ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

# DISCURSO

LEIDO EN EL ACTO DE SU RECEPCIÓN

POR

## E. TERRADAS

Y

# CONTESTACIÓN

POR

## J. REY PASTOR

EL DÍA 15 DE FEBRERO DE 1933

MADRID
C. BERMEJO, IMPRESOR
STMA. TRINIDAD, 7.—TEL. 31190
1933

# Programa de un curso sobre ecuaciones diferenciales

## INTRODUCCION

SEÑORES:

Navegando con tan escasa fortuna que he podido preguntarme con el romance de Lope "en qué celajes fundas que es bien echar la sonda, cuando, perdido el rumbo, erraste la derrota", para situar la navecilla y evitar la recalada entre peñascos que la destrocen, acudo a la constelación de la Academia que tuvo un día la bondad de otorgarme su beneplácito para la honrosa tarea de continuar el prestigio de la Corporación.

"Navigare necesse." La observación y el raciocinio conducen a puerto, la borrasca es sorteable y en la tupida cerrazón se iluminan transparencias suficientes para orientarme; la Academia, con las luces de su tradición, me ofrece admirables elementos de referencia en las serenas alturas donde el espíritu puede esperar satisfacción a su esfuerzo. Destellos irradiados por el ejemplo y labor de los que son y de los que fueron, cuyo recuerdo perdura, generador de estímulo. A todos he de rendir en este momento el debido homenaje de respeto.

---

Por singulares motivos he venido ocupándome en la preparación de un curso sobre ecuaciones diferenciales. Cuanto requiere trabajo es amado con ahinco proporcional, y me he forjado la ilusión de que tal vez no desmereciera de solemnidad como la presente una breve relación de métodos, horizontes y problemas que se ofrecen al estudioso al recorrer el campo de las funciones definidas por dependencias entre sus valores en lugares bien determinados, especialmente cuando se hallan indefinidamente próximos. Va a ser primera y última lección de un curso que no llegue nunca a explicarse, pero en cuya preparación puse cuanto estuvo de mi parte esperando pudiera aprovechar a la selección de estudiosos que lo siguiera.

Por agravio de la suerte adversa se va a perder en el vacío; las nuevas generaciones exigen, según parece, otro piloto y diverso rumbo. Me holgara verlas conducidas a parajes donde hallare mayor gloria el genio de la raza, y a ello he de contribuir esforzadamente, si no fuere en el timón de gobierno, en la dura maniobra, o siquiera en la fábrica del nuevo navío, varado en dique de carena, pronto a botarse a la mar.

# PRIMERA PARTE

## FUNDAMENTO DEL PROGRAMA

### I

La dependencia entre dos valores próximos de una función se ofrece como elemento de análisis matemático al considerar la tangente y la velocidad. El problema de áreas, por otra parte, resulta un problema inverso y el haberlo reconocido condujo al descubrimiento del Cálculo infinitesimal. Hallar la primitiva o sea una función cuya derivada se conoce, quedaba así formulado en forma de cuadratura. Su generalización aparecía inmediata: la derivada pudo considerarse función no sólo de la variable independiente, sino a la vez de la variable independiente y de la propia función. Y otro planteo más general podía involucrar en una función implícita la derivada, la función y la variable independiente e introducir derivadas de cualquier orden. En concepto más general podían existir funciones y sus derivadas de diversos órdenes, definiéndolas por ecuaciones simultáneas, con lo que se ofrecía el "sistema" de ecuaciones diferenciales ordinarias. Más adelante pudo observarse que cabía definir una función de varias variables mediante una relación entre sus diferenciales o derivadas parciales y aun considerar un "sistema" de tales ecuaciones.

Es dable idear todavía otras maneras de dependencia funcional, los valores de la función, en número infinito, pueden considerarse en puntos no indefinidamente próximos pero regularmente y con cierto orden distribuídos, dando lugar al cálculo de diferencias finitas con sus generalizaciones paralelas a las descritas; o pueden involucrarse infinitos valores de un continuo dando lugar a los procesos integrales, métodos de infinitas variables y estudio de espacios abstractos.

Toda esa serie de generalizaciones pudo ser y ha sido, pero para atribuirle un valor en la atención inteligente es necesario demostrar que no son entelequias, sino conceptos dotados de "existencia". Y no sólo la simple no contradicción y posibilidad de cálculo les da derecho de examen, sino la conveniencia de servirse de ellos para interpretar la Naturaleza, sintetizarla y dirigir la especulación futura, y, en orden más abstracto, para el conocimiento e investigación de la Verdad matemática. Definiendo por solución todo proceso de cálculo que al ser substituído en las ecuaciones funcionales los reduce a identidad, surge necesaria la demostración de cómo existe, y si existe, para qué sirve. Es decir, en qué condiciones puede razonarse sobre la solución, qué propiedades ofrece y qué ventajas resultan de su conocimiento. Entre las propiedades una habrá de ser el modo de calcularla, entendiendo por cálculo definir la forma y el valor numérico, y otra su relación con otras soluciones, es decir, clasificación y reducción de afinidades. El concepto, cuando haya sido sancionado por las referidas pruebas, será valorizable. Su mayor o menor cuantía depende la multitud de circunstancias; las más apreciadas serán, sin duda, su alcance en señalar horizontes desconocidos y su capacidad generadora de nuevos métodos de cálculo.

## II

En el siglo XVII, cuando comienza a desenvolverse el estudio de la ecuación diferencial, no hay que plantearse el problema de existencia. La Geometría y la Mecánica la dan, si no resuelta, plausible. El concepto abstracto traduce, de un modo casi inmediato, una realidad patente. Además, el cálculo de la cuadratura refiere la dificultad a buscar un cambio de variable o a la formación de tablas de funciones derivables. Se comprueba, con evidencia, el resultado. Del manejo del nuevo cálculo resultan ventajas insospechadas: van descubriéndose propiedades de curvas definidas por sus tangentes o curvatura; leyes empíricas, como las de las oscilaciones del péndulo, se pueden condensar en una ecuación diferencial que a su vez permite "descubrir" nuevas leyes. Y culmina el interés al comprobarse que las mismas de Kepler expresan integrales de la ecuación diferencial que formula la gravitación abarcando desde la caída de los cuerpos al movimiento de los astros. Fué tan extraordinario el descubrimiento y tales los éxitos posteriores de su aplicación a la Geometría y a la Física, que la ecuación diferencial se consideró no sólo como la heramienta más adecuada para trabajar el análisis de la Naturaleza, sino como el tema más importante de la Matemática y la expresión indubitable del Principio de Causalidad. El cual postula que en todo fenómeno el conocimiento del estado actual y de algunos inmediatamente anteriores son suficientes, en determinadas condiciones, para señalar lo porvenir. Con semejantes ilusiones y el éxito del rápido avance, la Humanidad pudo crear, con ambición casi ilimitada, la Ciencia exacta dentro de la Filosofía, ambición que amenazara con inavdir otros dominios del saber o negarles siquiera derecho de existencia.

## III

Podía, pues, creer Newton, en 1671, al escribir su *Methodus fluxionum et serierum infinitarum,* que había resuelto uno de los más grandes problemas que la Matemática se hubiera planteado cuando afirmara que la serie de coeficientes indeterminados le daba al modo de resolver cualquier ecuación diferencial.

"Data aequatione, quotcumque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire et vice versa" plantea, en carta a Leibnitz, en 1676, con el siguiente anagrama:

6a, 2c, d, ae, 13e 2f, 7i, 3l, 9n, 4o, 4q, 2r, 4s, 8t, 12v, x,

el cual contiene las letras mismas que figuran en el enunciado del problema. La misma carta incluye la solución en anagrama análogo, traducción quintaesenciada de "Una methodus consistit in extractione fluentis quantitatis ex aequatione simul involvente fluxionem ejus; altera tantum in assumptione seriei pro quantitate qualibet incognita, ex qua cetera commode derivari possint, et in collatione terminorum homologorum aequationis resultantis ad eruendos terminos asumptae seriei."

El "Methodus" escrito en 1671 no vió la luz hasta 1736. Entre tanto, Leibniz, sin descifrar el doble jeroglífico que fué explicado mucho más tarde por el propio Newton, descubrió nuevamente, con el análisis infinitesimal, los métodos de cuadratura y serie. Sus primeras memorias fueron la de 1684 en las "Acta eruditorum" con el título "Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus", a la cual siguió en 1686 otra no menos importante: "De Geometría recondita et analisi indivisibilium atque infinitorum" (*). Seguramente Newton quedaría sorprendido al ver su método explicado tan claramen-

(*) He ahí cómo se expresa Leibniz en esta Memoria, según traduzco de Cantor "Geschichte der Mathematik", tomo 3.°, pág. 198: "El primero que obtuvo una te, método que le permitió obtener gran parte de los resultados de su Filosofía natural, y se concibe que para disfrutar el monopolio de los descubrimientos matemáticos lo mantuviera casi secreto, con el riesgo, claro está, de que le arrebataran la gloria de su descubrimiento. Como así estuvo a punto de ocurrir, pues las memorias de las Acta ávidamente leídas por los Bernoulli (Jacobo y Juan), les proporcionaron tan admirable destreza en el manejo del nuevo cálculo que éste adquirió inmediatamente, y por su influjo, una difusión extraordinaria.

Las primeras ecuaciones diferenciales planteaban problemas mecánicos y geométricos, v. g.: la curva tractriz que describe el reloj sobre una mesa cuando el extremo libre de la cadena recorre una recta; la tautocrona, la braquistocrona, la catenaria, la curva elástica, las propiedades geométricas de curvas en general y la resolución del problema de los isoperímetros que abarcan un área máxima. Aparecen en tales trabajos de Leibniz y su escuela los signos definitivos y los términos empleados hoy día: función, integral, &, de modo que al terminar el siglo XVII habíase iniciado en espíritu y modo la nueva era que ha caracterizado la Matemática durante todo el siglo XVIII y parte del XIX.

En la última década del siglo XVII, Juan Bernoulli introdujo el factor integrante, el método fundado en la substitución $y = uv$ para integrar la lineal de primer orden, la solución de la ecuación que lleva su nombre mediante el conocido cambio de variable, el proceso de separación de variables enunciado como a tal o sea la reducción a cuadraturas y el problema de las trayectorias que cortan, según ángulos constantes, a un haz de curvas dado. Es interesante observar que no se pudieran separar las variables en la ecuación $a\,x\,d\,y = y\,d\,x$ hasta que en 1694 Leibniz hubo descubierto que la integral de $\frac{dx}{x}$ es la trascendente log. $x$. Esta sencilla observación contiene el germen fecundo de la definición de nuevas funciones trascendentes mediante ecuaciones diferenciales.

Juan Bernoulli resolvió la ecuación de segundo orden $y'' = \frac{2y}{x^2}$ cuya

---

cuadratura por el método de coeficientes indeterminados de una serie fué Mercator y un geómetra de espíritu profundo, Isaac Newton, ha realizado el mismo descubrimiento independientemente, sacando de él consecuencias de orden general. Si hubiera publicado los métodos y razones que todavía mantiene ocultos, no cabe duda que nos hubiera permitido grandes simplificaciones y grandes progresos en la Ciencia."—El método de coeficientes indeterminados se halla expuesto por Leibniz en las Acta de 1693, con todo pormenor.

integral es $y = ax^2 + \frac{b}{x}$, pero no se sabe de qué modo llegó a obtener la solución indicada; tal vez obtuvo la ecuación diferencial de la misma integral y por eliminación de constantes.

## IV

Pasa el siglo XVII y comienza el XVIII con los más brillantes auspicios. La controversia de las trayectorias apasiona el mundo matemático. Unos reclaman la prioridad del planteo, otros del método, quienes pretenden haber hallado el mejor proceso de integración. En esta controversia se señala la necesidad de hallar el resultado en forma cerrada, es decir, reducido a cuadraturas, tendencia que ha de perdurar poco, pues la ecuación de Ricatti agota los esfuerzos de los analistas hasta que sospechan la imposibilidad de resolver el problema, salvo en casos especiales que se conocen en 1722. La controversia de las trayectorias conduce a una ecuación diferencial obtenida por eliminación de un parámetro, circunstancia reconocida por Leibniz y aclarada definitivamente por Hermann en las Acta de 1717. Se concibe que los problemas sobre trayectorias habían de constituir una cantera casi inagotable de materiales; ecuaciones de primer orden, cuadraturas, y aun alguna ecuación de segundo orden aparecen en las Acta de un lado y en las Phylosophical Transactions de otro, problemas atacados por las dos escuelas rivales, Leibniz y la numerosa familia de los Bernoulli en el continente, Newton con Pemberton, Taylor, etc., del otro lado de la Mancha, Pemberton es conocido especialmente por haber formulado el problema de las trayectorias recíprocas, o sea que pertenecen a la misma familia que las curvas originales, problema resuelto por Juan Bernoulli y expuesto en la memoria que Nicolás (II) publicó sobre trayectorias en las Acta de 1720; Taylor, por la obtención de la primera integral singular, aunque sin darse cuenta de su significado (*), al observar que la ecuación $4y^3 - 4y^2 = (1 + x^2)^2 y'^2$, viene satisfecha por $y = 1$, es decir, por una paralela al eje de la $x$, y esta solución no se obtiene particularizando la constante C en la expresión integral: $y = (1 + x^2) [Cx + (1 - C^2)^{1/2}]^{-2}$.

(*) Propiamente Leibniz, en 1694, dió la primera integral singular: al buscar la curva cuya normal fuera una función del segmento que intercepta ésta sobre el eje de las $x$ a partir del origen, da como solución, cuando ambos segmentos son proporcionales, la parábola envolvente, por parecerle, acaso, banales las circunferencias centradas en el eje de las $x$.

En la integral de las ecuaciones de primer orden figura una constante. Hay, pues, infinidad de curvas que satisfacen a una ecuación diferencial. Newton observó que a una ecuación de orden $n$ tal como $y^{(n)} = f(x)$ corresponde un polinomio arbitrario de grado $n$-$1$. Junto a tales soluciones aparecen otras irreductibles a ellas, a las que Taylor, en su "Methodus Incrementorum de 1715", llama "singularis quaedam solutio problematis". Estas propiedades llamaron mucho la atención de los matemáticos, sin que acertaran a explicarlas hasta que Lagrange dió la interpretación conocida. La Memoria de Lagrange es de 1774.

El carácter arbitrario de la constante no fué reconocido hasta pasado el primer tercio del siglo XVIII, por Fontaine (1705-1771); según Lacroix, dió en considerar toda ecuación diferencial como resultado de eliminar constantes arbitrarias entre la ecuación y sus derivadas de diversos órdenes. El tratado de Fontaine fué escrito en 1738 y publicado en 1764, y en él recoge lo más importante de sus Memorias sobre Cálculo infinitesimal. Euler insiste a menudo en que hay soluciones que no pueden obtenerse atribuyendo un valor determinado a la constante.

Aunque los esfuerzos de los analistas aparecen encaminados a acertar en cambios de variable y combinaciones y artificios que permitan la separación de variables y la reducción a cuadraturas y como problema de la misma índole la reducción de órdenes (resolver una ecuación de segundo orden sería referirla a una de primer orden), la ecuación de Ricatti en su mayor generalidad, ecuación que aparece como resultado de multitud de análisis, se muestra rebelde a todo ensayo. Los casos integrables de la ecuación restringida $y' = ay^2 + bx^n$ los publica Daniel Bernoulli en las Acta, de 1725, y son, como se sabe, aquellos en que $n = \frac{-4c}{2c \pm 1}$, siendo $c$ un entero cualquiera. La imposibilidad de reducir a cuadraturas la ecuación general de Ricatti es asunto palpitante en el interés matemático, tantas son las cuestiones que ha levantado y tan a prueba ha llegado a poner el ingenio de los analistas. Se considera la ecuación de Ricatti como cosa análoga a la ecuación de quinto grado en la resolución algébrica. La reducción a cuadraturas para las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales viene a ser un problema semejante al de resolver con la regla y el compás una ecuación ordinaria, pero se necesitó llegar al concepto de grupo continuo, dos siglos más tarde, con Lie Picard y Vessiot, para aclarar estas cuestiones. La ecuación de Ricatti es la más sencilla de las ecuaciones no reductibles a cuadraturas.

En el primer tercio del siglo XVIII se conocían los métodos elementales de integración; el caso de funciones homogéneas se halla resuelto por Manfredi en 1714, tomo 28, del "Giornale dei Letterati d'Italia" (*); pero se tardó mucho tiempo en haber de los métodos elementales una teoría sintética que llegara a esclarecer su esencia. Ni cabía barruntar la pregunta, cuando ni siquiera era puesto en duda el método de coeficientes indeterminados que, para $x^2y' = ax + by$ , $xy' = y^2$ , etc. conduce, no obstante, a una serie de potencias de radio nulo para expresar la integral que pasa por el origen. El conocimiento de integrales definidas por funciones que no son desarrollables en serie convergente de potencias positivas alrededor de determinados puntos había de persuadir a los analistas de que el algoritmo de la serie de potencias es inadecuado para representar las soluciones de ecuaciones diferenciales que presentaran un punto de tal naturaleza y en la proximidad de este punto, pero para poder avanzar en este camino se necesita el faro poderoso de la teoría de funciones de variable compleja, que fué creada por Cauchy un siglo más tarde.

En presencia de cuadraturas difíciles o de ecuaciones de reducción desconocida emplearon los mismos Bernoulli (1694-?) la substitución de incrementos finitos a las diferenciales, iniciando así la integración cuantitativa. Se partía del supuesto de que la integral existía siempre y que sólo era preciso ingenio y suerte para hallarla o al menos para calcularla con la aproximación que se quisiera, aproximación que, por otra parte, sólo podía apreciarse por el modo como iban disminuyendo los términos de la serie o los elementos nuevos del proceso de resolución obtenido por aproximaciones sucesivas.

## V

En el primer tercio del siglo XVIII aparece la figura de Euler en el campo de la Matemática. Euler (1707 a 1783) investiga, relaciona lo conocido y publica grandes textos, en que a modo de ordenado depósito se condensa el saber de su época. En 1748, es decir, ya en plena madurez, apareció en Lausana su "Introductio in analysis infinitorum", Algebra, el primer tomo, y Geometría analítica el segundo, que es un resumen de cuanto podía establecerse sin necesidad del Cálculo diferencial. Este

(*) En 1692 Leibniz integró la ecuación homogénea de primer orden y redujo la lineal a cuadraturas.

se halla expuesto en otro volumen publicado en 1755. El Cálculo integral y las Ecuaciones diferenciales ocupan cuatro monumentales tomos titulados "Institutiones calculi integralis", publicados en 1768, 1769, 1770 y 1794, respectivamente. Euler quedó ciego en 1766 y murió en 1783. El primer libro contiene una exposición muy completa y detallada de la integración de ecuaciones de primer orden; multitud de cambios de variable y especialmente el uso del factor integrante, permiten la cuadratura. La llamada ecuación de Euler $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$ en que X e Y son polinomios de igual grado y coeficientes en $x$ e $y$, respectivamente, es objeto de detenido análisis en el tercero, análisis en que aparece clara su importancia abriendo el camino de los teoremas de adición de funciones definidas por ecuaciones diferenciales (trigonométricas si $X = 1 - x^2$, $Y = 1 - y^2$, elípticas si X e Y son de tercero o cuarto grado, etc.). El tomo segundo integra ecuaciones de segundo orden y algunas de orden superior, v. gr.: las lineales de coeficientes constantes y las que llevan su nombre y son reductibles fácilmente a este caso, y resuelve la ecuación de Bessel $y'' + \frac{c^2 y}{x^{2m+2}} = 0$, cuya integral diera ya en 1762. El método para hallar la integral consiste en establecer una serie de la forma

$$y = C_1 x^{\frac{m+1}{2}} \left[ (1 - Bx^{2m} + Dx^{4m} - \ldots) \operatorname{sen} \left( \frac{c}{mx^m} + C_2 \right) \right.$$
$$\left. - (- Ax^m + Cx^{3m} - \ldots) \cos \left( \frac{c}{mx^m} + C_2 \right) \right]$$

y determinar con qué valores de $m$ las series se convierten en sumas finitas, iniciando así un proceso que tendrá más adelante, en los métodos de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden, su paralelo o generalización en las operaciones necesarias para formar la integral.

Euler observa que la lineal de orden $n$ depende de $n$ constantes y atribuye lo mismo, aunque sin demostración, a la ecuación diferencial de orden $n$. Ya en el primer tomo había definido la integral general: "Integrale completum exhiberi dicitur quando functio quaesita omni extensione cum constante arbitraria representantur." Su integral completa es la que se llama actualmente integral general. Pero ya se ha dicho que estaba reservado a Lagrange aclarar las nociones de integral general, particular y singular, y ello no solamente en las ecuaciones ordinarias, sino en las parciales de primer orden.

Al estudio de soluciones de las parciales está dedicado el tomo tercero de las "Institutiones", de Euler, iniciándose en él consideraciones desde un punto de vista general, ya que hasta Euler, fueron consideradas en casos particulares solamente. El tomo cuarto es una recopilación de trabajos de Euler como complemento de los tres anteriores. Este y el anterior contienen la extensa contribución de Euler al Cálculo de variaciones.

Euler recogió no sólo lo conocido anterior a él, sino su formidable contribución y la de sus contemporáneos; y sus textos, como ya se ha dicho, representan el monumento del saber de su época, es decir, hasta mediar el siglo XVIII. En la exposición es fiel a la idea del "tratado", es decir, un ensayo de exposición lo más sistematizada posible con objeto de que pueda servir de punto de partida para nuevos trabajos. Euler, además, es un guía y un maestro a pesar de no haberse dedicado a la enseñanza; indica casi siempre el proceso de que se ha valido para sus descubrimientos, dónde halló dificultades y cómo pudo vencerlas; señala también en qué términos se plantean los nuevos problemas y alguna vez sus tentativas de resolución. Euler cuida la forma, es sintético y preciso; constituye, pues, un modelo al que las sucesivas generaciones han debido seguir. Multitud de sus teoremas cubren páginas de los textos actuales; apenas se hallaría una persona con cultura matemática elemental que no conociera alguno.

Ya en el último tercio del siglo XVIII aparece otra figura de gran geómetra: Lagrange; pero antes de señalar sus aportaciones más importantes a la teoría de las ecuaciones diferenciales, es indispensable reconocer el mérito de Clairaut (1713-1765) y D'Alembert (1717-1783). El primero, hijo de matemático y segundo de una familia de 21 hermanos, dotado de tal precocidad que a los doce años envía comunicaciones originales a la Academia de París, y el segundo, espíritu de gran profundidad, cuya fama no sólo es debida a sus estudios de Matemática, sino a haber sido, con Diderot, el principal redactor de la "Enciclopedia" en 32 tomos publicados desde 1751 a 1780, y que condensan el espíritu del siglo y son manantial abundante de ideas filosóficas y de cultura general.

Al finalizar el primer tercio del siglo XVIII, los analistas empiezan a tratar la ecuación diferencial como problema "per se", desligado de sus aplicaciones o de casos concretos y artificios "ad hoc". Clairaut ensaya en 1739 la teoría general del factor integrante (Recherches sur le Calcul Integral), planteando la ecuación en derivadas parciales a que satisface (*) y halla los teoremas que figuran en la mayor parte de textos. Al siguiente año, insistiendo sobre el tema, integra la ecuación $Adx + Bdy$ cuando es diferencial exacta, añadiendo a $\int Adx$ una función Y de la variable

(*) Probablemente es la primera ecuación en derivadas parciales que se ofrece con carácter genérico.

$y$ definida por $\frac{\partial Y}{\partial y} = B - \int \frac{\partial A}{\partial y} dx$ y estudia el caso de tres variables, es decir, la ecuación en diferenciales totales $Adx + Bdy + Cdz = 0$. La ecuación que lleva su nombre, $y = xp + \varphi(p)$ en que $p = y'$ se encuentra en una memoria del año 1774 enviada a la Academia de París. Propiamente es la ecuación $y = xp + p - p^2$. Derivando, resulta $(2p - x - 1)\ p' = 0$, por lo tanto: $p' = 0$, que da la recta integral general, ó $2p = x + 1$, que da una parábola envolvente. Resulta así la integral derivando, lo que causó gran asombro entre los matemáticos, porque la idea de la derivación era considerada precisamente como la inversa de la integración.

D'Alembert fué quien consideró la ecuación más general $y = xp + \varphi(p)$ y también $y = xf(p) + F(p)$ (1747, publicado en Berlín en 1748). En esta publicación aparece por vez primera el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias: $n$ ecuaciones con $n$ funciones y una variable independiente. Especialmente el caso lineal con coeficientes constantes se halla resuelto sin referirse al caso de raíces múltiples de la característica. El método de D'Alembert que contienen los textos y que se utiliza precisamente en las lineales para deducir nuevas soluciones en el caso de raíces múltiples (derivando respecto de la raíz o parámetro), es de 1750, publicado también en Berlín.

Pero la fama de D'Alembert en ecuaciones diferenciales está cimentada sobre su análisis de la cuerda en vibración. La primera memoria es de 1747. Su dominio de la Mecánica le permitió plantear correctamente el problema y referirlo a la ecuación $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. En este trabajo D'Alembert da la solución con dos funciones arbitrarias $\varphi(x + at) + \psi(x - at)$, y se estudian la curva inicial y el reparto inicial de velocidades. D'Alembert afirma que la curva inicial puede ser cualquiera, y Euler, que halla su representación por una serie trigonométrica, duda ante el resultado de que ésta pueda representar una curva arbitraria, duda que tiene tal importancia que para salir de ella no hay más remedio que alterar el concepto que pudo haberse tenido de "curva", originando el estudio de la serie trigonométrica uno de los más interesantes capítulos de la teoría de funciones de variable real. Y, a la vez, iniciando los métodos de la Física matemática en que la solución debe cumplir determinadas condiciones en puntos alejados, siendo la forma más adecuada de solución la serie según ciertas funciones en las cuales entran parámetros formando un espectro de valores generalmente discretos. Pero en el año 1750 no había nacido Fourier todavía.

## VI

Lagrange (1736-1813), "el más grande matemático del siglo XVIII", "el primer geómetra de su tiempo", como han venido llamándole diversas veces a pesar de brillar en el mismo celaje y simultáneamente con Euler y Laplace, fué un caso de precocidad. A los veinte años era profesor de la Escuela de artillería de Turín, y a los veintitrés miembro de la Academia en la capital de Prusia, a propuesta de Euler. En 1766, a los treinta, fué su substituto, y vivió en Berlín durante veinte años, al cabo de los cuales, en 1787, se trasladó a París, donde dedicóse a la enseñanza en la recién fundada Escuela politécnica (1795). Se dice que comenzaba comunmente la exposición de sus lecciones con las palabras: "Je ne sais pas..."

Y sin embargo sabía mucho, y no sólo de Matemática. Lagrange estaba destinado a aclarar los problemas que aparecían confusos; a precisar los conceptos, a sacar de un método cuanto puede dar; a pasar, sin recelo, a la generalización tras el estudio profundo del caso particular y a señalar analogías entre conceptos sin conexión aparente. Su redacción es un modelo de sobriedad y concisión, atribuyendo valor al concepto que lo merece y poniéndolo de manifiesto.

Lagrange reconoció la existencia de un sistema fundamental en las lineales homogéneas, de modo que toda nueva integral se expresa mediante las integrales del sistema; introdujo la adjunta y señaló las propiedades y usos a que se presta; halló el método de la variación de constantes para resolver las lineales no homogéneas y descubrió el sentido de la integral singular analizando los discriminantes en $y'$ y en $c$ de las ecuaciones ordinarias de primer orden y grado cualquiera; redujo la integración de la ecuación de primer orden en derivadas parciales a la de un sistema de ordinarias, tanto en el caso de ser lineal como en el caso de no serlo, y extendió a las mismas el concepto de integral general, particular y singular mediante el de la integral completa con dos constantes arbitrarias para las ecuaciones en dos variables independientes

La fecha de 1774, como ya se ha dicho, corresponde a su memoria sobre soluciones singulares. En los textos sobre teoría de funciones analíticas y sobre el cálculo de funciones, insistió en forma adecuada para un curso. Sus trabajos de 1799 y 1804 tratan también acerca de soluciones singulares de sistemas de ecuaciones de orden superior y en derivadas parciales. El punto de partida de Lagrange consiste en tomar la constante arbitraria de la integral general como función de $x$ é $y$. Se considera el sistema de tres ecuaciones: la dada $F(x, y, y') = o$, la integral $I(x, y, a) = o$ y el resultado de derivar ésta respecto a $x$ suponiendo con toda generalidad $a$ función de $x, y$:

$$\frac{\partial I}{\partial x} + \frac{\partial I}{\partial y} y' + \frac{\partial I}{\partial a} \left( \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y} y' \right) = 0$$

Si se escribe $\frac{\partial I}{\partial x} + \frac{\partial I}{\partial y} y' = 0$ y de este valor se saca $a$ para substituirlo en $I(x, y, a) = o$, el resultado $F(x, y, y') = o$ supondrá, o bien $\frac{\partial I}{\partial a} = 0$ o bien $a =$ constante. Esta última es la solución particular, siendo $I(x, y, a) = o$ la integral general; pero también conduce a $F(x, y, y') = o$ y puede satisfacer a la ecuación propuesta el valor de $a$ sacado de $\frac{\partial I}{\partial a}$ si efectivamente las tres ecuaciones:

$$F(x, y, y') = 0 \quad , \quad \frac{\partial I}{\partial x} + \frac{\partial I}{\partial y} y' = 0 \quad . \quad \frac{\partial I}{\partial a} = 0$$

tienen una solución común: $y = f(x)$. Esta solución común es la envolvente de las curvas integrales particulares, y no es necesario, cuando exista, recurrir, para hallarla, al discriminante en $a$ de la integral general, pues es evidente que en el contacto entre la envolvente y la envuelta hay bifurcación: $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$. Por lo tanto, la integral singular, si existe, verifica el siguiente sistema: $F(x, y, y') = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$. Y recíprocamente.

Con esto no sólo queda demostrada la naturaleza de la integral simple, sino que queda abierto el camino a toda clase de generalizaciones; a saber, a ecuaciones ordinarias de orden cualquiera y a ecuaciones en derivadas parciales. Además, la noción de bifurcación, introducida aquí por primera vez, será de una importancia capital en el desarrollo de la Matemática y sus aplicaciones. "En sorte que l'on peut regarder tan les courbes touchées que le courbe touchante comme une courbe ayant une infinité de branches liées entre elles par la méme équation. V. Oeuvres, tomo IV, pag. 39." Lagrange se equivoca al seguir diciendo: "Puisque $I(x, y, a) = o$ "admet" une enveloppe tangente a chacune des developpées, toute $F(x, y, p) = o$ aura une integrale singulière", lo cual es erróneo, porque pueden ser nulos $\frac{\partial F}{\partial x}$ y $\frac{\partial F}{\partial y}$, y la curva obtenida por la eliminación de $y'$ entre $F = o$ y su discriminante en $y'$ ser, no una envolvente, sino un lugar de puntos de retroceso, y esto es lo que ocurre en general para las $F(x, y, y') = o$ algébricas.

No pretendemos examinar más detenidamente esta cuestión sino solamente pasar con el mismo razonamiento al caso de las derivadas parciales. Si $F(x, y, z, p, q) = o$ es la ecuación dada y $I(x, y, z, a, b) = o$ una expresión que la satisface cualesquiera que sean $a$ y $b$, de la derivación de I respecto de cada variable independiente, se deduce

$$\frac{\partial I}{\partial x} + \frac{\partial I}{\partial z} p + \frac{\partial I}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial I}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial I}{\partial y} + \frac{\partial I}{\partial z} q + \frac{\partial I}{\partial a} \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial I}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial y}$$

Determinar $a$ y $b$ supuestas funciones generales de $x$ e $y$ por

$$\frac{\partial I}{\partial x} + \frac{\partial I}{\partial z} p = 0 \quad , \quad \frac{\partial I}{\partial y} + \frac{\partial I}{\partial z} q = 0$$

y llevar sus valores a $I(x, y, z, a, b) = o$ para obtener $F(x, y, z, p, q) = o$, es una operación que supone simultáneamente

$$\frac{\partial I}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial I}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial I}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial I}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial y} = 0$$

pero estas dos ecuaciones conducen, o bien a ser

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial y} = 0$$

o sea $a$ y $b$ constantes, o a ser $\frac{\partial I}{\partial a} = \frac{\partial I}{\partial b} = o$, o finalmente, si estas dos no son cero, no hay más remedio que ser $\frac{D(a,b)}{D(x,y)} = o$, o sea $a =$ función arbitraria de $b$. En el primer caso se tiene la integral completa de Lagrange; en el segundo, la singular (eliminando siempre $a$ y $b$), y en el tercero, la general, eliminando $a$ entre la completa y su derivada respecto a $a$ después de haber escrito $\varphi(a)$ en vez de $b$, siendo $\varphi$ arbitraria. La integral general contiene una función arbitraria.

En las ecuaciones ordinarias de segundo orden hay que partir de un sistema $F_1(x, y, z, y', z') = o$, $F_2(x, y, z, y', z') = o$, en que $z = y'$, por ejemplo, y el razonamiento es semejante. En cambio, si se aplica a la eliminación de constantes en funciones con menos variables independientes que constantes arbitrarias, v. gr.: cinco constantes y dos variables para alcanzar la ecuación de segundo orden, se va a parar a ecuaciones "especiales" de orden superior al primero y la noción de integral general se esfuma y desvanece. Puede decirse que el concepto de integral general y singular no puede ir más allá de los límites que Lagrange le asignara, y aun cabría un examen mucho más detenido para precisarlo (*).

Lo que abona más el mérito de Lagrange es el haber resuelto varios

(*) Hay autores que no lo creen suficientemente riguroso. En el tratado de ecuaciones diferenciales de variable real de Kamke, que se precia de tal, no figuran tales conceptos.

problemas y presentado diversas teorías, v. gr., el cálculo de Variaciones en forma clara y sencilla, podríamos decir definitiva, precisamente en materias en las que sus contemporáneos se esforzaron largamente. Y, en efecto, tan perfecta y clara resulta la exposición, que hoy día, transcurrido más de siglo y medio, se encuentran en la exposición corriente de tales teorías casi las mismas frases. Lagrange escribió también un tratado de Mecánica analítica, que prevalece a través de los textos corrientes y puede leerse con interés que apenas ha disminuído con los años.

En materia de ecuaciones diferenciales tenía mucha importancia la integración por series de las ecuaciones de la Mecánica celeste; la circunstancia de ser las excentricidades y las inclinaciones y aun las masas relativamente pequeñas, hacía plausible el desarrollar las perturbaciones de la órbita de Kepler (o circular) según potencias de tales cantidades. Los geómetras perfeccionaron mucho estos desarrollos, a los que la práctica parecía dar carta de naturaleza, pues los cálculos venían confirmados por la observación. Lagrange contribuyó a tales estudios con la invención del método llamado de la variación de constantes que aplicó por primera vez a la ecuación

$$y^{(q)} + K^2 y + L + aMy^2 + a^2Ny^3 + \dots = 0$$

Se le debe también un proceso de solución por fracciones continuas basado en el cambio recurrente de variable $y = \frac{ax^\alpha}{1 + \eta}$, siendo $ax^\alpha$ un valor aproximado de $y$ para pequeños valores de $x$. Este valor, llevado a la ecuación diferencial, permite expresar $\eta$, a la que se da la forma $\eta = \frac{a_1 x^{\alpha_1}}{1 + \eta_1}$, y así sucesivamente. La identidad de la substitución determina $a$ y $\alpha$ en cada caso.

En la teoría de ecuaciones en derivadas parciales, Euler, en 1734, establece el principio de resolución de una ecuación $F(x, y, z, p, q) = 0$ por la reducción a un sistema de ecuaciones ordinarias. En Euler aparece también la idea de reducir el problema a la integración de $dz = pdx + qdy$, siendo $dz$ una diferencial exacta. Se trata, pues, de deducir $p$ y $q$ de modo que cumplan con esta condición y la de $F = 0$. Euler no consiguió la teoría general, sólo pudo integrar ecuaciones particulares, si bien con mucho ingenio, interviniendo en las integrales una función arbitraria, pues se había reconocido la necesidad de que figurara en la "integral general", o propiamente se definía la integral general cuando aparecía en efecto la función arbitraria y su eliminación conducía a la ecuación propuestas.

A pesar del método de análisis que acaba de indicarse, parece probado que Euler ignoraba que la lineal de primer orden homogénea $\sum_1^n X_r \frac{\partial f}{\partial \varphi_r} = o$ ó $X_0(f) = o$ es inmediatamente reductible a un sistema de ordinarias de primer orden porque expresa la propiedad diferencial de una de las integrales del sistema escrita en la forma $f(x_1 x_2 \ldots x\ ) =$ $=$ constante. Esta propiedad no aparece clara sino en Jacobi; sin embargo, Lagrange debió de operar con ella, aunque fuera de un modo intuitivo, desde 1779, y figura en la solución general de la ecuación en derivadas parciales de primer orden no lineal publicada por Lagrange en 1797 en su "Théorie des fonctions analytiques" y expuesta también por él en 1801 en su "Calcul des Fonctions", que no es suya, aunque él contribuyera mucho a descubrirla, sino de un su alumno, Charpit, que en 1784 presentó un trabajo a la Academia de Ciencias en el cual obtiene con gran sencillez la solución que el gran Lagrange se esforzara inútilmente en conseguir. La memoria de Charpit cayó en olvido; parece haber sido conocida de Lacroix, pero como Lagrange no la cita en sus textos, los matemáticos dudaron de su existencia. Hoy no es posible dudar, pues se encontró el manuscrito en 1928. La memoria fué comunicada a Lagrange en 1793. El alumno tuvo la suerte de formular las características:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = \frac{-dp}{X + pZ} = \frac{-dq}{Y + qZ} \quad (*)$$

y demostrar que *una* integral primera de las mismas expuesta en la forma $H(x, y, z, p, q) =$ constante, de la que, con la dada $F(x, y, z, p, q) = o$, puedan despejarse $p$ y $q$ conduce para éstas a valores que satisfacen la condición de ser $dz = pdx + qdy$ una diferencial exacta. Integrándola por el proceso conocido se introduce una nueva constante de modo que $z$ viene así en función de dos constantes y es una integral completa de la que cabe deducir la general según el método de Lagrange.

En la exposición actual de la teoría, debida a Jacobi, se suele decir que el sistema de ecuaciones antes escrito es equivalente a la ecuación en derivadas parciales homogénea y de primer orden a que satisface $H =$ Const., si el sistema $F = o$, $H =$ Const., constituye un sistema completamente integrable, es decir, tal que los valores de $p$ y $q$ que se deduzcan, satisfagan

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} q = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z} p.$$

lo que se expresa también diciendo que F y H están en involución o que

(*) X, Y, Z, P, Q son las derivadas parciales de F respecto de $x$, $y$, $z$, $p$, $q$, respectivamente.

el paréntesis de Weiler (F H) = *o*. El método supone, naturalmente, la posibilidad de despejar *p* y *q*, es decir $\frac{D(F,H)}{D(pq)} \neq 0$. Con esto quedaba completamente desbrozado un camino que durante mucho tiempo fué buscado vanamente y por el que habían de lanzarse Pfaff en 1815 aplicándolo al caso de un número cualquiera de variables, y especialmente Jacobi, que hubo de generalizar el proceso al caso de varias ecuaciones con mayor número de variables independientes en su famosa "Nova methodus" de 1838, publicada en 1851 por Clebsch.

Contemporáneo de Lagrange fué Laplace (1749-1827). El nombre de Laplace se repite constantemente en Ecuaciones diferenciales, principalmente por su famosa $\Delta V = o$, ecuación diferencial de segundo orden del tipo elíptico que se ofrece en gran número de problemas de Hidrodinámica y Potencial especialmente. Las funciones $Y_n = r^{-n}V$ que sobre la esfera son regulares y para los polos correspondientes a latitudes $\theta = 0$, $\theta = \pi$ son finitas e independientes de la longitud $\varphi$ son las llamadas funciones esféricas de Laplace, que comprenden como caso particular las zonales o de Legendre independientes de $\varphi$. Laplace, que se ocupó preferentemente en temas derivados de la atracción universal, había, en efecto, de manejar estas funciones, pues son las adecuadas e inherentes al problema cuya solución fundamental es $\frac{1}{r}$, y en efecto, se encuentra en su obra la ecuación a que satisfacen las Y , su desarrollo en zonales y el desarrollo de una función cualquiera de $\theta$ y $\varphi$. De Laplace arrancan los estudios sobre Potencial y funciones armónicas generalizadas en que *n* ya no es entero, así como la expresión de tales funciones por integrales definidas. Precisamente esta forma de representación parece ser la más adecuada, y Laplace supo manejarla maravillosamente. Él introdujo además la integral definida con el núcleo $e^x$ que define las funciones determinantes y aplicólas en el plano complejo a la resolución de la ecuación diferencial lineal de coeficientes binomios $a_r + b_r x$. Laplace es, finalmente, el inventor del llamado método de cascada en la resolución de ecuaciones de segundo orden en derivadas parciales y lineales.

Grande fué el éxito de la Matemática en los tiempos movidos de la Revolución, Imperio, Regencia, República, con que rápidamente se sucedía el gobierno de la nación francesa. El tratado de Mecánica celeste de Laplace, que pocos podrán dominar ahora, y menos en la época en que fué escrito, llegó a alcanzar la popularidad de lo que muchos elogian y casi nadie entiende.

