REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

Conjuntos borrosos, estadística y probabilidad

DISCURSO

LEIDO EN EL ACTO DE SU RECEPCION

POR EL

EXCMO. SR. D. FRANCISCO AZORIN POCH

Y

CONTESTACION

DEL

EXCMO. SR. D. SIXTO RIOS GARCIA

EL DIA 2 DE DICIEMBRE DE 1981

MADRID
DOMICILIO DE LA ACADEMIA:
VALVERDE, 12.—TELEFONO 221-25-29
1981

ISBN: 84-600-2449-0

Depósito Legal: M. 36.456-1981

TALLERES GRÁFICOS VDA. DE C. BERMEJO - SANTA ENGRACIA, 122 - MADRID

D I S C U R S O

DEL

EXCMO. SR. D. FRANCISCO AZORIN POCH

TEMA:

CONJUNTOS BORROSOS, ESTADISTICA Y PROBABILIDAD

Excmo. Sr. Presidente,
Excmos. Sres. Académicos,
Señoras y Señores:

Sabemos, por introspección y por experiencia, que las frases de reconocimiento de un recipiendario no son simple cumplimiento de un frío protocolo, sino expresiones plenas de sinceridad y sentimiento. Me presento ante vosotros con agradecimiento profundo, que va unido a un temor y a una esperanza. Agradecimiento por la bene volencia con que tan generosamente habéis considerado mis limitados méritos; temor, por la responsabilidad que entraña el ascenso de estos escalones para compartir las tareas de tan preclaros representantes de la ciencia española; esperanza, en que mi modesta pero fervorosa actividad me habrá de permitir aportar, sino pepitas de oro, al menos granos de arena que unidos puedan contribuir al trabajo sin pausa que se desarrolla bajo tan nobles techos.

La mención de los maestros que me han precedido no habría de referirse en este caso a un antecesor en el puesto, por ser éste de nueva creación, pero sí quiero dedicar un emocionado recuerdo a Don Germán Ancochea, figura señera de la Universidad española y de esta Real Academia, que a sus relevantes méritos científicos unió en su personalidad cualidades difícilmente alcanzables. Su exigente rigor matemático se atemperaba con una humanidad abierta, y su sutil ironía encubría una sensibilidad, casi se diría sensitividad, llena de cariño hacia sus discípulos, sus amigos y sus próximos.

Otros distinguidos académicos ya desaparecidos he tenido el privilegio de conocer y de admirar, y aunque no sea esta la ocasión de hacer su semblanza dedico a ellos un recuerdo dolorido y reverente. Sea su memoria un permanente estímulo en nuestra diaria dedicación.

INTRODUCCIÓN

El título del presente discurso, «Conjuntos borrosos, estadística y probabilidad», pudiera haber sido también «Allende las fronteras de lo cierto, lo nítido y lo exacto», o quizás «Vaguedad, desorden y estocástica».

En el desarrollo del conocimiento científico, matemático y epistemológico, hay épocas épicas, en las que predomina el avance para exploración y conquista, y épocas en las que prevalece la consolidación y profundización. En la crítica situación científica actual, la consolidación exige, como decía Otto Neurath, «reparar nuestra nave en alta mar», sin esperar a un feliz arribo, quien sabe si utópico, o ucrónico.

Tanto en el avance como en la profundización, se alcanzan contornos o fronteras, que a veces se atraviesan en precario, columbrando o vislumbrando nuevos límites. Estas fronteras no siempre son nítidas, sino constituidas por zonas o bandas. No está de más un toque de atención. J. Needham (1956) cita la siguiente sentencia del I Ching: «El dragón sobrepasa sus fronteras: habrá ocasión de arrepentirse». E. W. Beth (1965) compara esta expresión con otra de Heráclito para poner de manifiesto la *difusión* y la unidad de lo que se ha denominado cosmología socio-mórfica. La satisfacción y el arrepentimiento pueden coexistir, en proporciones diferentes.

A continuación se describen algunas de las zonas fronterizas:

1. *Zona de incertidumbre, entre lo seguro y lo imposible*

La lista de referencias a la evolución del pensamiento humano en relación con la incertidumbre o el azar, antes y después del artillero Fontana, o «Tartaglia», sería excesivamente larga. En forma muy esquemática se pueden considerar en dicha evolución los siguientes aspectos:

a) *Ignorancia, más o menos parcial, de lo que pasó y de lo que pasa*

Cierto es que nada se sabe de cierto, pero no es menos cierto que hay ansia de saber. Cajal, en su discurso de ingreso a esta Real Academia (1897), se refería a la «penuria analítica de los sentidos», y a las «limitaciones del entendimiento», lo que no enfriaba su entusiasmo investigador y su buena disposición a formular reglas para la investigación científica. De la aspiración a saber con certeza nacen los esfuerzos para la cuantificación de los fenómenos, o al menos para la clasificación y sistematización, para descubrir o para inventar clases y órdenes. Corresponden a este campo las mediciones (incluidas las enumeraciones o censos) y los comienzos de la tecnología científica, fuentes del reconocimiento de la inevitabilidad de los errores y del nacimiento de la Estadística.

b) *Ignorancia, más o menos total, de lo que va a pasar*

Otra fuente clásica de la Estadística, y de la Probabilidad, son los juegos, especialmente en lo que éstos tienen de azar. Determinación y aleatoriedad pueden ser antagónicas, complementarias, consecutivas, o dependientes, según el punto de vista y el nivel e instrumento de observación, sin excluir la alternancia y mezcla de ambas situaciones. Una o varias disposiciones aleatorias pueden repetirse convirtiéndose en determinísticas. Por otra parte, varias disposiciones determinísticas pueden a su vez disponerse al azar, como ocurre en el caleidoscopio. También cabría intentar la contraposición de lo estocástico-cósmico, o azar sujeto a leyes, con lo errático-caótico. Pero este es otro tema que no va a considerarse ahora.

c) *Ignorancia, de lo que hay que hacer*

Los problemas de decisión exigen la previa evaluación de probabilidades, y así se ponen de manifiesto diferencias en las aptitudes y en las pericias de los evaluadores profesionales o circunstanciales. Dado cualquier suceso, la escala de su calificación desde lo «seguro» a lo «imposible» pasa por lo «casi seguro», «muy probable», «probable», «posible», «improbable», «imposible» (aunque *posible* suele significar lo opuesto a imposible, también puede indicar «de probabilidad igual o próxima a 0,50»; esto es, *solo* posible, pero sin llegar a probable).

d) *Problemática de la ignorancia múltiple, que puede requerir varias evaluaciones y decisiones*

La «investigación operativa»/«ciencia de la gestión», y las disciplinas mixtas, que resultan al solapar una disciplina substantiva con otras auxiliares, en particular la matemática aplicada, la estadística y la informática, constituyen las x-metrías (econometría, biometría, etcétera), cuyos contornos son notoriamente borrosos. Este es un campo de extraordinario interés para la psicología y la sociología de la ciencia, que no es posible considerar ahora.

2. *Zona de incertidumbre de las aserciones*

La noción de incertidumbre y de ambigüedad está relacionada con la lógica modal, que tiene su origen en Aristóteles (Von Wright, 1963; E. W. Beth, 1965; Snyder, 1972). Frente a la bipolaridad, excluyente y asertórica, pueden distinguirse los siguientes puntos de vista (A. Deaño, 1976):

a) existencial, entre lo necesario y lo imposible;

b) alético, entre lo verdadero y lo falso;

c) epistemológico, entre lo corroborado (o verificado) y lo refutado (o falsado);

d) deóntico, entre lo obligatorio y lo prohibido;

e) axiológico, entre lo valioso y lo perjudicial.

Beth menciona varios sistemas de lógica cuantificacional, basados en la lógica modal y en la lógica multivalente de Post, Lukasiewicz y otros (véase, p. ej., E. Trillas, 1980).

Otro tema de excepcional importancia en cuanto a la falsedad-no falsedad es el relativo a las paradojas clásicas. Alguna paradoja como la de Hempel ha sido estudiada entre otros por Watanabe y acerbamente «criticada» por O. Kempthorne.

3. *Zona de incertidumbre por graduación de la pertenencia*

A esta zona se la ha venido denominando de diversas maneras: vaguedad, ambigüedad (concepto de Black y otros), borrosidad. Lo mismo ocurre con el adjetivo correspondiente: vago, ambiguo, no nítido, borroso, difuso... Con respecto a esta última denominación es interesante notar la conexión entre difusión, confusión, transfusión, etc., y la voz «fuso», participio pasivo irregular del verbo fundir.

Parece conveniente mantener la separación (aunque se trate también de una separación borrosa) entre la noción de borrosidad o falta de nitidez y la de penetración por extensión, derramamiento, etc., que es la predominante en difusión.

También hay alguna relación con el sentido de ofuscación (turbación de la vista u oscurecimiento de la razón: de fusco = oscuro, y fuscar = oscurecer; en inglés: obfuscation; obfuscate = confuse, stupefy, darken, obscure).

Por ser esta zona fronteriza la que corresponde al contenido central del discurso, se considerarán, con cierto detalle, a continuación las maneras de originarse lo borroso, a saber:

a) *Por el modo de ser*

En lo que se refiere a un atributo, por ejemplo, al color, se puede presentar la vaguedad en objetos o individuos matizados, tornasolados, moaré, multicolores (así ocurriría si al considerar objetos azules y blancos, los hubiera azulinos, azulados, blancos con pintas o manchas azules, etc.). Lo mismo podría decirse con respecto a la forma; aún más por la obligada imperfección geométrica de las casi-esferas, casi-cilindros, casi-prismas, etc., que se presentan en la naturaleza (*).

(*) Aún más difícil sería definir los límites, espaciales y temporales, de una ola. Por otra parte, se ha sugerido que los seres humanos podrían considerarse en tanto que «individuos», como corpúsculos, y en tanto que «personas», como ondas.

b) *Por el modo de estar*

Por ejemplo hay indeterminación conjunta por variaciones en el tiempo, como los cambios de color, por mimetismo, por plumaje o pelaje invernal o estival, etc.; las metamorfosis, los cambios de crecimiento y desarrollo, el paso de capullo a flor, de crisálida a mariposa; los cambios de substancias químicas o minerales, rocas, etc., a veces lentísimos, a veces bruscos o cataclísmicos.

c) *Por el modo de ser percibido*

Hay una zona de vaguedad relativa al observador e instrumento, natural o artificial, que percibe. Por ejemplo, según la luz utilizada (infra-roja, etc.) cambiará la modalidad del color percibido. También de acuerdo con la potencia del instrumento, y sus inevitables errores, de construcción, empleo, posición, desenfoque, etc.

La interacción entre objeto y sujeto, o entre lo observado o percibido y lo (el o la) observante o perceptor, no se había puesto notoriamente de manifiesto en la observación científica clásica hasta llegar al principio de Heisenberg.

En un campo muy distinto, el de la realización de encuestas por muestreo, la interferencia entre el encuestador o interrogador y el encuestado o interrogado, constituye un problema de plena actualidad.

