente, mediante ejemplos sencillos, que esto solamente ocurre cuando se da la posibilidad de una medida completamente exacta (de la posición, la velocidad u otras cantidades). Pensemos en una partícula que se mueve sin fricción en una línea recta entre dos paredes, en las que experimenta un choque completamente elástico. Se mueve con velocidad constante igual a su velocidad inicial hacia adelante y hacia atrás, y se puede conocer de modo exacto donde estará en cualquier momento si conocemos de modo preciso la velocidad. Pero si se permitiera una pequeña imprecisión en la velocidad, entonces la imprecisión en la predicción de la posición en cualquier instante aumentaría con el tiempo. Si uno espera suficiente tiempo, entonces la imprecisión se habrá convertido en la distancia total entre las paredes. Por tanto, es imposible predecir nada acerca de la posición en un tiempo suficiente largo. De modo que el determinismo se convierte en indeterminismo desde el momento en que se permite la menor imprecisión en los datos de la velocidad.”

Feynman y la teoría del caos

El físico estadounidense Richard Feynman (1918-1988), ganador del Premio Nobel de Física en 1965 (Fig. 25), hace reflexiones similares en su conocido libro *Lectures in Physics*⁹² donde explica que el indeterminismo no pertenece exclusivamente a la mecánica cuántica, es una propiedad básica de muchos sistemas físicos.

En la sección 38-6 del primer volumen, titulada *Implicaciones filosóficas*, se hace una descripción magistral del indeterminismo en la mecánica clásica, y en particular

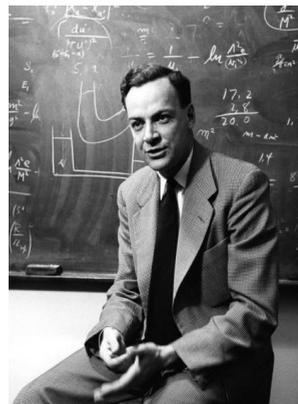


Fig. 25. Richard Feynman (1918-1988), Premio Nobel de Física en 1965.

⁹² R.P. Feynman, RB Leighton, and M. Sands. *The Feynman Lectures on Physics. Vol. I Mainly Mechanics, Radiation and Heat* (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1963). Sección 38-6 titulado «Philosophical implications», correspondiente al capítulo 38.

de uno de los aspectos más importantes en la teoría del caos: la dependencia sensible a las condiciones iniciales, que lleva como consecuencia que los sistemas caóticos sean impredecibles a largo plazo. Afirmando finalmente: “Porque en Mecánica Clásica ya había indeterminismo desde un punto de vista práctico”.

Enrico Fermi (1901-1954) y el experimento FPUT

Enrico Fermi (1901-1954), Premio Nobel de Física en 1938, es bien conocido por sus trabajos sobre radioactividad, así como por la física nuclear. Menos conocido es el papel que también jugó en los albores de la física no lineal. De hecho, por un trabajo realizado un año antes de morir se le reconoce como uno de los pioneros de la simulación numérica por ordenador por



Fig. 26. Enrico Fermi, John Pasta, Stanislaw Ulam y Mary Tsingou

un famoso experimento que realizó en los Alamos en 1954 conocido como experimento de Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou⁹³ en que participaron Enrico Fermi, John Robert Pasta, Stanislaw Ulam y Mary Tsingou. (Fig. 26)

Mary Tsingou, junto a un grupo de recién graduados, fue contratada para llevar a cabo cálculos manuales. Tras haber sido asignada a la división teórica, pasó rápidamente a la división que dirigía Nicholas Metropolis, para trabajar en el nuevo MANIAC I que nadie sabía programar. Ella y Mary Hunt fueron las primeras programadoras en realizar trabajos exploratorios. El ordenador se utilizaba principalmente para tareas relacionadas con armas, pero de vez en cuando, y sobre todo durante el fin de semana, los investigadores podían utilizarla para estudiar problemas de física. Mary Tsingou y John Pasta fueron los primeros en crear gráficos por

⁹³ E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam. Studies of Nonlinear Problems. Los Alamos National Laboratory Document LA-1940 (1955), in E. Segrè, ed., *Collected Papers of Enrico Fermi*, Vol. 2, (U. Chicago Press, Chicago, 1965).

ordenador cuando consideraron un problema con una explosión y lo visualizaron en un osciloscopio

Fermi propuso ingeniosamente que los ordenadores podrían usarse para realizar experimentos numéricos, de modo que propuso verificar la predicción de la física estadística sobre la termalización de sólidos. Los cálculos preliminares confirmaron que la energía introducida en un solo modo de Fourier se desplaza a otros modos, de manera que el comportamiento cuasi-periódico inicial no se observó debido a la lentitud del ordenador. Sin embargo, un día, el ordenador no se detuvo según lo planeado, y los investigadores descubrieron con asombro que casi toda la energía regresó al modo inicial, recuperando el estado original casi perfectamente. La joven Mary Tsingou⁹⁴ realizó los cálculos para este primer experimento numérico en el MANIAC I en 1955 para simular la relajación de energía.

No es sorprendente que destacados físicos, como el italiano Angelo Vulpiani, afirmen que la mayoría de los físicos reconocen la importancia de los sistemas no lineales no tanto por los teoremas de Kolmogorov, Arnold y Moser, sino por la sugestiva potencia de los gráficos de simulaciones de los pioneros del caos como Fermi, Pasta, Ulam, Chirikov, Lorenz o Hénon.⁹⁵

Erwin Schrödinger (1887-1961)

La vida científica de Erwin Schrödinger fue muy multifacética, y entre sus escritos existen contribuciones directas o indirectas a ideas sobre no linealidad e indeterminismo, además de las ya mencionadas a las ciencias de la vida. En 1935 publicó un breve trabajo en español en la revista *Anales de la Sociedad Española de Física y Química*, que lleva por título: *¿Son las verdaderas ecuaciones del campo electromagnético lineales?*⁹⁶, donde considera que no deja de ser curioso, que mientras la presión de la luz se obtiene de las ecuaciones de Maxwell, que son lineales; la presión del sonido se obtiene por una aproximación lineal de las verdaderas ecuaciones de la hidrodinámica, que son no lineales. De este modo Schrödinger piensa que las

⁹⁴ Thierry Dauxois. Fermi, Pasta, Ulam, and a mysterious lady. *Physics Today* 61(1), 55–57 (2008).

⁹⁵ Massimo Falcioni and Angelo Vulpiani. Enrico Fermi's contribution to non-linear systems: The influence of an unpublished article, pp 271-285, in *Enrico Fermi His Work and Legacy*, edited by Carlo Bernardini and Luisa Bonolis (Springer, Berlin, 2001).

⁹⁶ Erwin Rudolf Alexander Schrödinger. ¿Son lineales las verdaderas ecuaciones del campo electromagnético? *Anales de la Sociedad de Física y Química*, Vol. 33, 511-517 (1935).

ecuaciones de Maxwell no son más que la aproximación lineal de las verdaderas ecuaciones del electromagnetismo, que por analogía debían de ser no lineales.

Las siguientes citas muestran hasta qué punto ideas tan íntimamente relacionadas con la no linealidad y el indeterminismo y tan naturales en los desarrollos posteriores de la dinámica no lineal y la teoría del caos estaban en la mente de Schrödinger. Tal y como cita Walter Moore⁹⁷, Schrödinger escribió una carta a Max Born donde le decía: “Si todo fuera lineal, nada influiría en nada’, me dijo Einstein una vez. Y eso es en realidad así. Los defensores de la linealidad deben permitir términos de orden cero, como el lado derecho de la ecuación de Poisson, $\Delta V = -4\pi\rho$. A Einstein le gusta llamar a estos términos de orden cero 'asylum ignorantiae”.

Y a propósito del indeterminismo, mucho antes que se formulara en la mecánica cuántica, decía: “Los intentos modernos de renunciar al determinismo resultan particularmente interesantes debido a que sus afirmaciones sobre la ausencia de determinismo, lejos de ser vagas e inexactas, son cuantitativamente bastante definidas y pueden expresarse en centímetros, gramos y segundos. Como ejemplo simple, podemos tomar una masa puntual en movimiento, ya sea aislado o formando parte de un sistema de masas puntuales que interactúan entre sí. La afirmación que se hace es que su movimiento no puede preverse con completa precisión porque, entre otras cosas, sería necesario conocer su posición y velocidad en el momento inicial; y se sostiene que es imposible en principio determinar ambas con exactitud”. [...] “Mucho antes de que la mecánica cuántica moderna hiciera sus afirmaciones cuantitativas con respecto al grado de inexactitud, ya era posible, aunque no necesario, dudar de la justificación del determinismo desde un punto de vista mucho más general. De hecho, tales dudas fueron planteadas en 1918 por Franz Exner, nueve años antes de que Heisenberg estableciera su relación de indeterminación. Sin embargo, se prestó poca atención a ellas y, si se les brindó apoyo, como hizo el autor en su discurso inaugural en Zúrich⁹⁸, se encontraron con una considerable sacudida de cabezas”.⁹⁹

⁹⁷ Walter Moore. *Schrödinger. Life and thought* (Cambridge University Press, Cambridge, 1989), p. 381. E. Schrödinger. Letter to Max Born, 1942.7.27. Staatsbibliothek Preussischer Kulturbesitz, Berlin, Born Nachlass 704.

⁹⁸ Este fue el discurso inaugural de Schrödinger en la Universidad de Zurich, el 9 de diciembre de 1922.

⁹⁹ Indeterminism in Physics. Schrödinger presented this paper 16th June, 1931 to the Congress of A Society for Philosophical Instruction in Berlin. (Erwin Schrödinger, 1935, Science and the Human Temperament, Chapter III.) pp. 43-65

Werner Heisenberg (1901-1976)

Werner Heisenberg (Fig. 27) es reconocido por sus importantes contribuciones a la mecánica cuántica. Sin embargo, sus ideas sobre problemas no lineales en física, como se reflejan en su artículo sobre este tema¹⁰⁰, son bastante desconocidas. En dicho artículo publicado en *Physics Today* en 1967 se glosa con detalle la relevancia de los problemas no lineales en física. De hecho, ya Isaac Newton formuló los problemas no lineales de la física porque de hecho las ecuaciones de Newton involucran

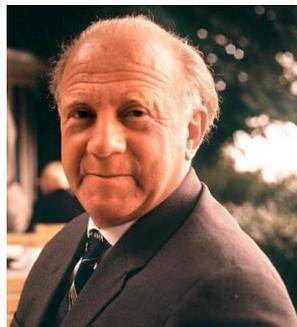


Fig. 27. Werner Heisenberg (1901-1976)

ecuaciones matemáticas no lineales. El énfasis sobre la no linealidad le llevó a dejar por escrito que *“la parte más grande de la física teórica se dedica a problemas no lineales.”* Además, hace referencia desde trabajos sobre turbulencia en fluidos, hasta formulaciones no lineales de la mecánica cuántica. Sus comentarios sobre la imprevisibilidad de los sistemas físicos afectan a temas tales como el problema de los tres cuerpos de tanta relevancia en mecánica celeste, sistemas planetarios y astrofísica en general, así como con la teoría del caos.

Otro importante aspecto muy familiar con la moderna teoría de sistemas dinámicos no lineales es cuando afirma que *“los problemas no lineales tienen un cierto tipo de imprevisibilidad. No se sabe cómo se comportarán las soluciones después de un tiempo muy largo; creo que esto puede ser una característica muy general de los problemas no lineales.”*

Muchas de las ideas que expone son de una especial clarividencia como: *“Finalmente, deseo enfatizar nuevamente que el progreso de la física ciertamente dependerá en gran medida del progreso de las matemáticas no lineales, de los métodos para resolver ecuaciones no lineales. Aún podría ser que cada problema de este tipo sea individual y requiera métodos específicos. Sin embargo, como he mencionado, definitivamente hay algunas características comunes y, por lo tanto, se puede aprender al comparar diferentes problemas no lineales.”*

Por último, quiero destacar al físico teórico italiano Giorgio Parisi (1948-), merecedor del Premio Nobel de Física en 2021 por sus contribuciones revolucionarias a la teoría de

¹⁰⁰ Werner Heisenberg. Nonlinear problems in physics. *Physics Today* 20(5), 27 (1967).

fenómenos desordenados y aleatorios. Su trabajo ha sido fundamental para resolver numerosos problemas en la teoría de sistemas complejos. Entre sus logros, la investigación sobre los vidrios de spin ha sido especialmente notable, abriendo nuevas perspectivas en el entendimiento de estos materiales desordenados y sus propiedades magnéticas. Se trata de una categoría de materiales desordenados, donde Parisi hizo el avance crucial que permitió resolver los modelos y, lo que es más importante, comprenderlos. La teoría de los vidrios de spin, y más generalmente de los sistemas desordenados, es un campo activo de investigación cuyo modelo básico se fundamenta en el modelo de Ising que habían desarrollado Sam Edwards y Phil Anderson en los años 70. Parisi también es reconocido por su concepto de la rotura de la simetría de las réplicas, que ha tenido un impacto profundo en el campo. Además, ha realizado importantes contribuciones al estudio de la aleatoriedad, incluyendo la aplicación de la resonancia estocástica al clima y el análisis de la naturaleza multifractal de la turbulencia, así como la comprensión de los efectos de las fluctuaciones.

El grupo de caos de la Universidad de Maryland.