## VII

La generación que contempló el tránsito del setecientos en el Sinaí político y científico donde rápidamente alboreaban y se consumían, caducas, las más diversas formas de gobierno, en guerra con el mundo entero y en agitación frenética de todas las pasiones, supo, no obstante, elegir y desenvolver las voluntades e inteligencias que habían de conseguir éxito y gloria a través de todas las vicisitudes. Lo logró en gran parte valiéndose de la Enseñanza. La Politécnica, creación del 1795, fué cuna espiritual de los hombres que con mayor inteligencia defendieron la primera República y coadyuvaron a los éxitos militares de Napoleón. En esa escuela se formaron artilleros y técnicos en minería y obras públicas. Matemática y militar a un tiempo, debió su primitivo éxito a Monge, talento organizador y espíritu dotado de gran fuerza de intuición. Fué a la vez político, y su obra política de más enjundia fué acaso el desarrollo que supo dar a la Escuela. Monge (1746-1818) era un espíritu fundamentalmente geómetra; en lo recóndito de su proceso mental veía la figura y seguía en ella el razonamiento abstracto, dándole firmeza y elegancia tales, que han resistido el tránsito del tiempo y se exponen hoy en términos casi idénticos. Su creación más genial es, probablemente, el método de las características para construir superficies definidas por ecuaciones diferenciales. Además dió en Geometría diferencial la idea y ecuación de las líneas de curvatura, trató las superficies imaginarias que tienen sus radios principales de curvatura iguales y del mismo signo, con las cuales pudo integrar la ecuación de las superficies mínima, ecuación formulada en 1760 por Lagrange:

$$r(1+q^2)+t(1+p^2)-2pqs=0$$

y de la que Meusnier (1754-1793), había deducido en 1776 la propiedad de ser los radios de curvatura iguales y de distinto signo y descubierto las soluciones del helicoide alaleado y el catenoide. Ocupóse en ecuaciones en diferenciales totales de primero y segundo grado; en las primeras hizo ver cómo a pesar del comentario de Euler, una ecuación en diferenciales no integrable podía tener un significado definido con tal de rebajar la dimensión en la variedad que la satisface; y a las segundas se las llama de Monge, a propuesta de Lie. En una época en que dominaba el espíritu de Lagrange, que alardea de no haber una sola figura en su tratado de Mecánica, Monge, con imponderable maestría, levanta el edificio de la verdad geométrica con la herramienta y argamasa analítica, pero con el sillar de la figura compuesta de líneas y superficies. Provoca la admiración del propio Lagrange, que dice: "Avec son application de l'Analyse a la répresentation des surfaces, ce diable d'homme sera inmortel!". Temperamento político, de ardiente republicano pasa a ser admirador de Napoleón. Fabrica cañones y levanta planos. Dibuja con rara habilidad e inventa la Geometría descriptiva, que enseñó en la Escuela Normal, fundada en 1795. Su obra fundamental, que fué texto en la Politécnica y que plasma sus lecciones, es la que lleva por título "Feuilles d'Analyse appliquée a la Geométrie", publicadas en el primer año de la Escuela. Casi todo lo que antes hemos citado se encuentra en ella, pero los primeros trabajos de Monge son de 1770. La Geometría diferencial clásica que nuestra generación ha aprendido en los textos corrientes de cálculo, especialmente las ecuaciones diferenciales de familias de superficies y su integración, es casi toda obra de Monge. Monge dejó estela. Fué discípulo suyo Dupin, ingeniero dedicado a la construcción de barcos, a quien se debe la noción de indicatriz, de líneas asintóticas, etcétera, y Lamé, el de los parámetros diferenciales, que introdujo coordenadas curvilíneas e hizo de ellas empleo sistemático hasta el extremo de llegar a afirmar que todo problema, v. gr., de Física matemática, es cuestión de coordenadas. De Monge, en línea directa, fué sucesor Darboux, del que nos ocuparemos más adelante, el cual restablece la manera de Monge, que sus discípulos Carnot y Poncelet abandonaron como reacción puramente geométrica al dominio absoluto del análisis.

Monge consideró también ecuaciones de tercer orden en derivadas parciales, es decir, introdujo los elementos de tercer orden en geometría diferencial. En Monge aparece la primera transformación de contacto en un método de integración de ecuaciones en derivadas parciales (1784). La ecuación más comunmente conocida de Monge es la ecuación en derivadas parciales $Ar + Bs + Ct + D = o$, lineal y de segundo orden que estudió de manera profunda y elegante por su método de características y que podría llamarse también de integrales intermediarias de primer orden. La idea fundamental es la reducción operativa, la posibilidad de referir el segundo orden al primero, donde a la sazón se conocía el modo de transformar el problema en otro de integración de ecuaciones ordinarias de primer orden. Y para ello se procede siempre análogamente, se consideran ecuaciones sencillas reductibles, luego se busca la posible generalización. Esta suele hallarse mediante transformaciones que permitan referir la más general a ecuaciones cuya integración es conocida.

Monge plantea las características como elementos de una multiplicidad de contacto ($dp = rdx + sdy$ , $dq = sdx + tdy$) que no determina la integral; en el caso presente, porque la expresión de $r, s, t$ tiene la forma $\frac{0}{0}$ cuando se despejan $r, s, t$ de la ecuación dada y las condiciones de contacto. Y no determinan la integral por ser los elementos naturales de ella, por estar imbuídos en todas las superficies integrales, *formadas por características. Acontece aquí que las ecuaciones de* las características no constituyen un sistema suficiente para su determinación. Falta una ecuación. Pero sus combinaciones integrables, para cuya formación no hay regla, tendrán integrales primeras: $V(x, y, z, p, q) = $ Const., tales que $dV = o$ es consecuencia de las ecuaciones que definen las multiplicidades características. Si hay efectivamente tal integral, resulta ser una solución simultánea y común a un sistema de dos ecuaciones lineales y de primer orden. Si se pueden hallar dos integrales primeras, U y V, la expresión U = función arbitraria de V es una integral intermedia, y la integración de ésta por los procesos conocidos da la otra función arbitraria que Monge necesita para expresar la integral. El sistema simultáneo de primer orden y lineal tiene dos ecuaciones y cinco variables independientes. Si, por ejemplo, es un sistema completo, es decir, que no haya en cierto modo dependencia alguna entre las dos ecuaciones dadas, puede tener hasta tres integrales distintas, U, V, W, que están en involución, y hay dos integrales intermediarias con las dos funciones arbitrarias que requiere la solución. Los dos sistemas de ecuaciones diferenciales se reducen entonces a uno solo; las características constituyen un sistema doble. El problema aparece reducido al de la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales parciales de una variable dependiente y cinco dependientes, problema reductible a una sola lineal, según demostró Jacobi. Pero aun sin necesidad de esta reducción, las integrales que el sistema admite pueden resultar de combinaciones integrables directamente halladas mediante el sistema de ecuaciones diferenciales de las características.

Del conocimento del método de Monge surgen multitud de otras cuestiones acerca de los sistemas de características, casos particulares en que son distintos o se confunden, ecuaciones más generales no lineales en que existan integrales intermedias que puedan obtenerse por el mismo proceso, forma de las integrales cuando se conocen menos integrales del sistema de las características, determinación efectiva de la integral, v. gr., por dos características diferentes o por elementos de contacto dados o curvas obligadas de arranque, estudio de ecuaciones no lineales, noción de características de orden superior, etc., que constituyen los temas a que los analistas prestarán su atención preferentemente. El primero de ellos, Ampére, que descubre en 1820 que el método anterior es aplicable a la ecuación no lineal $Ar + Bs + Ct + D + N(rt - s^2) = 0$ es decir, que en esta forma hay una integral intermedia $U = \varphi(V)$ siendo $\varphi$ arbitraria, lo que es la base del método de Monge. Con esta observación se amplía extraordinariamente el método por su aplicación a gran cantidad de ecuaciones que la Geometría diferencial había formulado.

Monge trató, como se ha dicho, ecuaciones no lineales, pero en general las redujo a lineales, y atacó directamente la ecuación lineal de tercer orden observando que las características de segundo orden tampoco constituían un sistema completo de ecuaciones ordinarias. Las ecuaciones procedentes del planteo de problemas de Física matemática, de Hidrodinámica y Elasticidad especialmente, ofrecieron ejemplos de sistemas de ecuaciones de orden segundo y en derivadas parciales, y pronto se vió que era sumamente difícil pretender en ellos una integración semejante. A partir de Ampére y de Darboux, apenas se ha podido avanzar en este terreno.

La memoria fundamental de Ampére contiene un primer ensayo de generalización y clasificación. En las ecuaciones de segundo orden no lineales puede ocurrir que no haya características de primer orden, o que haya sólo un sistema doble o sencillo o dos sistemas distintos, como en el caso de Monge-Ampére (que también puede presentarlo doble como caso particular). La existencia de características de primer orden es equivalente a la de integrales intermedias. Ampére generalizó a las ecuaciones en derivadas parciales la noción de integral general, aplicando la extensión del concepto a una de las propiedades de las integrales generales de ecuaciones ordinarias o en derivadas parciales del primer orden. La integral general de Ampére, definida por éste en el cuaderno XVII de la Politécnica, año 1815, es tal, que al derivarla indefinidamente no satisface más que a la ecuación diferencial propuesta y sus derivadas. Este concepto dió lugar a más de una dificultad por existir integrales de Ampére incapaces de adaptarse a una multiplicidad arbitraria inicial definida por una curva y los planos tangentes, por lo que la definición fué luego modificada por Darboux, que demostró que si la integral es adaptable a cualquier multiplicidad arbitraria, será integral general de Ampére. Pero con ello se demuestra que el concepto de integral general es mucho menos claro, preciso y general que en ecuaciones ordinarias o de primer orden. Si se intenta aplicar el método de la integral completa, es decir, hallar la ecuación diferencial por un proceso de eliminación de constantes, v. gr., complejo de curvas con tres parámetros o de superficies, se va a parar a ecuaciones de segundo orden muy particulares, las cuales se reducen por una transformación de contacto a $rt - s^2 = o$.

Ampére definía integrales generales de primera clase a todas aquellas en que $x$, $y$, $z$ son expresables en función de dos parámetros $\alpha$, $\beta$ y una función arbitraria de $\alpha$ y otra de $\beta$, expresables en forma explícita, aunque intervenga una cuadratura, con tal que la cuadratura no sea parcial, es decir, bajo el signo integral no debe haber más que una variable, aunque pueda haber una función arbitraria de la misma. Este concepto de clase debe de ser de mucho interés y convendría profundizarlo. El método de Darboux para integración de ecuaciones de segundo orden mediante las características de orden superior, logra la integración siempre que se aplica a ecuaciones de la primera clase de Ampére. El método de Darboux es del año 1830 y viene a ser una adaptación del proceso de Lagrange-Charpit; a la ecuación dada se añaden dos integrales obtenidas por combinaciones de los sistemas diferenciales de las características de cualquier orden; las dos integrales dan una nueva ecuación compatible con la propuesta y con una función arbitraria. Con otra integral semejante se tiene un sistema de ecuaciones en diferenciales totales lineal integrable (derivándolo si es preciso); el problema queda reducido a integrar este sistema.

Ampére añadió varias integrales al catálogo de las que pudo alcanzar Monge. En los textos figuran hoy día en gran número; algunas llevan nombres especiales, según los matemáticos que las integraron o los problemas en que se ofrecieron; las hay en que el proceso de Darboux no puede conducir a resultado alguno, v. gr., la de las superficies de curvatura constante $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \operatorname{sen} t\, z$. Por lo tanto, derivan de estas cuestiones multitud de problemas, v. gr., cual es la forma de $f(z)$, que en $s = f(z)$ hace que la ecuación sea integrable por el método de Darboux? Este problema fué resuelto por Lie, en 1880, y otros matemáticos se ocuparon en formas más generales, v. gr., $s = f(x, y, z, p, q)$. Pero hay cuestiones no resueltas, v. gr., ¿cómo se sabe si una ecuación dada pertenece a la primera clase de Ampére? ¿Cómo se determina a priori el límite del proceso de Darboux, es decir, el orden de las caracteristicas que se utilizan? ¿Qué método hay para resolver una ecuación a la que el método de Darboux no es aplicable? Se conocen soluciones de ecuaciones muy corrientes en forma de integrales parciales; la misma ecuación de Laplace tiene la solución de Whittaker $\int_0^{2\pi} f(z + i\,x \cos u + i\,x \operatorname{sen} u)\,du$ pero ¿cómo se establecerá que una ecuación dada tiene integrales de este tipo? Y queda aún el problema de las transformaciones, es decir, de la reductibilidad a tipos definidos mediante transformaciones puntuales, de contacto, etc., lo que nos ocupará más adelante.

Porque es necesario hacer marcha atrás por haber dejado la matemática alemana, que con la trinidad de Pfaff, Gauss y Jacobi, introdujo en ecuaciones diferenciales, métodos que se han hecho clásicos y conocimientos de la mayor importancia.

## VIII

Pfaff fué maestro de Gauss. En ecuaciones diferenciales su nombre va unido a la reducción de ecuaciones en diferenciales totales lineales; los textos traen la referencia de Euler, 1770, cuando señala que una expresión $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = o$ que no sea diferencial exacta, no tiene sentido, y la observación de Monge, 1784, de que indudablemente lo tiene, pues basta escribir $z = \varphi(x)$, y determinar, por ejemplo, $y$ en función de $x$ por la ecuación que queda. Lo que ocurre es que no da superficies, pero sí curvas. Pfaff dió genéricamente el significado y la forma canónica de la expresión diferencial. La obtención de la forma canónica (*) es el problema de Pfaff (**). La memoria de 1814 contiene la solución, tal vez premiosa, dada por Pfaff. La memoria publicada en los clásicos de Ostwald lleva por título "Methodus generalis, aequationes differentiarum partialium, nec non aequationes differentiales vulgares, utrasque primi ordinis, inter quotcumque variabiles complete integrandi". La dificultad e importancia considerable del tema y haberlo tratado y desarrollado grandes matemáticos como Grassmann (1862), Frobenius (1876). Lie, Darboux (1877) y Cartan (1899), entre otros, hace que ocupe un lugar muy relevante en la Historia de la Matemática. La tesis de Pfaff es la siguiente, si $2n$ ó $2n - 1$ es el número $m$ de variables en la ecuación $X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \dots X_m\,dx_m = o$, hay un sistema integral que la satisface con no más de $n$ ecuaciones simultáneas. El caso observado por Monge corresponde a $2.2 - 1$ variables, luego hay dos integrales simultáneas: $z = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$, como es evidente. Pfaff no

(*) La voz canónica, se encuentra usada por primera vez por Harriot en 1631 en su tratado "Artis Analiticae Praxis".

(**) Según nota de Brannmühl en el Congreso de matemáticos de Heidelberg, en 1906. Newton trató un problema de Pfaff y en cierto modo indicó la introducción de una función arbitraria. V. el artículo de Cajori publicado en la "Revista matemática" en 1929, pág. 81.

dió una demostración irreprochable, y el proceso de obtención de las integrales se funda en la reducción sucesiva de una en una de las diferenciales mediante la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. La forma resultante con $n$ diferenciales es la canónica. En estas reducciones intervienen determinantes tales que $a_{rs} = - a_{sr}$ siendo nulos los elementos de la diagonal principal. Son los determinantes Pfafianos, antisimétricos, iguales a un cuadrado perfecto si su orden es par e iguales a cero en caso contrario. Toda transformación de contacto es una ecuación de Pfaff special. Estudiar la transformación equivale, por lo tanto, a determinar los invariantes de la ecuación de Pfaff, De lo que se deducen generalizaciones diversas, v. gr., con ecuaciones de transformación $F_1 (x, y, z, x' y', z', p, p', q, q') = o$, $F_2 = o$, etc., qué ecuaciones en derivadas parciales permanecen invariantes (Backlund, 1876).

La introducción de la forma diferencial exterior y la derivación exterior obtenida por el teorema de Stokes, debidas a Cartan, han dado gran lucidez a la teoría, permitiendo desarrollarla con símbolo más adecuado y hacerla susceptible de generalizaciones entre las cuales la más inmediata abre el paso a la teoría de los grupos infinitos.

Jacobi (1804-51) pertenece por completo al siglo XIX, pero puede decirse que, en cierto modo, es el continuador de la manera matemática del ochocientos, en la que se introdujo estudiando las obras de Euler, como Lagrange. Los textos de Euler y de Lagrange, la Mecánica celeste de Laplace y su Cálculo de probabilidades, han tenido una influencia extraordinaria en la difusión de la Matemática. La misma Dinámica analítica de Jacobi, y sus "Fundamenta Nova" sobre funciones elípticas han sido estudiadas por la generación que ha precedido a la actual como base indispensable de cultura matemática. Esta, en los comienzos del ochocientos había alcanzado tal extensión y dominio que empieza a ser necesaria una especialización. El éxito constante, la pluralidad de ideas que brota abundante de cualquier problema que se profundice, desarrolla el gusto por la investigación y ésta pasa a ser una imposición en la enseñanza. Para fomentarla fúndanse seminarios donde se establece el diálogo entre los maestros y los educandos; Jacobi, espíritu inquieto y brillante, fomenta el nuevo alarde con los temas y modos del setecientos. Para el rigorismo de Gauss no tenemos tiempo, declara. Y examina y generaliza sucesivamente el multiplicador, que considera en un sistema, no ya en una ecuación solamente y del que descubre casi todas las propiedades que se encuentran en los textos corrientes: las ecuaciones lineales de primer orden simultánea cuyo problema de compatibilidad e integración resuelve: la identidad de su nombre que le permite referir la integración de las canónicas de Hamilton a la posibilidad de encontrar una integral completa de una ecuación en derivadas parciales, invirtiendo así el orden operativo que por dificultad creciente considera una ordinaria, un sistema, una lineal en derivadas parciales, un sistema de tales, una ecuación de primer orden no lineal, un sistema, etc., y estima resuelto un problema cuando puede referirlo a su inmediato anterior. Jacobi refirió al problema inmediato anterior la integración de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales no lineal, y por una feliz ampliación del método de Charpit. Este proceso, conocido por segundo método de Jacobi, fué inventado en 1836 y publicado por su discípulo Clebsch en 1862. Se titula "Nova methodus aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium quemcumque propositas integrandi", y se publicó en el tomo 60 del "Crelle".

La introducción de la noción involutiva en el sistema de $m$ ecuaciones con $n > m$ variables independientes, permite, en efecto, reducir la cuestión a un sistema completo en involución con un número de ecuaciones igual al de variables independientes. Si el sistema dado goza de estas propiedades y el determinante funcional de las derivadas permite despejar a éstas, se verifica, como en el caso de Lagrange-Charpit, que el problema se reduce a integrar una ecuación de Pfaff de la que se sabe que es diferencial exacta. Si el sistema dado no es un sistema completo en involución ni incompatible, se puede transformar en un sistema completo por la adición de nuevas ecuaciones $F_{m+1} = 0$ de primer orden, en involución con todas las demás $F_r = 0$ para $r = 1, \ldots m$. El determinar esta nueva ecuación $F_{m+1} = 0$ exigía en el método de Lagrange y Charpit hallar una sola integral del sistema de ecuaciones ordinarias características; aquí precisa hallar una solución solamente del sistema lineal homogéneo de primer orden que resuelta jacobiano, es decir tal que $X_r(X_s(F)) - X_s(X_r(F)) = 0$ y que expresa la involución de $F_{m+1}$ con las demás ecuaciones. El problema queda, pues, reducido a la integración de sistemas jacobianos, más propiamente, a hallar una integral del sistema jacobiano de $r$ ecuaciones con $2n$ variables independientes, que, como demostró el propio Jacobi, se reduce a una sola ecuación lineal mediante la iteración del proceso que rebaja en una unidad tanto $r$ como $2n$, haciendo intervenir una integral de una de las ecuaciones del sistema. Entendiendo por operación la determinación de tal integral de una ecuación en derivadas parciales lineal y la consiguiente reducción en una unidad, el hallar la integral $F_{m+1} = 0$ representa una operación de orden $2n - 2m$, porque se conocen $m$ integrales del sistema; la determinación de $F_{m+2}$ una operación de orden $2n - 2(m+1)$, y así sucesivamente hasta la cuadratura final de la ecuación diferencial exacta. Como caso particular se tiene el de una sola ecuación con un número cualquiera de variables independientes.

El nombre de Jacobi se encuentra también en el cálculo de variaciones al considerar la condición de existencia de un campo de extremales, y equivale a excluir los focos del campo.

Jacobi dejó fama de ser gran maestro, de saber despertar el interés de discípulos y compañeros por sus problemas y cuestiones. Fué siempre racionalista; la Ciencia era su religión, el objeto de la misma el honor del espíritu humano, y dentro de ella, "Mathesis est scientia earum quae per se clara sunt". Dotado de una extraordinaria viveza, fué mordaz y sarcástico; rico primero y luego pobre, bienquisto en la corte al principio y tenido por sospechoso después. Su extraordinaria facilidad para tratar las cuestiones iniciadas por otro, le llevó a espigar en muchos campos. Su obra perdura en la de los tratadistas modernos y su nombre se ofrece con la aureola del prestigio a todos los estudiosos de la Mecánica y Funciones elípticas.

## IX

Gauss, y especialmente Cauchy, son los que imprimen a la Matemática del siglo XIX su carácter más relevante. Gauss (1777-1855) y Cauchy (1789-1857) introdujeron lo que ha dado en llamarse el rigor científico. Cauchy, además, la teoría de funciones de variable compleja. Ambos fueron universales, sembraron en todos los terrenos de la Matemática pura y aplicada. Gauss era un gran calculista, y Cauchy empezó su carrera de Ingeniero con trabajos técnicos. Su cultura fué vastísima dentro y fuera de la Matemática. Ambos escribieron mucho y hallaron y estudiaron más de lo que escribieron, bien al revés de lo que acontece con multitud de hoy día, donde hay quienes escriben más de lo que estudian.

El primer criterio de convergencia de una serie parece ser el de Gauss con la hipergeométrica (1812). De 1816 datan sus primeros trabajos de Geometría diferencial, con ocasión de sus estudios geodésicos.

Las Disquisiciones acerca de superficies curvas, son de 1827. En ellas se introduce el concepto de curvatura de Gauss como producto de las curvaturas principales, su constancia en toda deformación por flexión sin dilatación, etc. Con esta memoria comienza el estudio intrínseco diferencial en la Geometría.

A Cauchy deben las ecuaciones diferenciales las dos bases de estudio mencionadas: los teoremas de existencia y la introducción de la variable compleja. De Cauchy arranca, por lo tanto, toda la orientación moderna. Además completó y realizó multitud de teorías y métodos, v. gr., en la noción de curvas características y su aplicación a la integración de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden. La influencia de Cauchy es sobrado conocida para que sea necesario insistir con gran detalle; en todos los textos se menciona el método del polígono para la definición de la curva integral en $y' = f(x, y)$ y el método de las mayorantes, aplicable a funciones de variable compleja que sean analíticas en ambas variables. En este caso la definición $y' = f(x, y)$ conduce a la construcción de una $y = \varphi(x)$ en forma de serie procediendo en toda el área de holomorfia según las potencias de $x$, serie de la que es posible dar un radio de convergencia mínimo $\rho$ en función de los radios de convergencia $a$ y $b$ de la serie que define $f(x, y)$ aldededor de un punto inicial $0, 0$ por el que pase la solución $y = \varphi(x)$. Los métodos que perfeccionen el de Cauchy darán valores cada vez mayores del radio de convergencia, dentro del cual es valedero $y = \varphi(x)$ El valor más elevado que se conoce, en general, viene dado por $\rho = a\left(1 - e^{-b/2aM}\right)$ siendo M el límite superior de $|f(x, y)|$ en los círculos de radios $a$ y $b$ en cuyas circunferencias $f(x, y)$ es continua. El método es aplicable a sistemas de ecuaciones de primer orden, a ecuaciones en diferenciales totales, en derivadas parciales con tal de que sea posible el despejar un elemento o sistema de orden inferior y que la función o funciones que figuren en el segundo miembro sean analíticas en sus argumentos. El proceso fué objeto, en efecto, de extensión y desarrollo por parte de numerosos matemáticos. Kowalewsky, por ejemplo, considera un sistema "normal" de ecuaciones en derivadas parciales en que aparecen despejadas en los primeros miembros de $p$ ecuaciones las derivadas respecto a una independiente $x_1$ de las diversas funciones $z_1\ z_2 \dots z_p$ según los órdenes más elevados, pudiendo contener los segundos miembros derivadas de orden menos elevado y aun derivadas mixtas con tal que ningún orden parcial de éstas exceda los órdenes de los primeros miembros. En época más reciente, contemporánea, dentro del siglo actual y fines del anterior, varios matemáticos franceses han generalizado mayormente los resultados. A mayor generalización corresponde en general menor conocimiento de las propiedades de la integral, v. gr., si en las ecuaciones en derivadas parciales los segundos miembros son analíticos, no cabe asegurar que *todas* las integrales lo sean. El problema más general puede enunciarse del siguiente modo: Dado un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de orden cualquiera, con un número cualquiera de variables independientes y funciones desconocidas, averiguar si el sistema posee integrales, y en caso afirmativo, cómo depende la solución de los elementos arbitrarios, sean constantes o funciones.

El método del polígono es la generalización directa de la integral de Cauchy o cuadratura simple aplicada a $y' = f(x)$. Es aplicable también a variables complejas y da la integral con tal de que $f(x, y)$ sea continua. Es por lo tanto aplicable a un campo funcional más extenso que el método de los mayorantes. La exposición ordinaria del método admite la condición de Lipsicht $|f(x, y') - f(x, y)| < K |y - y'|$ a que debe satisfacer $f$ además de la continuidad. En estas condiciones la solución es además única, como en el caso de las mayorantes. Inmediatamente surge la pregunta, ¿en qué condiciones la integral existe sin necesidad de ser única?, ¿cuáles son las condiciones necesarias o suficientes para la unicidad?, preguntas que han dado lugar a multitud de trabajos en los que nos ocuparemos más adelante.

Cauchy era hombre que desarrollaba por sí no sólo las ideas propias, sino también las de los demás; bastábale conocer un resultado o barruntarlo para que diera con demostraciones originales. Así ocurrió con las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden, donde en paralelo con el método de Lagrange-Charpit dió otro método independiente del conocimiento de la integral completa, valiéndose de la noción de característica y dando el valor preciso de este concepto. Cauchy determina la integral en el caso de dos variables independientes, partiendo de una curva inicial cualquiera holomorfa alrededor de un determinado punto elegido en ella. Si hay holomorfia en la ecuación diferencial propuesta $F(x, y, z, p, q) = o$, Cauchy construye la integral que pasa por aquella curva, es decir, la superficie que arranca de aquella curva, y la construye mediante características, es decir, curvas excepcionales que no podrían, si se eligieran, determinar la integral por hallarse contenidas en infinitas integrales. Tales conceptos e ideas adquirieron inmediatamente la extensión a que son acreedores. El método de Cauchy necesita integrar el mismo sistema que el de Lagrange, exige más trabajo de integración (cuatro integrales en vez de una), pero en cambio da una idea excelente de la disposición y construcción de la integral, se extiende fácilmente a un número cualquiera de variables independientes e introduce el elemento arbitrario con precisión tal que en lo sucesivo el problema de construir una integral que se adapte a una multiplicidad arbitraria lo más general posible dada de antemano será llamado problema de Cauchy. En las derivadas de primer orden será la integral general. Donde el concepto de integral general es ignorado, como en al estudiar las ecuaciones en derivadas parciales de órdenes superiores, Darboux, como ya se ha dicho, llamará general a la solución que permita partir de una multiplicidad con el carácter de arbitrariedad máxima, es decir, a la que es capaz de resolver el problema de Cauchy. De este modo el concepto inicial sirve de norte y faro de la investigación que tiende a esclarecer las propiedades de las funciones definidas por ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Es cosa singular, y merece repetirse, que tales estudios de Cauchy y aun una gran parte de los que se refieren a la teoría de funciones en que vamos a ocuparnos a seguida, son estudios que aparecen en los textos de la Politécnica. Es decir, que Cauchy, en sus enseñanzas a los alumnos, introduce por vez primera la noción de existencia, precisa en qué condiciones es dable hablar efectivamente de la solución. Cuál no sería el nivel intelectual y matemático y el auge y preponderancia de tales estudios en la escuela, cuando tales cosas no sólo eran posibles, sino bien recibidas. Todo profesor tenía obligación de escribir el curso que profesara; un hombre como Cauchy, al escribir un texto, no había de concretarse a una síntesis o catálogo que por ser suyos ya hubieran sido extraordinarios; con verdadero alarde de inspiración y alma de genio, exponía los principios y bases en forma desconocida para los profesionales, y en tal exposición de doctrina construía cimientos verdaderamente sólidos de gran edificio, demostrando al mismo tiempo la necesidad de su recalce.

Cauchy nació el mismo año de la toma de la Bastilla, cuando la pasión enconada desplegaba sus primeras manifestaciones tumultuosas. Su infancia, en París, deslizóse al par de las diversas asambleas legislativas, de las guerras a que hubo de atender la revolución triunfante, del terror del comité de salvación pública; cinco años de agitadísima renovación que conmovieron al Mundo. Más tarde vió la supresión de la guillotina y el jacobinismo, la reacción y el terror blanco; vivió la obsesión de las fronteras naturales de Francia, conoció el triunfo y exaltación de Bonaparte, y sucesivamente el vasallaje de multitud de Estados: las campañas de Egipto, Marengo, nacer el Imperio, agonizar en Rusia y en España y desaparecer con la abdicación de Fontainebleau. A los veinticuatro años, Cauchy, de filiación netamente realista, ve entronizar a Luis XVIII por Talleyrand y huír la majestad a Gante al retorno de Napoleón. Luego Waterloo, la vuelta de la dinastía, a la que siguió en el destierro en el año 1830; guerras, revoluciones, motines, ora el triunfo de la democracia, ora del ejército; de la realeza o de la burguesía; borbones, republicanos, orleanistas y bonapartistas sucediéndose en el gobierno de la nación. Y en tan cruenta lucha política su figura serena e inconmovible descuella cada vez más insigne en los dilatados horizontes de la posteridad. Fiel a sus convicciones, niega el juramento de sumisión al gobierno de Orleáns al regresar a París en 1838 y se contenta dando lecciones particulares en un colegio de jesuitas. La revolución del 48, proclamando nueva República, le coloca en la Sorbona, respetando su credo, respeto que continuó el segundo Imperio dejándole en la paz de sus descubrimientos y de su fama.

Fama que culmina en la introducción de la función de variable compleja que, manejada sistemáticamente, había de contribuir con gran eficacia al descubrimiento de la naturaleza analítica de la función definida por una ecuación diferencial. De hecho quedaba resuelto cuantitativamente el alarde de Newton; la prolongación analítica permite cubrir el plano de la variable compleja, salvo en determinados puntos singulares cuya naturaleza y propiedades eran la verdadera clave del análisis. La serie de potencias o serie de Taylor era la herramienta con que se labraban nuevos surcos; la herramienta chocaba con escollos que no podían franquearse, pero el modo de poder contonearlos cuando no constituían muralla continua, daba una idea clara del obstáculo. Inmediatamente la atención de los geómetras quedó absorbida por semejantes puntos singulares. ¿Por ellos pasaba por ventura una rama holomorfa? ¿Había soluciones no holomorfas? En tal caso, ¿cuál era su expresión analítica alrededor del punto singular? ¿Cuál su representación más adecuada? ¿Cabía una clasificación según el modo de ser los puntos singulares, v. gr., para los casos en que la solución fuera racional, meromorfa o uniforme? ¿Cuándo una ecuación diferencial algébrica tiene una solución del mismo carácter?

Estas y otras cuestiones constituyen el estudio que algunos llaman analítico de las ecuaciones diferenciales.

El primer punto singular que fué analizado fué el origen $x$ en la ecuación de Briot y Bouquet $x y' = a x + b y + \ldots$, al que se hace corresponder el origen en el plano $y$, punto singular fijo, es decir, independiente de las constantes de integración. Una solución holomorfa pasa por el origen siempre que $b$ no sea entero y positivo. Si es igual a uno también las hay si $a = o$ y entonces son en número infinito, dependen de una constante arbitraria. Si $n$ entero y positivo y $a = o$, se puede reducir al caso anterior. Si $a \neq o$, no hay solución holomorfa. Pero además de estas soluciones holomorfas cuando las hay, existen siempre soluciones no holomorfas. Si la parte real de $b$ es positiva, existen infinitas integrales no holomorfas, el elemento característico del punto singular viene definido por la función $x^{b-1}$, siendo $b$ complejo, y las soluciones en $y$ tienden al origen como las soluciones en $x$, directamente; a la estrella radiada en $x$ corresponde una estrella en $y$; en cambio, si $b$ tiene parte real negativa, es preciso, para que $y$ tienda al origen que $x$ dé infinitas vueltas a modo de espiral alrededor del origen y en uno u otro sentido, según el signo de la parte imaginaria de $b - 1$. A la estrella de soluciones en $y$ corresponden remolinos alrededor del origen en el plano $x$.

## X

A partir de tales estudios el campo de interés se ensancha considerablemente. Junto a la influencia de Cauchy, preponderante, se manifiestan la de Weierstrass y la de Riemann, y en la aplicación de la teoría de funciones de variable compleja descuella Fuchs (1833-1902), discípulo y sucesor de Weierstrass, el cual comienza en 1865 la publicación de una serie de memorias sobre ecuaciones diferenciales lineales de orden cualquiera cuando los coeficientes son tales que la ecuación admite soluciones que, pasando por los puntos singulares $a_1$, $a_2$, $a_3$, que en ellos figuran, son representables por series de la forma $(x\text{-}a_1)\ \varphi\,(x\text{-}a_1)$, siendo $\varphi$ uniforme, dada por ejemplo por una serie de Laurent y $r$ una cantidad compleja; o, más generalmente designando $\varphi\,(x - a)$ un polinomio definido por $\psi_0\,(x - a) + \psi_1\,(x - a)\ \log.\ (x - a) + \ldots + \psi_p\ (x - a)\ [\log.\ (x - a)\ ]^p$ y con todas las $\psi$ funciones uniformes. Este tipo o clase de integrales se llama regular, y para que la ecuación dada no tenga otras soluciones, es preciso y basta que los coeficientes admitan $a$ como polo, y de tal modo que, el primer coeficiente supuesto igual a uno, el de la derivada $n - 1$ tenga $a$ como polo simple, el de la derivada $n - 2$ como polo doble, etc. A cada punto singular puede referirse lo mismo. Estas singularidades son las de la ecuación diferencial de la serie hipergeométrica (*), ecuación de segundo orden y tres puntos singulares sobre el eje real: $x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)\,x]y' + \alpha\beta\, y = 0$ cuyo estudio por Gauss en 1812 contribuyó en gran manera a despertar interés por la ecuación general de orden $n$ lineal que presentara desarrollos semejantes. En la ecuación general del tipo de Fuchs existe un sistema fundamental de integrales: $u_1, u_2 \ldots u_n$, en función de las cuales puede expresarse toda otra integral cuando se envuelve un punto singular volviendo al de partida, integrales que, después del rodeo, o aparecen multiplicadas por un factor: $U_1 = s_1 u_1$, $U_2 = s_2 u_2 \ldots$ o forman grupos con diversos factores $s_1, s_2 \ldots$ en la forma:

$$U^1{}_1 = s_1 u_1{}^1 \quad , \quad U_2{}^1 = s_1 (u_1{}^1 + u_2{}^1) \ldots$$
$$U^1{}_p = s_1 (u^1{}_{p-1} + u^1{}_p) \quad , \quad U_1{}^{(2)} = s_2\, u_1{}^{(2)} \ \ldots \text{ etc.}$$

Interviene aquí la noción de grupo en forma de grupo discontinuo de monodromía (Kummer, 1836) o de substituciones de las integrales fundamentales alrededor del punto singular, permaneciendo las integrales constantemente monodromas. La serie hipergeométrica es herramienta de mucho empleo; Gauss estableció en ella el primer criterio de convergencia conocido (a lo que parece anteriormente a Cauchy) y ocupa posición muy relevante en Análisis, no sólo por sus propiedades intrínsecas, sino por comprender, como casos particulares o de reducción por corrimientos de puntos singulares, ecuaciones diferenciales de funciones de Bessel, integrales de Euler, funciones esféricas, etc.

Ya se ha dicho que el primer trabajo de Fuchs es de 1865, pero antes de esta fecha, en 1859, habíase ocupado Rieman, en lo que hoy lleva el nombre de "Problema de Rieman", resuelto en 1905 por Hilbert: "Determinar, conocidos los puntos singulares de un sistema de ecuaciones lineales de primer orden y las substituciones fundamentales alrededor de los mismos que constituyen el grupo de monodromía, los coeficientes de dichas ecuaciones diferenciales lineales;; es decir, determinar las clases de funciones definidas por ecuaciones diferenciales lineales que admiten un cierto grupo de monodromía alrededor de puntos singulares definidos, o de otro modo, en el caso de un sistema de primer orden, los residuos

---

(*) Llamada así por Pfaff porque el cociente de un término al anterior es función racional del índice. Así el cociente del término $n + 2$ por el $n + 1$, es $\frac{(n+\alpha)(n+\beta)}{(n+1)(n+\gamma)}\,x$, siendo el primer coeficiente 1. Para $\alpha = 1$, $\beta = \gamma$ es la geométrica.

correspondientes a los diversos polos de primer orden que aparecen en la expresión analítica de los coeficientes. Este problema, en un caso especial, fué resuelto por Poincaré mediante las funciones denominadas tetafuchsianas. El planteo de este problema es ya una medida del genio de Rieman y abre un horizonte nuevo al definir la función por propiedades que le caracterizan en orden abstracto y cuya existencia no pueden hacer plausible consideraciones de orden físico. La memoria en que Rieman formula su problema se halla entre los fragmentos póstumos que se encontraron después de su muerte y que no fueron publicados inmediatamente. En la edición francesa tienen el título "Deux théoremes gèneraux sur les équations differentielles linéaires a coefficient algébrique", pág. 353, París, 1898. De la misma fecha, 1859, hay de Riemann otra memoria donde trata las funciones representables por la serie de Gauss, con las cuales venía a constituirse una nueva "trigonometría" de uso constante en la Mecánica celeste y Física matemática. En esta memoria Riemann introduce una función P con tres singularidades en puntos cualesquiera $a$, $b$, $c$, del plano, de las cuales se conocen dos determinaciones alrededor de a: a saber: $(x - a)^{\alpha_1} f_1(z)$ , $(x - a)^{\alpha_2} f_2(z)$ dos alrededor de $b$ y dos alrededor de $c$, lo que conduce, llamando $P_1$ y $P_2$ dos determinaciones cualesquiera, a que en cada punto singular

$$\begin{vmatrix} P & P' & P'' \\ P_1 & P_1' & P_1'' \\ P_2 & P_2' & P_2'' \end{vmatrix} = 0.$$

Riemann enuncia casi todas las propiedades de esta función que después había de popularizar el tratado de Riemann Weber, y cuya ecuación diferencial de segundo orden queda indicada, y señala los diversos casos particulares de mayor interés, obtenidos dando valores a las constantes. Estos estudios han sido luego modelo de método de exposición y fuente de multitud de problemas nuevos: v. gr., cuando las soluciones serán algébricas, qué funciones se definirán con cuatro puntos y el infinito, todos regulares; y, como caso particular, resultan por confluencia de singularidades tipos diversos de ecuaciones señalados por Klein y Bocher y que en casos especiales llevan los nombres de ecuaciones de Lamé, Mathieu, Legendre, Bessel, Weber, Stokes, Laguerre, Hermite, Schrödinger, etcétera, y son las más estudiadas entre las lineales de segundo orden con coeficientes algébricos o periódicos por su aplicación en problemas de Física y de Técnica, en vibraciones, mecánica ondulatoria, figuras de equilibrio de masa flúida, mareas, estabilidad en sistemas no lineales, oscilaciones eléctricas en circuitos con autoinducción y capacidad variables, difracción de ondas electromagnéticas y acústicas, resonadores, etc.

En la teoría de ecuaciones diferenciales el nombre de Riemann (1826-1866) aparece también muy especialmente en la integración de las ecuaciones de tipo hiperbólico de segundo orden en derivadas parciales, objeto de análisis en la memoria publicada en 1860: "Ueber die Fortplanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite", ecuaciones de tipo no lineal que resuelve por un método que se denomina de Riemann. El cual consiste primero: en referir la ecuación a una lineal del tipo Laplace $Ar + Bs + Ct + D = o$, en que $A, B, C, D$ son funciones de $x$ e $y$; ello puede lograrse con una transformación de contacto tipo Legendre: $x' = -p, y' = xp - y, p' = -x$; y segundo: en valerse de la adjunta de esta lineal de Laplace y aplicar una identidad análoga a la de Green al área definida por dos características y la multiplicidad inicial definida en un arco determinado (caso de dos variables). Esta integral de área puede transformarse idénticamente en integral de contorno y determinando convenientemente una integral de la adjunta por ser nula la integral de área y hacerse innecesario el conocimiento de la integral que se busca a lo largo de las características dado el modo como se ha elegido la integral de la adjunta, se puede obtener el valor de la integral general para el punto de intersección de las dos características cualesquiera que sean los datos iniciales en el problema de Cauchy. La resolución queda así referida a la determinación de una solución particular de la adjunta definida por satisfacer a la ecuación diferencial y a determinadas condiciones en las características.

Paralelamente a Riemann, y sin tener conocimiento de su memoria, 1860, el artillero Hugoniot estudiaba la propagación del sonido teniendo también en cuenta la compresibilidad del aire y la ecuación de estado, lo que conduce, como se ha dicho, a una ecuación no lineal para la transmisión de los impulsos. Hugoniot define en este problema la onda. Es toda solución tangente al plano que interpreta el reposo y que es solución de la ecuación de tipo hiperbólico. El contacto tiene lugar a lo largo de la generatriz característica, la cual representa además el frente de onda. Todas las superficies que son tangentes en el plano de reposo e integrales de la ecuación dada, obedecen a una ecuación en derivadas parciales de primer orden. Estas ideas son el germen de toda la teoría de la propagación de perturbaciones o impulsos, no sólo en una dimensión, sino en varias; y ellas han dado lugar especialmente a los estudios de Hadamard en Francia y Levi Civita en Italia, en que el número de variables es mayor de dos y puede haber ecuaciones simultáneas, como en el caso de las ecuaciones de Maxwell, de la Elasticidad, etc. La noción de elemento portante que excluye el problema de Cauchy y satisface a una ecuación en derivadas parciàles de primer orden (llamada característica) y sus líneas características llamadas bicaracterísticas por Hadamard y Levi Civita permiten una interpretación geométrica de la propagación y una imagen intuitiva del problema de las ondas.