La consideración de esta influencia mútua y su impacto en la objetividad de *varias* disciplinas científicas, o según algunas opiniones, de *todas*, es un tema de gran interés, y que se relaciona con lo borroso por las dificultades del deslinde que requiere el dualismo o dicotomía de la ciencia occidental o clásica.

d) *Por el modo de decir o expresarse*

Son típicamente borrosos algunos adjetivos, como alto o bajo, rico o pobre, joven o viejo. También substantivos, como montón, puñado, etc., y adverbios, como poco o mucho, pronto o tarde, etc.

En cuanto a la antigua polémica sobre los universales, decía R. Carnap (véase, por ej., Benacerraf y Putman, 1964), para los que se interesan por los métodos semánticos, que lo más importante no sería la cuestión ontológica de la existencia de las entidades abstractas, sino hasta qué punto es útil y fecundo el empleo de variables o denominaciones para designaciones que se extienden más allá de las cosas o datos fenomenológicos. Se trata así de facilitar el análisis, la interpretación y la comunicación, especialmente en lo que se refiere al lenguaje científico. Estas discusiones no pueden solventarse con un simple sí o no. Son cuestiones de grado, ejemplos típicos de la conveniencia de introducir el concepto de lo borroso en la filosofía de la ciencia y en el desarrollo general de la ciencia y de las técnicas.

Pero en lo que se refiere a la expresión, debe considerarse también la dualidad símbolo/objeto, signo/objeto representado, o uso/invención (véase Quine, 1960; Hofstadter, 1979). Un ejemplo de este dualismo es la representación artística de una realidad. Con la introducción del arte abstracto, la pintura ya no trata de representar «otra cosa», sino que se limita a querer ser ella misma. La frontera entre representación y representado se hace borrosa, así como la del mensaje transmitido por la obra.

e) *Por la necesidad de substituir o inventar datos*

Además del problema general de la inducción incompleta, hay un tema específico de gran actualidad e interés práctico, que se refiere a los datos que faltan: por no respuesta, por pérdida, por tergiversación o deterioro. En esta situación puede ser deseable la imputación o asignación de valores a dichos datos. (Un ejemplo literario es la cesión, que hace un autor a sus lectores, del derecho de poner fin a una narración o novela incompleta.)

f) *Casos mixtos*

La mixtura, en proporciones no bien definidas, de casos como los anteriores, puede constituir una nueva fuente de borrosidad.

Podría ponerse como ejemplo de estas situaciones la de los seres que cambian de habitat, de ambiente o de cultura.

Los científicos, investigadores y humanistas viajeros, pueden haberlo sido por motivaciones diversas. Toda Universidad, Academia o Centro de investigación tiene un cierto poder de atracción, que puede sentirse más allá de las fronteras.

Traductores y colaboradores de distintos países y de las tres religiones del Libro, se reunieron en diversas épocas, en Al-Andalus y en los reinos cristianos; en Toledo, en torno del Obispo Raimundo, bajo la égida de Alfonso VI; en Tarazona, en Ripoll, etc.

En la motivación podría incluirse el destierro, el exilio nítido o borroso. Muchos trasplantes obligados de culturas se han dado, desde Sertorio a los sefardíes, de los moriscos del s. XVII y de los jesuítas del s. XVIII a los emigrados del XIX y los más recientes, cuyos efectos y recuerdos aún perduran en todos nosotros.

Como resumen de esta introducción, las fuentes de vaguedad, de imprecisión, de incertidumbre, estadística y no estadística, probabilística y no probabilística, hacen deseable extender el concepto de conjunto nítido, pero cuidando de no caer en los inconvenientes que acompañaron al desarrollo de la probabilidad y de la estadística desde su introducción, y que serían la falta de rigor, coherencia, pertinencia y laconismo, es decir las circularidades, contradicciones y redundancias, que suelen acompañar a la introducción de una teoría nueva, constituyendo lo que Don Julio Rey Pastor, refiriéndose al cálculo de probabilidades y a la interpretación del sueño (Daniel 2; 33) llamó el coloso de los pies de barro.

Es, pues, necesario, establecer un tratamiento riguroso y nítido de la vaguedad, conectar la teoría y la práctica de los conjuntos borrosos con otros resultados y aplicaciones, y en particular con los que se refieren al tratamiento establecido de la incertidumbre y del error, por medio de la probabilidad y de la estadística. Y poner atención en el significado y las definiciones terminológicas, a sabiendas de la vaguedad contenida en los términos, pero eliminando en lo posible las confusiones-difusiones, transfusiones, etc., del «eterno problema insoluble» de la buena traducción y de la dificultad adicional de los sinónimos y homónimos, así como de la borrosidad evitable.

Fundamentación y desarrollo de los conjuntos borrosos

Los distintos aspectos de vaguedad o borrosidad antes mencionados, han pasado por una larga etapa, desde la simple constatación de la existencia de zonas intermedias o grises, pasando por intuiciones esporádicas, aplicaciones empíricas y algunas anticipaciones de importancia, hasta trabajos como los de Lofti Zadeh, titulados «Fuzzy Sets» (conjuntos borrosos), publicados en Memo. ERL, núm. 64-44, Univ. of Calif., Berkeley, en 1964 y en la revista Information and Control, en 1965, así como el de Bellman, Kalaba y Zadeh, RAND Memo 4307-PR, 1964. De estos trabajos deriva en gran parte el desarrollo actual de la teoría y práctica de los conjuntos borrosos.

Es sabido que la axiomatización de la teoría de la probabilidad iniciada con R. von Mises, se establece en su forma más utilizada actualmente a partir de los Fundamentos de Alejandro Nikoláyevich Kolmogórov, en 1933. Ocurre esto después de casi cuatro siglos de teorías y aplicaciones fecundas, pero incompletas; de contradicciones y paradojas, aparentes o esenciales, y de un creciente desarrollo paralelo de la estadística inductiva. Sin embargo, la fundamentación de los conjuntos borrosos, especialmente en lo que se refiere a la teoría matemática, se ha ido elaborando a la vez que sus aplicaciones prácticas.

El primer texto general y didáctico de introducción a la teoría y aplicaciones de los conjuntos borrosos es el de A. Kaufmann (1973). A continuación, el de Negoita y Ralescu (1974); más recientemente aparecen obras como la de W. J. M. Kickert (1978), la compilada por Gupta, Ragade y Yager (1979), que contiene un buen capítulo de síntesis; la de Dubois y Prade (1980), que dedica una parte a los fundamentos y a la instrumentación matemática, otra a los modelos borrosos y estructuras formales, y otras dos a temas relacionados con la teoría general de sistemas y aplicaciones diversas; la compilada por Wang y Chang (1980), que contiene capítulos de teoría, y aplicaciones a problemas decisorios y sistemas de información; en castellano se han publicado la de F. Azorín (1979) y la de E. Trillas (1980).

Hay ya una extensa literatura sobre conjuntos borrosos, en trabajos de investigación o expositivos publicados en diversas revistas: Information and Control, Information Science, etc., IEEE Transactions, Pattern Recognition, Management Science, etc., y desde 1977, en la revista titulada Fuzzy sets and systems (Conjuntos y sistemas borrosos). En varias reuniones internacionales sobre temas diversos, como investigación operativa y ciencias de la administración, teoría general de sistemas, y matemáticas aplicadas, así como de Estadística e Informática, se dedican sesiones específicas a los conjuntos borrosos. A continuación se dan algunos conceptos y definiciones.

Establecido un espacio o universo del discurso, X, se dice que un conjunto A, subconjunto de X, es un conjunto borroso, si su función característica o función de pertenencia $\mu_A(x)$, para $x \in X$, no solo toma los valores 1, si $x \in A$, o 0, si pertenece al conjunto complementario, $x \in \bar{A}$, sino que puede tomar también cualquier otro valor del intervalo real $[0, 1]$. Así la pertenencia y la no pertenencia al conjunto A, ya no son nítidas (*sí* pertenece o *no* pertenece), sino graduadas, vagas o borrosas.

Se dice también que el conjunto A carece de fronteras nítidas. Claro es que pudiera tomarse cualquier otro intervalo real finito, pero la estandarización o normalización entre 0 y 1, análoga a la que se adopta al pasar de la medida a la probabilidad, resulta operativa y cómoda.

Debe advertirse que el conjunto universal o espacio X siempre es nítido.

Algunas veces se emplea algún símbolo, por ejemplo, letra negrita, **A**, para poner de manifiesto que un conjunto A es borroso, y distinguirlo de un conjunto ordinario, clásico o nítido, A.

Son definiciones básicas las siguientes:

El conjunto complementario $\bar{\mathbf{A}}$ de **A**, se define por su función de pertenencia:

$$\mu_{\bar{\mathbf{A}}}(x) = 1 - \mu_{\mathbf{A}}(x)$$

La igualdad de dos conjuntos borrosos **A** y **B** se define por la igualdad de sus funciones de pertenencia, $\mu_{\mathbf{A}}(x) = \mu_{\mathbf{B}}(x)$, para todo $x \in X$.

En cuanto a las operaciones de unión e intersección, los conjuntos unión e intersección, se definen también por su función de pertenencia:

$$\mu_{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}}(x) = \max\,[\mu_{\mathbf{A}}(x), \mu_{\mathbf{B}}(x)]$$
$$\mu_{\mathbf{A} \cap \mathbf{B}}(x) = \min\,[\mu_{\mathbf{A}}(x), \mu_{\mathbf{B}}(x)]$$

Ahora, para la expresión simbólica, o bien se presentan pares sucesivos de valores:

$$\{[x, \mu_{\mathbf{A}}(x)],\quad x \in X\}$$

o se escribe

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_{\mathbf{A}}(x_i)/x_i$$

para conjuntos discretos, y también

$$\int_X \mu_A(x)/x,$$

para otros conjuntos.

Podría definirse a continuación el conjunto nítido $\mathcal{H}$ más próximo a un conjunto borroso **A**; o sea, el resultado de la «desborrosificación» de un conjunto borroso, que resulta de tomar $\mu_A(x) = 1$ si $\mu_A \geqslant 0{,}5$ y $\mu_A = 0$ en el caso contrario.

Como generalización de estos conjuntos se definen los llamados «cortes α», cuando se exige que el valor de pertenencia sea superior a un cierto umbral $\alpha \in]\,0{,}1\,]$.

Se define así el corte α, A_α de **A**, como el conjunto ordinario constituido por todos los elementos de $\mathbf{A}_\alpha$ tales que $\mu_A(x) \geqslant \alpha$, y el corte fuerte α, para $\mu_A(x) > \alpha$.

Naturalmente, hay muchas otras definiciones de interés en el desarrollo de la teoría de los conjuntos borrosos, que no es conveniente introducir ahora, pero sí debe destacarse la definición de distancia borrosa entre conjuntos borrosos, $\tilde{d}$ (**A**, **B**), que establece una pseudométrica en un espacio métrico X, y que se define como un intervalo ordinario tal que sus dos extremos son respectivamente la mínima y la máxima distancia entre un punto de **A** y un punto de **B**.

