

**REAL ACADEMIA DE CIENCIAS  
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE ESPAÑA**

**EL PAPEL DE LOS PUNTOS CUÁNTICOS  
Y LA INGENIERÍA DE FLOQUET EN LAS  
TECNOLOGÍAS CUÁNTICAS**

**DISCURSO LEÍDO EN EL ACTO DE SU RECEPCIÓN  
COMO ACADÉMICA DE NÚMERO POR LA  
EXCMA. SRA. DÑA. GLORIA PLATERO COELLO**

**Y CONTESTACIÓN DEL  
EXCMO. SR. D. DAVID PÉREZ GARCÍA**

**EL DÍA 27 DE MAYO DE 2026**



**MADRID  
Domicilio de la Academia  
Valverde, 22**



*A mis padres*

ISSN: 0214-9540

ISBN: 978-84-87125-98-0

Depósito legal: M-12387-2026

# ÍNDICE

1. Introducción .....	13
1.1 Transiciones de fase cuánticas .....	15
1.2 Materiales cuánticos .....	22
2. Tecnologías cuánticas: una nueva era .....	24
3. Ingeniería de Floquet en sistemas cuánticos .....	28
3.1 Teoría de Floquet-Bloch y su aplicación a redes cristalinas .....	33
3.2 Ingeniería cuántica de Floquet .....	41
4. Puntos cuánticos semiconductores .....	44
4.1 Puntos cuánticos: plataforma para el ordenador cuántico.....	45
4.2 Cadenas de puntos cuánticos .....	52
4.3 Protocolos para la transferencia de información .....	57
5. Puntos cuánticos como simuladores de fenómenos físicos complejos .....	62
6. Transferencia de información cuántica en sistemas topológicos de baja dimensión .....	71
6.1. Dominios Topológicos .....	72
6.2 Interferencias magnéticas .....	74
6.3 Bits cuánticos conectados a una red topológica .....	78
6.4 Generación de estados entrelazados entre bits cuánticos distantes .....	79
7. Resumen .....	84
8. Conclusiones .....	87
Contestación del Excmo. Sr. D. David Pérez García .....	89
Bibliografía .....	99

Excelentísima Sra Presidenta de la Real Academia de Ciencias, Excelentísimos miembros de la Academia,

Queridos compañeros, colegas, familiares y amigos,

Quisiera comenzar este discurso agradeciendo a la Presidenta de la RAC, Dña Ana María Crespo y a los miembros de la misma, por concederme el honor de formar parte de la Real Academia de Ciencias, con la medalla número 64.

En particular quiero agradecer muy especialmente a los miembros de la Academia que me propusieron para este nombramiento: el Profesor Juan Rojo, el Profesor Ignacio Cirac y el Profesor David Pérez García, excelentes y renombrados científicos, a los que agradezco enormemente su apoyo para mi nominación como miembro de la RAC.

Es para mi un gran honor ingresar en una institución tan prestigiosa como es la Real Academia de Ciencias de España además de una gran responsabilidad el formar parte de esta casa y espero participar activamente en las actividades de la misma.

Quiero agradecer al Consejo Superior de Investigaciones Científicas, institución a la que ingresé en 1987, por haberme dado la oportunidad de dedicarme a esta profesión, la investigación, a la que ya desde mis estudios de bachillerato en el colegio decidí dedicarme.

No tiene mérito el haber querido ser investigadora desde mi etapa en el colegio, ya que el ambiente familiar fue muy propicio a ello. Mi padre, José María Platero, ingeniero de caminos y escritor, era un gran entusiasta de las ciencias y de la física en particular. Mi madre, matemática y pintora, realizó la carrera de ciencias exactas en la Universidad Complutense, en aquella época en la que prácticamente no había mujeres cursando dicha especialidad. Residió en la emblemática Residencia de Señoritas, y fue compañera de curso de un académico de la RAC, el Profesor Rodríguez Salinas, y presumía de haber recibido la calificación de matrícula de honor en la asignatura de física que impartía Don Julio Palacios. Quería haberse dedicado a la Astronomía pero en aquella época, a las mujeres no les estaba permitido acceder a esta profesión...

Mis abuelas Elisa y Virginia fueron también docentes. Esta última, profesora de la Escuela Normal residió también en la Residencia de Señoritas durante el periodo en el que María de Maeztu dirigió la misma. En este periodo conoció a mi abuelo, Casimiro Coello, que residía con una beca en la también emblemática Residencia de Estudiantes del CSIC. Su madre, mi bisabuela, impulsó la creación de las escuelas para niñas en la Mancha, el colegio público de Alcolea de Calatrava lleva su nombre.

Mis padres acogieron con entusiasmo mi decisión de estudiar la carrera de Físicas y dedicarme a la investigación. Sin ellos yo no estaría aquí, y ojalá pudiera compartir con ellos este momento. También quiero agradecer enormemente a mi hermano Jose, Ingeniero de Telecomunicación, quien, desgraciadamente nos dejó muy pronto, por su complicidad y su apoyo.

Pero no solo el ambiente familiar es importante para motivar a los jóvenes a realizar una carrera científica, los profesores son muy importantes, y también los referentes. Mi profesora de Química en el colegio, Maria Luisa Martínez Sarrión, fue un excelente ejemplo de ello. Una película sobre la vida de Marie Curie me influyó definitivamente en la decisión de dedicarme a la investigación: investigar era a fin de cuentas, resolver un misterio, o mejor dicho resolver uno tras otro.

Quiero agradecer a mis profesores y mentores en la universidad por lo mucho que aprendí con ellos.

Al profesor Juan Rojo, un excelente docente e investigador, le agradezco profundamente su apoyo a lo largo de mi carrera, siempre dispuesto a orientar y ayudar a los jóvenes investigadores. Durante su etapa en el Ministerio, el Profesor Rojo contribuyó enormemente al desarrollo de la Ciencia en nuestro país. A él recurrí, en varias ocasiones, y sus consejos me ayudaron a tomar el camino por el que me decanté en mi periodo postdoctoral.

Aunque en los años en que estudié la carrera en la Universidad Autónoma de Madrid, tuvimos muy pocas clases presenciales, tuve profesores excelentes como el Profesor Félix Yndurain, el Profesor Cayetano López o el Profesor Carlos Tejedor, con quién colaboré durante años. Con ellos aprendí mucha física.

Quiero citar también al profesor Fernando Agulló López, quien nos impartió tres asignaturas durante la carrera, fue un excelente profesor, querido

por todos mis compañeros. Fernando nos enseñó cosas tan fundamentales como la importancia de estimar los ordenes de magnitud en cualquier problema de física.

Quiero agradecer también a mi director de tesis, el Profesor Federico García Moliner, que tristemente nos dejó recientemente, por lo mucho que aprendí con él. Fue una figura clave en el desarrollo de la Física de la Materia Condensada en España. Con Federico, persona de gran talla científica y humana, aprendí de su rigor científico y conocimiento. Federico me brindó la oportunidad de visitar centros punteros de investigación fuera de España ya desde el comienzo de mi tesis, en una España entonces aislada del resto de Europa, donde los intercambios científicos con el exterior eran muy limitados.

En los inicios de la tesis realicé una estancia en la Universidad de Milán, en el grupo del profesor Giorgio Benedek, a quien agradezco también la calurosa acogida que me dispensó en su grupo.

Mi periodo postdoctoral lo realicé en el instituto Max Planck de Altos Campos Magnéticos en Grenoble bajo la supervisión del Profesor Massimo Altarelli, una autoridad en la física de semiconductores. Investigamos sobre las propiedades electrónicas de los pozos cuánticos y superredes. Estoy muy agradecida a Massimo por todo lo que aprendí con él, en un entorno científico excelente.

No puedo dejar de incluir entre mis agradecimientos al profesor Bernhard Kramer, quien me invitó a participar en varios proyectos europeos, con grupos tan prestigiosos como el liderado por el Profesor Klaus von Klitzing, premio Nobel de física, en el MPI de Stuttgart, el Profesor Markus Buttiker en la universidad de Ginebra, o el Profesor Leo Kouwenhoven de la Universidad de Delft. Estas contactos y colaboraciones conllevaron también estancias de mis estudiantes durante el doctorado y becas postdoctorales posteriormente en sus respectivos grupos de investigación, abriéndoles a ellos también nuevas oportunidades para sus carreras científicas. Igualmente agradezco al profesor Peter Hänggi, de la universidad de Augsburgo, reconocido internacionalmente por sus contribuciones a la teoría de Floquet, por su apoyo y por las interesantes discusiones de física.

Muy especialmente agradezco al Profesor Tobias Brandes, de la Universidad Técnica de Berlín, con quien colaboré durante mas de veinte años, por su apoyo y amistad. Desgraciadamente, Tobias nos dejó inesperadamente hace unos años.

Agradezco al Prof. Andrew Sachrajda, Investigador del Centro Nacional de Investigación de Canadá (NCR) en Ottawa, y reconocido internacionalmente por sus contribuciones a la física de los bits cuánticos, por compartir con nosotros sus experimentos de transporte cuántico a través de puntos cuánticos semiconductores. Pocas veces he disfrutado más que con esta colaboración teórico-experimental, que describiré brevemente más adelante.

Igualmente, quiero agradecer al Profesor Antti-Pekka Jauho, de la Universidad Técnica de Dinamarca, por su colaboración y amistad desde su estancia en mi grupo en Madrid, en los años 90. El profesor Jauho, es un experto reconocido internacionalmente en el tema del transporte cuántico fuera del equilibrio. Le agradezco su invitación a la universidad Altoo, donde, junto a mi entonces estudiante de doctorado, Maria Busl, investigamos el efecto de aplicar un campo electromagnético al grafeno.

Mi más sincero agradecimiento a los Profesores Klaus Richter y Milena Grifoni, de la universidad de Ratisbona, a los que visité como “Mercator Fellow”, en un Centro de Excelencia de la Universidad de Ratisbona. Desgraciadamente, la última parte de mi posición allí, coincidió con la Pandemia. Aun así, en colaboración con el Dr Jordi Picó, y los profesores Milena Grifoni y Dieter Weiss tuvimos la ocasión de investigar problemas interesantes como el efecto Josephson fraccionario en superconductores topológicos, para la detección de los Fermiones de Majorana.

Además, quiero agradecer al profesor Ignacio Cirac, por su invitación a visitar su centro y muy especialmente el que recibiera a mis, entonces, estudiantes de doctorado, Mónica Benito, Miguel Bello y Juan Zurita, para realizar una estancia de investigación en su grupo, en el Max Planck de Óptica Cuántica en Garching, lo cual ha sido una gran oportunidad para ellos y para nuestro grupo.

Quisiera nombrar a todos mis colaboradores, colaboradoras y colegas, pero no lo haré a riesgo de olvidar a algún nombre, para agradecerles su apoyo incondicional y amistad. Citaré algunos con los que he colaborado a lo largo de los años como el Dr. Sigmund Kohler, experto en el transporte fuera del equilibrio. Le agradezco el que viniera a mi grupo, en el Instituto de Ciencia de Materiales de Madrid del CSIC, institución en la que he trabajado desde su creación.

Quiero agradecer también al Dr Charles Creffield, quien se incorporó a mi grupo hace muchos años, como investigador posdoctoral de un proyecto

europeo y en el presente es profesor de la UCM. Le agradezco a Charles, un excelente investigador, su colaboración a lo largo de los años, que espero continúe en el futuro.

Finalmente, quiero agradecer al Profesor Luis López Bonilla, compañero mío de curso y catedrático en la universidad Carlos III de Madrid, por nuestra colaboración y amistad durante todos estos años. Con Luis, experto en dinámica no lineal, investigamos la dinámica de las paredes de dominios en superredes semiconductoras, así como la polarización dinámica nuclear durante el transporte electrónico a través de puntos cuánticos semiconductores.

Agradezco también el apoyo y amistad de colegas de la talla del profesor Adolfo Azcárraga, Javier Tejada, Francisco Domínguez Adame o Luis Viña.

Creo que la labor mas satisfactoria para mí ha sido la supervisión de estudiantes, a todos los niveles, pero sobre todo de doctorado. Quiero agradecer a mis estudiantes de doctorado, por su trabajo y dedicación y resaltar lo gratificante que ha sido para mí el realizar el proyecto de tesis juntos.

El iniciarse en investigación no es sencillo, pero se consigue cuando se tiene un alto grado de motivación y entusiasmo. Y es ese entusiasmo el que me han transmitido mis doctorandos y que, yo creo, también les he transmitido a ellos.

Muchos de ellos, la mayoría, han continuado la carrera investigadora, trabajan en universidades españolas o extranjeras, o trabajan como investigadores en el CSIC, y son altamente reconocidos por sus contribuciones científicas, otros trabajan, también exitosamente en otros ámbitos. Citaré, por orden cronológico a Jesús Iñarrea, Ramón Aguado, David Sánchez, Rosa López, Rafael Sánchez, Carlos López, Irene Maldonado, María Busl, Fernando Domínguez, Álvaro Gómez, Mónica Benito, Fernando Gallego, Miguel Bello, Jordi Picó, Beatriz Pérez, Juan Zurita y David Fernández.

Con muchos de ellos, sigo en contacto y colaborando, como es el caso de Rosa López, mi primera doctoranda, una excelente investigadora y una gran amiga.

Agradezco así mismo a mis familiares, a todos mis amigos y amigas, así como a mis compañeros de promoción del 78, por su amistad y cariño a lo

largo de todos estos años. Agradezco a mis colaboradores y compañeros por hacerme disfrutar del día a día en el desempeño de nuestra labor.

Para mi es un privilegio tener una gran familia de amigos por todo el mundo, un privilegio que nos brinda nuestro trabajo.

Finalmente, y ahora si acabo, agradezco a José Manuel por estar siempre a mi lado, en lo bueno y también en lo malo, ha habido de todo, en lo personal y en lo profesional, por su gran apoyo y por su paciencia, frente a tantas horas de ordenador por las noches en casa, y a mi hija Gloria, también licenciada en Físicas, y realizando un doctorado, quien me hace aprender cada día sobre lo que piensan y sienten los mas jóvenes.

Muchas gracias.

## 1. INTRODUCCIÓN

La física y la mecánica cuántica han transformado nuestra comprensión del mundo microscópico, sentando las bases para una revolución tecnológica. Desde su origen en los primeros años del siglo XX, estas teorías han evolucionado significativamente, culminando en aplicaciones innovadoras como son las tecnologías cuánticas.

El origen de la física cuántica se remonta a finales del siglo XIX y principios del XX, cuando los científicos comenzaron a investigar fenómenos que la física clásica no podía explicar. En 1900, Max Planck propuso la idea de los cuantos de energía para resolver el problema de la radiación del cuerpo negro, introduciendo la constante de Planck. Este concepto marcó el inicio de la cuántica como una nueva rama de la física. Poco después, en 1905, Albert Einstein utilizó la idea de los cuantos para explicar el efecto fotoeléctrico, demostrando que la luz tiene propiedades tanto de partícula como de onda. Este descubrimiento le valió el Premio Nobel de Física en 1921 y sentó las bases para el desarrollo de la mecánica cuántica.

Los trabajos de Werner Heisenberg, Erwin Schrödinger y Paul Dirac consolidaron la formulación de la mecánica cuántica. Heisenberg introdujo la mecánica matricial, mientras que Schrödinger desarrolló la mecánica ondulatoria. Se demostró que ambas formulaciones, aunque inicialmente diferentes, eran equivalentes. La introducción del principio de incertidumbre de Heisenberg y la interpretación de Copenhague de Niels Bohr resaltaron la naturaleza probabilística de los fenómenos cuánticos.

Desde su origen, el desarrollo de la mecánica cuántica ha contado con la participación de mentes brillantes que desafiaron los límites del conocimiento humano. Sin embargo, el relato histórico de su desarrollo a menudo ha dejado en las sombras las valiosas contribuciones de muchas mujeres científicas, que en ocasiones fueron subestimadas o atribuidas a sus colegas masculinos. A pesar de enfrentarse a barreras sociales, culturales y académicas, estas mujeres dejaron una huella indeleble en la construcción y evolución de esta disciplina fundamental.

El contexto histórico de las primeras décadas del siglo XX presentaba un escenario desafiante para las mujeres que querían realizar una carrera de ciencias. Las normas de género restrictivas y la falta de oportunidades educativas limitaban su acceso a posiciones académicas y de investigación. No obstante, aquellas que lograron superar estas barreras contribuyeron de manera significativa no solo a la mecánica cuántica, sino también a otros

campos interrelacionados, como la física nuclear, la química cuántica y la cristalografía. A lo largo de la historia, sus aportaciones han ampliado las fronteras del conocimiento, generando avances que han influido profundamente en la ciencia moderna.

El trabajo de mujeres como Marie Curie, aunque más asociado con la radiactividad, abrió el camino para el estudio de las interacciones a nivel subatómico, un fundamento clave para la mecánica cuántica. Lise Meitner, por su parte, desarrolló modelos teóricos que respaldaron el descubrimiento de la fisión nuclear, un fenómeno explicado en parte por la mecánica cuántica. De igual modo, Maria Goeppert Mayer, galardonada con el Premio Nobel de Física en 1963, revolucionó la comprensión del modelo de capas nucleares, un logro basado en principios cuánticos fundamentales.

Emmy Noether, fue una matemática brillante cuya contribución al campo de la física fue fundamental. Su teorema, que establece la relación entre las simetrías y las leyes de conservación, es uno de los pilares matemáticos que sustentan la mecánica cuántica y otras áreas de la física teórica. Aunque Noether no trabajó directamente en mecánica cuántica, sus aportaciones matemáticas fueron indispensables para el desarrollo de esta disciplina.

Hay muchos otros nombres de investigadoras que contribuyeron a la física cuántica, entre ellas H. Johanna van Leeuwen, una física holandesa que trabajó en el origen cuántico del magnetismo, o Laura Chalk Rowles, una de las primeras mujeres en obtener un doctorado en física por la Universidad McGill de Montreal, en 1928, y que realizó medidas de las intensidades de las líneas espectrales del hidrógeno. Su trabajo



**Figura 1:** Emmy Noether, Matemática alemana (1882-1935), desarrolló un teorema que relaciona la simetría con las cantidades conservadas y que fue clave para entender la física de partículas elementales y la teoría cuántica de campos.

proporcionó la primera confirmación experimental de las predicciones de Schrödinger. Jane Dewey, tras realizar su doctorado en ciencias en el Instituto Tecnológico de Massachusetts en 1925, pasó dos años en Copenhague trabajando en el laboratorio de Niels Bohr. Allí desarrolló una investigación experimental sobre el efecto Stark en el helio, lo que supuso un trabajo pionero en el campo de la óptica cuántica que ella promovió cuando regresó a Estados Unidos. Otras historias de eminentes científicas se describen en un reciente libro: “Highlighting Women in Quantum History”[1].

En tiempos recientes, el papel de las mujeres en la mecánica cuántica se ha expandido significativamente, con científicas liderando investigaciones en áreas como la computación y la información cuántica, los materiales cuánticos o las transiciones de fase cuánticas.<sup>1</sup>

En esta introducción también se busca resaltar el papel crucial de las mujeres en el desarrollo de la mecánica cuántica, destacando sus contribuciones históricas y contemporáneas. Reconocer estos logros, no solo es una cuestión de justicia histórica, sino también, y fundamentalmente, es una manera de inspirar a futuras generaciones de científicas a contribuir al avance del conocimiento.

## **1.1. Transiciones de fase cuánticas**

Las transiciones de fase ocurren en todos los campos de la física y son cruciales también en la ingeniería, los cambios abruptos de un estado de la materia a otro son evidentes dondequiera que miremos, desde la congelación de los lagos hasta el vapor que sale del cazo al prepararnos una taza de te. Pero, ¿por qué deberían ser solo la temperatura y la presión las que impulsan transiciones tan abruptas?

Durante más de treinta años, la investigación en el campo de las transiciones de fase cuánticas (TPC) ha experimentado un crecimiento constante.

Las transiciones de fase cuánticas son fenómenos fundamentales en la física de la materia condensada que ocurren en sistemas a escalas microscópicas [2, 3]. A diferencia de las transiciones de fase clásicas, que se producen debido a cambios en la temperatura o la presión, las fluctuaciones

---

<sup>1</sup> A. Beige, A. Predojević, A. Metelmann *et al.*, Women for quantum—manifesto of values. *Commun Phys* 8, 422 (2025)

cuánticas pueden reemplazar a las fluctuaciones térmicas, y por tanto, una transición de fase puede ocurrir incluso a temperaturas cercanas al cero absoluto.

Las transiciones de fase cuánticas se producen debido a las fluctuaciones cuánticas de algún parámetro o magnitud física [4]. Hay diferentes modelos y sistemas en los que tienen lugar, y distintas plataformas físicas que permiten simular e investigar las transiciones de fase cuánticas.

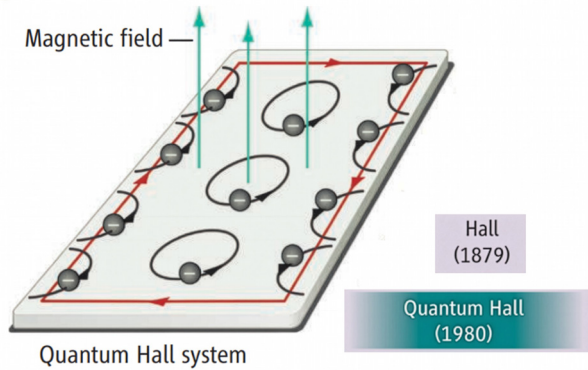
En estos sistemas se puede observar, al sufrir una transición de fase cuántica, un cambio abrupto tanto en las propiedades del material, como en su estado magnético o en su comportamiento conductor al variar un parámetro de control, ya sea la presión, la concentración de impurezas, o un campo magnético externo. Estos cambios están a menudo acompañados de fenómenos emergentes que no se pueden explicar simplemente a partir de las interacciones clásicas entre las partículas.

Un ejemplo de un modelo que presenta una transición de fase cuántica es el modelo de Fermi-Hubbard, un modelo fundamental en la física de la materia condensada y que permite analizar el comportamiento de los electrones en una red [5].

En el modelo de Fermi-Hubbard, los electrones se mueven a través de una red cristalina y pueden interactuar entre sí mediante una repulsión de corto alcance. A bajas temperaturas, este sistema sufre una transición de fase cuántica entre un estado aislante y un estado metálico: es decir, al variar la interacción entre los electrones se puede observar que el sistema pasa de un estado en el que los electrones están localizados (aislante) a un estado en el que pueden moverse libremente (metálico) [6]. Uno de los aspectos más interesantes de esta transición es el papel de la correlación cuántica. A medida que se incrementa la interacción entre los electrones, se producen correlaciones que pueden llevar a una transición de fase con la formación de un orden magnético, como el ferromagnetismo o el antiferromagnetismo, dependiendo de la configuración de la red y la densidad de electrones. El estudio de transiciones de fase cuánticas en el modelo de Fermi-Hubbard no solo proporciona información básica sobre sistemas cuánticos complejos, sino que también tiene aplicaciones prácticas en el diseño de materiales y en el desarrollo de las tecnologías cuánticas [7].

Otro ejemplo de transiciones de fase cuánticas son las fases topológicas.

En 1980 el Profesor Klaus von Klitzing descubrió el Efecto Hall Cuántico entero, por lo que recibió el premio Nobel de Física en 1985 [8].



**Figura 2:** Esquema de una barra Hall, donde se produce el Efecto Hall Cuántico. Se representan también los estados quirales, es decir, estados que se propagan en una sola dirección por el borde del material y que están protegidos frente al desorden.

El Efecto Hall Cuántico fue clave en la investigación de los sistemas topológicos en la Materia Condensada, ya que dicho efecto es una consecuencia de la topología no trivial que presenta el sistema. Este consiste en un gas de electrones bidimensional formado en una heteroestructura semiconductor en presencia de un campo magnético perpendicular al mismo (fig. 2). El Efecto Hall Cuántico se manifiesta en la cuantización de la resistencia transversal, o resistencia Hall, que presenta mesetas o “plateaus”, como función del campo magnético. La resistencia Hall cuantizada corresponde así mismo, a la cuantización de la conductancia Hall, cuyos valores son múltiplos de la constante fundamental  $e^2/h$ . La constante de von Klitzing da nombre al valor de la resistencia eléctrica fundamental, simbolizada como  $R_K = h/e^2$ . Este hallazgo revolucionó la metrología, ya que dicha constante puede usarse como un estándar de resistencia eléctrica de gran precisión, independiente de las características del dispositivo.

El Efecto Hall Cuántico es un fenómeno topológico, lo que significa que la cuantización de la resistencia Hall es robusta frente a impurezas e imperfecciones del material, ya que está determinada por las propiedades topológicas globales del sistema. Además, el sistema presenta estados de borde, que son canales conductores unidimensionales que se forman



**Figura 3:** El Prof. Klaus von Klitzing, recibió el premio Nobel en 1985, por el descubrimiento del Efecto Hall Cuántico Entero.

en los límites del material bidimensional. Debido al campo magnético y al potencial de confinamiento, estos canales son quirales, lo que significa que los electrones solo pueden viajar en una dirección a lo largo de cada borde, y además están protegidos frente al desorden. Los trabajos teóricos de Thouless y Haldane demostraron que la conductividad Hall está gobernada por un invariante topológico –el número de Chern– un entero que no puede modificarse mediante deformaciones continuas del Hamiltoniano.

La consecuencia es de gran alcance: cada meseta de conductividad corresponde a una fase cuántica distinta. Transitar entre ellas no implica la ruptura de una simetría local ni la aparición de un parámetro de orden convencional; exige, en cambio, una transformación global de la función de onda.

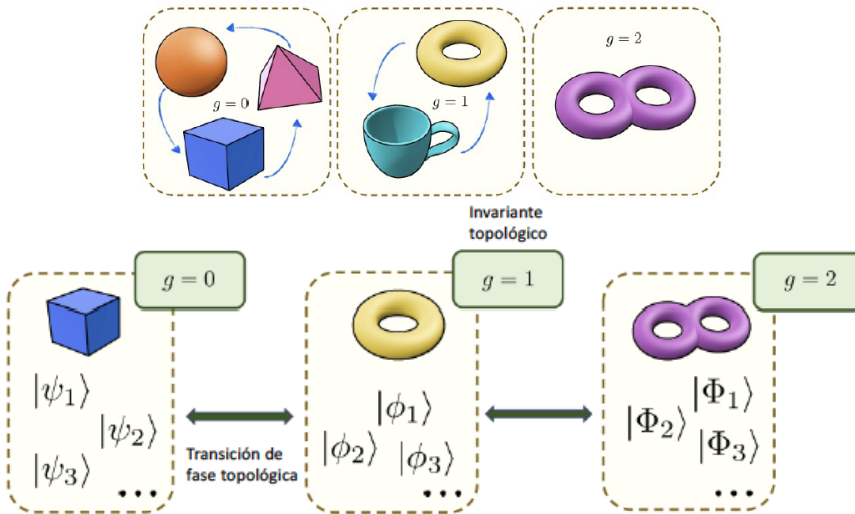
Algunos años después, en 1998, Daniel C. Tsui y Horst Störmer, junto con el teórico Robert Laughlin fueron galardonados con el premio Nobel,



**Figura 4:** Robert B. Laughlin, Daniel Tsui y Horst Störmer fueron galardonados con el Premio Nobel de física de 1998 por el descubrimiento y la explicación del Efecto Hall Cuántico Fraccionario.

por el descubrimiento del Efecto Hall Cuántico Fraccionario, en el que la conductancia Hall de un material bidimensional se cuantiza en fracciones del cuanto de conductancia, como  $1/3$  o  $2/5$ , y no solo en números enteros como en el Efecto Hall Cuántico convencional. Este fenómeno tiene lugar en presencia de fuertes correlaciones electrónicas, a muy bajas temperaturas y campos magnéticos intensos, lo que da lugar a la formación de cuasipartículas que portan cargas fraccionarias [9].

La topología juega un papel crucial en las transiciones de fase cuánticas al proporcionar un marco para entender cómo las propiedades globales de un sistema pueden influir en su comportamiento cuántico. En particular, las transiciones de fase topológicas son aquellas en las que el cambio de fase no se puede describir simplemente en términos de parámetros locales, sino que depende de características globales del sistema, como son la conectividad y la estructura de sus estados.

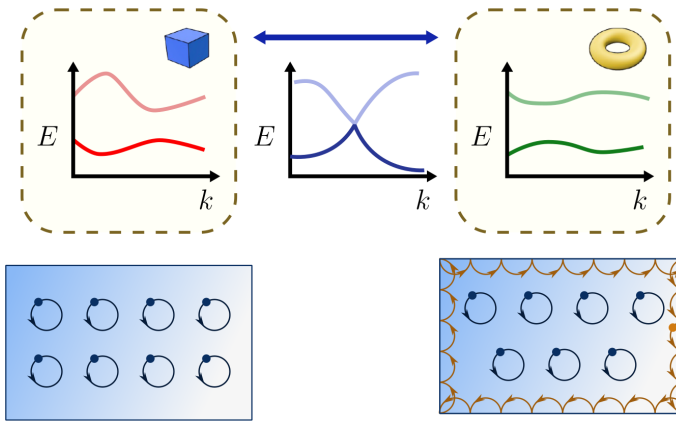


**Figura 5:** La topología clasifica los objetos de acuerdo a las propiedades que presentan y que permanecen invariantes frente a transformaciones continuas. Los estados cuánticos se clasifican de acuerdo a su topología. Las fases topológicas están definidas por un parámetro o invariante topológico, denominado  $g$  ("genus") en la figura.