En estos problemas acontece que el número par o impar de variables independientes modifica esencialmente las soluciones. El análisis de esta modificación, la existencia de ondas con frente y término o con frente y cola indefinida residual, ha sido objeto modernamente de multitud de estudios especialmente llevados a cabo por Volterra y el ya citado Hadamard entre otros (*). Pero la verdadera noción de discontinuidad en la aceleración en el frente de ondas se debe a Riemann y a Hugoniot. Este descubrió también la onda de choque correspondiente a la arista de retroceso de la desarrollable característica, y en que la discontinuidad del frente se manifiesta en las velocidades.

## XI

Del árbol que constituye la Teoría de ecuaciones diferenciales destácanse ya robustas, al iniciarse el siglo XIX, dos grandes ramas. La Física matemática y la Geometría diferencial. En una y otra aparece un tipo de problema diverso del de Cauchy. Una superficie mínima obedece a una ecuación diferencial. ¿Cómo se determina la solución que pasa por un contorno dado y que materializa el experimento de Plateau? Una cuerda vibra con dos puntos fijos. Se conoce la ecuación diferencial. ¿Cómo se determina la cuerda que pasa por los dos puntos?

Son los problemas con valores de contorno. Cada problema es un problema "sui géneris"; su resolución y aun la posibilidad de la misma dependen a la vez de la ecuación y de las condiciones en los límites. Los más sencillos son los que se presentan en ecuaciones ordinarias de segundo orden, en que no hay más que una variable independiente; siguen a éstos los del tipo de la cuerda vibrante, problemas de propagación del calor y difusión en una dimensión, etc. Las condiciones en los límites suelen ser muy variadas; lo más elemental es fijar la integral por dos puntos dados de antemano, pero puede ser condición de contorno la ausencia de una singularidad, el carácter del punto al infinito, la periodi-

(*) Kirchhof, Boussinesq. V. el capítulo que sigue.

cidad, el valor de la derivada en uno de los dos puntos o los valores de las derivadas en ambos y aun relaciones entre el valor de la integral y su derivada en cada extremo. En estas cuestiones las variables se consideran por lo común reales.

A pesar de los numerosos trabajos de Euler y de Fourier, cuya Teoría analítica del Calor se publicó en 1822, trabajos en los cuales se resuelven problemas de Física matemática, la formulación concreta como tal problema de valores de contorno aparece por primera vez en 1833 con Sturm y se continúa con Liouville en los años 36 y 37 del pasado siglo. Estos trabajos se refieren a ecuaciones ordinarias. Sturm consideró ecuaciones de segundo orden homogéneas en la forma $((Ky')' = Gy$, siendo K y G funciones de $x$ y un parámetro $\lambda$, finitas en el intervalo $a$ $b$ del eje $x$, siendo K además positiva y diversa de cero. Se examinan las soluciones para las que en $a$ los valores $y$ e $y'$ son funciones arbitrarias de $\lambda$. ¿Cómo varía la solución al variar $\lambda$, y especialmente los ceros? ¿Cómo varía $Ky'/y$ para un valor determinado de $x$? Estas cuestiones pueden resolverse con relativa facilidad formando una combinación de las ecuaciones diferenciales correspondientes a dos valores de $\lambda$. Se deducen los llamados teoremas de comparación que permiten referir al caso conocido $y'' + k^2y = o$ otros casos más complicados. Picone (1909) ha podido recientemente llevar el estudio con mayor alcance, valiéndose de la fórmula

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{y_1}{y_2}(K_1 y'_1 y_2 - K_2 y'_2 y_1)\right\} =$$
$$(G_1 - G_2)\, y_1^2 + (K_1 - K_2)\, y'^2_1 + K_2\left(y'_1 - y'_2 \frac{y_1}{y_2}\right)^2$$

El resultado más conocido es el teorema de oscilación, según el cual, fijadas ciertas condiciones en las K y G, y también en los límites $a$, $b$ (v. gr., el ser $Ky'/y$ funciones dadas de $\lambda$) existen infinitos valores de $\lambda$ que satisfacen la ecuación y que presentan ceros entre $a$ y $b$, de modo que dado el número de ceros se encuentra siempre la $\lambda$ correspondiente. Son los de $\lambda$ valores "propios" o autovalores y las soluciones que les corresponden las "propias" del problema. Los ceros de dos soluciones consecutivas se separan mutuamente. Sturm y Liouville consideran especialmente el caso en que K es constante y $G = \lambda g - l$, siendo $g$ y $l$ funciones positivas de $x$. Los valores en los límites se suponen también sencillos, v. gr., $y_a = y_b = o$, o en general $(y'/y) =$ constante en $a$ y en $b$. En estas condiciones las raices de la ecuación trascendente que da los valores de $\lambda$ son reales, positivas y simples. Sturm y Liouville calculan cómo varía el valor de $\lambda_n$ con $n$, especialmente al crecer $n$, es decir, los valores asintóticos. El conjunto de los valores de $\lambda$ forma el espectro de la ecuación. Los métodos de Sturm-Liouville han originado una multitud de trabajos semejantes aplicados a diversa clase de ecuaciones y condiciones límites y se han hecho extensivos a ecuaciones de orden superior, v. gr., a la de las varillas vibrantes de densidad variable, al análisis de los casos en que una singularidad de la ecuación interviene en las condiciones límites, en que los dos extremos coinciden (problema del anillo de Fourier); al caso en que entran en la ecuación varios parámetros e intervalos (Teorema de oscilación de Klein, 1881, y Bocher, 1898), y a las condiciones para que la solución afecte determinada expresión analítica (v. gr., polinomios de Stieltjes, 1885). Pero la más adecuada herramienta para tratar problemas de contorno es la ecuación integral a que aquéllos pueden referirse, v. gr., mediante la introducción de su función de Green. El modo de operar con ella y su alcance fueron explicados por Fredholm al comenzar este siglo.

Métodos de resolución por aproximaciones sucesivas pudieron ser aplicadas a ecuaciones del tipo $y'' = f(x, y, y')$ de segundo orden no lineales de las que se exige que la solución pase, por ejemplo, por dos puntos dados del plano. A Picard cabe el elogio de haber introducido en 1890 esta clase de problemas, demostrando la existencia de la solución cuando se cumplen determinadas condiciones. La gran importancia que ecuaciones de este tipo presentan en la Técnica y en la Física hace que sean numerosos los trabajos que se refieren a este problema, al que Picard ha dedicado su atención en los tomos 3.° y 4.° de su "Tratado de Análisis". Las diversas aproximaciones satisfacen todas las condiciones en los límites y convergen a la función que se busca. Se parte de una arbitraria $y = f(x)$ para la que se calcula el valor del segundo miembro. Este valor $\varphi(x)$ se emplea en primera aproximación para calcular $y$ definido por $y'' = f(x, \varphi(x), \varphi'(x))$, y así sucesivamente. La idea del método, aplicable también al problema de Cauchy y a sistemas, parece ser que remonta a Fourier, habiendo sido empleado también en 1836 por Liouville, y en forma de problema de contorno en 1840 en memorias del periódico que a la sazón editaba.

De Dirichlet, discípulo de Fourier, arranca la formulación del problema de contorno clave del Potencial y de los problemas que plantea la Electroestática. Se trata de hallar la solución de la ecuación $\Delta U = o$, es decir: $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = o$, ó la análoga con tres variables, que adquiera en el contorno lineal o superficie, valores dados a priori. Interviene aquí por primera vez una doble función en el límite, la que define el contorno y la que define la función sobre el contorno. La solución será, por lo tanto, función de tales funciones datos. Este problema, históricamente célebre, compendia toda una etapa del desarrollo de la Idea matemática. La posibilidad de resolverlo en ciertos casos particulares, es evidente. Poisson halló la solución para el círculo. Los valores de la solución se suponen continuos en toda el área, y los valores en el contorno también. De esta solución es fácil pasar a otros casos más generales. Pero en el caso más general, ¿la solución existe? Ya se sabe que no existe, pues hay casos, v. gr., de curvas básicas con puntas, indicados por Lebesgue, Comptes Rendus (1912), y por Urysohn, en el tomo 23 de la "Mathematische Zeitschrift", por ejemplo, en que la curva contorno no admite que sobre ella se pueda dar una determinada función si ésta ha de satisfacer en todo el área la ecuación de Laplace. Y sin embargo, Dirichlet (1876) pretendió dar una demostración de la existencia basada en el llamado principio de Dirichlet, según el cual la función $u$ que, siendo continua en el área y derivable hasta en el contorno, y admitiendo en éste los valores dados, hace mínima la integral de Dirichlet:

$$\iint \left((u'_x)^2 + (u'_y)^2\right) dx\, dy.$$

es necesariamente harmónica. Weiertrass hizo ver que puede no ser cierto que la función límite que da el mínimo sea continua y derivable; puede no existir, como se demuestra con el ejemplo de las curvas de curvatura continua y mínima longitud que enlazando dos puntos pasan por un tercero que no está en la recta de aquéllos. La solución que da el mínimo es la quebrada y no tiene curvatura continua. Además, aunque es cierto que el valor de la integral de Dirichlet no será nunca negativo, no puede afirmarse que cualesquiera que sean las condiciones de curva y función sobre ella, la integral de Dirichlet sea siempre acotada, como demostraron Prym en 1871, con una función harmónica en todo un círculo cuya integral de Dirichlet no es convergente, y Hadamard, también para el círculo, en el "Boletín de la Sociedad Matemática de Francia", año 1906. En 1901, Hilbert dió a conocer en qué condiciones de contorno, valores en él y funciones admisibles, es válido el principio de Dirichlet; pero antes se había resuelto el problema de Dirichlet en casos muy generales con los métodos alternados de Murphy Schwarz, de la media aritmética de Beetz-Neumann-Robin, de la representación conforme (Schwarz), del barrido (Poincaré-Paraf); por ecuaciones integrales, valiéndose de las discontinuidades de los potenciales de capa doble (Fredholm); por desarrollos en funciones ortogonales harmónicas de los valores dados en el contorno, como senos y cosenos en el caso de la circunferencia, funciones de

Laplace para la esfera, de Lamé para el elipsoide; métodos de la función de Green, de imágenes, etc. Modernamente, el problema de Dirichlet se considera en el aspecto funcional a que antes nos hemos referido, y su formulación es más general, como límite de un problema preharmónico (Le Roux, 1914; Richardson, 1917; Liebmann, 1918; Wiener, 1924 y 1925; Courant, 1926; Wolf, 1926), en que se define una red cuadrada o cúbica y una función de punto igual a la media de los valores que adquiere en los vértices circundantes, siendo conocida en los valores periféricos. El problema se lleva, pues, al campo funcional o de diferencias y la solución viene definida por un proceso límite de prolongación funcional de tal manera que puede extenderse a todos los casos en que haya seguramente solución. Se convierte así en un problema de Topología: el de hallar los conjuntos de capacidad nula (Lebesgue, C. R., 1924; Bouligand, íd.). V. Cap. XXIII.

El famoso problema de Dirichlet es tenido por uno de los más importantes de la Matemática; abarca la teoría de las funciones harmónicas en el plano y en el espacio y aporta una concreción básica para el examen de las derivadas funcionales (cómo varía la solución al variar la forma del contorno y la función definida en ella) y de la prolongación de una funcional. Es dovela frontal del arco de la Física matemática. Los métodos a que da lugar se trasladan a otros problemas con ecuaciones harmónicas de más variables de la forma $\Delta u = o$ ó a ecuaciones $\Delta u = F(x, y)$ , $\Delta u = \varphi(x, y) u$ , $\Delta u = \varphi(x, y, u)$ , $\Delta u = e^u$, etcétera y aun a tipos diversos, es decir, hiperbólicos y parabólicos.

La ecuación $\Delta u = o$ tiene la particularidad de tener soluciones elementales o fundamentales. Son log. $r$ para el plano y $\frac{1}{r}$ para el espacio los llamados potenciales logarítmico y newtoniano. Estas funciones satisfacen la ecuación de Laplace, pero tienen singularidad en el origen. Del mismo modo $r^2$ log. $r$ es solución fundamental para $\Delta^2 u = o$. En general, solución fundamental es toda función $f$ tal que la ecuación $F\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) u = \varphi(x, y, z)$ admite la solución $u = \iiint f \varphi(\xi \eta \zeta) d\xi d\eta d\zeta$ extendida a todo el campo donde exista $\varphi$. Una función harmónica que presente en la inmediación del origen una singularidad como las soluciones fundamentales y adquiera en el contorno el valor cero, se llama de Green. La función de Green permite aplicar la identidad de Green y calcular en todo punto los valores de la función harmónica U cuando se conoce en el contorno $U_s$, por la fórmula:

$$\int U_s \frac{\partial G}{\partial n} ds = 4\pi U$$

siendo G la función de Green, $\frac{\partial G}{\partial n}$ su derivada en el contorno según la normal exterior. Esta identidad es la que caracteriza las ecuaciones de tipo elíptico, y ex extensible a las de tipo hiperbólico en un número par de variables independientes, v. gr., en la ecuación de propagación del sonido, dando lugar a la formulación del principio de Huyghens. La no existencia de estas integrales en cantidades reales para la propagación de ondas cilíndricas, es lo que conduce al residuo. Las ecuaciones de tipo parabólico tienen la fundamental $\frac{1}{\sqrt{y}} exp(-x^2/_{2y})$ y con ella Holmgren ha podido construir funciones que presentan determinadas discontinuidades y permiten resolver los problemas de régimen variable en la teoría analítica del Calor.

Los problemas de Hidrodinámica introducen el problema de Neumann exterior, la condición en el contorno no es un valor dado para la función, sino para su derivada normal. El problema interior implica una condición en los datos como también el exterior de Dirichlet.

El método de la discontinuidad se aplica con éxito a casos más sencillos, v. gr., a las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden lineales con una variable independiente $y'' + A(x)\, y = f(x)$ donde la función de influencia presenta la particularidad de ser continua para el punto potenciado, pero sus dos derivadas a derecha e izquierda difieren en 1 y cada rama satisface a las condiciones en los límites que corresponden y a la ecuación diferencial homogénea $y'' = o$. Es la función de Green a que aludimos al tratar las ordinarias.

## XII

El proceso de la función de Green o siquiera la existencia de la fundamental, permiten, como se ha dicho, abordar el estudio de los problemas de contorno con la herramienta adecuada. El manejo de la misma, hoy indispensable en los talleres matemáticos, data de este siglo. Despertó un interés excepcional. Cuando Fredholm pudo continuar la serie de Neumann de una ecuación integral con límites fijos y demostró que la solución de la ecuación era una función meromorfa en el parámetro $\lambda$, se produjo en el mundo matemático el efecto de un hallazgo sensacional. Como si se tratara de un filón de gran potencia, acudieron en tropel al laboreo y afino todos los sabios y los que no lo fueran tanto. Rápidamente llenáronse las revistas de memorias y el mercado de textos en los que se desarrollaba la teoría; estudiáronse ecuaciones con núcleos simétricos que dieron lugar a propiedades muy notables, núcleos, simetrizables, discontinuos, singulares, etc. El espectro de las $\lambda$ aparecía con propiedades que hubieron de llamar la atención. Consideráronse ecuaciones integrales lineales y no lineales y en éstas apareciron las ramificaciones que süele traer todo problema no lineal.

Posición fundamental en el problema ocupan los desarrollos en serie de funciones propias en lo que ha venido a sintetizarse el problema de Física matemática clásico como generalización del desarrollo en serie de Fourier, de funciones harmónicas, etc. También constituyen un elemento importante los desarrollos asintóticos del espectro de valores propios y aun de las funciones propias. Si bien en el espectro asintótico de autovalores se han obtenido resultados muy importantes especialmente por Weyl (1911 a 1915), en la expresión asintótica de las funciones los resultados no son tan brillantes. De las Memorias de Weyl merecen mencionarse especialmente las de los "Mathematische Annalen", de 1911, las del Crelle de los años 12, 13, y la de 1915 en los "Rendiconti di Palermo".

La literatura sobre vibraciones, sobre pandeo, etc., vióse inmediatamente enriquecida por las aplicaciones del nuevo método; mas el cálculo de los valores propios y de las funciones correspondientes ofrece algunas dificultades, y de ahí que se haya iniciado con Ritz una categoría de métodos de aproximación que permite el cálculo de unos y otros. Estos métodos hacen uso casi siempre de propiedades extremales de máximo o mínimo referidas a muy diversos elementos, pero en el fondo es base de todos ellos la existencia de las funciones propias o fundamentales y de sus tonos o valores propios, existencia indudable físicamente en la generalidad de los casos pero que ha costado bastante demostrar matemáticamente. En este proceso de existencia son clásicas la memoria de Poincaré en los "Rendiconti di Palermo" sobre las ecuaciones de la Física matemática, 1894, y la obra maestra de Fredholm en las Acta de 1903 (*). También debe mencionarse a Hilbert, v. "Nachrichten" de Got-

(*) Léase, v. gr., las páginas 1.351 a 1.364 de la "Enciclopedia Teubner", en el tomo correspondiente a Análisis, artículo de Hellinger-Toeplitz, sobre ecuaciones integrales y ecuaciones con infinitas incógnitas.

tinga, 1898, memorias reunidas después en un volumen, Leipzig, 1912, sin olvidar a Steckloff. (Varios trabajos desde 1898 a 1904, v. especialmente las memorias en los "Annales de l'Ecole Normale", 1902, y "Faculté des Sciences de Toulouse", 1900 y 1904), y más modernamente a Lichtenstein (V. Hilb Sasz, artículo "Allgemeine Reihenentwickelungen", en la Enciclopedia Teubner). De estos trabajos no todos utilizan las ecuaciones integrales por no haber publicado Fredholm su teoría cuando vieron la luz. Son, pues, demostraciones de existencia de autovalores y autofunciones y desarrollos en serie de funciones según sistemas completos de las mismas llevados a cabo directamente sobre la ecuación diferencial al modo clásico de Liouville con las ordinarias, al cual se deben los primeros teoremas generales sobre desarrollos en serie en tales casos.

Las ecuaciones integrales traducen no sólo problemas del tipo elíptico en que los potenciales de capa simple y doble permiten la formulación inmediata, sino otros más generales, y también la lineal hiperbólica. (V. Myller, "Mathematische Annalen", 1910; Sternberg, íd., 1922, etc.).

Las funciones definidas por ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico son analíticas, a diferencia de lo que pasa con las hiperbólicas en general. Por ejemplo, Bernstein demostró que si las tres primeras derivadas de la solución $u$ existen y son continuas y la ecuación diferencial elíptica $\Phi(u''_{x_1^2}\, u''_{x_1 x_2} \dots u'_{x_1},\, u'_{x_2} \dots u, \dots x_1,\, x_2 \dots x_n) = 0$ es analítica en todos sus argumentos, necesariamente $u$ es analítica, es decir, existen todas las demás derivadas. Se ha demostrado que basta que las segundas derivadas posean la derivada de Holder continua (*) para que se llegue a igual resultado, y cabe preguntar si basta la sola continuidad, como ocurre con $\Delta u = F(x, y, u, u'_x, u'_y)$ siendo F analítica y con $Au'_x + Bu''_y + Cu''_{xy} + Du'_x + Eu'_y + Fu = 0$ siendo A ... F funciones analíticas de $x, y, z$.

La distinta manera en el modo de portarse las soluciones de tipo elíptico, hiperbólico y parabólico, es uno de los capítulos más interesantes de la teoría de las ecuaciones diferenciales, y a la vez de los más arduos y difíciles. Por ejemplo, no puede formularse el problema de Cauchy con las ecuaciones de tipo elíptico ni con las hiperbólicas lineales de tipo no normal, es decir, en que la forma cuadrática cuyos coeficientes son los de la ecuación dada, transformada en suma de cuadrados no tiene positivos todos los coeficientes menos uno. V. Gevrey: "Annales de l'Ecole

---

(*) $\varphi(x)$ es continúa Holder, si $|\varphi(x'') - \varphi(x')| < C|x'' - x'|^{\alpha}$, $\alpha > 0$, y C constante y para todo par de puntos del recinto en que $\varphi$ se define.

normale", 1918. La elíptica da funciones analíticas en lo interior de recintos limitados por contornos que pueden no ser analíticos, la función tiende a borrar la singularidad o discontinuidad de contorno; en cambio, el método de Riemann en las hiperbólicas manifiesta cómo la singularidad se prorroga, la no analiticidad de los valores iniciales o sobre la curva dada se transmite al área de existencia. Sobre líneas y puntos singulares, la noción de propagación y celeridad, sobre la diferencia entre las ecuaciones de flúidos perfectos compresibles o no, existe abundante literatura. (V. Volterra en sus lecciones de Estocolmo, publicadas en París en 1912; Hadamard en sus lecciones en la Universidad Yale publicadas en París en 1932.) Boussinesq llega a afirmar que la diferencia se materializa en los mismos órganos de percepción; el oído y la vista para fenómenos regidos por ecuaciones de tipo hiperbólico, las parabólicas para el tacto. Estas y las elípticas concentrando en todo punto los efectos procedentes de todos los puntos del recinto de existencia, las hiperbólicas enviando distínta y sucesivamente a lo largo de las características los impulsos individuales que de este modo pueden distinguirse. La figura matemática que ha profundizado mayormente tales cuestiones es Hadamard. A él se debe el estudio de las ecuaciones con un número cualquiera de variables, el análisis detenido de la influencia de este número en los métodos de solución, un método generalización del de Riemann fundado en el empleo de la solución fundamental y fórmula de Green, etc.

En el estudio de las ecuaciones de tipo parabólico, tales métodos (de la solución fundamental y fórmula de Green) fueron aplicados por Holmgren y Levi, pero el estudio general de las ecuaciones parabólicas se debe principalmente a Gevrey en el "Journal de Liouville" de 1913. La solución de $u''_x - u'_y = au'_x + cu + f$ siendo $u = o$ para $x = a$ y $x = b$, y $u = g(x)$ para $y = o$, puede expresarse por una ecuación íntegro diferencial del tipo de Volterra. En la solución de ecuaciones de tipo parabólico $u''_{xx} - u'_y = 0$ aparecen funciones no analíticas en $y$ analíticas en $x$. De un modo más general en $u''_{xx} - u'_y = f(x, y)$ si $f$ es analítica en $x$ ocurre lo mismo. Todavía pueden enunciarse propiedades análogas para ecuaciones de tipo más general.

En general, el método de aproximaciones sucesivas de Picard puede aplicarse a ecuaciones de los tipos anteriores y es la especialmente indicada en multitud de casos no lineales, v. gr., la elíptica $\Delta u = F(x, y, u, u'_x, u'_y)$ cuya solución se refiere a la del sistema $\Delta u_1 = 0$, $\Delta u_2 = F(x, y, u_1, u'_{1x}, u'_{1y})$ etc., y demostrando que en el límite se tiene la solución de la ecuación propuesta.

## XIII

Otro capítulo originado en parte por problemas de la Física matemática, alcanza en su desarrollo proporciones insospechadas. Arranca de la idea de correspondencia, que es la base del concepto de Función en Dirichlet y Riemann. En la ecuación diferencial la correspondencia viene definida por valores en puntos indefinidamente próximos, valores relacionados entre sí por la ecuación diferencial. Si no fueren puntos indefinidamente próximos, aunque arbitrarios, v. gr., $\Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y)$ se plantea una nueva manera de correspondencia que, como caso particular, abarca las ecuaciones en diferencias. Podrían intervenir en la relación infinitos elementos dispuestos sobre una base portante continua conocida, como en las ecuaciones integrales, o desconocida, como en el cálculo de variaciones; u operar con la generalización de un sistema de $n$ ecuaciones lineales ordinarias cuando $n \to \infty$ o en derivadas parciales cuando el número de variables crece sin límite, dando lugar a nuevas relaciones, cuya generalización es obvia. Acontece que tales generalizaciones no son entelequia, y puede demostrarse en muchos casos que tienen solución constructible. Y tales soluciones no sólo permiten plantear y resolver multitud de problemas (v. gr., los de histéresis y herencia), sino también síntesis en las que figuran las correspondencias conocidas que apareren así formando parte de un conjunto harmónico, cuyas propiedades se ofrecen como casos particulares de las del conjunto.

Tal es el cálculo funcional. En él se distinguen dos modos diversos de correspondencia; en el primero a un conjunto numerable o continuo de elementos corresponde *un* valor o *una* función. A las infinitas curvas que pueden trazarse entre dos puntos de una superficie corresponde la geodésica que da el mínimo de su longitud. Esta correspondencia define una funcional. El valor de $\int_a^b F(x, y, y', y''...)\, dx$ depende de los valores de $y(x)$, es una función de la línea $y(x)$. El valor de la función de cuadrado integrable en un punto cualquiera depende unívocamente, por el teorema de Hurwitz-Riesz, de la sucesión numerable de sus coeficientes de Fourier. En esta dependencia cabe introducir las nociones de continuidad, derivabilidad, integración, etc., y aun otras nuevas no aplicables a las correspondencias antiguas. Por ejemplo, la capacidad electroestática en función de la forma del conductor, la derivada contorno, etc. Esta última se introduce, por ejemplo, del siguiente modo: En el cálculo de la Función de Green para un punto A, con singularidad en B: G (A, B), se tiene para valor de su variación al variar el contorno en $d\,n$ sobre la normal:

$$\partial G\,(A\,B) = \frac{-1}{2\pi} \int_{\text{contorno}} \frac{\partial G\,(AB)}{\partial n} \cdot \frac{\partial G\,(BA)}{\partial n}\, \partial n\, ds,$$

lo que conduce a la noción de derivada funcional:

$$G'(AB) = \frac{-1}{2\pi}\, G'_n\,(AB) \cdot G'_n\,(BA)$$

fórmula dada por Hadamard en sus lecciones sobre el Cálculo de variaciones, París (1910).

En un segundo modo, ia correspondencia puede establecerse entre espacios de infinitas dimensiones. Un sistema de infinitas ecuaciones lineales con infinitas incógnitas, las mismas ecuaciones integrales, la multiplicación de matrices infinitas y las funciones permutables con una dada introducidas por Volterra, a quien se debe gran parte de la nueva generalización, las transformaciones integrales como la de Laplace, las transformaciones topológicas del espacio en que sólo se exige la continuidad, son ejemplo de tales dependencias llevadas a la máxima generalización por Frechet con sus espacios abstractos. La función misma pasa a desempeñar el papel del antiguo punto, todas las funciones de tal o cual clase vienen representadas por los puntos del espacio correspondiente. Una función determinada es un punto del espacio de infinitas dimensiones cuyas coordenadas son sus infinitos valores o elementos determinantes. La idea de distancia, fundamental en el más intuitivo concepto del espacio métrico, puede transportarse a ciertas clases de funciones dando lugar al llamado espacio funcional de Hilbert, de infinitas dimensiones en que cada punto representa una función real $f(x)$ de cuadrado integrable Lebesgue. La distancia al origen se define por $\left| \int_0^1 \left(f(x)\right)^2 ds \right|^{1/2}$. De la distancia deriva la noción de convergencia y límite y las figuras sugieren el examen de su transformación cuya forma más simple sería la lineal. (V. Linear transformations in Hilbert space por Harvey Stone, N. York 1932, y el fascículo 58 del Mémorial redactado por Delsarte.) Con la noción de transformación se adquiere el concepto operativo que es aplicable a espacios más generales, v. gr., el de funciones continuas. Con tales generalizaciones e imágenes puede alcanzarse un nivel de síntesis que permite englobar multitud de teorías clásicas; propiedades al parecer sin relación alguna vienen a formar eslabones de una cadena de juicios o a resultar interpretaciones diferentes de una misma verdad más abstracta;

tal acontece con los teoremas de punto fijo en Topología y las condiciones de existencia de soluciones en ecuaciones diferenciales (V. el tratado de operaciones lineales ,es decir, aditivas y continuas de E. Banach, publicado en 1932 en Varsovia.) En este segundo modo, así como la noción de derivada resulta obvia, no lo es tanto la de integración, y la propiedad que es susceptible de ser generalizada al aumentar indefinidamente las dimensiones del espacio en que se define el elemento variable, es la que se refiere al concepto de media o de valor probable. La generalización es debida principalmente a Gateaux, 1919, y Wiener, 1921.

Es siempre fecunda en Matemática la consideración de la totalidad como categoría superior al elemento. Y al considerar el conjunto, examinar lo que acontece al transformarlo, en especial qué agrupaciones o esquemas permanecen invariantes y qué transformaciones lo repiten.

Parece que la idea de correspondencia funcional se encuentra por vez primera en Laplace cuando en cuestión de Cálculo de probabilidades introduce su método de resolución de una ecuación diferencial lineal mediante integral definida, método ya referido, en que el núcleo es $e^{-sz}$ transformación que ha sido empleada con frecuencia en diversas cuestiones: funciones características y determinantes, método formal de Heaviside, fórmula de Riemann, transformadas de Fourier, funciones recíprocas, etc. (*). La misma resolución del problema de Cauchy constituye también un ejemplo de correspondencia funcional. A una base portante cualquiera en la que se define una función también arbitraria, se hace corresponder, en efecto, una función "transmutada", que es solución de la ecuación diferencial que satisface las condiciones iniciales. La correspondencia funcional puede venir definida por ecuaciones en derivadas funcionales ordinarias y parciales, como ocurre al considerar el mínimo de integrales múltiples, y en tales estudios pueden generalizarse las nociones de integral completa, características, invariantes integrales, etc. Puede también definirse una dependencia funcional con la permutación de símbolos, v. gr., el de ecuación diferencial de cualquier orden como por ejemplo la lineal $\Delta = p_0 u^n + p_1 u^{n-1} + \ldots$ con el símbolo de integral $A = \int a(x.y)\, u(y) dy$, es decir, determinar las funciones $u$ tales que $A\Delta u = \Delta A u$. El núcleo $a(x, y)$ debe satisfacer una ecuación en derivadas parciales, y, si la satisface, todas las $u$ que corresponden a los va-

(*) V. mi discurso inaugural del curso de 1930 a 1931 en la Universidad de Madrid y el reciente tratado de Bochner: Vorlesungen ueber Fouriersche Integrale, Leipzig, 1932.

lores de $a$ soluciones de aquella, forman un grupo funcional. La introducción del concepto de grupo es de 1895, debida a Levi Civita (Grupi di Operazioni funzionali e Inversione degli integrali definiti, 1895. Anales del Instituto Lombardo). Relacionados con estas ecuaciones están los teoremas de adición integral en que $f(x+y)$ es expresable en forma de integral definida con los valores de $f$ entre $o$ y $x$ y entre $o$ e $y$.

Del extraordinario interés que el cálculo funcional despierta da testimonio la copiosa bibliografía moderna, resumida, v. gr., en el excelente libro de Volterra, cuya primera edición en Madrid, en 1927, se debe a D. Luis Octavio de Toledo y cuya segunda edición en inglés apareció tres años más tarde, 1930, en Londres, y que toda una revista periódica, la "Studia Mathematica", que se publica en Polonia, editada por Banach y Steinhauss, se dedica principalmente a tales materias, que han entrado en el campo de la Cinemática y de la Dinámica, en los de la Economía y Estadística, Elasticidad, Balística, Genética, etc., etc. Sería de desear que las conferencias del egregio profesor Volterra, a quien se debe lo más y mejor del cálculo funcional, pronunciadas en Madrid en 1925, fueran objeto de especial estudio y conocimiento entre españoles para que pueda esperarse algún fruto de la semilla lanzada en el campo, ¡ay!, casi en barbecho, de nuestra cultura matemática.

## XIV

Otra rama del tronco común, cuyo desarrollo ha adquirido proporciones extraordinarias es la Geometría diferencial. Antiguamente, en los tratados de Cálculo, la teoría general de curvas y superficies constituía una sección obligada, en la que aparecían ecuaciones diferenciales que se planteaban y, salvo casos sencillos, no podían resolverse. A los que querían profundizar en tales estudios se les ofrecía el magnífico libro de Darboux. En éste ha debido instruirse gran parte de la generación actual; pero el interés ha aumentado considerablemente, contribuyendo no poco a la necesidad de nuevos horizontes los avances y progresos de la Física, en especial la teoría de la Relatividad. Esta dirección fué señalada por el genio de Riemann. La profundidad y originalidad de sus conocimientos han necesitado una centuria para aparecer en toda su proporción. Riemann, muy dado a meditaciones filosóficas de gran alcance, escribió, en efecto, en 1854, o por lo menos en esta fecha se doctoró con dos memorias, una sobre series trigonométricas y otra que lleva por título "Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen". Las dos se publicaron por Dedekind después de su muerte, es decir, en 1868. Y la última no fué comprendida. ¡Se ha necesitado todo el avance formidable de un siglo para alcanzar la meta a que llegara Riemann a los veinticinco años de edad! No es necesario insistir en esta memoria básica donde hay el análisis más profundo del espacio y la idea genial y atrevidísima de ser las fuerzas manifestaciones intrínsecas del mismo.

No será nuestro propósito una relación detallada de los principales jalones que ha venido ganando tamaña disciplina, hoy día de interés vastísimo, porque es probable que pluma más especializada se encargue un día de hacerlo, tal vez en lectura solemne dentro de este mismo recinto, ya que la Geometría diferencial ha tomado carta de naturaleza en nuestra enseñanza. Pero parece oportuno desarrollar en este capítulo, somera y concisamente, los métodos y algunos de los resultados más elementales, con objeto de haber la silueta de rama tan frondosa y ubérrima. El siglo XIX fué el siglo troncal de los grandes geómetras físicos; en el siglo XX, cada rama constituye disciplina especial.

En primer lugar aparecen tres grandes divisiones: la clásica, cuya tradición deriva de Monge y tiene en Darboux su principal continuador; la de Riemann, que opera con un número finito de dimensiones y ha dado lugar al cálculo tensorial o diferencial absoluto, objeto de desarrollo sorprendente en las teorías modernas de la Relatividad, Gravitación y Electromagnetismo, y, finalmente, la rama topológica, cuyo origen se halla en Poincaré y cuyo desenvolvimiento corresponde en gran parte a la escuela de Hamburgo. En segundo lugar se hallan las Geometrías en espacios de infinitas dimensiones, como la geometría de los espacios de Hilbert, cuyo estudio corresponde al cálculo funcional propiamente. En la Geometría diferencial clásica, la de estudio puramente analítico con idea geométrica directriz y con interpretación a cada paso del cálculo, se ofrecen: 1.º, el método cinemático y especialmente el uso del triedro móvil constituyendo como una geometría intrínseca de la variedad, y 2.º, el método de Gauss, fundado en las formas diferenciales, especialmente en las que definen el elemento de arco e introducen la curvatura. Adelantados multitud de conceptos intuitivos por la idea geométrica, fué necesario darles mayor base para su apropiada generalización, lo que despertó toda una labor de crítica y revisión todavía muy lejos de su término, labor en la que cabe señalar especialmente a Study. Gauss, por ejemplo, demuestra la existencia del plano tangente, pero el rigor de Gauss fué olvidado cuando ofrecíanse al alcance de la mano abundantes frutos de la intuición que sugerían constantemente nuevos campos y cosechas.

El tratamiento cinemático pretendió durante algún tiempo la exclusiva (Chasles-Mannheim-Ribaucour); también los enamorados de la geometría sin fórmulas (parangón del análisis sin figuras de Lagrange) tuvieron relativo auge; la manera actual no pretende tales exclusivismos, pero propende a una máxima sencillez en las demostraciones y una síntesis cada vez más vasta. El método de Gauss fué desarrollado principalmente en Italia, donde Bianchi publicó su tratado clásico; en este método el estudio de las superficies se basa en el de los invariantes de las dos formas fundamentales. La curvatura total o producto de las principales es función racional de los coeficientes de la primera forma diferencial (que expresa $ds^2$) y de sus derivadas (Teorema egregium). Y los tres coeficientes de la segunda forma que equivale a $\frac{ds^2}{R}$, siendo R el radio de curvatura normal, pueden expresarse, mediante el Teorema egregium y las fórmulas de Mainardi (1857) - Codazzi (1868), en función racional de aquellos coeficientes y sus derivadas (fórmulas fundamentales de la teoría de superficies). Gauss aborda el problema de aplicabilidad por flexión sin deformaciones. Sus teoremas sobre curvatura dan lugar al examen de superficies de curvatura constante; multitud de matemáticos se ocupan en resolver la ecuación diferencial, y después de largos y sostenidos ensayos, resuelven deducir las propiedades esenciales, no de la integración problemática, generalmente ardua y difícil, sino de la definición y relaciones con otras superficies. Pero la ecuación diferencial plantea "sistemas de elementos": rayos o rectas con Malus, Hamilton y Kummer, círculos, congruencias y complejos de cónicas más adelante; la posibilidad de emplear el mismo herramental para tratar los grupos isomorfos justifica la introducción del concepto fundamental de grupo y con él la sistematización y el orden. Se publican textos varios en diversas lenguas para ir codificando los resultados alcanzados y para examen del panorama en que hay que dirigir nuevas exploraciones. El panorama señala la necesidad de revisar los cimientos de más de un concepto; el de curva, por ejemplo, es objeto de atención profunda. Pertenece a esta época el comienzo del cálculo vectorial con Möbius, Grassmann y Hamilton.

El caudal de conocimientos aportados en esa primera época es formidable. Líneas sobre superficies y sus trayectorias, curvatura normal oblicua y geodésica, formas y parámetros diferenciales, integración de ecuaciones diferenciales que definen líneas en superficies de segundo orden, y otras; superficies aplicables sobre otra dada especialmente de segundo orden; líneas especiales en superficies genéricamente definidas, v. gr., en las de curvatura constante; análisis de integración en los casos en que la integral es algébrica o unicursal; etc., etc.; problemas resueltos unos, otros sin resolver, v. gr., la ecuación de las superficies aplicables sobre una de revolución (problema de Bour), determinación de una superficie mínima con un contorno dado, etc.

Dos elementos vienen a jugar importante papel en el Análisis: la introducción de las imaginarias, que ya Monge manejaba con gran desembarazo, y la reducción de unos problemas a otros, la búsqueda de transformaciones que, o bien reproducen las ecuaciones diferenciales o las refieren a otras mejor estudiadas, por ejemplo a la ecuación diferencial de segundo orden, que tiene papel preponderante e invita a un estudio detenido de los métodos de Ampére y Darboux.

Se aplica el método variacional; con su ayuda, Darboux abarca el problema de la representación esférica contribuyendo con ello a que entre en más veloz carrera el de hallar las superficies transformadas de una dada. Se emplea también el de las superficies triplemente ortogonales cuyas imágenes más sencillas son las coordenadas esféricas, polares y cilíndricas, las cartesianas rectangulares y las cuadricas homofocales. Estas últimas dieron origen a las coordenadas elípticas y por generalización a las coordenadas curvilíneas ortogonales (Lamé, 1857 y 1859). La determinación del haz que forma con otros dos dados un sistema triplemente ortogonal o de la familia de Lamé, es el problema central de tales estudios, que depende de una ecuación de tercer orden con tres variables independientes (Darboux). Halladas algunas soluciones particulares, mediante transformaciones adecuadas se pueden deducir nuevos sistemas. En este orden de conocimientos se destacan los nombres de Ribaucour y de Bianchi.

Con los estudios cartográficos introdujeron la Geometría diferencial en la disciplina matemática Lambert (1772) y Mercator (1569), interesando a todos los grandes matemáticos del setecientos. Gauss ocupóse en la representación aplicable en 1822; pero es probable que antes de esta fecha hubiera descubierto que las propiedades isométricas dependen de la forma de primer orden $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$, lo cual expone y desarrolla en sus Disquisiones circa superficies curvas de 1827. En sus "Reliqua" (1843-47), insiste sobre las superficies que tienen una misma $ds$, las cuales forman un grupo: el de las superficies isométricas. La representación, conforme en que $E : E' = F : F' = G : G'$, es llamada isogonal porque conserva los ángulos; se inventaron luego otras muchas. Tissot (1859) estudió la que conserva las áreas, analizando la ecuación diferencial que define la transformación y la correspondencia de contornos y valiéndose, para establecer condiciones en ellos, de las arbitrarias de la integral.

Beltrami, el que introdujo la manera de Gauss en Italia, dando origen a la brillante escuela italiana de profundos geómetras, estudió la representación cartográfica en que a las geodésicas de la superficie corresponden rectas en el plano; las superficies en que esto es posible son superficies de curvatura constante, problema que se generaliza luego al de la correspondencia entre círculos geodésicos o entre geodésicas y círculos geodésicos, y más en general, entre determinadas líneas, v. gr., de curvatura, geodésicas, etc., y otras de tipo también determinado en la otra superficie. En todas las representaciones cartográficas se supone que la correspondencia es puntual y biunívoca, continua, $\left\{ \begin{matrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{matrix} \right\}$. alrededor de los puntos $\left\{ \begin{matrix} P \\ P_1 \end{matrix} \right\}$ son funciones de los parámetros $\left\{ \begin{matrix} u\, v \\ u_1 v_1 \end{matrix} \right\}$ con derivadas continuas, no siendo nulos a la vez los tres determinantes funcionales:

$$\frac{D(x\,y)}{D(u\,v)}, \quad \frac{D(y\,z)}{D(u\,v)}, \quad \frac{D(x\,z)}{D(u\,v)}.$$

La cartografía es el arte de tales representaciones y el examen de los errores que se introducen en aquello que no conservan.

Transformaciones de marcado interés son las proyectivas que convierten una superficie en sí misma (problema de Lie), las que permiten la correspondencia uniforme conservando las líneas de curvatura y la correspondencia topológica entre superficies de Riemann. (V. Eisenhardt, "Transformation of surfaces", Princeton, 1923.)