Tienen asimismo gran interés las llamadas *medidas de borrosidad*, introducidas por De Luca y Termini, en 1972 (véase Dubois y Prade, 1980). Es de uso cómodo el llamado *índice de borrosidad* de Kaufmann (1975), que expresa la distancia entre el conjunto A y el conjunto ordinario más próximo, o sea, el de corte $\alpha = \frac{1}{2}$. Kaufmann utiliza la distancia absoluta o de Hamming, y la euclídea, pero podría utilizarse cualquier otra, o casos particulares de la de Minkowski. Para el caso discreto:

$$d(A) = \left[\sum_{i=1}^{M} |\, \mu_A(x_i) - \mu_{A\frac{1}{2}}(x_i) \,|^r \right]^{\frac{1}{r}}$$

En cuanto a la *conexión estadística y estocástica*, deben señalarse por una parte los conceptos de población borrosa y de muestra borrosa.

La población a encuestar, borrosa, resulta de que entre los casos nítidos observables, y nítidos no observables, hay casos intermedios, con una gradación de «no respuesta» potencial.

La población marco, en áreas o listados, es borrosa si contiene nombres o anotaciones ilegibles, casi ilegibles, ambiguas o vagas. Si se trata de áreas, pueden no estar bien definidos sus límites o fronteras.

La población objetivo, o meta del estudio, puede ser borrosa por su definición, como la población de los «jóvenes», de los «viejos», etcétera, que es borrosa, si bien puede hacerse artificialmente nítida fijando líneas de edad, lo que supone dejar fuera o dentro elementos que deberían estar contenidos o excluidos de la población.

Para la población inferencial, o sobre la que se efectúan inferencias, por ser resultado de una extensión del ámbito y del periodo, se acentúa, en general, la borrosidad.

Una vez definida la población borrosa, en los cuatro conceptos antes mencionados, sucesivamente contenidos cada uno en el siguiente, conviene dejar establecido que al efectuar la estructuración o despiezo de una población, para constituir subpoblaciones o estratos, y conglomerados o unidades de muestreo primarias, secundarias, etc., cualquiera de estas divisiones de la población pueden ser borrosas del mismo modo que las poblaciones antes definidas.

Otro aspecto importante, al que más adelante se hace referencia, es el de la «no respuesta». En relación con ésta, debe recordarse que al mencionar la población a encuestar, se habló de la gradación de no respuesta potencial. Asimismo hay una potencialidad de respuesta, o complementariamente de no respuesta, y esta es máxima en el llamado «núcleo duro» (hard core), cuyos elementos son de muy difícil (concepto borroso) o imposible encuesta o medición. Esta borrosidad puede aumentar o disminuir según las técnicas empleadas, la formación y modo de ser de los agentes, su interacción con los sujetos, etc. En términos muy vagos podría decirse además que la representatividad (concepto ya de por sí borroso) disminuye, y la población inferencial se hace más borrosa, al aumentar la no respuesta.

Después de las anteriores consideraciones sobre poblaciones y muestras borrosas, es muy interesante introducir el concepto de *posibilidad*, de tanta importancia en la teoría y aplicaciones de los conjuntos borrosos.

Se hizo anteriormente el comentario, al hablar de escalas en la evaluación desde lo «seguro» a lo «imposible», que «posible» puede querer decir lo opuesto a «imposible», pero también referirse a un evento (*) o suceso de probabilidad igual o próximos a 0,50, esto es, solo posible, tal vez más que improbable, pero menos que probable. En el primer sentido, más general, se entiende por posibilidad de un evento o suceso, que este pueda ocurrir, acaecer, tener lugar: la aptitud, potencia u ocasión para ser o existir, o para aparecer o producirse. En este sentido cabe establecer gradaciones en la posibilidad, y decir de algo que es «muy posible», o «poco posible», o «casi imposible», etc.

El concepto de posibilidad, y su comparación con el o los de probabilidad, así como las distribuciones respectivas, tiene especial importancia en el desarrollo de la teoría y de las aplicaciones de los conjuntos borrosos.

Dado un conjunto A no borroso, la afirmación de que una variable v en el espacio o universo X toma valores en A, puede considerarse que induce una distribución de posibilidad, que asocia a cada elemento $x \in X$ la posibilidad de que x sea un valor de v, esto es:

$$\begin{aligned} \pi(v = x) = \pi(x) &= 1 \quad \text{si} \quad x \in A \\ &= 0 \quad \text{si} \quad x \notin A \end{aligned}$$

(véase Dubois y Prade, 1980).

Ahora bien, si **A** es un conjunto borroso, se extiende la noción anterior escribiendo:

$$\pi(v = x) = \pi(x) = \mu_{\mathbf{A}}(x)$$

Ahora se pueden aplicar las operaciones relativas a conjuntos borrosos, ya que la distribución de posibilidad ha sido definida también como conjunto borroso.

Con una concepción más amplia puede considerarse, como hace Hisdal (véase Gupta, Ragade, Yager, 1978), una teoría general de conjuntos borrosos, que incluye como casos particulares las teorías siguientes:

a) Clásica, booleana, de los conjuntos ordinarios o nítidos.

(*) Parece preferible designar por suceso lo ya sucedido, el evento pluscuam seguro o pluscuamcierto (plus quam certus), ya que el evento seguro o cierto lo es así si las cosas continúan como están, mientras que lo que ya aconteció exigiría para desacontecer que el tiempo fuese reversible.

b) Probabilística.

c) Especial, de los conjuntos borrosos máxi-min.

d) Posibilística, y relativa a conjuntos borrosos concebidos con mayor amplitud, entre los que se incluyen los conjuntos λ-borrosos y otros conjuntos.

Estas teorías se distinguen entre sí por la definición que se dé a las operaciones de unión e intersección de conjuntos.

En relación con lo anteriormente dicho, pueden establecerse dos períodos a partir de la introducción de los conjuntos borrosos por L. Zadeh (1965). El primero, dedicado especialmente a los conjuntos borrosos maxi-min, y el segundo, desde 1977, a la teoría de la posibilidad.

Así como la teoría de la probabilidad se relaciona con la frecuencia observada de ciertos valores o sucesos, la teoría de la posibilidad se refiere a la factibilidad, o grado de facilidad con que pueda asignarse un cierto valor a la variable en estudio.

Un ejemplo de distinción entre probabilidad y posibilidad, aparte de que todo evento probable ha de ser posible pero no todo evento posible ha de ser probable, es el siguiente: un orador podría hacer durar su discurso varios minutos o varias horas. La posibilidad, físicamente, se mantendría constante durante un cierto tiempo y decrecería después, al aumentar la duración. Sin embargo, la probabilidad sería máxima alrededor del tiempo convenido para el tipo de acto en que se realice el discurso; por ejemplo, de una hora.

Dentro de la concepción general antes mencionada, se empieza introduciendo las medidas borrosas de conjuntos ordinarios o nítidos, que cumplen las condiciones: $g(\varnothing) \leqslant 0$, $g(x) = 1$, siendo x el espacio o universo; así como la condición de monotonía: para $A \subseteq B$ $g(A) \leqslant g(B)$.

Las medidas λ-borrosas (Sugeno, 1975), verifican para $A \cap B = \varnothing$:

$$g_\lambda(A \cup B) = g_\lambda(A) + g_\lambda(B) + \lambda g_\lambda(A) g_\lambda(B)$$

y para el conjunto complementario $\bar{A}$ de A:

$$g_\lambda(\bar{A}) = \frac{1 - g_\lambda(A)}{1 + \lambda g_\lambda(A)}$$

Si $\lambda = 0$, se tiene la medida probabilística o medida de probabilidad.

La medida posibilística o de posibilidad, se introdujo originalmente escribiendo:

$$\pi(A) = \sup_{x \in A} \pi(x)$$

con o sin la condición de normalización: $\pi(E) = 1$.

Para la distribución conjunta: $X = x$, $Y = y$, puede escribirse, en la llamada situación no-interactiva:

$$\pi(x, y) = \pi(x) \text{ intersección } \pi(y)$$

En el caso probabilístico, la intersección se define como producto:

$$P(x, y) = P(x) \cdot P(y)$$

y en el caso posibilístico maxi-min, por:

$$\pi(x, y) = \pi(x) \wedge \pi(y)$$

En el caso general, se escribe:

$$P(x, y) = P(y) P(x/y) = P(x) P(y/x)$$

que da la independencia, al ser

$$P(y/x) = P(y), \qquad P(x/y) = P(x)$$

así como

$$\pi(x, y) = \pi(x) \wedge \pi(y \mid x) = \pi(y) \wedge \pi(x \mid y)$$

Conviene advertir que la no interactividad no implica independencia en el caso de posibilidades.

En Dubois y Prade (1980), pueden verse también los conceptos de: *credibilidad*, para el cual se verifica:

$$cr(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) \geq \sum cr(A_i) - \sum_{i \neq j} cr(A_i \cap A_j) + \ldots \pm cr(A) + cr(\overline{A}) \leq 1$$

plausibilidad, para el cual se verifica:

$$Pl(A) + Pl(\overline{A}) \geq 1$$

y otras definiciones que no van a considerarse ahora.

Tienen gran interés las generalizaciones que consideran probabilidades y posibilidades de eventos o sucesos nítidos y borrosos.

Por ejemplo, se considera como probabilidad de un evento borroso en $\mathbb{R}^n$, la esperanza matemática de la función de pertenencia:

$$P(\mathbf{A}) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_{\mathbf{A}}(x)\, dP$$

que se reduce a la definición corriente de probabilidad cuando el conjunto sea nítido, esto es, si:

$$\mathbf{A} = A$$

Para la correspondiente definición de posibilidad de un evento nítido es necesaria la llamada integral de Sugeno, de una función h con respecto a una medida borrosa, y extendida a un conjunto nítido A:

$$⨍ h(x) \cdot g(\cdot) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \min\,[\alpha, g(A \cap H_\alpha)]$$

en donde:

$$H_\alpha = \}x \in X \mid h(x) \geq \alpha\{,$$

y la posibilidad se define por

$$\pi(A) = ⨍_A 1 \cdot \pi(\cdot) = \sup_{x \in X} \min\,[\mu_A(x), \pi(x)]$$

Calidad de las estadísticas

Las estadísticas se obtienen como resultado de recoger observaciones, mediciones o respuestas, de acuerdo con un cuestionario previamente establecido. La oportunidad, la economía y otras desiderata, pueden o no considerarse, según convenga en cada caso, entre los aspectos de la calidad (*). En lo que sigue se define el concepto de calidad, como proximidad de los datos a los valores objetivos,

(*) Sobre las condiciones que deberían reunir las estadísticas pueden verse varios trabajos de F. Azorín y J. L. Sánchez-Crespo.

en el doble sentido de valor meta y de valor imparcial, que se tratan de recoger en el cuestionario. El propósito queda insatisfecho si falta al menos uno de los datos, por no haberse recogido la observación, por ser la anotación incomprensible, etc.; por la vaguedad, ambigüedad, etc., de alguno de los datos; por tratarse de datos individualmente erróneos o incompatibles entre sí; por existir duda sobre la veracidad de la declaración, etc.