En sistemas topológicos, como son los aislantes topológicos, las propiedades de la materia están determinadas por los invariantes topológicos, que caracterizan la estructura del sistema. Estos invariantes cambian durante una transición de fase, lo que indica un cambio en la naturaleza del estado cuántico del sistema (fig. 5). Por ejemplo, en un aislante topológico finito, pueden aparecer o desaparecer estados localizados en el borde, al cruzar un umbral crítico, lo que representa una transición de fase topológica (fig. 7).



**Figura 6:** David Thouless, Duncan Haldane y Michael Kosterlitz recibieron el Premio Nobel de Física en 2016 por sus descubrimientos en las fases topológicas de la materia.



**Figura 7:** Los aislantes topológicos son redes cristalinas que presentan un intervalo prohibido de energía ("gap" en inglés) en su estructura de bandas electrónica y tienen propiedades topológicas no triviales, caracterizadas, en sistemas finitos, por estados localizados en sus bordes protegidos frente a ciertos tipos de desorden. La figura superior central muestra como se cierra el "gap" al producirse una transición de fase cuántica topológica.

Estos estados de borde, que se propagan por la frontera del material, son robustos frente a perturbaciones, como el desorden, lo que es fundamental para su aplicación en las tecnologías cuánticas, como la computación o la información cuántica. Los bits cuánticos topológicos, se basan en la manipulación de estados topológicos, y por tanto, son menos susceptibles a errores que aquellos que no tienen la protección topológica frente a perturbaciones, lo que los hace prometedores para aplicaciones prácticas en estos campos. Así mismo, la transferencia de información a través de estos estados, protegidos por sus propiedades topológicas, puede realizarse con fidelidad alta, como discutiremos a lo largo del presente manuscrito.

David Thouless, Duncan Haldane y Michael Kosterlitz recibieron el Premio Nobel de Física en 2016, por sus descubrimientos teóricos sobre las transiciones de fase topológicas y las fases topológicas de la materia.

La topología ha introducido en la física una forma de universalidad particularmente poderosa: aquella que no depende de longitudes microscópicas ni de detalles químicos, sino de propiedades geométricas profundas. De algún modo, hemos aprendido que la materia puede poseer "forma" en un sentido abstracto, y que esa forma es observable.

La topología no solo proporciona un marco teórico para entender las transiciones de fase cuánticas, sino que también tiene implicaciones prácticas en

el desarrollo de nuevos materiales y tecnologías cuánticas. Veremos mas adelante cómo en cadenas de puntos cuánticos se pueden simular aislantes topológicos mediante una técnica conocida como la ingeniería de Floquet.

El modelo de Dicke es otro ejemplo de un hamiltoniano que presenta una transición de fase cuántica. La transición tiene lugar al pasar de una fase normal a una fase superradiante. Este sistema consiste en un número  $N$  de bits cuánticos, o sistemas de dos niveles que constituyen una unidad básica de información, acoplados a un modo bosónico, es decir a un fotón en una cavidad. La fase superradiante es una consecuencia de la coherencia cuántica que se manifiesta de una manera macroscópica y que emerge debido a una correlación en la emisión de fotones de los  $N$  sistemas de dos niveles, o emisores, que forman el sistema físico. Cuando este se encuentra inicialmente en un estado incoherente, la colección de emisores se sincroniza al decaer, generando un momento dipolar macroscópico y emitiendo un intenso pulso de luz. La transición cuántica a una fase superradiante ocurre para un valor crítico de la interacción luz-materia, o bien para una distancia crítica entre los emisores [10].

El modelo de Dicke en presencia de un campo eléctrico periódico en el tiempo, y/o en presencia de disipación se ha investigado desde distintas perspectivas ya que es un modelo paradigmático de la interacción de muchos cuerpos en óptica cuántica. Su investigación puede dar lugar a nuevos descubrimientos inesperados en el campo que combina la física de muchos cuerpos y la interacción luz-materia.

Simuladores cuánticos análogos propuestos para este modelo son los bits cuánticos superconductores acoplados a un resonador de microondas, los átomos en cavidades, o los iones atrapados, mediante el acoplo de los estados electrónicos al movimiento de su centro de masas. También los puntos cuánticos semiconductores en una cavidad son potenciales simuladores del modelo de Dicke.

## 1.2 Materiales Cuánticos

Los materiales cuánticos son aquellos cuyas propiedades no pueden ser explicadas por la física clásica y requieren de la mecánica cuántica para ser comprendidos. Los electrones en estos materiales interactúan intensamente entre sí, lo que conlleva comportamientos exóticos que no se observan en materiales convencionales. Además, en estos materiales se manifiestan fenómenos cuánticos como son la superconductividad (trans-

porte de electricidad sin resistencia), el magnetismo, o la topología. Los materiales cuánticos topológicos son una clase de materiales cuya estructura de bandas electrónicas presenta propiedades topológicas. Dichas propiedades se describen, como he comentado anteriormente, mediante lo que se conoce como invariantes topológicos, los cuales se obtienen a partir de las propiedades mecano-cuánticas del material como son la función de onda de Bloch o la fase de Berry [11]. Dichos invariantes se conservan bajo ciertas deformaciones continuas del material. Estas propiedades, a su vez, determinan un comportamiento mecano-cuántico único. Ejemplo de ellos son los Aislantes Topológicos, mencionados anteriormente, materiales que son aislantes en su interior pero conductores en su superficie.

La investigación en materiales cuánticos es crucial para el desarrollo de nuevas tecnologías, como los ordenadores cuánticos, nuevos sensores de alta precisión, o dispositivos electrónicos más eficientes.

Un ejemplo de material cuántico es el Grafeno, un material con propiedades únicas como una alta conductividad térmica y eléctrica, y que además puede presentar estados aislantes y superconductores bajo ciertas condiciones.

Los superconductores, son también materiales cuánticos, ya que conducen electricidad sin resistencia a temperaturas muy bajas, un fenómeno exclusivamente cuántico. También lo son los materiales magnéticos, que presentan propiedades magnéticas complejas. La aplicación de estos últimos en espintrónica, donde el espín del electrón se utiliza para codificar la información, ha permitido la implementación de nuevos dispositivos a partir de estos materiales.

En resumen, los materiales cuánticos se enmarcan un campo de investigación muy activo que explora las propiedades exóticas de la materia a escala microscópica, con el potencial de revolucionar la tecnología en áreas como la computación, la energía o la electrónica.

## 2. TECNOLOGÍAS CUÁNTICAS: UNA NUEVA ERA

En la primera revolución cuántica, se establecieron los fundamentos conceptuales de la mecánica cuántica. Aquella etapa nos permitió comprender la cuantización de la energía, la dualidad onda-partícula y la naturaleza probabilística de la medición.

Las numerosas e importantes aplicaciones de la física cuántica han dado lugar a la denominada segunda revolución cuántica.

A diferencia de la primera, que implicó el desarrollo de dispositivos como los láseres y los transistores, la segunda revolución se centra en el control y manipulación directa de sistemas cuánticos, abriendo el camino a tecnologías como la computación, simulación, comunicación o la metrología cuánticas.

Es importante mencionar a Richard Feynman, uno de los físicos más influyentes del siglo XX, quien realizó contribuciones fundamentales al campo de los simuladores cuánticos. En 1981, propuso la idea de utilizar un sistema cuántico sobre el que se tiene un alto grado de control y cuyo hamiltoniano viene representado por  $H_B$ , para simular otro sistema cuántico, cuyo hamiltoniano  $H_A$  tiene la misma forma matemática que  $H_B$ , pero que resulta difícil o imposible de controlar y cuya resolución es enormemente costosa, mediante un superordenador clásico digital. Conociendo la analogía matemática entre ambos hamiltonianos  $H_A$  y  $H_B$  y controlando los parámetros del hamiltoniano  $H_B$ , al medir experimentalmente el estado final del sistema B se resuelve, por analogía, el sistema A para el conjunto de parámetros que se desee.

Feynman también fue pionero en la visión de un ordenador cuántico universal, capaz de resolver problemas que los ordenadores clásicos no podrían abordar en tiempos razonables. Esta idea fue crucial para el desarrollo posterior de algoritmos cuánticos, como el algoritmo de Shor, que permite la factorización de números grandes de manera eficiente, amenazando así a la criptografía clásica [12], o el algoritmo de Grover [13], que acelera la solución de búsquedas de datos no estructuradas, ejecutando la



**Figura 8:** Richard Feynman: Físico estadounidense, que recibió el premio Nobel en 1965, junto con J. Schwinger y S. Tomonaga, por sus contribuciones al desarrollo de la electrodinámica cuántica.

búsqueda en menos pasos que cualquier algoritmo clásico. El desarrollo de estos algoritmos demostró el gran potencial de la computación cuántica.

La Computación Cuántica se basa en el bit cuántico, un sistema cuántico de dos niveles, como unidad de información. Gracias a las propiedades de la mecánica cuántica, como son la superposición y el entrelazamiento, es posible realizar cálculos de manera exponencialmente más rápida para la resolución de ciertos problemas. Actualmente, numerosas investigaciones se centran en el estudio de algoritmos y métricas que demuestran las ventajas de la computación cuántica, mientras otras se enfocan en el diseño del “hardware”, capaz de implementar dicho ordenador. En este manuscrito nos centraremos en este último enfoque, los elementos físicos de un ordenador cuántico. Mas adelante discutiremos las condiciones necesarias para la implementación del ordenador cuántico en una plataforma de estado sólido: los puntos cuánticos semiconductores [14].

Finalmente, en el contexto de computación cuántica, es importante el mencionar los Fermiones de Majorana y su posible aplicación en la computación cuántica topológica [15].

En Física de Partículas, los Fermiones de Majorana son partículas (fermiónicas) que son sus propias antipartículas. En Materia Condensada, son cuasipartículas y su interés se centra en su particular estadística de intercambio: son anyones no abelianos, lo que significa que los intercambios de partículas son operaciones no triviales que, en general, no conmutan. Esto difiere de otros tipos de partículas conocidas, donde una operación de intercambio simplemente multiplica la función de onda por  $+1$  (para bosones) o  $-1$  (para fermiones). Un estado fermiónico puede representarse como la superposición de dos Fermiones de Majorana, que, al estar separados en el espacio dan lugar a un estado fermiónico deslocalizado, que está altamente protegido frente a la mayoría de los mecanismos de decoherencia, puesto que no se afecta globalmente por las perturbaciones locales que involucran solo a uno de los Fermiones de Majorana que constituyen dicho estado fermiónico. El estado puede, además, manipularse mediante intercambio físico gracias a su estadística no abeliana. Es por ello que los Fermiones de Majorana se han propuesto como unidades básicas de información para la computación topológica cuántica.

La Simulación Cuántica, como se ha descrito anteriormente, permite investigar sistemas y materiales complejos, así como reacciones químicas, mediante el uso de simuladores cuánticos formados por otro sistema equivalente pero que se puede implementar en el laboratorio y que es externamente controlable.

Diferentes plataformas físicas se han propuesto y utilizado como simuladores cuánticos, ejemplo de ello son los iones atrapados, átomos confinados en redes ópticas, circuitos superconductores, puntos cuánticos semiconductores, cristales fotónicos o centros de color.

La Comunicación Cuántica se refiere fundamentalmente al uso de fotones para transmitir bits cuánticos a largas distancias, aprovechando el potencial de los estados de superposición. Fenómenos como el entrelazamiento y la teletransportación cuántica permiten desarrollar redes cuánticas seguras y protocolos de distribución de claves cuánticas, lo que ofrece una alternativa segura a los métodos de cifrado tradicionales.

Recientemente, con el objetivo de alcanzar la escalabilidad para la realización de un ordenador cuántico, y también de mejorar la fidelidad en la transferencia de información cuántica, se ha propuesto la implementación de dispositivos cuánticos o “quantum links” que conectan regiones distantes en un procesador cuántico y transfieren la información entre ellas. Cuando describamos las cadenas de puntos cuánticos semiconductores, veremos que es posible transferir la información cuántica entre regiones distantes, en las que un espín electrónico actúa como “autobús cuántico” [16].

La Metrología Cuántica mejora la precisión de las mediciones físicas utilizando propiedades cuánticas como por ejemplo el entrelazamiento. Los estados de superposición son, por su naturaleza, muy sensibles al entorno y, por lo tanto, pueden usarse para fabricar sensores muy precisos. Un ejemplo de sensores cuánticos de estado sólido, son los centros NV en diamante, que permiten medir campos magnéticos muy pequeños. Así mismo, las cavidades ópticas se utilizan como sensores cuánticos para medir magnitudes físicas con alta precisión. La interacción entre la luz y la materia dentro de una cavidad se ve reflejada en la transmisión de la luz a través de la misma y así la cavidad actúa como sensor de las propiedades del sistema físico confinado en la cavidad [17-19].

En resumen, el desarrollo de la física cuántica y de la mecánica cuántica ha dado lugar a un cambio paradigmático en la ciencia y en la tecnología. Desde los conceptos fundacionales de Planck y Einstein hasta las aplicaciones modernas en computación y comunicación, el impacto de estas teorías es incuestionable. Las ideas visionarias de Richard Feynman sobre los simuladores cuánticos y los ordenadores cuánticos continúan inspirando el progreso en este campo, marcando el inicio de una nueva era en las tecnologías cuánticas.

Esta memoria se centra en describir, en base fundamentalmente a los trabajos realizados en mi grupo de investigación, algunos ejemplos de problemas relevantes para la computación, simulación y comunicación cuánticas.

Me centraré en una plataforma de estado sólido, que se propuso a final de los años 90 por David Divicenzo y Daniel Loss [14], para la implementación del ordenador cuántico: los puntos cuánticos semiconductores. Estos átomos artificiales albergan bits cuánticos o sistemas de dos niveles, que constituyen la unidad mínima de información cuántica.

Los recientes avances experimentales en la implementación de redes en una, dos y hasta tres dimensiones de puntos cuánticos y en el control sus propiedades, ha dado lugar a una investigación muy activa y ha abierto un nuevo abanico de aplicaciones de los mismos en el campo de las tecnologías cuánticas. Ejemplo de ello es la implementación de puertas lógicas para realizar operaciones cuánticas [20, 21] o la transferencia de información cuántica, mediante distintos protocolos, a través de cadenas de puntos cuánticos, que actúan como enlace entre regiones distantes en un ordenador cuántico, tema en el que me centraré mas adelante. Otro ejemplo que abordaré es el potencial de los puntos cuánticos como simuladores cuánticos de distintos sistemas y de fenómenos físicos complejos, como el efecto Kondo, o incluso como simuladores de redes con propiedades exóticas, como son los aislantes topológicos.

Además, es importante mencionar una herramienta que ha sido fundamental, en las últimas décadas para las tecnologías cuánticas, la ingeniería de Floquet: mediante la aplicación de un campo periódico en el tiempo es posible modificar las propiedades de los materiales cuánticos, tanto electrónicas, como topológicas o de transporte. Así mismo, es posible manipular de una forma controlada los bits cuánticos, así como las operaciones cuánticas.

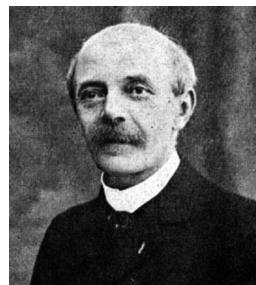
Dedicaré una sección a describir brevemente la teoría de Floquet, y comentaré algunas de sus aplicaciones en las que hemos investigado.

Finalmente expondré los diferentes mecanismos y protocolos que permiten transferir, de una manera robusta, la información cuántica entre sitios distantes, no solo a través de cadenas de puntos cuánticos sino también en otras plataformas. En concreto me centraré en la transferencia de información a través de los estados que aparecen en el borde de los sistemas finitos con propiedades topológicas no triviales, y que están protegidos frente a distintos tipos de desorden. Dicha protección permite la transferencia de información con fidelidad alta. Describiré las propiedades de distintas redes unidimensionales o cuasi unidimensionales para esta finalidad, que han sido implementadas en distintas plataformas, como son los átomos fríos, cristales fotónicos, o los dopantes de fósforo en silicio, y que, potencialmente, podrían implementarse en un futuro en redes de puntos cuánticos. Discutiré también, cómo, acoplando bits cuánticos a los extremos de estas redes topológicas, es posible generar entrelazamiento entre ellos.

### 3. INGENIERÍA DE FLOQUET EN SISTEMAS CUÁNTICOS

El formalismo de Floquet se enmarca en un área fascinante de la matemática y la física, que se centra en el estudio de sistemas dinámicos periódicos en el tiempo. Su origen se remonta a principios del siglo XX, cuando el matemático francés Gaston Floquet desarrolló una herramienta matemática para analizar ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes periódicos.

En esencia, la teoría de Floquet permite analizar un sistema periódico en el tiempo, mediante soluciones de las ecuaciones que lo describen, en términos de funciones periódicas. Esto es particularmente relevante en la resolución de ecuaciones diferenciales que describen fenómenos oscilatorios, como los sistemas mecánicos o eléctricos que tienen un comportamiento cíclico, fenómenos que aparecen en campos como la física, la ingeniería y la teoría de sistemas, donde muchos fenómenos, pueden ser descritos mediante ecuaciones diferenciales periódicas.



**Figura 9:** Gaston Floquet, 1847-1920.

La teoría de Floquet, se aplica a sistemas cuánticos que están sujetos a perturbaciones periódicas, como campos eléctricos oscilantes. En este caso, las soluciones se describen en términos de funciones de onda y operadores cuánticos. La teoría de Floquet aplicada a materiales cuánticos permite estudiar fenómenos como la dinámica de electrones en los mismos bajo campos externos AC (periódicos en el tiempo), o las transiciones entre los estados cuánticos debido a la presencia de dichos campos. Uno de los motivos por los que los sistemas cuánticos en presencia de campos periódicos en el tiempo han sido tema de intensa investigación recientemente es por la posibilidad de controlar dinámicamente las fases cuánticas de la materia, así como el poder modificar el enlace entre los átomos que forman las moléculas y las redes cristalinas. El control y manipulación de los enlaces de los átomos en la materia mediante campos periódicos en el tiempo [22–25], permite el control de las propiedades electrónicas, dinámicas y topológicas de la misma y depende de los parámetros del campo aplicado. Es por ello que es necesario investigar los hamiltonianos efectivos válidos para distintos regímenes de frecuencias y amplitudes del campo periódico aplicado.

La transición de un superfluido a un aislante de Mott mediada por un campo AC, la modulación de las frustraciones magnéticas, el generar campos gauge artificiales en condensados de Bose-Einstein, o el diseñar aislantes topológicos de Floquet son ejemplos de la aplicación de la ingeniería de Floquet a la manipulación de las propiedades de la materia.

Como veremos a continuación, el efecto de un campo periódico en el tiempo aplicado a un sistema físico, se estudia en el marco de una transformación del hamiltoniano periódico en el tiempo, a un hamiltoniano efectivo estático derivado de la teoría de Floquet [26, 27]. Mediante expansiones perturbativas en el régimen de alta frecuencia, se obtienen expresiones analíticas para las magnitudes físicas modificadas por el efecto del campo AC [28–32].

Una de las contribuciones más importantes de Floquet fue el desarrollo del teorema de Floquet, que establece que cualquier solución de una ecuación diferencial lineal con coeficientes periódicos puede expresarse como el producto de una función periódica y una función exponencial. Esto permite transformar problemas complejos en otros más manejables, facilitando el análisis y la comprensión de la dinámica del sistema. La existencia de estas soluciones periódicas, estados de Floquet, en sistemas representados por hamiltonianos periódicos en el tiempo, se deriva del teorema de Floquet de manera similar a la existencia de estados de Bloch en sistemas periódicos en el espacio, la cual se deriva del teorema de Bloch.

La ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo describe la dinámica de una partícula en presencia de un potencial periódico en el tiempo:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = \hat{H}(t)\psi(t)$$

donde  $\hat{H}(t)$  es el hamiltoniano que incluye el potencial periódico en el tiempo. Si éste tiene una periodicidad  $T$ , es decir,  $V(t+T) = V(t)$ , se puede utilizar el formalismo de Floquet para encontrar las soluciones de esta ecuación en término de los llamados estados de Floquet y cuasienergías:

$$\psi_n(t) = e^{-i\epsilon_n t/\hbar} \phi_n(t)$$

donde  $\phi(t+T) = \phi(t)$  es una función periódica en el tiempo (modo Floquet) y  $\epsilon$  es la cuasi-energía asociada a ese estado. La cuasienergía  $\epsilon$  se relaciona con la energía del sistema, pero tiene en cuenta la periodicidad del potencial, no depende del tiempo y, a diferencia de ésta, solo está definida en el intervalo  $[0, 2\pi]$ , es decir módulo  $n\hbar\omega$  donde  $\omega$  es la frecuencia del campo externo y  $n$  un número entero.

A partir de un estado caracterizado por  $\phi_n(t)$  y  $\epsilon_n$ , es posible definir el conjunto de cuasienergías equivalentes mediante el índice  $m$ , como:  $\epsilon_{nm} = \epsilon_n + m\hbar\omega$  y el correspondiente modo de Floquet como:  $\phi_{nm}(t) = \phi_n(t) \exp\{im\omega t\}$ . Sustituyendo en la ecuación de Schrödinger  $\psi_n(t)$ , se obtiene la siguiente expresión:

$$[H(t) - id_t]\phi_{nm}(t) = \epsilon_{nm}\phi_{nm}(t)$$

la cual es una ecuación de autovalores en el espacio de Hilbert extendido, es decir del hamiltoniano y de  $T$ , donde  $T$  representa funciones periódicas en el tiempo, con periodo  $\tau = 2\pi/\omega$ , y que forman un conjunto ortogonal completo en el espacio de Hilbert [27].

$$Q = [H(t) - id_t]$$

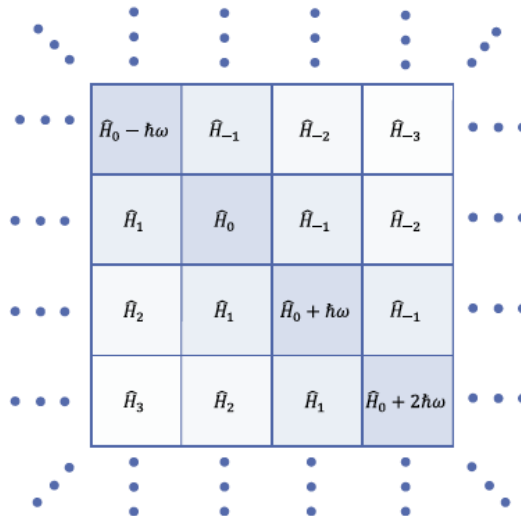
es el operador de cuasi-energía, cuyos autoestados y autovalores son los modos de Floquet y las cuasi-energías. Este operador se puede representar mediante bloques (fig. 10), donde cada bloque representa un operador

$$Q_{nm} = H_{n-m} + \delta_{nm}m\hbar\omega$$

Su resolución permite obtener los estados Floquet del hamiltoniano. La estructura del operador de cuasi-energía  $Q$  se asemeja a la del hamiltoniano que describe un sistema cuántico con un espacio de Hilbert acoplado a un modo fotónico en el límite clásico de muchos de fotones. En esta imagen,  $m$  desempeña el papel de cuantos de energía o número de fotones. Además, se dice que los elementos de la matriz de  $H_m$  describen procesos de  $m$  fotones. Esta terminología da lugar a una imagen muy intuitiva para la física de sistemas cuánticos en presencia de campos periódicos en el tiempo.

Los estados Floquet son además, auto-estados del operador de evolución temporal en un periodo:

$$U(t_0 + T, t_0)|\psi(t_0)\rangle = e^{-i\epsilon_n T/\hbar}|\psi_n(t_0)\rangle$$



**Figura 10:** Estructura de bloques del operador de cuasienergías  $Q$  con respecto al índice  $m$  de “fotones”[33].

La diagonalización del operador evolución temporal permite obtener, alternativamente, las soluciones del hamiltoniano.

Es posible expresar la evolución temporal de un estado como:

$$\psi(t) = \sum_n c_n e^{-i\epsilon_n(t-t_0)/\hbar} \phi_n(t)$$

Cuando un sistema se prepara inicialmente en un estado Floquet, su evolución es periódica, lo que significa que se comporta de manera predecible a lo largo del tiempo, con una fase general que no afecta el comportamiento esencial del sistema. Sin embargo, si el sistema se prepara en una superposición coherente de varios estados Floquet, la situación se vuelve más interesante. En este caso, la evolución temporal ya no es periódica y se compone de dos partes. La primera es conocida como el “micro-movimiento”, que es la variación periódica de los modos Floquet con el periodo del campo alterno. La segunda parte, debida a la diferencia de fases entre los estados Floquet, introduce desviaciones de la evolución periódica.

Otra manera de ver esto es expresando el operador evolución temporal como:

$$U(t_2, t_1) = e^{-iK(t_2)} e^{-iH_{\text{eff}}(t_2-t_1)} e^{iK(t_1)} \quad (1)$$

donde  $H_{\text{eff}}$  describe la dinámica lenta y,  $K(t)$  representa la dinámica rápida, y se denomina el operador del micro-movimiento. Cuando la frecuencia del campo aplicado es alta comparada con el resto de las escalas de energía del sistema, la dinámica se aproxima a una dinámica estroboscópica, donde el micro-movimiento deja de ser relevante [33].

En este caso, se puede simplificar la resolución del sistema mediante la expansión perturbativa de Magnus [33], que permite obtener el hamiltoniano efectivo  $H_{\text{eff}}$  en el régimen de alta frecuencia, y por tanto, permite describir la evolución estroboscópica del sistema en un periodo del campo:

$$H_{\text{eff}} = H_0 + \frac{1}{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[H_n, H_{-n}]}{n} + \dots \quad (2)$$

donde:

$$H_0 = \frac{1}{T} \int_0^T H(t) dt \quad (3)$$

Una descripción detallada de la teoría de Floquet se encuentra en los artículos de revisión [23, 24, 33, 34].

En lo que queda de sección comentaré algunos ejemplos de cómo la aplicación de un campo AC afecta a distintos sistemas físicos.

Un efecto muy interesante que se deriva de la teoría de Floquet, fue propuesto por Peter Hänggi y colaboradores a finales de los 80 y se conoce como la Destrucción Coherente del Túnel (“Coherent Destruction of Tunneling”, CDT) o Localización Dinámica [22]. Este fenómeno muestra como aplicando un campo eléctrico sinusoidal a dos átomos acoplados por el efecto túnel, es decir a una molécula diatómica, es posible, para determinados valores de la intensidad y frecuencia del campo, inducir la localización de un electrón en uno de los átomos aunque éstos estuvieran fuertemente acoplados antes de aplicar el campo externo. El motivo de ello es que el campo periódico renormaliza la probabilidad de túnel a cero, aún siendo el acoplo o enlace entre ellos significativo.

Este efecto se analizó en el caso de un sistema de dos niveles en dos átomos contiguos, en presencia de un campo de alta frecuencia, es decir, en el caso en el que el túnel inter-atómico, pueda tratarse como una perturbación frente al campo AC. Para ello, mediante la teoría de perturbaciones, se puede demostrar (ver [23] para una derivación detallada) que la diferencia de energía  $\Delta$ , o desdoblamiento de los niveles debido al túnel, se renormaliza en presencia de un campo AC sinusoidal mediante la función de Bessel  $J_0$ :  $\epsilon_{\pm} = \pm\Delta/2J_0(Fd/\hbar\omega)$ , donde  $F$  es la intensidad del campo eléctrico,  $d$  la distancia inter-atómica y  $\omega$  la frecuencia del campo. Cuando el argumento de la función de Bessel de orden cero es tal que esta se hace cero, la probabilidad de túnel se hace cero también y la carga se localiza espacialmente.

Este efecto fue observado en moléculas diatómicas y en superredes y pozos cuánticos semiconductores, donde en condiciones de CDT, la corriente presenta efectos inesperados como conductancia negativa, es decir corriente electrónica en sentido opuesto a la diferencia de potencial aplicada a los contactos o biestabilidad en la corriente en las dos direcciones de la misma. Estos efectos no lineales dependen así mismo de la interacción de Coulomb electrónica y de la ocupación de los pozos cuánticos (en colaboración con Ramón Aguado, [35]). De la misma manera que se localiza la carga es posible localizar el espín manipulando los parámetros de un campo magnético aplicado periódico en el tiempo (en colaboración con Álvaro Gómez León, [36]).

A finales de los 90, un experimento realizado en la universidad de Delft mostró cómo es posible utilizar un doble punto cuántico, o molécula diatómica artificial, en presencia de un campo eléctrico AC, para caracterizar el carácter iónico o covalente del enlace [37]. Las medidas de transporte mostraban canales adicionales de túnel debido a la absorción y/o emisión de cuantos de energía, o fotones. La corriente aparecía no solo cuando los niveles de los átomos estaban en resonancia sino cuando diferían en uno o más cuantos de energía  $\hbar\omega$ . Dependiendo del comportamiento de la corriente con la frecuencia fue posible caracterizar el carácter covalente o iónico del enlace entre los átomos. Este es un ejemplo de cómo los átomos artificiales son simuladores cuánticos de átomos y moléculas reales y la aplicación de un campo eléctrico periódico en el tiempo permite controlar el carácter del enlace y la intensidad del acoplo entre los átomos.