## XV

El método de los invariantes a que Gauss reduce el estudio de las superficies sobre la base de las fórmulas fundamentales, aplicado a todas las transformaciones de un grupo determinado, conduce a una clasificación y sistematización señalada por Klein en su programa de Erlangen. Esta manera ha sido objeto de exposición sistemática por Blaschke en su reciente tratado de Geometría diferencial, cuyo primer tomo ha alcanzado en corto plazo tres ediciones. El estudio de las superficies invariantes en el espacio ordinario y para los grupos de movimientos da lugar al análisis de las propiedades métricas, la base proyectiva a la geometría proyectiva diferencial, y así sucesivamente la conforme que conserva los ángulos, la que es invariante en el grupo Lorentz, la que define la Geometría esférica superior de Lie, etc.

Gauss señaló la curvatura producto de las curvaturas principales como invariante en la aplicabilidad, lo cual es una consecuencia inmediata del Teorema egregium. Otro invariante para las mismas transformaciones es la curvatura geodésica o tangencial. La integral de la curvatura de Gauss en un recinto cerrado simplemente conexo es igual a la integral de línea de la curvatura geodésica del contorno $+ 2$. Si se aplica a una superficie cerrada de género $p$, la curvatura total resulta ser $4\pi(1 - p)$.

Si los métodos de la teoría de invariantes hubiéranse hallado en su pleno desarrollo actual, no cabe duda que se hubieran aplicado desde el primer momento a la Geometría diferencial a la manera de Gauss. Ello ocurrió algunas décadas más adelante, durante las cuales Grassmann (1844) inició la extensión de la Geometría diferencial a variedades situadas en espacios de $n$ dimensiones mediante un análisis intrínseco de gran profundidad y alcance que demostró con la resolución del problema de Pfaff (1862).

La Geometría diferencial proyectiva, que contaba con la tradición iniciada por Halphen y Wilcynsky ha sido objeto de atención y desarrollo en los últimos años (*). El método primitivo de los fundadores se basa en el examen de las ecuaciones diferenciales. A este método, Fubini ha añadido un segundo cuyo fundamento son formas diferenciales. Ambos métodos, el de ecuaciones lineales y el de formas, se completan; traducen en el examen de las propiedades invariantes en el grupo proyectivo los dos métodos clásicos de Monge y de Gauss. La escuela italiana cuenta con excelentes contribuciones en que además de las de Fubini se señalan las de Bompiani y Terracini especialmente; fuera de Italia, en América (Green), en Rumania (Tzitzeica) y en Bohemia (Czech), se hallan notables investigadores.

En la manera de Fubini en el estudio de superficies, interviene una forma diferencial cuadrática y una cúbica, cuyo cociente es invariante en una colineación cualquiera; definen, la primera, al igualarla a cero, las asíntotas o tangentes a las curvas asintóticas; la segunda, las líneas $t$ de Darboux cuya tangente lo es a la intersección de la superficie con una

(*) Ver los textos de Wilcynsky, Leipzig, 1906; Fubini y Cech, Bolonia, 1926 y 1927, y París, 1931; Lane, Chicago, 1931, y la bibliografía recogida por la señorita Sperry, Universidad de California, 1931.

determinada cuádrica, intersección que tiene un punto triple con tangentes coincidentes. Las direcciones conjugadas de las $t$ de Darboux son las de Segre, al que se debe la introducción de la Geometría proyectiva diferencial en espacios de cualquier número de dimensiones. El cociente de las dos formas de Fubini se denomina elemento lineal proyectivo, y su igualdad en dos superficies es la condición necesaria y suficiente para que sean aplicables proyectivamente. Propiedades análogas a las conocidas en Geometría métrica diferencial pueden ser traducidas a la nueva y añadirle otras con tal riqueza de ideas y elegancia de resultados que justifican el fervor de sus adeptos y doctores.

La época moderna del desarrollo de la Geometría diferencial se inicia con Riemann en 1854, al estudiar las variedades definidas por un $ds^2 = \Sigma g_{\alpha\beta}\, dx_\alpha\, dx_\beta$ en $n$ dimensiones. Es el estudio de la Geometría en pequeño, un análisis del espacio por elementos locales, como Gauss iniciara el estudio de las superficies, llevando al concepto abstracto de espacio la idea de Faraday y Maxwell de referir al medio la acción a distancia. La Geometría diferencial se convierte de este modo en la teoría de los invariantes de una forma cuadrática de $n$ variables. El invariante más inmediato es de cuarto orden, el tensor de Riemann Cristoffel, igual a cero si el espacio es euclídeo, igual a una constante negativa en la geometría no euclídea de Lobatchewsky. Para el estudio de tales cuestiones Ricci, profesor en Padua, ideó la herramienta del cálculo diferencial absoluto, que en los primeros años de este siglo había de lograr un conocimiento tan general por haber encontrado Einstein una posible interpretación de las ideas de Riemann con su teoría de la Gravitación.

Dentro del mencionado cálculo, la interpretación por Levi Civita (1917) del paralelismo en puntos alejados unidos por una trayectoria determinada, representa un gran avance en la Geometría de Riemann (*). La noción de curvatura aparecía como consecuencia de depender el transporte por paralelismo del camino o trayectoria seguida.

Como la forma fundamental expresa la longitud infinitesimal, el espacio de Riemann es un agregado de espacios euclídeos infinitesimales; la geometría de Riemann tiene carácter métrico, y cabe idear una geometría más general que pueda tener como caso particular la de Riemann y comprender también la geometría de carácter afín, proyectiva, conforme, etcétera, en variedades de cualquier número de dimensiones. A ello obliga,

(*) En sus lecciones de 1922, en España, el ilustre sabio italiano ocupóse en esta cuestión, y sus conferencias fueron impresas en Barcelona y traducidas luego a diversos idiomas.

en cierto modo, la ilusión de involucrar el Electromagnetismo en una teoría que comprendiera la Gravitación. El paralelismo no necesita para su introducción la forma diferencial cuadrática. Fué estudiado el paralelismo o transporte lineal en sí mismo y definido por un sistema de $n^3$ funciones para una magnitud covariante y otras $n^3$ para una contravariante (Weyl, 1918) (*).

A los textos especializados de Geometría riemaniana de Eisenhardt, Princeton (1926), Cartan, París (1928) y Mayer, Berlín (1931), se añaden multitud de memorias, entre las que ocupan lugar destacado las de Cartan. Hoy, dice en su opúsculo del "Memorial" de 1925, la Geometría riemaniana está desempeñando un papel análogo al que antes la euclídea entre las geometrías de grupo fundamental codificadas en el programa de Erlangen. Estas nuevas geometrías han contribuído a una revisión de la teoría de los grupos continuos y de su relación con la noción más general del transporte, habiéndose introducido geometrías diferenciales de mayor generalidad que la del transporte lineal (**).

De este desenvolvimiento formidable de la Geometría diferencial forma parte el de la Geometría topológica diferencial, que llevado a cabo en diversos centros de superior cultura matemática, integra gran parte de las publicaciones del Seminario de Hamburgo. Se trata de haces de curvas formando "tejidos" y „redes" de tres dimensiones, cuyas propiedades topológicas son estudiadas, es decir, propiedades invariantes en transformaciones topológicas (puntuales, biunícocas y continuas). El concepto diferencial es equivalente a local en contraposición a la Topología integral que se refiere a las figuras completas. Esta teoría, que es de aparente sencillez, se relaciona con los fundamentos más profundos de la teoría de ecuaciones diferenciales y

---

(*) Las obras de este insigne matemático, donde aparecen en forma de texto sus contribuciones a la Geometría diferencial, son: "Raum, Zeit, Materie", Berlín, 1923 (v., en castellano, el discurso de ingreso en esta Academia de J. M. Plans, Madrid, 1924), y "Mathematische Analyse des Raumsproblems", editado en Berlín (1903), que Weyl leyó en España en el mismo año.

(**) La bibliografía es demasiado numerosa para consignarla. Pero sobre estas cuestiones son recomendables los libros de Struik: Grundzüge der Mehrdimensionalengeometrie, 1922; Schoutten "Der Ricci Calcul", 1924, el artículo de Bernwald en la "Ensiclopedia Teubner", tomo III, 1927, y el tratado de Geometría no riemanianiana de Eisenhardt, Princeton, 1927, en el que se trata la geometría de los caminos, es decir, de las variedades de conexión afín invariantes para toda transformación que no altere las geodésicas. En un sentido más general, v. Douglas: "The general geometry of patlis Annals of Mathematics", 1928.

la teoría de funciones de dos variables complejas; en tales disquisiciones (de lo más interesante de la Matemática contemporánea) no podemos detenernos aquí, pero indicaremos que los recursos ordinarios del Análisis no son suficientes para desarrollarlas, v. gr., la noción de derivabilidad es en cierto modo extraña al asunto, de donde parece deducirse que un estudio a fondo de tales cuestiones pueda contribuir a aclarar las fundamentales del Análisis infinitesimal.

## XIV

Multitud de veces se ha repetido que uno de los métodos de mayor éxito en la investigación consiste en el examen detenido de casos particulares cuyas propiedades comunes preparan la intuición de una ley de la que luego se investiga a qué casos se aplica (**). Las ecuaciones lineales, por ejemplo, admiten un sistema fundamental; es decir, toda integral es función lineal del referido sistema. Recíprocamente, ¿a qué ecuaciones podrá aplicarse la existencia de un sistema fundamental? Darboux contestó la pregunta para sistemas de ecuaciones de primer grado, y Lie se ocupó también de esta cuestión extendiéndola a sistemas cuyas soluciones pueden deducirse unas de otras mediante transformaciones de un grupo finito o infinito (sistemas automorfos).

Otro ejemplo clásico en la teoría de ecuaciones diferenciales de primer orden es la propiedad de los métodos elementales de integración, de ser adecuados en ecuaciones que admiten un grupo continuo de transformaciones infinitesimales con un parámetro, es decir, reductibles a traslaciones. Recíprocamente, la idea de admitir un grupo de un parámetro, o sea, de quedar invariante en todas las transformaciones del grupo, conducirá a aquellas y otras ecuaciones en las que tal propiedad facilita de un modo efectivo la integración.

---

(*) Con el título "Topologische Fragen der Differentialgeometrie".

(**) Poincaré, en su memoria póstuma de los Rendiconti di Palermo, se expresa en estos términos al referirse al teorema de topología sobre transformación en sí misma de la corona circular en determinadas condiciones, teorema que fué demostrado por Birkhoff y que se presenta en un estudio de Dinámica: "J'ai èté obligé d'envisager séparement un grand nombre de cas particuliers mais les cas possibles sont très nombreux pour que j'aie pu les étudier tous. J'ai reconnu l'exactitude du théorème (que hay dos puntos invariantes) dans tous les cas que j'ai traités. Pendant deux ans je me suis efforcé sans succès soit de trouver une démonstration générale soit de découvrir un exemple où le théorème soit en défaut."

La idea de clasificación se encuentra ya en Euler, y atendía a la forma particular del multiplicador. Jacobi se inspiró de Euler y amplió el concepto a sistemas de primer orden. La idea de Lie coincide con la de Euler en el primer orden, pero es de muy superior alcance, porque es extendible al segundo orden y superiores, donde en general una ecuación no admite grupo, y por lo tanto pueden clasificarse sobre tal base. Las ecuaciones de órdenes superiores exigen la existencia del grupo prolongado; lo difícil, en general, es saber que admiten determinado grupo, y, cuando se sabe, cuál es el mayor partido que puede sacarse de esta circunstancia. Lie señaló ecuaciones tipos invariantes para diversos grupos puntuales; para cada tipo indicó el método más adecuado de integración; las lineales, v. gr., constituyen un tipo.

Durante mucho tiempo atribuyóse a las teorías de Lie un valor de agrupación o de síntesis, se objetaba que bien pocas ecuaciones pudieron ser integradas que no lo hubieran sido por otros métodos, y que en general no es tarea fácil averiguar si existen los grupos de transformaciones que dejan invariante la solución, es decir, que convierten una solución en otra. Y sin embargo Lie, obstinadamente, al descubrir la parte fundamental que a la noción de grupo continuo corresponde en ecuaciones diferenciales, se preocupa en hallar las máximas facilidades que el conocimiento de los grupos de transformaciones y de las integrales que forman grupo introduce en la resolución de las ecuaciones. La Mecánica ofrece material propiocio al ensayo. La existencia de grupos de funciones entre las integrales se da, efectivamente, en problemas de Mecánica, que el método de Jacobi reduce a integrar una ecuación en derivadas parciales de primer orden. Con las funciones distinguidas se puede reducir la operación integral a la de un sistema de Jacobi lineal en involución. El problema de hallar cómo se realiza la máxima utilización (grösstmögliche Leistung) del conocimiento de transformaciones finitas o infinitesimales admitidas en grupo por un sistema completo, fué una de las obsesiones de Lie, que no llegó a publicar una exposición acabada y concluyente de su tesis. Hoy, los métodos de Lie han sido extendidos en textos y memorias, merced principalmente a Goursat y Vessiot en Francia, y a los discípulos de Lie: Engel, Scheffers y Kowalewsky en Alemania.

El reconocimiento del papel básico que la idea de grupo tiene en la Matemática y la marejada de crítica de los principios de la Geometría y de la noción física del Espacio, han contribuído grandemente a que la idea de grupo continuo fuera considerada en su extraordinario valor. Lie veía en una ecuación diferencial una correspondencia de elementos de contacto (punto y tangente), de osculación (punto tangente y radio de curvatura), etc. La integral general es el desenvolvimiento de tal correspondencia, que a veces, una transformación, v. gr., de contacto, puede simplificar, (por ejemplo, la de Legendre en las ecuaciones de Clairaut), haciendo obvia toda otra operación.

En la imposibilidad de descender a rasgos de mayor pormenor en la obra de Lie, daríamos con agrado una relación del problema fundamental ya citado, verdadero nervio de casi todos los métodos de integración de Lie: "Integrar del mejor modo un sistema completo de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden conocidas las transformaciones infinitesimales que admite", pues en la resolución de este problema se presenta patente toda la potencia de los métodos debidos al sabio noruego, pero la falta de espacio nos obliga a referirnos a los años 1877 y 1885 de los "Mathematische Annalen" y a los trabajos posteriores de Vessiot en las Acta de 1904. A Vessiot se deben, además, importantes contribuciones sobre la posibilidad de resolver ecuaciones ordinarias por cuadraturas (cuando admiten grupos que Lie llamó integrables, es decir, que contienen un subgrupo invariante con un parámetro menos, este subgrupo otro en iguales condiciones, etc.), problema que es parangón del de Algebra de resolución de ecuaciones mediante radicales. (V. la Tesis de Vessiot en 1892).

En 1895 escribía Lie: "In der ganzen modernen Mathematik ist die Theorie der Differentialgleichungen die wichtigste Disziplin." Su aplicación de la noción de grupo continuo arranca de 1869; la de los grupos de funciones aparece en 1872; poco después halló la teoría de los invariantes en las transformaciones de contacto, lo que permitió la resolución del problema de equivalencia. Con estas teorías dió una nueva solución del problema de Pfaff, en que de un modo sintético acopla los desarrollos de Pfaff y las ideas geométricas de Plücker y Poncelet, resolviendo todos los casos excepcionales.

Casi simultáneamente a la introducción del grupo continuo por Lie, Laguerre (1879) extiende a las lineales la noción de invariante de una forma algébrica, y Halphen (1884), al estudiar las ecuaciones diferenciales que no alteran por una transformación homográfica, aplica las ideas de Laguerre, y desarrolla la teoría de los invariantes diferenciales absolutos y relativos de las ecuaciones lineales para el grupo proyectivo general. Y simultáneamente se sirve de tales conceptos para el análisis de la reducción de una ecuación diferencial lineal a tipos de integral conocida, v. gr., de coeficientes constantes, a ecuaciones cuya integral general es racional y a ecuaciones de coeficientes doblemente periódicos de iguales períodos cuya integral es uniforme descubiertas por Picard en 1879-1880.

Al terminar el siglo anterior, toda una pléyade de trabajos había relacionado las ordinarias lineales con las ecuaciones algébricas de una parte y con la Geometría proyectiva de otra (Frobenius, Fuchs, Konigsberger, Halphen, Apell, Wilczinski). Criterios de reductibilidad, invariantes diferenciales en transformaciones proyectivas de curvas planas y alabeadas, superficies regladas, redes; teoría proyectiva local de superficies en variedades cualesquiera; integración cuando entre las soluciones particulares existen relaciones determinadas; existencia de integrales algébricas; ídem de una forma dada respecto de los elementos arbitrarios; ecuaciones que admiten determinados grupos de transformaciones puntuales o de contacto, etc., se han examinado tratando de hallar los tipos más generales de ecuaciones que presentan tales propiedades. En estas cuestiones interviene la noción de Lie sobre equivalencia respecto de un grupo que consiste en la transformación del mismo que convierte uno en otro dos sistemas de una clase determinada definida por la forma general de los sistemas que la constituyen, en la cual entran constantes o funciones arbitrarias. (V. Cartan, "Annales de l,Ecole Normale", 1908.)

La noción de grupo, faro encendido en el siglo XIX, resplandece cada día con mayor vigor en la Matemática de uno a otro extremo del extenso campo de sus estudios. Una de las personalidades que más han contribuído a aclarar los problemas de la teoría de grupos que se ofrecen en ecuaciones diferenciales, es Cartan. Cartan ha resuelto la integración de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales cuya integral no depende sino de constantes arbitrarias y que admiten un grupo de transformaciones; ha estudiado los grupos lineales más sencillos isomorfos de un grupo dado de Galois, aplicando tales estudios al examen de las integrales algébricas de las lineales ordinarias. Pero donde su labor original ofrece caracteres de mayor profundidad es en el estudio de los grupos continuos infinitos dependientes de funciones arbitrarias, donde ha demostrado los tres teoremas fundamentales que se corresponden con los de Lie para grupos finitos y continuos, y ha determinado todos los grupos simples (*).

La aplicación de las ideas de Galois a las ecuaciones diferenciales lineales fué realizada en 1883 por Picard, que introdujo el grupo de ra-

(*) V. Notice sur les travaux scientifiques de M. Élie Cartan, París, 1931. La Revista Matemática Hispano-americana publicó en 1927 la traducción de la conferencia de Cartan en Toronto (1926), sobre Teoría de los grupos e investigaciones recientes de Geometría diferencial.

cionalidad o reducción, grupo continuo con $p$ parámetros. V. su tratado de Análisis, tomo III. La idea basica es la correlación entre las raíces de una ecuación algébrica y el sistema fundamental de una ecuación lineal. Los diversos teoremas enunciados por Picard traducen los que el Algebra había establecido. Las funciones simétricas lo son del sistema fundamental $y_1, y_2 \dots y_n$, y sus derivadas que permanecen invariantes en transformaciones lineales del grupo continuo de $m^2$ parámetros; los coeficientes $p$ de la ecuación lineal de orden $n$, son funciones simétricas de las integrales del sistema fundamental y sus derivadas. Toda función racional de las mismas invariable por las substituciones del grupo lineal, es expresable por los referidos coeficientes; dada una se puede formar la ecuación diferencial que la admita por solución. Dada una función R racional de las cantidades referidas, puede admitir un grupo lineal G con $\rho$ parámetros, y recíprocamente, dado el grupo G continuo de $\rho$ parámetros, puede existir R. Toda otra S función racional del sistema fundamental y sus derivadas que admita el grupo G, es expresable racionalmente en función de R y sus derivadas y de los coeficientes $p$ de la ecuación dada y sus derivadas. Picard, como Galois, introducen la sensible $V = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \dots + u_n y_n$ en que las $u$ son funciones racionales de $x$, de la que eliminando las $y$ entre ella y sus derivadas valiéndose de la ecuación propuesta se llega a una ecuación de orden $n^2$ con $n^2$ integrales $y_k, y'_k, \dots y_k^{n-1}$ siendo $k = 1, 2 \dots n$, las cuales se expresan todas en función de V y sus derivadas hasta el orden $n^2 - 1$. Sea $E = 0$ la ecuación a que satisface V (análoga a la resolvente de Galois, cuyas soluciones dan las diversas substituciones). A toda solución corresponde un sistema de integrales de la ecuación dada $y_1, y_2, \dots y_n$ que podrá no ser fundamental si el determinante $\varphi$ de las $y$ y sus derivadas hasta el orden $n$-$1$ es nulo.

En general E será irreductible, pero si no lo es, sea $f(V, V' \dots V^{\pi}) = 0$ la ecuación de orden menor cuyas soluciones lo son de E, sin serlo de $\varphi = 0$. A una solución de $f = 0$ corresponde un sistema $y_1, y_2 \dots y_n$. Sea $Y_3, Y_2 \dots Y_n$ el de la dada, se tendrá: $Y_1 = a_{11} y_1 + \dots$, etc., con $\pi$ parámetros; es decir, los $n^2$ constantes del grupo lineal discontinuo con funciones de $\pi$ parámetros arbitrarios. El grupo de substitución se llama entonces de Picard, y, análogamente al teorema de Galois en Algebra, toda función racional de $x$ y de un sistema fundamental con sus derivadas, invariable por las transformaciones del grupo G, es función racional de $x$, como se ve reemplazando sus valores en función de V y sus derivadas, tomando luego para V una integral no singular de $f = 0$.

Drach, en 1898, demostró cómo puede extenderse la noción de grupo de racionalidad a todas las ecuaciones ordinarias o en derivadas parciales e inventó la integración lógica (*) por oposición a la geométrica, mediante cuya idea profunda logró integrar la ecuación diferencial de las líneas de curvatura de la superficie de ondas, integración que había desafiado los esfuerzos de los matemáticos.

## XVII

La figura más grande de la Matemática moderna en la rama de estudio calificada por Lie como "die wichtigste Disziplin", es Poincaré. Sólo Cauchy puede parangonársele, y ambos a dos son los más ilustres generadores de ideas. En ambos se revela el genio con la maravillosa abundancia de sugestiones que la generación actual está muy lejos de haber agotado.

Poincaré extendió el método de las mayorantes de Cauchy al considerar desarrollos en serie en función de elementos iniciales y parámetros arbitrarios. Tales teoremas, fundamentales en Mecánica ordinaria y celeste, permiten edificar sobre base sólida el método de las ecuaciones de variación, modo de extensión analítica de soluciones conocidas. Permiten abordar además problemas de estabilidad y aun introducir criterios nuevos, contribuyendo esencialmente al conocimiento del cuadro de trayectorias posibles y no solamente desde el punto de vista local, sino en alcance de toda la región de existencia, cuando la convergencia del proceso está debidamente justificada.

En el análisis del punto singular Poincaré estudia desarrollos en serie del tipo $(x - x_0)^{\lambda}$ ($\lambda$ complejo) en ecuaciones ordinarias no lineales, pero cuyos puntos singulares tengan el tipo de Fuchs. Y aborda por primera vez el estudio de puntos singulares de igual forma en ecuaciones en derivadas parciales homogéneas de primer orden, demostrando que las irregularidades pueden ser o accidentales, esto es, debidas a la propia integral que se estudia, a los elementos que la definen como elementos iniciales, o esenciales, es decir, inherentes a la ecuación. En el primer caso las integrales son raíces de ecuaciones algébricas cuyos coeficientes

---

(*) Véase su Tesis doctoral, la Memoria de Vessiot en 1904, en los "Annales de l'Ecole Normale", y las comunicaciones de Drach al Congreso de Cambridge en 1912.

son holomorfos en las variables. En el segundo caso, v. gr., en la ecuación

$$X_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \ldots = \lambda_1 f_1$$

en que las $X_1$, $X_2$ ... son funciones holomorfas de $x_1, x_2 \ldots x_n$, para que exista integral holomorfa es preciso que todas las raíces de una ecuación secular en $\lambda$ caigan de un mismo lado de una recta que pasa por el origen.

Los resultados de Poincaré apenas publicados son del dominio general para todos los que se interesan en estas cuestiones; el tratado de Picard las recoge, y completados por Dulac, constituyen uno de los capítulos clásicos de la teoría elemental de puntos singulares en sistemas de ecuaciones $dx_1/X_1 = dx_2/X_2 = \ldots$ en que $X_1$, $X_2$ ... son holomorfas e iguales a cero alrededor del origen. Mediante una transformación lineal se transforma el sistema en otro $dy_1/Y_1 = dy_2/Y_2 \ldots$ cuya parte lineal en las Y es canónica: $\lambda_1 y_1$, $\lambda_2 y_2$, etc., transformación cuya ecuación característica es la secular a que nos hemos referido (expresión de una forma cuadrática en sumas de cuadrados). Las integrales son funciones holomorfas alrededor del origen cuando todas las $\lambda$, nuevos coeficientes de la parte lineal, cumplen con la condición referida y no existe relación alguna de combinación de la forma $\lambda_i = q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2 + \ldots$, siendo las $q$ enteros y $\Sigma\, q \geq 2$. Con las soluciones de las ecuaciones en $f_1, f_2 \ldots$ obtenidas por desarrollo en serie se alcanzan las integrales del sistema de ecuaciones ordinarias propuesto. Las funciones $f$ definidas por las ecuaciones en derivadas parciales $X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots = 0$, se calculan fácilmente en función de $f_1, f_2$, etc., v. gr., $f = \lambda_2 \log f_1 - \lambda_1 \log f_2$. Consideradas como función de uno de los parámetros $\lambda$ son funciones con espacios lagunares. Mediante tales desarrollos Poincaré desenvolvió la teoría de soluciones asintóticas que lleva su nombre.

Dulac completó el análisis de Poincaré examinando lo que acontece cuando no se cumple alguna de las condiciones que aseguran la holomorfía de las soluciones, especialmente si hay ecuaciones de combinación, nombre introducido por Horn, o existen raíces múltiples en la secular, demostrando la convergencia de los nuevos desarrollos.

Los puntos singulares no regulares en el sentido de Fuchs son de estudio mucho más difícil. En las ecuaciones lineales Thomé analizó el caso en que aparecen polos en los coeficientes, pero sin la ordenación de Fuchs. Para el punto al infinito como único punto singular (coeficientes polinomios), las integrales son de la forma $e^{P(x)}\varphi(x)$, siendo P un polinomio y $\varphi(x)$ una serie de potencias negativas en general no convergente. Poincaré demostró que era análoga a la de Stirling y que puede muy bien representar asintóticamente la integral. Poincaré dedujo multitud de propiedades de las lineales de Thomé, especialmente la posible existencia de integrales particulares holomorfas y regulares, la noción de clase o índice y su reductibilidad que permite separar éstas de las restantes soluciones, cálculo de soluciones normales, etc. Estos estudios han sido continuados por Halphen, Flocquet, Picard, en Francia, y por Hamburger en Alemania. Las ecuaciones de Hamburger son de orden $n$ con dos puntos singulares, el origen, que es regular, y el punto al infinito, que es irregular.

Poincaré, durante gran parte de su elaboración fecunda, tuvo la obsesión de hallar desarrollos valederos en toda el área de existencia, guiado por la intervención de las funciones $\theta$ en las ecuaciones en que la derivada es función algébrica de las variables. Es lo que se denomina estudio lato o extenso de las ecuaciones diferenciales, en contraposición al estudio local o estricto.

Poincaré comenzó por las ecuaciones lineales con coeficientes funciones racionales de la variable. Su idea directriz es lograr construir con las soluciones una teoría semejante a la de las funciones elípticas. Schwarz había demostrado que si en la ecuación diferencial de segundo orden $y'' + p\,y' + q\,y = 0$ del tipo de la hipergeométrica, se considera la variable independiente $z$ como función del cociente $s$ de las dos soluciones, $s$ es función trascendente de $z$, es decir, infinitamente polimorfa. La ecuación diferencial en $s$ y $z$ se llama de Schwarz, es de tercer orden: $\frac{s'''}{s'} - {}^3\!/_2 \left(\frac{s''}{s'}\right)^2 = 2\mathrm{I}$, en que I, invariante de los coeficientes de la dada, es $\mathrm{I} = q - \frac{1}{2}\,p' - \frac{1}{4}\,p^2$ y el primer miembro se llama derivada de Schwarz. Pero puede ocurrir que $z$ sea función uniforme de $s$, con la circunstancia de que en esa inversión la dependencia funcional es tal que $s$ tiene por frontera natural, al través de la cual es imposible toda prolongación analítica, una circunferencia, llamada fundamental [Poincaré, a lo que parece, no había reconocido suficientemente esta idea como de Schwarz, y ello debió de ser motivo de cierto resentimiento por parte de éste]. Poincaré se amparó de esta inversión, considerada con más generalidad sobre la base de una ecuación diferencial lineal de segundo orden, como parangón de la inversión de la integral elíptica de primera especie. Y así como ésta, $z = s\,n\,y$ es una función doblemente periódica y uniforme de la variable $y$ cuando recorre el plano entero y adopta en un paralelogramo de períodos todos los valores, Poincaré dedicóse a estudiar qué grupo discontinuo (es decir, que no admita transformación infinitesimal) e infinito cabía atribuir a $s$ para que $z$ fuera tal que sus valores en un área se repitieran en otras distintas obtenidas sin recubrimiento mutuo, pero pudiendo alcanzar cualquier punto del área donde la función se halla definida, en el caso de Schwarz todo el círculo fundamental. Esto equivalía, primero, a establecer la existencia de un grupo análogo al de traslación en las funciones elípticas, y segundo, a demostrar la existencia de funciones invariantes en el grupo. El grupo fué el proyectivo y Poincaré empezó el estudio por el caso de coeficientes reales: $z' = (\alpha z + \beta)(\gamma z + \delta)^{-1}$ que tiene un círculo fundamental doble. Las áreas correspondientes a los paralelógramos de períodos son polígonos de arcos de círculo que cuando alcanzan a la circunferencia fundamental la cortan normalmente. Para demostrar la existencia del grupo es preciso probar que unos polígonos se deducen de otros sin recubrimiento y llenan todo el círculo. Poincaré demostró estas propiedades esenciales valiéndose de la geometría de Lobakchewsky, idea que, según cuenta él mismo, se le ocurrió siendo alumno de la Escuela de Minas en un viaje de prácticas al subir a un ómnibus en Coutances. A estos grupos discontinuos proyectivos los llamó fuchsianos. Demostrada la existencia del grupo, había que demostrar la de las funciones y construirlas. Guiado siempre por la analogía de las funciones elípticas en que aparecen como cocientes de $\theta$, series enteras, probó que, efectivamente, existían en forma de cociente de dos funciones trascendentes finitas y uniformes, análogas a la $\theta$, hasta el punto de resultar multiplicadas por un factor de $z$ cuando esta variable sufre una transformación cualquiera del grupo. Estas series fueron llamadas tetafuchsianas. El cociente es una función que llamó fuchsiana, y toda función fuchsiana es representable por el cociente de dos series tetafuchsianas. Estudiadas en sí mismas resulta que unas tienen frontera natural, como la de Schwarz, y otras están definidas en todo el plano. Pero en ambos casos, entre dos funciones fuchsianas del mismo grupo hay una relación algébrica cuyo género puede determinarse. Descubrimiento capital, pues dió origen a la teoría de la uniformación de curvas algébricas coronando así la uniformación por funciones racionales de un parámetro en el caso de género cero o elípticas en el caso de género 1. Resultaba, por lo tanto, la nueva teoría la más inmediata generalización de las funciones elípticas y abelianas en multitud de aspectos.

Poincaré demostró que toda función fuchsiana puede considerarse como procedente de la inversión de una determinada ecuación de segundo orden con coeficientes racionales, de modo que una infinidad de tales ecuaciones quedaban así resueltas mediante nuevas trascendentes: las funciones fuchsianas.

Una vez en posesión de tales resultados Poincaré siguió varios caminos para recorrer el campo nuevo que con ellos se ofrecía. De un lado la inmediata generalización al caso en que los coeficientes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son imaginarias (grupos kleineanos), de otro cómo pueden utilizarse en la integración general de ecuaciones de segundo orden o más elevado, lineales y con coeficientes algébricos, que fué el problema origen. Ciñéndonos a éste, la analogía con el caso de funciones elípticas continúa señalando el camino. En efecto, con la integral elíptica de primera especie se define por inversión $z = sn\, y$ llevando este valor de $z$ a la integral de segunda especie resuelta la integral de segunda como función uniforme de $y$ función que se llama $Z(y)$, la cual aumenta en una constante cuando $y$ aumenta en un período. Con las ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes algébricos pasa algo análogo; dada una cualquiera, puede definirse otra de segundo orden auxiliar tal que la variable independiente sea función fuchsiana del cociente $s$ de las dos integrales, y de tal modo que las integrales de la dada son funciones uniformes de $s$. La demostración de esta posibilidad es debida a Klein y Poincaré conjuntamente, y dió lugar a una especie de polémica, que no haremos sino recordar. Para formar la ecuación de segundo orden dió Poincaré modo de calcular los coeficientes con la aproximación que se quiera. Las soluciones de la ecuación propuesta son funciones uniformes de la $s$ que se transforman linealmente para toda substitución del grupo fuchsiano en $s$. Por ser análogas a la función $Z(y)$, las llamó zetafuchsianas, las cuales fueron también expresadas por Poincaré, no sólo como cocientes de dos series de potencias de $s$ convergentes en todo el área en que las funciones vienen definidas, sino también como cocientes de una serie de términos racionales por una tetafuchsiana.

Difícilmente se hallaría una demostración mejor de método y proceso del razonamiento, y no se sabe qué admirar más, si la profundidad del análisis, la potencia y dominio de los elementos puestos en juego o la síntesis y horizonte que descubre.

Poincaré no se limitó a las ecuaciones lineales. Quiso llevar su obsesión (la solución extensa) a las no lineales. No pudo conseguirlo en la variable compleja, pero llegó a borrar la singularidad para todo valor real de la variable. La principal aplicación la ofrecen las ecuaciones de la Mecánica, en especial las del problema de los tres cuerpos, y la singularidad es debida al choque, por anularse la distancia que figura en denominador. Poincaré demuestra la posibilidad de expresar las variables dependientes y el tiempo en función de otra variable $s$, de tal modo que para todo valor real de $s$ los desarrollos en series de potencias son valederos. Es decir, realiza la prolongación analítica a lo largo de un radio de la estrella de $t$, el que procede según los valores reales. Dado el sistema $\frac{dx_1}{X_1} = \frac{d\varphi_2}{X_2} = \ldots = dt$, la nueva variable $s$ viene definida por $dt = \frac{ds}{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + 1}$ y resulta que, eligiendo la constante $a$ convenientemente, se pueden desarrollar las $x$ en serie de potencias $\frac{e^{\alpha s} - 1}{e^{\alpha s} + 1}$ válidas para todo valor de $s$ desde $-\infty$ a $+\infty$ pues son holomorfas en una área indefinida limitada por dos paralelas al eje real a uno y otro lado del mismo, banda que puede transformarse conforme en un círculo, y cuando $s$ varía entre tales valores, $t$ pasa de $-\infty$ a $+\infty$. Este análisis fué origen de una serie de estudios relacionados principalmente con el problema llamado de la regularización, llevados a cabo principalmente por Painlevé, Levi Civita, Sundmann y Bisconcini. Formuláronse las condiciones de existencia del choque y se demostró que el choque era efectivamente un encuentro directo, no un rodeo asintótico en espiral u oscilatorio, lo cual condujo a sospechar que las singularidades analíticas del problema podían, efectivamente, ser allanadas por ser relativamente sencillas las circunstancias del choque. En 1904 Levi Civita regularizó el problema del asteroide y en 1912 Sundmann el general. La regularización de Levi Civita, cambio de variables por transformación de contacto, conserva la forma canónica, las nuevas ecuaciones no tienen singularidad alguna en el momento del choque. Sundmann, perdiendo la forma canónica, logró la regularización en el caso general; las coordenadas de los tres cuerpos y sus distancias y el tiempo pueden expresarse como funciones de un parámetro $\tau$, y son válidas para todo valor real de éste; si hay choque, v. gr., para $\tau = \tau_1$, las fórmulas son válidas antes del choque, durante y después. Lo más grande del análisis de Poincaré es que consigue la prolongación analítica de una solución según un radio fuera del área en que el problema se define, y la obtiene en bloque sin el proceso iterado que es la base del método de prolongación. Este modo es referible a los que se emplean en el estudio de las series no convergentes, donde tan admirables adelantos y síntesis ha conseguido Rey Pastor.

Poincaré se pregunta por qué las ecuaciones no lineales ofrecen tan grandes dificultades en comparación con las lineales hasta el punto de haber resultado inútiles todos los esfuerzos realizados para llevar al análisis de las no lineales la modalidad de las fuchsianas y sus grupos. Y la contestación que advierte es clara; las lineales no tienen más singularidades que las fijas debidas a los coeficientes; por lo tanto, con coeficientes racionales son los polos de estos coeficientes. Las no lineales, en cambio, tienen singularidades paramétricas, en número infinito por lo general. De aquí surgió la pregunta, ¿habrá alguna clase de ecuaciones no lineales con un número finito de singularidades, y a esta clase serán aplicables los métodos de Poincaré para pasar de la solución local a la solución en toda el área de existencia? Fuchs se planteó el problema, pero fué Poincaré quien demostró que esta clase no da nada nuevo en el primer orden. Son ecuaciones de Ricatti o integrables por funciones elípticas o algébricas. En el orden superior al primero, el análisis de Poincaré abrió el camino a las trascendentes de Painlevé, definidas por ecuaciones diferenciales y que son funciones uniformes de la variable en todo el campo de existencia; y en el primer orden no lineal a las soluciones que admiten sólo un número finito de ramas permutables alrededor de los puntos críticos móviles.

¿Y cuándo podrá decirse que una ecuación diferencial lineal tiene integral algébrica? En este caso tiene sólo un número finito de valores en cada punto singular; el número de substituciones es finito y la cuestión se reduce al análisis de los grupos de orden finito dentro del grupo lineal de monodromía (que es infinito numerable). Este análisis fué efectuado por Jordán, 1878; Poincaré halló para cada grupo de orden finito infinidad de ecuaciones cuyas integrales son algébricas y expresó en qué condiciones una función algébrica, cuyo grupo de Galois se conoce, satisface a una ecuación lineal de orden $p$. Estos estudios tienen íntima relación con la teoría de las formas invariantes. Con las binarias, ternarias, etc., se obtuvieron las lineales de integrales algébricas de orden dos, tres, etc. En sus lecciones sobre el Icosaedro, de 1884, Klein resuelve el problema para las de segundo orden, el caso de las integrales algébricas de la hipergeométrica figura en gran número de textos; la derivada de Schwarz facilita mucho el análisis de estas cuestiones, en las que no sólo hay que demostrar la existencia de la integral, sino construirla (*).

(*) Una exposición del problema con abundante bibliografía se halla en la Memoria de Papin, "Nuovi Lincei", 1882, en la Tesis de Boulanger de 1897, donde se refieren los trabajos de Painlevé y en un trabajo de Fano, en los "Math. Annalen", La pregunta que se formula inmediata es, ¿cuándo podrá afirmarse que una ecuación lineal es integrable mediante funciones abelianas? En el caso de segundo orden las funciones elípticas permiten la integración cuando con los coeficientes racionales hay tres puntos singulares en que las diferencias de las raíces de las ecuaciones determinantes son $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_6$ o $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_4$ o $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_3$. También cuando con cuatro puntos singulares las diferencias sean todas iguales a $^1/_2$. Y, finalmente, cuando siendo los coeficientes doblemente periódicos las integrales son meromorfas. Poincaré extiende estos resultados y halla una clase de ecuaciones lineales de tercer orden con coeficientes algébricos cuyas integrales son expresables por funciones abelianas de dos variables, estudiando el grupo correspondiente a las mismas y generalizando a ecuaciones de orden $p$ expresable por abelianas de $p - 1$ variables.

En estas investigaciones se han venido ocupando, aunque de modo más particular, Halphen, Apell, Picard (integrales uniformes y meromorfas). El último, especialmente, ha podido generalizar los resultados obtenidos por Hermite en la integración de la ecuación de Lamé:

$$y'' - K^2 p(z) y = 0$$

Todavía ataca Poincaré el problema de las integrales algébricas para las ecuaciones no lineales, concretándose al primer orden y primer grado. Siguiendo la marcha indicada por Darboux, que consiste en hallar el límite superior del grado de polinomio, logra resolverlo en algunos casos particulares y obtiene teoremas de gran valor para el caso general en una cuestión de tanta dificultad.

El problema de integrales uniformes en ecuaciones diferenciales cualesquiera, es uno de los más interesantes e ignorados del Análisis. Basta considerar que de la misma ecuación de Ricatti, a pesar de la circunstancia de hallarse en razón anarmónica constante cuatro integrales cualesquiera, no se ha podido saber en qué condiciones tiene integral uniforme. Sólo en casos muy concretos se han podido resolver cuestiones sencillas, v. gr., condiciones para que no haya puntos de ramificación en $y'^m = P(y)$ siendo $m$ entero y P un polinomio; cuando $f(y, y') = o$ siendo $f$ un polinomio tal que la curva $f(z_1 z_2) = o$ es de género cero o uno (teorema de Hermite) o en los casos considerados por Painlevé en ecuaciones de orden superior y de que nos ocupamos más adelante. Por esto se señala con el mayor interés el teorema de Bruns, 1886, en el pro-

de 1900. V. también los tratados de ecuaciones lineales de Schlesinger, tomo II, 1897, Leipzig, y de ecuaciones diferenciales de Forsyth, tomo IV, 1902, Cambridge.

blema de los tres cuerpos que expresa que las integrales clásicas (seis del c. d. g., tres de momentos y fuerzas vivas), son las únicas algébricas en las coordenadas y parámetros. El sistema es reductible a problema de dos cuerpos con una función de fuerzas U más complicada que la potencial ordinaria en la que interviene la suma S de las distancias mutuas; es decir, a un problema con seis coordenadas y seis parámetros, v. gr., los de Radau, por haber una coordenada cíclica (eliminación de nodos) y poder eliminar el tiempo. Las coordenadas cartesianas primitivas y sus parámetros son funciones lineales de las nuevas, y el nuevo problema reducido no puede admitir una integral algébrica, principalmente porque no podría admitir la substitución $p_v, q_v, t$ por $p_v k^{-1}$, $q_v k^2$, $tk^3$ que admiten las canónicas, siendo $k$ cualquiera, a menos de ser la integral una función de las integrales conocidas. Painlevé, en 1898, demostró que toda integral en que intervienen las velocidades algébricamente, tanto si las coordenadas entran algébricamente como si no, es necesariamente una combinación de las clásicas.