Muchos desarrollos básicos en la teoría del caos han sido desarrollados en el seno del grupo de caos de la Universidad de Maryland liderado por James A. Yorke junto a Edward Ott y Celso Grebogi y numerosos colaboradores que han tenido una enorme influencia en el desarrollo del campo con aplicaciones en diversas áreas de la ciencia y la ingeniería.

Algunas de las ideas seminales y desarrollos fundamentales son: control del caos, estructuras fractales y de Wada, el caos transitorio, los atractores extraños no caóticos, así como desarrollos rigurosos de simulaciones numéricas de órbitas caóticas. En 1990 aparece el artículo seminal *Controlling Chaos*¹⁰¹ que se conoce como método OGY del control del caos, donde los autores mostraron cómo una adecuada manipulación estratégica puede llegar a estabilizar sistemas caóticos convirtiendo la aparente aleatoriedad en comportamientos predecibles. Se trata de uno de los artículos más citados en la literatura sobre el caos, sino el más citado. También usando el caos para dirigir trayectorias a objetivos precisos de un sistema dinámico¹⁰². Un artículo de revisión de estas influyentes ideas fue publicado en *Nature*¹⁰³.

¹⁰¹ E. Ott, C. Grebogi, and J.A. Yorke. Controlling Chaos, Phys. Rev. Lett. 64, 1196 (1990).

¹⁰² T Shinbrot, E Ott, C Grebogi, JA Yorke. Using chaos to direct trajectories to targets. Phys. Rev. Lett. 65(26), 3215 (1990).

¹⁰³ T. Shinbrot, C. Grebogi, J.A. Yorke, E. Ott. Using small perturbations to control chaos. Nature 363 (6428), 411-417 (1993).

Una cuenca de atracción se define como el conjunto de condiciones iniciales cuyas trayectorias van hacia un atractor específico. En sistemas multiestables, las trayectorias pueden tener destinos diferentes debido a una pequeña perturbación o incertidumbre en las condiciones iniciales. Si hay varios atractores en una región del espacio de fases, entonces habrá varias cuencas que estarán separadas por sus correspondientes fronteras, que a su vez pueden estar formadas por curvas suaves o fractales¹⁰⁴. Las cosas se pueden llegar a complicar más en el caso de las *cuenca de Wada*¹⁰⁵, o en las llamadas cuencas agujereadas¹⁰⁶. Los resultados más importantes aparecieron en sendos artículos¹⁰⁷ en *Science* en 1987 y en 1996.

La idea de *crisis*¹⁰⁸ tiene que ver con la noción de la aparición de cambios cualitativos repentinos de dinámicas caóticas. Y la clave consiste en analizar las causas y las propiedades que generan este tipo de crecimientos o desaparición repentina de los atractores. Asociado a un tipo de crisis que se denomina crisis de frontera está la noción del *caos transitorio*¹⁰⁹, que al contrario del caos permanente solo dura un tiempo finito. Este importante concepto ha dado lugar a numerosas líneas de investigación dentro de un contexto más amplio de lo que se conoce como dinámica transitoria, cuyo campo de acción es asimismo aplicable a numeras disciplinas científicas.

Otra idea desarrollada por el grupo de Maryland es la idea de los atractores extraños no caóticos¹¹⁰, que recientemente ha tenido repercusiones en Astrofísica con el descubrimiento de las estrellas extrañas no caóticas a las que me referiré más tarde. Se trata de un tipo de atractores que tienen dimensión fractal, pero que no son caóticos. Por último, otro tema de especial

¹⁰⁴ S.W. McDonald, C. Grebogi, E. Ott, J.A. Yorke. Fractal basin boundaries. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 17 (2), 125-153 (1985).

¹⁰⁵ J. Kennedy, J.A. Yorke. Basins of Wada. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 51(1-3), 213-225 (1991). H.E. Nusse, J.A. Yorke. Wada basin boundaries and basin cells. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 90(3), 242-261 (1996).

¹⁰⁶ J.C. Alexander, J.A. Yorke, Z. You, I. Kan. Riddled basins. *Int J Bifurcat Chaos* 2, 795-813 (1992).

¹⁰⁷ C. Grebogi, E. Ott, J.A. Yorke. Chaos, strange attractors, and fractal basin boundaries in nonlinear dynamics. *Science* 238 (4827), 632-638 (1987). H.E. Nusse and J.A. Yorke. Basins of attraction. *Science* 271, 1376-1380 (1996).

¹⁰⁸ C. Grebogi, E. Ott, J.A. Yorke. Chaotic attractors in crisis. *Phys. Rev. Lett.* 48(22), 1507 (1982).

¹⁰⁹ C. Grebogi, E. Ott, J.A. Yorke. Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 7 (1-3), 181-200 (1983).

¹¹⁰ C. Grebogi, E. Ott, S. Pelikan, J.A. Yorke. Strange attractors that are not chaotic. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 13, 261-268 (1984).

importancia y muy relevante en el desarrollo de los métodos computacionales ha sido el estudio de resultados rigurosos de simulaciones numéricas de orbitas caóticas¹¹¹.

Desde hace más de treinta años, he mantenido una colaboración fructífera con el Prof. James Yorke, compartiendo ideas a través de numerosos proyectos comunes y encuentros en diversos lugares. Además, el Prof. James Yorke ha sido investido Doctor Honoris Causa en la URJC, donde tuve el honor de actuar como padrino, y ha sido elegido Académico Extranjero en la RAC. En 2003, recibí el prestigioso *Japan Prize* sobre Ciencia y Tecnología de la Complejidad otorgado por el Gobierno de Japón, entregado personalmente por el Emperador del Japón, en cuya ceremonia tuve el honor de estar presente.

Investigación interdisciplinar en Dinámica No Lineal, Caos y Sistemas Complejos

Quisiera mencionar algunas de las principales contribuciones al campo realizadas desde el Grupo de Dinámica No Lineal, Teoría del Caos y Sistemas Complejos de la URJC que yo dirijo. Hay dos ideas fundamentales en las que se ha basado mi trabajo científico en el campo, por un lado, la *interdisciplinariedad* y por otro lado la *internacionalización*. La dinámica no lineal es intrínsecamente interdisciplinar y multidisciplinar desde el punto de vista metodológico. Esto nos lleva a que métodos y herramientas similares nos sirven para afrontar numerosos problemas de investigación de disciplinas varias. Asimismo, mis investigaciones tienen un marcado signo internacional contando entre mis publicaciones con más de doscientos colaboradores de veinticinco nacionalidades diferentes. A continuación, haré una breve descripción de algunas de estas contribuciones¹¹² en función de su impacto y de su diversidad temática mediante una sencilla clasificación.

Sistemas dinámicos y estructuras fractales. Esta investigación interdisciplinar abarca campos que van desde propiamente desarrollos de matemática aplicada y sistemas dinámicos, estudios sobre estructuras fractales en el espacio geométrico de las fases, desarrollo de nuevos métodos de predicción de sistemas dinámicos como la *entropía de la cuenca*, nuevos avances en el

¹¹¹ S.M. Hammel, J.A. Yorke and C. Grebogi, Numerical orbits of chaotic processes represent true orbits. Bull. Amer. Math. Soc. 19, 465-469 (1988). T. Sauer, J.A. Yorke. Rigorous verification of trajectories for the computer simulation of dynamical systems. Nonlinearity 4, 961 (1991). T. Sauer, C. Grebogi, J.A. Yorke. How long do numerical chaotic solutions remain valid?. Phys. Rev. Lett. 79, 59 (1997).

¹¹² En un apéndice al final del discurso, se incluye una lista con las referencias de las principales publicaciones a las que hago referencia en esta breve reseña de mis contribuciones al campo.

estudio de las *cuencas de Wada* (Fig. 28), así como nuevos métodos para su detección, y técnicas de bifurcaciones con retardos.

Mecánica celeste y Astrofísica. Se trata de aplicaciones varias en astronomía y astrofísica, y en particular problemas de mecánica celeste mediante el uso de sistemas hamiltonianos paradigmáticos como el hamiltoniano de Hénon-Heiles, dinámica de estructuras fractales de sombras de agujeros negros binarios, así como predictibilidad de dinámica caótica y su aplicación en modelos galácticos.

Aplicaciones en Física. Métodos de la dinámica no lineal se han aplicado a diversos problemas en física, como el caos y entrelazamiento cuántico, el estudio de la dinámica caótica y estructuras fractales en experimentos con átomos fríos, nuevos avances en fenómenos de dispersión caótica tanto clásica como relativista, así como diversas aplicaciones a problemas de física de plasmas.

Control de sistemas caóticos. Tras los trabajos pioneros del grupo de Maryland y en especial el método conocido como OGY de control del caos, se han desarrollado otros métodos. Una de las principales contribuciones en este campo es el desarrollo del método del control parcial, que básicamente se aplica en problemas con caos transitorio en presencia de fluctuaciones donde el objetivo del control es evitar una situación indeseada pero inevitable de la dinámica del sistema. Asimismo, hemos avanzado en el desarrollo de aplicaciones del método del control de fase, que consiste en usar la fase de una perturbación periódica externa para controlar la dinámica caótica.

Ruido y fenómenos estocásticos. Estas investigaciones contemplan los efectos de las fluctuaciones, que se modelizan mediante el ruido y otros fenómenos estocásticos en sistemas dinámicos de naturaleza física, mecánica o biológica.

Aprendizaje Automático, IA y Teoría de Juegos Evolutivos. Aplicaciones a problemas de dinámica caótica donde se ha demostrado la efectividad de los algoritmos de aprendizaje automático para la clasificación de cuencas de atracción, así como exploraciones de sistemas caóticos en Teoría de Juegos Evolutivos.

Mecánica No Lineal. En este contexto se han abordado numerosos estudios de dinámica de osciladores no lineales fundamentales en la modelización de numerosos problemas en ciencia, así como el desarrollo del fenómeno de la *resonancia vibracional* y el estudio de otras *resonancias no lineales*.

Fenómenos biológicos. Modelización de sistemas biológicos: desarrollos en neurociencia computacional, especialmente mediante el uso de modelos de sistemas dinámicos discretos; física y modelización de la dinámica del cáncer mediante sistemas dinámicos: control y crecimiento de tumores. Asimismo, hemos estudiado modelos de complejidad ecológica, modelización de redes genéticas, así como control de enfermedades infecciosas

Fundamentos de dinámica no lineal y teoría del caos. Se trata de contribuciones de naturaleza más matemática abordando el análisis de cuestiones de naturaleza topológica asociadas a los llamados *continuos indecompuestos*, relacionados con la estructura topológica del caos; así como del concepto de hetero-caos como nuevo paradigma en el estudio de los sistemas dinámicos de alta dimensión.

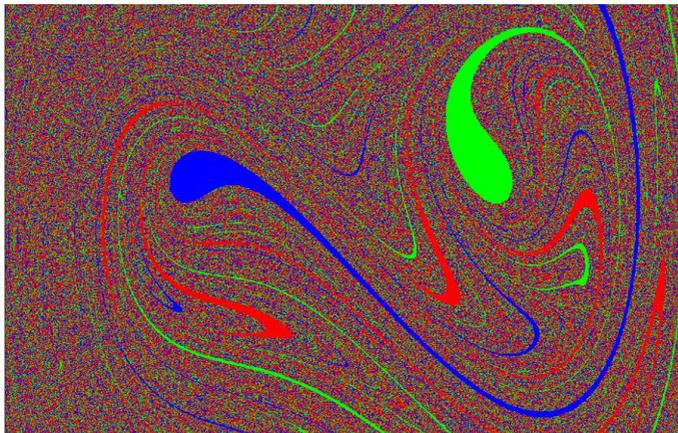


Fig. 28 Cuencas de atracción de Wada del oscilador no lineal de Duffing. Cada color indica el atractor donde se dirigirá cada condición inicial. La figura muestra la alta incertidumbre final de cada punto en esta región del espacio de las fases. J Aguirre and MAF Sanjuán. Unpredictable behavior in the Duffing oscillator: Wada basins. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 17, 41-51 (2002).

Interdisciplinariedad en las ciencias

*This frontier of complexity is by far the most active growth point of physics. Physicists are also finding themselves, more and more, working side by side with other scientists in interdisciplinary collaborations at this frontier.*¹¹³

Philipp W. Anderson

Como ha venido quedando claro a lo largo del discurso, la influencia de las ideas de la no linealidad, el caos y la complejidad han ido invadiendo todas las disciplinas. De modo que ahora quisiera dejarlo de manifiesto mediante algunos ejemplos relevantes en las diferentes disciplinas que conforman las tres secciones de la Real Academia de Ciencias.

Matemática Aplicada, Informática y Algoritmia

Las aplicaciones de la ciencia no lineal en las áreas de las matemáticas son muy extensas y por supuesto nada sorprendentes. Sin embargo, son dignas de mención algunas de las que describe el matemático francés René Lozi¹¹⁴ argumentado sobre los atractores caóticos, la curiosidad matemática y las aplicaciones científicas. Entre varias, menciona multitud de aplicaciones desde la criptografía, la optimización para metaheurística, algoritmos tales como la optimización de enjambre de partículas (PSO), evolución diferencial (DE), algoritmos de migración autoorganizados (SOMA), hasta las comunicaciones caóticas y los memristores que se deben al ingeniero chino-americano Leon Chua.