La manipulación, mediante un campo AC, del efecto túnel que acopla los átomos de una molécula tiene una aplicación inmediata en los materiales, ya que es posible, al modificar los enlaces atómicos de una forma controlada, el modificar la estructura electrónica de una red cristalina.

### **3.1 Teoría de Floquet-Bloch y su aplicación a redes cristalinas**

La investigación de cómo campos periódicos en el tiempo modifican una red cristalina nos llevó al desarrollo de una formulación matemática que generaliza la teoría de Bloch, para hamiltonianos con periodicidad espacial, y la teoría de Floquet, para hamiltonianos con periodicidad temporal, a la teoría de Floquet-Bloch, para sistemas donde ambas periodicidades, espacial y temporal tienen lugar en el sistema (en colaboración con A. Gómez-León, [38]). El desarrollo de esta teoría permitió tratar mediante un formalismo unificado las redes cristalinas en presencia de campos AC.

En este caso,  $H(x + a_i, t + T) = H(x, t + T) = H(x + a_i, t)$  donde  $a_i$  son los vectores de la red y  $T$  el periodo del campo AC. La función de onda se puede escribir como

$$|\Psi_{\alpha, \mathbf{k}}(\mathbf{x}, t)\rangle = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\epsilon_{\alpha, \mathbf{k}}t} |u_{\alpha, \mathbf{k}}(\mathbf{x}, t)\rangle \quad (4)$$

donde  $\alpha$  es el índice de banda,  $k$  el vector de onda y  $\epsilon_{\alpha, k}$  las cuasi-energías. Los estados Floquet-Bloch  $|u_{\alpha, \mathbf{k}}(\mathbf{x}, t)\rangle$  son periódicos en el espacio y el tiempo, y a partir de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, es posible obtener una ecuación de autovalores:

$$\mathcal{H}(\mathbf{k}, t) |u_{\alpha, \mathbf{k}}\rangle = \epsilon_{\alpha, \mathbf{k}} |u_{\alpha, \mathbf{k}}\rangle, \quad (5)$$

$$\mathcal{H}(\mathbf{k}, t) \equiv e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}(H(t) - i\partial_t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = H_{\mathbf{k}}(t) - i\partial_t, \quad (6)$$

donde  $\mathcal{H}(\mathbf{k}, t)$  es el operador de Floquet en presencia de periodicidad espacial y temporal.

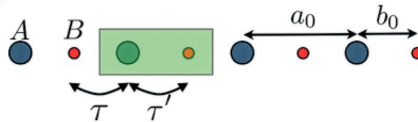
La ingeniería de Floquet permite imprimir, mediante la aplicación de un campo periódico en el tiempo, propiedades complejas a un sistema físico, como por ejemplo propiedades topológicas a una red cristalina que no las presenta originalmente. Pero también, el aplicar campos periódicos en el tiempo permite modificar las fases topológicas de sistemas físicos que presentan en su origen topología no trivial. Un ejemplo de ello es la cadena formada por dímeros, un aislante topológico unidimensional que presenta tres simetrías que definen su clasificación topológica: la simetría quiral, la simetría partícula-hueco y la simetría de inversión temporal (figs. 11 y 13). Recientemente se han propuesto diez clases topológicas, en función de las simetrías que presentan los sistemas físicos [39]. La cadena de dímeros se encuentra en la clase BDI, por las simetrías antes mencionadas.

En 2013, un equipo de investigadores, liderado por Immanuel Bloch en Munich, midió con éxito la fase de Zak en átomos fríos en redes ópticas unidimensionales [40], es decir, la fase geométrica o fase de Berry adquirida por la función de onda de la partícula al recorrer la zona de Brillouin. Esta fase caracteriza las propiedades topológicas de las bandas de Bloch y es el invariante topológico que cambia cuando se produce una transición de fase:

$$\mathcal{Z} = \int \langle u_{\alpha,k} | i\partial_k | u_{\alpha,k} \rangle dk \quad (7)$$

Específicamente, en los experimentos, estudiaron una red óptica dimerizada, similar al poliacetileno, y observaron una diferencia de  $\pi$  en la fase Zak para las dos configuraciones dimerizadas, lo que indica clases topológicas distintas. Esta medición se logró combinando oscilaciones de Bloch e interferometría de Ramsey, lo que les permitió extraer dicha fase o invariante topológico.

Este invariante tiene dos valores: cuando es cero, el sistema está en una fase trivial, en caso contrario el invariante adquiere el valor de  $\pi$  y la fase presenta topología no trivial.

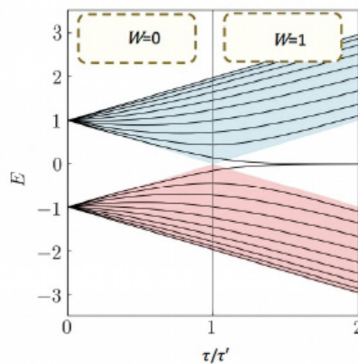


**Figura 11:** La cadena de dímeros es un aislante topológico en una dimensión, la celda unidad tiene dos átomos,  $a_0$  es el vector de traslación de la red,  $b_0$  la distancia entre los átomos de la celda unidad y  $\tau$  y  $\tau'$  el acoplo entre celdas vecinas y entre los átomos de una celda respectivamente [38].

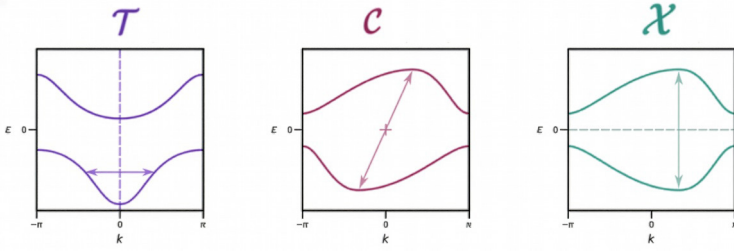
La transición entre una y otra fase tiene lugar al modificar el valor relativo de los acoplos entre celdas y entre átomos de la celda unidad. En la estructura de bandas aparece un “gap” o zona prohibida de energía, que caracteriza a los aislantes, que se cierra cuando el valor de este parámetro se aproxima a la unidad, y es entonces cuando se produce la transición de fase cuántica. Cuando el sistema es finito, aparecen unos estados, llamados estados de borde, puesto que se localizan en los bordes de la cadena, que presentan protección frente a algún tipo de desorden, lo que los hace robustos frente a la decoherencia y por tanto útiles para la transferencia de información cuántica como veremos mas adelante.

La cadena de dímeros se puede describir teóricamente mediante el modelo SSH (nombre debido a sus autores, Su, Schrieffer y Hegger) [41], un modelo de enlaces fuertes a primeros vecinos. Este sistema presenta simetría de inversión temporal:  $\mathcal{T}\mathcal{H}(k)\mathcal{T}^{-1} = \mathcal{H}(-k)$ , partícula-hueco:  $\mathcal{C}\mathcal{H}(k)\mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{H}(-k)$ , y simetría quiral:  $\mathcal{X}\mathcal{H}(k)\mathcal{X}^{-1} = -\mathcal{H}(k)$  que se manifiestan en la estructura de bandas como refleja la figura 13 [11].

La figura 12 muestra el espectro de energías para una cadena de diez dímeros en función del parametro  $\lambda$ , es decir del cociente de los acoplos entre dímeros y entre los átomos de una molécula. Cuando este parámetro adquiere un valor próximo a la unidad, se produce la transición de fase topológica y aparece un par de estados con energía cero, cuyo peso espectral se encuentra en los extremos de la cadena y están desacoplados de los estados de volumen.



**Figura 12:** Energía de los estados electrónicos de una cadena de dímeros con 20 átomos (10 dímeros) como función del cociente entre los acoplos entre celdas y entre los átomos de una celda.  $W$  es el “winding number”, o invariante topológico, relacionado con la fase de Zak:  $W = Z/\pi$ . En la región donde  $W=1$  aparecen un par de estados en el centro del gap a energía aproximadamente cero que están localizados en los bordes de la cadena.



**Figura 13:** La figura muestra como se manifiestan en la estructura de bandas las simetrías que caracterizan a la cadena de dímeros: Izquierda: Simetría de inversión temporal; centro: simetría de partícula-hueco; derecha: simetría quiral.

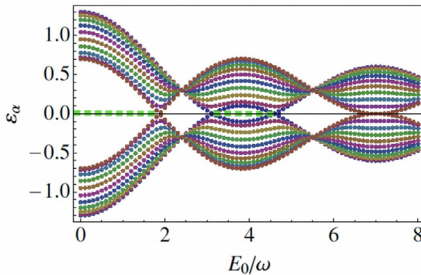
Este fue el primer ejemplo de sistemas que investigamos mediante la teoría de Floquet-Bloch [38]: Al aplicar un campo electromagnético AC, el invariante topológico cambia:

$$\mathcal{Z} = \oint \langle u_{\alpha,k} | i\partial_k | u_{\alpha,k} \rangle dk = \frac{\pi}{2} [1 + \text{sgn}(J_0^2(y) - \lambda^2 J_0^2(x))] \quad (8)$$

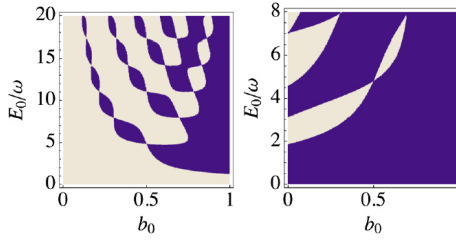
donde:  $y = A_0(a_0 - b_0)$  y  $x = A_0 b_0$ ,  $A_0$  es la amplitud del potencial vector  $J_0$  la función de Bessel de orden cero, y  $\lambda$  el cociente de los acoplos entre los átomos de la celda unidad y entre las celdas vecinas.

El espectro de cuasienergías, como función de los parámetros del campo electromagnético, presenta estados a energía cero que indican la fase topológica no trivial (fig. 14).

Así mismo, las fases cuánticas topológicas en presencia de un campo alterno, en el régimen de alta frecuencia, están representadas en la fig. 15, como función de los parámetros del campo eléctrico y de la separación entre los átomos que forman los dímeros.



**Figura 14:** Cuasienergías en una cadena de dímeros de 20 átomos, en función de la intensidad del campo relativa a la frecuencia. En las regiones con topología no trivial aparecen un par de estados en el centro del “gap”(o región prohibida de energía).  $\lambda=0.3$ , donde  $\lambda$  es el cociente entre el acoplo entre los átomos de una molécula de dímeros y el acoplo entre moléculas [38].



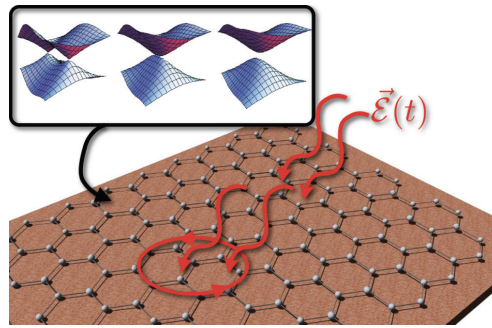
**Figura 15:** Diagrama de fases topológicas y transiciones de fase cuánticas en una cadena de 10 dímeros, en presencia de un campo electromagnético AC. La figura de la izquierda corresponde al parámetro  $\lambda=1.5$  que, en el caso sin campo AC, sería una fase trivial. En la figura de la derecha  $\lambda=0.3$  que, en el caso sin campo AC, corresponde a una fase topológica no trivial. En ambas figuras se observan transiciones de fase en función del cociente entre la intensidad y frecuencia del campo y de la separación de los átomos que forman la molécula, o dímero, las zonas claras corresponden a una fase trivial y las oscuras a una fase no trivial [38].

En el régimen descrito, el de alta frecuencia, las bandas de Floquet están separadas por la frecuencia del campo y se repiten en infinitas réplicas equivalentes. Al reducir la frecuencia, el cruce de las bandas da lugar a la hibridación de las mismas en la frontera de la zona de Brillouin de Floquet (equivalente al espacio recíproco o zona de Brillouin en el espacio  $k$ , pero en el dominio temporal). Dicha hibridación rompe la degeneración abriendo un “gap”, y si los invariantes topológicos de las bandas son distintos, aparecen nuevos estados topológicos llamados estados  $\pi$  o estados anómalos de Floquet, que no tienen su análogo en los aislantes topológicos convencionales o estáticos, un análisis detallado viene descrito en [38, 42]. Estos estados anómalos de Floquet han sido observados recientemente en el espacio real mediante experimentos de campo cercano de microondas en una red de guías de onda acopladas [18].

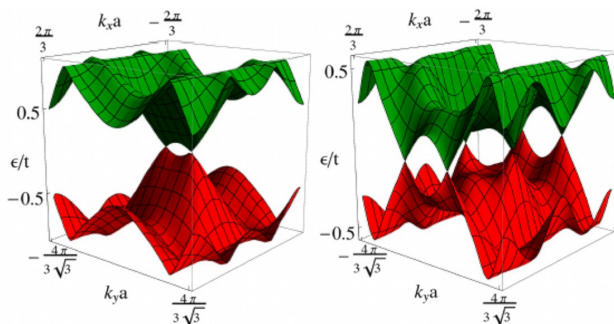
La detección de las fases cuánticas topológicas se puede realizar midiendo el transporte en una cadena de dímeros acoplada a contactos eléctricos, en presencia de un voltaje y de un campo eléctrico AC. Demostramos que tanto la corriente, como las fluctuaciones de la misma permiten detectar la presencia de los estados de borde y por tanto la fase topológica del sistema [43, 44].

Otro sistema en el que analizamos el efecto de un campo electromagnético es el grafeno, un material bidimensional compuesto por una sola capa de átomos de carbono que cristaliza en una red hexagonal (fig. 16). Su estructura electrónica de bandas se caracteriza por una forma única de conos de Dirac, donde las bandas de valencia y conducción se tocan en seis puntos especiales

del espacio de momentos, llamados puntos de Dirac. Esta singular estructura de bandas da lugar a sus extraordinarias propiedades electrónicas, como la alta movilidad electrónica. En este trabajo, en colaboración con A. Gómez León y P. DelPlace [45], se demostró como es posible controlar la existencia y posición de los conos de Dirac, modificando la intensidad, frecuencia y polarización del campo aplicado. En el régimen de alta frecuencia, los acoplos entre átomos se renormalizan mediante las funciones de Bessel cuyo argumento depende de los parámetros del campo AC aplicado, y en particular de su polarización. Por tanto, es posible, mediante el control de los mismos mover los conos de Dirac en el espacio recíproco y además obtener, como función de los mismos, un diagrama de fases aislantes y semimetálicas muy rico. En el régimen de baja frecuencia, las bandas de Floquet se cruzan y aparecen los procesos de emisión y absorción de muchos fotones que conllevan a la creación de nuevos pares de conos de Dirac [45, 46] (fig. 17).



**Figura 16:** Esquema de una red hexagonal de grafeno, en presencia de un campo electromagnético, la figura muestra como los conos de Dirac se rompen en presencia de la radiación (reproducido con permiso de [45]).



**Figura 17:** Aparición de nuevos pares de conos de Dirac en la estructura de bandas del grafeno al aplicar un campo electromagnético. En la figura de la izquierda, la frecuencia del campo  $\omega = 2.1$  (en unidades del acoplo entre primeros vecinos). En la figura de la derecha  $\omega = 1.5$  (reproducido con permiso de [45]).

La ingeniería Floquet permite además, al aplicar radiación electromagnética al grafeno, el control y la manipulación de los plasmones, o excitaciones colectivas de los electrones que se propagan como una onda de densidad electrónica [47] (trabajo en colaboración con la Dra María Busl y el Prof. Antti Pekka Jauho). Así mismo, en colaboración con los Prof. Francisco Domínguez Adame, Enrique Díaz, Álvaro Gómez León y Álvaro Díaz, analizamos como diseñar, mediante la ingeniería Floquet, los conos de Dirac en la superficie de un aislante topológico en tres dimensiones [48].

Otro ejemplo interesante de cómo la radiación electromagnética modifica las propiedades de la materia, y permite el control de las mismas fue la aparición de estados de resistencia cero en un gas de electrones bidimensional, formado en una heterounión de GaAs y AlGaAs, en presencia de un campo magnético moderado y radiación electromagnética en el régimen de las microondas, para ciertos valores del campo magnético y frecuencias de la radiación [49, 50]. Este efecto fue observado, y despertó mucho interés puesto que podía sugerir la presencia de superconductividad en el sistema. Un modelo semiclásico de la dinámica electrónica en presencia de radiación propone una explicación de su origen (trabajo en colaboración con el Dr Jesús Iñarrea) [51].

Otros ejemplos interesantes en los que centramos nuestro trabajo fueron el analizar la dinámica de partículas fuertemente interactuantes en presencia de un campo AC, en una cadena de dímeros [52], así como en redes bidimensionales como son la red denominada T3 [53], o la red de Lieb [54], ambas bipartitas. El hamiltoniano de estos sistemas, en presencia de un flujo de campo magnético, se puede expresar como:

$$H(t) = -J \sum_{(i,j),\sigma} e^{i\phi_{ij}} c_{i\sigma}^\dagger c_{j\sigma} + U \sum_i n_{i\uparrow} n_{i\downarrow} + \sum_i V_i(t) (n_{i\uparrow} + n_{i\downarrow}), \quad (9)$$

donde los operadores  $c_{i\sigma}^\dagger, c_{j\sigma}$  son los operadores de creación y destrucción de fermiones respectivamente,  $n_{i\sigma} = c_{i\sigma}^\dagger c_{j\sigma}$  el operador número que refleja la ocupación,  $U$  es la interacción Hubbard entre partículas,  $J$  el acoplo entre sitios y  $V(t)$  el campo electromagnético AC.

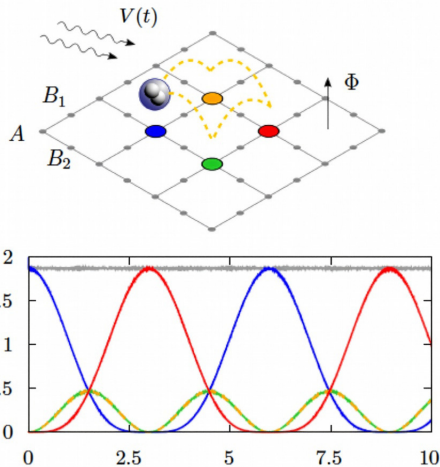
En el caso que analizamos, el de interacción fuerte entre las partículas, se produce la formación de dublones: dos partículas con espines opuestos formando un estado singlete, que, al no poder disipar en el entorno la energía que las enlaza, se propagan en el medio como una sola partícula, a pesar de la fuerte repulsión entre ellas. En [54], en colaboración con el Dr. Miguel Bello y el Dr. Charles Creffield, analizamos los hamiltonianos efectivos

para distintos regímenes, en función de la relación entre las distintas escalas de energía: la probabilidad de túnel entre átomos, la frecuencia e intensidad del campo eléctrico AC y la interacción Hubbard. Para ciertos parámetros del campo es posible obtener efectos inesperados en la dinámica, como la propagación de los dublones en una sola subred, como se muestra esquemáticamente en la figura 18, en la red de Lieb.

La aplicación de un campo periódico en el tiempo permite también manipular los Fermiones de Majorana, quasipartículas que mencionamos anteriormente, en el contexto de la computación cuántica topológica, modulando los distintos términos del hamiltoniano que los modeliza, la cadena de Kitaev [55], y dando lugar a los denominados Fermiones de Majorana de Floquet. En colaboración con el Prof. T. Brandes (UTB) investigamos la manipulación y detección de los Fermiones de Majorana en la cadena de Kitaev mediante la ingeniería de Floquet [56].

Otros sistemas en el que investigamos la presencia de Fermiones de Majorana y su manipulación fueron sistemas de dos y tres puntos cuánticos en presencia de un superconductor, un campo magnético y un campo eléctrico AC (trabajo en colaboración con la Prof. Mónica Benito [57]).

Una propuesta para la detección de los Fermiones de Majorana se basa también en la aplicación de un voltaje o corriente AC y consiste en medir, en uniones Josephson, el denominado efecto Josephson fraccionario [58, 59].



**Figura 18:** Esquema de la red bidimensional Lieb, bajo el efecto de un campo electro-magnético y un campo magnético perpendicular a la misma. Mediante la aplicación de un campo AC, en condiciones próximas a la destrucción coherente del túnel (CDT), la dinámica de los dublones se restringe a la subred en la que inicialmente está localizado. La figura inferior muestra la ocupación de los átomos de la subred como función del tiempo (reproducido con permiso de [54]).

Este último efecto se produce porque, en presencia de un modo de Majorana, la supercorriente transporta electrones individuales en lugar de los pares de Cooper habituales. Por lo tanto, estos pares de Cooper fraccionarios afectan a la supercorriente transformándola, de tener una periodicidad  $\text{sen}(\Phi)$  a  $\text{sen}(\Phi/2)$ . En las uniones Josephson, los experimentos de conductancia en presencia de una corriente AC, muestran los llamados escalones de Shapiro, que permiten deducir la periodicidad de la relación corriente-fase de la unión y por tanto la presencia o ausencia de los Fermiones de Majorana. Aun así, hay efectos que enmascaran la detección, como se discute en [60, 61] (en colaboración con el Dr. Fernando Domínguez y el Dr. Jordi Picó).

Otra interesante propuesta para la creación y detección de fermiones de Majorana de Floquet se basa en átomos fermiónicos atrapados en una red óptica en presencia de radiación [62].

### **3.2 Ingeniería cuántica de Floquet**

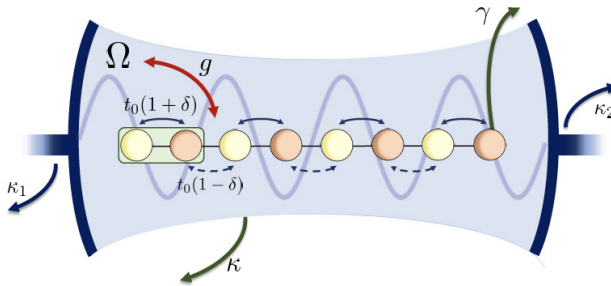
Aprovechar las interacciones entre la luz y la materia ha sido durante mucho tiempo un objetivo central en la Física de la Materia Condensada y ha contribuido al avance de las Tecnologías Cuánticas.

Recientemente, se ha propuesto una terminología para la ingeniería Floquet, en base a las propiedades de la materia irradiada, así, cuando consiste en la manipulación de las propiedades de los sistemas cuánticos mediante luz clásica, se denomina Ingeniería de Floquet Semiclásica (SCFE) [23, 38, 63]. En estos sistemas un campo externo periódico en el tiempo imprime una simetría discreta de traslación temporal en el sistema, que en el régimen de alta frecuencia puede aproximarse, como se describió anteriormente, mediante una descripción estática y estroboscópica, donde el hamiltoniano se renormaliza mediante los parámetros de control del campo externo.

Es por tanto pertinente preguntarse si la teoría de Floquet desarrollada para campos clásicos se puede extender a campos electromagnéticos cuánticos.

Un paradigma reciente, denominado Ingeniería Cuántica de Floquet [64–68], implica el uso de luz cuántica en lugar de luz clásica, en el contexto de lo que se ha denominado materiales cuánticos de cavidad [69–71]. En este caso, el campo de fotones de la cavidad es independiente del tiempo, pero su límite semiclassical, permite reproducir varias características propias de los sistemas SCFE [64]. Esta similitud ha llevado a la creación del térmi-

no QFE (“Quantum Floquet Engineering”) para designar la manipulación externa de materiales cuánticos con cavidades cuánticas. En vista de estas similitudes, los materiales cuánticos de cavidad pueden aprovechar técnicas ampliamente utilizadas en el estudio de los sistemas SCFE, pero también proporcionar información más allá de los SCFE, cuando la retroacción (o “feedback”) debido a la interacción cavidad-materia y las correlaciones entre el sistema cuántico y el campo externo son significativas [42]. Además, un aspecto práctico de la luz cuántica es la mitigación del calentamiento, que es inherente a SCFE y dificulta la observación de la física de Floquet [72].



**Figura 19:** Esquema de una cavidad y una cadena de dímeros que se encuentra acoplada a la misma mediante un acoplo de intensidad  $g$ .  $\Omega$  es la frecuencia de la cavidad y  $\kappa$ ,  $\gamma$ ,  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  las pérdidas por interacción con el entorno. Los acoplos entre dímeros y entre los átomos de un dímero están representados por  $t_0(1-\delta)$  y  $t_0(1+\delta)$  respectivamente.

Como se mencionó anteriormente, la SCFE puede considerarse un caso límite de la QFE donde el campo de luz es macroscópico, lo que implica que la retroacción y las correlaciones luz-materia no son efectos significativos. Sin embargo, conceptualmente es muy diferente de la QFE porque se basa en una simetría de traslación temporal discreta adquirida por un campo periódico externo. En contraste, la QFE se refiere a sistemas aislados, pero es más compleja debido a su naturaleza de interacción de muchos cuerpos y a la dependencia altamente no lineal de los operadores fotónicos de los hamiltonianos invariantes de gauge [64, 65, 67]. De hecho, trabajos en este campo han propuesto diferentes métodos para obtener hamiltonianos más simples efectivos, como modelos de campo medio o expansiones de alta frecuencia donde se preserva la invariancia de gauge. Recientemente, en colaboración con la Dra Beatriz Pérez y el Dr Álvaro Gómez, propusimos un modelo para incluir las correlaciones así como el efecto de retroacción antes mencionado. Este modelo permite investigar el régimen de acoplo intenso luz-materia. Así mismo, en este trabajo se analiza cómo las correlaciones luz-materia afectan la protección topológica de la materia, debido a cambios en las simetrías fundamentales del sistema [73].

Las cavidades cuánticas fotónicas han demostrado ser sistemas muy interesantes y con multitud de aplicaciones en las tecnologías cuánticas. Entre ellas citaré su papel como sensores cuánticos de las propiedades de un sistema físico acoplado a las mismas. A través de la transmisión de la cavidad, es posible inferir las propiedades electrónicas y topológicas del sistema embebido en la misma [18].

Además, las cavidades acopladas a sistemas de bits cuánticos distantes, permiten generar entrelazamiento entre los mismos mediante los fotones que actúan como un autobús cuántico [74]. Hay muchos más ejemplos que hacen de los sistemas híbridos cavidad-materia, sistemas de gran interés en las tecnologías cuánticas.

En resumen, la ingeniería de Floquet permite controlar y modificar la estructura electrónica, las transiciones de fase topológicas y la dinámica de las partículas en las redes cristalinas y que conforman los materiales cuánticos, o bien en redes que son implementadas en otras plataformas, como son los puntos cuánticos, los circuitos superconductores, los cristales fotónicos, los iones atrapados o los átomos fríos en redes ópticas. Además, la aplicación de un campo AC permite controlar las propiedades de transporte, cuando el sistema físico se acopla a contactos eléctricos, añadiendo nuevos canales de túnel o induciendo la localización de las partículas.

Mencionaré además, y como veremos a continuación, que los campos eléctricos y magnéticos periódicos en el tiempo son fundamentales para realizar operaciones cuánticas de un bit cuántico de espín, como son las rotaciones coherentes de un espín electrónico.

Concluiré esta sección con una reflexión: la ingeniería de Floquet representa un cambio de paradigma: La estructura efectiva de la materia ya no está determinada exclusivamente por su composición, sino también por su modulación temporal. Estamos aprendiendo a diseñar hamiltonianos no a partir de la química del material, sino a partir del control coherente de su dinámica.

Por tanto, la resolución de hamiltonianos periódicos en el tiempo no es simplemente un problema matemático elegante; es la base de una nueva forma de ingeniería cuántica. En la era de la Segunda Revolución Cuántica, el tiempo deja de ser un parámetro externo y se convierte en una herramienta activa de diseño.

## 4. PUNTOS CUÁNTICOS SEMICONDUCTORES

Los puntos cuánticos semiconductores, también llamados átomos artificiales, son “pequeñas cajas cuánticas” de dimensiones nanométricas, fabricadas con materiales semiconductores donde se confinan electrones o huecos. Estas estructuras exhiben propiedades únicas, como niveles de energía discretos y transiciones ópticas ajustables, lo que las hacen ideales para una gran variedad de aplicaciones tecnológicas avanzadas.

El rápido desarrollo de técnicas experimentales en los últimos veinte años, ha permitido diseñar estos átomos artificiales en distintas configuraciones.

Inicialmente se fabricaron los puntos cuánticos verticales, los cuales se forman mediante técnicas de crecimiento por epitaxia molecular, intercalando una capa de un material semiconductor (el “pozo”) entre dos capas de un material con una región prohibida de energía o “gap” mayor. De esta manera se crea un pozo de potencial tanto para electrones como para huecos, confinándolos en la región del pozo. Para confinar en la dirección perpendicular a la de crecimiento se aplican potenciales electrostáticos que dan lugar a la formación de un punto cuántico (figuras 20 y 21). Al repetir este proceso, se genera un doble punto cuántico o molécula artificial, en el que los puntos cuánticos están conectados entre sí mediante el efecto túnel [75].