En resumen, pueden considerarse los siguientes aspectos que perjudican o desvalorizan la estadística, en cuanto a los datos que la constituyen:

1. Ausencia.
2. Vaguedad.
3. Ininteligibilidad.
4. Incredibilidad.
5. Anomalía.
6. Incompatibilidad.

Cada cuestionario, que puede estar reducido a una sola pregunta, se aplica a un elemento o unidad de la población o muestra en estudio, y los aspectos antes mencionados se relacionan con los conjuntos borrosos como a continuación se indican:

1. La ausencia de datos es obvio que disminuye la información, y también el carácter probabilístico que pudiera tener la muestra, cuando el conjunto de los elementos en estudio ha sido obtenido de la población de acuerdo con un cierto diseño. Disminuye como consecuencia de la falta de datos el valor de las inferencias basadas en la muestra, y queda establecida una zona borrosa entre la muestra probabilística pura y la ausencia total de datos.

2. La vaguedad o borrosidad de los datos, puede deberse a ambigüedades en la formulación de las cuestiones, en la definición de los objetivos, y a la expresión de las observaciones o mediciones.

3. La incomprensión de las preguntas o de las respuestas, por parte de interrogantes e interrogados, en particular cuando hay diferencias idiomáticas, puede ser total, o establecerse en consecuencia una zona borrosa.

4. También en lo que se refiere a la credibilidad puede establecerse una zona borrosa, relativa al sujeto interrogado, a su interacción con el encuestador, al ambiente en que se realiza la encuesta, etcétera.

5-6. Las observaciones anómalas, individualmente consideradas, o en cuanto a la incompatibilidad de dos o más datos del mismo cuestionario, deben ser objeto de especial atención.

Se dice que una observación es anómala (aberrante, heteróclita, etc.) cuando resulta sospechosa de ser el resultado de una medición o anotación errónea; de equivocaciones, tergiversaciones, etcétera; toda observación que se desvía tanto de las demás, que despierta sospechas de haber sido engendrada por algún mecanismo diferente del establecido.

Por ejemplo, en un censo o encuesta general de la población no debe quedar en blanco el dato «edad» de ningún individuo, pero tampoco superar un cierto valor de años admisibles. Así, puede despertar dudas la respuesta «cien años» de edad, y la duda aumenta cuando sea de 110, 120, ... años, etc. Claro es que si la respuesta fuese 200 años, quedaría definitivamente rechazada.

La consideración rigurosa del tratamiento estadístico que debe darse a las observaciones anómalas, se inicia con los trabajos de F. J. Anscombe, J. Tukey, y otros hacia 1962. Sin embargo, desde hace largo tiempo venían contraponiéndose dos puntos de vista opuestos, al considerar este tipo de datos. Por una parte, la tradición francesa, y tal vez de otros países, de evaluar propiedades agrícolas por la cosecha obtenida en una sucesión de un número fijo de años, calculando la media, previa eliminación del valor más bajo y del valor más alto de la cosecha. Esto constituye un ejemplo de las que más adelante se denominan estimaciones robustas. El otro punto de vista podría estar representado por el del astrónomo y matemático F. W. Bessel, según el cual debería dedicarse la máxima atención y esmero a la obtención de los datos, para evitar todo tipo de error, pero una vez recogidos no debería prescindirse de ninguno de ellos, ya que de otro modo se abriría el camino a decisiones subjetivas y hasta arbitrarias.

Se han venido proponiendo diferentes criterios objetivos para el rechazamiento de situaciones anómalas eliminando así la objeción de subjetividad antes mencionada. Un método complementario es el empleo de estimadores robustos, que eliminan o atenúan el efecto de posibles observaciones anómalas a cambio de pagar un precio moderado o un «seguro» que se expresaría en alguna pérdida de la eficiencia general de la estimación.

Así, por ejemplo, en el caso de las estimaciones de valores medios, se emplean: la *media recortada* (trimmed mean), en la que se ha establecido de antemano la eliminación de un cierto porcentaje de las observaciones más bajas y más altas; la *media winsorizada*, en la que se sustituyen los valores más bajos con el primer valor que se mantiene y los más altos, con el último; la *media ponderada* de las tres cuartilas, con mayor ponderación a la mediana, etc.

Como resumen de lo anteriormente dicho se consideran por una parte la eliminación de las observaciones anómalas; por otra, su tratamiento mediante estimadores robustos, y por otra la sustitución automática, por imputación o asignación de valores sustitutivos, de la que se trata a continuación.

En un trabajo sobre corrección e imputación automática, Fellegi y Holt (1976) se ocupan de la verificación y control previo de la admisibilidad de los datos, y de la sustitución de los valores que no pasan dichos controles; por ausencia, por considerarse individualmente erróneos, o por incompatibilidad de unos con otros. Ya se hizo mención anteriormente a algunas limitaciones de edad, etc., en los censos o encuestas de la población. Por supuesto que la sustitución de valores debería ser la menor posible, para evitar en cuanto se pueda la reconstrucción o «fabricación» de datos, que siempre puede dar lugar a sesgos, más o menos previsibles.

La situación que acaba de describirse tiene cierto parecido con la restauración de edificios o monumentos históricos, con respecto a la cual se dan opiniones contrapuestas. Una sería dejar las cosas como están, prefiriendo la ruina a la falsificación; otra, reconstituir todo lo posible, aunque con el debido respeto al original. En este último caso suele hacerse patente la distinción entre lo auténtico y lo reconstruido, para la debida información al espectador.

Análogamente, parecería conveniente que al utilizar valores imputados y hacerlos aparecer en las tablas, se marcasen con tipos diferentes (en cursiva, en negrita, etc.) de los valores originales admitidos, de modo que la simple inspección de la tabla pusiera de manifiesto no solamente qué valores son imputados, sino también el grado de borrosidad o reconstrucción que corresponde a la tabla. Por otra parte, tal como se ha dicho anteriormente con respecto a los estimadores borrosos, podría darse una ponderación adecuada a los valores imputados, para disminuir su incidencia en los resultados.

Conviene mencionar que con los precedimientos de imputación se trata de mantener en lo posible la distribución marginal de frecuencias, y si es posible la distribución conjunta de frecuencias de los datos correctos; esto es, los que pasan los controles de verificación (los «edits», de Fellegi y Holt). Esto equivale a suponer que la distribución de los valores eliminados sería la misma que la de los valores mantenidos. Claro es que desde un punto de vista estricto este supuesto es controvertible por la posible introducción de sesgos. Por ejemplo, puede haber cierta tendencia a que falten las edades de personas no tan jóvenes; o el estado civil de los que prefieren no declararlo; o bien ponerse de manifiesto cierta tendencia o proclividad de parte del observador, agente enumerador, etcétera. Se prescinde de este riesgo si se considera que merece la pena arrostrarlo en beneficio de la operatividad del procedimiento.

Entre los métodos clásicos de imputación el denominado de imputación secuencial con «fichero caliente» («hot-deck»), consiste en asignar como valor sustitutivo del ausente o erróneo, otro valor, entre los ya recogidos que hayan pasado todos los controles (edits). Una vez establecido el conjunto de los valores aceptables, se busca a partir de un origen aleatorio el primer cuestionario que haya pasado todos los controles. De este modo se introducen valores con probabilidad proporcional a su presencia en la población, admitiendo que los errores se presentan en orden más o menos aleatorio.

Es evidente que además de la naturaleza probabilística del método indicado y de otros análogos, hay una borrosidad no cuantificada en cuanto a los supuestos. Así ocurre, por otra parte, con todas las hipótesis simplificadoras, y típicamente con la i. i. d. (independencia e igual distribución de los elementos de una muestra). De aquí la importancia de los procedimientos robustos, poco vulnerables al no cumplimiento de dichas hipótesis simplificadoras.

Función de pertenencia

La introducción del concepto de conjunto borroso va unida, como se ha visto, a la definición de su función de pertenencia. Suele ser difícil la atribución objetiva de valores a dicha función, en el intervalo (0, 1). A este respecto, conviene recordar que también surgen dificultades en la teoría y práctica de la Estadística, al establecer las distribuciones a priori, las funciones de utilidad, las funciones y curvas de características operatorias, las funciones de fiabilidad o durabilidad, así como las especificaciones básicas de familias de distribuciones para estimación de sus parámetros, y los niveles de significación o, complementariamente, los coeficientes de confianza.

Tanto dichos niveles y coeficientes como las especificaciones básicas se han venido estableciendo en la más ortodoxa de las Estadísticas, en unión de las hipótesis básicas de independencia e igual distribución (i. i. d.) de variables aleatorias, en observaciones simultáneas o sucesivas, a pesar de lo que esto pueda suponer de subjetividad.

Otras de las funciones antes mencionadas pueden obtenerse a partir de algunos valores fijos, que suelen ser cinco en el caso de las curvas de características operatorias, y de consideraciones teórico-empíricas para el ajuste correspondiente a valores intermedios.

Han seguido siendo objeto de discusión algunos aspectos relativos a las distribuciones a priori y a las funciones de utilidad, especialmente en lo que se refiere a los puntos de vista contrapuestos de estadísticos bayesianos y no bayesianos, así como para los que se encuentran en la zona borrosa situada entre ambos puntos de vista extremos.

En todo caso los diferentes problemas relativos a la Estadística inductiva tienen su correspondencia y su reflejo en la consideración teórica y empírica de los conjuntos borrosos.

La función de pertenencia expresa, como antes se ha dicho, la intensidad con que un elemento forma parte del conjunto que se considere. Toma valores que también pueden interpretarse como el grado de compatibilidad de su argumento con el concepto representado por su correspondiente conjunto borroso.

Por ejemplo, para la afirmación borrosa «x es grande», en donde x designa un número real, pueden proponerse diferentes tipos de funciones de pertenencia, con tal de que tomen valores crecientes al aumentar el valor de x, ya que cuanto mayor sea éste, más adecuado será calificarlo de «número grande». Hay infinitas posibilidades en lo que se refiere a la elección de funciones crecientes de x que tengan 1 como cota superior. Para el caso antes indicado suelen utilizarse alguno de los siguientes tipos:

a) *Función de pertenencia simple.* Es la que corresponde a un conjunto ordinario, nítido o no borroso. Todo número igual o mayor a uno dado, c, se consideraría grande. La función de pertenencia valdría cero para $x < c$, y valdría uno para $x \geqslant c$.

b) *Función de pertenencia escalonada.* Toma el valor cero para $x < c_1$ y valores crecientes a continuación; por ejemplo: 0,1 para

$c_1 < x \leqslant c_2$; 0,2 para $c_2 < x \leqslant c_3$, ..., hasta alcanzar definitivamente el valor 1 para $x > c_m$. En principio puede haber cualquier número de escalones. La función será tanto más «simple» cuanto menor sea el número de éstos, y tanto más «matizada», cuanto mayor sea dicho número. Por supuesto que tanto «simple» como «matizada» son calificaciones borrosas.

c) *Función de pertenencia lineal.* Con esta función se considera que no pertenecen al conjunto, o sea son «no grandes», los números inferiores a c_1; y que pertenecen nítidamente al conjunto de «números grandes» los superiores a c_2; los comprendidos entre c_1 y c_2 tienen pertenencia linealmente creciente.

c) *Función de pertenencia quebrada.* La función anterior se generaliza inmediatamente a líneas quebradas con cualquier número de segmentos o tramos.

e) *Función de pertenencia potencial.* Se obtiene por enlace de curvas potenciales: cuadráticas, cúbicas, etc.

f) *Funciones de pertenencia hiperbólicas, exponenciales, exponencial logarítmica* (de exponente kx logx), *logísticas, normal acumulativa truncada a la izquierda de cero,* etc.