Caos y Complejidad en Física

Astronomía y Astrofísica. Uno de los pioneros en la aplicación de las ideas de la dinámica no lineal y la teoría del caos a la astronomía es el astrónomo griego Georges Contopoulos. Su monumental contribución pionera se encuentra plasmada en el libro *Order and Chaos in Dynamical Astronomy*¹¹⁵, así como en su autobiografía científica.¹¹⁶ Fenómenos complejos aparecen a diversas escalas en el universo, desde estelar hasta galáctica y a gran escala. Todos

¹¹³ P. W. Anderson. *Physics: The Opening to Complexity*. Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA 92, 6653-6654 (1995).

¹¹⁴ R. Lozi. Are Chaotic Attractors just a Mathematical Curiosity or Do They Contribute to the Advancement of Science?. *Chaos Theory and Applications* 5(3), 133-140 (2023).

¹¹⁵ G. Contopoulos. *Order and Chaos in Dynamical Astronomy* (Springer, Berlin, 2002).

¹¹⁶ G. Contopoulos. *Adventures in Order and Chaos. A scientific Autobiography* (Kluwer, 2004).

ellos pueden ser modelados mediante técnicas provenientes de la dinámica no lineal. El físico israelí Oded Regev ha recopilado en su libro *Chaos and Complexity in Astrophysics*¹¹⁷ las ideas básicas de la teoría de sistemas dinámicos no lineales, la teoría del caos, la formación de patrones y de la complejidad en sus aplicaciones a problemas astrofísicos concretos, demostrando que se trata de un campo muy activo.

Movimiento caótico de rotación de lunas del sistema solar. Descubierta en órbita a unos 1,5 millones de kilómetros de Saturno en 1848, Hyperion es una de las lunas irregulares más grandes del sistema solar. Desde hace años se conoce que posee bamboleos caóticos debido a su órbita elíptica y a su forma irregular. Los trabajos de Jack Wisdom y colaboradores¹¹⁸, predijeron mediante el uso de métodos computacionales la rotación caótica de Hyperion. La rotación caótica con respecto a su centro de masas consiste en que la orientación del satélite y la velocidad de rotación cambian temporalmente de modo caótico, lo que hace imposible predecir su rotación en el futuro. En junio del 2005, la sonda *Cassini* se acercó a la órbita de Hyperion y obtuvo una secuencia de imágenes que mostró por primera vez su comportamiento caótico. En 2015, la nave espacial *New Horizons* de la NASA descubrió que dos lunas de Plutón, *Nix* y *Hydra*, también están en rotación caótica.

Caos dinámico en sistemas planetarios. Ya se ha mencionado a lo largo de este discurso la enorme influencia de las ideas de la dinámica no lineal en particular en sistemas hamiltonianos. El astrofísico ruso I. I. Shevchenko aborda en su monografía pionera sobre caos dinámico en sistemas planetarios¹¹⁹ la estabilidad y el comportamiento caótico en sistemas planetarios y sus subsistemas. Su trabajo incluye una descripción exhaustiva de las principales investigaciones que emplean conceptos de la dinámica resonante y caótica de sistemas hamiltonianos, aplicados tanto a la dinámica del sistema solar como a sistemas exoplanetarios.

Modelo caótico del universo. Un estudio reciente¹²⁰ aborda interacciones no lineales entre la energía oscura, la materia oscura y la radiación en el espacio-tiempo de Friedman-Robertson-Walker. Propone un modelo de interacción simple basado en las densidades temporales de estos componentes, revelando un atractor extraño en su dinámica. De donde se derivaría que la evolución temporal del universo se identifique como caótica. Este enfoque ofrece una nueva

¹¹⁷ O. Regev. *Chaos and Complexity in Astrophysics* (Cambridge University Press, 2006).

¹¹⁸ J. Wisdom, S.J. Peale, and F. Mignard. The chaotic rotation of Hyperion. *Icarus* **58**, 137–152 (1984).

¹¹⁹ I. I. Shevchenko. *Dynamical Chaos in Planetary Systems* (Springer, Cham, 2021).

¹²⁰ E. Aydiner. Chaotic universe model. *Scientific Reports* **8**, 721 (2018).

perspectiva para la evolución del universo, abriendo posibilidades para comprender fenómenos cósmicos y de organización a gran escala.

Estrellas extrañas no caóticas. Las curvas de luz sin precedentes del telescopio espacial Kepler han mostrado cómo la luminosidad de algunas estrellas emite pulsos a frecuencias primarias y secundarias cuyas proporciones se acercan al número áureo, que es el número más irracional. Un sistema dinámico no lineal perturbado por una proporción irracional de frecuencias exhibe genéricamente un atractor extraño pero no caótico. Los autores presentan evidencia de la primera observación¹²¹ de dinámicas extrañas no caóticas en la naturaleza fuera del laboratorio. Este descubrimiento podría contribuir a la clasificación y modelado detallado de estrellas variables.

Oscilaciones caóticas de los neutrinos. Los neutrinos, partículas extremadamente ligeras y esquivas, pueden tener un papel crucial en entornos extremos y poseen la capacidad única de cambiar de sabor mientras viajan debido a la mezcla entre sabor y masa. Esta característica da lugar a diversos fenómenos interesantes de oscilación. En una reciente tesis doctoral¹²² y sus publicaciones derivadas llevada a cabo en la Universidad de Aarhus en Dinamarca se ha abordado la investigación de fenómenos caóticos que pueden ocurrir en modelos de oscilaciones de neutrinos, tanto en el contexto del universo temprano como en supernovas.

Caos y complejidad en la nano escala. La conmutación de magnetización eficiente es crucial en el almacenamiento magnético y la computación neuromórfica. Un reciente estudio experimental destaca que el caos magnético¹²³ inducido por el par de giro alterno incrementa notablemente la tasa de conmutación magnética en nanoferroimanes, con un umbral pronunciado en la amplitud y mayor eficiencia a bajas frecuencias. Tanto los análisis como los cálculos explican cuantitativamente estos hallazgos, revelando el papel crucial del caos magnético de baja dimensión en la mejora de la conmutación. Este trabajo sugiere una interacción importante entre caos y estocasticidad, allanando el camino hacia una eficiencia energética mejorada en sistemas magnéticos en la nano escala.

¹²¹ J.F. Lindner, V. Kohar, B. Kia, M. Hippke, J.G. Learned, and W.L. Ditto. Strange Nonchaotic Stars. *Phys. Rev. Lett.* 114, 054101 (2015).

¹²² Rasmus Sloth Hansen. Neutrino Oscillations in Very Dense Media. Production and Chaos. Ph.D. Dissertation. July 2015. Arhus University, Denmark.

¹²³ E.A. Montoya, S. Perna, Y.J. Chen et al. Magnetization reversal driven by low dimensional chaos in a nanoscale ferromagnet. *Nat Commun* 10, 543 (2019).

Caos y Complejidad en Química.

Desde el inicio de la teoría del caos, se ha buscado aplicarla a la cuantificación de estructuras materiales y datos, empleando conceptos como atractores extraños y dimensiones fractales, ya que la teoría del caos ofrece modelos para análisis exhaustivos de complejidad. En el artículo *Chaos theory in chemistry and chemometrics: a review*¹²⁴ se hace una revisión de la investigación experimental que se realiza en química y el desarrollo del análisis de datos relacionados con la teoría del caos. Muchos químicos se han acercado a los conceptos de no linealidad y propiedades emergentes a través de las reacciones químicas oscilantes como la reacción de Belousov–Zhabotinsky. Bruce C. Gibb¹²⁵ sugiere que profundizar un poco más en el caos y la complejidad podría ayudarnos a responder preguntas muy importantes, a la vez que invita a que “Al abrazar el caos y la complejidad, los químicos pueden avanzar hacia sus objetivos, ya que están bien posicionados para explicar las complejidades de la vida desde la base.” La complejidad es un tema que está empezando a ser importante en Química¹²⁶. Al igual que ha ocurrido con otras disciplinas científicas, la química ha enfatizado la aproximación de procesos no lineales complejos mediante procesos lineales más simples. Sin embargo, la complejidad se está convirtiendo en un enfoque rentable para una amplia gama de problemas, especialmente para la comprensión de la vida.

Sistemas moleculares complejos y nanomoléculas fractales. Asimismo, la química aborda sistemas moleculares complejos, interconectados por interacciones supramoleculares y redes de reacciones. Aunque la complejidad intrínseca de estos sistemas ofrece oportunidades, su análisis ha sido limitado debido a la falta de herramientas adecuadas. En las últimas décadas, el interés en el concepto de complejidad ha crecido, permitiendo el diseño de redes y sistemas dinámicos con propiedades emergentes.

En un reciente artículo¹²⁷, se detallan sistemas complejos que facilitan el reconocimiento molecular y la catálisis, lo que insta a la comunidad química a incorporar la complejidad como un factor crucial en sus investigaciones. Asimismo, es ampliamente conocido que muchos

¹²⁴ J.A. Cramer and K.S. Booksh. Chaos theory in chemistry and chemometrics: a review. *J. Chemometrics* 20, 447–454 (2006).

¹²⁵ B. Gibb. Teetering towards chaos and complexity. *Nature Chem* 1, 17–18 (2009).

¹²⁶ G.M. Whitesides, R.F. Ismagilov. Complexity in Chemistry. *Science* 284 (5411), 89-92 (1999).

¹²⁷ J. Solà, C. Jimeno and I. Alfonso. Exploiting complexity to implement function in chemical systems. *Chem. Commun.* 56, 13273–13286 (2020).

objetos naturales exhiben estructuras geométricas fractales. Ejemplos de ello son los copos de nieve o las hojas de ciertos arboles. Desde hace años se ha comenzado a sintetizar moléculas a escala nanométrica con estructura geométrica fractal¹²⁸ que pueden servir para la construcción de nuevos tipos de células fotoeléctricas, pilas moleculares y almacenamiento de energía. Numerosos investigadores siguen explorando la búsqueda de fractales moleculares extendidos formados por el autoensamblaje de componentes de moléculas pequeñas. Shang y colaboradores¹²⁹ han realizado experimentos sobre la preparación de triángulos fractales de Sierpiński para superar el desafío de crear fractales moleculares extendidos, mediante el diseño de compuestos de bromo aromáticos logrando ensamblar triángulos de Sierpiński libres de defectos en Ag(111), donde aparentemente la formación de enlaces halógeno-hidrógeno impulsa este autoensamblaje.

Caos y Complejidad en Ciencias de la Vida

Fractales y Biología. El papel notable que las ideas de complejidad están teniendo sobre las ciencias biológicas es muy importante. Conceptos importantes derivados de la geometría fractal, así como de la dinámica no lineal, vienen tomando un papel fundamental tanto en la descripción como en los procesos de modelización de muchos fenómenos que involucran diferentes escalas en biología. Además dentro de las ciencias biológicas afecta a aspectos que no solo tienen que ver con la biología molecular y celular, sino también con la organización de sistemas ecológicos y el medio ambiente. Una descripción tanto cualitativa como cuantitativa de todas estas ideas aparece en el artículo¹³⁰ escrito por dos investigadores en Botánica. Como es natural, ello contribuye a mostrar el carácter multidisciplinar de las ideas de la complejidad.

Fisiología de las Plantas. La dinámica de la vegetación se ha estudiado durante mucho tiempo desde una perspectiva determinista, lo que ha llevado a conceptos importantes como clímax, equilibrio y reversibilidad. En las últimas décadas, la aparición de la teoría del caos ha cambiado nuestra visión de las leyes naturales. Nuevos conceptos como desequilibrio, heterogeneidad, perturbación e irreversibilidad se han vuelto cada vez más populares. Algunas sucesiones ecológicas en el marco especial de la tipología de la vegetación y la ecología de la conservación incluso se han considerado estocásticas y, por tanto, su resultado es una cuestión

¹²⁸ G.R. Newcome et al. Nanoassembly of a fractal polymer: a molecular "Sierpinski hexagonal gasket". *Science* 312(5781), 1782-5 (2006).

¹²⁹ J. Shang et al. Assembling molecular Sierpiński triangle fractals. *Nature Chem* 7, 389–393 (2015).

¹³⁰ N.C. Kenkel and D.J. Walker. Fractals in Biological Sciences. *Coenoses* 11, 77-100, (1996).

de azar. La conclusión del trabajo de Guillaume Decocq¹³¹ es que todas las sucesiones son, al menos en parte, deterministas. Los métodos recientes de la dinámica no lineal y la teoría de la complejidad desarrollados en la física teórica pueden y deben aplicarse a la descripción y análisis de sistemas en fisiología vegetal tal y como afirman los autores del artículo¹³² donde usan la dinámica no lineal como herramienta para la modelización en fisiología de plantas. Esto resulta especialmente útil para la interpretación de series temporales y espaciales, abordando ritmos y procesos relacionados con la formación de patrones. Mediante la aplicación de conceptos teóricos a un sistema modelo de ritmicidad circadiana en la fisiología vegetal, el metabolismo ácido de las crasuláceas, se muestra que la dinámica no lineal sirve como una herramienta notable para desvelar los mecanismos internos que operan en el proceso de autoorganización de un sistema.