Poincaré comenzó por el problema reducido en 1890, es decir, el asteroide en el plano Sol-Júpiter, que giran a distancia invariable. Servíase de las coordenadas $q$, anomalía media del asteroide alrededor del c. d. g. Sol-Júpiter y $q_2$ longitud del ápside, ambas de la órbita osculatriz; los parámetros correspondientes son $p_1 = \sqrt{a}$ y $p_2 = \sqrt{a(1-e^2)}$. Demostró que no había integrales uniformes en estas coordenadas y parámetros ni en los de Kepler de la elipse osculatriz, aunque claro está que puede haber integrales uniformes en otras coordenadas. (V. Levi Civita, 1905, en las Acta.) La base de la demostración está en que siendo H la función de Hamilton del problema $(H = h$ es la integral de fuerzas vivas), toda integral $\varphi = o$ debe verificar $(\varphi\ H) = o$, lo cual, dado el desarrollo de H, es incompatible con una $\varphi$ uniforme analítica periódica en $q_1, q_2$. Estos teoremas tuvieron mucho interés cuando se demostraron; Poincaré les dió cabida en los famosos Métodos nuevos de la Mecánica celeste y figuran en los textos, v. gr., en el de Ecuaciones diferenciales de Forsyth, tomo III, y en el de Mecánica, de Whittaker. Probablemente por el estudio de este último texto son conocidos de algunos entre nosotros. Bruns estudió el problema de los $n$ cuerpos y ocupóse también en el examen de las integrales del sistema reducido que puedan considerarse como diferenciales totales de expresiones algébricas.

En la dificultad de resolver la uniformidad cabe el examen de la multiplicidad. Y se presentan aquí teoremas análogos a los de Picard en la teoría de funciones, v. gr., si en $y' = f(x, y)$ $f$ es racional y

$x = f(y)$ es solución infinitamente multiforme, hay un solo número finito $\rho$ de valores Y para los cuales $y(x) = Y$ da sólo un número finito de valores; y también: toda ecuación $y' = \frac{P}{Q}$ (P y Q polinomios en $x, y$) que posee una integral politropa, de politropía finita, o es algébrica o la ecuación diferencial puede reducirse a una Ricatti mediante una substitución de la forma $y = \frac{z^u + \alpha_2 \cdot z_2{}^{u-2} + \dots}{z^{u-1} + \beta_2 z^{u-3} + \dots}$ siendo las $\alpha$ y $\beta$ racionales de $x$ (Malmquist).

## XVIII

Obra genuina de Poincaré en el estudio extenso de las ecuaciones diferenciales es la de hallar las curvas por ellas definidas, es decir, resolver el problema en el plano real. Lo que llama construir las curvas definidas por ecuaciones diferenciales.

El primer problema que Poincaré resuelve es el de las curvas definidas por $y' = P/Q$, siendo P y Q polinomios en $x$ e $y$, e inmediatamente observa que las soluciones son curvas cerradas o espirales. Analiza los puntos singulares y demuestra que son los que llamamos hoy corrientemente, según la nomenclatura introducida por él de 1881 a 1885, nodos, focos, puertos, centros. En vez de estudiar la curva en el plano, Poincaré la estudia en una superficie topológicamente equivalente a $z = \frac{P}{Q}$, v. gr., la semiesfera que proyecta desde el centro el plano indefinido donde se hallan las variables $x$ e $y$; de este modo lo infinito se corresponde con el ecuador. Por todo punto del hemisferio pasa una curva integral y una sola si el punto no es singular. Los puntos singulares vienen dados por los valores de $x$ e $y$ que dejan $y'$ en la forma $\frac{0}{0}$. Su forma típica responde al origen en las ecuaciones $y' = y/x$ nodo; $y' = a \frac{y}{x}$, $a \gtrless 1$ nodo con tangentes confundidas en el eje de las $x$ o de las $y$; con $a < 0$ puerto; $y' = \frac{y}{x} + 1$ nodo; $y' = \frac{x}{y}$ centro, $y' = \frac{x + av}{ax - y}$ equivalente en coordenadas polares a $\frac{dr}{rd\varphi} = a$, foco. El caso general con elementos de primer grado en P y Q es reductible a éstos mediante una transformación afín que no altera la naturaleza de los puntos singulares. Los "centros" están constituídos por sucesiones de elipses. La aparición de términos de segundo orden en los valores de P y Q conserva los puntos singulares que anteceden e introduce curvas asintóticas o curvas cerradas. Toda solución que pasa por el origen, o tiene en él una tangente bien determinada o lo rodea en espiral asintóticamente. Ciclo límite es la curva cerrada, solución de la ecuación diferencial a la cual se arrollan asintóticamente otras soluciones. Estas pueden arrollarse por un extremo a un ciclo límite y por el otro extremo a otro, cubriendo el área anular entre ambos. No se sabe si existen curvas integrales que tiendan por sus dos extremos a un mismo ciclo límite o punto foco. Ciclos sin contacto son curvas no soluciones que las integrales atraviesan sin oscilación. El examen de los ciclos sin contacto da una idea muy clara de cómo son las curvas soluciones de la ecuación diferencial en lo interior de las mismas; en ellas se introduce la noción de índice, I, como la suma de los ángulos de giro de la tangente a las diversas soluciones al recorrer la curva que se considere alrededor de un punto singular, suma que se divide por $2\pi$ (*).

En todo ciclo cerrado el número de nodos N, mas el de focos F, menos el de puertos C que contiene, es igual al índice total o suma de índices $\Sigma$ I alrededor de todos los puntos singulares. Para la esfera $\Sigma\ I = 2$; luego hay al menos dos puntos singulares. El índice se puede considerar también como exceso de cambios de signo de $\frac{Q}{P}$ cuando pasa de $+\infty$ a $-\infty$ a cuando pasa de $-\infty$ a $+\infty$ al recorrer el ciclo. Es decir, es el índice de Kronecker, el número de vueltas que da el vector de componentes P, Q al recorrer el punto origen del mismo el ciclo considerado si no hay punto singular en el contorno. El índice de Kronecker es cero si $P = o$, $Q = o$ no tienen solución alguna en $x, y$ dentro del ciclo, y si es distinto de cero es el exceso de veces que se anulan con $\frac{D\,(P\,Q)}{D\,(x\,y)} > 0$ sobre el de veces que se anulan con el jacobiano negativo.

La condición de centro es difícil de expresar, en general, y más aún de calcular; algunos discípulos de Poincaré (Dulac) han podido expresar la condición de centro con cierta facilidad en algunos casos especiales. El número de ciclos límites es acotado, salvo casos de centros o en que todas las curvas son ciclos límites. Poincaré enseña el modo de calcular

---

(*) Las curvas integrales se recorren en el sentido de las $t$ positivas definido por $\frac{dy}{dt} = P$, $\frac{dx}{dt} = Q$. Alrededor de todo nodo centro o foco el índice es $+1$; alrededor de un puerto es $-1$.

el número de ciclos límites y a delimitar regiones anulares en las cuales no puede haber más que un ciclo límite; es decir, una sola trayectoria cerrada. Para Poincaré el ciclo sin contacto significa una cierta inestabilidad; el móvil que lo atraviesa una vez ya no vuelve a atravesarlo; en cambio, el ciclo límite representa una cierta estabilidad, al entrar en sus inmediaciones, viene como obligado a girar indefinidamente alrededor; en especial en las órbitas entre dos ciclos límites, el área anular entre ellas representa un área de estabilidad.

Poincaré demuestra que necesariamente ha de haber puntos singulares de las clases consideradas, y de tal modo que, como ya se ha dicho, el número de nodos N, el de focos F y el de puertos C, están en la relación $N + F - C = 2$. El número total de puntos singulares es un múltiplo de 4 más 2; si este número se reduce a 2, los puntos singulares son nodos y focos, y son nodos si están en el ecuador. En la curva $P = 0$ los puertos o nodos y los focos se suceden alternadamente.

Después del análisis del caso anterior, análisis hoy día clásico y que ha pasado a los textos, se ocupó en el caso ya más complicado en que $F(x, y, y') = 0$, siendo F un polinomio en $x, y, y'$. Aparecen aquí tipos nuevos; son las curvas tangentes a ciclos, y, o son cerradas o los llenan completamente, al modo como curvas de Lissajous el rectángulo envolvente. El tránsito a coordenadas polares ofrece ejemplos inmediatos. Uno de los ciclos envolventes puede tener radio infinito; las curvas son entonces tangentes exteriormente a un ciclo límite. Esta propiedad de llenar un área introduce la estabilidad a la Poisson, que expresa que, apartado el móvil de una posición, habrá siempre un valor del tiempo (o infinitos valores) tales que el móvil pasará tan cerca como se quiera del primer punto.

Para facilitar el estudio de las ecuaciones de primer orden y grado cualquiera del tipo que acaba de indicarse, Poincaré introduce una superficie algébrica en un espacio $\xi, \eta, \zeta$, de tal modo que $x, y, y'$ sean funciones racionales de las coordenadas. Las variables $(\xi, \eta, \zeta)$ están elegidas de modo que las superficies en que pueda descomponerse $F(\xi, \eta, \zeta) = 0$ sean cerradas y finitas. Sea S una de ellas y $p$ su género. Se verifica $N + F - C = 2 - 2p$. La posibilidad de géneros distintos de cero altera la noción de estabilidad en ciclos sin contacto. Si la superficie S fuera un toro, un meridiano es ciclo de contacto de los paralelos y la noción de estabilidad de los ciclos sin contacto se pierde, a menos de modificar la noción misma de este ciclo. El meridiano puede ser cortado por las trayectorias en infinitos puntos; y el orden circular en que aparecen estos puntos en el meridiano, a medida que la trayectoria los determina por el orden $i$, es el mismo que el de la sucesión $\mu i - E(\mu i)$ siendo $\mu$ un número inconmensurable y $E(x)$ el entero más próximo a $x$.

El caso de segundo orden se refiere al sistema $z = y'$; $\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$. Los puntos singulares corresponden a la anulación simultánea de X, Y, Z. Existen aquí puntos nuevos, v. gr., los puertos cuyas trayectorias en $x, y, z$ forman una superficie ,y hay además por el punto singular pasa una curva que corta a la referida superficie; los focos con una curva ordinaria e infinitas espirales alrededor del punto de la misma que es singular; los puertos focos con una curva ordinaria e infinitas asíntotas al puerto todas ellas en una superficie. Hay en este caso superficies sin contacto con puntos singulares dentro, a menos de ser triplemente conexa. En su análisis de la teoría de las curvas definidas por ecuaciones diferenciales algébricas de segundo orden (X, Y, Z polinomios en $x$, $y$, $z$), considera simultáneamente Poincaré una curva cerrada cualquiera $C_0$ solución del sistema *y el entorno* D *de la curva*. ¿Cómo están las curvas próximas a $C_0$ en lo interior del entorno toroidal? Poincaré demuestra que si en la sección normal de este toro se consideran los puntos de intersección de dichas trayectorias próximas como descritas por un punto, éste describe soluciones de forma análoga a las curvas consideradas en el caso anterior $y' = P/Q$. Puede haber periodicidad, y describir siempre un punto, o número finito de puntos, o una curva cerrada alrededor de la sección de $C_0$ por la sección recta; si no se dan tales casos, describirán diagramas que semejan completamente los nodos, puertos, focos y centros ya conocidos. La inestabilidad parece ser aquí el caso más general. Especialmente interesante es el caso en que el móvil no sale nunca de una superficie tubo o toroidal alrededor de $C_0$ o en que hay estabilidad de Poisson en D. Estos casos se verifican siempre que el último multiplicador es uniforme y positivo en D, como en las ecuaciones de la Dinámica. Para el segundo orden, Poincaré, como se ve, refiere el problema al examen de curvas trazadas en el espacio de tres dimensiones curvas que satisfacen un sistema de dos ecuaciones de primer orden. Se introducen aquí superficies cerradas sin contacto y el índice $n$ de Kronecker calculado por el ángulo sólido $4\ n$ según el cual se ve la superficie terminal que se construye con los vectores X, Y, Z arrancando de cada punto de la superficie cerrada dada, es lo que da el número de soluciones comunes a $X = Y = Z = o$. Este teorema fué dado por Kronecker en 1878, y es generalizable a un número de ecuaciones cualquiera. Poincaré se sirvió de este teorema y aún demostró otro que permite substituir en cierto modo X, Y, Z por los cosenos directores de la normal a la superficie sin contacto; el índice depende entonces de la curvatura total de la misma, y ésta, a su vez, sólo del género de dicha superficie. El geómetra alemán W. Dyck continuó después tales estudios (*). Al querer generalizar a órdenes superiores, dice Poincaré textualmente: "Il me fallait créer un instrument destiné á remplacer l'instrument géometrique qui me faisait défaut quand je voulais pénétrer dans l'espace de plus de trois dimensions. C'est la principale raison qui m'a engagé á aborder l'Analysis situs." Es decir, casi a crear (*) una de las ramas nuevas de la Matemática, a cuyo espléndido desarrollo estamos asistiendo!

Hoy no habrá matemático que pretenda seguir la vía indicada por Poincaré en el estudio de las ecuaciones de orden superior, y especialmente en las ecuaciones de la Dinámica sin un conocimiento profundo de la Topología. En esta dirección se encuentran los estudios de Brouwer y algunos de la escuela americana, singularmente de los analistas que se ocupan en las aplicaciones astronómicas de la Dinámica. También se desenvuelve en esta dirección el estudio de las geodésicas cerradas en superficies y en general de curvas cerradas que realizan el mínimo de una integral. Hadamard y Caratheodory, Radon, Signorini, en el continente europeo, y la escuela transatlántica de Birkhoff y Morse, han venido a desarrollar las ideas de Poincaré. El estudio de las geodésicas en superficies de opuestas curvaturas se relaciona íntimamente con la teoría de las funciones fuchsianas. De la idea de una solución particular periódica arrancará Poincaré en los estudios de Mecánica celeste la prolongación de trayectorias al modo como se prolongan los puntos de una curva dada por la ecuación diferencial y las coordenadas iniciales. Así es extraordinaria y fecunda la labor de este "monstruo" de la Matemática, como le llamaban compañeros y profesores en su adolescencia.

En la estela de Poincaré se encuentran otros analistas (**), Bendixon, que extiende los resultados de Poincaré al caso en que P y Q son, no ya polinomios, sino funciones analíticas. Bendixon hizo un análisis muy completo de la proximidad y modo de estar dispuestas las soluciones alrededor de un punto singular, sea nodal, es decir, por el que pasan efectivamente infinitas soluciones, sea puerto cuando sólo pasan en nú-

(*) "Sitzungsberichte der baierische Akademie der Wissenschaften", tomo 39, Munich.

(*) Antes que Poincaré sólo Riemann tuvo la intuición del valor inestimable de las "figuras" en el espacio de más de tres dimensiones.

(**) V. para una introducción a los trabajos de Poincaré y bibliografía el fascículo 48 del Mémorial, debido a Pétrovitch (1931).

mero limitado, pudiendo las demás acercarse tanto como se quiera al punto singular. Distinguió las regiones entre las tangentes en el punto singular, analizando cuándo las curvas se repliegan, es decir, pasan por el punto singular para $t = \infty$ y $t = -\infty$. Demostró que el punto singular o bien es asintótico o las curvas tienen en él una tangente bien determinada definida por los términos $P_m$, $Q_m$ de orden menos elevado en el desarrollo en serie de P y Q,, pues como en el caso de ser los segundos polinomios, se tiene para coeficiente angular de la tangente $y/_x = P_m/_{Q_m}$. El caso general puede referirse al estudio de ecuaciones de la forma $x^m y' = ax + y + \varphi(x,y)$ $m$ entero positivo y $\varphi$ serie que empieza por términos cuadráticos o de orden superior; $b$ puede ser nula. Estos casos han sido objeto de análisis muy detenido e incluso han pasado a formar parte de los textos, v. gr., el de Bieberbach. El análisis de las curvas y su disposición alrededor del punto singular es aplicable a un segundo miembro no analítico alrededor del origen, es suficiente que satisfaga las condiciones de Lipsicht. El método de Bendixon (1898 a 1901) y el de Horn (1899), consisten en envolver al punto singular por una curva cerrada, v. gr., un rectángulo de lados paralelos a las coordenadas y examinar en cada uno de los puntos de este rectángulo cómo son las curvas que por él pasan, qué tangente tienen y en qué sentido lo atraviesan, si salen después del rectángulo o mueren en él o salen confundidas. Ello depende de la paridad de $m$ y el signo de $a$; $m$ impar, $a < o$ se tiene un puerto; $m$ impar, $a > o$ un nodo con infinitas tangentes; $m$ par, $a < 0$ tangente común al eje de las $x$ y entrada por la izquierda en un haz; $m$ par, $a > o$ el simétrico del anterior respecto del eje $y$, etc., etc. Para el cálculo efectivo de las soluciones se emplea el método de aproximaciones sucesivas de Picard. Este matemático estudió de un modo especial el caso de primer orden y segundo grado, demostrando que las curvas que pasan por el origen tienen en él una tangente determinada, salvo casos de excepción. Dulac ocupóse principalmente en el análisis del número y disposición de los ciclos límites, completando y precisando multitud de teoremas de Poincaré; sus trabajos le han convertido en un verdadero especialista de estas cuestiones para el caso en que P y Q son holomorfas. El problema general de determinación de ciclos límites es el problema a que Poincaré reduce la integración cualitativa extensa, problema cuya dificultad no parece menor, en muchos casos, que la integración de la ecuación misma. Por esto, cuanto contribuya a esclarecer esta cuestión tiene esencial importancia. Poincaré y Dulac han dado indicaciones de regiones donde cabe que existan y de regiones donde no los hay. La determinación de centros se mueve en plano de dificultad análoga. Poincaré insistió muy especialmente sobre estas cuestiones, verdadero nervio de su teoría. Por esto tiene especial importancia la labor de Dulac, que ha sido, hasta ahora, quien parece haber seguido más fielmente las huellas de Poincaré (*).

Hipótesis menos restrictivas en P y Q se encuentran en los trabajos de Perron; la analiticidad y aun la condición de Lipsicht están substituídas por otras condiciones menos duras; basta que los términos no lineales $f(x\,y)$ y $\varphi(x\,y)$ tiendan a cero con relación a los lineales cuando el punto representativo tiende al origen, y sean, además, continuos alrededor del origen, así como sus derivadas primeras respecto a $x$ y a $y$. Perron demuestra teoremas de existencia, v. gr., que hay $\infty$ curvas que pasan por el origen si

$$\frac{|f'_x| + |f'_y| + |\varphi'_x| + |\varphi'_y|}{(|x| + |y|)^{\delta}} \to 0 \text{ con } \delta > 0 \text{ para } xy \to 0$$

indicando además las formas y modos de disponerse las curvas alrededor del origen, según sean las constantes de la parte lineal. Perron se pregunta, además, qué condiciones se necesitan para llegar al origen con tangente determinada; $\dfrac{dr}{d\theta} = r \log r$, v. gr., no llega con tangente determinada, en cambio, sí llega $x\,y' = y - \dfrac{x}{\log \dfrac{1}{|x|}}$. Otro teorema de existencia y unicidad se refiere al caso en que son $f$ y continuas y, al tender $x$, y al origen $\dfrac{f}{|x| + |y|} \to 0$ y $\dfrac{\varphi}{|x| + |y|} \to 0$ siendo $f'$ y $\varphi'$ acotadas tanto en las derivadas respecto a $x$ como respecto a $y$.

Perron emplea a menudo coordenadas polares, como es lo más natural alrededor de un punto, y estudia curvas con singularidades especiales, v. gr., $\dfrac{dr}{d\theta} = r^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{r}$, $\dfrac{dr}{d\theta} = r^2 \sqrt{\left|\operatorname{sen} \dfrac{1}{r}\right|}$ y en general $\dfrac{dr}{d\theta} = r\,\mathrm{F}(r)$ definiendo $\mathrm{F}(r)$ de cierto modo, aunque sea imposible representarlo por una expresión cerrada y valedera para toda el área en que se define. En estos sistemas no se conserva aquella propiedad esencial de los sistemas estudiados por Poincaré de que dos curvas integrales

(*) El Laboratorio matemático de Madrid publicará en breve las conferencias dadas en el curso de 1931 a 1932 sobre la construcción de curvas definidas por ecuaciones diferenciales de primer orden.

no se cortan como no sea en puntos singulares. Puede haber, efectivamente, en todo punto de un continuo más de una curva integral; el estudio extenso general no es posible; sólo el análisis local se conserva o el estudio extenso para casos concretos.

## XIX

En sus comentarios sobre la obra matemática de Poincaré, Hadamard insiste en la circunstancia de que la teoría de funciones de variable compleja dominaba de tal modo en la Matemática, que fué menester del genio para dirigirse por derroteros completamente distintos a buscar la solución de problemas en el campo real, que, aunque de una necesidad evidente de ser estudiados, eran tierra incógnita en la que nadie había osado aventurarse, si se exceptúan de una parte Sturm y Liouville en sus trabajos sobre oscilaciones y de otra los problemas de contorno en general, sobre los cuales se sabía bien poco más de lo que giraba alrededor del problema de Dirichlet y los métodos de Schwarz para resolverlo. Poincaré ocupóse no sólo en el análisis cualitativo general, y en especial en las ecuaciones de la Dinámica, sino también en el campo de las ecuaciones de la Física matemática, precisamente en la resolución del mismo problema de Dirichlet (Método del barrido) y en el análisis de los valores propios y funciones propias de problemas de vibración dependientes de ecuaciones lineales en derivadas parciales. Y de rechazo, con el método del barrido, en el plano, contribuyó a un progreso importante en la propia teoría de funciones analíticas. Cuando se observa cómo Poincaré, ante una dificultad que se le presenta en un determinado problema, utiliza recursos de Teoría de números, de Algebra, de la Teoría de grupos, de Geometría no euclídea, etc., etc., disciplinas todas que domina completamente, y cómo ante dificultades de otra índole inventa toda una cadena de razonamientos de Topología, creando, por así decirlo, toda esta nueva rama de la Matemática, se produce, con el sentimiento de admiración, el desánimo del aplastamiento. Para saber manejar todas estas herramientas es necesario mucho más que haber aprendido su manejo, es preciso que el aprendizaje haya sido rapidísimo, que la luz natural lo haya substituído, que la invención y la intuición hayan contribuído mucho más que la lógica y el raciocinio. Por esto, los que hemos estudiado en algún pequeñísimo terreno la huella del paso del coloso, no alcanzamos siquiera a medir el extraordinario alcance de su sabiduría.

Las ecuaciones de la Dinámica dieron con Poincaré el más eficaz y formidable avance que se ha conocido desde Newton, que las inventó, y desde Lagrange y Jacobi, que las estudiaron sistemáticamente. Y Poincaré, además, ha creado escuela; pues su labor ha venido desenvolviéndose, merced a los matemáticos astrónomos de todos los países, que se han lanzado al problema de clasificación de trayectorias, sea en el problema general de los tres cuerpos (Chazy) o en el restringido (Darwin, Moulton, Mac Millian, Wintner, y los del Observatorio de Copenhague), y a los teóricos como Liaponnoff, Picard, Levi Civita, Birkhoff y Perron, que han añadido contribuciones de importancia a la teoría de las soluciones periódicas y asintóticas y de la estabilidad dinámica.

La noción de órbita periódica o trayectoria cerrada en un sistema determinado de ejes (la rotación del sistema Sol-Júpiter alrededor del c. d. g.), fué introducida por Hill en el problema del asteroide; pero la noción de prolongación, a partir de una órbita periódica, es de Poincaré. Alrededor de la solución periódica, las ecuaciones de variación introducidas ya por Darboux como queda dicho antes de ahora, permiten la construcción de curvas que sean poco diferentes; son ecuaciones lineales con coeficientes periódicos, estudiadas especialmente por Flocquet, de quien suelen llevar el nombre. Las soluciones son periódicas de segunda especie; es decir, vienen multiplicadas por una constante $e^{kT}$ cuando el tiempo aumenta en un período T. De aquí se deduce la estabilidad lineal, base de estudio más profundo. El uso y manejo de estas ecuaciones está hoy muy extendido, no sólo por figurar en los textos de Cálculo (Goursat, Picard, etc.), sino también en los tratados de Mecánica racional y celeste. Los exponentes característicos $k$, indican cómo figuran las curvas integrales alrededor de la solución periódica. En las ecuaciones de segundo orden ya hemos indicado que en las secciones de las trayectorias por superficies normales aparecen dibujadas las curvas soluciones de la ecuación de primer orden cuando se unen entre sí los elementos de una trayectoria. El punto único, correspondiente a la solución periódica, es el singular en la sección. Los coeficientes característicos permiten averiguar si es nodo, foco o puerto en las curvas que aparecen en ella, y si al seguir la curva que se acerca a la solución periódica los valores de $t$ crecen o disminuyen. En el primer caso se tiene la solución asintótica. Si el punto es puerto es preciso elegir convenientemente la posición inicial, que debe hallarse en una de las dos curvas que cortan a la periódica. Poincaré se pregunta cuál sea la razón del paralelismo entre el primero y segundo orden, y la encuentra en la relación entre las ecuaciones diferenciales y en diferencias finitas. Con esta ocasión, y también por el estudio de las integrales no regulares de las lineales, Poincaré logra la integración de una clase muy extensa de ecuaciones lineales en diferencias finitas.

En las ecuaciones de la Dinámica, las curvas en la sección son cerradas; no hay ni focos, ni nodos, ni puertos, sino centros. ¡Y son centros porque hay un invariante integral! Es decir, según ya demostrara Liouville en 1838, el volumen de un haz limitado de trayectorias en el espacio de $2n$ dimensiones, es constante. Este teorema es la base de la teoría cinética de los gases. Pero Poincaré demostró la existencia de invariantes integrales lineales, de superficie, etc., hasta el de dimensión $2n$, dando así a noción importancia capital en el estudio de ecuaciones diferenciales, reconocida ya por Lie, y que han venido a desenvolver más recientemente Koenigs, Goursat, Cartan y De Donder entre otros.

La existencia del centro en las curvas sección del problema de los tres cuerpos equivale a la anulación de infinitas constantes, y esta circunstancia permite los desarrollos en serie llamados de Lindstedt sin términos seculares y que se usan en la Mecánica de los planetas.

La existencia del invariante integral conduce a la noción de estabilidad de Poisson. Sin embargo, en el problema de los tres cuerpos, la dificultad fundamental de la Mecánica celeste, la convergencia general de los desarrollos, no ha podido demostrarse, y por consiguiente, tampoco la existencia de las superficies tubulares alrededor de curvas periódicas. La obra de Poincaré en Dinámica se encuentra en los textos que llevan por título "Les Méthodes nouvelles de la Mécanique celeste". Aparte de éstos, publicó un tomo sobre Hipótesis cosmogónicas y un tratado de Mecánica celeste, incluyendo la teoría de mareas. No existe ningún tratado sobre el problema de los tres cuerpos ni más completo que aquél ni más original y profundo; la complejidad del problema aparece por vez primera a una luz insospechada (v. gr., al considerar las trayectorias doblemente asintóticas de una trayectoria cerrada inestable), y demostrada la inexistencia de nuevas integrales uniformes, en que Poincaré completa y extiende la demostración de Bruns, no queda más camino que el de examinar los métodos prácticos de cálculo. Eliminados los términos seculares, Poincaré examinó la influencia de los divisores en las amplitudes de los términos periódicos de las series trigonométricas que representan las coordenadas y la casi conmensurabilidad de los movimientos medios, que son las dos dificultades de la Astronomía del sistema planetario, y con esta ocasión procedió al examen de series trigonométricas que no son series de Fourier, creando además la teoría de las funciones cuasi periódicas que habían de continuar Bohl Esclangon, Bohr y Weyl, y que tanto interés ha despertado en los últimos años. Poincaré demostró la no convergencia de tales desarrollos, pero también cómo podían utilizarse al modo de la serie de Stirling.

Ya se ha dicho cómo la trayectoria periódica puede servir de iniciación al análisis de las que difieren poco de ella. Surge inmediatamente la pregunta de qué clasificación es dable introducir en las órbitas periódicas; cómo se obtienen, y si con ellas y las trayectorias próximas se cubre toda la existencia de trayectorias al modo como con números racionales se aproximan los números inconmensurables. Cabe también preguntar cómo se desenvuelven las órbitas periódicas y su estabilidad al recorrerlas sucesivamente. Tal es el vasto programa de preguntas a que atiende Poincaré en sus métodos nuevos del problema de los tres cuerpos. En primer lugar, para hallar órbitas periódicas parte de su existencia (v. gr., órbitas keplerianas) cuando el parámetro $\mu$ (masa del planeta perturbador), es nula. El teorema de existencia para $\mu$ diverso de cero es uno de los teoremas fundamentales. Se trata de ver en qué condiciones iniciales próximas a una solución periódica $\mu = o$, condiciones definidas por nuevos valores de constantes iniciales de coordenadas y parámetros, se puede obtener solución periódica (de primera especie) para $\mu \neq o$ y pequeño, y con el mismo período (primer género) o con un período múltiple (segundo género). En el primer caso se necesita que no se anule el jacobiano de las soluciones respecto de las constantes, supuestas de primer orden, porque se consideran posiciones iniciales próximas a las iniciales en la solución periódica de que se parte. Para el cálculo de tales constantes es preciso resolver previamente las ecuaciones lineales de variación, las cuales tienen coeficientes periódicos, son sistemas de Flocquet. Llevados los valores de las variables al cabo del tiempo T a la condición de periodicidad, determinan las constantes efectivamente. Pero si el sistema dado es canónico, y como ocurre en la Dinámica del problema de los tres cuerpos la función H es desarrollable $H = H_0 + H_1\mu + \ldots$ siendo $H_0$ función sólo de las coordenadas $x$, $H_1$ periódica, etc., el jacobiano se convierte en el hessiano de $H_0$ respecto de las constantes iniciales de posición. En cuanto a los parámetros iniciales correspondientes, la condición de periodicidad exige que $\int_0^T \frac{\partial H_1}{\partial y_r}\, dt = 0$, para $i = 1, 2 \ldots$ Expresado $H_1$ en forma de serie de Fourier, y escribiendo $[H_1] = \frac{1}{T}\int_0^T H_1 dt$, se obtiene una condición global equivalente al decir que el hessiano de $[H_1]$ respecto de las constantes iniciales de los parámetros, no se anula. Ahora bien: en el problema de los tres cuerpos las cosas son más complicadas, porque para $\mu = o$ el Jacobiano es nulo, lo cual es consecuencia de existir infinitas soluciones periódicas para $\mu = o$, son las órbitas keplerianas de los dos asteroides con movimientos medios conmensurables. Estas soluciones cubren un recinto de la variedad $\mu = o$ en el espacio en que se representan las coordenadas, parámetros y Para obtener una serie continua de soluciones periódicas $\mu \neq o$ es preciso que haya una curva que corte a tal recinto, curva que contenga valores de las coordenadas iniciales como coordenadas de sus puntos y correspondientes al valor de $\mu$. Es decir, que la existencia de órbitas periódicas va ligada a un elemento múltiple, a una especie de bifurcación. Se introduce con esto esta idea esencial, que juega papel muy importante en cuestiones de estabilidad, la de que, como en las figuras de equilibrio de una masa flúida grave, hay intercambio de estabilidades, al pasar de unas series a otras de la misma clase separadas por la bifurcación que da lugar al nacimiento de una nueva serie o desaparición de la misma.

Las soluciones de primera especie y del segundo género son bastante más complicadas, y, gracias a la existencia de los invariantes integrales, se puede disponer de alguna luz para avanzar en tan obscuro laberinto. Hay una infinidad de soluciones periódicas de esta naturalexa al variar $\mu$, y cabe preguntar cómo es esta infinidad y cómo se distribuyen los nuevos períodos (múltiplos de T), una vez conocida la condición de existencia de tales órbitas. Y dada su existencia e infinito número, parece poderse abordar la pregunta de si con su auxilio y las trayectorias próximas se pueden agotar las posibles. Alguna vez ocurre, v. gr., en las geodésicas de las superficies de curvatura negativa. Pero no siempre; es preciso, según ha demostrado Birkhoff, introducir curvas de orden más general.

Las soluciones periódicas de segunda especie son las que no se convierten, por la continuidad de $\mu$, en órbitas keplerianas. Así, por ejemplo, las soluciones keplerianas de los dos asteroides cuando hay choques periódicos. La existencia de tales órbitas lleva a plantear el problema directamente, para un valor dado de $\mu$, prescindiendo de continuidad de soluciones formando series con bifurcaciones. Este método constituye hoy lo más reciente y moderno en Dinámica. Poincaré lo redujo a una cuestión de Topología; es, a saber, a la existencia de puntos fijos en la transformación biunicoca de una corona anular en sí misma, de modo que los contornos se correspondan y de tal modo que se conserven las áreas y avancen en sentido opuesto los contornos al transformarse. De la existencia de dos puntos invariantes dió la primera demostración Birkoff; después se han dado otras varias; una de las más sencillas y que merece mención especial, es la debida a nuestro sabio compañero Rey Pastor.

## XX

Se debe a Poincaré la introducción del cálculo de probabilidades en la Dinámica, no al modo del teorema H de Boltzman, sino en el concepto de probabilidad de trayectorias en condiciones dadas; y cabe recordar que, a la manera de Boltzman, Poincaré contribuyó no poco a aclarar el concepto de Entropía especialmente al aplicarlo al Universo en su análisis de las Hipótesis cosmogónicas.

Poincaré realizó importantes progresos en el cálculo de variaciones (condición de extremal cerrada, focos cinéticos y su intervención en el examen de soluciones periódicas de segunda especie) y en el cálculo llamado de infinitas variables, que Hill, con Koch, Hilbert y su escuela, han desarrollado hasta el grado actual.

En Física matemática, aparte del método de barrido que se halla en los textos (v. gr., el de Picard), se debe a Poincaré la demostración de la existencia de todo el espectro en la ecuación de las membranas vibrantes $\Delta u + K^2 u = 0$ (del que Schwarz demostró la existencia del tono fundamental y Picard del primer harmónico), calculando además las funciones propias y llevando este proceso al análisis del método de Neumann para la resolución del problema de Dirichlet, lo cual, con el método de Robin, consideran algunos como el preliminar determinante del método de Fredholm, que resuelve el problema de Dirichlet interior y exterior, los de Neumann, etc., mediante capas dobles o simples cuya densidad se determina por ecuaciones integrales de segunda especie. La teoría de las ecuaciones integrales fué manejada admirablemente por Poincaré en su texto de Mecánica celeste donde expone la teoría de las mareas.

En el examen de la figura de equilibrio de una masa flúida gravitatoria, el progreso debido a Poincaré es tan extraordinario que cabe decir de su memoria de las Acta, que es una de las fundamentales de la Mecánica. El tema ha sido objeto después de multitud de trabajos de Liapounoff, de Crudeli, de Lichtenstein, Veronnet, Mihalowitsch, Wawre, los cuales han pasado también a los textos (*). En 1924, Cartan ocupóse

(*) V. el tratado de Mecánica de Apell, tomo IV; véase el tratado de Veronnet en la colección Doin, París, 1927, y el reciente de Wawre en la colección Julia, París, 1932.

en la estabilidad ordinaria de los elipsoides de Jacobi, en el Congreso de matemáticas de Toronto. Lichtenstein advierte en un discurso sintético que éste es problema propio de los grandes matemáticos. Liapounoff, que es quizá quien más ha profundizado en él, lo llama problema de Tchebycheff. Las nociones de figura piriforme, de su estabilidad y de bifurcación, son debidas a Poincaré, así como también un análisis de las diversas clases de estabilidad, ordinaria, secular, etc., introducidas por Thomson y Tait, en cuyo tratado de Filosofía natural aparecen varias proposiciones sin demostración, y referentes a tales cuestiones de Hidrodinámica estacionaria, v. gr., la existencia de figuras anulares, de las cuales demostró Poincaré la inestabilidad cuando la velocidad pasa cierto límite (hoy día reconocido menor), y por lo tanto la necesidad de que el anillo de Saturno esté constituído por elementos discretos.

Después de este rápido análisis, impuestos de la altísima personalidad de esa eminencia que forma época, y que hemos conocido y visto y oído, no nos queda más que repetir el comentario de Hadamard: "Or, nôtre époque au point de vue mathématique, c'est, avant tout, Poincaré." Y cabría acaso añadir también desde el punto de vista de la Física teórica, pues a nuestra generación no le cabe duda alguna de la influencia de Poincaré en el enunciado de la relatividad restringida; basta haber leído la memoria sobre Dinámica del electrón en los Rendiconti di Palermo. Personalmente, después del estudio de las obras de Kirchhof, Neumann, Duhem y Helmholtz, en los textos de Poincaré he aprendido la Física matemática.

Todo: Aritmética, Algebra, Geometría, Topología, Grupos, Dinámica, Geodesia, Geofísica, Astronomía, Física, Filosofía..., todo fué alcanzado por esta mente con profundidad insondable. Ante semejante dominio de la Matemática, son insignificantes los talentos de cada día: ante el fulgor del sol que irradia tan soberanas claridades, no se advierten las lucecitas fatuas de la inteligencia media. ¿Será necesario, cuando la Humanidad puede dar de sí semejantes luminares, que nos empeñemos en quebrar aristas de pedernal los que apenas si podemos soñar en algo más que en admirar su obra? Yo creo que sí, y precisamente por esto, para admirarla y hacerla admirar a los demás, esperando que de este modo ponderada y conocida y deseada, sea su aparición más frecuente.

# XXI

Las ecuaciones lineales han permitido un análisis de las soluciones uniformes en casos muy extensos, siendo cualquiera el orden, y con coeficientes algébricos, periódicos y doblemente periódicos. Si bien la aplicación de la teoría de funciones a las ecuaciones no lineales no ha permitido llegar tan lejos, toda una escuela (cuyos orígenes se han referido al considerar los trabajos de Briot, Bouquet y Poincaré), y que tiene en Painlevé su más genuino maestro, ha conseguido una multitud de resultados de alto valor científico.

El punto de partida se halla en el teorema de Painlevé que se explica en todos los cursos, y según el cual, en $y' = \frac{P}{Q}$ siendo P y Q polinomios en $x, y$, los puntos singulares paramétricos, es decir, los que dependen de las constantes iniciales (y que desde luego no se ofrecen en las lineales), o son puntos de ramificación llamados algébricos o son polos. El teorema se deduce del de existencia (valor no nulo del radio de convergencia) y del concepto de proximidad o vecindad, es decir, de que la variable tiende a un punto singular en su plano mientras la función tiende al suyo sin que sea necesario que aquélla se aleje de la vecindad del punto singular para que la función haga su recorrido. Ambos recorridos tienden a la vez a cero en las soluciones de la ecuación diferencial. De aquí se deduce que todo arco finito no puede tener más que un número finito de singularidades móviles o paramétricas. Naturalmente, la integral puede presentar puntos singulares fijos esenciales tales que a su alrededor no quepa definirla por un desarrollo en serie cuando la solución es transcendente, pero este carácter se manifiesta sólo alrededor de puntos críticos fijos, los cuales se conocen a priori: son los de indeterminación que reducen $\frac{P}{Q}$ a la forma $\frac{0}{0}$, los formulan a la vez las transformadas de P y Q con $y = \frac{1}{z}$, los polos en $x$ o $y$ de $y'$ o de $\frac{1}{y'}$ o de sus transoírmadas por $y = \frac{1}{z}$. El teorema de Painlevé es válido para el caso en que P y Q sean polinomios en $y$ cuyos coeficientes sean funciones de $x$. Hay sólo un tipo de ecuación de primer orden que no tenga puntos críticos móviles: es la de Ricatti. Por lo tanto, saber qué ecuaciones tienen las integrales uniformes equivale a conocer en qué condiciones la de Ricatti tiene uniformes sus integrales, cuestión hoy día desconocida a pesar de que es transformable en una lineal, pero los coeficientes podrán no estar incluídos en la categoría de aquéllos que aseguran la uniformidad a las soluciones de la lineal.

En general, las integrales de las ecuaciones no lineales son multiformes. Inmediata surge la pregunta de cuáles tendrán sólo un número finito $n$ de ramas alrededor de los puntos críticos móviles (v. gr., en el caso en que P y Q sean polinomios en $x, y$) cuando $x$ se mueve de un modo cualquiera pero sin atravesar puntos críticos fijos, ramas permutables cuando la variable $x$ recorre un camino cerrado que no envuelve punto crítico fijo alguno. Painlevé ha contestado a estas cuestiones en la nota a un texto de Boutroux (1908), y ha dado normas para reconocer cuándo ocurre esta circunstancia y para qué valor de $n$, entrando así en el examen de la polimorfia de las integrales en que el número $n$ es el mismo para todas, salvo un conjunto numerable. La conclusión es interesantísima: Mediante un número finito de operaciones racionales se puede resolver el problema, y si tiene solución, la ecuación es reductible a una Ricatti. Si no es una Ricatti y las integrales son funciones con dos ramas a lo más, todas tienen necesariamente dos ramas, salvo un número finito. Painlevé ha extendido estas y otras propiedades al caso en que P y Q son analíticas en $x$ sin ser necesariamente polinomios. Estas investigaciones han abierto un nuevo campo, fertilísimo, que constituye la teoría analítica de las funciones definidas por ecuaciones diferenciales de primer orden cuyo objeto primordial es reconocer cual sea, en efecto, la naturaleza de la función que la ecuación diferencial define. Y se advierte que es campo que necesita mucha labor aún para dar de sí cuanto puede esperarse y en relación con el campo fronterizo de la teoría de funciones, en el que se ha espigado no poco en los últimos decenios.