Otro diseño de puntos cuánticos, mas fácil de controlar externamente, es el de los denominados puntos cuánticos laterales (también denominados planares). Estos se forman en una heteroestructura semiconductor, en la que reside un gas de electrones confinado en dos dimensiones. Mediante técnicas litográficas basadas en potenciales electrostáticos, se forman regiones que albergan estados discretos, como en los átomos reales, y barreras electrostáticas que les acoplan entre sí mediante el efecto túnel, simulando así el enlace entre los átomos (fig.22) [76, 77].

El control de los potenciales electrostáticos permite modificar la energía de los niveles electrónicos o de las barreras túnel, modificando de una forma controlada sus propiedades. Además, es posible acoplar estos sistemas a contactos eléctricos y aplicar una diferencia de potencial para medir el transporte, o acoplarlos a otros dispositivos, como es un detector de carga, consistente en un punto de contacto cuántico o constricción, a través de la cual pasa una corriente electrónica. Esta se ve modificada por la presencia de carga en el punto cuántico vecino debido a la interacción Coulomb. Por tanto, la medida del cambio de corriente a través de la constricción da infor-

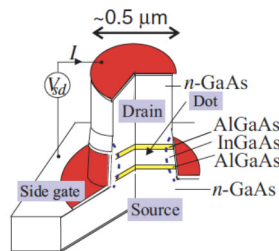
mación sobre la ocupación electrónica del punto cuántico. Alternativamente, es posible utilizar como sensor otro punto cuántico cercano que permita igualmente, mediante un acoplo capacitivo, hacer de sensor de las propiedades dinámicas de los electrones o huecos confinados en estos sistemas.

También hay materiales, como el Arseniuro de Indio (InAs), en los que los puntos cuánticos se forman directamente en forma piramidal en condiciones particulares de temperatura y dirección de crecimiento (puntos cuánticos auto-ensamblados).

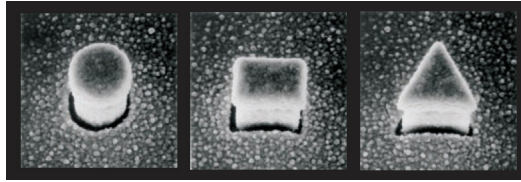
En el campo de la Información Cuántica, los puntos cuánticos juegan un papel crucial en la generación y transmisión de fotones individuales. Estos fotones se utilizan en protocolos de comunicaciones cuánticas, como la distribución de claves cuánticas (QKD, por sus siglas en inglés), que garantizan la seguridad de la información basada en las leyes de la mecánica cuántica. Además, los puntos cuánticos pueden actuar como medios para el almacenamiento de información cuántica en sistemas de memoria cuántica [78].

#### **4.1 Puntos cuánticos: plataforma para el ordenador cuántico.**

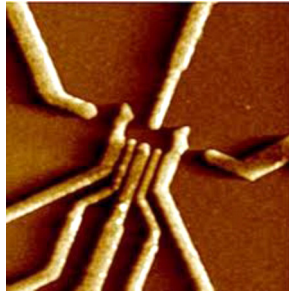
Daniel Loss y David Divicenzo propusieron, hace más de dos décadas, a los puntos cuánticos como una plataforma potencial para el ordenador cuántico [14]. Gracias a su capacidad para generar estados entrelazados, los puntos cuánticos permiten el procesamiento de información a velocidades que superan ampliamente las de los sistemas clásicos. Además, la capacidad de controlar las propiedades de los puntos cuánticos mediante campos eléctricos o magnéticos provee de flexibilidad para su integración en dispositivos cuánticos escalables y los convierte en una alternativa realista frente a otras plataformas como son los circuitos superconductores, los iones atrapados o los átomos confinados en redes ópticas.



**Figura 20:** Diagrama esquemático de una heteroestructura semiconductor, el punto cuántico está localizado entre dos barreras de AlGaAs, un voltaje negativo aplicado a la puerta circular confina el punto cuántico reduciendo su diámetro.



**Figura 21:** Puntos cuánticos verticales con distinta geometría [75].



**Figura 22:** Imagen de un doble punto cuántico lateral formado en un gas de electrones bidimensional de GaAs/AlGaAs mediante litografía.

Los requisitos que propusieron Loss y Divicenzo para la implementación del ordenador cuántico [14, 79] son los siguientes: En primer lugar, las unidades elementales de información deben ser almacenadas en un registro cuántico escalable. En analogía con la lógica binaria donde los bits toman el valor de 0 o 1, la información cuántica se almacena en la forma de bits cuánticos o sistemas de dos niveles (qubits). Otro requisito es el de tener control del estado inicial. Además, los tiempos de decoherencia que dan lugar a la pérdida de fase del bit cuántico deben ser más largos que las operaciones a realizar. Es necesario así mismo poder implementar operaciones de uno y dos bits cuánticos para realizar puertas universales y, finalmente, otra condición es el poder acceder al resultado de las operaciones.

El espín electrónico, o momento angular intrínscico del electrón, es una propiedad cuántica muy robusta y permite definir naturalmente un bit cuántico con los dos estados correspondientes a las dos polarizaciones del espín: espín “up” y espín “down”. En el nivel más básico, podemos clasificar el bit cuántico de espín mediante el número de espines considerados para su codificación. El bit cuántico de Loss-DiVincenzo codifica información cuántica

tica en el estado de espín de un solo electrón. Un campo magnético estático rompe la degeneración entre los dos estados, “up”, y “down”, mientras que un campo magnético transversal periódico en el tiempo produce rotaciones coherentes entre los estados, que se traducen en operaciones cuánticas de un bit cuántico. La técnica mencionada se denomina resonancia de espín electrónica (ESR) [80].

Fue unos años después [81, 82] cuando, debido a las dificultades experimentales para realizar ESR en puntos cuánticos, como son el calentamiento del sistema o la dificultad para focalizar el campo en el lugar requerido, se propuso generar dichas rotaciones combinando campos eléctricos periódicos en el tiempo, en resonancia con la diferencia de energía de los niveles que forman el bit cuántico de espín cuando se aplica un campo magnético estático, con la interacción espín-órbita [81] o bien con un gradiente de campo magnético [82], o incluso con la interacción hiperfina [83] debida a la interacción de los espines electrónicos con los espines nucleares del material. El campo eléctrico no se acopla directamente al espín, sino al movimiento del electrón, que se traduce, en presencia de la interacción espín-órbita, de un gradiente de campo magnético, o de interacción hiperfina, en un campo magnético oscilante efectivo. Esta técnica se denomina resonancia de espín dipolar eléctrica (EDSR).

Los diferentes tipos de bits cuánticos de espín se distinguen por el número y especie de partículas que transportan el espín (espines nucleares, espines de electrones, espines de huecos, etc...) y por su distribución en uno o en varios puntos cuánticos. Un punto en común de todos los bits cuánticos de espín de semiconductores es la presencia de la interacción de intercambio, la cual surge del requisito de que los estados de dos electrones sean antisimétricos, dando lugar a configuraciones de espín que forman un singlete (antisimétrica en el espín, con espín total igual a cero) o un triplete (simétrica en el espín, con espín total igual a la unidad). Cuando la función de onda de dos electrones en puntos cuánticos vecinos solapa, la energía del singlete se reduce frente a la de los tres tripletes (con proyección de espín 0, 1 y -1 respectivamente) en una cantidad  $J$ , que se conoce como la interacción de intercambio y que participa en las operaciones de dos bits cuánticos mediante el intercambio de espines. La interacción de intercambio, se puede ajustar con voltajes de puerta aplicados a las barreras túnel, lo que permite el control de dos bits cuánticos y, por lo tanto, la realización de puertas de dos bits cuánticos entre los espines vecinos más cercanos [84].

Durante más de una década se investigaron las propiedades de los bits cuánticos en puntos cuánticos individuales y en dobles puntos cuánticos. El semiconductor que se investigó era el Arseniuro de Galio, GaAs, formado en una heterounión con Arseniuro de Galio y Aluminio GaAlAs [85], y los bits cuánticos consistían en los espines de un electrón. Tanto el Galio como el Arsenio presentan isótopos nucleares con espín nuclear distinto de cero, que dan lugar a la interacción hiperfina con los espines electrónicos, produciendo decoherencia y relajación de espín, algo no deseable para las operaciones cuánticas [86]. Para corregir los efectos indeseados de la interacción hiperfina se diseñaron protocolos como el espín-echo, así como otras técnicas de desacoplamiento dinámico, y se consideraron regiones en el espectro denominadas “sweetspots”, donde la manipulación de los bits cuánticos se viera menos afectada por dicha interacción.

Se planteó entonces la necesidad de nuevos materiales, como el Silicio, el Carbono, o el Germanio para implementar los puntos cuánticos. En particular, el Silicio y el Germanio pueden ser purificados, eliminando los isótopos con espín nuclear distinto de cero.

En los diferentes materiales que sirven de plataforma para los puntos cuánticos hay que tener en cuenta también efectos como la interacción espín-órbita. Dicha interacción, es un fenómeno cuántico, de origen relativista, que describe la interacción entre el momento angular orbital del electrón y su momento angular intrínseco (espín). La interacción de espín-órbita de Dresselhaus (nombre en honor a la investigadora teórica de Materia Condensada Mildred Dresselhaus), tiene su origen en la falta de simetría de la red cristalina, como sucede en los materiales III-V, como el GaAs, pero no está presente en materiales como el Silicio o el Germanio. Además, hay otro tipo de interacción espín-órbita, conocida como la interacción espín-órbita de Rashba, que depende de la simetría de la estructura y que tiene la ventaja de poder ser controlada experimentalmente mediante, por ejemplo, un campo eléctrico aplicado.

Posteriormente se comenzaron a investigar los bits cuánticos de espín de huecos. Los huecos representan la ausencia de electrones en la banda de valencia y actúan como partículas cargadas positivamente, ya que los electrones vecinos pueden moverse para llenar el sitio vacante, transportando de una manera efectiva el hueco a través del material. Los huecos por tanto están en la banda de valencia. Su estructura de bandas se puede describir mediante el modelo de Luttinger-Kohn [85], donde el valor del momento angular total es  $J = L + S = 3/2$ . El acoplamiento espín-órbita provoca

la rotura de degeneración de los estados atómicos degenerados  $J = 3/2$  en dos subbandas: una banda de huecos pesados ( $J_z = \pm 3/2$ ) y una banda de huecos ligeros ( $J_z = \pm 1/2$ ), donde  $J_z$  es la proyección del momento angular en el eje de cuantización. La terminología ligero o pesado proviene de la mayor o menor curvatura de la banda en el espacio de momentos respectivamente.

En los años 80 se investigó exhaustivamente la estructura de bandas de huecos en pozos cuánticos [87] bajo el efecto de campos magnéticos externos, y de tensiones, que aparecen al crecer dos semiconductores de parámetro de red distinto, para la formación del pozo cuántico. Ambos campos modifican la estructura de bandas de los mismos y permiten controlar el carácter ligero o pesado del estado fundamental de la banda de valencia ([88, 89], en colaboración con el Prof. Massimo Altarelli).

Los huecos presentan dos ventajas fundamentales, como bits cuánticos de espín, frente a los electrones. Una ventaja es la forma de la función de onda, de tipo  $p$  en los huecos, con un nodo en el centro, que conlleva a que el término fundamental de la interacción hiperfina, el término de contacto, sea despreciable. Otra ventaja es la interacción espín-órbita, presente intrínsecamente en la banda de valencia, que permite, como se ha comentado anteriormente, implementar operaciones rápidas de un bit cuántico como es la rotación coherente del espín, al aplicar un campo eléctrico periódico en el tiempo.

El hamiltoniano modelo que describe una cadena de  $N$  átomos artificiales o puntos cuánticos, donde las partículas, ya sean electrones o huecos, interactúan debido a su carga, negativa o positiva respectivamente, y en presencia de interacción espín-órbita, es [90]: ( $\hbar = 1$ )

$$H = H_0 + H_\tau + H_{\text{SOI}} + H_\Gamma. \quad (10)$$

donde:

$$H_0 = \sum_i \varepsilon_i n_i + U \sum_i n_{i\uparrow} n_{i\downarrow} + \frac{E_Z}{2} \sum_i (n_{i\uparrow} - n_{i\downarrow}), \quad (11)$$

$\varepsilon_i$  es la energía de los estados del punto cuántico  $i$ ,  $i = \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $U$  es la energía de Coulomb en cada punto cuántico y  $E_Z = g\mu_B B$  es la energía Zeeman que separa a los dos espines y que se produce al aplicar un campo magnético externo. El siguiente término en la Eq. (10) representa el túnel que acopla los puntos vecinos y que conserva el espín:

$$H_\tau = - \sum_{i,\sigma} \left( \tau_{C,i} a_{i\sigma}^\dagger a_{i+1\sigma} + \text{h. c.} \right). \quad (12)$$

donde,  $a_{i\sigma}$  ( $a_{i\sigma}^\dagger$ ) es el operador de fermiones de aniquilación (creación) en el sitio  $i$  con espín  $\sigma = \{\uparrow, \downarrow\}$ , y  $\tau_{C,i}$  la probabilidad de túnel conservando el espín entre los puntos vecinos  $i$  y  $i + 1$ . El siguiente término en la eq. 10 representa la interacción espín-órbita, que acopla el momento orbital y angular. Como ejemplo, si consideramos bits cuánticos de espín de huecos en puntos cuánticos laterales de Silicio o Germanio, la interacción espín-órbita (denominada SOI) es de tipo Rashba y depende del momento al cubo [91]

$$H_{\text{SOI}} = i\alpha(\sigma_+\pi_-^3 - \sigma_-\pi_+^3). \quad (13)$$

Sin embargo, si los puntos cuánticos se confinan en hilos cuánticos la dependencia del hamiltoniano en el momento es lineal [92]. El momento canónico se define como:  $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + e\mathbf{A}$ , y los operadores de escalera, se definen:  $\pi_\pm = \pi_x \pm i\pi_y$  y  $\sigma_\pm = (\sigma_x \pm i\sigma_y)/2$ , donde  $\sigma_{x,y,z}$  son las matrices de Pauli, y  $\alpha$  es la intensidad de la interacción. Se demuestra, mediante un tratamiento perturbativo, que el hamiltoniano de espín-órbita se puede escribir como un hamiltoniano adicional de túnel en el que el espín no se conserva durante el túnel [93]:

$$H_{\text{SOI}} = \sum_i \left( \tau_{F,i}^* a_{i\uparrow}^\dagger a_{i+1\downarrow} - \tau_{F,i} a_{i\downarrow}^\dagger a_{i+1\uparrow} + \text{h. c.} \right). \quad (14)$$

La aplicación de un campo eléctrico AC en un punto cuántico individual da lugar, en presencia de la interacción espín órbita y un campo magnético estático externo, a rotaciones coherentes de un espín, como se mencionó anteriormente. Si el sistema considerado es una molécula diatómica o punto cuántico doble, la dinámica electrónica es compleja, puesto que se combinan procesos de absorción o emisión de fotones con procesos de conservación y no conservación del espín en la dinámica de los electrones entre puntos cuánticos, además de la dinámica de rotación del espín electrónico dentro de un mismo punto cuántico (ver [90] para una formulación detallada).

El término en el hamiltoniano que corresponde al acoplo del sistema a los contactos, se representa como:

$$\hat{H}_\Gamma = \sum_{l,k,\sigma,\eta} \left( \gamma_{l,\eta} \hat{c}_{l,k,\sigma}^\dagger \hat{d}_{\eta,\sigma} + \text{h.c.} \right), \quad (15)$$

donde los operadores  $c$ ,  $c^\dagger$  son los operadores de creación y destrucción en el contacto  $l$ ,  $\eta$  se refiere al punto cuántico de la izquierda o derecha y  $\gamma$  la intensidad del acoplo túnel entre los puntos y los contactos.

Para calcular la corriente entre los contactos, es muy útil el considerar el formalismo de la matriz densidad, el cual se basa en describir el estado de un sistema cuántico mediante un operador, llamado matriz densidad, que aporta la información sobre el estado del sistema, incluyendo la posibilidad de que el sistema se encuentre en una mezcla de estados (estado mixto). Este formalismo proporciona una herramienta poderosa para describir y analizar los sistemas cuánticos, especialmente aquellos que interactúan con su entorno.

Su aplicación en el estudio del transporte permite calcular propiedades como la corriente electrónica que fluye al acoplar el sistema a contactos eléctricos y aplicar una diferencia de potencial entre los mismos. La evolución de la matriz densidad, refleja la dinámica de la ocupación de los estados electrónicos, y se puede escribir, en muchos casos, en la aproximación Markoviana, es decir, asumiendo que la evolución del sistema no depende de su estado pasado, despreciando los efectos de memoria del entorno, en este caso los contactos eléctricos acoplados al sistema, que se tratan como un baño Markoviano [94, 95]:

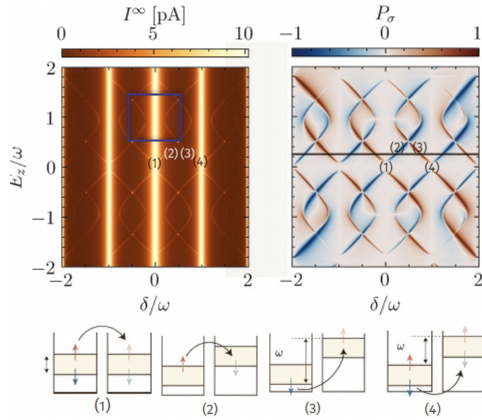
$$\dot{\rho}_{ln}(t) = -i\langle l|[H(t), \rho]|n\rangle + \sum_{k \neq n} (\Gamma_{nk}\rho_{kk} - \Gamma_{kn}\rho_{nn})\delta_{ln} - \Lambda_{ln}\rho_{ln}(1 - \delta_{ln}) \quad (16)$$

donde el conmutador tiene en cuenta la dinámica coherente,  $\Gamma_{ln}$  representa la probabilidad de transición de un estado  $l$  a otro  $n$  debido al acoplo con los contactos eléctricos y la decoherencia viene representada por  $\Lambda_{ln} = \frac{1}{2}\sum_k (\Gamma_{kl} + \Gamma_{kn})$ .

La evolución de la Matriz Densidad permite describir cómo los estados cuánticos pierden su coherencia debido a la interacción con el entorno, lo que la convierte en una herramienta esencial en la física de sistemas abiertos, es decir con disipación, en la física de la materia condensada y en la física cuántica de dispositivos [94].

A partir de la matriz densidad es posible calcular la corriente eléctrica:  $I^\infty = e \sum_\sigma \Gamma_{D,R} \rho_{R\sigma}^\infty$ , donde  $\rho_{R\sigma}^\infty$  es la ocupación del punto de la derecha en el estado estacionario, promediada en un periodo, y el superíndice indica que se ha considerado específicamente el caso de un voltaje suficientemente grande para que la corriente sea unidireccional.

La corriente electrónica a través de un doble punto cuántico en presencia de un campo eléctrico AC, interacción espín órbita y un campo magnético estático se muestra en la figura 23. Esta presenta características interesantes como corriente polarizada de espín, o efectos que provienen de las



**Figura 23:** La figura de la izquierda muestra la corriente electrónica a través de un doble punto cuántico en presencia de un campo eléctrico AC de frecuencia  $\omega$ , un campo magnético estático e interacción espín-órbita, como función de la separación entre los niveles de los puntos  $\delta$ . En la parte inferior de la figura se muestra un esquema de 4 procesos en los que se transfiere el electrón 1) con conservación del espín; 2) mediante inversión del espín; 3) cuando hay inversión de espín y absorción de un fotón; 4) El espín se conserva y hay procesos de un fotón. La figura superior de la derecha representa la polarización de espín de la corriente como función de la separación entre los niveles de los puntos  $\delta$  y el campo magnético estático aplicado  $E_z$  [90].

interferencias destructivas de la función de onda electrónica, debido a los distintos procesos de túnel. A partir de las características de la corriente es posible inferir algunas de las propiedades del sistema, como la intensidad de la interacción espín órbita [90].

En resumen, la combinación de la interacción espín órbita y campos eléctricos AC permite manipular y controlar el espín de la partícula. Esto es importante para evitar las limitaciones experimentales de los campos magnéticos oscilantes en la manipulación de bits cuánticos de espín. Además, la medida de la corriente es una herramienta para caracterizar propiedades del sistema como la interacción espín-órbita en los dispositivos experimentales, permitiendo así mejorar el diseño de los mismos y contribuyendo al desarrollo de puertas cuánticas de alta fidelidad.

## 4.2 Cadenas de puntos cuánticos

Uno de los desafíos fundamentales en el desarrollo de la computación cuántica consiste en conectar los bits cuánticos de manera coherente dentro de arquitecturas escalables. En otras palabras, además de nodos cuánticos capaces de almacenar y procesar información, necesitamos canales cuánticos que permitan transportar estados cuánticos entre distintas regiones del proce-

sador. En este contexto, las cadenas de puntos cuánticos, cuya implementación experimental se ha desarrollado enormemente en los últimos años, han emergido como una de las propuestas más prometedoras para implementar lo que podríamos denominar enlaces cuánticos, o "quantum links", dentro de dispositivos de estado sólido.

Sin embargo, en cualquier arquitectura de computación cuántica surge inmediatamente una cuestión esencial: ¿cómo transferir información cuántica entre bits cuánticos distantes? y ¿cómo hacerlo preservando la coherencia de los estados?

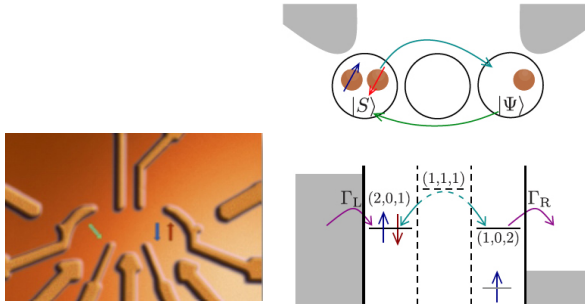
En este marco, y como veremos a continuación, el estado cuántico asociado al espín de un electrón puede propagarse a través de la cadena mediante diferentes mecanismos.

La implementación experimental de redes con más de dos puntos cuánticos acoplados por barreras túnel, en una y dos dimensiones y el control de sus propiedades, supuso un paso importante hacia la escalabilidad. Pero no solo se dió un paso en esta dirección sino que además se vio que estos sistemas, presentaban nuevas propiedades físicas, como por ejemplo las interacciones a largo alcance entre átomos que no están acoplados directamente por efecto túnel, es decir átomos que no son primeros vecinos en la cadena o en la red.

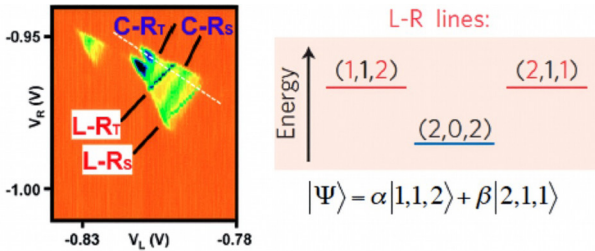
Un efecto interesante que aparece cuando el número de puntos cuánticos es tres o más es la transferencia de largo alcance, que consiste en la transferencia directa de los electrones entre los puntos cuánticos extremos de la cadena.

Este fenómeno, la transferencia de un espín electrónico directamente entre los extremos de la cadena, sin que se ocupe el punto central (fig. 24), o de una manera más general, sin que la configuración intermedia entre el estado inicial y final esté en resonancia, se observó mediante experimentos de transporte, por vez primera, en el grupo experimental dirigido por el Prof. Andy Sachrajda y colaboradores (NRC, Ottawa), en una cadena de tres puntos cuánticos (figuras 24 y 25). Estos experimentos se realizaron en distintas regiones del diagrama de estabilidad, es decir con un número distinto de electrones participando en el transporte. En colaboración con el grupo del Prof. Sachrajda, demostramos que el origen de este fenómeno está en la formación de superposiciones coherentes de estados que tienen lugar gracias a la coherencia cuántica. En el caso concreto de tres electrones participando en el transporte, y que se representa esquemáticamente en la fig. 24, se forma la siguiente superposición:

$$|LR\rangle = (|\uparrow\downarrow, 0, \Phi\rangle - |\Phi, 0, \uparrow\downarrow\rangle)/\sqrt{2} \quad (17)$$



**Figura 24:** La transferencia directa del estado singlete formado por dos electrones entre los extremos de la cadena de tres puntos cuánticos tiene lugar cuando el estado intermedio está fuera de resonancia. Un espín electrónico inicialmente ocupando el punto de la izquierda actúa como “spin bus”, (i,c,d) indica el número de electrones en los puntos de la izquierda (i), centro (c) y derecha (d). [96, 97].



**Figura 25:** Corriente electrónica en el punto cuántico triple donde las líneas marcadas L-R corresponden a la transferencia directa entre los extremos de la cadena. El estado intermedio (2,0,2) está fuera de resonancia. En este caso la superposición se forma con estados de cuatro espines electrónicos [96].

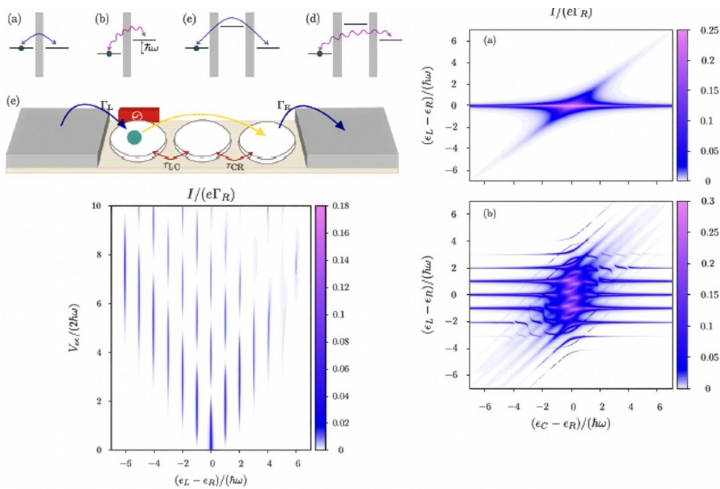
donde  $|\Phi\rangle = \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$ . En este sistema, es un espín electrónico, en un cierto estado cuántico, quien actúa como autobús cuántico, transfiriendo la información al otro extremo de la cadena (en colaboración con la Dra María Busl y el Dr Rafael Sánchez, [96, 97]).

Paralelamente, en la Universidad Técnica de Delft, se observó la transferencia directa de carga entre puntos extremos de un triple punto cuántico. Estos experimentos se realizaron aplicando campos eléctricos periódicos en el tiempo, en donde el efecto túnel, que permite el paso de partículas a través de las barreras túnel que acoplan los átomos, está asistido por canales adicionales de túnel debido a la absorción o emisión de cuantos de energía. Este mecanismo se denominó túnel de largo alcance asistido por fotones [98]. A través de este mecanismo se investigó la transferencia de largo alcance de dos partículas en un estado entrelazado, así como las interferencias cuánticas en la transferencia de largo alcance asistida por fotones

[99–101], (en colaboración con los Doctores Rafael Sánchez, Fernando Gallejo y Jordi Picó, fig. 26).

El encontrar partículas en estados deslocalizados es una de las características más intrigantes de los sistemas cuánticos. El superintercambio, la interacción de orbitales cuyo solape es pequeño pero está mediado por estados virtuales intermedios, fue introducido por Pauling en su teoría de resonancia del enlace molecular [102]. La deslocalización debida a mecanismos de transferencia electrónica de largo alcance es responsable de reacciones donador-aceptor a través de estados puente [103], relevantes para moléculas tan complejas como los centros donde se produce la fotosíntesis o el ADN. En el estado sólido, los trabajos de Zener y Anderson introdujeron interacciones de intercambio de largo alcance para explicar el transporte y el orden en compuestos magnéticos.

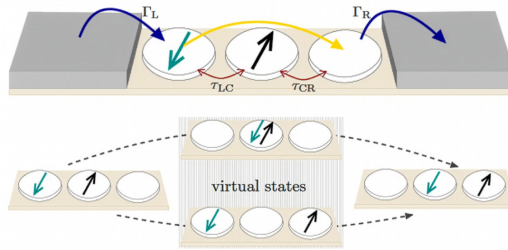
Las cadenas de puntos cuánticos o moléculas artificiales son sistemas cuyos parámetros pueden ser modificados de una manera controlada y por tanto permiten la simulación de estos fenómenos.