Teoría del caos y evolución. Por muy sorprendente que parezca, también los métodos derivados de la dinámica no lineal han afectado al trabajo sobre la teoría de la evolución. El paleoecólogo Keith Bennett describe que la evolución de la vida exhibe características típicas de sistemas no lineales en un reciente artículo sobre la teoría del caos de la evolución¹³³, donde afirma: "Aún tenemos mucho que aprender sobre cómo evolucionó la vida, pero no desarrollaremos una comprensión completa hasta que aceptemos la complejidad del sistema." El mismo autor sugiere en otro artículo¹³⁴ que, examinando registros fósiles y filogenéticos moleculares en respuesta a cambios climáticos cuaternarios, el entendimiento de estos registros se mejora al considerar la dinámica no lineal entre genotipo-fenotipo y clima-ambiente. La evolución, como en *El origen de las especies*, es esencialmente impredecible, pero consecuencia inevitable de la reproducción a lo largo del tiempo, siendo *caótica* pero no *aleatoria*. Se propone visualizar la biodiversidad como sistemas de ramificación continua de linajes, donde las especies son las puntas de las ramas, indicando un aumento continuo de la biodiversidad y discrepancias en datos genéticos y morfológicos en el tiempo y espacio.

¹³¹ G. Decocq. Determinism, Chaos and Stochasticity in Plant Community Successions: Consequences for Phytosociology and Conservation Ecology. In: Gafta, D., Akeroyd, J. (eds) *Nature Conservation. Environmental Science and Engineering* (Springer, Berlin, Heidelberg, 2006).

¹³² M.-Th. Hütt, U. Lüttge, Nonlinear Dynamics as a Tool for Modelling in Plant Physiology. *Plant Biology* 4(3) , 281-297 (2008).

¹³³ K. Bennett. The chaos theory of evolution. *New Scientist* 208 (2782). pp. 28-31 (2010).

¹³⁴ K.D. Bennett. Is the number of species on earth increasing or decreasing? Time, chaos and the origin of species. *Palaeontology* 56, 1305-1325 (2013).

Circuitos genéticos. También la genética usa métodos de la dinámica no lineal. Suzuki y colaboradores en un reciente estudio¹³⁵ analizan los *motivos* de circuitos reguladores de genes que desempeñan roles cruciales en funciones celulares. Los estudios teóricos a menudo omiten retardos temporales, pero su inclusión altera la dinámica, generando comportamientos diversos como dinámicas periódicas, cuasi-periódicas, débilmente caóticas, fuertemente caóticas e intermitentes. Las simulaciones sugieren que un solo bucle de retroalimentación aporta una dinámica periódica, mientras que elementos con dos bucles positivo/negativo exhiben dinámica caótica. Asimismo, discuten el posible papel del comportamiento caótico en la robustez celular, como en el contexto del cáncer.

Biología celular. En otro estudio¹³⁶, en este caso en el contexto de la biología celular, se destaca que “La importancia de las oscilaciones y el caos determinista en sistemas biológicos ha sido discutida, principalmente en modelos de crecimiento demográfico y comunidades experimentales. Este estudio revela dinámicas no lineales y caos determinista en sistemas de protistas de una sola especie en quimiostatos experimentales, un descubrimiento poco común. El análisis continuo y detallado se logró mediante un registro celular automático. Un modelo simple que considera que el ciclo celular mostró una amplia gama de comportamientos dinámicos, incluyendo dinámica caótica en poblaciones continuas sin forzamiento externo. Este hallazgo destaca la importancia de la no linealidad en la biología celular y la dinámica de poblaciones individuales, fundamental para la conservación de la naturaleza.”

Neurociencias. Muchos son los estudios que consideran al cerebro como tal vez uno de los sistemas complejos por antonomasia. Sin duda los estudios sobre el cerebro están realizados por múltiples disciplinas, cada una de ellas desde un punto de vista diferente. Desde la neurofisiología, la neuropsiquiatría, y las neurociencias en general, pasando por la neurociencia computacional. Desde hace años muchos físicos, matemáticos e ingenieros se han interesado por los estudios relacionados con la modelización del cerebro, donde se incluyen técnicas provenientes de la dinámica no lineal y la teoría del caos, el análisis de series temporales no lineales, las redes complejas, así como la modelización electrónica de las neuronas. Dado que muchos sistemas biológicos y neuronales se consideran como redes de procesos periódicos interactivos, su funcionalidad depende de la dinámica colectiva emergente en la red. La

¹³⁵ Y. Suzuki et al. Periodic, Quasi-periodic and Chaotic Dynamics in Simple Gene Elements with Time Delays. *Sci. Rep.* 6, 21037 (2016).

¹³⁶ J. Werner, T. Pietsch, F.M. Hilker, H. Arndt. Intrinsic nonlinear dynamics drive single-species systems. *Proc Natl Acad Sci U S A.* 119(44), e2209601119 (2022).

sincronización de las oscilaciones destaca como un ejemplo de este comportamiento colectivo, asociado tanto con la función normal como con la disfunción. C. Bick¹³⁷ y sus colaboradores describen los avances en estas metodologías matemáticas que usan técnicas de la dinámica no lineal para también analizar cómo la conexión de modelos reducidos con datos experimentales puede orientar el desarrollo de nuevos enfoques de tratamiento para enfermedades neurológicas.

Epilepsia. Otro de los campos donde han abundado los estudios de las aplicaciones de la dinámica no lineal, el caos y la complejidad es el de la epilepsia. En 2003, Milton y Jung publicaron un texto¹³⁸ donde definían la epilepsia como una enfermedad dinámica, apostando por la colaboración entre expertos en epilepsia, matemáticos y bioingenieros para discutir los mecanismos de control que generan los brotes epilépticos. En un artículo de revisión reciente se aboga por un cambio de paradigma en epileptología, sugiriendo el estudio de la epilepsia como un sistema dinámico.¹³⁹ En una nueva monografía¹⁴⁰ aparecida en 2023, se apuesta por una aproximación mediante métodos derivados de la teoría de sistemas complejos.

Sintetizando vida. En los últimos años se ha producido un desarrollo espectacular en la llamada Biología Sintética y de Sistemas, llegando a constituir actualmente un campo de investigación independiente. Jim Collins, quien se había destacado por la aplicación de la dinámica no lineal y teoría del caos en dinámica neuronal, avanzó en la modelización de interruptores genéticos mediante ecuaciones diferenciales no lineales, revelando un comportamiento biestable. Su trabajo influyó de manera decisiva en el desarrollo de la biología sintética, una disciplina interdisciplinaria que que en sus etapas iniciales combinaba conceptos de dinámica no lineal, física de sistemas complejos, ingeniería y biología molecular. Entre las creaciones destacadas en este campo se encuentran el *interruptor genético*¹⁴¹ desarrollado por Jim Collins y colaboradores, así como el *represilador*¹⁴², un oscilador genético sintético

¹³⁷ C. Bick, M. Goodfellow, C.R. Laing, E.A. Martens. Understanding the dynamics of biological and neural oscillator networks through exact mean-field reductions: a review. *J. Math. Neurosci.* 10 (1), 9 (2020).

¹³⁸ J. Milton and P. Jung, *Epilepsy as a Dynamic Disease* (Springer, Berlin, 2003).

¹³⁹ M. F. D. Moraes et al., Epilepsy as a dynamical system, a most needed paradigm shift in epileptology. *Epilepsy Behav.* 121, 106838 (2021).

¹⁴⁰ R.C. Scott, J.M. Mahoney. *A Complex Systems Approach to Epilepsy: Concept, Practice, and Therapy* (Cambridge University Press, 2023).

¹⁴¹ T. Gardner, C. Cantor, and J. Collins. Construction of a genetic toggle switch in *Escherichia coli*. *Nature* 403, 339–342 (2000).

¹⁴² M.B. Elowitz, and S. Leibler. A Synthetic Oscillatory Network of Transcriptional Regulators. *Nature* 403, 335–338 (2000).

desarrollado por Michael Elowitz y Stanislav Leibler, ambos publicados en *Nature* en el año 2000.

Dinámica no lineal y el corazón. Las arritmias cardíacas constituyen desordenes en los ritmos cardíacos y aunque en muchos casos las consecuencias no son graves, en otros pueden ser fatales. En los últimos años, se han aplicado técnicas de dinámica no lineal para estudiar y analizar los ECG y los ritmos cardíacos, con el objetivo de controlar las arritmias. Muchas de estas técnicas se describen en un artículo¹⁴³ de *Physics Today*, que ofrece una visión panorámica de los métodos que la dinámica no lineal aporta para comprender mejor la fenomenología de las arritmias cardíacas, así como para prevenirlas y controlarlas. En un artículo de revisión muy reciente aparecido en *Physics Reports* en 2022 sobre la física de los trastornos del ritmo cardíaco¹⁴⁴ se ofrece una exploración cuantitativa de las arritmias cardíacas mediante el uso de técnicas dinámicas y modelos bidimensionales y tridimensionales, enfatizando las valiosas perspectivas sobre la dinámica de los trastornos del ritmo cardíaco que ofrecen herramientas de la dinámica no lineal y de la física estadística.

Ecología. Uno de los campos de la biología donde se ha aplicado extensamente la teoría de sistemas dinámicos es en la Ecología, siguiendo el liderazgo del físico australiano Sir Robert May, considerado como uno de los pioneros de la Ecología Teórica. Un buen ejemplo en este sentido se muestra en el libro del ecólogo Martin Scheffer *Critical Transitions in Nature and Society*¹⁴⁵, que explora conceptos como oscilaciones y caos, emergencia de patrones en sistemas complejos, y adaptabilidad en dinámicas de lagos, clima, evolución y ecosistemas. Se emplean herramientas como la teoría de bifurcaciones y análisis de transitorios largos para comprender la estabilidad de los ecosistemas y fenómenos como la desertificación. De hecho, se puede considerar un lago como un sistema dinámico no lineal y su dinámica puede ser caracterizada por oscilaciones y fluctuaciones caóticas. Esta simple idea, ya fue avanzada en 1887 por el entomólogo americano Stephen Forbes en su obra *The Lake as a Microcosm*¹⁴⁶ que ha sido reconocido por la Academia Nacional de Ciencias de Estados Unidos como el fundador de la ecología en los Estados Unidos.

¹⁴³ A. Karma, and R.F. Gilmour Jr. Nonlinear dynamics of heart rhythm disorders. *Physics Today* 60(3), 51-57 (2007).

¹⁴⁴ Wouter-Jan Rappel, The physics of heart rhythm disorders, *Physics Reports* 978, 1-45 (2022).

¹⁴⁵ Marten Scheffer. *Critical Transitions in Nature and Society*. Princeton Studies in Complexity. (Princeton University Press, 2009).

¹⁴⁶ Stephen A. Forbes. The Lake as a Microcosm. *Bull. of the Scientific Association* (Peoria, IL) pp. 77-87 (1887).

Relevancia del caos en la ecología. En un reciente artículo¹⁴⁷ S.B. Munch y colaboradores se propusieron repensar la prevalencia y la relevancia del caos en la ecología. Precisamente plantean que algunas de las dudas surgidas por las dificultades de su detección en los años 70 del pasado siglo contrastan con estudios recientes que demuestran su presencia en ecosistemas tanto en laboratorios como en datos de campo. Supuestamente la aparente rareza del caos pudo deberse a limitaciones de datos y modelos poblacionales. Y con las nuevas evidencias, invitan a reconsiderar la relevancia del caos en ecología, señalando que no es tan raro ni indetectable como se pensaba.

Hormigas, leones y caos. Un ejemplo que ha tenido una repercusión mediática muy recientemente es la historia de las hormigas y los leones en la sabana africana muy ligado al fenómeno de los mutualismos en ecología. Los autores del estudio¹⁴⁸ de *Science* muestran que la invasión de una especie de hormigas de cabeza grande provocó una reacción en cadena ecológica provocando la sustitución de cebras por búfalos como presa primaria de los leones africanos. Evidentemente, este estudio evoca una vez más la idea de la dependencia sensible a las condiciones iniciales tan íntimamente asociado a la teoría del caos, lo que implica que una pequeña alteración en la estabilidad del ecosistema puede tener serias consecuencias para sus habitantes.

Dinámica No Lineal y Ciencias de la Tierra

Otro de los campos científicos donde las ideas de la dinámica no lineal han tenido una alta repercusión son las ciencias de la tierra. Aquí se incluyen varias disciplinas tales como las ciencias atmosféricas, la hidrología y la geología, abordando problemas de predicción, usando técnicas de fractales y multifractales, analizando el comportamiento caótico y usando técnicas de análisis no lineal de series temporales.

Michael Ghil es un matemático y físico americano que usa métodos de la dinámica no lineal para estudiar sistemas climáticos y sus aspectos interdisciplinarios. En un reciente artículo de revisión *A century of nonlinearity in the geosciences*¹⁴⁹ proporciona un breve resumen de la

¹⁴⁷ S. B. Munch, T. L. Rogers, B. J. Johnson, U. Bhat, C.-H. Tsai. Rethinking the Prevalence and Relevance of Chaos in Ecology. *Annual Review of Ecology, Evolution, and Systematics* 53, 227-249 (2022).

¹⁴⁸ D.N. Kamaru et al. Disruption of an ant-plant mutualism shapes interactions between lions and their primary prey. *Science* 383, 433-438 (2024).