Pero mucha mayor exige el conocimiento de las funciones definidas por ecuaciones diferenciales de segundo orden y órdenes superiores. Y también aquí Painlevé ha desarrollado un trabajo original de primer orden, completado por los más relevantes miembros de su escuela, Gambier, Garnier, Chazy, Boutroux, Malmquist (*). Aun concretando el problema a las uniformes, el análisis ofrece grandes dificultades, y precisamente por no verificarse el teorema de Painlevé de ser algebroidas o polos las singularidades de los puntos críticos móviles, los cuales, en ecuaciones de orden superior, pueden ser singularidades esenciales y existir infinitas ramas, y aun a partir del tercer orden los puntos sin-

(*) Para estudiar estas cuestiones es esencial el Tratado de Painlevé, Conferencias de Estocolmo de 1895, publicadas en 1897, y las memorias de los arriba citados. En los textos se explican alguno de tales desarrollos, v. gr., en el Forsyth.

gulares trascendentes móviles pueden llenar todos los puntos de una línea. Y con cortes esenciales la función puede dejar de ser uniforme aun sin tener puntos críticos en su área de existencia. Las ecuaciones de segundo orden no pueden tener sus singularidades esenciales móviles sino aisladas, como demostró Painlevé. Estas singularidades o son semejantes a las singularidades esenciales de la solución de una ecuación de Ricatti o a los puntos singulares de las funciones elípticas.

La cuestión que plantea Painlevé en su célebre memoria del tomo 25 de las Acta (1902), es la siguiente: Hallar ecuaciones de segundo orden y órdenes superiores, pero especialmente del segundo, de la forma $y'' = F(x, y, y')$, siendo F un polinomio, algébrico en $y$, racional en $y'$ y analítico en $x$, o también $F(x, y, y', y'') = 0$, siendo F un polinomio en $y'', y', y$, y analítica en $x$, con integral general de tal naturaleza que no haya en ella puntos críticos paramétricos móviles que sean puntos de ramificación o esenciales; pudiendo tener puntos de ramificación y esenciales, pero necesariamente fijos, es decir, independientes de las constantes de integración. Dentro de la clase así definida se podrán considerar aquellas cuya integral general sea función uniforme, es decir, en que no hay puntos de ramificación ni fijos ni móviles. Si son trascendentes nuevas, habrá que demostrar que no son reductibles a exponenciales trigonométricas y elípticas o a las que son soluciones de la ecuación de Ricatti o de las lineales de orden cualquiera, y en el estudio de las mismas, dar una representación y determinar la naturaleza de sus puntos esenciales fijos, si los hay, y de sus polos.

Cuando F no es más que algébrico en $y$, se escribe $y'' = \Phi(x, y, u, y')$ siendo $\Phi$ racional en $y, u, y'$, viniendo $u$ e $y$ relacionadas entre sí, v. gr., por $H(x, y, u) = 0$, en forma de un polinomio en $y, u$ y analítica en $x$. Si el género es cero, se refiere al caso en que F es racional en $y$, y si es uno, se introducen tipos diferentes de los que corresponden al caso en que F es racional, tipos que son seis irreductibles, a los que se añaden otros tres para el caso de ser $H = 0$ de género uno. De los seis tipos correspondientes a F racional hay tres que corresponden a integrales generales sin puntos de ramificación ni fijos ni móviles. En los otros dos hay que hacer el cambio de variable $x = e^z$ para que la solución en $z$ sea uniforme. En el sexto tipo, del que por confluencia o degeneración pueden deducirse los otros cinco, hay puntos de ramificación fijos en $x = 0$, $x = 1$, $x = \infty$.

Para resolver tan interesantes cuestiones Painlevé emplea el método de continuidad, o método $\alpha$ de Painlevé, como también se llama. Consiste en lo siguiente: se considera el sistema $\frac{dy}{dx} = y'$, $\frac{dy'}{dx} = f(x, y, y')$ o más general $\frac{dy}{dx} = f_1(\alpha, y, y', x)$, $\frac{dy'}{dx} = f_2(\alpha, y, y', x)$ siendo $\alpha$ un parámetro y las dos funciones $f_1$ y $f_2$ se suponen analíticas en $x$ en todo un área A del plano de $\alpha$. Si la integral general es función uniforme de $z$ para todo valor de $\alpha$ en el área A, sin que esté demostrado que lo sea para $\alpha = o$, se puede afirmar que lo será también para $\alpha = o$. Si, pues, se cambia de variable y función introduciendo nuevas variables X, Y, Y', en las cuales intervenga $\alpha$ y existe el área A en el nuevo sistema, si el de partida en $x$, $y$, $y'$ no tiene puntos críticos móviles (ni de ramificación ni esenciales) y el cambio de variables no introduce puntos de esta clase en el desarrollo de las soluciones $Y(x\alpha)$, $Y'(x\alpha)$, todos los coeficientes del desarrollo de Poincaré en series de potencias de $\alpha$ han de ser funciones uniformes que no alteran al recorrer $x$ un contorno cerrado cualquiera, y en particular habrán de serlo las soluciones del sistema en que $\alpha = o$. Todo sistema $x$, $y$, $y'$ que tratado de este modo conduzca a un sistema diferencial en X, Y, Y' (para $\alpha = o$) que tenga una integral general con punto crítico paramétrico, deberá desecharse, aceptándose, en cambio, como sistemas posibles los que, tratados de este modo mediante distintos cambios de variable, conduzcan efectivamente a sistemas en X, Y, Y' que para $\alpha = o$ no tienen puntos críticos móviles. Pueden agotarse así las formas tipos en que se cumplen las condiciones de necesidad, y ello sin grandes dificultades. Ahora bien: cada una de estas formas tipos habrá de examinarse luego aisladamente, y, por el mismo *método* $\alpha$ o por integraciones y cambios apropiados de variable se procederá a su clasificación en tipos irreductibles entre sí, es decir, que no puedan tener solución común alguna. Una vez determinado el mínimo de tipos irreductibles hay que ver si tienen efectivamente todos sus puntos críticos fijos, y esta es la tercera y más difícil parte del examen, pues es preciso demostrar directamente que no hay puntos críticos móviles, es decir, demostrar que el tipo asegura suficientemente su ausencia, y examinar cómo son los fijos. El primer análisis conduce a 50 tipos, de los cuales el segundo permite afirmar que sólo seis son irreductibles. Y de éstos, el tercer análisis demuestra que los tres primeros son funciones uniformes. El primer tipo es la ecuación $y'' = 6y^2 + x$.

En la nueva trascendente de Painlevé, solución de $y'' = 6y^2 + x$, las dos constantes intervienen trascendentalmente; la función es uniforme, no tiene puntos críticos paramétricos ni de ramificación ni esenciales;

tampoco puntos fijos de ramificación; es el cociente de dos funciones enteras de $x$ y asintóticamente se expresa por la $p$ de Weierstrass: $y \sim p\left(\frac{4}{5} x^{5/4} - c_1, 12, c_2\right)$. Es, además, representable mediante una función $u$ desarrollable en serie de Maclaurin al modo cómo $p$ lo es por la función $\sigma$. Si se escribe $y = \frac{d^2}{dx^2} l.\, u$, $\frac{u'}{u} = z$, resulta $\frac{z''}{2} + 2(z')^3 + xz' - z = 0$. La representación de $y$ vale para todo el plano. Resulta ser función meromorfa; el género de la función entera $u$ es $2$, su crecimiento es regular, su orden $^5/_6$ y se conoce su distribución de ceros y polos. El segundo tipo es la ecuación $y'' = 2y^3 + xy + \alpha$, el tercero $y'' = \frac{1}{x} y'^2 - \frac{1}{x} y' + \frac{1}{x}(\alpha y^2 + \beta) + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y}$; los tres corresponden, como ya se ha dicho, a funciones uniformes de $x$. Son los tres descubiertos por Painlevé; los otros tres (que ya no son uniformes, pero carecen de ramas móviles y puntos esenciales móviles), fueron descubiertos por Gambier. La solución del segundo tipo, para valores muy grandes de $x$, tiene por representación asintótica la función $y = s\, n\, x$. La integral general es meromorfa en todo el plano, salvo $x = \infty$ para los tipos I, II, IV; salvo $x = 0$ y $x = \infty$ para III y V, y los puntos ya citados $x = 0$, $x, = 1$, $x = \infty$ para el tipo VI. Las ecuaciones de este tipo intervienen en el problema de hallar las ecuaciones de segundo orden lineales cuyo grupo es independiente de un parámetro, problema que se ofrece al resolver el de Riemann.

El primer análisis de Painlevé o método $\alpha$ es aplicable a una ecuación diferencial de orden cualquiera y hasta a un sistema de ecuaciones en derivadas parciales cuya integral no depende sino de un número finito de constantes arbitrarias; el segundo y tercer análisis se aplican a ecuaciones de orden superior, tercero y cuarto v. gr., aunque en forma más complicada. Para las ecuaciones de tercer orden fué realizado por Garnier en 1911, y en un caso especial por Chazy en 1910. Este añadió el estudio de las ecuaciones con integrales singulares que presentan puntos críticos móviles. En el tercer orden aparecen integrales generales con cortes esenciales móviles, que no se hallan definidas sino en una región del plano variable con las constantes de integración. Ejemplo: $y''' = 2y'' - 3y'^2$ La teoría de grupos automorfos conduce a ecuaciones de la forma $y''' = {}^3/_2 \frac{y''^2}{y'} + y'^3\, F(y)$ siendo F algébrica, cuya integral general tiene también singularidades con la potencia del continuo. La teoría general llevada primero según las líneas de Painlevé con auxilio de la teoría de las funciones algébricas, extendida luego por Boutroux en el texto de la colección Borel, de 1908, y objeto de minucioso análisis por Malmquist, en varios trabajos del Arkiv for Mathematik de 1920, 1921 y 1922, con nuevos métodos que pueden considerarse como generalización de los de Poincaré, ha dado lugar a nuevas e importantes aplicaciones de la teoría de los grupos, en íntima conexión con el problema de Riemann en las lineales (*), en su forma más general y en un orden cualquiera (Schlesinger, 1908, y Garnier, 1911).

La teoría de las transformaciones permite deducir multitud de las propiedades anteriores y otras nuevas; Painlevé, Poincaré, Malmquist, aplican transformaciones adecuadas, homográficas, birracionales, etcétera, para la reducción o demostración de teoremas. Por ejemplo, mediante una transformación homográfica en $x, y$ en $F(x, y, y') = o$, siendo F algébrica en todos los argumentos, se pueden eliminar los puntos singulares esenciales y extender a las soluciones de $F(x, y, y') = o$ el teorema de Picard, a saber, la ecuación $y = a$, siendo $y = f(x)$ solución de la ecuación dada, tiene infinitas raíces, salvo para ciertos valores de $a$ en número limitado, valores que son fijos y dados por la misma ecuación. También la teoría de los números y el conocimiento de las propiedades de las integrales abelianas son de uso frecuente en estas difíciles cuestiones en que el problema capital es determinar, a priori, cómo interviene el elemento arbitrario en la integral general: algébricamente, racionalmente, en forma trascendente parcial o total, etc., y cuál es la naturaleza y agrupación de las singularidades de la integral. En el estudio y reducción de las integrales funciones racionales de las constantes en una ecuación algébrica de segundo orden, Picard ha encontrado propiedades del mayor interés en relación con la teoría de superficies algébricas y especialmente de sus transformaciones biuniformes, birracionales, etc. Painlevé advierte que la clasificación de ecuaciones no lineales depende de poder hallar un grupo de transformaciones, que para las ecuaciones diferenciales venga a jugar el mismo papel que el grupo de transformaciones birracionales para las curvas algébricas.

Llevados estos estudios al campo real, v. gr., de las ecuaciones de la Mecánica, Painlevé ha podido demostrar la no existencia de posiciones de indeterminación cuando el número de cuerpos es igual a 3 en el problema de masas puntuales gravitatorias según el teorema cuyo enuncia-

(*) Para el orden 2 y $n$ resuelto por Hilbert y Plemelj mediante ecuaciones integrales y funcionales; para el segundo orden con coeficientes algébricos por Poincaré, y en el caso de la hipergeométrica, por Riemann.

do es el siguiente: Si al tender $t$ a $t_1$, entre los $n$ cuerpos los hay que no tienden a posición límite alguna situada a distancia finita, esta circunstancia habrá de tener lugar en 4 por lo menos de tales masas puntuales. Y ocurre entonces, al tender $t$ a $t_1$, que el mínimo $\varphi$ de la suma de las distancias mutuas de tales puntos tiende a cero sin que ninguna de tales distancias tienda constantemente a cero. (V. las lecciones de Painlevé en Estocolmo, pág. 587.)

Cuando la integración no puede abordarse ni analítica ni formalmente, no hay más remedio que el estudio de aproximaciones sucesivas (*), sea al modo de Picard, sea al modo de Poincaré, partiendo de soluciones exactas y estudiando sus variaciones. En último término caben los métodos de análisis cuantitativo, métodos técnicos, para un caso concreto, y en condiciones iniciales dadas. En Física y Mecánica se siguen principalmente los dos primeros métodos; el segundo da lugar al análisis de la estabilidad, y en particular de las vibraciones alrededor de un estado de equilibrio o movimiento (casi siempre permanente o estacionario).

## XXII

Los estudios de Hill sobre la Luna fueron punto de partida para el desarrollo del análisis llamado de las infinitas variables, objeto de grandes desarrollos en lo que va de siglo y en el que descuella con singular relieve el nombre de Hilbert. Hill planteó, como se sabe, las ecuaciones del movimiento relativo de la Luna en el plano de la eclíptica que se supone girar alrededor del c. d. g. Sol-Tierra. En estas ecuaciones figura, naturalmente, la aceleración de Coriolis. Hill halló una solución periódica, y fué esta solución parecida al movimiento de la Luna la que tomó por órbita fundamental a la que había de referir el movimiento real considerado como poco diferente del periódico. Hill publicó, particularmente, una memoria sobre el movimiento del perigeo lunar, en 1877. En ella, la perturbación depende de la resolución de una ecuación llamada de Hill, lineal homogénea de segundo orden y con coeficientes periódicos. Escribe la solución en la forma $y = e^{\rho t} z$, y desarrollando la solución $z$ en serie de Laurent de $\tau = e^{it}$ tal como $\tau^{\rho} \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \tau^{n}$ y también los coeficientes, al identificar los de todas las potencias, se plantean infinitas ecuaciones lineales entre infintios coeficientes. Como son lineales,

(*) Consúltese en el "Mémorial" el fascículo de Cotton.

Hill admite que el determinante es necesariamente nulo, y para que lo sea calcula uméricamente los infinitos valores de $a$, y para cada valor de $a$ los cocientes de los coeficientes de la solución a uno de ellos. Ecuaciones lineales en número infinito con infinitas incógnitas fueron ya consideradas por Fourier en 1822; Hill ocupóse en el caso concreto referido del cálculo del determinante; pero hasta Poincaré, en 1886, no aparece demostración alguna de la convergencia del mismo. Poincaré estudia el determinante cuya diagonal principal tiene todos sus términos iguales a 1, y en que los demás $a_{rs}$ son tales que $\sum_{sr}^{\infty} |a_{rs}|$ es convergente. En el tomo 8 de las Acta, Mittagleffler reeditó la memoria de Hill y sucesivamente dió encargo a su discípulo von Koch de que estudiase el método y su aplicación más general. Von Koch comenzó en 1890 sus trabajos sobre determinantes infinitos, que resumió en el Congreso de Estocolmo de 1910.

Von Koch introdujo el determinante "normal" cuya diagonal principal tiene sus términos en la forma $1 + K_{rr}$ y tal que satisface a la condición de Poincaré. Tras del estudio del determinante y sus menores, con todo el aparato de generalización de las propiedades del determinante, considera Koch su aplicación a ecuaciones lineales homogéneas de orden $n$ y sistemas de ecuaciones ordinarias lineales y hasta ecuaciones en derivadas parciales, estableciendo una serie de condiciones para la convergencia de los procesos resolutivos.

El más sencillo de todos es la resolución del sistema de ecuaciones algébricas lineales, examinado por Dixon en 1901, casi simultáneamente con la aparición del método de Fredholm (1900), proceso que había de constituir el germen del llamado método de análisis de las infinitas variables por estudiar el paso al límite sobre $n$ elementos cuando $n \to \infty$ en contraposición al estudio directo, justificativo o sintético de Fredholm, en que se estudia directamente el límite.

La primera memoria de Hilbert data de 1904, pero fué enseñado el método en Gottingen ya en 1901. La idea fundamental (*) reside en la representación de la función que se busca por los coeficientes $x$ de una serie generalizada de Fourier, obtenida mediante un conjunto de funciones ortogonales normalizadas y completo, aun cuando la serie no fuere convergente y no pudiere igualarse a la función. Representación basa-

(*) V. Courant. "Methoden der mathematischen Physik". Berlín, 1931.

da en que toda función de cuadrado integrable es tal que $\int_a^b f^2 dx = \sum_1^\infty x_p$

O sea que se cumple el teorema de Pitágoras en el "espacio de Hilbert" correspondiente, teorema descubierto por Vallée Poussin en 1893 y llamado a veces igualdad de Bessel-Hurwitz. La existencia del límite en el segundo miembro asegura la de la función $f$ en el sentido de existir una función $f$ cuyo cuadrado es integrable Lebesgue, y tal que sus coeficientes de Fourier sean los $x_p$ dados (teorema de Fischer-Riesz). La resolución de la ecuación de Fredholm, por ejemplo, es *equivalente* a la *representación* de la función por la serie de los coeficientes de Fourier construídos con las funciones ortogonales elegidas. Es fácil el construir funciones ortogonales adecuadas a la resolución en cada caso, partiendo de otras funciones conocidas (v. gr., potencias, factoriales, polinomios, funciones trigonométricas de Bessel, etc.) (*), ya no lo es tanto el de hallar las más adecuadas a un problema de contorno dado (**). Elegido el sistema en el que el núcleo y la función conocida se suponen representables por las series que les corresponden, en las que $y_p$ y $K_{pq}$ sean los coeficientes, la determinación de los de la función incógnita depende de la resolución de sistemas lineales algébricos en que $x_p + \sum_1^\infty K_{pq} x_q = y_p$ $p = 1, 2 \ldots \infty$ siendo $K_{pq}$ los coeficientes de una forma bilineal en $x, y$ "vollstetig" (***), las $y_p$ son cantidades conocidas cuya suma de cuadrados es finita, y las $x_p$ satisfacen a la misma condición y son las incógnitos, y hay que examinar en qué condiciones se justifica el proceso formal de cortadura al pasar al límite; es decir, al operar con $n$ finito y creciente, en el tránsito de lo algébrico a lo trascendente. El tránsito se hace por un proceso en que $n$ adquiere los valores de una serie creciente de índices enteros, convenientemente elegida. Cada corte, correspondiente a un valor de $n$, puede resolverse como un sistema algébrico ordinario. Sea $M_n$ el mínimo del cociente de las dos formas cuadráticas de $n$ variables $\left(\sum_{p=1}^n x_p + \sum_{q=1}^n K_{pq} x_q\right)^2$ y $\sum_1^\infty x^2_p$. Si $M_n$ se conserva superior a un número M mayor que cero para infinitos valores de $n$, para todos es-

(*) V. Courant. "Methoden der mathematischen Physik". Berlín, 1931.

(**) V. Lichtenstein, 1914; Rediconti di Palermo: "Zur Analysis der unendlich vielen Variablen y Müntz: Mathematische Annalen, 1922.

(***) Vollstetig, completamente continua, es decir en que el módulo de la diferencia de dos cotas $|K_n - K_m| < \varepsilon$ uniformemente y para todo $n, m$ superior a N (), siendo en $\varepsilon \Sigma K_{pq} \xi_p \eta_q$, $\Sigma \xi^2_p < 1$ y $\Sigma \eta^2_q < 1$.

tos valores de $n$ el determinante del sistema de ecuaciones lineales es distinto de cero, y por lo tanto $\sum_{1}^{n} (x_p^2)_n \leq \frac{1}{M} \sum_{1}^{\infty} y^2_p$ para todos los $\infty$ valores de $n$. De éstos podría entonces elegirse una sucesión $n_1$, $n_2$ ... tal que los valores correspondientes de las $(x_p)_n$ tiendan a valores límites $x_p$ perfectamente definidos, para los cuales se cumple la condición anterior, de donde, por ser $\sum_{q=1}^{\infty} K_{pq}\, x_q$ completamente continua, se deduce que existe la solución definida por los valores límites cuya suma de cuadrados es convergente. De un modo análogo se demuestra la existencia de soluciones en el caso de las ecuaciones homogéneas cuando ocurre que $M_n \to 0$. De ahí se deducen los tres teoremas equivalentes a los teoremas de Fredholm con las condiciones para la existencia de soluciones en el caso no homogéneo pero en que la ecuación homogénea tiene solución, teoremos llamados de "alternativa".

Los métodos de máximo y mínimo obtenidos mediante series de funciones conducen al método de resolución de los problemas de Cálculo de variaciones denominado directo y fundado en la noción de semicontinuidad (*). Los métodos directos permiten el cálculo numérico. La idea de utilizarlos con este fin se debe a Ritz, que estudió el caso de las vibraciones de placas en 1909.

La escuela americana, como si quisiera continuar la tradición iniciada por Hill, ha venido profundizando en el método de infinitas variables en su relación con las ecuaciones diferenciales. Aparte los trabajos de Moore y de su escuela sobre análisis funcional, cabe mencionar en la rápida relación de métodos que se enuncian, los trabajos de Hart, de Hildebrandt, de Ritt, etc., que por lo general publican en las "Transactions of the American Mathematical Society", y los "Annals of Mathematics". La solución definida por una sucesión indefinida de funciones juega en estas cuestiones un papel análogo a la de números racionales en la definición del inconmensurable, con nuevas y complicadas singularidades, pues de la permanencia de propiedades de la serie no cabe deducir las del límite sino en determinadas condiciones.

---

(*) Noción introducida por Baire, desarrollada luego por Lebesgue y Tonelli.
(**) Véase el opúsculo de Strutt. Berlín, 1932.

## XXIII

Es el mismo método fundamental en toda la Matemática moderna. Pero precisamente la manera de portarse el límite y sus propiedades es lo más importante del problema. En el de Dirichlet, por ejemplo, dado un contorno, no siempre puede darse una función continua cualquiera en él. Pero si la función es un polinomio, Poincaré demostró que hay siempre solución. El método de barrido permite por sucesión de funciones construirla cuando existe. Y la existencia quedó demostrada a fines del siglo pasado para contornos superficiales con curvaturas principales finitas en casi todo punto. (El método de Fredholm, de gran importancia resolutiva, al referir la solución a la existencia de una capa doble, impone condiciones al contorno.) En la consideración del problema se abren, con el siglo XX, dos tendencias, una teórica y otra resolutiva, que, como ocurre siempre, se complementan, pues con la existencia se tiene siempre un método constructivo. La primera se inicia con los trabajos de Hilbert, ya referidos, y continúa en 1907 con Lebesgue, que se pregunta en qué condición, dada una función continua cualquiera en el contorno, el problema es soluble. Es decir, dada la continuidad de la función, cómo ha de ser el contorno; hallando que en dos dimensiones bastan condiciones muy amplias, tan amplias que aparecía el problema como imposible sólo excepcionalmente. Pronto se descubrieron espacios no normales de más de dos dimensiones, es decir, que vienen limitados por contornos en los que, dada una función continua, el problema no tiene solución, v. gr., un contorno con un punto aislado y el contorno con punto interior de Lebesgue, simplemente conexo, donde la función harmónica no adquiere el valor asignado por la continuidad, precisamente en la punta.

El problema se puede atacar por un proceso de límite, de modo, que el contorno dado lo sea de una serie de contornos cada uno de los cuales incluye el precedente, v. gr., una serie de cuadrículas o cubos de cada vez menor lado, los cuales constituyen siempre un recinto normal, que se llama reticulado. Para un recinto reticular existe siempre la función de Green para todo punto interior al recinto y la serie de funciones de Green, al extenderse la red, tiende uniformemente a una función límite harmónica, menos alrededor del polo de la función de Green. Esta función es cero en casi todos los puntos del contorno dado, si lo es en todos, el recinto es normal. Los recintos no normales tienen puntos en el contorno en que la función de Green no es cero, y ello independientemente del polo de dicha función.

Wiener *inicia el proceso de límite partiendo de una función continua* cualquiera que adopte los valores dados en el contorno. Esta función para cada retícula de dimensiones definidas adquirirá en el contorno valores determinados. Se construye la harmónica que los acepta para esta retícula (*). La sucesión de funciones harmónicas al decrecer la dimensión de la retícula, define una función límite; esta es la solución de Wiener, que es harmónica, existe siempre cualquiera que sea el contorno y los valores dados en él, es independiente de la retícula, del modo cómo su dimensión tiende a cero, y del modo como se hayan prolongado inicialmente al interior del recinto los valores dados en el contorno. Además, tiende en el contorno a los valores dados con tal de que los puntos del mismo sean regulares. En puntos no regulares puede no tender a los valores que la continuidad exige. Entonces la solución no es única, a menos de incluir otras condiciones; la de ser acotada puede en algunos casos determinar la unicidad. Pero la cuestión se plantea en un terreno nuevo: la investigación del carácter de los puntos excepcionales y la naturaleza de la singularidad en ellos. Varios matemáticos se han ocupado en esta cuestión; en el fascículo corerspondiente de Bouligand en el Memorial hay abundante bibliografía moderna, en contraste con los tratados antiguos de potencial (Duhem, Neumann, Routh, Korn) donde todo se circunscribía al método pero no se barruntaba la singularidad en el contorno.

Wiener ha introducido la noción de capacidad. Es $\frac{1}{4\pi}$ la integral de flujo para un potencial electroestático unidad. Determinado este potencial que tiene el valor 1 en el contorno, la carga viene definida en efecto por el valor anterior. Mediante la capacidad $\gamma_n$ del conjunto de puntos del contorno cuya distancia de un punto dado está comprendida entre $\lambda^{n-1}$ y $\lambda^n$ siendo $0 < \lambda < 1$ se puede expresar el carácter regular o excepcional de dicho punto. En el primer caso $\sum_1^\infty \gamma_n/\lambda^n$ es divergente y en el segundo convergente. La noción de capacidad juega un papel importante en toda la teoría.

El problema de Dirichlet para condiciones en el contorno discontinuas fué abordado por Fatou en 1906, en el círculo, demostrando cómo se

(*) Se llama por algunos teorema de Koebe a la propiedad de ser harmónica en un recinto T la función que en un punto *a* coincide con la media de sus valores en toda circunferencia interior a T que tenga por centro *a*.

alcanzan los valores dados, procediendo según los radios, salvo en radios excepcionales, y qué valores se obtienen al alcanzar un punto de discontinuidad sin seguir el radio. Este teorema se halla en los textos corrientes, v. gr., en el Goursat y ha sido objeto de generalización por Kellog, 1912, y Evans, 1920, en su tratado sobre teoría del potencial. En estas cuestiones la integral de Stieljes es heramienta de gran servicio. El planteo del problema más general de Dirichlet se debe a Perron, "Mathematische Zeitschrift", 1923, y Wiener, "Journal of Mathematics and Physics", 1925.

El estudio de la ecuación general lineal del tipo elíptico con coeficientes variables continuos o discontinuos ha dado lugar a un gran número de memorias desde Picard, 1902 (Acta) que aplica el método de resolución por aproximaciones sucesivas y supone coeficientes analíticos y funciones continuas en el contorno, a los modernos como Lichtenstein, en que se obtienen soluciones de casos más generales.

La extensión al caso de un número cualquiera de variables ha ocupado a varios matemáticos; especialmente son de citar Hadamard, E. E. Levi y Zeilon, cuya bibliografía hasta 1924 puede verse en la Enciclopedia Teubner, artículo de Lichtenstein, tomo II, C. 12, donde se refieren además otros problemas de contorno en relación con la ecuación diferencial elíptica lineal, sus valores propios y las funciones características, distribución asintótica de aquéllos y carácter analítico de las soluciones.

El caso de ecuaciones elípticas no lineales con condiciones en el contorno ofrece un gran interés por comprender problemas clásicos del análisis (superficies mínimas), uniformación de funciones algébricas, y en Física y Mecánica (vibraciones). Entran en la solución bifurcaciones cuyo estudio constituye la parte esencial. Para su análisis se emplea el Cálculo de variaciones con cuyo auxilio se ha podido penetrar en el examen de tan interesantes y difíciles materias objeto de la atención de multitud de analistas como Schmidt, Lichtenstein, Hammerstein, Iglistch, etc., cuyos métodos entran ya en los textos, v. gr., en el de Mises sobre ecuaciones de la Física matemática y en el tratado de Lichtenstein sobre ecuaciones integrales no lineales.

## XXIV

Ello nos lleva a terminar esta parte fundamental con una reseña breve sobre el cálculo de variaciones. Prescindimos de la parte clásica: las ecuaciones de Euler Lagrange; las condiciones de transversalidad en los límites, las condiciones de solución discontinua (Carathéodory, 1904), las de Legendre, la existencia del campo de extremales, condición de Jacobi o teoría de los focos; el mínimo débil y el mínimo fuerte, Weierstrass y Hilbert.

Nuestra generación ha aprendido tales nociones en los textos de Goursat y de Bolza; el primero como introducción y el segundo para un estudio más detenido, ambos análogos en método, inspirados fuertemente en la manera de Weierstrass, cuyas lecciones se conocían hasta hace poco por la publicación del texto de Hancok y hoy por el tomo correspondiente de las obras completas. Pero en época más reciente los tratados de Hadamard y Tonelli han permitido la iniciación en multitud de cuestiones básicas y problemas nuevos que ocupan lugar destacado en la literatura periódica. Especialmente los problemas de Lagrange y Mayer, y el problema de extremales cerradas, la reducción a problemas del Cálculo de variaciones de multitud de cuestiones de análisis y el desarrollo del Cálculo funcional, del que aquel es un elemento históricamente básico, han dado a los métodos del Cálculo de variaciones una importancia de primer orden. En la imposibilidad de desarrollar aquí sus más recientes progresos, nos concretaremos a señalar algunos entre los más importantes, dejando para otra publicación mayor pormenor e insistencia y cerrando con su relación la serie de capítulos dedicados a exponer el fundamento del programa.

Se denomina problema de Lagrange al de mínimo de una integral $\int f(x, y_1, y_2, \ldots y_n, y'_1, y'_2, \ldots y'_n)\, dx$ entre dos límites cuando las funciones cumplen con determinadas condiciones de continuidad en un cierto campo alrededor de la solución y además satisfacen a determinadas condiciones diferenciales o finitas en número $p$. El de Mayer es más general e incluye el mínimo anterior puesto que exige el mínimo de ciertas funciones $y_{\cdot}(x)$ en relación a otras funciones dadas $\lambda_s(x)$, $(s = 1, 2, \ldots p)$ del mismo tipo de las admitidas a "comparación" con la solución $y(x)$, $(r = 1, 2, \ldots n)$, y entre iguales condiciones límites. Hahn, en 1922, enunció una generalización del problema que comprende no sólo los de Lagrange y Mayer, sino otros más generales enunciados previamente por

Bolza. Lagrange introdujo en estos problemas sus multiplicadores y en la misma forma se presentan en los tratados clásicos. Pero varios analistas echaron de ver que ofrecían no pocas dificultades y el esclarecimiento de las mismas y la generalización de los problemas ha constituído una de las cuestiones interesantes de la Matemática en lo que va de siglo.

El caballo de batalla del problema de Lagrange son las condiciones de segundo orden. Bolza se ocupa en ellas en su texto ya citado de 1909, en el sentido de los análisis clásicos de Clebsch (*), en 1858; Mayer, 1868, y Escherich, Viena, 1898-1899 y 1901; tales estudios son muy complicados; la integral de Hilbert, por ejemplo, depende del camino de integración, a menos de considerar las extremales denominados de Mayer, cuyo campo hay que construir para calcular en él la integral de Weierstrass o de Hilbert y poder aplicar los métodos nuevos de extremo fuerte. (Clebsch y Mayer se concretan al estudio del mínimo débil en su variación segunda y a la disposición de los focos.) En el problema de Lagrange, las dos extremales que pasan por un punto del espacio llenan una variedad de dimensiones $n + 1 - q$, siendo $q$ la clase que puede variar entre cero y $p$ y es un invariante diferencial característico, que interesa conocer. Su anulación, cuando los extremos son fijos, equivale a la condición de existencia de extremales normales y en el caso general hay estrecha dependencia entre el modo de ser de las extremales y el concepto de clase, como ha demostrado Caratheodory (Acta 1926 y Commentarii mathematici helvetici, 1932).

Bolza, Hahn, Bliss, Radon y Morse, pueden considerarse como las más importantes personalidades en cuya escuela o bajo cuya influencia se procura simplificar lo posible el problema de Lagrange, dar interpretación geométrica a los elementos condicionales y presentar las soluciones en forma concisa y clara. Especialmente interesantes son los estudios del profesor de Erlangen, el cual, en un cursillo profesado en la Universidad de Hamburgo, consiguió dar a la teoría de la segunda variación en el problema de Lagrange una forma notablemente sencilla. Radon emplea además en el cálculo de variaciones la teoría de los grupos. Cuando el problema es invariante respecto de un grupo de transformaciones puntual conocido (**) se simplifica mucho la resolución. Esta introducción de la teoría de grupos en el cálculo de variaciones, tal vez debida a Emmy

(*) V. el Análisis de Jordán, tomo III, y mi conferencia en la Escuela de Caminos en 1927, pág. 32 a 34.

(**) O tal que al aplicar la transformación aumente la cantidad subintegral en una diferencial exacta.

Noether, en nuestras conferencias dadas en este lugar sobre Relatividad, hace ya bastantes años, fué tomada como punto de partida del análisis, inspirándome en el contenido de la memoria de 1910 debida a dicha señora y publicada en las Nachrichten de Gotinga.

Otro capítulo del cálculo de variaciones que ha sido objeto de sostenida atención es el mínimo de integrales múltiples, encabezado por Kobb en 1892 para el caso de una función $z$ de $n$ variables

$$\int f(x_1\, x_2 \ldots x_n\, z\;,\; z'_1 \ldots z'_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

También en estas cuestiones el nombre de Radon ocupa lugar preferente; al pasar a la integral múltiple hay que examinar todos y cada uno do los pasos y las complicaciones, que aparecen, v. gr., ya en la introducción de la forma paramétrica al plantear la independencia del parámetro elegido y para problemas en que en $f$ intervienen derivadas de orden cualquiera. Esta teoría es difícil y se halla en sus comienzos; hay en ella problemas análogos a los de Lagrange y también condiciones de segundo orden. Para las integrales de superficie $\int\int f(x, y, z, p, q) dx\, dy$ Lichtenstein y Picone han obtenido resultados interesantes ("Mathematische Zeitschrift", 1919, y Lincei, 1921, 1922). En el Congreso de Zurich (1932), Tonelli disertó acerca de este tema.

Es fácil considerar (aunque no resolver) problemas de mayor generalización; en vez de una función $z$ se suponen varias, con varias variables independientes y en el subintegral derivadas de diversos órdenes con condiciones finitas de condición o integrales hasta formular el problema más general.

Estos problemas, aunque parezcan elucubraciones abstractas, tienen muchas veces aplicación adecuada a problemas de Física, de Técnica y de Economía.

## SEGUNDA PARTE

### TEXTO DEL PROGRAMA Y COMENTARIO

La redacción de los capítulos precedentes es, señores académicos, como relación de un viaje aéreo sobre las provincias de la Matemática y en la región seimiautónoma de las ecuaciones diferenciales. Será recuerdo de mi examen de valles y divisorias, cordilleras con sus cúspides y puertos, cultivos y frutos, relaciones de unas comarcas con otras. No pretendo sino transmitir una idea sintética, una ordenación de elementos de juicio, un panorama del contorno y los niveles y con ello un día la posibilidad de contagiar mi interés a jóvenes iniciados, o al menos, y si ello no fuera posible, servir como catálogo en mi memoria de los conocimientos que haya podido adquirir en el transcurso de mi vida, no siempre sin sacrificio.

Como síntesis en mi memoria, acaso como firme fundamento de otros estudios, tal vez contribuyendo a la esperanza de sofrenar la máquina voladora sobre campo en que pueda labrar un surco donde germine la idea que sembrare. Laudabo ingentia rura, exiguum colo. Mi carrera en el aire, que sólo la velocidad ha podido hacer estable, tránsito fugaz de unas a otras disciplinas a que me ha obligado el Destino a través de tempestades y violencias que no han conseguido aun, por ventura, obligarme a entrar en barrena. Pero si ello fuese fatal, si en el remolino de la pasión hubiere de sucumbir, nadie podrá negar la evidencia de mi empeño en contribuir al enaltecimiento de nuestra Cultura, servido con tenacidad y devoción inquebrantables.

En Matemática es necesario presentir lo que se ignora, casi descubrir, con el resultado, el modo de obtenerlo. Poseer, innato, el método, para recorrer casi instantáneamente, intuitivamente, el proceso. Cuando no se posee esta intuición, se puede pretender poco más que la esperanza de que el fomento de la curiosidad, la admiración y el entusiasmo hagan fructificar en lo futuro flora tan extraordinaria en nuestro campo. Por ello es preciso interesar los mejores cerebros, fomentar el estímulo y hasta los honores, valorizar el esfuerzo y el mérito, trabajar de consuno, todos con todo nuestro esfuerzo y potencia; del círculo de artesanos que formemos surgirá el artista; surgirá espontáneo, como el escultor en los lugares donde se elaboran estatuas, como el pintor donde hay artífices decoradores, como el poeta donde se ensalza el culto a la palabra, expresión humana del afecto y de la idea.

## II

He ahí en líneas generales y pormenor el "Programa del curso de ecuaciones diferenciales" en dos secciones y un complemento.

SECCIÓN PRIMERA: ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.

I. *Generalidades*: *Soluciones analíticas y singulares.*

1) Métodos elementales de integración.

2) Teoremas de existencia y unicidad.—Integración cuantitativa de ecuaciones diferenciales ordinarias.

3) Integración cualitativa.—Singularidades algebroides y esenciales. Distribución de singularidades en ecuaciones diferenciales ordinarias.

II. *Estudio monográfico de las ecuaciones diferenciales lineales.*

1) Resolución y reducción en los casos más sencillos.

2) Resolución mediante integrales definidas y series.—Puntos regulares de Fuchs.—Caso en que los coeficientes son funciones elípticas de la variable independiente.

3) Coeficientes periódicos.—Puntos irregulares.—Clasificación.—Estudio monográfico de algunas ecuaciones.—Desarrollos asintóticos.

4) Problemas de contorno.—Teoremas de oscilación.—Funciones características.—Distribución de ceros.

5) Sistemas.—Ecuaciones de variación.—Estabilidad.—Problemas de Riemann y Fuchs.

SECCIÓN SEGUNDA: ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES.

I. *Ecuaciones en derivadas parciales de primer orden.*

1) Ecuaciones lineales.—Idem en diferenciales totales.—Integrales completas.—Características.—Sistemas de Clebsch y Jacobi.

2) Ecuaciones canónicas.—Problema de integración de Lie.—Transformaciones de contacto.—Grupos.

3) Formas y ecuaciones de Pfaff.—Invariantes integrales.

4) Sistemas de Pfaff.—Multiplicadores.

II. *Ecuaciones de segundo orden y de orden superior.*

1) Características.—Integrales intermedias.—Ecuaciones de Monge Ampère.—Ecuaciones tipos.

2) Problemas del potencial logarítmico y newtoniano.—De Dirichlet, Neumann y mixtos.—Analiticidad.

3) Ecuaciones de tipo hiperbólico y propagación por ondas.—Métodos de Riemann, Volterra y Hadamard.

4) Ecuaciones del tipo parabólico.—Funciones fundamentales.—Paramétrica de Hilbert.

5) Ecuaciones de orden superior y sistemas.

SECCIÓN TERCERA: COMPLEMENTOS.

I. *Ecuaciones integrales.—Cálculo de variaciones.—Estudio monográfico de algunas funciones definidas por ecuaciones diferenciales.*

1) Ecuaciones integrales de Volterra y de Fredholm.—Teoremas de Hilbert y desarrollos de Schmidt.—Aplicaciones.

2) Cálculo de variaciones.—Métodos de Jacobi, Weierstrass, Darboux.—Extremos isoperimétricos.—Extremos absolutos.—Extremales cerradas.—Problema directo.

3) Desarrollos de la Física matemática.—Integrales recíprocas.—Espectros de valores propios.—Aplicaciones al problema de vibración y al cálculo general de perturbaciones.

4) Funciones de Laplace, Lamé y Mathieu.—Funciones cuasiperiódicas.

II. *Funcionales.—Cálculo diferencial absoluto.—Integración cuantitativa de ecuaciones en derivadas parciales.*

1) Ecuaciones íntegro-diferenciales y funcionales en general.—Ecuaciones en derivadas funcionales.

2) Cálculo de diferencias e interpolación.—Teoría de la aproximación e integración cuantitativa de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

3) Cálculo diferencial absoluto.—Matrices infinitas.—Representación de grupos finitos y continuos.

---

El desarrollo del programa por lecciones es como sigue:

SECCIÓN PRIMERA: ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.

I. *Generalidades.—Soluciones analíticas y singulares.*

1) *Métodos elementales de integración.*

Lección 1.ª Eliminación de constantes.—Orden.—Integral general y particular de una ecuación ordinaria.—Problemas de Cauchy y de contorno.—Ecuaciones simultáneas.—Eliminación de funciones arbitrarias.—Ecuaciones en derivadas parciales.—Reducción a cuadraturas.—Integración por funciones elementales.—Ecuaciones en diferenciales totales.—Sistemas en forma normal.—*Interpretaciones geométricas y cinemáticas.—*Isoclinas.

Lección 2.ª Ecuaciones homogéneas de primer orden.—Propiedades de las curvas integrales.—Ecuaciones lineales.—Modo cómo dependen de la constante arbitraria las integrales.—Ecuación de Bernoulli reductible a una lineal.—Ecuación $(xdy - ydx)x^m = f(y/x)\,dx + \varphi(y/x)\,dy$. —*Curva directriz de la integral en una ecuación lineal.

Lección 3.ª Ecuación de Jacobi.—Resolvente.—Integral general.—Caso de raíces dobles y triples.—Invariabilidad para toda transformación homográfica.—Formas canónicas.—Curvas W.—Método general de las curvas radiales.