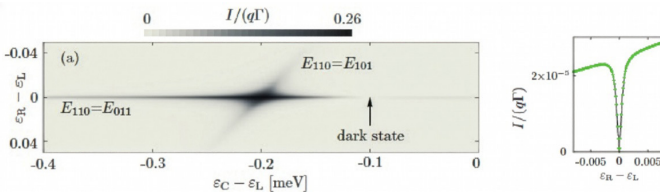
**Figura 26:** a) Túnel resonante a través de una barrera; b) Túnel asistido por un fotón; c) Túnel de largo alcance, producido mediante transiciones virtuales a través del estado intermedio que está fuera de resonancia con los niveles de los átomos de la izquierda y derecha; d) Túnel de largo alcance asistido por un fotón; e) Esquema de tres puntos cuánticos acoplados a contactos eléctricos y en presencia de un campo eléctrico periódico en el tiempo; La fig. inferior muestra la corriente a través del sistema como función de la intensidad del campo eléctrico aplicado y de la diferencia de energía entre los niveles de los puntos cuánticos de los extremos (L y R). El punto cuántico central tiene una energía mucho mayor que la de las resonancias L-R. La figura de la derecha representa la corriente a través del sistema como función de la diferencia de energía de los niveles en el caso a) sin campo eléctrico AC; b) en presencia del campo AC.

En situaciones donde el túnel resonante hacia el punto cuántico central está energéticamente prohibido, el super-intercambio es responsable del acoplamiento de los dos puntos cuánticos externos, mediado por transiciones virtuales, es decir sin conservación de la energía, a través del punto central. Además, cuando hay mas de un estado virtual que participa en el acoplo indirecto entre los átomos extremos, pueden darse interferencias entre ambos caminos. En las figs 27 y 28 se muestra esquemáticamente, como los dos caminos posibles para el electrón forman los brazos de un interferómetro, y como la interferencia destructiva entre ambos da lugar a la cancelación de la corriente [104].

En resumen, los bits cuánticos de electrones o huecos pueden transferir información en cadenas de puntos cuánticos. Estas cadenas conectan regiones distantes en un ordenador cuántico y son fundamentales para la escalabilidad. Además, la manipulación de los bits cuánticos de espín con campos periódicos en el tiempo permite controlar sus estados para realizar operaciones cuánticas, como las rotaciones coherentes de un espín, y para facilitar una transferencia de información precisa y eficiente a través de la cadena.



**Figura 27:** Esquema de una molécula formada por tres puntos cuánticos acoplados a contactos eléctricos con una probabilidad de túnel  $\Gamma_{L,R}$ . El transporte directo entre los estados  $(1,1,0)$  y  $(0,1,1)$ , cuando tienen la misma energía, está mediado por transiciones virtuales (sin conservación de la energía) a través de dos estados intermedios distintos. Estos estados intermedios,  $(0,2,0)$  y  $(1,0,1)$ , cuya energía se puede controlar mediante potenciales eléctricos, definen los dos brazos de un interferómetro de superintercambio [104].



**Figura 28:** Corriente a través de un triple punto cuántico con dos electrones como función de la diferencia de energía de los niveles de los distintos puntos cuánticos (L, C, R indican los puntos de la izquierda, centro y derecha respectivamente). Una resonancia intensa aparece en el cruce de energías  $(1,1,0)-(1,0,1)-(0,1,1)$ , donde (L,C,R) indica la ocupación de los correspondientes puntos cuánticos. Una resonancia estrecha ocurre cuando las configuraciones  $(1,1,0)$  y  $(0,1,1)$  tienen la misma energía debido al superintercambio. Cuando la condición:  $E_{110} - E_{020} = -2(E_{110} - E_{101})$  se verifica, se forma un estado oscuro, debido a la interferencia destructiva de las dos trayectorias posibles, dando lugar a la cancelación de la corriente ("Dark State") [104].

### **4.3 Protocolos para la transferencia de información**

Un fenómeno fundamental de la física cuántica es la coherencia cuántica y, como consecuencia de la misma, se producen interferencias destructivas que dan lugar a lo que se conoce como estados oscuros (“Dark States”, en inglés). Este nombre tiene su origen en la física cuántica atómica cuando se estudiaron los átomos en interacción con la radiación electromagnética, especialmente en el contexto de sistemas cuánticos que involucran transiciones entre niveles de energía atómicos.

El fenómeno conocido como “Atrapamiento Coherente de Población” (“Coherent Population Trapping” en inglés o CPT), ocurre en sistemas atómicos de tres niveles, tipo Lambda, es decir donde dos niveles atómicos están muy cercanos en energía y el tercero, de mas energía, se acopla a ellos mediante dos modos electromagnéticos. Los haces de luz excitan coherentemente al átomo desde los dos estados mas bajos en energía hacia un estado excitado común. Mediante una adecuada sintonización de los láseres, el sistema tiene una probabilidad finita de decaer hacia una superposición coherente de los estados de baja energía, la cual se desacopla de la luz, dando lugar a lo que se conoce como un estado oscuro. En el límite estacionario, dicho estado se ocupa con probabilidad uno, produciéndose el fenómeno de CPT.

Un estado oscuro es por tanto, un estado cuántico en el que el átomo no puede interactuar de manera eficaz con el campo electromagnético, y por lo tanto no absorbe ni emite radiación de manera significativa. Los estados oscuros tienen implicaciones en áreas como la óptica cuántica, la manipulación de la luz y el control de la interacción de los átomos y la radiación. Además, son fundamentales en el desarrollo de tecnologías como las memorias cuánticas y las comunicaciones cuánticas, donde el control de la interacción de los átomos con la luz es esencial.

Los puntos cuánticos ofrecen la posibilidad de estudiar el CPT en sistemas Lambda efectivos. Mas aún, este fenómeno se puede exportar de la óptica, donde los electrones interaccionan con la radiación, a la dinámica de electrones en tres puntos cuánticos, donde los niveles de los mismos equivalen a los niveles atómicos y donde los campos electromagnéticos se sustituyen por el acoplo túnel coherente entre los puntos cuánticos [105]. En este caso, en el que se consideran tres puntos cuánticos, el estado oscuro es una superposición de los niveles de dos de los puntos sin la participación del tercero. Cuando éste se acopla a un contacto, la corriente a través del mismo se anula. Dado que la localización de los electrones en el estado oscuro implica una corriente nula a través de los puntos cuánticos, es posible la detección eléctrica del CPT al acoplar el sistema a contactos eléctricos y medir la corriente.

La transferencia, de forma controlada, de una partícula en una cadena atómica, directamente entre los extremos sin ocupar la zona intermedia, se puede realizar mediante distintos protocolos adiabáticos a partir de los estados oscuros antes citados. Uno de ellos, denominado “Transferencia Adiabática Coherente” (“Coherent Transfer by Adiabatic Passage” en inglés, o CTAP) se propuso teóricamente en un punto cuántico triple dispuesto linealmente [106]. Dicho protocolo se basa en el control temporal de los túneles entre puntos, mediante pulsos aplicados adiabáticamente a las barreras túnel, de forma que un electrón es guiado desde el punto de la izquierda hasta el último en la derecha sin poblar el punto intermedio (fig. 29). Un efecto estrechamente relacionado es el paso adiabático Raman estimulado en sistemas ópticos cuánticos.

Ilustraremos como obtener la transición adiabática de un electrón desde un punto cuántico en un extremo al otro extremo, en una cadena de tres, mediante la aplicación adiabática de pulsos a las barreras túnel que acoplan los mismos. El hamiltoniano que representa el sistema de tres puntos cuánticos, en la figura 29 es:  $H_{\text{TQD}}(t) = \Omega_{12}(t)c_1^\dagger c_2 + \Omega_{23}(t)c_2^\dagger c_3 + \text{H.c.}$ ,  $c_i^\dagger$ ,  $c_i$  son los operadores de creación y destrucción de las partículas en el punto cuántico  $i$ , y los pulsos aplicados a las barreras entre los puntos cuánticos se definen como:

$$\Omega_{12}(t) = \Omega^{\max} \exp \left[ - \left( \frac{t - t_{\max} + \sigma}{2} \right)^2 / (2\sigma^2) \right] \quad (18)$$

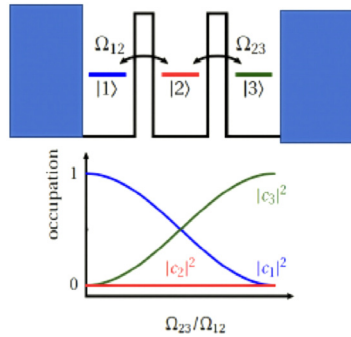
$$\Omega_{23}(t) = \Omega^{\max} \exp \left[ - \left( \frac{t - t_{\max} - \sigma}{2} \right)^2 / (2\sigma^2) \right] \quad (19)$$

donde  $\sigma$  refleja la anchura del pulso. Una solución de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo es un estado tal que su energía  $\epsilon = 0$  y su correspondiente autoestado no tiene peso espectral en el punto intermedio:

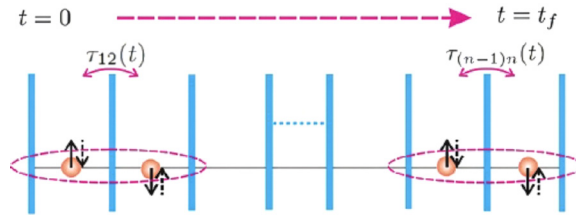
$$|\varphi\rangle = |D_0\rangle = \cos \theta |1\rangle - \sin \theta |3\rangle, \quad (20)$$

$$\theta = \arctan(\Omega_{12}/\Omega_{23}).$$

Este estado, permite, modificando adiabáticamente los pulsos, inicializar un electrón en un extremo de la cadena y transferirle directamente al otro sin ocupar la región central, como se muestra en la fig. 29. Una extensión del protocolo CTAP a cadenas mas largas de átomos y a la transferencia de más de una partícula, como por ejemplo dos electrones en un estado cuántico de espín singlete o triplete, está discutida en [107] (fig. 30). El determinar la fidelidad del protocolo es posible añadiendo contactos eléctricos al sistema y analizando las fluctuaciones de la corriente [108].



**Figura 29:** Tres puntos cuánticos a los que se aplican pulsos dependientes del tiempo de forma adiabática, de manera que controlando la amplitud de los mismos se produce el transporte de forma controlada de un electrón desde el punto de la izquierda al de la derecha sin ocupar el átomo intermedio.



**Figura 30:** Esquema de la transferencia directa de un estado entrelazado de dos espines electrónicos entre extremos de una cadena de puntos cuánticos.

Los procesos adiabáticos cuánticos son muy útiles para preparar, manipular y realizar la transferencia de estados, de una forma controlada, pero la escala de tiempo en la que tienen lugar los hace frágiles frente a los procesos de decoherencia y relajación debido a la interacción del sistema con su entorno y que se producen en escalas de tiempo más cortas.

Las técnicas de atajos a la adiabaticidad (“Shortcuts to adiabaticity” o STA, por sus siglas en inglés, [109]) son métodos de control cuántico diseñados para acelerar procesos adiabáticos tradicionales, manteniendo su robustez frente a perturbaciones. Estos protocolos permiten alcanzar los estados finales deseados en tiempos significativamente más cortos que los requeridos por la evolución adiabática convencional, lo que es crucial para aplicaciones en tecnologías cuánticas donde la decoherencia limita los tiempos de las operaciones y la transferencia de información cuántica. Muchos de estos protocolos se basan en ingeniería inversa: imponiendo la dinámica deseada y las condiciones iniciales, parametrizando la función de onda y resolviendo la ecuación de Schrödinger, es posible obtener la expresión óptima de los pulsos para ya sea la manipulación de un bit cuántico o la transferencia de carga, de espín o del estado cuántico correspondiente, con fidelidad alta [109].

Dado que los procesos adiabáticos se encuentran en multitud de procesos físicos, los protocolos STA abarcan un amplio abanico de aplicaciones en física atómica, molecular y óptica. Así mismo, recientemente han demostrado su eficacia en la manipulación de bits cuánticos de espín en puntos cuánticos y en la transferencia de información en estos sistemas. En cadenas de átomos en donde el espín se conserva en la transferencia, es posible transferir un estado entrelazado singlete o triplete entre extremos de la cadena con protocolos STA en tiempos un orden de magnitud mas cortos que mediante protocolos adiabáticos [107] (en colaboración con los Drs. Xi Chen, Yue Ban y Sigmund Kohler).

Otro sistema en el que se investiga el transporte de largo alcance son las cadenas de puntos cuánticos en presencia de interacción espín órbita. En particular, se ha investigado la configuración en la que los bits cuánticos son de espín de huecos en la banda de valencia, ya que, como comentamos anteriormente, el efecto de la interacción hiperfina en espines de huecos es pequeño en comparación con dicho efecto en el caso de espines electrónicos y por tanto el tiempo de decoherencia de espín es mas largo en los primeros.

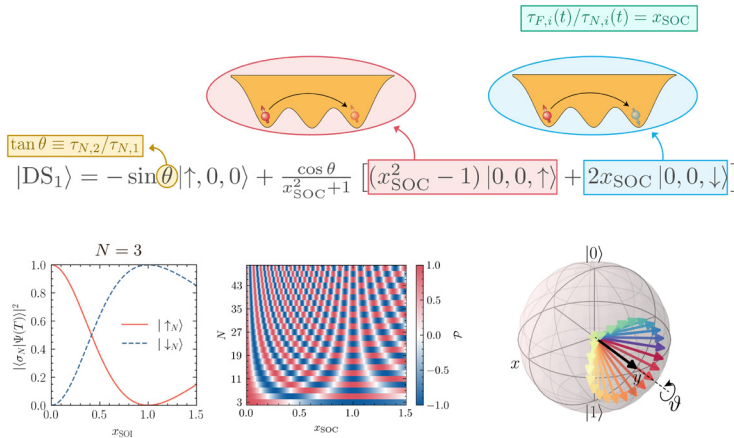
Un resultado interesante es que en presencia de la interacción espín orbita de Rashba, es posible, simultáneamente, transferir un hueco y realizar rotaciones coherentes y por tanto operaciones de un bit cuántico. La transferencia de largo alcance de un bit cuántico de espín de un hueco está representada en la fig. 31, donde se muestra la superposición cuántica en un punto cuántico triple, en la que el punto central no se ocupa. Se muestra así mismo en la figura cómo, la polarización del espín transferido depende de la intensidad de la interacción espín-órbita. Para la transferencia, se consideraron protocolos STA. Esto indica que es posible implementar operaciones de un bit cuántico, rotaciones de espín coherentes, simultáneamente a la transferencia. Además, ello permite así mismo corregir la decoherencia de espín durante la transferencia mediante técnicas de desacoplo dinámico basadas en este mecanismo (en colaboración con el Dr. David Fernández y la Dra Yue Ban, [110]).

Finalmente, hay que mencionar otros protocolos que se han implementado recientemente para la transferencia de información en puntos cuánticos.

Entre otros protocolos se encuentran también el protocolo denominado: "Bucket Brigade", que se basa en reducir, mediante un protocolo secuencial, el acoplo túnel entre puntos cuánticos vecinos para transferir la partícula entre los extremos de la cadena [111], así como, mediante la interacción de intercambio entre espines localizados en puntos cuánticos

adyacentes, transferir la información cuántica entre electrones vecinos sin necesidad de mover físicamente las partículas, estableciendo así una especie de "relevo cuántico" a lo largo de la cadena. Otro protocolo es el de la onda de potencial viajera o modo transportador ("Conveyor Mode"), que atrapa a la partícula en su mínimo y la transporta [112]. Este último protocolo se ha propuesto recientemente para aproximar dos bits cuánticos durante un tiempo determinado con el objetivo de realizar operaciones de dos bits cuánticos [113]. El modo "conveyor" representa una estrategia particularmente prometedora para implementar enlaces cuánticos dinámicos dentro de procesadores basados en puntos cuánticos.

Otra plataforma que se ha implementado experimentalmente, para transferir información entre bits cuánticos distantes confinados en puntos cuánticos es el acople de los mismos mediante cavidades superconductoras, donde el fotón actúa de transmisor [114]. Esta plataforma, la de los sistemas híbridos cavidad-bits cuánticos, ha dado lugar a experimentos muy prometedores y es un tema de gran actividad a día de hoy.



**Figura 31:** Superposición cuántica del estado de un hueco en un triple punto cuántico en la que el átomo central no se ocupa (estado oscuro o "Dark State"), y por tanto, el transporte mediante un protocolo adiabático siguiendo dicho estado permitiría la transferencia directa de un hueco entre los átomos extremos. La presencia de la interacción espín órbita produce la rotación del espín y la polarización final del mismo dependerá de la intensidad de la misma. Mediante la aplicación de técnicas de STA, la transferencia es más rápida y por tanto más robusta frente a procesos de decoherencia. En la fig. inferior izquierda se muestra la transferencia de un espín de hueco, que inicialmente está en el estado  $|\uparrow\rangle$ . Su polarización final depende de la interacción espín órbita y puede ser controlada mediante el parámetro  $X_{SO} = \tau_H/\tau_N$ , donde  $\tau_N(\tau_H)$  es la probabilidad de túnel que conserva (no conserva) el espín, y es función del número de átomos en la cadena. La figura inferior central muestra la polarización del espín transferido para una cadena de  $N$  átomos como función de la interacción espín-órbita. La figura inferior derecha muestra esquemáticamente las rotaciones coherentes del espín simultáneamente a la transferencia.

## 5. PUNTOS CUÁNTICOS COMO SIMULADORES DE FENÓMENOS FÍSICOS COMPLEJOS

A finales de los 90 se demostró el potencial de los puntos cuánticos como simuladores de sistemas y de fenómenos físicos complejos. Experimentos de transporte cuántico en estos sistemas pusieron de manifiesto el efecto Kondo. El efecto Kondo, descubierto por el físico japonés Ju Kondo en 1964, se observó en un metal en presencia de impurezas magnéticas. Al bajar la temperatura la resistencia presentaba un comportamiento anómalo, un mínimo, resultado de la interacción entre los momentos magnéticos de las impurezas y los electrones de conducción del metal. La impureza magnética se acopla fuertemente a los electrones de conducción, modificando así su momento magnético, formándose un estado singlete entre el electrón de la impureza y los electrones del metal anfitrión.

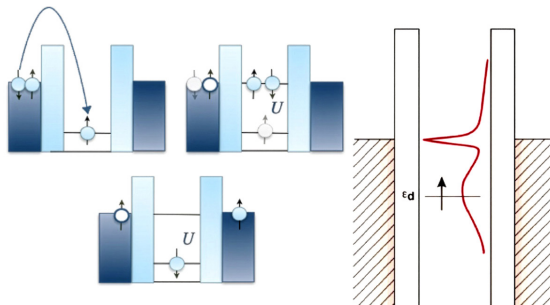
La simulación del efecto Kondo mediante puntos cuánticos se realizó inicialmente en un punto cuántico acoplado fuertemente a contactos eléctricos. El efecto Kondo se reflejaba en la formación de un estado al nivel de Fermi que daba lugar a un pico en la conductancia. El origen del mismo no era otro que las fuertes correlaciones electrónicas entre los electrones del metal o contacto y el espín del electrón en la impureza, i.e., en el punto cuántico, que dan lugar a la formación de un estado singlete que se manifiesta en el transporte. Es importante destacar el interés y las ventajas de investigar la física Kondo en simuladores cuánticos como son los puntos cuánticos (QD) acoplados a contactos eléctricos.

Una ventaja importante de los puntos cuánticos como simuladores de este efecto, es que los parámetros que definen la temperatura Kondo, como son el número de electrones en el punto cuántico, con el fin de obtener un espín localizado, la intensidad del acoplo con los contactos e incluso la interacción de Coulomb entre los electrones, pueden modificarse de forma controlada aplicando la combinación adecuada de voltajes de puerta [115–117]. Por lo tanto, es posible estudiar los regímenes de Kondo o incluso de Valencia Mixta en la misma muestra. Para que esto sea posible, existe un requisito importante: la energía de carga y la separación de niveles del punto cuántico deben ser significativamente mayores que el ensanchamiento de niveles debido al acoplamiento a los conductores. Más importante aún, el estudio de la física de Kondo en puntos cuánticos abrió un camino para el estudio de los fenómenos de muchos cuerpos fuera del equilibrio. Muchos trabajos, tanto teóricos como experimentales siguieron a estos trabajos iniciales, investigando el efecto Kondo mediante configuraciones mas complejas. En nuestro grupo investigamos,

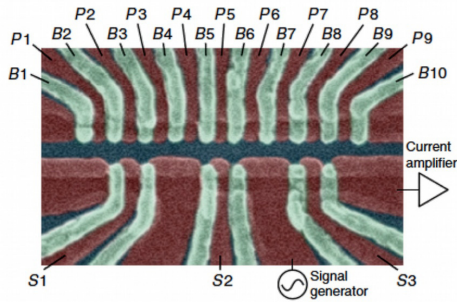
en el régimen Kondo, el efecto de aplicar un campo AC al transporte a través de un punto cuántico [118] así como la competición entre el efecto Kondo y el antiferromagnetismo en dobles puntos cuánticos [119]. Recientemente, en colaboración con Rosa López (UIB), Minchul Lee (U. Korea) y Hongqui Xu (U. Beijing) investigamos, la competición entre la superconductividad y el efecto Kondo, y las transiciones de fase cuánticas mediante el análisis del magnetotransporte, en un punto cuántico acoplado a contactos superconductores [120].

Otro ejemplo es la simulación de la molécula de Wigner mediante configuraciones de puntos cuánticos: Las fuertes correlaciones producidas por la interacción de Coulomb pueden influir significativamente en la estructura electrónica de la materia. Estos sistemas que presentan fuertes correlaciones son notoriamente difíciles de tratar. Sin embargo, cuando la separación media entre electrones supera un cierto valor crítico, se produce una simplificación considerable, ya que la interacción de Coulomb domina a la energía cinética e impulsa una transición a una disposición cuasi-cristalina que minimiza la energía electrostática total. En analogía con el fenómeno de la cristalización de Wigner en tres dimensiones, dicho estado en dos dimensiones se denomina molécula de Wigner. Dado que los electrones en el estado de molécula de Wigner están localizados en el espacio, el sistema puede simularse de forma natural y eficiente mediante puntos cuánticos dispuestos en estas ubicaciones espaciales. La investigación de cadenas de cuatro puntos cuánticos en dos dimensiones permitió simular la molécula de Wigner e investigar la dinámica electrónica en presencia de un campo AC [122] (en colaboración con el Dr. Charles Creffield).

Recientemente, el ferromagnetismo de Nagaoka se ha simulado experimentalmente en este mismo sistema [123].



**Figura 32:** Formación del pico Kondo en un punto cuántico. La figura de la derecha representa una resonancia ensanchada (debido al acoplo con los contactos eléctricos) a la energía del nivel del punto cuántico, y una resonancia estrecha o resonancia Kondo a la energía del potencial químico de los contactos [117].



**Figura 33:** Imagen del microscopio electrónico de barrido de una cadena lineal de nueve puntos cuánticos bajo las puertas P1; P2; . . . ; P9. Los acoplos de túnel entre los puntos se controlan mediante las puertas de barrera B1; B2; . . . ; B10. Los sensores de carga de puntos cuánticos se forman bajo las puertas S1; S2 y S3 [121].

A partir del año 2016, se realizaron experimentalmente cadenas mas largas de puntos cuánticos, lo cual abrió nuevos caminos para la implementación de estos sistemas como simuladores cuánticos (fig. 33) [121].

Las cadenas de puntos cuánticos son una buena opción, frente a otras plataformas alternativas, para simular el modelo de Hubbard, ya que permiten alcanzar experimentalmente temperaturas muy bajas frente a otras escalas de energía del sistema, como es la probabilidad de túnel entre átomos vecinos. Temperaturas tales que  $k_B T / \tau = 0.01$ , donde  $k_B T$  es la energía térmica, y  $\tau$  la probabilidad de túnel, son accesibles experimentalmente en esta plataforma [124].

El modelo de Hubbard en dos dimensiones es particularmente interesante puesto que describe fenómenos en los que la interacción de muchos cuerpos es fundamental, ejemplos de estos fenómenos son la transición metal-aislante, el magnetismo o la superconductividad de alta temperatura. El modelo de Hubbard en dos dimensiones ha sido simulado experimentalmente mediante átomos de fósforo en silicio formando una red bidimensional [125].

Además, la implementación experimental y el control de cadenas largas de puntos cuánticos en una y dos dimensiones permite considerar estos sistemas como simuladores cuánticos de redes cristalinas con propiedades no triviales, como son los aislantes topológicos. Es en estos sistemas en los que discutiremos la transferencia de información cuántica mas adelante.

La cadena de dímeros, como se ha discutido anteriormente, es el aislante topológico unidimensional mas sencillo, y ha sido implementado en distintas plataformas, como son los átomos fríos [40], las guías de onda [126],

los átomos de fósforo como dopantes en silicio y manipulados mediante microscopía de efecto túnel (STM) [127], las cavidades fotónicas [128], o los átomos de Indio depositados en InAs mediante STM [129].

Recientemente, la ingeniería de Floquet nos ha permitido diseñar teóricamente la cadena de dímeros en una cadena formada por puntos cuánticos.

El modelo SSH de la cadena de dímeros, descrito anteriormente, es un modelo teórico con acoplo túnel a primeros vecinos, lo cual puede no ser realista en un sistema físico donde el acoplo entre átomos distantes sea importante. Además, el modelo ideal SSH está protegido frente al desorden en el túnel, o enlace entre los átomos, siempre que este sea a primeros vecinos. En un trabajo reciente hemos simulado, mediante ingeniería Floquet, es decir, mediante el diseño de un protocolo de pulsos eléctricos periódicos en el tiempo, una cadena de dímeros en una cadena de puntos cuánticos, incluyendo, no solo los primeros vecinos como en el modelo SSH, sino también aquellas interacciones de largo alcance que mantienen la protección frente al desorden, es decir aquellas en las que el sistema mantiene la simetría quiral. Éstas son las interacciones que conectan átomos distintos de la celda unidad, es decir primeros y terceros vecinos, primeros y quintos vecinos etc... Por el contrario, mediante el protocolo propuesto, se han eliminado aquellas que conectan átomos equivalentes de la celda unidad, como segundos vecinos o cuartos vecinos, las cuales rompen la simetría quiral del sistema y la protección frente al desorden [130].

Además, los acoplos entre átomos distintos de la celda unidad a largo alcance, no solo mantienen la simetría quiral, sino que dan lugar a la aparición de nuevas fases topológicas con invariantes que no solo incluyen los valores cero (trivial) y uno, como en el caso del hamiltoniano SSH a primeros vecinos, sino números enteros  $n$ , que dependen del número de vecinos considerado y que corresponden, a un número  $n$  de pares de estados protegidos. Estos nuevos pares de estados protegidos frente al desorden dan lugar a nuevas propiedades dinámicas de los electrones.

El hamiltoniano de una cadena de puntos cuánticos con acoplo de largo alcance, es decir entre vecinos distantes, en presencia de un campo eléctrico AC se escribe como:

$$H(t) = \sum_{|i-j| \leq R} J_{ij} c_i^\dagger c_j + \sum_i A_i f(t) c_i^\dagger c_i \quad (21)$$

donde:

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{if } 0 \leq t < T/2 \\ 1 & \text{if } T/2 \leq t < T \end{cases} \quad (22)$$

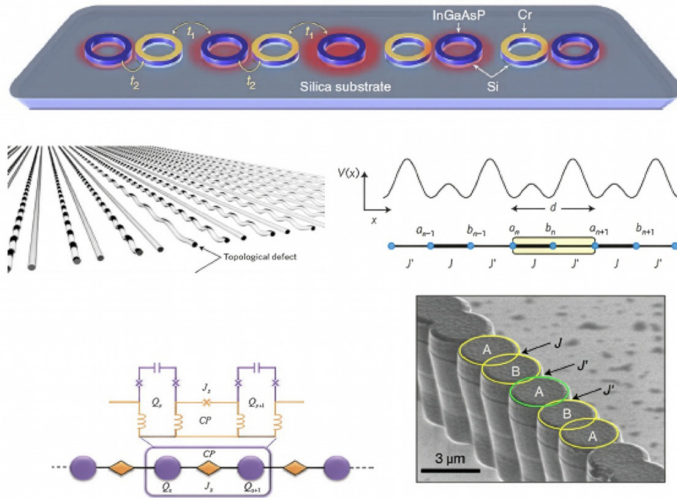
Siendo  $T$  el periodo del pulso aplicado y  $R$  el número de vecinos considerados.