¹⁴⁹ M. Ghil. A century of nonlinearity in the geosciences. *Earth and Space Science*, 6, 1007-1042 (2019).

evolución en el último siglo de las ideas no lineales en las matemáticas y la física aplicadas a las ciencias de la Tierra, en un sentido amplio. Se concentra en los conceptos y métodos matemáticos y esboza ejemplos simples de cómo se han aplicado, se aplican y tal vez se aplicarán tanto a la tierra sólida, es decir, la corteza, el manto y el núcleo, como a sus capas fluidas, es decir, la atmósfera y los océanos. La no linealidad se ha convertido en una palabra de moda, junto con caos, complejidad, fractales, redes, puntos de inflexión, turbulencia y otros conceptos asociados con la ciencia moderna. El artículo tiene como objetivo destacar cómo todas estas ideas han contribuido al progreso de las ciencias de la Tierra en el último siglo, con motivo del centenario de la *American Geophysical Union*. Se busca analizar de qué manera los conceptos no lineales y sus métodos han transformado la práctica de las geociencias y cómo se prevé que continúen influyendo en el futuro.

Los llamados terremotos lentos al igual que los regulares, surgen de un deslizamiento friccional inestable, que libera energía durante un período de horas a meses, en lugar de los segundos a minutos característicos de un terremoto regular. En un reciente trabajo¹⁵⁰, se ha evaluado la capacidad de predicción mediante el estudio del historial de deslizamiento en la subducción de Cascadia¹⁵¹ entre 2007 y 2017, revelando una dinámica no lineal caótica de baja dimensionalidad, en lugar de un sistema estocástico. Se calcularon las propiedades del atractor, indicando un horizonte de previsibilidad del orden de días a semanas. La predicción a largo plazo parece intrínsecamente imposible, similar a los terremotos regulares, cuya previsibilidad se limita al orden de sus duraciones.

El geólogo americano Donald Turcotte ha sido uno de los que ha liderado el campo de los fractales y el caos en geología y en geofísica. Es autor de una bien conocida monografía¹⁵², donde se incluyen ideas de fractales, multifractales, dinámica caótica, y series temporales autosimilares, entre otras, para caracterizar y cuantificar fenómenos naturales complejos, especialmente los procesos del sistema terrestre. Se aplican las ideas de caos y fractales en campos variados como la sismología, la mineralogía, la geomorfología, la geología estructural, y la geodinámica para caracterizarlas en términos cuantitativos. Y en particular en el estudio

¹⁵⁰ A. Gualandí et al. The predictable chaos of slow earthquakes. *Sci. Adv.* 6, eaaz5548 (2020).

¹⁵¹ La zona de subducción de Cascadia es una falla de 700 millas que se extiende desde el norte de California hasta la Columbia Británica y está a unas 70-100 millas de la costa del Pacífico.

¹⁵² Donald L. Turcotte. *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1997), 2nd Edition.

de redes de drenaje y erosión, inundaciones, terremotos, recursos minerales y petrolíferos, fragmentación, convección del manto y generación de campos magnéticos.

También se han usado modelos de sistemas dinámicos de dimensión baja para el estudio de las inversiones geomagnéticas¹⁵³, esto es, los cambios periódicos en el campo magnético de la Tierra, donde los polos magnéticos norte y sur intercambian sus posiciones. Estas inversiones quedan registradas en el registro geológico, especialmente en rocas con propiedades magnéticas. El estudio de las inversiones geomagnéticas es crucial en paleomagnetismo, contribuyendo a nuestra comprensión de los procesos geofísicos de la Tierra a lo largo de escalas de tiempo geológicas.

Aplicaciones en Fisiología, Medicina e Ingeniería Biomédica

Una de las primeras monografías cuyo objetivo primordial era la exploración de los ritmos fisiológicos, *From Clocks to Chaos*¹⁵⁴, fue escrito por los físicos Leon Glass y Michael Mackey. Los ritmos fisiológicos son fundamentales para la vida. Algunos ritmos se mantienen durante toda la vida, e incluso una breve interrupción puede conducir a la muerte. La variación de los ritmos fuera de los límites normales, o la aparición de nuevos ritmos donde antes no existían, se asocia con la enfermedad. La monografía incorpora conceptos matemáticos de estados estacionarios, oscilación y caos aplicados a los sistemas fisiológicos. Muchas de esos ritmos o señales fisiológicas contienen fluctuaciones, en unos casos estocásticas y en otros casos caóticas. Mediante el uso de modelos matemáticos para oscilaciones biológicas, también se analizan transiciones, así como estimulaciones periódicas externas. Los autores propusieron por primera vez que las enfermedades caracterizadas por una organización temporal anormal se denominen *enfermedades dinámicas*.

En el contexto de la ingeniería biomédica recientemente A. Korolj y colaboradores, han revisado¹⁵⁵ cómo la fractalidad puede cuantificar el caos en sistemas biológicos, como cerebro,

¹⁵³ T. Rikitake. Oscillations of a system of disk dynamos, Proc. Cambridge Phil. Soc. 54, 89–105 (1958). Keisuke Ito, Chaos in the Rikitake two-disc dynamo system, Earth and Planetary Science Letters 51, 451-456 (1980). C Gissinger. A new deterministic model for chaotic reversals. Eur Phys J B 85, 1-12 (2012).

¹⁵⁴ Leon Glass and Michael C. Mackey. *From Clocks to Chaos: The Rhythms of Life* (Princeton University Press, 1988).

¹⁵⁵ A. Korolj, H.T. Wu, M. Radisic. A healthy dose of chaos: Using fractal frameworks for engineering higher-fidelity biomedical systems. Biomaterials 219, 119363 (2019).

músculos, ojos, pulmones y más, afectando la función. Teniendo en cuenta que los niveles óptimos de caos y fractalidad se asocian con la salud en sistemas naturales, destacan la importancia de la dosis saludable de caos para diversas aplicaciones biomédicas y su implementación en diseño de materiales y dispositivos, abogando por el uso de los fractales en la investigación y desarrollo de ingeniería biomédica.

Otro hito reciente en este campo lo constituye la aparición del libro *Systems Medicine: Physiological Circuits and the Dynamics of Disease*¹⁵⁶ cuyo autor es el físico israelí Uri Alon, uno de los fundadores de la biología de sistemas, y donde se sientan las bases para la medicina de sistemas, tratando de responder a la pregunta elemental de por qué contraemos ciertas enfermedades. A partir de leyes básicas, el libro deduce por qué los circuitos fisiológicos se construyen como están contruidos, de modo que sus fragilidades explican enfermedades específicas y ofrecen nuevas estrategias para tratarlas. Modelos matemáticos no lineales sencillos describen circuitos fisiológicos, tales como los circuitos hormonales, los circuitos inmunológicos y el envejecimiento y las enfermedades relacionadas con la edad. Culmina en una tabla periódica de enfermedades.

¹⁵⁶ Uri Alon. *Systems Medicine. Physiological Circuits and the Dynamics of Disease* (Chapman and Hall/CRC, New York, 2023).

Perspectivas. Complejidad e Interdisciplinariedad

*Science is the belief in the ignorance of the experts.*¹⁵⁷

Richard P. Feynman

Gerd Binnig es un físico alemán conocido por haber inventado junto con su colega suizo Heinrich Rohrer el microscopio de efecto túnel (STM), que permitió a los científicos visualizar e incluso manipular átomos individuales por primera vez. Ambos compartieron el Premio Nobel de Física en 1986. Unos años más tarde escribió un ensayo *Aus dem Nichts*¹⁵⁸, dedicado a la creatividad de la naturaleza y del ser humano, y donde reflexiona sobre problemas no lineales de la física, sobre la creatividad de la actividad científica y de la naturaleza, las geometrías fractales, la complejidad, las investigaciones sobre el caos, entre otras cosas. Llegando a hacer afirmaciones tales como “Tengo la convicción de que la investigación del caos producirá una revolución en las ciencias de la naturaleza similar a la que ha tenido lugar en la mecánica cuántica”. O esta otra: “Incluso los científicos ignoramos la mayor parte de lo que ocurre en la ciencia, a no ser que uno trabaje en el mismo campo en que se produce un avance. Un ejemplo de ellos es la investigación del caos, un campo sumamente interesante y fascinador que desconocía por completo. Ahora, después de haberme familiarizado un poco más con él, me atrevería a afirmar que se trata del campo de investigación más interesante que existe en la actualidad”, donde pone en valor la investigación realizada en el ámbito de la dinámica no lineal, la teoría del caos y la complejidad.

En este contexto de la interdisciplinariedad, quisiera mencionar una pequeña nota histórica sobre la creación de la Academia de Matemáticas de Madrid, creada por Felipe II en 1582. Una reciente publicación de la Institución de la Academia Real Matemática de Juan de Herrera¹⁵⁹ de 1584, contiene un estudio de nuestro académico de la RAC don Pedro García Barreno, donde habla de la opinión generalizada de que el factor que influyó en la creación de la Academia de Matemáticas fue el “lulismo”, debido a la enorme influencia que ejerció Raimundo Lulio

¹⁵⁷ Richard P. Feynman. What Is Science. The Physics Teacher 7, 313–320 (1969).

¹⁵⁸ Gerd Binnig. Desde la nada. Sobre la creatividad de la naturaleza y del ser humano. Galaxia Gutenberg, Barcelona, 1996. pp.183 y 190. Prólogo del Académico Correspondiente de la RAC, José Manuel Sánchez Ron.

¹⁵⁹ Juan de Herrera. *Institución de la Academia Real Matemática*. Edición de Juan Antonio Yeves Andrés. Estudios preliminares de José Simón Díaz, Luis Cervera Vera y Pedro García Barreno. Madrid: Instituto de Estudios Madrileños, 197-231 (2006).

(Ramon Llull) en personajes como Dante, Pico della Mirandola, Nicolas de Cusa, Giordano Bruno, Paracelso, Descartes y Leibniz. Además, se le ha llegado a considerar como un precursor de la informática. En otro trabajo, don Pedro García Barreno enraíza a la Real Academia de Ciencias¹⁶⁰ con la Academia Real Matemática. Lo que se viene a llamar la ciencia luliana impregnaría la integración del conocimiento en una unidad armónica, así como un sistema holístico para un ambiente interdisciplinario de una Academia. Varios autores señalan la influencia del lulismo en la creación de la academia, así como su influencia en Juan de Herrera.

Emergencia, Complejidad, Fundamental. Estos términos tan relevantes en ciencia no son entendidos de igual modo por toda la comunidad científica. De hecho, en varias cartas publicadas en *Physics Today* en 1986 y 1987 apareció una polémica en torno al *Superconducting Super Collider*¹⁶¹ que derivó en interesantes ideas sobre lo que se entiende por fundamental¹⁶², la emergencia, incluso el caos y la financiación de la ciencia en la que participaron nuestro académico de la RAC don Pedro M. Echenique y los premios Nobel de Física Sheldon Glashow y Phil Anderson.

Sintetizando brevemente los contenidos de las cartas, podríamos decir que en primer lugar don Pedro M. Echenique critica el uso de "fundamental" que Sheldon L. Glashow había hecho en un escrito anterior, argumentando que su aplicabilidad a casi cualquier rama científica, incluida la biología molecular, lo hace engañoso. Se destaca la segunda ley de la termodinámica como un ejemplo de una ley fundamental, independientemente de su derivación estadística. Por otro lado, se argumenta la existencia de propiedades emergentes, como propiedades reducibles a entidades más simples, pero no deducibles a partir de ellas. Asimismo, se menciona como ejemplo el caos que se manifiesta en miles de sistemas físicos y biológicos totalmente diferentes. Finalmente, Sheldon L. Glashow aboga por una financiación sostenida para toda la comunidad científica estadounidense para garantizar la supervivencia nacional.

¹⁶⁰ Pedro García Barreno. "La Academia de Matemáticas de Madrid de Felipe II", en la Real Academia de Ciencias 1582-1995. Madrid. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 1995, pp. 9-185.

¹⁶¹ Charles J. Hailey, Gordon R. Freeman, Pedro M. Echenique, Sheldon L. Glashow. *Superconducting Super Collider*. *Physics Today* 39(12), 11–15 (1986).

¹⁶² Robert D. Black, Philip W. Anderson, Sheldon L. Glashow. 'Fundamental' Distinctions. *Physics Today* 40(8), 90-91 (1987).

Diálogo entre disciplinas. En los últimos años se ha hablado mucho de diálogo entre disciplinas como fuente de inspiración de nuevos problemas y nuevas soluciones a viejos problemas. Para el estudio de la complejidad este es uno de los elementos fundamentales, ya que a pesar de contar con metodologías diversas, su objeto de estudio abarca problemas relacionados con todo tipo de disciplinas científicas. En cualquier caso, todavía falta el verdadero diálogo entre disciplinas tan necesario para el avance del conocimiento de los sistemas complejos en particular y de la ciencia en general.