Lección 4.ª Ecuación de Ricatti.—Propiedades de la integral general en relación con el conocimiento de integrales particulares.—Tipos resolubles por cuadraturas.—*Ausencia de puntos de ramificación paramétricos.—*Trayectorias isogonales de círculos y de esferas.—Ecuación de Lagrange.—Propiedad de la integral general en relación con el conocimiento de integrales particulares.—Ecuación de Clairaut.—Ecuaciones diferenciales de las formas $F(x\,p) = 0$, $F(y, p) = 0$.

Lección 5.ª Factor integrante.—Caso de ser función de una sola de las incógnitas.—Cociente de dos factores integrantes.—Aplicación a la representación conforme de dos superficies.—*Ecuación de Euler.—Fórmulas de sumación de las funciones elípticas análogas a la trigonométrica fundamental.—*Método de integración de Stieltjes.—*Integral racional en forma de polinomio simétrico en ambas variables y de segundo grado en cada una.—*Método de integración de Abel.

*Lección 6.ª Ecuación de Darboux. $L\,dy + M\,b + N\,(xdy - y\,dx) = 0$ siendo L M N polinomios en $x$, $y$ de grado $m$.—Integrales algébricas y su empleo.—Caso en que sólo se obtiene un factor integrante.—Caso particular de la ecuación de Jacobi.—Problemas de trayectorias que conducen a ecuaciones de primer orden.

Lección 7.ª Ecuaciones de orden superior.—Caso de $y^n = f(x)$. Expresión por integral definida de la integral particular. Ca o $F(x, y^n) = 0$, Caso $x = f(y^n)$ Examen de la posibilidad de descenso en el orden por ausencia de $y$, ausencia de $x$, homogeneidad en $y, y' \ldots y^n$, homogeneidad en $y, d, x, d, y, d^2y \ldots d^ny$, etc.—Aplicación a diversos problemas de Mecánica y de Física en que intervienen ecuaciones de segundo orden fácilmente resolubles.—*Integración de la ecuación de líneas de curvatura del elipsoide por el método de Monge.

2) *Teoremas de existencia y unicidad.—Integración cuantitativa.*

Lección 8.ª Existencia local de una función analítica que satisface $y' = f(x, y)$ cuando $f$ es analítica en $x, y$ alrededor de un punto inicial $x_0 y_0$.—Valor mínimo del radio del círculo de convergencia de la integral en función de los radios de convergencia del cociente diferencial.—Su dependencia del método de demostración.—Teorema de existencia para sistemas de ecuaciones de primer orden en forma normal y con segundos miembros analíticos.—Caso de ecuaciones lineales.

Lección 9.ª Condiciones de integrabilidad en ecuaciones en diferenciales totales.—Existencia local de la integral en el caso en que los coeficientes sean holomorfos.—Ecuación en derivadas parciales en forma normal con segundo miembro holomorfo y condición límite holomorfa: Caso de dos variables.—Inexistencia de integrales no holomorfas en el problema local y en un punto regular.—*Integral considerada como función de los valores iniciales en el caso $y' = f(x, y)$.—*Unicidad.—Definición de correspondencia al tender a un valor límite.—*Teoremas de Picard.

Lección 10.ª Existencia local de la solución de un sistema de ecuaciones de primer orden en forma normal, cuando los segundos miembros son funciones continuas y acotadas que satisfacen la condición de Lipsicht en un determinado paralelepípedo.—Método de iteración o de aproximaciones sucesivas de Cauchy-Picard.—Limitación de Lindelöf.—Unicidad. *Examen del límite inferior que se obtiene para el radio de convergencia con el que resulta por el método de la mayorante de Cauchy-Goursat cuando es aplicable.—*Representación de la integral en la estrella del segundo miembro.—*Caso en que el proceso no converge.—*Ejemplo de Nagumo.—Método del polígono de Cauchy, o de cuadratura.—Demostración de la existencia del límite.—Aplicación al desarrollo en serie de polinomios de la función $1/1\text{-}x$.—*Sustitución del polígono de Cauchy por otras curvas.—Métodos de Lichtenstein y de Trefftz.—*Método de integración de Perron para ecuaciones le la forma $y' = \Sigma f_\nu(x) y^\nu$

*Lección 11.ª Existencia y unicidad de las integrales de ecuaciones ordinarias en forma normal cuando los segundos miembros son sólo funciones continuas.—Teorema de Peano.—Ejemplo de existencia y no unicidad.—Condición de limitación de Perron.—Funciones superior e inferior.—Método le la selección de polígonos de Peano y Mie, aplicable a sistemas.—Existencia y unicidad de la solución cuando la función $f(x, y)$ en $y' = f(x, y)$ no es continua, pero es acotada.—Introducción de la integral de Riemann.—Existencia y unicidad cuando $f(x, y)$ no es acotada.

Condiciones de Carathéodory.—Ejemplo de Carathéodory de existencia y unicidad en una función no continua.—Unicidad cuando la solución está asegurada: Condiciones de Rosenblatt, Nagumo, Osgood, Tonelli, Janaga, Shimizu y Scorza Dragoni.—Examen del proceso de aproximación en su convergencia y condiciones de unicidad distintas de las de Lipsicht.—Puntos de Peano.—Su distribución y propiedades.—Teoremas de Carpentier y de Hoheisel.

Lección 12.ª Integración cuantitativa de ecuaciones diferenciales.—Estima del error.—Examen del mismo en los diversos sistemas de solución local.—Reducción al cálculo de ecuaciones en diferencias.—Problema general de interpolación aplicado a una ecuación diferencial ordinaria.—Método de Runge-Kutta.—Método de Adams.—Sistemas de ecuaciones ordinarias.—Integración gráfica.—Idem mediante la construcción de radios de curvatura.—Métodos mecánicos, hidráulicos, eléctricos, etc.

3) *Integración cualitativa de ecuaciones ordinarias.—Singularidades ordinadias y no ordinarias de los cocientes diferenciales.—Distribución de las mismas.*

Lección 13.ª Caso de variables reales.—Estudio de la integral alrededor del origen en el caso $y' = \dfrac{ax + by}{cx + dy}$.—Puntos singulares de Poincaré.—*Casos analizados por Bendixon y Horn: $x^m\ y' = F(x, y)$ siendo $F(x, y)$ analítica y nula en el origen.—*Casos estudiados por Perron $y' = \dfrac{ax + by + P(x,y)}{ax + dy + Q(x,y)}$ Condiciones a que satisfacen P y Q.—Condiciones para la existencia de un centro.

*Lección 14.ª Curvas definidas por ecuaciones diferenciales.—Género de la superficie de referencia.—Diversa clase de puntos singulares.—Indices, ciclos, etc.—Distribución de puntos singulares.—Aplicaciones a las ecuaciones diferenciales de la Balística exterior.—Uniformización de integrales.—Teoremas de Poincaré, Levi Civita y Sundmann.

Lección 15.ª Ecuación de Briot y Bouquet.—Integrales holomorfas y no holomorfas.—*Estudios de Dulac y Boutroux sobre la ecuación de primer orden $y' = f(x, y)$.—*Estudio de la superficie de Riemann alrededor de un punto singular.—*Examen de la existencia de una tangente determinada en el límite.

*Lección 16.ª Puntos singulares fijos y paramétricos en la ecuación algébrica $y' = f(x, y)$.—Su carácter meromorfo o algebroide.—Teorema de Painlevé.—Ecuaciones de primer orden que no tienen puntos críticos paramétricos. — Teoremas de Fuchs y de Poincaré para el caso

$F(x, y, y') = 0$ algébrica en $y$ racional en $y'$ y analítica en $x$. Caso $y'^m = f(y)$.—Teorema de Hermite sobre las ecuaciones $f(y, y') = 0$ en que $f$ es un polinomio: condiciones para que la integral sea uniforme.

*Lección 17.ª Teoremas de Poincaré sobre solución de sistemas de ecuaciones lineales.—Complementos debidos a Dulac y a Birkhoff para el caso de no cumplirse alguna de las condiciones sobre las raíces de la ecuación secular.—Examen del caso de ser divergente la serie de alguna de las funciones resolventes.

*Lección 18.ª Ecuaciones de orden superior al primero: Puntos singulares en variables reales.—Aplicación de las transformaciones cremonianas.—Ecuaciones de segundo orden cuya integral tenga sus puntos críticos fijos.—Puntos críticos móviles en ecuaciones de segundo orden.—Reducción de Painlevé cuando la integral es uniforme y la ecuación de segundo orden.—Trascendentes de Painlevé.—Coeficientes diferenciales expresados por funciones multiformes.

*Lección 19.ª Teoremas de Koenigsberger y Frobenius sobre irreductibilidad.—Irreductibilidad lineal.—Idem de Drach.—Teoría racional de Lie.—Integración lógica.—Caso de sistemas.—Teorías formales de integración.

Lección 20.ª Integrales singulares.—Caso del primer orden y función algébrica $f(x, y, y') = 0$.—Construcción de la integral holomorfa.—Discriminantes $(p)$ y $(c)$: su comparación.—Caso de un sistema de ecuaciones de primer orden.—Congruencias de curvas.—Superficie focal.

II. *Estudio monográfico de las ecuaciones diferenciales lineales.*

1) *Resolución y reducción en los casos más sencillos.*

Lección 21. Area de holomorfia en una ecuación lineal de orden $n$.—Ecuación homogénea.—Sistema de integrales particulares constituyendo uno fundamental.—Determinante de Wronsky: sus propiedades.—Ecuaciones lineales no homogéneas.—Integrales particulares conocido un sistema fundamental para homogéneas.—Empleo de integrales definidas.

Lección 22. Modo de disminuir el orden por el conocimiento de una integral particular.—Aplicación a la ecuación de segundo orden.—Teoremas de Sturm que se deducen de la expresión de la nueva integral. Modo de rebajar en una unidad el orden de la ecuación lineal homogénea.—Aplicación al caso de la ecuación diferencial de Legendre.

*Lección 23. Simbolismo en las ecuaciones ordinarias diferenciales lineales.—Aplicación del algoritmo del m. c. d.—Integrales comunes a dos ecuaciones.—Reducción si se conocen $p < n$ integrales particulares. Formas reducidas y transformaciones que no alteran el carácter de la ecuación diferencial.—Aplicación de la noción de grupo de una ecuación algébrica.—Ecuación adjunta.—Caso en que se conocen $p$ integrales de la adjunta.

Lección 24. Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes.—Relación de recurrencia entre los coeficientes de la solución holomorfa.--Ecuación característica.--Sustituciones de la forma $y = z\, e^{\alpha x}$. Examen del caso de tener la ecuación característica raíces iguales.—Demostración de que constituyen sistema completo. Caso de raíces imaginarias y coeficientes reales.—Error en la expresión analítica de la integral cuando se limita la serie.—Ecuaciones no homogéneas con coeficientes constantes.—Integrales cuando el segundo miembro tiene expresión determinada.

2) *Resolución mediante integrales definidas y series.—Puntos regulares de Fuchs.—Coeficientes funciones elípticas.*

Lección 25. *Resolución de ecuaciones lineales mediante integrales definidas en el campo real.—Identidad de Lagrange.—*Transformada de Laplace.—Teorema de reciprocidad de Petzval.—Resolvente.—*Núcleos diversos y sus ecuaciones diferenciales correspondientes.—*Núcleos de Bessel, Euler, Legendre.—Ecuaciones homogéneas de Euler.—Caso de raíces iguales en las características.—Caso de ecuaciones de Euler no homogéneas.—*Resolución por integrales dobles.—Condiciones de periodicidad y de contorno.—Reducción a una ecuación integral.

Lección 26. Resolución de ecuaciones lineales ordinarias homogéneas por integrales curvilíneas en el plano complejo.—Ecuación de Laplace.—Elección de base.—Aplicación a la ecuación de Bessel.—Caso de resolución por exponenciales.—*Ecuaciones diferenciales lineales ordinarias cuyos coeficientes sean polinomios de igual grado o de grado decreciente. Teoría de Poincaré y Horn.—*Reducción al rango unidad.

*Lección 27. Integración de ecuaciones diferenciales cuyos coeficientes sean polinomios en la variable mediante núcleos diversos del de Laplace.—Integral de Pochammer.—Grupo de la integral.—Funciones contiguas.—Función P de Riemann y su relación con la serie hipergeométrica.—Su expresión por una integral de contorno.—Funciones confluentes.—Integrales de la Física matemática deducidas como funciones confluentes de la general de Lamé.

Lección 28. Ecuaciones diferenciales cuyas integrales son regulares, es decir, de la forma $(x - a)^k \varphi(x - a)$ ó $(x - a)^k \left[\log (x - a)\right]^n \varphi(x - a)$ siendo $\varphi$ uniforme y $k$ un valor complejo.—Permutación de las integrales alrededor de los puntos críticos de la ecuación diferencial.—Ecuación secular.—Caso de raíces distintas y determinación de los valores de $k$.—Caso de raíces múltiples en la ecuación secular.—Divisores elementales. Grupos de integrales y relaciones funcionales dentro de cada grupo.—Demostración del teorema de Fuchs por Jordan.—Forma analítica de las integrales.—Condiciones necesarias y suficientes para que una ecuación diferencial homogénea lineal tenga todas sus integrales regulares.—Caso del segundo orden y de un orden cualquiera.—Demostración de la convergencia de los desarrollos.—Caso de raíces de la ecuación determinante que difieran en un número entero.

Lección 29. Ecuación de Gauss como ejemplo de ecuaciones del tipo Fuchs.—Expresión analítica de la integral para todo el plano.—Prolongación de valores en las tres áreas fundamentales.—Estudio de la serie hipergeométrica y propiedades de la función por ella definida.—Casos particulares de la ecuación de Gauss y reducción a otras ecuaciones.

*Lección 30. Condiciones de meromorfia para la integral de una ecuación lineal de coeficientes meromorfos.—Caso en que además son funciones elípticas de la variable, con igual período todas.—Teorema de Picard.—Aplicación a la ecuación de Lamé.—Teorema de Halphen sobre el caso en que es uniforme el cociente de las dos soluciones de una ecuación de segundo orden con los coeficientes doblemente periódicos.

3) *Coeficientes periódicos.—Puntos irregulares.—Clasificación.—Estudio monográfico de algunas ecuaciones.—Desarrollos asintóticos.*

Lección 31. Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes periódicos.—Relación que expresa una integral incrementada del período.—Valor del wronskiano.—Idem del determinante de coeficientes.—Ecuación característica.—Caso de raíces iguales en la ecuación característica.—Exponentes característicos.—Números característicos.—Caso de raíces desiguales.—Expresión funcional entre las integrales de un grupo.—Sustitución de las diferencias por derivadas.—Caso en que los coeficientes son funciones analíticas.—*Desarrollo de la integral en serie de Fourier.—Aplicaciones a diversos casos.—*Teoremas de Liapaunoff y Flocquet.—*Ecuación de Hill y sus aplicaciones.—Ecuación de Mathieu.

*Lección 32. Existencia de soluciones regulares en ecuaciones cuyos coeficientes son racionales y no cumplen la condición de Fuchs.—Teorema de Thomé.—Ecuación indicial.—Convergencia de los desarrollos.—Clase del punto singular.—Inexistencia, en general, de soluciones regulares.—Condición necesaria y suficiente para la existencia deducida de las propiedades de la adjunta.—Soluciones normales y factores determinantes.—Caso en que el punto al infinito es una singularidad irregular.—Ecuaciones de Hamburger.—Caso del segundo orden.

*Lección 33. *Solución de ecuaciones diferenciales lineales por un* proceso de fracciones continuas.—Método general de Euler.—Examen de la convergencia del proceso.—Funciones F e Y de Kummer.—Clasificación de ecuaciones diferenciales según la confluencia de singularidades.—Solución formal por series.—Indices.—Condiciones de ausencia de logaritmos.—Singularidades aparentes.—Método de Baker.

*Lección 34. Desarrollos complementarios sobre funciones definidas por ecuaciones lineales de segundo orden.—Funciones de Hankel, de Neumann y semejantes.—Desarrollos en serie, expresión por integral definida, tablas, ceros.—Carácter funcional respecto de los parámetros.—Relaciones de recurrencia y funcionales.—Funciones de Legendre.—Sus propiedades más importantes y su empleo en fórmulas de interpolación.

*Lección 35. Métodos generales de desarrollo asintótico.—Método de Laplace, del puerto y de Darboux.—Aplicaciones a las funciones de Bessel y Legendre.—Teoremas de Debye y Watson.

4) *Problemas de contorno.—Teoremas de oscilación.—Funciones características.—Distribución de ceros.*

Lección 36. Problemas de contorno en ecuaciones diferenciales lineales reales, de segundo orden.—Su expresión en la forma de Sturm con las condiciones lineales en los límites.—*Fórmula de Picone.—*Teoremas de oscilación.—Idem sobre el modo de variar cuando cambian los coeficientes.—*Condiciones suficientes de oscilación.—*Ceros.

*Lección 37. Valores propios y funciones características en las ecuaciones de segundo orden y para funciones reales.—Propiedades de su espectro, valores asintóticos y realidad.—Aplicación a la ecuación de Sturm-Liouville.—Ceros de las funciones características.—Ortogonalidad de funciones características.

*Lección 38. Condiciones límites periódicas en ecuaciones de Sturm reales.—Estudio del caso de valores propios dobles.—Teoremas de oscilación correspondientes.—Ecuaciones con coeficientes periódicos.—Teorema de oscilación de Klein.

*Lección 39. Función de Green introducida por Bocher en el estudio de los problemas de contorno en ecuaciones ordinarias lineales, reales.—Sistemas autoadjuntos.—Utilización de la función de Green para la resolución de problemas de contorno en ecuaciones no homogéneas.—Caso en que el sistema contenga un parámetro.—Desarrollos de Birkhoff. Condiciones de compatibilidad.—Desarrollo en serie de una función según funciones características.—Método de Prüfer.

*Lección 40. Ecuaciones lineales de segundo orden en el plano complejo.—Método de las transformadas de Hille.—Su invariancia en el cambio de la variable independiente. — Selección de base. — Zonas desprovistas de ceros.—Estrella sin ceros de $y'' = y/x$.—Distribución asintótica de ceros.—Soluciones truncadas.—Ecuaciones cuyos coeficientes son polinomios.

5) *Sistemas.—Ecuaciones de variación.—Estabilidad.—Problemas de Riemann y de Fuchs.*

Lección 41. Sistemas de ecuaciones lineales homogéneas.—Sistema fundamental de integrales.—Su matriz.—*Matriz canónica y cogrediente del sistema de Cauchy.—*Sistemas de ecuaciones no homogéneas.—*Condiciones de equivalencia de dos sistemas.—Ecuaciones con coeficientes constantes.—Ecuación característica.—*Caso de raíces múltiples.—Reducción a forma canónica.—*Discusión de Jacobi.—*Reducción a un sistema diagonal.

*Lección 42. Sistemas de ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes periódicos.—Sistemas reductibles.—Resolución de sistemas por aproximaciones sucesivas.—Sistema semilineal.—Examen de las integrales como funciones paramétricas de los valores iniciales o de algún otro elemento que figure en los cocientes diferenciales.—Teorema fundamental de Poincaré sobre analiticidad de los desarrollos.

Lección 43. Integrales en la proximidad de una solución conocida.—Ecuaciones de variación.—*Sistemas de ecuaciones en número infinito con infinitas incógnitas.—*Teoremas de Koch.—*Aplicaciones.—*Teoremas de Volterra.—*Trascendente de Volterra.

Lección 44. Soluciones periódicas en sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.—Exponentes característicos.—Caso que la variable $t$ no entra explícitamente.—*Diversas clases de soluciones periódicas y métodos de Poincaré aplicados por éste en el estudio de diversos problemas de Mecánica celeste.

Lección 45. Soluciones asintóticas en sistemas de ecuaciones.—Estabilidad e inestabilidad de trayectorias y del equilibrio.—Estabilidad lineal y de orden superior.—*Teoremas clásicos de Dirichlet y Liapounoff. *Caso de ecuaciones que corresponden a un sistema canónico de la Mecánica.—*Diversas clases de estabilidad.—Estabilidad tipo secular, de Poisson, etc.—*Métodos y resultados.

*Lección 46. Sistemas diferenciales adjuntos.—Su teoría.—Integración del sistema completo.—Problema fundamental de Riemann.—Resolución mediante las funciones zetafuchsianas de Poincaré.

*Lección 47. Problema de Fuchs: Condiciones necesarias y suficientes para que el grupo de monodromia de una matriz integral sea independiente de los puntos singulares.—Sistema de ecuaciones de Schlesinger.—Sus integrales algébricas.—Su integración general.—Teoremas de Garnier sobre independencia del grupo de monodromia de los valores de ciertos parámetros.

*Lección 48. Teoremas de Birkhoff sobre reducción de sistemas lineales con un punto singular de rango $K + 1$ en lo infinito.—Forma canónica tipo que pueden adoptar los polinomios que intervienen en el sistema reducido. — Resolución del sistema canónico tipo de rango unidad y de rango dos.—Solución general.—Representaciones asintóticas.—Construcción de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con singularidades $z_1 \ldots z_m \ldots$ de rangos $q_1, q_2 \ldots q_m \ldots$ y con un grupo de monodromía dado conocidas las constantes características para cada punto singular.

## SECCIÓN SEGUNDA: ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES.

### I. *Ecuaciones de primer orden.*

1) *Ecuaciones lineales.—Idem en diferenciales totales.—Integrales completas.—Características.—Sistemas de Clebsch y Jacobi.*

Lección 49. Ecuación en derivadas parciales de primer orden, lineal y homogénea con $n$ variables.—Caso de coeficientes holomorfos.—Ecuación lineal no homogénea: Demostración de que la solución anula el Jacobiano de las integrales primeras del sistema lineal correspondiente. Casos de excepción.—Curva característica.—Congruencias de curvas características.—Descomposición en factores simples.—Ejemplos: trayectorias ortogonales, sistemas ópticos, etc.—Focales de congruencias.—Ejemplos.

Lección 50. Ecuaciones en diferenciales totales y con dos variables independientes.—Condición de integrabilidad y su invariancia respecto de todo cambio de variables.—Análisis vectorial correspondiente.—Integración de una ecuación en diferenciales.—Método de Meyer.—Método de Bertrand.—Corchetes y paréntesis de Poisson para expresar la compatibilidad de $F(x, y, z, p, q) = o$ y $G(x, y, z, p, q) = o$.

Lección 51. Integral completa en una ecuación de primer orden con dos variables independientes.—Integrales generales y particulares.—Método de Lagrange Charpit para obtenerlas.—Ejemplos.—Resolución del problema de Cauchy.—Método de las características.—Teorema de Darboux.—Caso de más de dos variables.—Integral de Lie para una ecuación $F(x_1, x_2 \ldots x_n, p_1 \ldots p_n) = 0$.

Lección 52. Soluciones comunes en sistemas lineales simultáneos de dos ecuaciones en derivadas parciales homogéneas con $n$ variables y una función incógnita.—Sistema independiente.—Reducción mediante $n$-1 integrales primeras.—Sistemas completos de Clebsch y sistemas jacobianos. Propiedades esenciales.—Soluciones comunes a sistemas jacobianos.—Modo de hallarlos.

Lección 53. Integral completa con $n - r + 1$ constantes arbitrarias, $n$ variables independientes y una función $z$.—Eliminación de las constantes.—Integrales particulares y general.—Demostrar que no todos los sistemas simultáneos de primer orden pueden obtenerse por eliminación de constantes.—Examen de la reducción de un sistema en derivadas parciales a uno ordinario lineal.—Problema general de la eliminación de funciones arbitrarias.—Integrales comunes en un sistema de dos ecuaciones de primer orden con $n$ variables y una función $z$ dependiente cuando las ecuaciones dadas están en involución.

2) *Ecuaciones canónicas.—Problema de integración de Lie.—Transformaciones de contacto.—Grupos.*

Lección 54. Aplicación del primer método de Jacobi para resolver las ecuaciones canónicas de la Mecánica.—*Teoremas de Stäckel, Levi-Civita y Dellacqua sobre separación de variables.—*Teorema de Liouville.—Segundo método de Jacobi basado en la identidad de Poisson.—*Teoremas de Mayer.

*Lección 55. Teoría general de Lie en ecuaciones de primer orden. Elemento de contacto.—Soportes.—Problema general de integración de Lie en el caso de $n$ ecuaciones simultáneas cuando $\frac{DF}{Dp} \neq 0$.—Ecuaciones semilineales.—Multiplicidades integrales.—Síntesis de los diversos modos de integración.—Caso de ecuaciones homogéneas.

*Lección 56. Transformaciones de contacto.—Ecuación directriz de Plücker.—Ejemplos clásicos.—Teorema fundamental sobre coeficientes de los diferenciales que intervienen en una relación de contacto.—Recíprocos.—Invariantes.—Caso en que X y P no contienen la variable $z$.—Recíprocos.—Aplicación a los sistemas canónicos.—Teorema fundamental en la teoría de perturbaciones.

*Lección 57. Aplicación del estudio de transformaciones de contacto a la resolución de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden.

Método de integración de Bour-Korkine.—Examen sintético de los métodos generales de integración.

*Lección 58. Grupos y subgrupos de funciones.—Sistema completo formado por los paréntesis $(u_1 f) = 0$, $(u_2 f) = 0$, etc., cuando $r$ funciones distintas $u_1 \ldots u_r$ de las $2n$ variables $x_1 \ldots x_n$, $p_1 \ldots p_n$ determinan un grupo de orden $r$.—Recíproco.—Funciones singulares de los grupos.—Caso de un grupo de orden impar.—Forma canónica de un grupo.—Reducción de un grupo a forma canónica.—Invariante de un grupo relativamente a toda transformación de contacto.—Aplicaciones al problema de integración.—Método de integración de Lie independiente de la determinación de las funciones singulares del grupo.

*3) *Formas y ecuaciones de Pfaff.—Invariantes integrales.*

Lección 59. Forma de Pfaff.—Reducción a formas tipos.—Invariante bilineal.—Interpretación geométrica.—Sistemas S.—Clase de la forma.—Método de Darboux para la formación de los sistemas de Pfaff sucesivos.

Lección 60. Clase de una ecuación de Pfaff.—Resolución de la ecuación general.—Multiplicidades características.—Ecuaciones simultáneas de primer orden.—Integración de una ecuación canónica.

Lección 61. Divisores lineales de una forma diferencial exterior.—Multiplicadores.—Integral intermedia.—Rango de una forma.—Clase de una forma derivada.—Rango de una función relativamente a una forma simbólica.—Formas de segundo grado con cuatro variables.

Lección 62. Aplicación de las formas diferenciales de multiplicación exterior al problema de Pfaff.—Sistemas adjuntos a una forma lineal.—Grupos de funciones conjugadas.—Determinación de un grupo conjugado.—Forma canónica de una ecuación de Pfaff.—Soluciones singulares.—Integrales de un número dado de dimensiones.

Lección 63. Invariantes integrales absolutos y relativos.—Función de Hamilton.—Invariantes de diversos órdenes, composición y formación de los invariantes.—Aplicaciones a la Hidrodinámica.

*4) *Sistemas de Pfaff.—Multiplicadores.*

Lección 64. Sistema característico de un sistema de Pfaff.—Clase de un sistema y elementos singulares.—Teoremas de Cartan.—Orden máximo de las integrales no singulares.—Sistemas asociados covariantes a S.—Elementos en involución con todas las demás integrales lineales que arrancan del mismo punto.—Condición de Frobenius para que un sistema de Pfaff sea completamente integrable.

Lección 65. Sistemas derivados de S.—Clase del sistema derivado.—

Carácter.—Teoremas de Cartan.—Transformaciones de contacto prolongadas.—Teoremas generales sobre la invariancia de sistemas de Pfaff.—Sistemas de Pfaff de cuatro y cinco variables.—Problema de Monge.

Lección 66. Sistemas normales y especiales de Cartan.—Sistemas integrales explícitamente.—Elementos lineales e integrales de orden cualquiera.—Determinación de los elementos integrales.—Números de Cartan.—Género de un sistema de Pfaff.—Problema de Cauchy.—Su resolución por Cartan.

Lección 67. Multiplicador de Jacobi.—Su empleo y generalización. Aplicaciones de la Teoría a diversas cuestiones de Mecánica Celeste y de Hidrodinámica.—Generalización debida a Cartan de las fórmulas de Poisson-Jacobi.—Método general de integración de las ecuaciones que admiten un invariante integral lineal absoluto.—Caso en que admiten varios.

Lección 68. Ecuaciones diferenciales que admiten transformaciones infinitesimales dadas.—Reducción de Lie.—Caso en que el número de transformaciones infinitesimales es igual a la de funciones desconocidas. Grupo máximo que conserva la ley según la cual las integrales primeras se intercambian al aplicarlas las transformaciones infinitesimales dadas. Aplicación a diversas ecuaciones de segundo orden.—Generalización de Cartan.

Lección 69. Correspondencia entre multiplicidades de contacto en el espacio de tres dimensiones.—Problema restringido y problema general. Transformaciones de Bäcklund.—Sistema asociado de Pfaff y sus elementos singulares.—Resolventes de primera y segunda especie.—Ecuación de Gómez Teixeira.—Problemas de Bianchi sobre superficies de curvatura constante negativa, y de Weingarten sobre la deformación de superficies.

II. *Ecuaciones de segundo orden y de orden superior al segundo.*

1) *Características.—Integrales intermedias que dan lugar a problemas de Bäcklund.—Ecuaciones de Monge Ampère.—Ecuaciones tipos.*

Lección 70. Problema de Cauchy en una ecuación de segundo orden.—Integral general según Darboux.—Curvas características.—Multiplicidad o banda característica.—Caso de dos variables independientes y caso de más de dos.—*Superficie portante o característica en el sentido de Hadamard.—*Bicaracterísticas.—Clasificación de ecuaciones de segundo orden.

Lección 71. Estudio de la ecuación de segundo orden llamada de

Monge Ampère.—Sus elementos característicos.—Estudio de los casos de imposibilidad y de indeterminación en el problema de Cauchy.—Ecuación degenerada.—Propiedades de las características como elementos de bifurcación.

Lección 72. Integrales intermedias en la ecuación de Monge Ampère.—Introducción de funciones arbitrarias.—Integral general deducida de las intermedias.—Caso de ecuaciones lineales.—Aplicaciones a la integración de ecuaciones diferenciales de ciertas familias de superficies:

$$rt - s^2 = 0, \quad q^2r - 2pqs + p^2t = 0; \quad (1 + q^2)s - pqt = 0$$

$$rt - s^2 + a^2 = 0; \quad s = kpz; \quad s = e^{kz};\ \text{etc.}$$

Lección 73. *Transformación de Legendre.—Método de cascada de Laplace para ecuaciones de segundo orden.—Aplicación a la ecuación $(x - y)\ s + p - q = 0$.—*Método de Darboux para la ecuación del tipo $s = f\ (x, y, z, p, q)$.—*Características de primero y segundo orden. *Características de orden $n$.—*Caso en que admitan involuciones.—*Invariantes.—*Caso en que el problema de Cauchy se reduce a la integración de un sistema de ecuaciones en diferenciales totales.—*Ecuaciones integrables por el método de Darboux.

Lección 74. Ecuaciones lineales.—Sus tres tipos.—*Intervención de la noción de analiticidad y de la noción de función arbitraria.—Integrales fundamentales.—Estudio elemental de la ecuación del sonido en su resolución por potenciales esféricos de Boussinesq.—*Método de Kirchhoff y deducción del principio de Huyghens para cuatro variables incluyendo el tiempo.—*Estudio de la propagación por ondas cilíndricas mediante el mismo sistema.—*Frente y cola de la onda.—*Residuo.—Ecuaciones del calor en régimen variable.—Problemas de difusión resueltos por el método de Bernouilli.—Problemas de dos variables: Anillo de Fourier y enfriamiento de la esfera.—Su resolución por series trigonométricas.

2) *Problemas del potencial logarítmico y newtoniano.—De Dirichlet, de Neumann y mixtos.—Analiticidad.*

Lección 75. Propiedades elementales de las funciones armónicas.—Su analiticidad.—Teorema de la media.—Potencial logarítmico.—Potenciales de capa simple y capa doble.—Fórmula de Green.—Integral de Poisson.—Caso en que los valores en el contorno son discontinuos.

*Lección 76. Principio de Picard: Singularidades.—Teoremas de Harnack y de Montel.—Teorema sobre el crecimiento.—Prolongación analítica de una función armónica.—Teorema fundamental de Schwarz.

Aplicación del teorema fundamental de Riemann sobre representación conforme.

*Lección 77. Problema de Dirichlet.—Métodos de resolución de Neumann (C) y de Fredholm.—Caso de un número finito de puntos de discontinuidad de primera especie en el contorno.—Integral de Dirichlet.

*Lección 78. Método alternado de Schwarz para resolver el problema de Dirichlet.—Método de la función de Green.—Condiciones de resolución.—Ejemplos clásicos de Prym, Lebesgue y Urisohn en que el problema no es posible.—Crítica de Hadamard y Hilbert.—Teorema de Wiener.—Puntos irregulares.—Problema de Neumann.

*Lección 79. Problema de Dirichlet en la ecuación general de tipo elíptico y de segundo orden con dos variables.—Unicidad de la solución. Estudio de $\Delta u = f(x, y)$ y resolución mediante la función de Green de la armónica $\Delta u = 0$.—Método de aproximaciones sucesivas de Picard para resolver la ecuación general.—Teoremas de analiticidad de Bernstein y Radon.—Función de Green para la ecuación general de tipo elíptico.—Problemas mixtos.

Lección 80. Problema de Dirichlet en el espacio.—Potencial newtoniano de capa simple y capa doble.—Problemas de régimen permanente que conducen a una $\Delta u = 0$.—Fórmula de Green que da el valor de la función armónica.—Funciones de Green y su empleo.—Fórmula de Poisson para la esfera.

*Lección 81. Método del barrido de Poincaré para la resolución del problema de Dirichlet.—*Métodos de la media de Wiener o del retoque. *Ecuaciones diferenciales del tipo de Poisson $\Delta u + 4\pi\rho = 0$.—Idem del movimiento vibratorio: $\Delta u + \lambda u = 0$ , $\Delta u + \lambda u = f(x, y, z)$ , $\Delta u = e^u$, etc.

3) *Ecuaciones del tipo hiperbólico y propagación por ondas.—Métodos de Riemann, Volterra y Hadamard.*

Lecció 82. Ecuaciones de la forma $s = f(x, y)$.—Caso de un rectángulo de características en que se dan los valores de la función en ellas. Problema de Cauchy dado un arco de curva.—Propagación a lo largo de las características.—Problemas mixtos diversos en que se dan los valores sobre una curva que pasa por el origen y sobre la característica $y = o$; o sobre dos curvas que encierran la característica $y = o$, dando además en una la derivada normal; o sobre dos curvas que pasan por el origen y que se hallan en el primer cuadrante.—Caso de la ecuación homogénea con valores nulos de $z$ en las curvas.—Propagación de perturbaciones en tubos sonoros y cuerdas vibrantes.

Lección 83. Solución general de la ecuación general de segundo orden, lineal, de tipo hiperbólico cuando se dan los valores en las características.—Método de aproximaciones sucesivas de Picard.—Convergencia del proceso.—Método de Riemann con valores de la función en un arco dando además las derivadas normales.—Ecuaciones adjuntas.—Función de Green.—Aplicación del método de Picard.—Análisis de la ecuación de los telegrafistas por el método de Riemann.

*Lección 84. Aplicación del método de Riemann al problema de Hugoniot.—Ondas y su propagación.—Discontinuidades de segundo orden en la aceleración.—Ondas de choque.—Celeridad.—Aplicación del método de Riemann a la resolución de diversos problemas mixtos de interés mecánico o físico y que se refieren a propagación de ondas en una sola dirección.

Lección 85. Método de integración de Volterra y su aplicación a la propagación de ondas cilíndricas.—*Métodos de Hadamard llamados del descenso y del remanente.—*Reducción del caso en que el número de variables es par.—*Teoremas de Le Roux.

4) *Ecuaciones de tipo parabólico.—Funciones fundamentales.—Paramétricas.*

Lección 86. Ecuación canónica y su adjunta.—Polinomios de Hermite.—Transformaciones lineales y de inversión.—Solución fundamental.—Integrales analíticas, su convergencia según los radios de las funciones de $y$ que intervienen en los datos del problema de Cauchy.—Caso de variables reales.—Teorema de Poisson.—Potencial de capa simple según una línea dada.—Potencial de capa doble.—Fórmula de Levy Holmgren.—Discontinuidad en el tránsito de la base.—*Examen de condiciones en los límites en los problemas que conducen a ecuaciones de tipo parabólico.

Lección 87. Carácter funcional de los potenciales parabólicos considerados como funciones de $y$ o de $x$.—Aplicación de la fórmula de Green al cuadrilátero formado por dos características y dos curvas con densidades conocidas.—Unicidad de la solución.—Teorema de Volterra.—Función de Green y su empleo para la resolución de problemas de contorno.

*Lección 88. Cálculo de densidades por algoritmos integrales.—Método de singularidades.—Imágenes.—Método de la paramétrica de Hilbert.

5) *Ecuaciones de orden superior y sistemas.*

*Lección 89. Ecuación de las placas vibrantes.—Teorema de Hadamard.—Métodos de resolución.—Otras ecuaciones de orden superior al segundo, lineales o no, que se introducen en Física matemática.—Integración aproximada de las ecuaciones en derivadas parciales.

Lección 90. Teorema de existencia de Kowalewsky para sistemas normales.—*Variedades características.—*Ecuación de primer orden a que satisfacen.—*Aplicación al movimiento ondulatorio.*—Discontinuidades de segundo orden.—*Condiciones de compatibilidad cinemáticas y dinámicas.

*Lección 91. Estudio de las ecuaciones de Maxwell y examen de los movimientos ondulatorios que definen.—Superficie de ondas.—Ecuaciones fundamentales de Dirac en la Mecánica ondulatoria.

*Lección 92. Sistema completamente integrable de ecuaciones de orden cualquiera.—Condiciones necesarias y suficientes para que un sistema sea completamente integrable.—Reducción a un sistema canónico. Sistemas de infinitas ecuaciones.—Sistemas en involución.—Idea de los trabajos y terminología de Riquier.

### Sección tercera: Complemento.

I. *Ecuaciones integrales.—Cálculo de variaciones.—Estudio monográfico de algunas funciones definidas por ecuaciones diferenciales.*

1) *Ecuaciones integrales.*

Lección 93. Ecuación de Volterra.—Núcleo resolvente.—Fórmula de Neumann.—Ecuación integral a que satisface el núcleo resolvente.—Aplicación del método resolutivo al caso de ecuaciones diferenciales lineales e íntegro diferenciales.—Caso de varias variables.—Ecuaciones de primera especie.—Teorema de Le Roux.—Método de aproximaciones sucesivas de Lalesco.—Ecuaciones de Abel y su generalización.

Lección 94. Ecuación de Fredholm.—Resolución por aproximaciones sucesivas.—Estudio de los núcleos.—Caso en que no son acotados.—Sistemas de ecuaciones y caso de varias variables.—Expresión de la resolvente en forma meromorfa de $\lambda$.

*Lección 95. Sistema completo de funciones características.—Normalización.—Propiedad mínima de los valores propios.—Teorema de Mercer.—Método de Kellog para determinar los valores propios.—Núcleos principales.—Resolvente canónica.—Género de D ($\lambda$).—Ecuaciones integrales singulares.

Lección 96. Propiedades de los valores propios de las funciones características cuando el núcleo es simétrico.—Desarrollos en serie de

Schmidt.—Teorema de Hilbert.—Sistemas cerrados o completos.—Desarrollos en serie de funciones características.—Condiciones para el desarrollo.—Desarrollo de núcleos iterados.—Idem de una función cualquiera.—Núcleos de Schmidt.—Núcleos en forma de producto de funciones separadas.—Teorema de Fischer Riesz y aproximación en media.

Lección 97. Aplicaciones de las ecuaciones integrales al estudio de ecuaciones lineales tanto en el problema de Cauchy como en el de contorno.—Deducción de los teoremas de Sturm.—Resolución del problema de conductibilidad y de Neumann.—Idem de los problemas mixtos.—Problemas de enfriamiento y vibración.—Ecuación general de tipo elíptico.

*Lección 98. Ecuaciones no lineales.—Aplicación a problemas de vibración de los métodos de Schmidt.—Pluralidad de soluciones.—Bifurcación.

2) *Cálculo de variaciones.—Métodos de Jacobi, Weierstrass, Darboux.—Extremos isoperimétricos.—Extremos absolutos.—Extremales cerradas.*

Lceción 99. Extremales en el plano.—Ecuaciones de Euler.—Extremos débiles y fuertes.—Estudio de la segunda variación.—Transversales.—Condiciones de Legendre, de Jacobi, de Weiertrass y de Hilbert.

Lección 100. Caso de varias variables y ecuaciones en derivadas cualesquiera.—Problemas isoperimétricos.—*Caso de integrales dobles.—*Método de Clebsch.—Soluciones discontinuas.—Teoría de Carathéodory.

*Lección 101. Método de Darboux-Kneser.—Variaciones unilaterales.—Problema del extremo absoluto.—Problema de extremales cerradas.—Estudios de Poincaré, Hadamard, Radon, Birkhoff, Signorini, etc.

*Lección 102. Métodos directos del cálculo de variaciones.—Método de Ritz y análogos.—Transformación involutiva de los problemas del Cálculo de variaciones.—Teoremas de E. Noether sobre invariantes en problemas de variación.—Diversos principios de mínimo que se ofrecen en las aplicaciones a la Mecánica, la Física, la Economía, etc.—Cálculo de variaciones en extenso.

*3) *Desarrollos de la Física matemática.*

Lección 103. Número asintótico de dimensión en una serie de funciones.—Integrales recíprocas de Fourier y Stieljes.—Fórmulas de Mellin y Hahn.—Transformaciones de Laplace.—Funciones características y determinantes.—Aplicaciones.