En cuanto a los criterios de elección de función de pertenencia, pueden considerarse los siguientes:

a) *Criterio individual*

Puede atribuirse a cada x el grado de pertenencia que se considere más apropiado, por un procedimiento introspectivo y de acumulación de la experiencia acumulada. Para compensar posibles fluctuaciones, conviene repetir la operación en ocasiones sucesivas, y tomar el promedio de los valores obtenidos para cada x.

El mismo individuo puede aplicar diferentes métodos o técnicas, o bien seleccionar, entre los valores obtenidos con diferentes funciones de pertenencia, el que considere más adecuado.

Siguiendo el procedimiento de extensión lingüística de L. Zadeh el individuo podría elegir una respuesta entre varios valores lingüísticos de certeza, por ejemplo, «verdadero», «más bien verdadero» («me inclino por considerarlo verdadero»), «más bien falso» («me inclino por considerarlo falso»), «falso». A continuación puede atribuirse a estas respuestas valores numéricos, por ejemplo, 1; 0,75; 0,50; 0,25, 0. Después se pasaría a la representación de la función de pertenencia.

b) *Criterios colectivos*

Un procedimiento colectivo consiste en tomar para cada x un promedio de varias opiniones, que puede ser simple o ponderado (por ejemplo, de acuerdo con la especialización o el prestigio de los opinantes), como valor atribuible a la función de pertenencia en x.

También podrían emplearse procedimientos délficos o de consenso de expertos en la materia, hasta llegar al valor que se atribuye en x a la función de pertenencia.

Se ha estimado asimismo la función de pertenencia en cada punto por la proporción de opiniones «positivas» sobre la pertenencia de x al conjunto borroso. Dubois y Prade (1980) atribuyen este procedimiento «de votación» a Hersh y Caramazza. Sin embargo, parece ser que fue sugerido por Emile Borel, para la definición de términos vagos como «montón», dándole interpretación probabilística. También Nowakowska, en 1977, estimó la pertenencia de una persona a un grupo social, admitiendo que la probabilidad de que ella misma se considere perteneciente a dicho grupo sería función creciente del valor de la función de pertenencia.

Hersh y otros, en Gupta, etc. (1979), indican que la definición empírica de función de pertenencia es una variante de los problemas clásicos de escalación psicológica y psicofísica, en los que deben aplicarse las técnicas del diseño de experimentos.

Conviene advertir que las aptitudes individuales y colectivas para la obtención de funciones de pertenencia, se relacionan con las que se requieren para la evaluación de probabilidades subjetivas, asi como para la evaluación de los evaluadores, etc.

c) *Criterios basados en procedimientos experimentales*

La obtención de funciones de pertenencia se facilita en los casos de mezclas o hibridaciones, en los que sea posible obtener físicamente los valores de dicha función en un punto x.

A pesar de las objeciones de algunos autores, como Watanabe, sobre la posibilidad de obtener funciones empíricas de pertenencia, hay resultados de interés, como los que se refieren a los efectos de los diferentes contextos en los valores que tome dicha función (véase Hersh, Caramazza y Brownell, en Gupta, Ragade y Yager, 1979). En efecto, al variar el recorrido o campo de variación de cada contexto o estudio pueden obtenerse resultados distintos. El conjunto de los «entes pequeños» es evidentemente un subconjunto borroso del conjunto de todos los entes. Pero al comparar, por ejemplo, lo que se entiende por «ratón pequeño» con lo que se entiende por «elefante pequeño», puede observarse como varía con el contexto el recorrido o campo de variación de la función de pertenencia, por lo cual no parece razonable considerar «pequeño» como un término absoluto, sino que habría que relacionarlo con el contexto.

Una situación emparentada con la anterior es la que se deriva de expresiones como, por ejemplo, «el mayor enano» y «el menor gigante»; o bien, la «más madura de las frutas verdes» y la «más verde de las frutas maduras».

En cuanto a los colores, también se ha observado que la interpretación puede variar según el contexto. Por ejemplo, que la interpretación de color «rojo» varía sistemáticamente según que el contexto de referencia sea el rojo de una «manzana colorada» o el rojo de «un vino tinto» (Halff, citado por Hersh y otros). Watanabe ha llamado la atención sobre el hecho de que la palabra japonesa que corresponde aproximadamente a la inglesa *blue* (azul), incluye en ocasiones al verde.

En consecuencia, hay que tener en cuenta la influencia de las diferentes culturas, situaciones, etc., en la obtención, individual o colectiva, de funciones de pertenencia.

d) *Criterios basados en procedimientos analíticos*

La función de pertenencia puede obtenerse también a partir de modelos, bien directamente o mediante alguna transformación. Por ejemplo, en la obra de Dubois y Prade (1980) se describen los siguientes:

Kochen y Badre, en 1976, parten de un modelo según el cual el incremento marginal de la intensidad con que una persona cree que «x es A», es proporcional a la intensidad de esta creencia y a la correspondiente a «x no es A». Se obtiene así una ecuación diferencial cuya integral es la función logística, con dos parámetros, que se estiman a partir de los datos disponibles. Se trata, pues, de una justificación de la forma obtenida, a partir del modelo previamente admitido.

Otro modelo es el de Bremermann (1976), o de prototipo deformable, en el que se supone un patrón dependiente de ciertos parámetros; $p_1, \ldots, p_m$. Para un objeto dado, se procura deformar el patrón o prototipo, para conseguir la mejor adaptación posible de éste al objeto. Se admite que la discrepancia o disimilitud entre el objeto x y el prototipo, depende de la distancia mínima entre ambos y de la energía que se requiere para la deformación antes mencionada. La disimilitud D (x) se expresa como suma ponderada de la distancia mínima y de la función que representa la energía correspondiente a la información. De aquí se obtiene la función de pertenencia.

$$\mu(x) = 1 - (D(x)/\sup D).$$

e) *Otros criterios*

Podrían proponerse otros criterios, algunos de los cuales se describen en Dubois y Prade (1978), como la función de filtro de Mac-Vicar-Whelan (1978), que se caracteriza por un parámetro de localización y otro de amplitud, que expresa la transición entre la pertenencia y la no pertenencia.

También podría explorarse la aplicación de procedimientos basados en «apuestas», como los que se utilizan en la estimación de probabilidades subjetivas.

Asimismo pueden ensayarse procedimientos mixtos a partir de dos o más de los ya mencionados.

Es conveniente advertir que la diferencia de resultados obtenidos con diferentes criterios y procedimientos, es equiparable a las discrepancias que resultan al concretar nociones ideales, como las de posición, dispersión, o cualquier otra de las que se utilizan corrientemente en Estadística.

En relación con la pertenencia, debe mencionarse el uso de *modificadores*; modificadores lingüísticos (hedges, hedge operators, linguistic hedges, etc.), adverbios de modo, que modifican la calificación de las variables en estudio.

Kickert (1976) considera, siguiendo a Zadeh, dos tipos de modificadores: los que pueden considerarse como operadores que actúan sobre el conjunto borroso en estudio («muy», «mucho», «poco», etc.) y los que requieren una descripción previa de cómo actúan sobre las componentes del operando («en esencia», «en cierto sentido», «estrictamente», etc.).

Como ejemplo de los primeros propone la siguiente definición: «muy» $x = x^2$. Por ejemplo, para el conjunto borroso «hombre viejo», podría tomarse como función de pertenencia:

$$\mu(x) = \left[1 + \left(\frac{x - 50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}$$

para edades $x > 50$, y 0 para $x \leqslant 50$.

Para el conjunto borroso «muy viejo» podría tomarse como función de pertenencia el cuadrado de la anterior, o sea, el paréntesis externo elevado a -2.

Para el conjunto borroso «muy, muy viejo» dicho paréntesis elevado a -4, etc.

Análogamente, podrían definirse según Zadeh, los conjuntos borrosos:

«Más que» $x = x^{1,25}$.
«Menos que» $x = x^{0,75}$.
«Más o menos» $x = x^{0,50}$.

Las operaciones anteriores se denominan a veces de «borrosificación». Corresponde este concepto a la transformación de un conjunto nítido en un conjunto borroso, o de un conjunto borroso en otro más borroso (debe tenerse en cuenta que «más borroso» no quiere decir más borrado o atenuado, sino más indeciso, más próximo al grado 0,5).

Algunos autores llaman borrosificación a la transformación de un conjunto borroso en otro llamado de tipo 2, al substituir su función de pertenencia nítida por otra borrosa.

Algunas aplicaciones de los conjuntos borrosos

Cuando se trata de teorías y técnicas relativamente recientes es costumbre hacer referencia a sus aplicaciones, para información general y orientación de las personas interesadas en el tema. Así se ha efectuado en obras de Estadística, o de Investigación Operativa, y en aspectos específicos tan diversos como Muestreo de poblaciones finitas, Teoría de la decisión, Programación matemática, Teoría de colas, etc.

En la bibliografía que figura al final de esta exposición se indican varias obras sobre conjuntos borrosos que contienen referencias a sus aplicaciones, efectuadas y potenciales. Sin embargo puede tener alguna utilidad hacer un breve resumen y sistematización, así como destacar algunas de ellas.

En primer lugar, conviene distinguir entre las aplicaciones a disciplinas generales y metodológicas como la Estadística, la Investigación operativa, la Teoría de la decisión, etc., y las disciplinas que tienen un campo substantivo concreto, como la Biología o la Economía. Sabido es que la clasificación de las ciencias, de tanta tradición como actualidad, presenta diversos tipos de dificultades. Las discusiones sobre el concepto de ciencia, sobre las denominaciones y definiciones de las disciplinas establecidas; la distinción entre ciencias básicas o puras y ciencias aplicadas, y su dependencia o independencia así como inclusiones de unas en otras, contribuyen a complicar la situación. Como ha dicho nuestro compañero Darío Maravall: «las fronteras entre las diversas ciencias no están trazadas de manera clara y distinta..., sino que se solapan entre sí, interfieren..., se funden..., de modo que si bien es cierto que cada ciencia tiene un núcleo claramente diferenciado, tiene también una corteza que resulta difícil precisar si pertenece a ella o pertenece ya a otra».