Interdisciplinariedad y Lenguaje. Muchos son los científicos que han señalado que una de las principales dificultades para la verdadera interdisciplinariedad, intrínseca en las ciencias de la complejidad, es la falta de un lenguaje común. En este sentido, el problema es muy parecido al conocimiento de idiomas. Cuando uno domina varios idiomas, uno es capaz no solamente de expresarse de varias formas, sino también de traducir. En el proceso intelectual de la actividad interdisciplinar, no solamente es muy importante saber entender otro lenguaje, sino también ser capaz de traducir diferentes lenguajes. Cada disciplina individual tiene sus propios métodos, sus tradiciones, y eso hace también muy complicado la capacidad para enfrentarse a problemas de otras disciplinas y sobre todo interpretarlos correctamente. La mejor manera de afrontar problemas interdisciplinares es estando anclado en una disciplina, de lo contrario se puede estar en ausencia de verdaderas referencias. No obstante, sí que resultaría muy conveniente que en la formación académica se prestara una mayor atención al diálogo interdisciplinar, de modo que se puedan conocer varias formas de expresión, tal y como se viene haciendo en el aprendizaje de idiomas. Muchos consideran a la Física como el fundamento de las otras ciencias básicas, ya que todos los objetos naturales que nos rodean, incluidos nosotros mismos, están hechos de las mismas partículas elementales cuyas interacciones conoce e investiga la Física. En gran medida, el extraordinario éxito de la aproximación reduccionista de la física actual se fundamenta en el concepto de sistema aislado. Sin embargo no existe ningún sistema físico o biológico que sea aislado. Los sistemas biológicos son abiertos y en el mundo real el entorno importa tanto como las leyes. La aproximación física tiende a ignorar los elementos cruciales de la emergencia en la complejidad biológica, de tal modo que se produce una estructura jerárquica, en donde existen unas leyes fenomenológicas en cada uno de los niveles de la jerarquía. Los niveles más altos emergen de las leyes de la física subyacentes estableciendo posibles vías de crear la funcionalidad biológica, pero estas leyes son independientes de la física subyacente, lo cual explica el hecho

de que los biólogos no necesiten estudiar ni teoría cuántica de campos, ni el modelo estándar de las partículas elementales, ni física nuclear.

La importancia de la interdisciplinariedad queda reflejada en el interés que asimismo se muestra en la literatura científica de nuestros días. En un reciente número de la prestigiosa revista *Nature Physics*¹⁶³ aparece una colección de artículos que ofrecen perspectivas sobre interacciones exitosas entre investigadores de diferentes campos donde se han conseguido nuevos avances científicos fruto de colaboraciones multidisciplinares. El enfoque principal de la discusión se centra en la interacción entre la física y la biología, mostrando los beneficios de las interacciones interdisciplinares y ofreciendo consejos sobre cómo fomentar colaboraciones exitosas, si bien las mismas ideas son válidas para otras interacciones entre disciplinas.

Hay varias ideas que merecen ser enfatizadas. Una de ellas es la importancia de poder explicar ideas científicas a personas de diferentes campos dado que ello es esencial para la investigación multidisciplinaria. Establecer diálogos entre disciplinas es sin duda desafiante debido a las diferencias en la cultura de investigación, la terminología y las formas de abordar problemas. No solo la responsabilidad recae en los investigadores a fin de superar las barreras entre las disciplinas, sino que una gran responsabilidad recae en las instituciones de investigación. Pero no solo, ya que a su vez las instituciones de investigación deben ser respaldadas por estructuras de financiación y por los gobiernos. Además, si combinar diferentes culturas de investigación conduce a una mejor ciencia, lo mismo se puede decir de la colaboración internacional.

Los problemas de comunicación constituyen una barrera clave para interacciones exitosas entre diversas disciplinas. La misma palabra puede tener diferentes significados y se puede utilizar diferente terminología para el mismo concepto en diferentes campos. Sin embargo, este multilingüismo también puede ser una ventaja. La estructura del lenguaje influye en la forma en que pensamos, lo que sugiere que tener múltiples formas de pensar sobre un problema puede llevar a más formas de resolverlo. Las colaboraciones multidisciplinares que derriban barreras culturales y lingüísticas entre campos han generado muchos éxitos en la física biológica.

Un caso destacado en este ámbito es la resolución del enigma del escalamiento alométrico en biología, que busca entender por qué el crecimiento metabólico sigue una escala de potencias de 3/4 en relación con la masa corporal. Los importantes resultados de esta investigación fueron

¹⁶³ Editorial. Lost and found in translation. *Nature Physics* 19, 1735 (2023).

publicados en *Science*¹⁶⁴ en 1997, fruto de una valiosa colaboración entre los biólogos James Brown y Brian Enquist, y el físico teórico y ex presidente del Instituto Santa Fe, Geoffrey West, descrita brillantemente en el libro *Scale*¹⁶⁵. Otros artículos de interés sobre este tema aparecieron en revistas de Física¹⁶⁶ y Biología¹⁶⁷.

La curiosidad y la apertura a enfoques alternativos seguirán impulsando el campo hacia adelante, y esto ofrece muchas lecciones a otros investigadores en la interfaz entre disciplinas. Ni que decir tiene, que para conseguir estos objetivos donde se puedan superar las barreras entre diferentes campos, se hace necesario promover, entre otras posibles estrategias exitosas¹⁶⁸, una cultura de la colaboración interdisciplinar. Actualmente, una de las principales dificultades y desafíos es el actual sistema de financiación y evaluación de la investigación, que sigue siendo básicamente disciplinar. Sin embargo, los beneficios de una cultura de investigación interdisciplinar son evidentes en todos los sentidos.

Rompiendo fronteras disciplinares. Cuando se habla de complejidad o de interdisciplinariedad aparece el problema de estar hablando de cosas parecidas con lenguajes diferentes. Pero ahora quisiera apuntar aún otro problema que ocurre en círculos científicos y académicos. Estamos tan acostumbrados a la compartimentalización del conocimiento que difícilmente aceptamos que alguien que no es de nuestro dominio ose conocer aquello con lo que tenemos carta de identidad. Es como si el otro hubiera osado transgredir la frontera disciplinar. La misma idea también se manifiesta a la hora de la evaluación de los proyectos de investigación de naturaleza interdisciplinar. Con frecuencia el sistema te obliga a que el proyecto vaya a un cajón disciplinar. Existen algunos suaves y tímidos intentos de romper fronteras, tanto a nivel internacional como nacional. Pero sin duda sería bueno que se hiciera un mayor esfuerzo en esta dirección de romper fronteras disciplinares.

¹⁶⁴ G.B. West, J.H. Brown, and B.J. Enquist. A General Model for the Origin of Allometric Scaling Laws in Biology. *Science*, 276, 122-126 (1997).

¹⁶⁵ G.B. West. *Scale: The Universal Laws of Life and Death in Organisms, Cities and Companies* (Weidenfeld & Nicolson, UK, 2017).

¹⁶⁶ G.B. West, and J.H. Brown. Life's Universal Scaling Laws. *Physics Today* 57(9), 36 (2004).

¹⁶⁷ J.H. Brown, J.F. Gillooly, A.P. Allen, V.M. Savage and G.B. West. *Ecology* 85(7), 1771–1789 (2004). G.B. West, and J.H. Brown. The origin of allometric scaling laws in biology from genomes to ecosystems: towards a quantitative unifying theory of biological structure and organization. *The Journal of Experimental Biology* 208, 1575-1592 (2005).

¹⁶⁸ T. Sanchis. Strategies for multidisciplinary research. *Nature Physics* 19, 1736–1737 (2023).

La complejidad como oportunidad. Sin duda tal y como argumenta el físico húngaro Tamas Vicsek en un ensayo¹⁶⁹ publicado en *Nature* en 2002 cuando un concepto no está bien definido, como es el caso de la complejidad, se corre el peligro de abusar de él. Se trata de un término que puede ser usado de modo indiscriminado como signo de modernidad, y del que no hay teoría alguna que lo sustente. En cualquier caso en este interesante ensayo queda de manifiesto, entre otras cosas, una de las principales ideas asociadas a las ciencias de la complejidad: Que las leyes que describen el comportamiento de los sistemas complejos son cualitativamente diferentes de las que gobiernan las unidades de las que están compuestos.

Elogio a la interdisciplinariedad. Tal y como señala el académico don Pedro R. García Barreno en el artículo *Integración Cultural: Transciencia*¹⁷⁰: “La interdisciplinariedad ha representado uno de los logros más inspirados y fértiles; la senda más eficaz, hasta el momento, hacia el conocimiento. Como estrategia de formación y acción ha dado sus frutos en temas tan diversos como la preservación del medio ambiente, el logro de una vida más sana y prolongada, la consecución de nuevos descubrimientos e innovadoras tecnologías o una mejor comprensión de nuestro lugar en el espacio y en el tiempo. [...] A pesar de beneficios tan aparentes de la investigación interdisciplinar (IID), quienes en ella se interesan sufren, a menudo, obstáculos y decepciones. Algunos se deben a problemas de comunicación personales o a barreras «culturales»; otros a la «tradicción» de las instituciones académicas de organizarse en departamentos disciplinares, una tradición que se repite en diversas organizaciones, sociedades profesionales o revistas científicas.”

Lecciones sencillas sobre Complejidad. La complejidad del mundo supone un enorme contraste con la simplicidad de las leyes de la física. Este es quizá uno de los aspectos más llamativos de la física: la simplicidad de sus leyes. Tanto las ecuaciones de Maxwell del Electromagnetismo, como la ecuación de Schrödinger de la Mecánica Cuántica, así como la ecuación de Newton de la Mecánica Clásica se pueden escribir en unas simples líneas. “Todo es simple y ordenado — excepto, por supuesto, el mundo”, como indicaron los físicos Nigel Goldenfeld y Leo P. Kadanoff en un ensayo sobre *Lecciones sencillas sobre Complejidad*¹⁷¹ en *Science*.

¹⁶⁹ Tamas Vicsek. Complexity: The bigger picture. *Nature* 418, 131 (2002).

¹⁷⁰ Pedro R. García Barreno. Integración Cultural: Transciencia. *Rev. R. Acad. Cienc. Exact. Fís. Nat. (Esp)* Vol. 108, Nº. 1-2, pp 1-12 (2015).

¹⁷¹ Nigel Goldenfeld and Leo P. Kadanoff. Simple Lessons from Complexity. *Science* 284, 87-89 (1999).

De hecho, cuando uno mira al mundo lo que observa es de una complejidad asombrosa. Si bien, no existen por el momento leyes de la complejidad, tal y como existen las leyes de la física, los autores antes citados enumeran una serie de lecciones sencillas sobre complejidad que se derivan del análisis y observación de numerosos sistemas complejos que existen en el universo. De hecho nuestro mundo es a la vez complejo y caótico. Y una lección elemental es que la naturaleza puede producir estructuras complejas, incluso en situaciones simples, y algunas leyes simples, incluso en situaciones complejas. Otra lección sencilla es que se necesita utilizar el nivel de descripción apropiado para captar los fenómenos de interés.

Actualmente estamos viviendo un momento de esplendor en la ciencia de la complejidad. Sin embargo, no hay que olvidar que la complejidad exige actitudes bastante diferentes de las que hasta ahora eran comunes en física. En lugar de buscar leyes fundamentales válidas para todos los tiempos y lugares, cada sistema complejo es diferente. Aunque por el momento no conozcamos leyes generales para la complejidad, sí que se puede aprender lecciones de un sistema que nos permitan aplicarlas a otro. De este modo, los estudios de física se podrían parecer más a la experiencia humana.

Sobre la Interdisciplinariedad. El tema de la interdisciplinariedad y la complejidad suscita un enorme interés en la comunidad científica. En cierta ocasión tuve una discusión a este respecto con un historiador acerca de las dificultades de llevar a la práctica el ideal de la interdisciplinariedad. Ciertamente es difícil, la prueba es que como he señalado, ello implica salirse de las barreras disciplinares e intentar hacer el esfuerzo, que efectivamente supone un esfuerzo, de entender los argumentos de otras disciplinas. Ante la pregunta de si es posible otra dinámica en el mundo académico e investigador, mi respuesta es claramente afirmativa. Ciertamente es, que ello supone muchas dificultades, pero creo que es posible. Desde luego se trata de un tema delicado, ya que por un lado difícilmente estaremos preparados para un diálogo interdisciplinario si no dominamos una disciplina. Y dado que estoy planteando algo que creo posible, aunque soy consciente de las dificultades, habría que cambiar muchas cosas para poder llevar a cabo el citado plan. ¿Dónde habría que comenzar? Desde luego en los años universitarios. No habría que dejarlo para más tarde. Para ello lógicamente habría que habilitar programas especiales y con un grado mayor de interdisciplinariedad. Existen algunos modelos en algunas universidades europeas y americanas de estos programas especiales. Por supuesto que también podría ser eventualmente posible en el período de formación de posgrado o doctoral. Ingredientes básicos son por supuesto un programa adecuado y profesores

comprometidos y motivados con la idea. Insisto no lo imagino nada fácil, pero no imposible si de verdad hay voluntad para ello. Y por supuesto, sería de vital importancia que las autoridades académicas y científicas se comprometieran con estas ideas, que por otro lado veo que se incrementarán en el futuro, como algo necesario e imparabile.