En el régimen de alta frecuencia, los acoplos entre puntos cuánticos se renormalizan por el campo [130]:

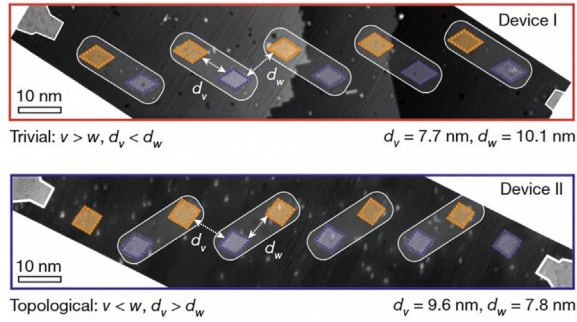
$$J_{ij} \rightarrow \tilde{J}_{ij} = J_{ij} \frac{i\omega}{\pi(A_i - A_j)} [e^{-i\pi(A_i - A_j)/\omega} - 1] \quad (23)$$

Estos acoplos tienen ceros periódicamente espaciados cuando:

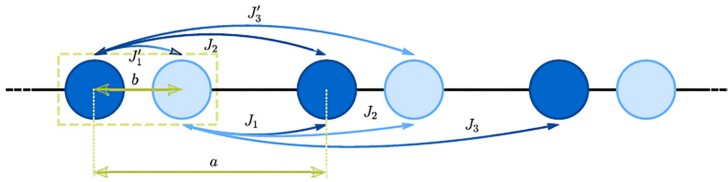
$$A_i - A_j = 2\omega q, q = 0, 1, 2 \dots$$



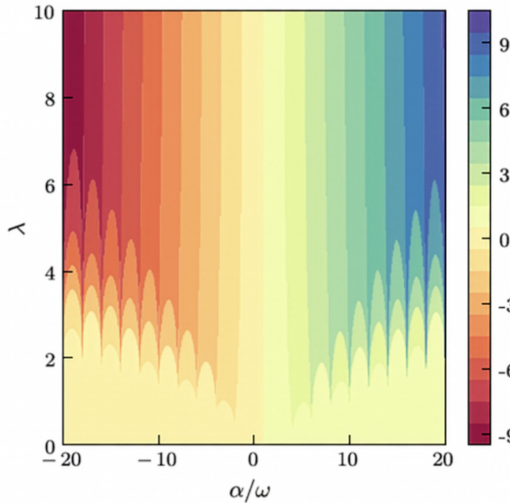
**Figura 34:** Diferentes plataformas en las que se han implementado las cadenas de dímeros: Imagen superior: Cadena topológica de microláseres en una plataforma híbrida de silicio [143]; Imagen central izquierda: Cadena de guías de onda [126]; derecha: Átomos fríos [40]; Imagen inferior izquierda: Cadenas de bits cuánticos superconductores [144]; derecha: Cavidades fotónicas [128].



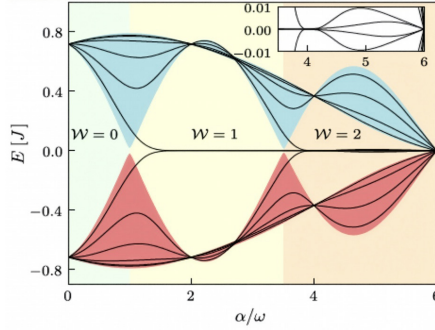
**Figura 35:** Implementación experimental de una cadena de dímeros formada por átomos de fósforo en silicio, mediante espectroscopía túnel [127].



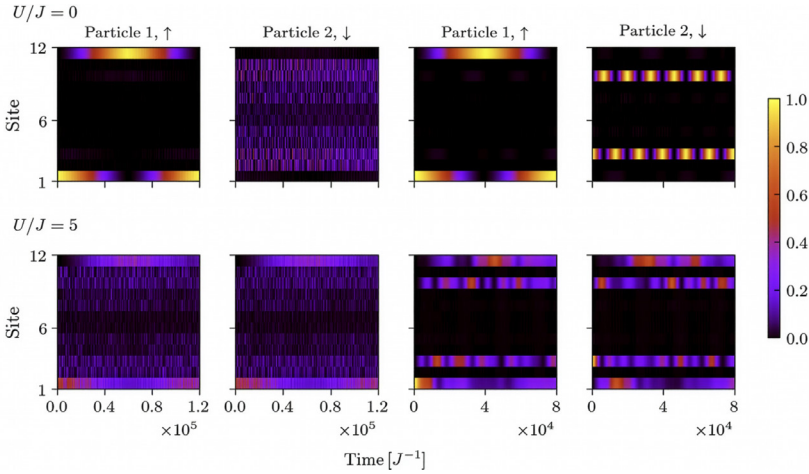
**Figura 36:** Cadena de dímeros con interacciones de largo alcance.



**Figura 37:** Invariante topológico como función de la amplitud del campo eléctrico dividida por la frecuencia y de la longitud  $\lambda$  de decaimiento de las amplitudes de túnel entre átomos de la cadena de dímeros [130].



**Figura 38:** Espectro de quasi-energías de una cadena de doce puntos cuánticos dimerizada mediante el protocolo de pulsos descrito en el texto, en el que se incluye el acoplo a primeros y terceros vecinos. El acoplo a segundos, cuartos y demás vecinos pares se hace cero mediante este protocolo. El invariante topológico (Winding number o fase de Zak) está representado en cada región del espectro.  $W=1$  corresponde a la presencia de un par de estados de borde topológicos en el centro de la región prohibida de energía,  $W=2$  corresponde a dos pares de estados topológicos que están localizados, uno en los dos extremos y el otro par en el tercer sitio de la cadena comenzando por la izquierda y por la derecha. La energía de cada par de estados es distinta, como se muestra en la parte superior de la figura, y es esa diferencia de energía la que determina la dinámica de la partícula que ocupa el correspondiente par.



**Figura 39:** Dinámica de la ocupación de los distintos puntos cuánticos de una cadena de doce puntos cuánticos dimerizada mediante un campo  $ac$  en donde se alojan dos electrones. Las cuatro figuras de la izquierda corresponden al caso en el que  $W=1$  (dos estados de borde) y las de la derecha al caso en que  $W=2$  (cuatro estados topológicos).  $U/J=0$ : Inicialmente un electrón ocupa el primer y otro el tercer punto cuántico de la cadena. Cuando  $W=1$ , el primero oscila directamente entre los bordes de la cadena, sin embargo el otro se propaga a través de los estados de volumen del sistema. Cuando  $W=2$ , el segundo electrón se encuentra inicialmente también en un estado topológico y oscila entre los dos estados del par con una frecuencia distinta que la otra partícula. Cuando se incluye la interacción de

Coulomb entre los electrones:  $U/J=5$ , la dinámica de las dos partículas está correlacionada ( $U$  es la interacción entre partículas y  $J$  el acoplo entre los átomos).

Imponiendo esta condición a la diferencia de las amplitudes del campo entre átomos vecinos  $i$  y  $j$  tales que:  $|i - j| = 2n, n = 1, 2, \dots$ , los acoplos que rompen la simetría quiral, y por tanto la protección topológica, se hacen cero. Además, diseñando las amplitudes como:

$$\begin{aligned} A_{2n} &= n(\alpha + \beta) \\ A_{2n-1} &= n(\alpha + \beta) - \alpha \\ n &= 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \tag{24}$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son parámetros mediante los cuales definimos las amplitudes del campo en cada átomo o punto cuántico, la cadena de monómeros se dimeriza. La figura 38 muestra el espectro de cuasienergías como función de los parámetros del campo. En las regiones con el invariante topológico distinto de cero aparecen estados protegidos en el centro de la región prohibida de energía. Los estados de borde forman una superposición y permiten transferir una partícula, localizada inicialmente en un extremo de la cadena, directamente al otro extremo (oscilaciones Rabi). Dicha transferencia es robusta frente al desorden que puedan sufrir las barreras túnel. La fig. 39 muestra la dinámica de dos partículas, una inicialmente localizada en el sitio 1 de la cadena y otra en el 3. Cuando hay un par de estados en el borde ( $W=1$ ), solo la partícula en el sitio 1 oscila entre los bordes sin ocupar el volumen, mientras que la otra se propaga por el resto de la cadena. Cuando hay dos pares de estados protegidos ( $W=2$ ), cada partícula oscila con distinta frecuencia en las regiones donde se localizan los estados protegidos. Cuando las partículas interactúan entre sí, mediante la interacción de Coulomb, la dinámica de ambas partículas está correlacionada.

Sin embargo, este mecanismo de transferencia tiene dos limitaciones importantes: una es que la transferencia no está controlada, es bidireccional. Otra limitación importante es la escala de tiempo de la transferencia, que es larga, ya que tiene lugar mediante el solape de los estados localizados en los extremos de la cadena. Dichos estados decaen exponencialmente hacia el interior de la misma y por tanto, al aumentar la longitud de la cadena, el tiempo de transferencia aumenta exponencialmente. Debido a ello, otros procesos como son las fluctuaciones de la energía de los niveles, o de la carga en los puntos cuánticos, con tiempos de decoherencia y relajación mas cortos que los de transferencia a través de la cadena, reducen la fide-

lidad de la misma. Veremos a continuación que una manera de solventar este problema es el incluir en el sistema lo que se conoce como paredes de dominio topológicas, las cuales permiten acelerar la transmisión de información.

Por otro lado, es necesario controlar la transferencia de la información y poder realizarla de una forma unidireccional. Para ello, se pueden utilizar protocolos adiabáticos o protocolos STA, como discutiremos a continuación.

## **6. TRANSFERENCIA DE INFORMACIÓN CUÁNTICA EN SISTEMAS TOPOLÓGICOS DE BAJA DIMENSIÓN**

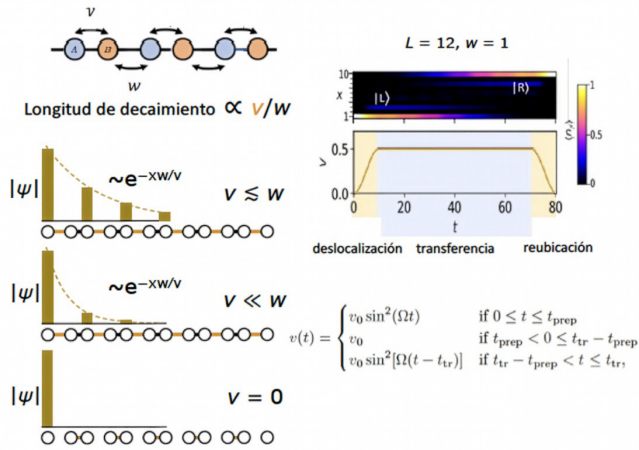
El trabajo teórico de Stace [131], en el año 2004, se basó en importar al Estado Sólido las ideas propuestas por I. Cirac y P. Zoller, en su famoso artículo en 1997 [132], en el que se proponía la transferencia de información cuántica entre dos átomos mediante fotones. En la propuesta de Stace, eran los puntos cuánticos los que albergaban los bits cuánticos, y los electrones, en lugar de los fotones, los autobuses de información. Stace propuso que la transferencia tuviera lugar a través de un estado protegido, por su topología, frente al desorden producido por las impurezas: un estado quirral que se propaga por los bordes de una barra Hall en el régimen del efecto Hall Cuántico.

En base a esta idea de Stace y colaboradores, es natural preguntarse si es posible investigar e implementar otros sistemas con propiedades topológicas no triviales para transferir la información con fidelidad y de una manera robusta.

La respuesta, positiva, se basa en la reciente implementación, en los últimos diez años, de cadenas y redes de baja dimensión en distintas plataformas: cristales fotónicos, átomos fríos, bits cuánticos superconductores, iones atrapados o átomos de fósforo en silicio, que simulan sistemas como son los aislantes topológicos (figs. 34 y 35).

En la sección anterior se ha descrito la dinámica bidireccional de una partícula a través de un estado protegido directamente entre los bordes de la cadena de dímeros. Sin embargo, es necesario controlar la transferencia, así como reducir el tiempo de la misma, que crece exponencialmente con la longitud de la cadena.

Una manera de controlar la transferencia y hacerla unidireccional es mediante protocolos como el mostrado en la fig. 40: Inicialmente, en una cadena de dímeros, modelizada, por simplicidad, mediante el modelo a primeros vecinos SSH, se localiza la partícula en el átomo de la izquierda, desacoplando éste del resto de la cadena. Incrementando lentamente la intensidad del acoplo, hasta un cierto valor, se produce la transferencia directa de la partícula hacia el otro átomo extremo, donde permanecerá al desconectar adiabáticamente el acoplo del átomo del otro extremo con su vecino. De esta manera, mediante este tipo de protocolos, es posible controlar la dinámica de la partícula.



**Figura 40:** Transferencia de una partícula entre los extremos de una cadena de dímeros. El acoplo entre puntos cuánticos se modifica adiabáticamente, mediante el protocolo indicado en la parte inferior de la figura. De esta manera, se produce la transferencia unidireccional de la partícula.

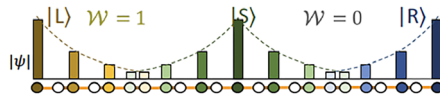
Sin embargo, queda aun un problema por solventar para que este mecanismo de transferencia sea eficaz y robusto frente a la decoherencia: el reducir el tiempo en que ésta tiene lugar a tiempos mas cortos de los asociados a los distintos mecanismos de decoherencia que puedan afectar al sistema.

### 6.1. Dominios Topológicos

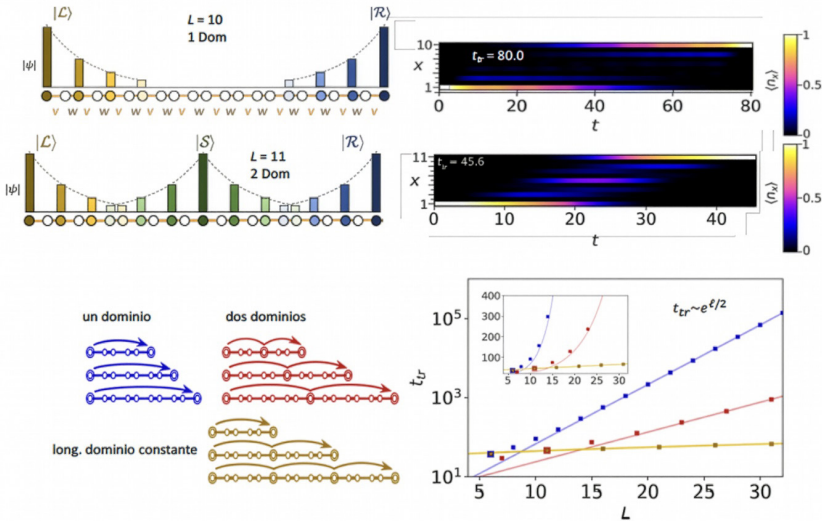
Una manera de acelerar la transmisión de información en los sistemas topológicos es la implementación en los mismos de dominios topológicos, los cuales están separados por una pared de dominios. Para su implementación, y siguiendo con el aislante topológico más sencillo, la cadena de dímeros, se puede demostrar que la unión de dos cadenas en fases topológicas distintas, y con un número impar de átomos, conlleva a la formación de una región central, denominada pared de dominio donde aparece un estado topológico que se solapa con los estados protegidos de los bordes y facilita la transferencia de información (fig. 41). Siguiendo un protocolo adiabático para el control de la transferencia, es posible, mediante la implementación de dominios, reducir significativamente el tiempo de transferencia. Un ejemplo se muestra en la fig. 42, donde se detalla el tiempo requerido para distinto número de dominios en el sistema.

Un análisis detallado muestra que el tiempo de la transferencia depende exponencialmente de la longitud del dominio y no de la longitud de la cadena, es decir, para un número fijo de átomos de ésta, en general, la transferencia es más rápida a igual número de sitios, para un mayor número de dominios [133] (trabajo en colaboración con el Dr. Juan Zurita y el Dr. Charles Creffield).

Una vez mostrado el cómo es posible implementar la cadena de dímeros en distintas plataformas (figs. 34 y 35) y su potencial para transferir información, discutiremos otras redes cuasi-unidimensionales que presentan además otros fenómenos cuánticos fascinantes como son las interferencias cuánticas magnéticas.



**Figura 41:** Dos cadenas de dímeros en fases topológicas distintas se unen, creando la pared de dominios donde se genera un estado robusto frente al desorden de los acoplos, que se solapa con los estados de los extremos, y permite acelerar la transmisión.

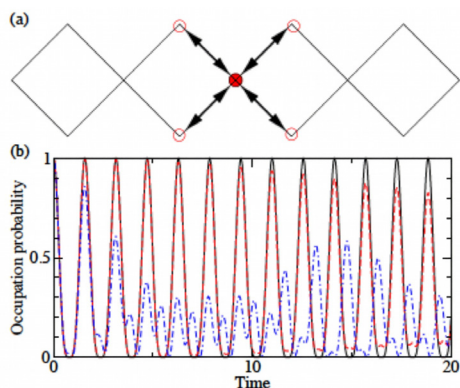


**Figura 42:** Comparación del tiempo requerido (en unidades arbitrarias) para la transferencia de una partícula cuando solo hay un dominio (arriba), o dos dominios (centro). En la parte inferior se compara el tiempo de transferencia en escala logarítmica como función del número de sitios, cuando hay un solo dominio, dos dominios o cuando la longitud del dominio se mantiene constante y aumenta el número de los mismos al aumentar el número de sitios. La transferencia depende exponencialmente de la longitud de los dominios [133].

## 6.2 Interferencias magnéticas

En algunas redes bipartitas (es decir aquellas en las que los átomos de una subred de la celda unidad solo se acoplan con átomos de la otra subred), se produce el efecto de localización denominado “Atrapamiento Aharonov Bohm” (AAB) (“Aharonov-Bohm caging” en inglés). Dicho efecto es un fenómeno mediante el cual las partículas se localizan en regiones específicas de la red y en el que la geometría de la misma y la presencia de un campo magnético juegan un papel fundamental. Este efecto fue propuesto por Vidal a finales de los años 90 [53].

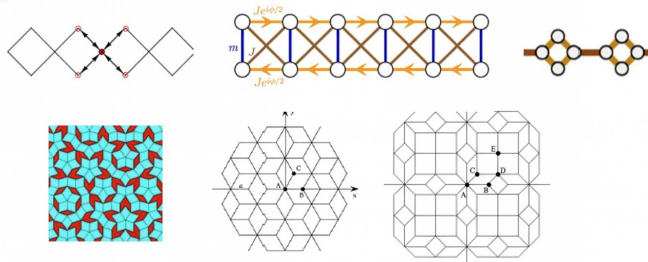
Esta localización tiene lugar cuando el campo magnético produce un cambio de fase en la función de onda de la partícula, dando lugar a una interferencia destructiva que impide que la partícula se propague por toda la red, quedando localizada dentro de un área confinada o “jaula”, cuando el flujo de campo magnético adquiere el valor de  $\pi$ . El efecto AAB está estrechamente relacionado con el concepto de bandas planas en los espectros de energía, lo que significa que la energía de las partículas permanece constante independientemente de su momento. En los sistemas de bandas planas, el desorden puede mejorar la movilidad de las partículas, un fenómeno conocido como transición inversa de Anderson, que, al contrario de la localización de Anderson conocida en la literatura y mediante la cual, el desorden induce



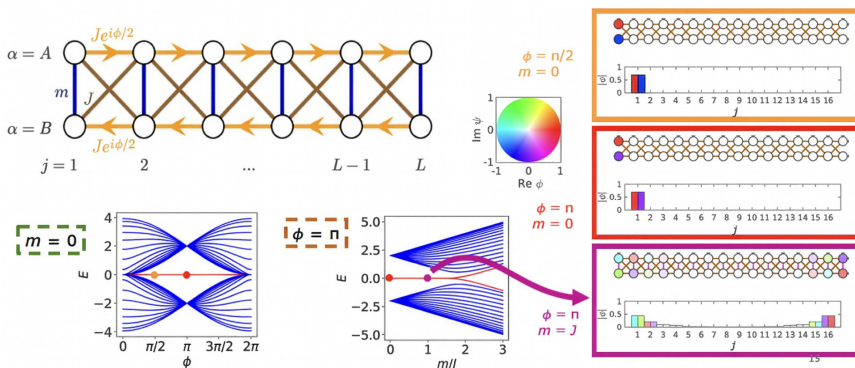
**Figura 43:** Esquema de una cadena de rombos en la que cada rombo está atravesado por un flujo  $\pi$ . Una partícula situada inicialmente en el sitio central (círculo rojo) oscilará entre su posición inicial y sus primeros vecinos (círculos vacíos) sin propagarse a lo largo de la red. La región delimitada por los círculos forma la jaula donde se confina la partícula. La figura b) inferior, muestra la probabilidad de ocupación de dos partículas para distintas intensidades de la interacción entre las mismas. La línea negra muestra las oscilaciones periódicas que reflejan el efecto AAB, en el caso en el que no hay interacción, la línea roja muestra el caso de baja interacción entre las partículas ( $U=0.1J$ , donde  $J$  es el acople entre los sitios de la red). En este caso, las oscilaciones decaen, el confinamiento no es completo y la partícula tiene una probabilidad finita de ocupar otros sitios de la red. La línea discontinua en azul muestra el caso en el que la interacción es alta,  $U=J$ , y las oscilaciones decaen rápidamente y de forma irregular [136].

localización e inhibe el transporte, el desorden en estos sistemas aumenta la movilidad. Este efecto, el aumento de movilidad mediante el desorden se observó recientemente en una red de átomos ultrafríos [134].

Además, la interacción de Coulomb entre partículas destruye el efecto de localización AAB y las bandas se vuelven dispersivas, efecto que ha sido recientemente observado en redes ópticas [135]. La fig 43 muestra el efecto de la interacción en la localización de una partícula en una red de rombos. El fenómeno AAB en sistemas con partículas interactuantes se puede recuperar mediante la aplicación de un campo periódico en el tiempo [136], otro ejemplo más que muestra la versatilidad de la ingeniería de Floquet. Redes que presentan este efecto además de la cadena de rombos, son, entre otras, la red “necklace”, la red octogonal, la red Penrose o la red  $T_3$  (fig. 44). Dichas redes han sido implementadas en distintas plataformas físicas: cristales fotónicos, circuitos superconductores, o átomos fríos.



**Figura 44:** Ejemplos de redes que presentan el efecto de localización de Aharonov-Bohm, AAB: en la parte superior de izquierda a derecha: la cadena de rombos, la escalera de Creutz, la cadena “necklace”. En la parte inferior: la red de Penrose, la red  $T_3$  y la red octogonal.



**Figura 45:** Escalera de Creutz. Un flujo de campo magnético atraviesa la red dando lugar a fases magnéticas en los acoplos. Cuando la red es finita,  $m=0$ , y el flujo magnético es  $\pi$  o  $\pi/2$ , se forman estados llamados compactos que se localizan totalmente en el extremo. Ello permite preparar el estado inicial en el mismo. Cuando el acoplo vertical entre las cadenas,  $m$ , es finito, los estados en los bordes se hibridan. Es posible por tanto, aumentando adiabáticamente la intensidad de  $m$ , transferir directamente una partícula, inicialmente en el estado localizado hasta el último sitio en el extremo opuesto.

La escalera de Creutz (“Creutz Ladder”, en inglés o CL), es un modelo de red que consiste en dos cadenas unidimensionales de sitios que se acoplan entre sí mediante acoplos diagonales y verticales y que está atravesada por un flujo de campo magnético. Este modelo, propuesto por Creutz [137], es conocido por sus propiedades topológicas que en combinación con el fenómeno de “atrapamiento” de AB dan lugar a efectos exóticos y muy interesantes. El hamiltoniano que representa la red CL, atravesada por un flujo de campo magnético, se puede escribir como:

$$\mathcal{H} = - \sum_{j=1}^{L-1} \sum_{\sigma=A,B} \left[ J \xi_{j,\sigma} c_{j+1,\sigma}^\dagger c_{j,\sigma} + J c_{j+1,\bar{\sigma}}^\dagger c_{j,\sigma} + \text{h.c.} \right] + \sum_{j=1}^L \sum_{\sigma=A,B} s_\sigma \epsilon_j c_{j,\sigma}^\dagger c_{j,\sigma} \quad (25)$$

donde  $j=1, \dots, L$  denota las diferentes plaquetas,  $\sigma=A, B$  se refiere a cada cadena horizontal (figs. 44 y 45),  $\bar{A}=B$  y  $\bar{B}=A$ ,  $\xi_{j,\sigma} = e^{i s_\sigma \phi_j / 2}$ ,  $s_\sigma = \delta_{\sigma, \bar{A}} - \delta_{\sigma, \bar{B}}$ ,  $\phi$  el flujo magnético en cada plaqueta,  $2\epsilon_j$  la diferencia de energías entre los sitios de las dos cadenas, y  $J$  la amplitud de los acoplos.

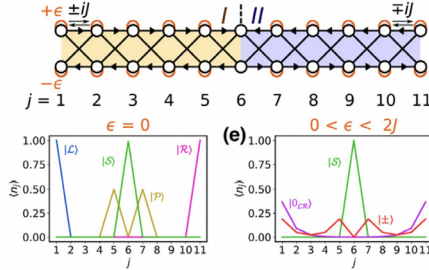
El modelo presenta distintas fases topológicas, con estados de borde protegidos por diversas simetrías, como la simetría quiral y la simetría partícula-hueco. La topología se puede modificar cambiando los distintos parámetros, modificando por ejemplo las amplitudes de túnel entre los sitios de la red, el flujo magnético o la diferencia entre los niveles de energías de las dos cadenas de sitios que forman la red.

Ello le confiere una gran riqueza de fases topológicas y estados protegidos, lo que permite diseñar la mejor estrategia para transferir información a través de la misma. Además, sus características la convierten en una herramienta valiosa para experimentos de simulación cuántica.

La figura 45 representa los estados de borde en los extremos de la red CL. Debido a las interferencias magnéticas que producen el efecto AAB, los estados están localizados en los sitios extremos, lo que facilita la preparación del estado inicial. Al cambiar adiabáticamente un parámetro, por ejemplo el acoplo vertical entre las cadenas, los estados se solapan y se produce la transferencia entre sitios distantes.

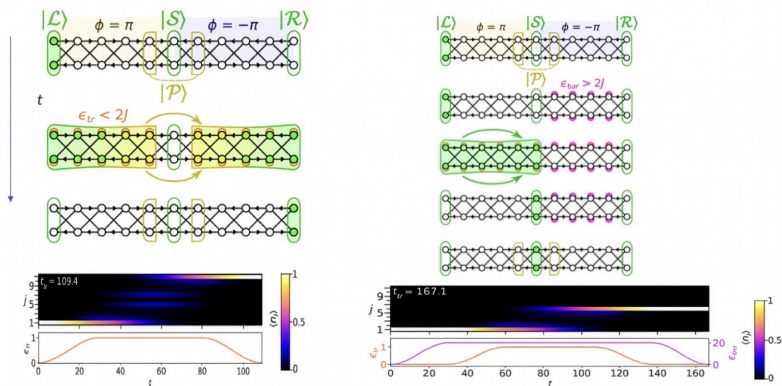
Para conseguir mayor velocidad en la transferencia a través de la red Creutz Ladder se pueden implementar, como se ha discutido anteriormente para la cadena de dímeros, dominios topológicos uniendo dos redes en distintas fases topológicas. Esto se puede conseguir aplicando un campo magnético en direc-

ción opuesta en cada dominio. En este caso, los invariantes topológicos tienen los valores 1 y -1 y la diferencia de ambos, 2, es el número de estados protegidos en la pared de dominio. En presencia de una diferencia finita de energía entre los sitios de las dos cadenas que forman la red, los estados topológicos de los extremos se hibridan con uno de los estados de la pared mientras el otro queda invariante: a través del estado que se hibrida con los de los extremos se produce la transferencia de la información entre los mismos (fig. 46).



**Figura 46:** Dos redes finitas en fases topológicas distintas dan lugar a una pared de dominios que alberga dos estados robustos. El campo magnético que atraviesa al sistema tiene sentido opuesto en cada red, dando lugar a un flujo magnético de  $\pi$  y  $-\pi$ .  $\epsilon$  es la diferencia de energía de los sitios de las dos cadenas. En la imagen inferior se muestran los estados topológicos en los extremos y en la pared de dominios.  $|J|$  es el valor absoluto de los acoplos entre sitios,  $j$  el sitio en la red y  $\langle n_j \rangle$ , la ocupación del sitio  $j$ . Cuando  $\epsilon$  es finito, los estados L y R se hibridan con el estado P.

La figura 47 muestra dos ejemplos para la transferencia de una partícula entre los extremos de una red CL con dos dominios. En el primero, la transferencia tiene lugar entre los extremos de la red y en el segundo, entre un extremo y la pared de dominios.



**Figura 47:** Fig izquierda: la partícula se transfiere mediante la hibridación de los estados de los extremos con uno de los estados de la pared de dominio, al aplicar una diferencia entre la energía de los niveles de las dos cadenas. En la fig. de la derecha la partícula se transfiere a la pared de dominio [133].

### 6.3 Bits cuánticos conectados a una red topológica

Con el objetivo de generar entrelazamiento entre bits cuánticos en regiones distantes, se ha propuesto recientemente el conectar bits cuánticos a las paredes de dominio y a los extremos de una red topológica [138–141].

Las redes fotónicas han experimentado un gran avance en la implementación de diversos sistemas topológicos con multidominios, en particular modelos basados en la cadena de dímeros. Recientemente se ha implementado la interfase entre un emisor, en concreto un centro de color, que es el bit cuántico en este caso, y una red fotónica de cavidades [139]. Las figs. 48 y 49 muestran un esquema del sistema propuesto. El objetivo es el modular el acoplo de los bits cuánticos a los extremos de la red topológica, para producir entrelazamiento entre los bits cuánticos lejanos. Incluir además, paredes de dominios en donde se acoplan bits cuánticos permite crear redes con alta conectividad, con el objetivo de realizar operaciones coherentes de muchos bits cuánticos. Esto siempre condicionado a que los tiempos de las operaciones sean más cortos que los asociados a los procesos de decoherencia y disipación.