Atendiendo a la denominación misma de esta Real Academia pudiera empezar por considerarse la aplicación a las ciencias exactas o matemáticas. Al establecer estructuras, aplicaciones del conjunto $E \times E$ en $(0,1)$, o de A en otro conjunto B, una vez generalizada la noción de función de pertenencia, se definen relaciones borrosas, ordenaciones borrosas, etc. Habría que seguir ahora la magistral exposición sobre estructuras algebraicas del hasta hace poco tiempo compañero vuestro, D. Germán Ancochea, para marcar debidamente la repercusión de los conjuntos borrosos en los conceptos mencionados y los que de ellos se derivan. El tratamiento axiomático y operativo de los conjuntos borrosos, desde un punto de vista matemático riguroso, y fecundo en aplicaciones, tiene en nuestro país un importante grupo de seguidores, en la que pudiéramos denominar escuela catalana: Alsina, Batle, Bonet, Meseguer, Riera, Sols, Trillas, etc.; también en Madrid se han publicado algunas tesis y tesinas sobre este tema, de L. Pardo, P. Cañas, M.ª S. Lorenzo; en Sevilla, por A. Ollero y E. Freire, etc.

Otra aplicación que debe destacarse es la que se refiere a la teoría de la decisión. Se trata de un tema sobre el cual hay numerosos y profundos trabajos de estadísticos españoles, gran parte de ellos discípulos y colaboradores de nuestro compañero Sixto Ríos. Parecería a primera vista que se trata de un campo poco apropiado para los conjuntos borrosos, ya que al decidirse por una acción, quedarían excluidas las otras acciones posibles. No obstante bastaría consultar la obra de Kickert (1978) para tomar noticia de la aplicación de las teorías borrosas a la toma de decisiones. Ya es muy extensa la literatura sobre decisiones borrosas, tanto individuales como multipersonales o de grupo, y tanto en una sola etapa como polietápicas (con programación dinámica y en relación con sistemas generales), tras las primeras sugerencias sobre este tema, debidas a Bellman y Zadeh, en 1970. Algunas aplicaciones de interés pueden verse en la obra de Kaufmann (1973). Más adelante aparecen trabajos de diversos autores, en la obra compilada por Zadeh, Fu, Tanaka y Shimura (1975). En los últimos años se han efectuado varios planteamientos y desarrollos basados en definiciones de utilidad y estados borrosos, restricciones borrosas, etc., y aplicaciones en campos distintos, por ejemplo, al diagnóstico y a la decisión clínica (Sánchez, Esogbue y Elder, etc.), algunos de los cuales están contenidos en las obras mencionadas en la bibliografía, o publicadas en la revista Fuzzy Sets and Systems, o dedicados a diferentes especialidades.

Otras aplicaciones a destacar se refieren a la morfosistémica y a los diferentes aspectos de las ciencias de la clasificación: Análisis de conglomerados, Taxonomía matemática, numérica y estadística, Reconocimiento de patrones, Análisis discriminante, etc. Al interés por estos temas, puesto de manifiesto en los últimos años, por ejemplo, en el discurso de recepción de nuestro compañero Julio Garrido, vienen correspondiendo importantes trabajos sobre particiones borrosas, definiciones borrosas de similitud, distancia, entropía, etc. (Bezdek, Dunn, Lucca y Termini, Ruspini y otros). Y esto tanto en lo que se refiere a la investigación y metodología general como a sus aplicaciones especiales a campos muy diversos.

Entre las aplicaciones que pudieran denominarse clásicas están las relativas a la lógica, razonamiento borroso, lingüística, semiótica, etc. Asimismo la teoría general de sistemas (Negoita, Ralescu, Santos, Sugeno, Tong, etc.), así como la investigación operativa, uso de grafos borrosos, programación borrosa, etc. Especial interés tienen las aplicaciones a los autómatas borrosos, inteligencia artificial, robótica, etc., así como optimización y control. En lo que se refiere a la formulación y a la solución de modelos, los planteamientos basados en conjuntos borrosos podría pensarse que han seguido una línea paralela a los de modelación laxa de H. Wold. En relación con los modelos es oportuno mencionar las aplicaciones en Economía y Sociología, en economía regional y estudio de espacios económicos, en aspectos cibernéticos y sistémicos y en los problemas borrosos de elección, administración y política.

En general puede decirse que así como es posible estudiar cualquier fenómeno o campo de aplicación en forma determinística o en forma estocástica, al incluir incertidumbre y vaguedad en una concepción más amplia, cabe considerar aspectos nítidos y aspectos borrosos en cualquier tipo de investigación.

Conclusión

Como acaba de decirse, los conjuntos borrosos permiten abordar la realidad en sus aspectos vagos, tanto en lo externo como en el *interior* de su *apariencia, supuestamente vaga o vacía de material* tangible. Tal vez sea oportuno repetir cuáles serían los aspectos positivos más importantes en la introducción de la teoría y de las técnicas de los conjuntos borrosos.

1) Un tratamiento más completo de la realidad, para extender y profundizar su comprensión.

El mundo real es en su totalidad inaprehensible para el hombre. Este ha de efectuar abstracciones y simplificaciones, para describir y establecer regularidades que le auxilien en su comprensión y en sus predicciones y decisiones. Se le plantea así el problema de qué es lo que habrá de incluir y de excluir en sus planteamientos científicos. Hace siglos que se dio entrada en estos esquemas a los conceptos de error y de incertidumbre probabilística. Se quiere ahora extender las investigaciones a otros aspectos, que no solo carecen de certeza, sino también de nitidez. Claro es que el azar puede ser una manifestación de nuestra ignorancia, pero hay un substrato permanente y profundo de incertidumbre en los fenómenos. También las apariencias pueden ser borrosas como resultado del modo instrumental de abordarlas, pero hay intrínsecamente un «núcleo duro» de borrosidad o vaguedad. Los aspectos vagos o laxos, aparentes o reales de la naturaleza y de su conceptualización, requieren un tratamiento adecuado, como el que ofrece la teoría de los conjuntos borrosos, que ya ha tenido ocasión de demostrar su fecundidad y potencia resolutiva.

2) Señalamiento de rumbos y de nuevas áreas de realización y de estudio.

Al introducir los conjuntos borrosos, con métodos matemáticos rigurosos, y confrontar los resultados empíricos obtenidos con la aplicación de sus técnicas, esto es, de las hipótesis con la realidad, se han abierto nuevos campos a la investigación y a la experiencia, se ha extendido el concepto de probabilidad con el de posibilidad y medidas borrosas, y se han marcado nuevas trayectorias en investigación operativa, ciencias de la gestión, cibernética y teoría general de sistemas.

3) Cooperación en los esfuerzos de síntesis.

Se ha hablado hasta en exceso de la necesidad de tratamientos holísticos, sistémicos, y de la eficacia del trabajo en equipos pluridisciplinarios; de evitar la dispersión de esfuerzos, los análisis exclusivistas y el desgaste por contraposición de objetivos, instituciones e individualidades. La investigación de las diferentes fuentes de borrosidad e incertidumbre ha favorecido notablemente la formación de grupos de trabajo con la participación de especialistas en campos distintos.

4) Entendimiento y comunicación.

Son varios los estudiosos e investigadores de la Teoría de conjuntos borrosos que han demostrado interés por aspectos lingüísticos y preparación de vocabularios y glosarios. El trabajo pluridisciplinario que antes se menciona, requiere la aclaración de pensamientos, conceptos y definiciones, y la expresión explícita de sus ambigüedades y redundancias. Es necesario establecer acuerdos de traducción científica y eliminar toda fuente evitable de borrosidad y confusión.

Para terminar, deben reconocerse, como ha hecho Zadeh, las dificultades en el planteamiento de algunos problemas matemáticos, lógicos y lingüísticos que surgen de la discontinuidad y borrosidad de la evidencia. Desde la introducción de los números irracionales, los precursores, colaboradores y continuadores de la Academia se afanan por convertir zonas borrosas en áreas nítidas.

Esforzarme en ensanchar y prolongar la vía que siguiendo vuestro alto magisterio conduce a tan alto objetivo, es la mayor recompensa a que en mi modesta capacidad puedo aspirar.

Bibliografía

a) *Trabajos, artículos y discursos citados*

Ancochea, G. (1966). *Estructuras algebraicas.* (Discurso de recepción, R. A. de Ciencias, Madrid.)

Azorín, F. y Sánchez-Crespo, J. L. (1980). *Contribution to the Balancing of Various Desiderata Attributes.* (UN. Conf. of European Statisticians, Geneva.)

De Luca, A. and Termini, S. (1972). *A definition of non-probabilistic entropy in the setting of fuzzy set theory.* (Inform. and Control, 20.)

Deaño, A. (1976). *La lógica formal hoy.* (Rev. de Occidente, núm. 7.)

Fellegi, I. P. and Holt, D. (1976). *A Systematic Approach to Automatic Edit and Imputation.* (JASA, 71, 353.)

Garrido, J. (1976). *Taxonomía matemática y filosofía de las formas de la naturaleza.* (Discurso de recepción, R. A. de Ciencias, Madrid.)

Hisdal, E. (1979). *Possibilistically Dependent Variables and a General Theory of Fuzzy Sets.* (En la obra compilada por Gupta, Ragade y Yager.)

Maravall, D. (1968). *La economía y la sociología como motores de la investigación matemática.* (Discurso de recepción, R. A. de Ciencias, Madrid.)

Needham, J. (1956). Véase cita en la obra de E. W. Beth.

Ramón y Cajal, S. (1897). *Fundamentos racionales y condiciones téc nicas de la investigación biológica.* (Discurso de recepción, R. A. de Ciencias, Madrid.)

Rey Pastor, J. (1928). *Contestación al discurso de recepción de D. José G. Alvarez Ude.* (R. A. de Ciencias, Madrid.)

Ríos, S. (1961). *Procesos de decisión.* (Discurso de recepción, R. A. de Ciencias, Madrid.)

Sugeno, M. (1974). *Theory of Fuzzy Integral and its Applications.* (Ph. D. Thesis, Tokyo Inst. of Techn. Ver referencia en la obra de Dubois y Prade.)

Zadeh, L. (1965). *Fuzzy Sets.* (Inform. and Control, 8.)

b) *Obras sobre conjuntos borrosos*

Azorín, F. (1979). *Algunas aplicaciones de los conjuntos borrosos a la Estadística.* (I. N. E., Madrid.)

Dubois, D. and Prade, H. (1979). *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications.* (Academic Press.)

Gupta, M. M., Ragade, R. K. and Yager, R. R. (1979). *Advances in F. S. Theory and Applications.* (North Holland.)

Gupta, M. M., Saridis, G. N. and Gaines, B. R. eds. (1977). *Fuzzy Automata and Decision Processes.* (North Holland.)