Complejidad como reto integrador de disciplinas. Muchas ideas y conceptos de la complejidad plantean un desafío para la integración de diversas disciplinas, incluyendo la dinámica no lineal y la teoría del caos, la física estadística, los procesos estocásticos, la teoría de la información, la teoría de redes, la ingeniería, las ciencias de la vida y las ciencias de la computación. Naturalmente, esta lista no está completa, pero da una idea del desafío detrás de la idea de complejidad¹⁷². Este objetivo pretende significar más que la idea de cruzar las fronteras disciplinarias, sino más bien integrar disciplinas en un trasfondo común. Por analogía con la historia de los ciegos y el elefante (Fig. 29), cada científico tiene un gran conocimiento y supuestamente muchos datos sobre un área particular del elefante, pero nadie en realidad sabe que lo que está observando es un elefante. De ahí la extrema necesidad de la interdisciplinariedad y del dialogo entre disciplinas. Ninguna de estas observaciones

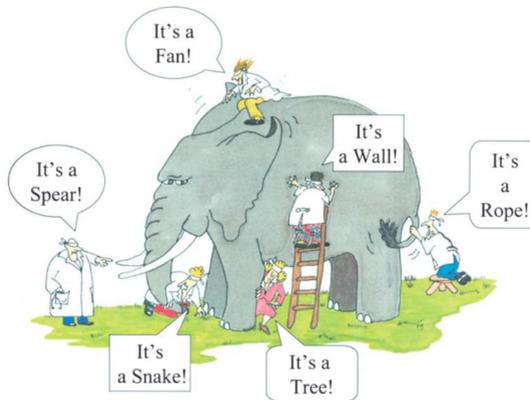


Fig. 29. El elefante y los seis ciegos. Caricatura originalmente propiedad de los autores de¹⁷³; G. Renee Guzlas, artista). Tomado de¹⁷³.

individuales puede proporcionar una visión global del concepto unificador. La historia está bien descrita en el poema “Los ciegos y el elefante” del poeta estadounidense John Godfrey Saxe (1816-1887) que se puede encontrar en la referencia¹⁷³.

¹⁷² Editorial. Complexity matters. *Nature Physics* 18, 843 (2022).

¹⁷³ J. Himmelfarb, P. Stenvinkel, T.A. Ikizler, R.M. Hakim. The elephant in uremia: Oxidant stress as a unifying concept of cardiovascular disease in uremia. *Kidney International* 62, 1524—1538 (2002).

Pájaros y Ranas. En la versión escrita por el físico y matemático Freeman Dyson con motivo de la *AMS Einstein Lecture* del 2008, y que titula "*Birds and Frogs*"¹⁷⁴ se hace una alegoría del trabajo de los matemáticos, que puede muy fácilmente trasladarse a los físicos u otros científicos. El artículo comienza definiendo los términos, y hace un repaso a la historia de la ciencia usando esta metáfora: "Algunos matemáticos son pájaros, otros son ranas. Los pájaros vuelan alto en el aire y contemplan amplios panoramas de las matemáticas hasta el lejano horizonte. Se deleitan con conceptos que unifican nuestro pensamiento y reúnen diversos problemas de diferentes partes del paisaje. Las ranas viven abajo en el barro y sólo ven las flores que crecen cerca. Se deleitan con los detalles de objetos particulares y resuelven problemas uno a uno".

También establece otra clasificación de los científicos en baconianos (Francis Bacon) a quien considera una rana y cartesianos (René Descartes) a quien considera un pájaro. La ciencia ha evolucionado y se ha enriquecido siempre mediante la colaboración de las dos culturas. En el contexto de la Dinámica No Lineal, la Teoría del Caos y la Complejidad, como no podía ser de otra manera, es muy importante que el trabajo de muchos científicos pueda contribuir a profundizar en los detalles de numerosos problemas abiertos, y los que vendrán en el futuro, si bien dada la juventud del campo es esperable que aparezcan nuevos métodos y conceptos que permitan una mayor unificación y comprensión general de los problemas, de modo que hagan progresar la ciencia.

¹⁷⁴ Freeman Dyson. *Birds and frogs*. *Notices of AMS* 56(2), 212-223 (2008).

Conclusiones

*Not only in research, but also in the everyday world of politics and economics, we would all be better off if more people realized that simple nonlinear systems do not necessarily possess simple dynamical properties.*¹⁷⁵

Robert May

Una de las ideas clave que cabe destacar aquí es que si bien la física de sistemas complejos es actualmente una de las fronteras de la investigación física actual, las ideas de complejidad se remontan a principios del siglo XX y se han desarrollado por diversos caminos hasta llegar a la visión que tenemos a día de hoy. Sin embargo, su evolución y desarrollo a lo largo del siglo XXI están bastante abiertos.

El concepto de emergencia frente al reduccionismo es otra de las ideas fundamentales en la física de los sistemas complejos. Las que se refieren a la emergencia se remontan incluso a los orígenes de la termodinámica, y aparecen en varios fenómenos estudiados por esa ciencia. Se mencionan de manera especial conceptos como caos y fractales, que han sido catalizadores de muchas de las nociones en torno a las cuales se mueve la complejidad. Sin duda, la interdisciplinariedad es de suma importancia en este contexto, ya que, como se ha señalado, muchas ideas asociadas a la complejidad ayudan a integrar disciplinas, así como a romper las barreras disciplinarias tradicionales.

En todo momento se ha querido dejar constancia de que muchas de las ideas discutidas aquí han estado latiendo en el pensamiento y la acción de muchos físicos en el pasado y en el presente, que han estado abiertos a problemas sobre la complejidad de la vida y la naturaleza, incluidos algunos Premios Nobel.

En los últimos años, numerosos científicos han contribuido al desarrollo de la teoría del caos. En 2003, el *Japan Prize*, que es otorgado cada año por el gobierno japonés a través de la *Japan Prize Foundation*, se dedicó a la Ciencia y Tecnología de la Complejidad. El premio fue otorgado a los científicos Benoit Mandelbrot por sus contribuciones a los fractales y a James A. Yorke por sus contribuciones a los fundamentos de la teoría del caos. Este premio fue muy

¹⁷⁵ Robert M. May. Simple Mathematical Models with very Complicated Dynamics. *Nature* 261, 459 (1976).

especial para la comunidad de científicos que trabajan en estos campos, ya que por primera vez se otorgó un premio de esta magnitud a científicos que trabajan en temas científicos relacionados con la complejidad.

Siguiendo los esfuerzos de numerosos científicos, como acabamos de demostrar, todo el campo de investigación que abarca la dinámica no lineal, la teoría del caos y la complejidad continúa desarrollándose e influyendo en numerosas disciplinas con nuevos métodos e ideas novedosas, mostrando grandes perspectivas para el futuro.

En su influyente ensayo “*More is different*”, Philip Anderson desafió la jerarquía tradicional de la investigación científica, que priorizaba la búsqueda de leyes fundamentales. Anderson abogó por reconocer la emergencia, argumentando que las propiedades de un sistema a cierta escala no pueden predecirse solo desde las leyes de sus partes constituyentes a una escala más baja. Esta perspectiva influyó en la ciencia de la complejidad, destacando que fenómenos como la conciencia, la química, la biología y la sociología no son simplemente aplicaciones de escalas más bajas. Su enfoque constructivista marcó un cambio crucial hacia la comprensión de sistemas complejos mediante la apreciación de la emergencia en diversas disciplinas científicas.

En su discurso de Homenaje a la Antigüedad Académica 2021¹⁷⁶ don Pedro García Barreno afirma:

“El coste del enfoque disciplinar es que restringe el alcance de nuestras preguntas y se pierden numerosas ideas extradisciplinares que contribuyen al progreso del todo cultural. Estamos en un periodo de transciencia o de convergencia de saberes, una expresión que recuerda el *Diván* de Goethe y que reconoce el valor de la aproximación, de la síntesis del conocimiento como prioridad institucional, hoy mediante tecnologías exponenciales. La sociedad y la Academia deben despertar para la implicación plena de esta realidad. Las grandes ideas se caracterizan, a menudo, por una considerable generalidad. Cuantos mayores sean los problemas, mayores serán las oportunidades. La misión de las Academias es encontrarlas.”

¹⁷⁶ Pedro R. García Barreno. Una visión personal. Homenaje a la Antigüedad Académica 2021. Instituto de España, Madrid. 14 de diciembre de 2021.

Poner barreras a una disciplina científica tradicional resulta sencillo, así como definir bien sus límites y contenidos. Cuando se trata de una disciplina que está creciendo y desarrollándose la cosa no es tan sencilla. Más que un problema, esto supone a mi juicio una ventana de oportunidad única para el caso de la complejidad y la no linealidad.

Quisiera concluir este discurso transmitiendo un mensaje de optimismo y de esperanza. A pesar de todo lo que se ha hecho, a pesar de las dificultades y obstáculos que se han podido destacar, y debido precisamente a la naturaleza y juventud de la disciplina que he glosado, veo un futuro sumamente floreciente y prometedor. Sigue habiendo mucho trabajo por hacer y numerosos objetivos, retos y desafíos que afrontar, así como nuevas oportunidades para avanzar en el conocimiento.

He dicho.

APÉNDICE

Investigación interdisciplinar en Dinámica No Lineal, Caos y Sistemas Complejos

Sistemas dinámicos y estructuras fractales

- J Aguirre, RL Viana, MAF Sanjuán. Fractal structures in nonlinear dynamics. *Reviews of Modern Physics* 81 (1), 333 (2009).
- A Daza, A Wagemakers, B Georgeot, D Guéry-Odelin, MAF Sanjuán. Basin entropy: a new tool to analyze uncertainty in dynamical systems. *Sci. Rep.* 6 (1), 31416 (2016).
- J Aguirre, JC Vallejo, MAF Sanjuán. Wada basins and chaotic invariant sets in the Hénon-Heiles system. *Phys. Rev. E* 64 (6), 066208 (2001).
- J Aguirre, MAF Sanjuán. Unpredictable behavior in the Duffing oscillator: Wada basins. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 17, 41-51 (2002).
- A Daza, A Wagemakers, MAF Sanjuán, JA Yorke. Testing for basins of Wada. *Sci. Rep.* 5 (1), 16579 (2015).
- M Coccolo, BB Zhu, MAF Sanjuán, JM Sanz-Serna. Bogdanov–Takens resonance in time-delayed systems. *Nonlinear Dynamics* 91, 1939-1947 (2018).

Mecánica celeste y Astrofísica

- A Daza, JO Shipley, SR Dolan, and MAF Sanjuán. Wada structures in a binary black hole system. *Phys. Rev. D* 98, 084050 (2018).
- JC Vallejo and MAF Sanjuán. Predictability of Chaotic Dynamics. A finite-time Lyapunov exponent approach. (Springer Series in Synergetics), Springer, Cham, 2019. Second Edition.
- JC Vallejo and MAF Sanjuán. The Forecast of Predictability in Galactic Potentials. *Mon. Notices Royal Astron. Soc.* 447, 3797-3811 (2015).

Aplicaciones en Física

- SK Joseph, LY Chew, MAF Sanjuán. Impact of quantum–classical correspondence on entanglement enhancement by single-mode squeezing. *Phys. Lett. A* 378(35), 2603-2610 (2014).
- A Daza, B Georgeot, D Guéry-Odelin, A Wagemakers, MAF Sanjuán. Chaotic dynamics and fractal structures in experiments with cold atoms. *Phys. Rev. A* 95 (1), 013629 (2017).
- JM Seoane, MAF Sanjuán. New developments in classical chaotic scattering. *Rep. Prog. Phys.* 76 (1), 016001 (2012).
- EC da Silva, IL Caldas, RL Viana, MAF Sanjuán. Escape patterns, magnetic footprints, and homoclinic tangles due to ergodic magnetic limiters. *Physics of Plasmas* 9, 4917-4928 (2002).
- JSE Portela, IEL Caldas, RL Viana, MAF Sanjuán. Fractal and Wada exit basin boundaries in tokamaks. *Int J Bifurcat Chaos* 17, 4067-4079 (2007).
- RL Viana, EC Da Silva, T Kroetz, IL Caldas, M Roberto, MAF Sanjuán. Fractal structures in nonlinear plasma physics. *Phil. Trans. R. Soc. A*.369371–395 (2011).
- JM Muñoz, A Wagemakers, MAF Sanjuán. Planetary influences on the solar cycle: A nonlinear dynamics approach. *Chaos* 33 (12), 123102 (2023).

Control de sistemas caóticos

- MAF Sanjuán and C Grebogi, *Recent Progress in Controlling Chaos* (World Scientific, Singapore, 2010).
- S Zambrano, MAF Sanjuán, JA Yorke. Partial control of chaotic systems. *Phys. Rev. E* 77, 055201(R) (2008).
- J Sabuco, MAF Sanjuán, JA Yorke. Dynamics of partial control. *Chaos* 22, 047507 (2012).
- R Capeáns, J Sabuco, MAF Sanjuán, JA Yorke. Partially controlling transient chaos in the Lorenz equations. *Phil. Trans. R. Soc. A* 375, 20160211 (2017).
- SK Joseph, IP Mariño, MAF Sanjuán. Effect of the phase on the dynamics of a perturbed bouncing ball system. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul* 17, 3279-3286 (2012).

Ruido y fenómenos estocásticos

- AR Nieto, JM Seoane, MAF Sanjuán. Final state sensitivity in noisy chaotic scattering. *Chaos Solitons Fractals* 150, 111181 (2021).

- J Cantisán, JM Seoane, MAF Sanjuán. Stochastic resetting in the Kramers problem: A Monte Carlo approach. *Chaos Solitons Fractals* 152, 111342 (2021).

Aprendizaje Automático, IA y Teoría de Juegos Evolutivos

- MAF Sanjuán. Artificial intelligence, chaos, prediction and understanding in science. *Int J Bifurcat Chaos* 31 (11), 2150173 (2021).
- D Valle, A Wagemakers, A Daza, MAF Sanjuán. Characterization of fractal basins using deep convolutional neural networks. *Int J Bifurcat Chaos* 32, 2250200 (2022).
- G Alfaro, MAF Sanjuán. Hamming distance as a measure of spatial chaos in evolutionary games. *Phys. Rev. E* 109, 014203 (2024).
- D Valle, A Wagemakers, MAF Sanjuán. Deep Learning-based Analysis of Basins of Attraction. *Chaos* 34, 033105 (2024).