Un ejemplo concreto de este sistema, implementado experimentalmente, es el que se muestra en la figura 49, una modalidad de la red SSH, la red stub-SSH, formada por cavidades fotónicas, en donde aparecen cavidades adicionales en los extremos. El hamiltoniano que representa al sistema es:

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_\gamma + \mathcal{H}_Q + \mathcal{H}_{Q\gamma} \quad (26)$$

donde  $\mathcal{H}_\gamma$  describe el hamiltoniano de la red fotónica,  $\mathcal{H}_Q$  el hamiltoniano del bit cuántico y  $\mathcal{H}_{Q\gamma}$  el hamiltoniano de interacción entre ambos. Esta red tiene dos átomos en su celda unidad, su hamiltoniano se puede escribir como:

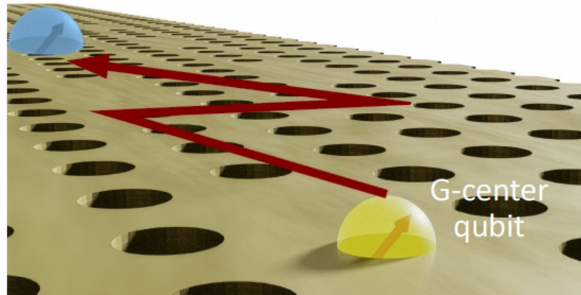
$$\mathcal{H}_\gamma = -u_0 \left( b_1^\dagger a_1 + a_1^\dagger b_1 \right) - \sum_{k=1}^N \mathcal{H}_\gamma^{(k)} \quad (27)$$

donde  $\mathcal{H}_\gamma^{(k)}$  es el hamiltoniano que describe el dominio  $k$  y su expresión es diferente para valores pares o impares (su expresión detallada se recoge en [142]). Los bits cuánticos pueden estar acoplados a una o más cavidades. El hamiltoniano del acoplo se puede escribir, (en la aproximación RWA, “Rotating Wave Approximation” [34]) como:

$$\mathcal{H}_{Q\gamma} = \sum_{k=0}^{p-1} g_k c_{j(k),\alpha(k)} |s_u\rangle \langle s_l| + h.c. \quad (28)$$

donde  $j(k)$ ,  $\alpha(k)$  representan la cavidad a la que el bit cuántico está acoplado ( $j$  la celda unidad y  $\alpha$  la subred) y  $k$  el bit cuántico correspondiente,  $p$  el

número de bits cuánticos,  $|s_u\rangle$  y  $|s_l\rangle$  son el estado excitado y el de mas baja energía respectivamente. Esta red presenta dominios topológicos alternantes caracterizados por invariantes 1 y -1. En cada pared de dominio hay por tanto dos estados topológicos, uno de ellos participa en la transferencia y el otro forma la interfase con el bit cuántico. Además, en los extremos hay también estados protegidos. Aplicando los protocolos discutidos anteriormente, es posible, antes de acoplar los bits cuánticos, transferir la información entre los extremos o entre los extremos y los dominios. Dado que la superposición efectiva entre cada par de estados depende de los acoplos entre ellos, se puede diseñar un protocolo de transferencia entre los dos extremos mediante la modulación de los acoplos. Utilizando los pulsos apropiados, un fotón inicialmente en el estado de la izquierda siempre puede terminar en el extremo derecho, como se discute en [142]. Este proceso de transferencia, al que nos referiremos como T, siempre está topológicamente protegido frente al desorden en los acoplos y puede establecerse entre dos límites de dominio cualesquiera. Estos pulsos permiten localizar completamente los estados inicial y final de la transferencia en una sola cavidad, para que, posteriormente, el acoplo entre el bit cuántico y el extremo correspondiente sea lo mas perfecto posible. Iniciando el bit cuántico en el estado excitado y acoplándolo mediante un pulso a la cavidad adyacente, es posible, cuando esta se acopla adiabáticamente al resto de la cadena, generar entrelazamiento entre los bits cuánticos distantes.

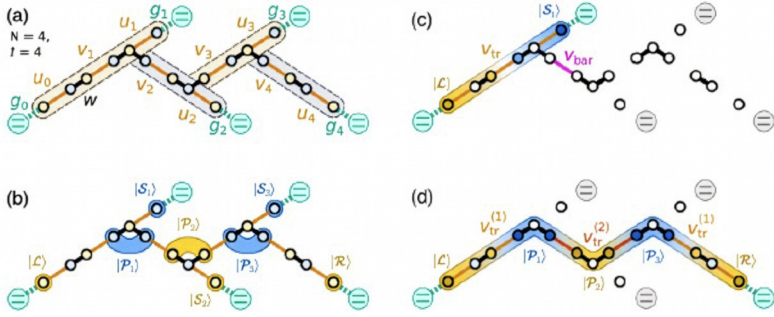


**Figura 48:** Un centro de color o bit cuántico, acoplado a otro distante mediante una red topológica de cavidades fotónicas. [139].

#### **6.4 Generación de estados entrelazados entre bits cuánticos distantes**

A continuación, se mostrará como ejemplo, cómo preparar un estado de máximo entrelazamiento entre dos bits cuánticos, es decir, un estado de Bell, utilizando este sistema topológico fotónico multidominio. Para explicar el protocolo, es necesario definir una notación. Sea  $n_d$  el número total

de dominios y  $l$  el número de sitios por dominio. Como se explicó anteriormente, los bits cuánticos se ubican en los extremos y en las paredes de dominio. Denotaremos  $R$  y  $L$  los bits cuánticos más a la derecha y más a la izquierda de la red respectivamente. Describiremos el protocolo solo para estos bits cuánticos que se acoplan a los extremos, dado que el protocolo para cualquier otro par es análogo.



**Figura 49:** Red de cavidades fotónicas con cuatro dominios. Los bits cuánticos (en verde) se acoplan a las cavidades en los extremos y en las paredes de dominio con una amplitud de acoplo  $g_k$ . Las amplitudes de los enlaces que se manipulan y son los parámetros de control en la transferencia se muestran en naranja:  $u$  son los enlaces extremos y  $v$  el resto. (b) Se muestran los estados del sistema protegidos por la topología: los estados  $S$  y  $P$  se forman en cada pared de dominio, los estados en fronteras de dominio impares (pares) están localizados en la subred B (A). (c) Transferencia entre el extremo de la izquierda y la primera pared de dominio. El parámetro  $v_{tr} < w$  permite la transferencia, mientras que cuando  $v_{bar} \gg w$  la transferencia finaliza. (d) Transferencia entre los extremos. Los estados  $P$  participan en la transferencia. Dos pulsos diferentes se aplican para los dominios extremos  $v_{tr}^{(1)}$  y el central  $v_{tr}^{(2)}$ , lo que permite alcanzar una gran fidelidad en la transferencia.

Los estados fundamental y excitado del bit cuántico  $L$  son  $|0\rangle_L$  y  $|1\rangle_L$  respectivamente, y nos referiremos a su acoplamiento con la cavidad fotónica adyacente como  $g_L$ . Además, dado que se ha reportado experimentalmente la emisión coherente de un solo fotón para bits cuánticos de centro de color [139], es realista considerar que los pulsos  $\pi$  y  $\pi/2$  son operaciones accesibles entre el bit cuántico  $L$  y su cavidad adyacente. Usamos una notación similar para el bit cuántico  $R$ . El estado de vacío de la red fotónica es  $|0\rangle_\gamma$ . La transferencia topológica de una excitación fotónica desde la cavidad más a la izquierda a la más a la derecha a través de los estados de borde es  $T_{LR}$ . Con esta notación, describimos el protocolo que prepara un estado de Bell a partir de un estado separable, como se muestra en la fig 50: (i) Preparar el estado inicial  $|1\rangle_L \otimes |0\rangle_R \otimes |0\rangle_\gamma$  (ii) Ejecutar

un pulso  $(\pi/2)_{01}^{(L)}$  de modo que el bit cuántico excitado emita la mitad de su amplitud de probabilidad a la red fotónica. Nótese que esto ocurre con una fase relativa  $i$ . (iii) Producir una transferencia completa  $T_{LR}$  de modo que la amplitud fotónica se encuentre ahora en la cavidad más a la derecha. Nótese que la fase relativa cambia de nuevo. (iv) Ejecutar un segundo pulso  $\pi$  en  $g_R$ , es decir,  $\pi_{01}^{(R)}$ . El estado final del bit cuántico será:

$$|\Phi\rangle_{LR} = \frac{1}{\sqrt{2}} [|10\rangle + e^{i\theta}|01\rangle] \quad (29)$$

donde la fase relativa es:  $e^{i\theta} = [(-1)^{\ell/2+1}i]^{n_d}$ , siendo  $n_d$  el número de dominios, y  $\ell$  la longitud de los dominios.

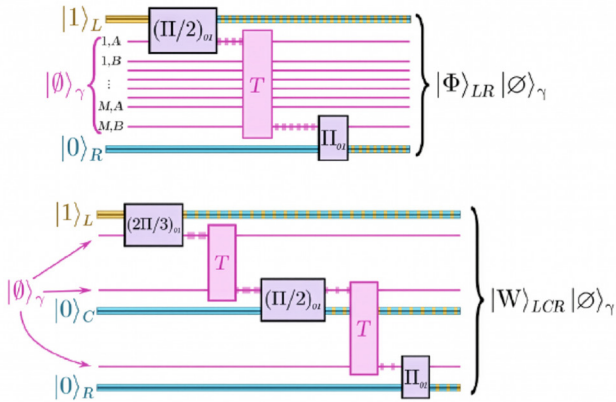
Si bien este sistema, en el caso ideal, genera entrelazamiento, es necesario explorar el impacto del desorden para considerar el sistema como una plataforma cuántica escalable. Para ello, se recurre a la concurrencia, una medida del entrelazamiento [57]. Un análisis detallado del desorden muestra que la presencia de dominios en el sistema acelera la transferencia y por tanto el sistema se ve menos afectado por el desorden. Esto se traduce en que, en general, la concurrencia es mayor y cae más lentamente del valor 1 como función del desorden en el caso de sistemas con multidominios que en el caso de un solo dominio [142].

La conectividad de la red fotónica topológica abre la puerta a otros protocolos que, en lugar de entrelazar pares arbitrarios de bits cuánticos, entrelazan subconjuntos mayores de estos.

Este enfoque muestra las ventajas de esta plataforma quasi-unidimensional a la hora de escalar el número de bits cuánticos. Para demostrarlo, se propusieron protocolos que preparan estados entrelazados multipartitos. Un ejemplo de ello son los estados  $W$  y  $GHZ$  para tres bits cuánticos [145]. La figura 50 muestra la preparación de un estado  $W$  para tres bits cuánticos:

$$|W\rangle_{LCR} = \frac{1}{\sqrt{3}} [|100\rangle - i|010\rangle + |001\rangle] \quad (30)$$

En resumen, se ha considerado una red fotónica fácilmente escalable en silicio, con bits cuánticos acoplados implementados con impurezas, en el que se pueden utilizar protocolos topológicos multi-dominio para generar entrelazamiento multi-partito de forma rápida y fiable.



**Figura 50:** Protocolos de preparación de los estados de dos bits cuánticos entrelazados de Bell (figura superior) y de tres bits cuánticos,  $W$  (figura inferior). Los estados del bit cuántico se representan en azul (estado fundamental, 0) o amarillo (estado excitado, 1). Las cavidades se representan con líneas finas rosas, con un sombreado adicional si hay un fotón presente. Las superposiciones se representan con líneas discontinuas.

La protección topológica puede ayudar a superar algunos de los principales problemas asociados a estas plataformas para niveles crecientes de desorden. La versatilidad de la configuración propuesta y su eficacia en la distribución del entrelazamiento abren la puerta a aplicaciones de información cuántica, como la generación de estados altamente entrelazados para su uso como recurso en la computación cuántica. Esto constituye una vía interesante de investigación con muchas posibilidades y mucho recorrido.

Los sistemas analizados anteriormente tienen la funcionalidad de transferir información y se basan en protocolos secuenciales, en los que el bit cuántico inicial se acopla a una cavidad aislada que a posteriori, y mediante los procesos adiabáticos descritos, se acopla al resto de la red de cavidades transfiriendo la información. Finalmente, la cavidad del extremo se acopla únicamente al bit cuántico con el que se produce el entrelazamiento con el bit cuántico inicial.

Muy distinto es el caso en el que los emisores o bits cuánticos se acoplan permanentemente a una red de cavidades fotónicas con topología no trivial. Este es un sistema de interacción de muchos cuerpos que se enmarca en un reciente campo de investigación fascinante: la Fotónica Topológica. En este campo, en colaboración con el Dr. M. Bello, el Prof. I. Cirac y el Prof. A. González Tudela, se investigaron las propiedades de un sistema que consistía en un baño de cavidades fotónicas dimerizadas, acoplado a uno o varios

emisores. Cuando la frecuencia de los emisores se encuentra dentro de la región prohibida de energía ("gap") de la red topológica, surge un estado fotónico ligado quiral, es decir, ubicado en un solo lado (derecho o izquierdo) del emisor. En presencia de varios emisores, este estado ligado media las interacciones entre ellos, lo que puede dar lugar a fases exóticas de muchos cuerpos. Además, cuando la transición óptica de los emisores resuena con las bandas, aparecen propiedades de dispersión no convencionales y diferentes estados super/subradiantes según la topología de la banda [146].

## **7. RESUMEN**

Este discurso se ha centrado en discutir y dar una visión de algunos problemas que están enmarcados en las tecnologías cuánticas, y en los que he trabajado a lo largo de los años con mis colaboradores.

La primera parte del discurso, la introducción, ha resumido brevemente los comienzos de la mecánica cuántica y también el papel de las mujeres en esta disciplina.

A continuación se han discutido las transiciones de fase cuánticas, donde las fluctuaciones cuánticas juegan un papel fundamental, y algunos ejemplos de las mismas, como el Efecto Hall Cuántico o el modelo de Dicke.

También, se han mencionado brevemente los Materiales Cuánticos, en los que la mecánica cuántica juega un papel fundamental y es un tema de gran actualidad.

Me he referido a continuación a la segunda revolución cuántica y al desarrollo de las tecnologías cuánticas: La Computación, Simulación, Información, Sensado y Metrología Cuánticas.

Además, he descrito brevemente, lo que se conoce como la Ingeniería de Floquet, una herramienta fundamental para manipular y modificar externamente distintos sistemas físicos.

El formalismo de Floquet consiste en la resolución de hamiltonianos periódicos en el tiempo. He mostrado algunos ejemplos que muestran cómo es posible manipular el enlace entre los átomos, la estructura electrónica de las redes cristalinas, las propiedades de transporte cuántico, así como las propiedades dinámicas y topológicas de distintos sistemas físicos, mediante la aplicación de un campo periódico en el tiempo.

Este formalismo, desarrollado para campos electromagnéticos clásicos, se ha extendido recientemente al régimen cuántico, donde la materia se acopla a una cavidad cuántica, y donde se investiga el sistema como un todo y son los procesos de un número reducido de fotones los que juegan el papel fundamental. Esta es una línea de investigación reciente y muy activa, que seguro aportará resultados muy interesantes al campo de la interacción de la luz con la materia.

A continuación me he centrado en los bits cuánticos de espín en los puntos cuánticos semiconductores. He discutido la posibilidad de manipularlos externamente con campos eléctricos y magnéticos, para realizar operaciones cuánticas.

Se han discutido además, distintos mecanismos y protocolos para la transferencia de información a través de cadenas de puntos cuánticos semiconductores.

Para controlar la transferencia de largo alcance, es decir la transferencia directa entre sitios distantes, de electrones o huecos, o del estado que conllevan, se han discutido algunos protocolos adiabáticos, como la transferencia coherente adiabática, CTAP. Sin embargo, con el objetivo de incrementar la robustez de la manipulación y de la transferencia de bits cuánticos, se han propuesto protocolos de pulsos diseñados mediante técnicas de atajos a la adiabaticidad (“Shortcuts to Adiabaticity”), basadas fundamentalmente en ingeniería inversa.

En los bits cuánticos en los que la interacción espín-órbita es significativa, se ha mostrado además, cómo es posible realizar operaciones de un bit cuántico, como las rotaciones coherentes de un espín, simultáneamente a la transferencia directa del mismo entre los extremos de una cadena de puntos cuánticos.

Además, se han discutido otros protocolos como el que promueve la transferencia modulando secuencialmente las barreras entre sitios vecinos, o protocolos dinámicos, como el modo conveyor, donde la información se transmite mediante el movimiento controlado de la propia partícula portadora del estado cuántico.

Los recientes avances en la implementación experimental de redes de una y dos dimensiones de los puntos cuánticos, ha mostrado, por un lado su funcionalidad como conectores entre sitios distantes de un procesador cuántico, y por otro, su funcionalidad como simuladores cuánticos de redes cristalinas.

A continuación se ha discutido el potencial de los puntos cuánticos como simuladores cuánticos de fenómenos complejos, como el efecto Kondo, la Molécula de Wigner o como simuladores de aislantes topológicos como es la cadena de dímeros.

La última parte del discurso se ha dedicado a describir cómo transferir la información entre sitios distantes en aislantes topológicos de una dimensión, como es la cadena de dímeros, y cuasi-unidimensionales, como es la red de la escalera de Creutz, redes con propiedades topológicas no triviales. La transferencia tiene lugar a través de los estados de borde, protegidos frente a cierto tipo de desorden. La presencia de paredes de dominio en estos sistemas aumenta la velocidad de la transferencia así como el número de estados protegidos que transfieren la información.

Uno de los objetivos de gran interés, y que se ha discutido a continuación, es la transferencia de entrelazamiento entre bits cuánticos acoplados a los estados localizados en los bordes de una red topológica. La presencia de paredes de dominio que actúan como interfases entre los bits cuánticos y la red, aumenta la conectividad entre las distintas regiones. Esta es una condición necesaria para conseguir la escalabilidad, que es a su vez condición fundamental para la implementación de un ordenador cuántico.

Se ha discutido como ejemplo, la forma de generar un estado entrelazado Bell entre dos bits cuánticos distantes acoplados a una red topológica de cavidades fotónicas, así como un estado de tres bits cuánticos,  $W$ , en el cual uno de los bits cuánticos se acopla a una pared de dominio, demostrando así la alta conectividad de este sistema propuesto y su potencial para la información y la computación cuántica.

## **8. CONCLUSIONES**

He pretendido en este manuscrito, dar una visión de varios temas, que se enmarcan en el campo de las Tecnologías Cuánticas, en los que, junto a mis colaboradores, he trabajado a lo largo de mi trayectoria científica.

Una conclusión de este discurso es el gran potencial de los puntos cuánticos como simuladores cuánticos de una gran diversidad de sistemas físicos, así como potencial plataforma para el ordenador cuántico. La limitación fundamental a día de hoy es la escalabilidad, y es en este empeño en el que se centra la investigación de la comunidad científica en este campo.

Además, otra conclusión que se deriva es la importancia de explorar las propiedades de la materia en presencia de campos periódicos en el tiempo, ya que permite entender como modificar de una manera controlada las propiedades electrónicas, dinámicas o topológicas de la misma y obtener información sobre dichas propiedades. La idea central de la ingeniería de Floquet es profunda: no modificamos la estructura microscópica del sistema; modificamos su dinámica periódicamente para generar un hamiltoniano efectivo con propiedades nuevas.

La historia de la física nos enseña que los grandes avances científicos suelen surgir cuando nuevas herramientas experimentales permiten explorar sistemas físicos que antes estaban fuera de nuestro alcance. En este sentido, las tecnologías cuánticas están proporcionando hoy instrumentos que nos permiten diseñar y manipular sistemas cuánticos con un grado de control sin precedentes.

Los simuladores cuánticos representan ejemplos particularmente elocuentes de esta nueva etapa de la física. No solo nos permiten estudiar fenómenos fundamentales con una precisión extraordinaria, sino que también nos ofrecen la posibilidad de diseñar nuevas formas de materia en base a los principios de la mecánica cuántica.

La implementación experimental, conjuntamente y en paralelo a la investigación teórica, de distintas plataformas relevantes en las tecnologías cuánticas, como son los circuitos superconductores, los iones atrapados, los átomos fríos, los cristales fotónicos, o los puntos cuánticos, permiten inferir las ventajas y dificultades de cada una de ellas para la simulación y la computación cuántica, y en general para las tecnologías cuánticas.

Es esta variedad de plataformas, y la comparación entre ellas, lo que imprime interdisciplinaridad a las tecnologías cuánticas y lo que nos permite, mediante el diseño de sistemas cuánticos artificiales, explorar, de forma directa, las leyes profundas que gobiernan la materia.

Este esfuerzo conjunto promete, como sucede frecuentemente, cuando se investiga en un campo que es abordado por comunidades científicas distintas, nuevos avances del conocimiento, tanto desde el punto de vista fundamental como desde el punto de vista de sus aplicaciones en nuestra sociedad.

La ciencia es una empresa colectiva, construida generación tras generación mediante el esfuerzo y la curiosidad de quienes buscan comprender mejor el mundo que nos rodea.

Para quienes hemos tenido el privilegio de dedicar nuestra vida a la investigación científica, participar en este proceso constituye una experiencia profundamente estimulante y gratificante.

He dicho

**CONTESTACIÓN  
DEL  
EXCMO. SR. D. DAVID PÉREZ GARCÍA**

Excelentísima Señora Presidenta, Excelentísimos Señores Académicos,  
Señoras, Señores,

Es para mí un honor y un placer haber sido designado por la Presidenta para recibir en nuestra casa a la Prof. Gloria Platero Coello como nueva Académica Numeraria.

Querría empezar esta breve intervención hablando de la infancia y primeros pasos de la Prof. Platero. Dada la sencillez y familiaridad que la caracteriza, y puesto que se me hace extraño hablar de una niña pequeña como Profesora, si ustedes me lo permiten, me tomaré la licencia de, en esta primera parte de carácter biográfico, hablar simplemente de Gloria.

Gloria nació en Ciudad Real, de una familia con solera científico-técnica, llena de mujeres pioneras en su tiempo. Su bisabuela fue pionera en impulsar las escuelas para chicas en la Mancha. El colegio público de Alcolea de Calatrava lleva su nombre. Su abuela Virginia era profesora en la Escuela Normal y residió en la Residencia de Señoritas dirigida por María de Maetzu. Y su madre, que también estuvo alojada en la Residencia de Señoritas, fue una de las pocas mujeres en España que estudiaron matemáticas en su época. Su abuelo materno, Casimiro, fue ingeniero de caminos y estudió en la Residencia de Estudiantes en su período de máximo esplendor. Su padre fue también ingeniero de caminos, y una persona de gran formación y curiosidad que logró inculcar en su hija Gloria la inquietud por el saber. Era, además, un gran poeta, y escribía semanalmente palíndromos bajo pseudónimo para Blanco y Negro. Escribió más de 400 palíndromos y es considerado por el Club Palindromista Internacional como uno de los padres de la Palindromía. Su madre, que se dedicó a la enseñanza, era también una fantástica pintora, sobre todo de paisajes manchegos. Realizó numerosas exposiciones, y recibió importantes premios, como el premio Ansorena o el premio del Salón de Otoño. Lamentablemente falleció hace un par de años.

Al poco de nacer, Gloria se trasladó a Madrid, donde una nefritis le hizo guardar cama durante tres años, en los que su madre se encargó de su educación, algo que le hizo reincorporarse al colegio, ya con 9 años, adelantada en conocimientos a sus compañeros. Gloria era muy estudiosa, y tuvo muy buenos profesores, especialmente en arte y en química. Su colegio,

Nuestra Señora de Santa María, era bastante avanzado y abierto para la época. Sus padres lo eligieron porque allí se aprendía inglés, y no francés como en la mayoría de los colegios.

Tal y como nos describe ella misma en su discurso, a los 15 años vio una película sobre Marie Curie que le abrió los ojos y decidió que quería dedicarse a la investigación; en concreto, ya desde entonces quería entender el comportamiento y la composición de los átomos.

Cuando llegó el momento de empezar la universidad, dado su interés en entender el átomo, Gloria dudó si estudiar física o química. Recomendada por algunos amigos, decidió encaminar sus pasos hacia la física. Le tocaron años difíciles en la universidad, en los últimos años del franquismo, con numerosas huelgas y, por tanto, pocas clases.

Le dirigió la tesis el Prof. García Moliner. Su internacionalidad le facilitó hacer una estancia de tres meses en Milán en la que tuvo acceso por primera vez a laboratorios punteros y de la que guarda un recuerdo muy grato.

Su gusto por los viajes en realidad le venía de su infancia. Como ella misma comenta:

“Quizá uno de los recuerdos más bonitos de mi infancia con mi familia – éramos tres hermanos, yo la mediana– eran los maravillosos veraneos con mis padres viajando y conociendo Europa. Hacíamos camping e íbamos con *el cuatro latas*, así llamábamos al Renault 4L que tenía mi padre, a todas partes en Europa, y no nos dejábamos un museo sin visitar”.

Tal vez por ello decidió realizar su postdoc en el extranjero, en el prestigioso grupo del Prof. Altarelli, que acababa de llegar a Grenoble procedente del Instituto Max Planck de Stuttgart. Allí aprendió y disfrutó a partes iguales, y supo aprovechar el gran movimiento científico del grupo y su entorno para interactuar con muchos investigadores.

Regresó a España en 1987 y se incorporó al Instituto del Estado Sólido ubicado en la Universidad Autónoma de Madrid y, posteriormente, al Instituto de Ciencias de Materiales de Madrid del CSIC, donde llegó a ser Profesora de Investigación en 2005, y en el que aún continúa como Profesora Emérita.

Durante sus años de investigadora en el CSIC ha seguido viajando mucho, sobre todo a Alemania, un país con el que guarda numerosos lazos científicos. Como ella misma confiesa, uno de los mayores beneficios del trabajo

investigador son las personas que conoces, que te hacen tener amigos en todos los rincones del mundo. En su caso esto incluye también científicos de primera talla, como los Profesores Buttiker, Kouwenhoven, Jauho, Hänggi o von Klitzing, premio Nobel de Física en 1985.

Pero, por supuesto, no todo en el pasado son recuerdos gratos.

Cuando Gloria contaba 37 años, su hermano mayor, con el que estaba muy unida, tuvo un terrible un accidente de tráfico, en el que falleció junto a su mujer y sus hijos de cuatro y seis años. Y aunque esos golpes nunca se superan del todo, su pareja José Manuel, al que conoció durante la tesis, y el nacimiento de su hija Gloria, que actualmente realiza un doctorado en biofísica en la UNED y el Hospital Gregorio Marañón de Madrid, ciertamente le ayudaron a ir recuperándose poco a poco del terrible trauma.

La investigación de la Prof. Platero se ha centrado en el estudio de las fases cuánticas de la materia, y el fabuloso discurso que hemos oído ha sido un maravilloso paseo por ese exótico jardín.

Entender el comportamiento de la materia ha sido uno de los retos más antiguos de la humanidad. La separación clásica entre sólido, líquido y gas se enriqueció notablemente gracias a la plétora de efectos exóticos que la física cuántica trajo consigo.

La búsqueda de nuevas fases cuánticas de la materia, su explicación teórica, simulación numérica e implementación experimental han constituido uno de los ejes de la física desde el inicio de la revolución cuántica hace ya 100 años.

En esta búsqueda, teoría y experimento han ido siempre de la mano. En algunos casos, el descubrimiento de efectos cuánticos sorprendentes, como por ejemplo el de la superconductividad a alta temperatura, han servido de guía al desarrollo de la teoría y los métodos numéricos, necesarios para dar una explicación adecuada. En otros casos, como en el de buena parte de las fases topológicas de la materia, la teoría ha ido por delante, prediciendo materiales extremadamente exóticos. En algunos casos, las excitaciones del sistema se comportan como cuasi-partículas, llamadas anyones, cuyas trayectorias al moverse, vistas como trenzas en el espacio-tiempo, se comportan como computadores cuánticos universales, apriori mucho más robustos al ruido. En otros casos, llamados fractones, el comportamiento es aún más exótico, pues las excitaciones forman fractales y las propieda-

des del sistema, como por ejemplo la dimensión del conjunto de estados cuánticos de mínima energía, dependen de manera crucial de su tamaño.

Pero no solo la física teórica y experimental han ido de la mano en este camino, también las matemáticas y las ciencias de la computación.

Por ejemplo, entender los anyones ha llevado al desarrollo de la teoría de categorías de fusión y de las álgebras débiles de Hopf. Así mismo, diseñar modelos microscópicos que explicaran las propiedades exóticas de las fases topológicas llevó al desarrollo de las redes de tensores. Entender la estabilidad de las fases topológicas llevó al desarrollo del flujo espectral, y obtener los invariantes de las fases cuánticas topológicas llevó al desarrollo de nuevas técnicas en álgebras de operadores.

Desde el punto de vista de las ciencias de la computación, es bien sabido desde los trabajos de Barahona en los años 80, que encontrar la energía mínima del modelo de Ising, el principal modelo del magnetismo clásico, es un problema NP-duro incluso en dos dimensiones. Esto esencialmente quiere decir que es intratable desde el punto de vista numérico. Unos años después, en 1988, con el famoso Teorema PCP de Arora, Lund, Motwani, Sudan y Szegedy, se probó que, si las interacciones no tiene un soporte geométrico concreto, sino que las partículas pueden interactuar todas entre sí, el resultado es mucho más dramático. No solo es NP-duro encontrar la energía mínima, sino también aproximarla a cualquier precisión razonable.