KANDEL, A. and LEE, S. C. (1979). *Fuzzy Switching and Automata.* (Crane, Russak and C.º, N. Y.)

KAUFMANN, A. (1973). *Introduction à la Thèorie des Sous-Ensembles Flous. Elements théoretiques de base.* (Masson.)

KAUFMANN, A. (1975 A). *Application a la Linguistique et a la Sémantique.*

KAUFMANN, A. (1975 B). *Application a la Classification et a la Reconnaissance des Formes, aux Automates et aux Systémes, aux choix de critères.*

KICKERT, W. J. M. (1978). *Fuzzy theories on decision making.* (M. Nijhoff, Ansterdam.)

NEGOITA, C. V. (1979). *Fuzzy Systems.* (Abacus Press, Turnbridge Wells, Kent.)

NEGOITA, C. V. and RALESCU, D. A. (1974). *Multini Vagi Applicabile.* (Ed. Technica, Bukuresti.)

NEGOITA, C. V. and RALESCU, D. A. (1975). *Applications of Fuzzy Sets to System Analysis.* (Birkhauser Verlag.)

TRILLAS, E. (1980). *Conjuntos borrosos.* (Vicens-Vives.)

WANG, P. P. and CHANG, S. K. (1980). *Fuzzy Sets: Theory and Applications to Policy Analysis and Information Systems.* (Plenum Press.)

ZADEH, L. A., FU, K. S., TANAKA, K. and SHIMURA, M., eds. (1975). *Fuzzy Sets and Their Application to Cognitive and Decision Processes.* (Academic Press.)

c) *Otras obras citadas*

BENACERRAF, P. and PUTNAM, H. (1964). *Philosophy of Mathematics.* (Prentice Hall.)

BETH, E. W. (1965). *The Foundations of Mathematics.* (North Holland.)

HOFSTADTER, D. R. (1979). *Gödel, Escher, Bach.* (Basic Books.)

QUINE, W. V. O. (1960). *Word and Object.* (Wiley.)

ROSE, J. and BILCIU, C. (1977). *Modern Trends in Cybernetics and Systems.* (Springer V.)

SNYDER, D. (1971). *Modal Logic and its Applications.* (Van Nostrand.)

VON WRIGHT, G. H. (1963). *The Logic of Preference.* (Edinburgh, U. P.)

WATANABE, S. (1969). *Knowing and Guessing.* (Wiley.)

DISCURSO DE CONTESTACION

DEL

EXCMO. SR. D. SIXTO RIOS GARCIA

Al encargarme la Real Academia de Ciencias de contestar al nuevo Académico D. Francisco Azorín Poch, experimenté una gran satisfación por el honor que para mí suponía y, muy especialmente, por tratarse de un antiguo y querido compañero de profesorado. Ya cuando surgió su nombre en conversación con el inolvidable colega Ancochea y con Darío Maravall, coincidíamos en que sus especiales méritos científicos y profesionales y sus cualidades humanas de bondad, modestia, simpatía, tolerancia, le hacían un candidato muy deseable para la vacante de nueva creación que desde hoy va a ocupar por elección de esta Corporación Académica.

Hace casi cuarenta años, encontré por primera vez a Azorín como Ayudante en la Cátedra de Estadística Matemática de la Universidad de Madrid, a la que yo había accedido tras mis segundas oposiciones. Con el querido colega y gran amigo Enrique Cansado, entonces Auxiliar temporal, y hoy Presidente electo del Instituto Internacional de Estadística, formábamos la terna típica de docentes con que en aquella época se regentaba, dirigía y realizaba eficazmente una Cátedra de Universidad.

Tanto Azorín como Cansado se desplazaron temporalmente a relevantes puestos del Profesorado o la profesión estadística en América Latina, donde realizaron la mayor parte de su labor en los años transcurridos.

En mis estancias foráneas, mucho más esporádicas que las de ellos, tuve la suerte de encontrarme nuevamente con Azorín, como colaborador eficaz en la Escuela de Estadística que la UNESCO me había encargado de organizar en la Universidad Central de Venezuela. Tras un curso de convivencia, un poco acortado por mi grave accidente de aviación, Azorín continuó, ya como Jefe de la misión de la UNESCO, prolongando durante varios años más el influjo de sus enseñanzas de estadística en la Universidad Central de Caracas.

Se podría decir que Azorín nació para ser estadístico. Su profesor del Instituto de Córdoba, D. José Manuel Camacho, dice en un artículo que le dedicó en 1930 con motivo de habérsele concedido un premio literario: «siendo estudiante de Bachillerato Azorín es siempre ávido de obtener nuevos y diversos conocimientos, posee un espíritu ordenado y serio», y añade textualmente, refiriéndose a un cierto hecho «... Azorín anotó el hecho, quizá pensando que mañana pudiera servirle para alguna estadística...». Llama la atención en esta cita la perspicacia predictiva del profesor para reconocer la vocación interna de su alumno, a pesar de que éste había expresado desde muy pequeño su deseo de llegar a ser catedrático de Historia Natural.

Toda vivencia deja, manifiesta o tácita, su impronta. Francisco Azorín, ávido lector desde su infancia, es después estudiante en la Residencia madrileña de Pinar 21, situada en la que Juan Ramón Jiménez llamó «colina de los chopos». Allí conviven o concurren muchos de nuestros más prestigiosos intelectuales, poetas y científicos, bajo la inspiración del malagueño Alberto Jiménez Fraud, coterráneo de Francisco Azorín. En la Residencia adquiere éste el hábito del trabajo universitario, de la investigación y del estudio, sin dejar por ello de participar en actividades humanísticas, literarias o plásticas, en aquel ambiente tan propicio para el desarrollo de las que C. P. Snow llamó las «dos culturas».

Más tarde, pero todavía en los agitados años 30, parece que Francisco Azorín no encuentra clara la senda de su vocación, y estudia, sucesiva o simultáneamente: Química, Matemáticas, carreras técnicas, etc. En la post-guerra, ya acabando la Licenciatura de Exactas, llega a nuestra peculiar disciplina de la observación, incertidumbre, clasificación y decisión: la Estadística. Todo ser humano es una compleja trama en la que intervienen su talante particular y sus respuestas, más o menos visibles, a los impactos del mundo externo, que van conformando sus experiencias, motivaciones y conducta. Según su confesión, en Francisco Azorín influyen, por ejemplo: un libro de Borel, leído tal vez al azar en una biblioteca pública de Barcelona y la impresión casi superrealista que recibe al oír al Profesor D. Olegario Fernández Baños, en el viejo caserón de San Bernardo, referirse a la curva de los precios del boniato, con resonancias tan distintas del lenguaje matemático formalista, y desarrollo de las otras asignaturas de Exactas. Pronto empieza también a sentirse atraído por la apertura y tolerancia de algunos estadísticos oficiales. Así, a poco de terminar su carrera, emprende dos actividades complementarias: ingresa con el número uno en el Cuerpo de Estadísticos Facultativos, simultaneando pronto este trabajo con las clases prácticas de Estadística matemática, en la Cátedra que yo regentaría más tarde.

Empieza poco después a trabajar como becario en el Instituto San José de Calasanz de Pedagogía, dirigido entonces por José Royo, y en el Instituto de Ampliación de Estudios e Investigación Industrial, dirigido por el magnífico D. José Antonio de Artigas.

Participa con Enrique Cansado, Angel Anós y conmigo, en un Seminario de Muestreo Estadístico, organizado por el Instituto Nacional de Estadística donde se dan las primeras conferencias sobre este tema en nuestro país.

Toma también parte activa en otro Seminario de Muestreo desarrollado en la Universidad de Estocolmo, con una conferencia inicial dada por H. Cramer.

La creación casi simultánea, al comienzo de los 50, de la Escuela de Estadística en la Universidad de Madrid y del Instituto de Investigaciones Estadísticas del CSIC, en los que Azorín colaboró desde sus comienzos, así como las visitas a dichos centros de J. Wishart, H. Cramer, Frechet, Mahalanobis, H. Wold, y otros destacados profesores, contribuyeron a reafirmar la vocación de Francisco Azorín, que comenzó a publicar los resultados de sus investigaciones y artículos de exposición, a partir del primer número de nuestra revista Trabajos de Estadística.

Como investigador visitante y becario del Consejo Británico en el laboratorio de Estadística de la Universidad de Cambridge, tiene la oportunidad de completar su formación bajo el influjo de personalidades tan destacadas como J. Wishart, F. J. Anscombe, D. R. Cox, H. Daniels, D. V. Lindley y otros.

Nuevamente en Madrid, termina Francisco Azorín su tesis sobre la «Distribución t no central», clasificada de Sobresaliente con premio extraordinario por el tribunal en que fui Ponente.

Durante su docencia en la Universidad Central de Venezuela, publica la primera edición de su excelente «Curso de Muestreo y Aplicaciones» del que se han hecho varias ediciones y reimpresiones en España, y que todavía constituye referencia básica sobre diseño y análisis de muestras en muy diversos campos. En esta rama de la

Estadística, puede decirse sin lugar a dudas que es hoy un especialista internacionalmente conocido.

En un paréntesis de su labor en Sudamérica, accede por oposición a la Cátedra de Estadística Matemática y Cálculo de Probabilidades de la Universidad de Santiago de Compostela, donde desarrolla una notable labor didáctica e investigadora, siendo sensible, desde el punto de vista español, la brevedad de dicho período, pues pronto es contratado por la CEPAL (Comisión Económica para América Latina de Naciones Unidas), en Santiago de Chile, donde trabaja una serie de años, hasta que se incorpora nuevamente a la Universidad Española tras un concurso a la Cátedra de la Universidad Autónoma de Madrid. Inmediatamente después es nombrado Presidente del Instituto Nacional de Estadística, importante cargo de nueva creación, desde el que ha de dar un mayor peso e influencia a las estadísticas oficiales en el desarrollo de la política gubernamental.

Debe decirse que Azorín siempre ha mostrado singular admiración por los científicos viajeros, algunos de los cuales ha mencionado en su discurso. Desde Plinio el Viejo, los traductores de Ripoll y de Toledo, Linneo, Humboldt y los botánicos y científicos que de España pasaron al Nuevo Mundo, hasta algunos de reciente memoria. Viajeros no solo en su recorrido material por países lejanos, sino también por su ambicioso afán de síntesis en diferentes disciplinas.

Siguiendo a estos maestros ha desempeñado Azorín un papel polinizador, como las abejas que cita Francis Bacon, como un vehículo humano de comunicación entre profesionales y estudiantes de diversas procedencias. Así lo acreditan sus trabajos en la CEPAL, sus viajes a lo largo y a lo ancho del continente americano, como asesor, como conferenciante, como ayudante o catalizador de investigaciones. Fue allí director de la División de Estadística ; dio algún curso en la Universidad de Chile y en el CIENES (Centro Interamericano de Enseñanza de Estadística), que aun dirige nuestro compatriota Enrique Cansado, y realizó esfuerzos para la integración de actividades estadísticas, labor que más adelante destacaremos. Pero durante su larga permanencia en Chile, como antes en Venezuela, no dejó de sentirse próximo a nosotros, publicando trabajos en nuestras revistas simultáneamente con otras labores internacionales, como representando a la CEPAL en las tareas del Comité de Planificación y Desarrollo de Naciones Unidas, presidido por el premio Nobel J. Tinbergen.