Mecánica No Lineal

- H Cao, JM Seoane, MAF Sanjuán. Symmetry-breaking analysis for the general Helmholtz–Duffing oscillator. *Chaos Solitons Fractals* 34, 197-212 (2007).
- JH Yang, MAF Sanjuán, HG Liu. Vibrational subharmonic and superharmonic resonances. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 30 (1-3), 362-372 (2016).
- AA Zaikin, L López, JP Baltanás, J Kurths, MAF Sanjuán. Vibrational resonance in a noise-induced structure. *Phys. Rev. E* 66 (1), 011106 (2002).
- C Jeevarathinam, S Rajasekar, MAF Sanjuán. Theory and numerics of vibrational resonance in Duffing oscillators with time-delayed feedback. *Phys. Rev. E* 83 (6), 066205 (2011).
- S Rajasekar, K Abirami, MAF Sanjuán. Novel vibrational resonance in multistable systems. *Chaos* 21, 033106 (2011).
- S Rajasekar, MAF Sanjuán. *Nonlinear resonances (Springer Series in Synergetics)*, Springer, Cham, 2016.
- JH Yang, S Rajasekar, MAF Sanjuán. *Vibrational Resonance: A Review. Physics Reports* 1067, 1-62 (2024).

Fenómenos biológicos

- B Ibarz, JM Casado, MAF Sanjuán. Map-based models in neuronal dynamics. *Physics Reports* 501 (1-2), 1-74 (2011).
- ÁG López, J Sabuco, JM Seoane, J Duarte, C Januário, MAF Sanjuán. Avoiding healthy cells extinction in a cancer model. *J. Theor. Biol.* 349, 74-81 (2014).
- AG López, JM Seoane, MAF Sanjuán. A validated mathematical model of tumor growth including tumor–host interaction, cell-mediated immune response and chemotherapy. *Bull. Math. Biol.* 76, 2884-2906 (2014).
- C Jeevarathinam, S Rajasekar, MAF Sanjuán. Vibrational resonance in groundwater-dependent plant ecosystems. *Ecological Complexity* 15, 33-42 (2013).
- R Capeáns, J Sabuco, MAF Sanjuán. When less is more: Partial control to avoid extinction of predators in an ecological model. *Ecological Complexity* 19, 1-8 (2014).
- A Wagemakers, JM Buldú, J García-Ojalvo, MAF Sanjuán. Synchronization of electronic genetic networks. *Chaos* 16, 013127 (2006).
- Irina Bashkirtseva, Lev Ryashko, Javier Used, Jesús M. Seoane and Miguel A.F. Sanjuán. Noise-induced complex dynamics and synchronization in the map-based Chialvo neuron model. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 116, 106867 (2023).
- J Duarte, C Januário, N Martins, J Seoane, MAF Sanjuán. Controlling infectious diseases: the decisive phase effect on a seasonal vaccination strategy. *Int J Bifurcat Chaos* 31, 2130044 (2021).

Fundamentos de dinámica no lineal y teoría del caos

- MAF Sanjuán, J Kennedy, E Ott, JA Yorke. Indecomposable continua and the characterization of strange sets in nonlinear dynamics. *Phys. Rev. Lett.* 78, 1892 (1997).
- MAF Sanjuán, J Kennedy, C Grebogi, JA Yorke. Indecomposable continua in dynamical systems with noise: Fluid flow past an array of cylinders. *Chaos* 7, 125-138 (1997).
- Y Saiki, MAF Sanjuán, JA Yorke. Low-dimensional paradigms for high-dimensional hetero-chaos. *Chaos* 28, 103110 (2018).

DISCURSO DE CONTESTACIÓN
DEL
EXCMO. SR. D. JESÚS MARÍA SANZ SERNA

Excmos. Sres. Académicos,

Señoras y Señores,

Es para mí una gran satisfacción poder, en nombre de la Academia, dar al profesor Sanjuán la bienvenida como nuevo académico de número. Hablando por todos los miembros de la corporación, deseo que su carrera científica le siga deparando los éxitos que merece.

Nacido en León en 1959, Miguel Ángel Fernández Sanjuán estudió Físicas en la Universidad de Valladolid y se doctoró en la Universidad Nacional de Educación a Distancia, bajo la dirección del profesor Manuel García Velarde. Tras pasar por la Universidad Politécnica de Madrid, presta desde 1997 sus servicios en la Universidad Rey Juan Carlos, donde ha sido la fuerza motriz en la creación y desarrollo del Departamento de Física, dirige un fuerte grupo de investigación y ha diseñado un grado interdisciplinar en el que, como ocurre en esta Academia, se integran matemática, física, química, geología y biología. Ha dedicado particular cariño y atención a la formación de nuevos investigadores, como muestran las veinte tesis ya dirigidas y los muy numerosos investigadores postdoctorales de los que ha sido o es mentor.

Entre los rasgos de la personalidad científica del profesor Sanjuán subrayaría yo dos. Ante todo, su curiosidad, casi universal. Su ávido interés por todo tipo de cuestiones le salva de la hiperespecialización, fenómeno que, si a corto plazo potencia la productividad, acaba acaso comprometiendo el progreso científico y desde luego priva al investigador del gozo de la verdadera creación. El volumen y variedad de las lecturas del profesor Sanjuán son en verdad excepcionales, como lo son el número y diversidad de las personas con las que ha establecido lazos científicos.

El segundo rasgo que deseo notar es su entusiasmo para abordar, ilusionado y con optimismo, todo tipo de nuevas empresas, tareas y proyectos. Así nuestra Academia ha tenido la fortuna de ser testigo de cómo desde de su elección como correspondiente en 2015, el profesor Sanjuán no solo ha acudido con regularidad a las sesiones, sino que ha jugado un papel sumamente activo en la vida de esta casa, muy en especial en la preparación de las conferencias generales y en la comisión de relaciones internacionales. Sin duda, ha sido un correspondiente modélico y ahora como numerario proporcionará a la corporación los múltiples y valiosos servicios que

todos sus miembros debemos a la Academia y sin los cuales ella languidecería por grande que sea la valía de los académicos. Mencionaré *en passant* que es asimismo miembro de la Academia Europaea.

Viajero infatigable, su trabajo ha llevado al profesor Sanjuán, además de a otros más previsibles destinos, a Lituania (de cuya Academia de Ciencias es miembro extranjero), Serbia (para cuya Academia de Ciencias no Lineales acaba de ser elegido), Letonia, Polonia, Rusia, Ucrania, México, Bolivia, Perú, Colombia, Chile, Brasil, Australia, Sudáfrica, Dubái, Camerún, Tailandia, Turquía, Taiwán, y otros muchos. De particular importancia son sus relaciones con India, China y Japón. En India se encuentran los coautores de dos de sus muchos libros, uno muy citado sobre resonancias no lineales y otro reciente y curioso sobre la física de los juguetes. Ha pasado considerable tiempo en China, donde ha recibido importantes reconocimientos. Pero, sin duda, el lugar de honor entre los vínculos científicos de Sanjuán corresponde al profesor James Yorke de la Universidad de Maryland, fundador de la teoría del caos y miembro extranjero de nuestra Academia, con quien mantiene una estrechísima relación profesional y personal. Por ello, estoy seguro de que recibí con gran satisfacción, en la International Conference on Mathematical Analysis and Applications to Science and Engineering, el primer James Yorke Award, por “breakthrough achievements in nonlinear dynamics and chaos.” Dos años antes, Sanjuán había obtenido el Chieh-Su Hsu Award, en dinámica no lineal y control.

En cierta medida, el campo de la física del discurso que hemos oído, Dinámica no Lineal, Teoría del Caos y Sistemas Complejos, podría verse como una manera de trascender una venerable tradición científica cuyo origen podemos situar en la publicación en 1687 de los *Principia* de Newton. Los *Principia* son sin duda alguna tanto el cimiento de toda la física como una de las más decisivas bases del pensamiento de la modernidad. Por lo pronto, establecen los *Principia* la idea de lo que el mismo Newton denominó leyes, es decir reglas a las que la Naturaleza, que la cultura clásica había visto como caprichosa, somete de modo inexorable su funcionamiento. Pero, y esto es lo que nos interesa ahora, el éxito de los *Principia* se explica también porque Newton mostró cómo el análisis matemático de las leyes físicas de la dinámica lleva a poder predecir con asombrosa precisión los detalles de una pléyade de fenómenos. Newton, a pesar de haber ideado muy joven el cálculo diferencial e integral, siempre mostró preferencia por demostrar sus resultados por razonamientos geométricos que toman como modelo los Elementos de Euclides. Corresponde a Euler, cincuenta años posterior al inglés, el reconocimiento explícito de que la ley segunda de los *Principia*, fuerza igual a

masa por aceleración, es una ecuación diferencial, cuya resolución para el fenómeno mecánico concreto que se esté estudiando conduce al conocimiento del mismo. De este modo, la resolución, o como se dice en matemáticas la integración, de los sistemas de ecuaciones diferenciales es la llave que se espera nos permita abrir el arcano de los movimientos, quizá complejos, de los cuerpos, en una Naturaleza regida por leyes. Esta idea, aparecida por vez primera en la mecánica celeste newtoniana, se ha ido extendiendo a todo tipo de ámbitos, que incluyen, entre muchísimos otros, la mecánica de los medios continuos (fluidos o sólidos elásticos), el electromagnetismo, la mecánica cuántica, la cinética de las reacciones químicas, la cuantificación de las interacciones entre especies en ecología, la epidemiología (como la reciente crisis del COVID-19 nos ha recordado), o estudios geológicos del pasado de nuestro planeta.

Si el éxito de los *Principia* no hubiera sido posible sin la solución por Newton de las ecuaciones pertinentes, muchos hitos científicos posteriores se deben también a haberse culminado la integración de unas u otras ecuaciones diferenciales y esto explica los esfuerzos continuados en ese sentido. Un importante caso relativamente reciente lo proporcionan las ecuaciones de Korteweg-de Vries y cúbica de Schroedinger, con importantes consecuencias para el estudio de la fibra óptica y otras varias cuestiones. Pero por admirables que hayan sido los éxitos de todas las ciencias basados en ese enfoque que se remonta a los *Principia*, la verdad última es que la mayoría de las ecuaciones diferenciales no lineales no son integrables, no pueden ser resueltas por mucho denuedo o ingenio que se ponga en el empeño. Por desgracia este hecho ha sido ocultado en la enseñanza hasta hace no mucho, limitando el interés a los fenómenos, típicamente lineales, donde la integración es posible. Frente a esta ocultación, el estudio de la *dinámica no lineal* vino a abrir la ciencia a una serie de fascinantes y antes desconocidos fenómenos que han sido admirablemente glosados por el profesor Sanjuán. Como suele ser el caso en estas cuestiones, un mismo fenómeno no lineal puede aparecer en muy diversas aplicaciones, y este hecho se ha combinado con la curiosidad de Sanjuán para dotar a su investigación de una notable dimensión interdisciplinar.

Aunque algunas de las ideas más relevantes de la ciencia no lineal fueran ya entendidas, o al menos entrevistas, por Maxwell o Poincaré, es justo decir que no ha sido posible realizar avances sustantivos en el mundo no lineal hasta que no se ha dispuesto de computadoras digitales que permiten simular los fenómenos cuando la integración no es posible. Después de todo, los primeros ordenadores se idearon y construyeron con el único propósito de resolver

problemas no lineales. La interacción entre la simulación numérica y la ciencia no lineal está perfectamente glosada en el discurso que hemos oído (experimento Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou, sistema de Lorenz, cascada de Feigenbaum en la ecuación logística, etc.)

Tras varias décadas de avances espectaculares, la ciencia no lineal está muy lejos de haberse agotado y no me cabe duda de que en esta sala se seguirán oyendo en las décadas futuras interesantes discursos de ingreso analizando la dinámica de todo tipo de fenómenos no lineales en las diversas ciencias.

Otro aspecto destacado del discurso lo ha constituido la crítica al reduccionismo de pensar que toda la ciencia está encerrada en la formulación de unas cuantas leyes fundamentales, entendiendo el término fundamento en su sentido etimológico de cimiento o basamento. El discurso, a pesar de su relativa brevedad, explica de modo sobrado el gran papel que desempeña la *emergencia* de nuevos fenómenos ligada a la idea de *complejidad*. De nuevo podemos ver en el reduccionismo una lectura, errónea por exagerada, de la física de los *Principia*.

Voy a concluir con una pequeña digresión. En los últimos meses se ha demostrado que, alimentando solamente con datos una red neuronal profunda, es posible realizar predicciones meteorológicas que gozan de la misma precisión y fiabilidad que las usuales, basadas en el conocimiento de las leyes del movimiento de la atmósfera y la simulación numérica en un ordenador de la dinámica no lineal correspondiente, además de en recursos estadísticos. ¿Está amenazado el paradigma científico basado en leyes inaugurado en los *Principia*? ¿Se basará la física futura en el mero manejo de datos por ordenadores más que en la idea de ley? ¿El paradigma que finalmente triunfe aunará las leyes con los datos? Sin duda nos encontramos en un punto de gran interés y la ciencia de los próximos años o lustros realizará en estos asuntos avances ahora no previsible. Grandes han sido asimismo los avances en los últimos ochenta años, que el profesor Sanjuán ha sintetizado admirablemente en un discurso que en nombre de todos ustedes agradezco.

He dicho.