Estos resultados mostraban que, incluso en modelos de física clásica, aparecían de forma natural conceptos de la teoría de la complejidad. En el caso cuántico, la conexión es aún más profunda, puesto que la clase de complejidad cuántica asociada a NP, llamada QMA, se caracteriza precisamente por el problema de encontrar la energía fundamental en un sistema cuántico de muchos cuerpos.

De hecho, la complejidad del caso cuántico va mucho más allá, y algunas de las cantidades centrales en un sistema cuántico de muchos cuerpos han resultado ser indecidibles. Es decir, no se pueden demostrar ni refutar desde las matemáticas, aún teniendo un conocimiento completo de las interacciones entre las partículas involucradas.

No es de extrañar, por tanto, que desde el punto de vista numérico, los sistemas cuánticos de muchos cuerpos también hayan supuesto un enorme reto para la física computacional. Numerosos métodos numéricos se

han desarrollado para intentar paliar la llamada “maldición de la dimensionalidad”: la dimensión del espacio en el que se modelan los sistemas cuánticos de muchos cuerpos crece de manera exponencial con el número de cuerpos.

De hecho, como hemos escuchado en el discurso de la Prof. Platero, fue precisamente la posibilidad de mejorar la simulación de sistemas cuánticos lo que llevó a Richard Feynmann a proponer, a principios de los años 80, el desarrollo de ordenadores basados en la física cuántica.

Esta idea supuso el germen de la segunda revolución cuántica. El objetivo ya no era “entender” la plétora de efectos cuánticos exóticos, sino precisamente utilizar esos efectos para mejorar la tecnología: ordenadores más potentes, pero también medidas más precisas, comunicaciones más seguras. Para ello se hizo necesario controlar los sistemas al nivel cuántico de manera extremadamente precisa, algo que se ha ido consiguiendo en diversas plataformas: iones atrapados, átomos ultrafríos, circuitos superconductores, sistemas fotónicos, puntos cuánticos, ...

Pero claro, los ordenadores cuánticos son en sí mismos sistemas cuánticos de muchos cuerpos. Por un lado, esto crea un interesante círculo virtuoso. Construirlos requiere entender los sistemas cuánticos. Pero tenerlos a nuestra disposición permitirá simular, y por tanto entender, mejor esos mismos sistemas, lo que puede traducirse en nuevas ideas para mejorarlos.

Por otro lado, los ordenadores cuánticos constituyen un nuevo tipo de “materia cuántica sintética”, en la que nuevas fases y transiciones de fase aparecen de manera natural. Un ejemplo es la transición de fase en complejidad, que separa las computaciones que son inherentemente cuánticas de las que se pueden simular clásicamente, lo que constituye una interconexión nueva, y aún más profunda, entre física cuántica y ciencias de la computación.

En esta apasionante área, y tal y como hemos escuchado en su fabuloso discurso, la Prof. Platero ha jugado un papel muy relevante a muy diversos niveles. No voy a repetir lo que tan brillantemente ha expuesto ella ya, entre otras muchas cosas porque no estaría a la altura, pero sí que quiero recalcar algo que la hace única: el haber realizado contribuciones clave en todo el espectro científico de la materia cuántica, con resultados de corte matemático, teórico, numérico y experimental.

Es muy destacable, en el extremo más matemático, el desarrollo de la teoría de Floquet-Bloch para estudiar sistemas periódicos en el espacio y el tiempo, así como su uso dentro de la llamada “ingeniería de Floquet”, campo en el que la Prof. Platero ha realizado algunas de sus principales contribuciones, estudiando de manera teórica diversos Hamiltonianos paradigmáticos, y cubriendo también materiales concretos como el grafeno. De hecho, la Prof. Platero ha obtenido el reciente premio Emmy Noether de la Sociedad Europea de Física precisamente (y cito textualmente) “*in recognition of her remarkable contributions to the theoretical understanding of out-of-equilibrium (Floquet) systems and their impactful application to quantum materials.*”

En el extremo más experimental destacan sus contribuciones en el estudio de los puntos cuánticos, con especial interés en las propiedades de transferencia, como por ejemplo su colaboración con el grupo experimental de Andrew Sachrajda en Ottawa. Los puntos cuánticos, al permitir alcanzar temperaturas muy bajas, tienen un importante potencial dentro de las tecnologías cuánticas. Un ejemplo es la simulación cuántica, donde son una de las plataformas candidatas para observar los famosos modos de Majorana, candidatos para realizar computación cuántica de manera topológica. Pero también se postulan como constituyente básico de un ordenador cuántico. Como hemos tenido el placer de escuchar en su discurso, la Prof. Platero ha jugado, y está jugando, un papel central en las propuestas teóricas para escalar el potencial de los puntos cuánticos como computadores cuánticos y, en particular, como generadores de estados cuánticos entrelazados de muchos cuerpos. De hecho, el nombramiento de la Profesora Platero como Fellow de la American Physical Society en 2022 fue precisamente “*for key theoretical physics contributions to the development of novel quantum circuit functionalities and protocols required to implement quantum information applications in real systems*”.

La calidad de la investigación de la prof. Platero viene avalada por numerosos premios y reconocimientos. Por encima de todos destacan el Premio Emmy Noether, concedido en 2023 por la Sociedad Europea de Física, y la elección como “Fellow” de la American Physical Society en 2022. Pero hay muchos más, de los que enumeraré solo una pequeña muestra:

- Miembro del comité científico de la Fundación Gadea Ciencia.
- Nominada para la Presidencia de la Sociedad Europea de Física.
- Mercator Fellow en la Universidad de Regensburg.

- Presidenta de la Comisión C8 (Física de Semiconductores) de la IUPAP: "International Union of Pure and Applied Physics".
- Vicepresidenta de la "International Union of Pure and Applied Physics".
- Conferenciante invitada (en tres ocasiones) en el "International Conference on the Physics of Semiconductors", el principal congreso internacional del área.
- Elegida "Chairwoman" de la "International Conference on the Physics of Semiconductors" que se celebrará en 2028 en Madrid.

La Prof. Platero, aparte de desarrollar una actividad investigadora puntera, no ha rechazado tampoco la responsabilidad de asumir puestos de servicio a la comunidad científica, como la Dirección del Departamento de Teoría de la Materia Condensada en el Instituto de Ciencias de Materiales de Madrid, haber sido coeditora de la revista *European Physics Letters*, miembro del panel P3 de las ERC Starting Grant, o haber liderado más de 25 proyectos de investigación, tanto nacionales como internacionales, muchos de ellos destinados a formar a investigadores jóvenes.

En esta dirección, quiero acabar este discurso de recepción recalcando la importancia de la figura de la Prof. Platero como mentora. Ha supervisado a 17 estudiantes de doctorado, de los que la mayor parte han continuado con gran éxito en la vida académica. Basta escuchar la calidez con la que habla de sus estudiantes, pasados y presentes, para entender lo importantes que son para la Prof. Platero sus alumnos.

Pero creo que no hay mejor manera de comprender el buen hacer de la Prof. Platero como mentora que escuchar el testimonio de una de sus alumnas, la Prof. Rosa López, que escribió en el prefacio de su tesis doctoral:

“Esta memoria de tesis recoge el trabajo de cinco años de investigación bajo la supervisión de mi directora Gloria Platero. A ella le agradezco haberme guiado y apoyado en todo momento para la consecución final de esta tesis. Especialmente destacaría la enorme confianza que depositó en mí desde el primer momento y de la que nunca desistió. No menor han sido las enormes ganas que me ha transmitido día a día para investigar en este maravilloso mundo de la Física. De ella he aprendido mucho y espero seguir en un futuro aprendiendo aún más. Pero, por encima de todo, quisiera destacar el sentimiento de acogimiento que he tenido en todo momento debido a su gran comprensión y humanidad, preocupándose siempre por los problemas que tuviese, fueran de la índole que fueran.”

Con la perspectiva de los años, y ya como investigadora consolidada, la Prof. López añade:

“Una característica de la Prof. Gloria Platero es una gran preocupación por todos sus estudiantes, porque disfruten de la investigación, que aprendan, que se formen y que adquieran esas habilidades que les harán ser independientes en un futuro. Pero además, la Prof. Gloria Platero es cercana, cuida los detalles, te inculca buenas prácticas que luego te duran toda la vida. Recuerdo que ella siempre insistía en que leyera, que estuviera al tanto de la bibliografía y, en definitiva, que siempre estuviera aprendiendo. Estos hábitos han sido el pilar de mi carrera científica y a ella la estaré eternamente agradecida por ello.”

Tal y como la Prof. Platero ha expresado magistralmente en su discurso, es necesario aumentar el número de mujeres científicas que sean referentes para las futuras generaciones. Sin lugar a dudas, querida Gloria, tú eres una de ellas.

¡Bienvenida!

## **BIBLIOGRAFÍA**

- [1] “Women in the History of Quantum Physics”, Ed. Patrick Charbonneau, M. Frank, M. van der Heijden, D. Monaldi, Cambridge U. Press, (2025), <https://doi.org/10.1017/9781009535816>.
- [2] M. Vojta Rep. Prog. Phys., 66, 2069 (2003)
- [3] “Understanding Quantum Phase Transitions”, Series in Condensed Matter Physics, Ed. L.D. Carr, Carr CRC Press, (2011)
- [4] Sachdev S., Quantum Phase Transitions, 2nd ed. Cambridge University Press (2011)
- [5] T. Esslinger, Annual Rev. of Condensed Matter Physics, 1, 129 (2010)
- [6] M. Imada, A. Fujimori, Y. Tokura, Rev. Mod. Phys., 70, 1039 (1998)
- [7] Atland, Alexander; Simons, Ben, "Interaction effects in the tight-binding system", *Condensed Matter Field Theory*. Cambridge U. Press, pp. 58 (2006)
- [8] K. von Klitzing, G. Dorda, M. Pepper, Phys. Rev. Lett., 45, 494 (1980)
- [9] D.C. Tsui, H.L. Stormer, A.C. Gossard, Phys. Rev. Lett., 48, 1559 (1982)
- [10] Masson, S.J., Asenjo-Garcia, A., Nature Comm., 13, 2285 (2022)
- [11] “A Short Course on Topological Insulators: Band-structure topology and edge states in one and two dimensions”, J. K. Asbóth, L. Oroszlány, A. Pályi, Lecture Notes in Physics, 919 (2016)
- [12] P. W. Shor, SIAM J.Sci.Statist.Comput., 26, 1484 (1997)
- [13] Lov K. Grover, STOC’96: Proceedings of the twenty-eighth annual ACM symposium on Theory of Computing, (1996) <https://doi.org/10.1145/237814.23786>
- [14] D. Loss, D. P. Divicenzo, Phys. Rev. A, 57, 120 (1998)
- [15] Martin Leijnse, Karsten Flensberg, Semicond. Sci. Technol., 27, 124003 (2012)

- [16] M. Busl, G. Granger, L. Gaudreau, R. Sánchez, A. Kam, M. Pioro-Ladrière, S.A. Studenikin, P. Zawadzki, Z.R. Wasilewski, A.S. Sachrajda, G. Platero, *Nature Nanotech.*, 8, 261 (2013)
- [17] S. Kohler, *Phys. Rev. A*, 98, 023849 (2018)
- [18] B. Pérez-González, Á. Gómez-León, G. Platero, *Phys. Chem. Chem. Phys.*, 24, 15860 (2022)
- [19] G. Burkard, M. J. Gullans, X. Mi, J. R. Petta, *Nature Rev. Phys.*, 2, 129 (2020).
- [20] S.G.J. Philips, M. T. Madzik, S.V. Amitonov et al., *Nature*, 609, 919 (2022)
- [21] Noiri, A., Takeda, K., Nakajima, T. et al., *Nat Comm.*, 13, 5740 (2022)
- [22] F. Grossmann, T. Dittrich, P. Jung, and P. Hänggi, *Phys. Rev. Lett.*, 67, 516 (1991)
- [23] G. Platero and R. Aguado, *Phys. Reports*, 395, 1-157 (2004)
- [24] S Kohler, J Lehmann, P Hänggi, *Phys. Rep.*, 406, 379 (2005)
- [25] B. Pérez González, M. Bello, G. Platero and A. Gómez León, *Phys Rev. Lett.*, 123, 126401 (2019)
- [26] J. H. Shirley, *Phys. Rev.* 138, B979 (1965)
- [27] H. Sambe, *Phys. Rev. A*, 7, 2203 (1973)
- [28] S. Rahav, I Gilyary and S. Fishman *Phys. Rev. A*, 68, 013820 (2003)
- [29] N. Goldman and J. Dalibard, *Phys. Rev. X*, 4, 031027 (2014)
- [30] N. Goldman and J. Dalibard, *Phys. Rev. X*, 5, 029902 (erratum) (2015)
- [31] A.P. Itin, and M. I. Katsnelson, *Phys. Rev. Lett.*, 115, 075301 (2015)
- [32] N. Goldman, J. Dalibard, M. Aidelsburger and N. R. Cooper, *Phys. Rev. A*, 91, 033632 (2015)
- [33] A. Eckardt and E. Anisimovas *New J. Phys.*, 17, 093039 (2015)
- [34] M. Grifoni and P. Hänggi, *Phys. Reports*, 304, 229 (1998)

- [35] R Aguado, G Platero, Phys. Rev Lett., 81, 4971 (1998)
- [36] Á Gómez-León, G Platero, Phys. Rev. B, 84, 12131 (2011)
- [37] T. H. Oosterkamp et al., Nature, 395, 873 (1998)
- [38] A. Gómez-León, G Platero, Phys. Rev. Lett., 110, 200403 (2013)
- [39] S. Ryu, A. P. Schnyder, A. Furusaki and A. W. Ludwig, New J. of Phys., 12, 065010 (2010).
- [40] M. Atala, M. Aidelsburger, J. T. Barreiro, D. Abanin, T. Kitagawa, E. Demler, I. Bloch, Nature Phys., 9, 795 (2013)
- [41] W. P. Su, J. R. Schrieffer, and A. J. Heeger, Phys. Rev. Lett., 42, 1698 (1979)
- [42] B. Pérez-González, G. Platero, A. Gómez-León, Comm. Phys., 7, 419 (2024)
- [43] Michael Niklas, Mónica Benito, Sigmund Kohler and Gloria Platero, Nanotechnology, 27, 454002 (2016)
- [44] M. Benito, M. Nicklas, G. Platero, S. Kohler, Phys. Rev. B, 93, 115432 (2016)
- [45] P. DelPlace, A. Gómez-León and G. Platero, Phys. Rev. B, 88, 245422 (2013)
- [46] A. Gómez-León, P. DelPlace and G. Platero, Phys. Rev. B, 89, 205408 (2014)
- [47] Maria Busl, Gloria Platero, Antti Pekka Jauho, Phys. Rev. B, 85, 155449 (2012)
- [48] A. Díaz-Fernández, E. Díaz, A. Gómez-León, G. Platero, and F. Domínguez-Adame, Phys. Rev. B, 100, 075412 (2019)
- [49] R. G. Mani, J. H. Smet, K. von Klitzing, V. Narayanamurti, W. B. Johnson, and V. Umansky, Nature, 420, 646 (2002)
- [50] M. A. Zudov, R. R. Lu, N. Pfeiffer, and K. W. West, Phys. Rev. Lett., 90, 046807 (2003)
- [51] J. Inarrea and G. Platero, Phys. Rev. Lett., 94, 016806 (2005)
- [52] M. Bello, C.E. Creffield, G. Platero, Sci. Rep. 6, 22562 (2016)

- [53] J. Vidal, R. Mosseri, and B. Doucot, *Phys. Rev. Lett.*, 81, 5888 (1998)
- [54] M. Bello, C.E. Creffield and G. Platero, *Phys. Rev. B*, 95, 094303 (2017)
- [55] A Yu Kitaev, *Phys.-Usp.*, 44, 131 (2001)
- [56] M. Benito, A. Gómez-León, V. M. Bastidas, T. Brandes and G. Platero, *Phys.Rev.B*, 90, 205127 (2014)
- [57] M. Benito and G. Platero, *Physica E: Low dim. Systems and Nanostructures*, 74, 608 (2015)
- [58] L. Rokhinson, X. Liu and J. Furdyna, *Nature Phys*, 8, 795 (2012)
- [59] R. Fischer, J. Picó-Cortés, W. Himmler, G. Platero, M. Grifoni, D. A. Kozlov, N. N. Mikhailov, S. A. Dvoretzky, C. Strunk, D. Weiss, *Phys. Rev. Research*, 4, 013087 (2022).
- [60] F. Domínguez, F. Hassler and G. Platero, *Phys. Rev. B*, 86, 140503(R) (2012)
- [61] J. Picó-Cortés, F. Domínguez, and G. Platero, *Phys. Rev. B*, 96, 125438 (2017)
- [62] L. Jiang, T. Kitagawa, J. Alicea, A. R. Akhmerov, D. Pekker, G. Refael, J. I. Cirac, E. Demler, M. D. Lukin et al., *Phys. Rev. Lett.*, 106, 220402 (2011)
- [63] T. Oka and S. Kitamura, *Annual Rev. of Condensed Matter Phys.*, 10, 387 (2019)
- [64] M. A. Sentef, J. Li, F. Künzel, and M. Eckstein, *Phys. Rev. Res.*, 2, 033033 (2020)
- [65] O. Dmytruk and M. Schiro, *Comm. Phys.* 5, 271 (2022)
- [66] J. Li, D. Golez, G. Mazza, A. J. Millis, A. Georges, and M. Eckstein, *Phys. Rev. B*, 101, 205140 (2020)
- [67] J. Li, L. Schamriß, and M. Eckstein. *Phys. Rev. B*, 105, 165121 (2022)
- [68] J. Christian, J. Eckhardt, G. Passetti, M. Othman, C. Karrasch, F. Cavaliere, M. A. Sentef, and D. M. Kennes, *Comm. Phys.*, 5, 122 (2022)

- [69] F. Schlawin, D. M. Kennes, and M. A. Sentef, *Appl. Phys. Rev.*, **9**, 011312 (2022)
- [70] H. Hübener, U. De Giovannini, C. Schäfer, J. Andberger, M. Ruggenthaler, J. Faist, and A. Rubio, *Nature Materials* **20**, 438 (2021)
- [71] J. Bloch, A. Cavalleri, V. Galitski, M. Hafezi, and A. Rubio, *Nature*, **606**, 41 (2022)
- [72] L. D'Alessio and M. Rigol, *Phys. Rev. X*, **4**, 041048 (2014)
- [73] B. Pérez-González, G. Platero, A. Gómez-León, *Quantum*, **9**, 1633 (2025)
- [74] M. Benito, J. Petta, G. Burkard, *Phys. Rev. B*, **100**, 081412(R) (2019)
- [75] L.P. Kouwenhoven, D. G. Austing and S. Tarucha, *Rep. Prog. Phys.*, **64**, 701 (2001)
- [76] M. Ciorga, A.S. Sachrajda, P. Hawrylak, C. Gould, P. Zawadzki, S. Jullian, Y. Feng, Z. Wasilewski, *Phys. Rev. B*, **61**, 16315(R) (2000)
- [77] L. Gaudreau, G. Granger, A. Kam, G. C. Aers, S. A. Studenikin, P. Zawadzki, M. Pioro-Ladrière, Z. R. Wasilewski, A. S. Sachrajda, *Nature Phys.*, **8**, 54 (2012)
- [78] T. Heindel, J. Kim, N. Gregersen, A. Rastelli, S. Reitzenstein, *Adv. in Optics and Photonics*, **15**, 613 (2023)
- [79] D. Divicenzo, *Fortschritte der Physik*, **48**, 771 (2000)
- [80] F. H. L. Koppens, C. Buizert, K. J. Tielrooij, I. T. Vink, K. C. Nowack, T. Meunier, L. P. Kouwenhoven, L. M. K. Vandersypen, *Nature*, **442**, 766 (2006)
- [81] K. C. Nowack, F. H. L. Koppens, Yu. V. Nazarov, and L. M. K. Vandersypen, *Science*, **318**, 1430 (2007)
- [82] M. Pioro-Ladrière, et al., *Nature Phys* **4**, 776 (2008)
- [83] E. A. Laird, C. Barthel, E. I. Rashba, C. M. Marcus, M. P. Hanson, and A. C. Gossard, *Phys. Rev. Lett.*, **99**, 246601 (2007)
- [84] J. Petta, A. C. Johnson, J. M. Taylor, E. A. Laird, A. Yacoby, M. D. Lukin, C. M. Marcus, M. P. Hanson, and A. C. Gossard, *Science*, **309**, 2180 (2005)

- [85] J. M. Luttinger and W. Kohn, *Phys. Rev.* 97, 869 (1955)
- [86] J. Iñarrea, G. Platero and A. MacDonald, *Phys. Rev. B*, 76, 085329 (2007)
- [87] M. Altarelli, U. Ekenberg, A. Fasolino, *Phys. Rev. B*, 32, 5138 (1985)
- [88] M. Altarelli and G. Platero, *Surf. Sci.*, 196, 540 (1988)
- [89] G. Platero and M. Altarelli, *Phys. Rev. B*, 39, 3758 (1989)
- [90] D. Fernández-Fernández, J. Picó-Cortés, S. Vela-Liñán and G. Platero, *J. Phys. Materials*, 6, 034004 (2023)
- [91] P. M. Mutter and G. Burkard, *Phys. Rev. B*, 102, 205412 (2020)
- [92] C. Adelsberger, M. Benito, S. Bosco, J. Klinovaja, and D. Loss, *Phys. Rev. B*, 105, 075308 (2022)
- [93] P. M. Mutter and G. Burkard, *Phys. Rev. B*, 104, 195421 (2021).
- [94] K. Blum, “Density Matrix, Theory and Applications”, 2nd ed., Plenum Press, NY, London, (1996)
- [95] M. Busl, R. Sánchez and G. Platero, *Phys. Rev. B*, 81, 121306(R) (2010)
- [96] M. Busl, G. Granger, L. Gaudreau, R. Sánchez, A. Kam, M. Pioro-Ladrière, S. A. Studenikin, P. Zawadzki, Z. R. Wasilewski, A. S. Sachrajda, and G. Platero, *Nature Nanotech.*, 8, 261 (2013)
- [97] R. Sánchez, G. Granger, L. Gaudreau, A. Kam, M. Pioro-Ladrière, S. A. Studenikin, P. Zawadzki, A. S. Sachrajda and G. Platero, *Phys. Rev. Lett.*, 112, 176803 (2014)
- [98] F. R. Braakman, P. Barthelemy, C. Reichl, W. Wegscheider and L. M. K. Vandersypen, *Nature Nanotech.*, 8, 432 (2013)
- [99] F. Gallego-Marcos, R. Sánchez, and G. Platero, *J. of Appl. Phys.*, 117, 112808 (2015)
- [100] F. Gallego-Marcos, R. Sánchez and G. Platero, *Phys. Rev. B*, 93, 075424 (2016)
- [101] J. Picó-Cortés, F. Gallego-Marcos and G. Platero, *Phys. Rev. B*, 99, 155421 (2019)

- [102] L. Pauling, *J. Am. Chem. Soc.*, 53, 1367 (1931)
- [103] H. B. Gray and J. R. Winkler, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 102, 3534 (2005)
- [104] R. Sánchez, F. Gallego-Marcos and G. Platero, *Phys. Rev. B*, 89, 161402(R) (2014)
- [105] B. Michaelis, C. Emary, C. Beenakker, *EPL*, 73, 677 (2006)
- [106] A. D. Greentree, J. H. Cole, A. R. Hamilton, and Lloyd C. L. Hollenberg, *Phys. Rev. B*, 70, 235317 (2004)
- [107] Y. Ban, X. Chen, S. Kohler and G. Platero, *Adv Quantum Tech.*, 2, 1900048 (2019)
- [108] J. Huneke, G. Platero and S. Kohler, *Phys. Rev. Lett.*, 110, 036802 (2013)
- [109] D. Guéry-Odelin, A. Ruschhaupt, A. Kiely, E. Torrontegui, S. Martínez-Garaot, and J.G. Muga, *Rev. Modern Phys.*, 91, 045001 (2019)
- [110] D. Fernández-Fernández, Y. Ban, G. Platero, *Quantum* 8, 1533 (2024)
- [111] T. Nakajima et al., *Nat Commun* 9, 2133 (2018)
- [112] R. Xue et al., *Nat Commun* 15, 2296 (2024)
- [113] D. Fernández-Fernández, Y. Matsumoto, L.M.K. Vandersypen, G. Platero, S. Bosco, *arXiv:2508.08394* (2025)
- [114] F. Borjans et al., *Nature*, 577, 195 (2020)
- [115] D. Goldhaber et al., *Nature*, 391, 156 (1998)
- [116] L P Kouwenhoven and C M Marcus, *Phys. World*, 35 (1998)
- [117] J. von Delft et.al, *Science*, 289, 2064 (2000)
- [118] R. López, R. Aguado, G. Platero and C. Tejedor, *Phys. Rev. Lett.*, 81, 4688 (1998)
- [119] R. López, R. Aguado and G. Platero, *Phys. Rev. Lett.*, 89, 136802 (2002)
- [120] M. Lee, R. Lopez, H. Q. Xu, and G. Platero, *Phys. Rev. Lett.*, 129, 207701 (2022)

- [121] D. M. Zajac, T. M. Hazard, X. Mi, E. Nielsen, and J. R. Petta, *Phys. Rev. Appl.*, 6, 054013 (2016)
- [122] C.E. Creffield and G. Platero, *Phys. Rev. B*, 66, 235303 (2002)
- [123] J. P. Dehollain et al., *Nature* 579, 528 (2020)
- [124] T. Byrnes, Na Young Kim, K. Kusudo, and Y. Yamamoto, *Phys. Rev. B*, 78, 075320 (2008).
- [125] X. Wang, E. Khatami, F. Fei, J. Wyrick, P. Namboodiri, R. Kashid, A. F Rigosi, G. Bryant, R. Silver, *Nat. Comm.*, 13, 6824 (2022)
- [126] S. Weimann, M. Kremer, Y. Plotnik, Y. Lumer, S. Nolte, K. G. Makris, M. Segev, M. C. Rechtsman, A. Szameit, *Nat. Materials*, 16, 433 (2017)
- [127] Kiczynski, M., Gorman, S.K., Geng, H. et al., *Nature*, 606, 694 (2022)
- [128] N. Pernet, P. St-Jean, D.D. Solnyshkov, G. Malpuech, N. Carlon Zambon, B. Real, O. Jamadi, A. Lemaître, M. Morassi, L. Le Gratiet, T. Baptiste, A. Harouri, I. Sagnes, A. Amo, S. Ravets, J. Bloch, *Nature Phys.*, 18, 678 (2022)
- [129] V. D. Pham, Y. Pan, S. C. Erwin, F. von Oppen, K. Kanisawa, and S. Fölsch, *Phys. Rev B*, 105, 125418 (2022)
- [130] B. Pérez-González, M. Bello, G. Platero, A. Gómez-León, *Phys. Rev. Lett.*, 123, 126401 (2019)
- [131] T. M. Stace C. H. W. Barnes, and G. J. Milburn, *Phys. Rev. Lett.*, 93, 126804 (2004)
- [132] J. I. Cirac, P. Zoller, H. J. Kimble, and H. Mabuchi, *Phys. Rev. Lett.*, 78, 3221 (1997)
- [133] J. Zurita, C.E. Creffield and G Platero, *Quantum*, 7, 1043 (2023)
- [134] H. Li, Z. Dong, S. Longhi, Q. Liang, D. Xiel, and B. Yan, *Phys. Rev. Lett.*, 129, 220403 (2022)
- [135] T. Chen et al., *Nature Phys.*, 21, 221 (2025)
- [136] C.E. Creffield and G. Platero, *Phys. Rev. Lett.*, 105, 086804 (2010)

- [137] M. Creutz, Phys. Rev. Lett. 83, 2636 (1999)
- [138] N. Lang and H. P. Buechler, npj Quantum Information, 3, 47 (2017)
- [139] M. Hollenbach, Y. Berencén, U. Kentsch, M. Helm, G. V. Astakhov, Optics Express, 28, 26111 (2020)
- [140] X. Yan, S. Gitt, B. Lin, D. Witt, M. Abdolahi, A. Afifi, A. Azem, A. Darcie, J. Wu, K. Awan, M. Mitchell, A. Pfenning, L. Chrostowski, and J. F. Young, APL Photonics, 6, 070901 (2021).
- [141] J. Guimbao, L. M. Weituschat, J. M. L. Montolio and P. A. Postigo, Optics Express, 29, 21160 (2021)
- [142] J. Zurita, A. Agustí Casado, C.E. Creffield and G. Platero, Quantum, 9, 1625 (2025)
- [143] Zhao, H., Miao, P., Teimourpour, M.H. et al., Nature Comm., 9, 981 (2018)
- [144] F. Mei G. Chen, Lin Tian, S. Zhu and S. Jia, Phys. Rev. A, 98, 012331 (2018)
- [145] W. Duer, G. Vidal, and J. I. Cirac, Phys. Rev. A, 62, 062314 (2000)
- [146] M. Bello, G. Platero, J. I. Cirac, A. González-Tudela, Sci. Adv., 5: eaaw0297, (2019)