Elegido miembro de número del Instituto Internacional de Estadística, corporación que reúne a prestigiosos estadísticos de diferentes países, interviene activamente en las reuniones de Viena, Varsovia, Nueva Delhi y Manila. En la capital de Filipinas, por iniciativa suya y de otros españoles, nuestro Embajador propone a la asamblea que el 44º Congreso o Sesión se celebre en Madrid en 1983, lo que fue unánimemente aceptado.

El Prof. Bjerve, de dicho Instituto, manifestó en Varsovia su alarma por la creciente separación y distanciamiento entre los estadísticos académicos, los de la administración local o central y los de la industria, agricultura, etc. En consecuencia se constituyó una comisión, presidida por Duncan y Durbin, entre cuyos miembros figuraba Azorín. El informe de dicho comité, ya publicado, debería constituir lectura obligada para todos los estadísticos, en beneficio de su mejor comunicación, comprensión y eficacia de su trabajo.

Las publicaciones de Francisco Azorín se centran principalmente en los temas:

a) Estadística inferencial; especialmente problemas de estimación, de evaluación, clasificación de estimadores y características deseables de éstos y de las observaciones de base.

b) Muestreo estadístico; problemas generales del diseño y análisis de las encuestas por muestreo. Podría considerarse como un campo aparte el Muestreo espacial, que algunos denominan muestreo de tapices o mosaicos, o muestreo pluridimensional (en sentido diferente del muestreo con varios criterios de estratificación).

c) Taximetría, taxonomía matemática y estadística, análisis de conglomerados, botriología, morfosistémica y caracterización de elementos y unidades.

d) Conjuntos borrosos o difusos, y sus aplicaciones a la Estadística.

Creo que además debe señalarse su interés por los temas terminológicos: es conocida su afición por los idiomas, nacionales e internacionales, pues es convencido defensor del idioma auxiliar internacional Esperanto; ha colaborado en varios glosarios especializados sobre Estadística en general, sobre Muestreo estadístico y sobre conjuntos difusos; pertenece al Comité de Terminología de la Asociación Internacional de Estadísticos de Encuestas, presidido por el Prof. L. Kish, que ya ha celebrado varias reuniones de trabajo.

Aunque, aparentemente, los temas mencionados corresponden a diferentes campos de la Estadística y aún de la Matemática aplicada, creo que la clave de lo que tienen de común podría hallarse en el concepto de espécimen o ejemplar. Un ejemplar es también una muestra, de tamaño uno, a la cual pueden referirse los taxónomos en su trabajo de clasificación, identificación o discriminación. Cuando Yule, en unos humorísticos versos latinos se refiere a las pequeñas muestras, tema de máximo interés en su época, las designa por «párvula exempla»; muestras, ejemplos, ejemplares, tienen un centro de interés común.

Respetando el esquema tradicional de estos actos, llegamos ahora al comentario al magnífico discurso pronunciado por el colega Azorín, en que ha hecho un excelente resumen del estado actual de la prometedora y discutida teoría de conjuntos borrosos y/o difusos (1).

El tema de los conjuntos difusos me ha ocupado en época reciente en relación con mis trabajos sobre decisiones con multicriterios, y a través de él voy a hacer una breve incursión en este terreno, en evolución inicial, de los conjuntos difusos.

Ciertamente en los problemas de la decisión multicriterio, multiatributo, multiobjetivo, ..., surgen de modo muy natural los conceptos de función de pertenencia, distribución de posibilidad, ..., que son completamente análogos a los de función de valor, de utilidad, y permiten observar con más claridad que con otros ejemplos corrientemente utilizados en la teoría de difusos las diferencias entre realidad y modelo.

En los problemas de decisión con multiatributos se tiene un conjunto $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ de alternativas elegibles (p. e. diversos modelos de automóviles), y un conjunto de criterios $(A_1, A_2, ..., A_q)$ que el decisor desea satisfacer u optimizar (p. e. distancia máxima recorrida al frenar, confort, capacidad interior, etc.). Se supone que el decisor acepta un sistema de evaluación que le permite conocer para cada alternativa x_j la medida $A_i(x_j)$ que le da la alternativa x_j al criterio A_i. Si suponemos que cada una de estas alternativas se produce en un ambiente de certidumbre, tendremos que cada una de las funciones $A_i(X)$ será, lo que se llama una *función de valor*. Si

(1) La Real Academia de Ciencias en su Diccionario de próxima publicación, ha adoptado la palabra difuso como traducción de «fuzzy» y como sinónima la palabra borroso. En las lenguas latinas (salvo el francés en que se dice «flou», se ha traducido por «diffuso» (italiano), difús (catalán), etc.

estamos en un ambiente de incertidumbre y el sistema de evaluación, para que sea posible su manejo apropiado, ha de verificar más condiciones que en el caso anterior, se obtienen *funciones de utilidad*. El problema está en dar criterios plausibles para combinar adecuadamente estas funciones de valor (o de utilidad) de los distintos atributos que conduzcan a una función global que sintetiza los objetivos múltiples del decisor.

Si consideramos que A_i (X) se puede interpretar como el grado en que x satisface la condición o el criterio o el atributo especificado por A_i, podemos decir que A_i es un conjunto difuso de X que tiene como función de pertenencia la función A_i (X): $X \in R$.

Como inciso observemos que nuestra experiencia didáctica nos ha hecho comprobar que se suele asignar un sentido intuitivo empírico más fuerte y natural a la función de valor que se introduce en la teoría de la decisión, que a la función de pertenencia que se acostumbra a introducir en los libros de difusos, con ejemplos poco felices, como el de Zadeh, relativo a la función de posibilidad del número de huevos que un individuo consume en el desayuno. Por otra parte, los métodos experimentales preconizados por los libros de difusos para la determinación de las funciones de pertenencia o posibilidad conducen a muchos a la confusión de aquellas con una probabilidad subjetiva.

Pero volvamos al problema de la decisión multicriterio. Vemos que el lenguaje de los difusos se adapta a estos problemas permitiendo el siguiente planteamiento: dados los q conjuntos difusos $A_1, A_2, \ldots, A_q$ correspondientes a los q criterios considerados, investigar las maneras de combinarlos para obtener una función de decisión D.

De este modo se ve como aparecen en un proceso natural de modelización los distintos criterios y como deben utilizarse unos u otros en los casos de compensación y no compensación de objetivos, de procesos competitivos y no competitivos, etc. Esta vía, sugerida por el trabajo pionero de Zadeh-Bellman, ha sido notablemente profundizada con los trabajos de Zimmermann sobre programación lineal maximin y su equivalencia con la programación lineal difusa.

Más recientemente, en 1977, Bliss ha demostrado que existe un isomorfismo entre la clase de los conjuntos difusos y la clase de los procedimientos de decisión con multicriterios. Este resultado podría ser interpretado como que nada nuevo se obtendrá en tal campo con las técnicas de los conjuntos difusos o bien, de modo más optimista, inducirá a proseguir la génesis de funciones de pertenencia para conjuntos difusos obtenidos a partir de otros y su traducción al lenguaje de los métodos convencionales de decisión con multicriterios.

Estos resultados, no muy estimulantes, sobre las posibilidades de innovaciones profundas en las aplicaciones, mediante el nuevo lenguaje de los conjuntos difusos, nos lleva a recordar que el punto de partida de las investigaciones de Zadeh fue construir una teoría de conjuntos difusos que nos aproximara al razonamiento en la vida corriente, rechazando la idea de que el razonamiento podría ser especificado y refinado para ajustarse a la lógica formal exacta clásica, y adoptando, en cambio, el punto de vista de que la potencia del razonamiento humano reside precisamente en la habilidad para tratar directamente con conceptos inexactos o difusos.

A partir de sus primeros trabajos en 1965, Zadeh ha tratado de profundizar cada vez más esta vía de la lógica del razonamiento difuso, o lógica difusa, mientras otros seguidores han persistido en extensiones, muchas veces «mutatis mutandis», a los conjuntos difusos de otros capítulos de la teoría tradicional de conjuntos y las conocidas aplicaciones.

Valga un ejemplo de razonamiento formal clásico:

Pedro es un hombre, todos los hombres son mortales, Pedro es mortal.

Consideremos al lado de éste el siguiente razonamiento difuso:

Pedro es *muy saludable*, los hombres *saludables* viven *mucho tiempo*, Pedro vivirá *muchísimo tiempo*, en que las palabras subrayadas significan conceptos vagos, que serán los que se representen como conjuntos difusos.

La formalización matemática de este tipo de razonamiento difuso ha sido el punto de partida de los estudios de Gaines (1975-6), Baldwin, sobre lógicas difusas y su comparación como otras lógicas como las de incertidumbre, las modales, las de valores múltiples...

Estos estudios teóricos han conducido a una de las aplicaciones más interesantes de los conjuntos difusos, conocida como *control difuso*, con el que se han logrado, p. e., en plantas industriales químicas, métodos de control más perfectos y adecuados que los clásicos de la matemática numérica (King-Mamdani, 1975). Y ello hace esperar que otros éxitos serán pronto realizados en los campos de las ciencias sociales, políticas, económicas, en que, por naturaleza, las lingüísticas y los razonamientos aproximados son más naturales que la cuantificación numérica de las variables y los razonamientos exactos.

Como suele suceder en cada nueva teoría, en su período de introducción hay las más opuestas posturas entre los matemáticos y los científicos que la estudian o la cultivan. Así Hisdal dice: «En 1965 la teoría de Boole recibió con el advenimiento de la teoría de los conjuntos difusos de Zadeh una enorme extensión, comparable a la recibida por la mecánica de Newton con la teoría de la relatividad».

En cambio Arbib se expresa en forma mucho más crítica y escéptica: «Poco hay en esta teoría de interés matemático puro». «Gran parte del trabajo es filosóficamente simple». «Las aplicaciones son más bien contribuciones a la teoría de conjuntos difusos..., que contribuciones a la teoría de la decisión, reconocimiento de patrones...».

Y Kickert afirma que «los conjuntos difusos no constituyen una nueva teoría, sino un lenguaje matemático en que otras teorías pueden ser formuladas». Por ahora, sigue Kickert, «más bien se han limitado los científicos a transformar en difusas, proposiciones y teorías ya existentes, pero es posible que en el futuro se formulen realmente nuevas teorías en este lenguaje. El progreso científico no es predecible».

Al dar la bienvenida al nuevo compañero, expresémosle nuestra esperanza de que sus trabajos científicos y terminológicos y los que él estimule sean fuente de progresos substantivos y de un perfeccionamiento en la comunicación entre las principales disciplinas que en esta Academia se cultivan.