Lección 104. Problemas de vibración con espectro continuo o discontinuo.—Ecuación de Schródinger.—Valores propios simples y múltiples.—Aplicaciones a la teoría de perturbaciones.—Tensores de Green para sistemas de ecuaciones diferenciales.—Problema general de los desarrollos en serie de funciones propias.

Lección 105. Problemas de valores propios para recintos inconexos. Espectro de valores propios.—Propiedades de continuidad.—Propiedades asintóticas.—Nodos.—Problemas de valores propios en el caso de superficies cerradas.—Aplicación a la membrana y a la placa vibrante.

*4) *Funciones de Laplace, Lamé y Mathieu.—Funciones cuasi periódicas.*

Lección 106. Integral de Schlâfli.—Funciones Y de Laplace o funciones esféricas.—Demostrar que son un sistema completo.—Desarrollo en serie de funciones esféricas.—Expresiones de Neumann (C), de Maxwell y Sylvester.—Harmónicos zonales, tesserales y sectoriales.—Teorema de adición.

Lección 107. Relaciones de los harmónicos esféricos con las funciones hipergeométricas.—Convergencia de Cesaro en las series de Laplace.—Harmónicos correspondientes a superficies de revolución.—Caso de esferoides, óvalos, toros, etc.—Introducción de coordenadas bipolares.

Lección 108. Harmónicos elipsoidales.—Ecuación de Laplace en coordenadas elípticas.—Funciones de Lamé de grados 0, 1, 2, 3.—Ceros. Determinación de funciones harmónicas con valores prefijados en el elipsoide.—Aplicaciones a la Mecánica celeste y a la Geodesia.

Lección 109. Funciones de Mathieu de primera y segunda especie. Sus propiedades ortogonales.—Curvas limitas.—Valores asintóticos.—Cálculo de funciones de Mathieu.—Análisis de la propagación de movimientos ondulatorios en medios dotados de periodicidad.—Aplicación a la propagación de ondas electromagnéticas en redes electrónicas y a lo largo de filtros.

Lección 110. Funciones cuasi periódicas.—Resumen de las propiedades más importantes de las funciones periódicas y sus desarrollos de Fourier.—Teoremas de Parseval y de Fejer.—Serie de Fourier en una función cuasi periódica.—Ecuación de Parseval.—Unicidad.—Teorema fundamental sobre representación de una función cuasi periódica.—Convergencia de los desarrollos.—Método de análisis de Weyl.—Generalización de funciones cuasi periódicas.

II. *Funcionales.—Cálculo diferencial absoluto.—Integración cuantitativa de ecuaciones en derivadas parciales.*

1) **Ecuaciones integrodiferenciales y funcionales en general.—Ecuaciones en derivadas parciales.*

Lección 111. Campos funcionales de Volterra.—Algoritmos operativos.—Composición y permutabilidad.—Funciones permutables con la unidad.—Grupo de funciones permutables con una función dada.—Teorema fundamental de Volterra y demostración de Peres.—Núcleos periódicos de Evans.

Lección 112. Ecuaciones íntegrodiferenciales deducidas de la teoría de funciones permutables de primera y segunda especie.—Ecuaciones integrodiferenciales de tipo elíptico, hiperbólico y parabólico.—Reducción de ecuaciones íntegrodiferenciales a integrales no lineales.—Problema en pequeño.—Sistemas.—Aplicaciones a la Dinámica a la Economía política y Estadística.

Lección 113. Leyes generales de Herencia y aplicaciones a la Dinámica, Elasticidad e Histéresis electromagnética.—Transformaciones de Volterra definidas por $y_1(x) = y(x) + \int_0^{\infty} K(x, s, a)\ y(s)\, ds$. Sus expresiones íntegrodiferenciales invariantes.—Ecuaciones en derivadas funcionales.

2) *Cálculo de diferencias y de interpolación.—Teoría de la aproximación.—Integración cuantitativa de ecuaciones en derivadas parciales.*

Lección 114. Interpolación con intervalos iguales y desiguales.—Fórmulas de Newton y Lagrange.—Fórmula de diferencias.—Diagrama rómbico.—Interpolación inversa.—Caso de funciones de dos argumentos. Aplicación al cálculo numérico de soluciones de ecuaciones diferenciales e integrales.

Lección 115. Aproximación por series trigonométricas y polinomios. Grado de convergencia de las series de Fourier y de Legendre.—Grado de convergencia de la media aritmética.—Interpolación trigonométrica. Fórmula de Vallée Poussin.—Grado de convergencia con diversas hipótesis.

Lección 116. Sumas y diferencias.—Series de facultades.—Representación de funciones por series de facultades.—Ecuaciones lineales en diferencias.—*Teoremas de Poincaré.

Lección 117. Ecuaciones de diferencias del tipo Fuchs.—*Ecuaciones homogéneas lineales cuyos coeficientes se expresan mediante series de facultades.

*Lección 118. Soluciones en forma de matriz simbólica.—Matrices principales.—Ecuaciones en diferencias completas.

Lección 119. Métodos para la resolución cuantitativa de ecuaciones en derivadas parciales.—Evaluación del error.—Modo de acelerar la convergencia de los procesos fundados en el cálculo de variaciones.

3) *Cálculo diferencial absoluto.—Matrices infinitas.—Representación de grupos finitos y continuos.*

Lección 120. Diversos tensores.—Derivada covariante.—Paralelismo de Levi Civita.—*Su extensión al caso de una variedad de $n$ dimensiones. Geodésicas.

Lección 121. Derivación contravariante.—Invariante de curvatura de Riemann.—*Formas diferenciales de clase cero y de clase 1.—Ecuaciones de la relatividad generalizada de Einstein.—Ecuaciones del campo unificado.

*Lección 122. Forma residual de Hilbert.—Teorema fundamental de Grommer-Hamburger.—Problema de partición de Hellinger.—Matrices infinitas acotadas.—Criterio de convergencia de Hilbert Toeplitz.

*Lección 123. Teoría de la matriz espectral.—Descomposición de Hellinger.—Covariancia unitaria de la matriz espectral.—Matrices no acotadas.—Problema de momentos.

*Lección 124. Equivalencia de representaciones en grupos.—Reductibilidad.—Representación de grupos finitos.—Grupos continuos de las rotaciones y de Lorentz.—Aplicación al modelo molecular o trompo asimétrico.—Grupo de permutaciones y exclusión de Pauli.—Funciones propias del átomo.—Espectros moleculares.

*Lección 125. Características del espacio de Hilbert.—Operadores lineales.

## III

Al encabezar la primera parte se hizo relación de un curso sobre ecuaciones diferenciales, para cuyo desarrollo necesitábase el ajuste a un programa. El programa es el que precede y se inserta en este discurso académico cuyo objeto es precisamente su fundamento y comentario. El fundamento se expone en la primera parte sin descender a un pormenor excesivo ni descubrir minuciosamente las lindes donde es más intenso el trabajo actual de descubierta (lo cual podrá ser objeto de otra comunicación a la Academia). En esta segunda parte me propongo aclarar alguna de las preguntas para orientación del estudioso y según los textos recomendados y seguidos.

Los hay excelentes en la materia, ya formando parte de cursos de Cálculo infinitesimal, ya constituyendo tratados completos o especiales. Además, las bibliotecas públicas en Madrid y en Barcelona, acaso también en Zaragoza, son lo suficientemente completas para incluir las obras de los grandes maestros, la Enciclopedia Teubner y colecciones de las revistas más importantes. Por razones didácticas y de lenguaje, por ser además inmejorables en multitud de aspectos, se han elegido fundamentalmente obras francesas: los textos de Goursat (tomos II y III de su Tratado de Análisis, y libros sobre problema de Pfaff y ecuaciones en derivadas parciales de primero y segundo orden). Creo que es de gran utilidad y conveniencia señalar un texto y seguirlo en lo posible. La extensión del programa sobre la base de esos cinco volúmenes, a los que naturalmente, hay que agregar otras cuestiones, daría al mismo proporciones imposibles de aplicar en la práctica si no se estableciera: a), un mínimo de conocimientos (lecciones sin asterisco); b), una serie de lecciones (con asterisco) de las que en cada curso se desarrollaría sólo una parte. Sin perjuicio de que en posesión el educando de textos y programa pudiera tener base de información suficiente para iniciarse y abarcar, si en lo porvenir lo necesitara, aquella parte de la disciplina que no hubiera sido posible desenvolver en el curso.

## IV

El programa comprende tres grandes divisiones. Las ecuaciones diferenciales ordinarias constituyen la primera, las ecuaciones en derivadas parciales la segunda, y en la tercera, a modo de complementos, se incluyen el cálculo funcional y ciertos desarrollos de la Física matemática. Cada una de tales divisiones se subdivide en dos partes; en el estudio de las ecuaciones ordinarias constituye la primera cuanto no se refiere a las lineales, de las que se hace un estudio monográfico en la segunda porte. Las ecuaciones en derivadas parciales se consideran separadamente en el primer orden y en el segundo. En el complemento se comienza por Ecuaciones integrales, Cálculo de variaciones y Ecuaciones de la Física matemática clásica para terminar en la segunda parte con el Cálculo de funciones, Ecuaciones en diferencias y Cálculo diferencial absoluto.

Se empieza por los métodos elementales de integración, eliminación de constantes y definición de la integral general. Para determinar las constantes se acude a condiciones en un extremo o en puntos separados, lo que lleva a dar una primera idea del problema de Cauchy y los problemas de contorno. El elemento arbitrario elevado a la categoría de función conduce a las ecuaciones en derivadas parciales, tales como se ofrecen, v. gr., en la teoría de superficies. De este modo se tiene idea de cómo se introduce la correspondencia que define una ecuación diferencial; idea que se completa con las ecuaciones en diferenciales totales, haciendo ver la posibilidad de que la solución tenga elementos arbitrarios que se determinan por las condiciones esencialmente complementarias de la ecuación o sistema. Como ejemplo de ecuaciones diferenciales se obtienen las de las cónicas, superficies cilíndricas, desarrollables, etc. Se examina la construcción de curvas en el campo real mediante isoclinas o en general mediante elementos que tiendan a facilitar el diagrama o gráfico de las curvas integrales.

En la lección 2.ª se exponen los métodos de separación de variables, las ecuaciones homogéneas o reductibles a tales y la ecuación lineal o reductible a ella en el primer orden. Se opera ya con la variable compleja de la que se indicará la condición de homogeneidad. En las lineales se introduce la noción de curva directriz que facilita la construcción gráfica de las soluciones en el caso real.

La lección 3.ª está toda ella dedicada a la ecuación lineal de Jacobi, de la que se hace un estudio detenido, agotando, no sólo la materia en el Goursat, sino ampliándola con el estudio de las curvas W de Klein y Lie y generalizando el trazado por la serie y haz proyectivos que las definen, al método de las "envolventes", en que a series de puntos sobre un haz de curvas dado corresponden tangentes (o sendas curvas correspondientes determinadas) que envuelven soluciones de la ecuación diferencial cuando se considera una sucesión en correspondencia con el haz de curvas dado. Se denomina método gráfico de curvas radiales como traducción de Strahlkurven. (Véase el tratado de Serret Scheffers, página 259, y la memoria de Huber en los Monatshefte de 1931, tomo 38.)

La lección 4.ª introduce la ecuacción de Ricatti y sus propiedades más elementales con ejemplos; siguen las ecuaciones en que para integrar se deriva y las que expresan una relación algébrica de género cero o uno entre $x$ e $y'$ o entre $y$ e $y'$.

La lección 5.ª se refiere a las propiedades del factor integrante, con aplicación a la representación conforme de una superficie en otra, y se agota el estudio de la ecuación de Euler en la forma completa en que está expuesto en el texto.

La ecuación de primer orden es objeto aún de la ecuación 6.ª, donde se expone al caso más general de ecuaciones algébricas de primer orden y primer grado, siguiendo la memoria escrita por Darboux en 1878, y sobre la base de conocer algunas integrales algébricas. Consideramos de gran importancia el método, y la exposición del Goursat se completa con la del propio Darboux en el "Bulletin des Sciences Mathématiques". A título de ejercicio se examina el problema de trayectorias.

La lección 7.ª se ocupa de la integración elemental de ecuaciones ordinarias de orden superior en los casos más sencillos o de reducción fácil de orden. Se consideran como aplicación los tipos de ecuaciones que ofrece la Mecánica y la Física y que pueden ser objeto de integración elemental (catenaria, trayectorias en fuerzas centrales, etc.).

Las lecciones 8.ª a 11.ª son de capital importancia, pues en ellas se desarrolla la noción de existencia y unicidad. Se comienza al modo clásico con $y' = f(x, y)$ siendo $f(x, y)$ analítica alrededor del punto inicial, y se hace ver la posibilidad de calcular un valor mínimo del radio de convergencia de la solución $y = \phi(x)$ en función de los radios de convergencia en $f$ para $x$ y para $y$. Se extiende la demostración a sistemas de ordinarias, a lineales, a ecuaciones en diferenciales totales y derivadas parciales. Mediante la aplicación a este caso se demuestra la unicidad de aquél. Aquí se alcanza en todo su valor la introducción de la variable compleja, no sólo por el grado de generalidad, sino por la limitación de la singularidad en la circunferencia de convergencia. La introducción del proceso analítico de prolongación permite salir del círculo y prolongar, v. gr., sobre el eje real, como ocurre en los problemas de la Mecánica, cuando no hay singularidad en él; pero siempre merced a un nuevo proceso operativo, pues la solución local tiene su círculo, que puede ser acotado aun en el caso de no serlo los radios de $x$ e $y$ en $f(x, y)$. Se dispondrá así de una banda alrededor del eje real que, transformada conforme en el círculo de radio $\tau = 1$, da el parámetro $\tau = \theta(x)$ de modo que $x$ e $y$ aparezcan holomorfas en el círculo $\tau \leq 1$, pudiendo desarrollarse según potencias de $\tau$. Una cosa análoga puede establecerse al considerar las integrales como funciones de un parámetro. Se tiene así sumada la serie por un proceso de prolongación.

Expuesto lo que antecede con aplicaciones a determinados problemas, se consideran los métodos de aproximaciones sucesivas de Picard y de Cauchy, en que $f(x, y)$ se supone continua y acotada y cumplir las condiciones de Lipsicht, pero que puede no ser analítica. Se da para el primer caso la limitación de Lindelöff para que la integral no salga del recinto de definición de $f$, que a veces conduce a un límite más amplio de validez que la primitiva condición de Picard. Estos procesos se extienden a sistemas y se prepara con ellos la integración cuantitativa de la lección 12.

Las condiciones de Lipsicht aseguran la unicidad, y es obligado didácticamente presentar casos en que, de no cumplirse las condiciones de Lipsicht, no hay unicidad. De ahí la cuestión de qué condiciones serán suficientes y necesarias para la unicidad y aun para la existencia. En la imposibilidad de dar la solución de este problema, que no se conoce, el programa contiene de un modo muy completo cuanto se sabe sobre unicidad y existencia. Es decir, las condiciones mínimas que aseguran la existencia y dentro de la existencia la unicidad.

Peano demostró que basta la continuidad de $f(x, y)$ y su acotamiento para la existencia. Ahora que, con sólo la existencia, puede haber $\infty$ integrales pasando por un punto, integrales limitadas por las funciones superiores e inferiores que se encuentran en los llamados puntos de Peano. La función $f(x, y)$ puede no ser continua, pero, v. gr., fijado $y$, ser integrable Riemann en $x$, siendo continua en $y$, en cuyo caso existe la integral. Las condiciones menos exigentes fueron dadas por Carathéodory en su teoría de las funciones de variable real, Leipzig, 1918, donde se demuestra la existencia con tal de que $f(x, y)$ para los valores constantes de $y$ sea medible en $x$; para valores constantes de los $x$, continua en $y$ y $|f| < M(x)$, siendo M sumable en el intervalo ab de $x$ en que se define la función. Estas condiciones son ampliables a sistemas.

La condición de Lipsicht para asegurar unicidad es suficiente pero no necesaria; es decir, se conocen integrales únicas sin cumplir la condición de Lipsicht; el mismo Carathéodory da un ejemplo en su tratado de funciones de variable real, ya mencionado.

La condición de unicidad ha sido objeto de estudio por parte de multitud de analistas que se esfuerzan en asegurarla en condiciones cada vez menos exigentes, sin haber conseguido todavía llegar a demostrar que son necesarias. En las lecciones referidas se procura agotar este tema exponiendo los trabajos de la escuela japonesa junto con los de Rosenblatt, Perron y Scorza Dragoni (*).

---

(*) Acerca de estas cuestiones véase el artículo de Müller en el "Jahresbericht" de 1928; la obra sobre ecuaciones diferenciales en el campo real de Kamke, Leipzig, 1930; diversos artículos del "Japanese Journal of Mathematics", 1928, 1930, y los Rendiconti di Palermo, 1930, memoria de Scorza Dragoni. Los estudios de

Estas cuestiones pueden dar lugar a trabajos de investigación y perfeccionamiento, y por referirse a memorias recientes, introducen en un campo de trabajo actual en el que parece posible obtener aún algunos resultados nuevos. Las condiciones de existencia en ecuaciones de segundo orden cuando se trata de problemas de contorno, se halla, en efecto, poco estudiada; no siempre tiene solución ni sentido el problema. Así, por ejemplo, si se da $y'' = f(x, y, y')$ y se pide la solución que pasa por dos puntos dados del plano, el problema puede carecer de sentido. Especificar en qué condiciones hay solución, y dar un proceso de construcción, es tarea que sólo está encabezada (**).

## V

La tercera cuestión general del programa se refiere a la integración cualitativa, comenzando en el caso real y el primer orden con los puntos nodales, puerto, centro y foco, siguiendo con los estudios de Bendixon y Horn en la forma expuesta en el tratado de ecuaciones diferenciales de Bieberbach, Berlín, 1930, y en el de Kambe, Leipzig, 1930, lo que se completa con los trabajos de Perron en la "Mathematische Zeitschrift", y los de Dulac sobre ciclos y su distribución, publicados en el "Bulletin de la Societé Mathematique de France", 1923. Considerando el segundo orden, contiene el programa los estudios de Poincaré y los complementarios de Dulac, así como la noción de estabilidad de Poisson. Como aplicación se estudian del problema balístico (con resistencia de aire) los casos integrables de Drach, siguiendo la exposición de Denjoy en el tratado de balística de Charpentier, París, 1921 y 1927, y la de Popoff en el reciente tratado publicado en Leipzig, 1932.

También se expone la uniformización en el problema de los tres cuerpos, según los trabajos de Levi Civita, Poincaré, Sundmann. El alumno

la Srta. Carpentier sobre distribución de puntos de Peano se hallan en los Comptes Rendus 1931 y 1932. V. también Hoheisel; Kurvenfelder bei Differentialgleichungen erster Ordnung Berlín 1931. (Publicaciones de la Academia de Ciencias.)

(**) V. el tomo IV del "Traité d'Analyse", de Picard: "Leçons sur quelques problemes aux limites". París, 1930; y artículos de Hammerstein en las Acta, tomo 54, y en "Sitzungsberichte der Berliner mathematische Gesellschaft", 1931. Léase también el artículo de Germay publicado en 1932 en la Revista Matematica, págs. 161-181.

puede consultar, aparte de las obras citadas, las obras completas de Poincaré y de un modo especial lo publicado en España por Levi Civita. De este modo se interesará por el conocimiento de los grandes tratados, lo que en Matemática tiene interés primordial, y además conocerá lo que ha visto la luz en España, que, aunque poco, no debiera en ningún modo ignorarse, tanto si es debido a extranjeros como si es debido a españoles.

La segunda parte del estudio cualitativo se refiere ya al campo complejo, y se expone con menos extensión por su carácter difícil y especializado. Se hace un estudio a fondo del caso clásico de Briot y Bouquet, se da la demostración del teorema de Painlevé sobre puntos críticos paramétricos en el primer orden, agotando la exposición de Goursat, completada con el Picard, tomo III del tratado de Análisis, el artículo de Dulac en el "Bulletin des Sciences Mathématiques", 1912, y varias notas de Birkhoff publicadas en las "Sitzunsberichte" de la Academia de Berlín en 1929, que se refieren al caso en que sean divergentes las series con que Poincaré resuelve formalmente la ecuación en derivadas parciales de primer orden. Se exponen además las trascendentes de Painlevé en el segundo orden, siguiendo a Jnce en su Tratado de ecuaciones diferenciales, Londres, 1927.

Las lecciones sobre irreductibilidad, integración lógica y racional y teorías formales forman capítulo aparte. Elementos de referencia, además del tratado de ecuaciones diferenciales de Konisberger, Leipzig, 1889, son el artículo de Vessiot en la Enciclopedia Teubner, la memoria doctoral de Drach y los artículos de este matemático en los Proceedings del V Congreso de matemáticos en Cambridge, en el que tuve la honra de escuchar a tan eminente profesor. Creemos que hay en la dirección por él señalada un filón que no se ha recorrido por entero todavía. Se procurar también indicar los trabajos de la escuela americana (V. Ritt, "Differential equations from the algebrical standpoint". N. York, 1932).

Una sola lección se dedica al estudio de integrales singulares. En ella se expone cuanto el texto de Goursat abarca, incluyendo el análisis de las congruencias de curvas e insistiendo sobre los dos discriminantes en $y'$ y en $c$. Se indica además la historia del problema y se da referencia de las memorias de Hamburger.

En esta primera parte, lección 12, se enseña el método cuantitativo para la resolución de ecuaciones ordinarias sobre la base principalmente del método de Runge y del de Adams. El primero puede estudiarse en la obra de Runge publicada en Berlín en 1924, y el segundo en el tratado de análisis de Hadamard, tomo II, o mejor, en el "Calculus of Observations", de Whittaker y Robinson, Londres, 1926. La literatura sobre resolución numérica aumenta cada día con nuevos textos (*), pero las dos anteriores son, acaso, los más recomendables.

## VI

La segunda parte de la primera sección es un estudio monográfico de las ecuaciones ordinarias lineales y sus sistemas. No pretende agotar la materia, y el contenido del programa es sólo una introducción para que el estudiante pueda hallarse en condiciones de mayor adelanto sobre la base del tratado de Schlesinger, 1899, y su complemento hasta el día (**). Como quiera que el texto de Goursat es deficiente, se completa con otros, especialmente con el Jnce, que es excelente, desde el punto de vista didáctico. En cambio, no me lo parecen tanto ciertos tratados especiales, como el de Schlesinger, de 1908, ni el tomo IV del Forsyth (***). Grandes secciones quedan fuera del programa, especialmente cuando exigen conocimientos previos muy dilatados; con todo, es de esperar que contiene los elementos que pueden contribuir a despertar el interés del neófito. Comienza siguiendo con fidelidad el texto en la parte elemental, que no puede ignorarse, hasta la resolución por integrales definidas y series. En la resolución por integrales definidas en el campo real se añaden algunas consideraciones tomadas del Jnce sobre núcleos

(*) Por ejemplo: Willers: "Methoden der praktischen Analysis", Leipzig, 1928; Scarborough: "Numerical mathematical Analysis", Baltimore, 1930. Este último contiene el método de Milne para resolución de ecuaciones ordinarias y sistemas. En francés la obra de Montéssus y Adhémar de la colección Doin. París, 1911. La revista "Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Mechanik" contiene varios trabajos sobre resolución numérica de ecuaciones ordinarias, entre los que señalaremos el de Mises del año 1930 y el de Schulz de 1931. V. además T. Nystrom: Ueber die numerische Integration von Differentialgleichungen, Helsingsfors, 1925; Moulton: "New Methods in exterior ballistics", Chicago, 1926; Hohenemser: "Die Methoden zur angenährten Lösung von Eigenwertproblemen in der Elastokinetik", Berlín, 1932, y mi conferencia en la Escuela de Caminos, Madrid, 1927, págs. 122 a 127 sobre "Estabilidad geométrica de sistemas elásticos.

(**) El propio Schlesinger publicó en el "Jahresbericht", en 1909, un resumen de la teoría desde 1865 a 1909. V. tomo 18, págs. 133 a 266.

(***) En la Bibliografía especial de ecuaciones ordinarias lineales cabe señalar además el libro de Craig de 1889, N. York, la introdusiión de Hefter de 1894, Leipzig, la memoria de Sauvage sobre sistemas homogéneos, París, 1895, el curso litografiado de Klein sobre ecuaciones de segundo orden, Gotinga, 1914; el de Bocher sobre métodos de Sturm, Paris, 1917, y el contenido de la Enciclopedia Teubner, especialmente el trabajo de Hilb sobre ecuaciones lineales en el campo complejo, Leipzig, 1918.

diversos y ecuaciones diferenciales correspondientes, y como aplicación del método de Laplace se examinan ecuaciones de la Mecánica ondulatoria.

En el estudio detenido de las funciones de Hankel, Bessel y análogas, figura especialmente su representación adecuada al cálculo de valores asintóticos. Las lecciones 34 y 35 están influídas por el contenido de la obra de Courant sobre ecuaciones de la Física matemática, 2.ª edición, 1931. Los teoremas de Poincaré a que se refiere la lección 26, están inspiradas en el Jnce; el examen de la hipergeométrica, la función P de Riemann y funciones confluentes en el "Modern Analysis" de Whittaker, 4.ª edición, 1927, en las lecciones litografiadas de Klein y en el Jnce ya mencionado.

En la lección 28 comienza el análisis de puntos regulares y ecuaciones del tipo Fuchs con un estudio completo del caso de raíces simples y múltiples en la ecuación secular y del grupo de monodromía, siguiendo al texto cuya exposición es muy clara.

En la lección 30 se exponen los trabajos de Picard sobre ecuaciones con coeficientes meromorfos y especialmente funciones elípticas de la variable. Se sigue al autor en su tratado de análisis.

Las ecuaciones diferenciales con coeficientes periódicos tienen tal importancia en las aplicaciones a la Técnica y a la Mecánica celeste que ha sido forzoso ampliar los conocimientos que se adquieren con el texto. A este fin se sigue el tratado de Mecánica celeste de Charlier, Leipzig, 1902, y la obra sobre ecuaciones diferenciales de Moulton (N. Yor, 1930) (*). Los métodos de la Astronomía se hacen aplicables una vez más a problemas del ingeniero y del físico. La exposición que contiene el programa no pasa de los prolegómenos, pero es tal vez suficiente para preparar el estudio de trabajos de mayor enjundia.

En la lección 32 se examinan las ecuaciones con puntos irregulares, es decir, se analizan los trabajos de Tomae y Poincaré en su parte más elemental. Toda esta exposición puede estudiarse en el ya mencionado texto de Jnce, lo mismo que la lección 33, donde se expone el método resolutivo de fracciones continuas y un ensayo de clasificación por confluencia de singularidades.

En resumen, en la redacción del programa se ha dado una cierta preferencia al criterio resolutivo sacrificando el criterio teórico. Hay que te-

(*) V. para su aplicación los tratados de Orbitas periódicas de Darwin, Cambridge, Obras completas, y Moulton Wáshington, 1920. Las memorias de Flocquet aparecieron en 1883 en los Annales de l'Ecole Normale.

ner en cuenta que la Teoría de Funciones se estudia en el curso siguiente, de modo que los conocimientos que es dable suponer sobre ella son poco menos que rudimentarios y deben ser adquiridos previamente. Y aun de los mismos métodos resolutivos se han eliminado muchos; se ha prescindido de las analogías algébricas y las aplicaciones de la teoría de Galois, del desarrollo de la noción de irreductibilidad, de la teoría de las invariantes diferenciales de Halphen y de tantas otras cuestiones que se mencionan en la primera parte, porque es preciso conservar la proporción con el resto del programa; y sólo se ha considerado imprescindible en las 46, 47, 48 dar una idea siquiera somera de los problemas de Fuchs y Riemann, cuya importancia obliga a su consignaci3n, pero reduciéndolos a la exposición que figura en textos generales ya mencionados.

Son esenciales los problemas de contorno con sus teoremas de oscilación y el estudio de sistemas lineales. Para los primeros se ha seguido el texto de Goursat, completándolo con los trabajos de Picone, mediante cuyas fórmulas resultan fácilmente los teoremas de oscilación de Sturm y Liouville. El estudio de los problemas de contorno conduce a la introducción de la función de Green, y por lo tanto lleva al análisis de las ecuaciones integrales, que no se desarrolla en esta parte de la asignatura, sino en los complementos. Con todo, siguiendo la escuela americana de Bocher y Birkhoff, se desenvuelven los criterios de más relieve, y especialmente el desarrollo en serie de funciones propias. La representación por series de funciones propias y análisis de las condiciones en que es admisible puede explicarse con relativa sencillez por el análisis de Prüfer expuesto en las "Mathematische Annalen", tomo 95, 1926. Dos recientes tratados de ecuaciones diferenciales, a saber, el de Bieberbach, 1930, Berlín, y el de Kamke, 1930, Leipzig, dedicado éste sólo a funciones reales, exponen la cuestión según el modo introducido por Prüfer.

La lección 40 estudia de un modo especial las ecuaciones lineales de segundo orden en el plano complejo y la distribución de ceros. El programa se refiere al tantas veces citado texto de Jnce.

En el análisis de sistemas se hace especial referencia a los sistemas de ecuaciones de variación con las cuales se examinan las soluciones periódicas y asintóticas. Comienza con el contenido del tomo III del Análisis de Goursat y sigue con el de Picard, tomo III. También esta parte se halla reducida a la introducción a tan interesante tema, y holgará mucho interesar en el conocimiento y detenido estudio de los "Métodos nuevos", pues cabe abrigar la convicción de que la cantera descubierta por Poincaré ha de ofrecer todavía magníficos sillares.

Se da en la lección 43 una idea de la generalización a infinitas variables, en forma casi narrativa, formal.

No he creído factible desarrollar la parte que exige serios conocimientos en la teoría de los grupos e invariantes, ni por consiguiente la exposición de los grandes trabajos de Poincaré y sus émulos que se mencionan en la primera parte y que son hoy relativamente conocidos por el gran interés que en lo que va de siglo ha ofrecido el problema de la uniformización mediante las funciones zetafuchsianas. Las referencias que el programa exige se refieren tan sólo a una introducción al problema y al conocimiento del mismo en líneas generales.

## VII

El estudio de las ecuaciones en derivadas parciales abarca en dos grandes divisiones las de primero y segundo orden. Para el estudio de las de primer orden se sigue el texto, y en ella se incluyen las ecuaciones en diferenciales totales cuando se cumplen las condiciones de integrabilidad. El resto del programa está inspirado en los tratados especiales de Goursat sobre el problema de Pfaff y ecuaciones en derivadas parciales de primer orden publicados en 1922 y 1921, respectivamente. Aun cuando los métodos de Lie se encuentran expuestos en dichas obras, la aparición del libro de Engel-Faber "Die Lie'sche Theorie der partieller Differentialgleichungen (Leipzig, 1932) ha podido ser habida en cuenta en la redacción del programa.

Las primeras lecciones siguen el texto y se considera el problema de Cauchy para el caso lineal homogéneo y no homogéneo, estudiando las curvas características y sintetizando con representaciones geométricas. Sigue luego el estudio de la ecuación en diferenciales totales y los métodos de integración de Meyer y Bertrand. En esta lección se introducen los paréntesis de Weiler y Poisson, que expresan la compatibilidad de dos ecuaciones de la forma $F(x, y, z, p, q) = 0$, $(x, y, z, p, q) = 0$.

La lección siguiente se refiere a los métodos de Lagrange Charpit y de Cauchy para las no lineales. Se introducen también en esta lección las ideas de Lie sobre integración y el uso de transformaciones de contacto.

Las lecciones 52 y 53 son la aplicación del método de Jacobi a sistemas lineales completos y jacobianos, determinando las soluciones comunes cuando existen y la reducción a este problema del caso general de $r$ ecuaciones no lineales de primer orden con $n > r$ variables independientes y una función. En la lección siguiente se preguntan los métodos de la Mecánica, singularmente el primer método de Jacobi para integrar la ecuación de Hamilton, señalando en qué casos pueden separarse las variables según la tesis de Stäckel y trabajos de Levi Civita. Esta lección de Mecánica debe consultarse en algún tratado de esta materia, singularmente los de Appel, Whittaker y Levi Civita. La teoría de las perturbaciones y los cuantos han "popularizado" estos métodos por la doble circunstancia de que las transformaciones de contacto no alteran la forma canónica y de poder formular las ecuaciones de variación de constantes tomando como nuevas variables precisamente los valores de los constantes que entran en la integración por el método de la integral completa.

El resto del primer grupo de lecciones está consagrado a los métodos de Lie y estudio de transformaciones de contacto. En lo cual creemos útil recomendar al estudioso el tratado de ecuaciones diferenciales de Liebmann, Leipzig, 1901, así como el tomo publicado por Lie-Scheffer, y del que no ha aparecido más que el primer volumen: "Theorie der Berührungstransformationen", Leipzig, 1896. Ambos son de lectura elemental y todo en el programa tiene carácter de introducción. No obstante, se ha creído imprescindible explicar la teoría de los grupos de funciones y justificar, por alguna aplicación de la misma a la Mecánica, las razones de Lie para que sus ideas tuvieran no sólo alcance en punto a deslinde y clasificación, sino también en la manera y capacidad resolutiva.

En los sistemas de Pfaff se definen las nociones de clase, carácter e invariantes y género. El conjunto de lecciones que abarca desde la 59 a la 69 necesita como texto del ya mencionado de Goursat sobre el problema de Pfaff, y del tratado de invariantes integrales de Cartan, París, 1922. Ciertamente existen otros textos notables, en especial de Weber (V. la bibliografía que contiene el fascículo de Cerf en el Memorial, 1929), pero el programa prescinde de ellos. Sólo en sentido histórico y de aclaración se han introducido algunas preguntas, a que da el primer tomo del Forsyth contestación suficiente. La exposición de los métodos de Cartan con la noción de invariante bilineal y forma de multiplicación exterior se exigen con la importancia preponderante que merecen. Se han incluído además las aplicaciones de la noción de invariante integral a la Hidrodinámica, Mecánica celeste y Teorías cinéticas (*).

(*) Sobre invariantes integrales ha publicado De Donder muy interesantes trabajos, pero no ha sido posible incluir sus aportaciones, por lo que me limito aquí, por vía de orientación, a señalarlas.

Se da idea de los problemas de Monge en ecuaciones no lineales en diferenciales totales y del problema de Backlund, con aplicaciones a algunas cuestiones de Geometría diferencial. Sobre tales problemas el estudioso hallará orientación y bibliografía en sendos fascículos del Memorial. (V. fascículo VI. "Le probléme de Backlund", por Goursat, 1925, y fascículo LIII: "Le probléme de Monge", por Zervos, 1932.) Termina esta parte del programa con el estudio de las ecuaciones diferenciales que admiten una transformación infinitesimal, siguiendo la memoria fundamental de Vessiot.

## VIII

En las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden se ofrecen dos caminos, el del estudio directo de las ecuaciones, v. gr., como resolviendo con ellas el problema de Cauchy, y el de los problemas que ofrece la Física matemática y la Geometría diferencial en forma de problemas de contorno.

Los textos adoptados permiten estudiar una introducción a ambos problemas. El tomo III del Goursat, tras de un examen bastante completo de la ecuación de Monge Ampère y sus integrales intermedias, trae una discusión excelente de las multiplicidades características y expone el método de cascada de Laplace, sin abordar el de Darboux. Estos estudios se completan con el texto del mismo Goursat sobre ecuaciones diferenciales de segundo orden, en el que el método de Darboux se expone con bastante pormenor. El examen del concepto de clase a que se hace referencia en el cap. VII de la primera parte podrá estudiarse en la memoria de Hilbert: "Ueber den Begriff der Klasse von Differentialgleichungen", Leipzig, 1912, publicado en el volumen dedicado a Weber (Weber'sche Festschrift). V. también los trabajos de Gross en los tomos 73 y 76 de los Mathematische Annalen.

En cuanto a los problemas de contorno y de ondas, la exposición sigue el Goursat completado con algunas nociones del problema de Dirichlet tomadas del Picard, tomo II, de su tratado de Análisis, sin pretender entrar a fondo en las teorías modernas a que nos hemos referido en la primera parte. Sobre ondas se completa la exposición de Goursat con el contenido del tomo II del tratado de Análisis de Hadamard. El uso de ecuaciones integrales para la resolución de problemas de contorno se confía al complemento, y, a decir verdad, la primera parte del mismo puede considerarse como indispensable. La circunstancia de que el texto de Goursat contiene ambas materias excelentemente desarrolladas, abona la posibilidad de orientar en estas cuestiones sobre la base del contenido de dicho tomo III.

El estudio de las ecuaciones de segundo orden comprende 22 lecciones, cifra bastante elevada relativamente, si se tiene en cuenta que en el complemento se tratan las ecuaciones integrales como estudio aparte. En la primera agrupación se define el problema de Cauchy procurando el desarrollo paralelo geométrico de las fórmulas y métodos de análisis, y aplicándolo a las ecuaciones de Monge Ampère y a las más conocidas ecuaciones diferenciales de familias de superficies.

En la lección 73 se preguntan el método de Laplace y el de Darboux. La extensión que necesita el segundo obligaría a desdoblar esta lección y aun a subdividirla en varias si no hubiera que introducir necesariamente una limitación en el número de lecciones. La lección se concreta a la exposición del método sobre la base de las características de orden cualquiera y a su aclaración mediante algunos ejemplos.

La lección 74 contiene lo que se podría denominar introducción a la Física matemática, aplicación de los métodos de resolución en serie trigonométrica, del de Kirchhoff, empleado constantemente en el estudio de la difracción (llamado también principio de Huyghens) y del de Boussinesq sobre potenciales esféricos o retrasados que tan clara introduce la noción de cola de onda al integrar en contorno variable la perturbación inicial. Cuando la ecuación diferencial lineal de segundo orden y coeficientes constantes es de tres dimensiones en el espacio y una en el tiempo, no hay cola; cuando es de dos en el espacio y una en el tiempo, la superficie cilíndrica indefinida introduce la modalidad peculiar de este caso, lo que lleva a considerar la influencia de la dimensión en esta clase de problemas.

El segundo grupo de lecciones está destinado a instruir al alumno en el problema de Dirichlet y análogos, v. gr., de Neumann y mixtos. Existiendo un cuarto Curso de análisis sobre teoría de funciones, parece que este grupo podría suprimirse del programa. En rigor son conocimientos muchos de ellos necesarios en Mecánica de flúidos, en Electricidad, etc., y por lo menos en sus lineas generales deben exponerse en un curso de Ecuaciones diferenciales, aunque sin entrar excesivamente en la demostración de ciertas propiedades, v. gr., sobre teoremas de analiticidad o puntos excepcionales de Wiener. Pero sí conviene que el alumno conozca lo que es la función de Green y el problema de Dirichlet, así como su resolución y casos singulares, por tratarse, además, de uno de los problemas célebres de la Matemática. En la teoría de funciones es donde cabrá, en efecto, profundizar en el conocimiento de las modalidades singulares estudiadas modernamente, pero no cabe desconocer en este curso la fórmula de Poisson, los teoremas de la media y las propiedades más elementales de las funciones armónicas definidas como soluciones de la ecuación de Laplace.

El grupo tercero es el análisis de la propagación por ondas; se comienza por la resolución de los casos más sencillos en que se dan los valores de la solución en un rectángulo de características o en curvas en el plano $x$, $y$, resolviendo el problema de Cauchy y dedicando especial atención a la propagación por las características de todas las particularidades de los datos, en parangón con lo que acontece en las elípticas. Se tratará de poner de manifiesto con todo relieve la noción de propagación y celeridad en la propagación, y dar idea lo más clara posible de las condiciones de continuidad y discontinuidad en los diversos elementos cinemáticos y dinámicos que ofrece el problema de propagación de ondas en medios flúidos compresibles o no.

El método de Riemann se hace objeto de análisis detenido y se aplica a diversos casos; también el de Volterra para ondas cilíndricas en la exposición de Goursat y en la clásica manera en que tan ilustre matemático sortea la inexistencia de la solución fundamental, pero conserva en todo momento el paralelismo con los casos en que esta solución existe (número par de dimensiones). Esta manera fué expuesta por Volterra en sus conferencias de Madrid del año pasado, y convendría que resonara en la clase de Ecuaciones diferenciales como un eco de su voz. Este grupo de lecciones se completa con algunos temas de las lecciones de Hadamard sobre el problema de Cauchy, París, 1932.

Un cuarto grupo comprende las ecuaciones de tipo parabólico. El programa agota el contenido de Goursat, donde se expone la solución fundamental de Holmgren-Levy. Comprende también una introducción a los métodos generales de las imágenes y de singularidades como fuentes y ojos, que son de tan corriente empleo en Física matemática.

Para el estudio de estos métodos el alumno puede servirse de las obras clásicas de Física matemática o de las que, como los tratados de Mises, de Webster, de Courant, de Scheffers, de Bateman, suelen reunir en forma más o menos compendiada las bases matemáticas de las teorías físicas. Por lo demás, en cada disciplina hay textos con abundante aplicación de métodos teóricos, por ejemplo, los tratados clásicos de Mathieu, Kirchhoff, Neumann, Helmholtz, Duhem y Poincaré; los de Maxwell, Lord Rayleigh y Jeans; de Carslaw sobre el calor, de Fraenkel sobre Electricidad; diversos volúmenes tamaños en las grandes enciclopedias de Física, etc., constituyen un panorama bibliográfico de gran extensión y alcance.

Se pregunta también en el programa sobre el uso de la paramétrica, como ejemplo de método en problemas de contorno. Este proceso indicado por Hilbert es análogo al de la función de Green; la paramétrica tiene una discontinuidad semejante y obedece a valores en el contorno, pero no satisface a ecuación diferencial alguna, y por lo tanto no plantea el problema previo de su existencia y el inmediato de su cálculo. En la aplicación que del método hace Hilbert en sus "Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen", Leipzig, 1912, se considera la superficie esférica como base o recinto y en ella la ecuación más general de tipo elíptico lineal. Se parte de la adjunta y con ella y la dada se forma la bilineal de primer orden que transforma al modo ordinario la integral de superficie en integral de contorno. Pero recorriendo éste en sentidos opuestos, resulta la integración de superficie extendida a toda la esfera y desaparece el contorno. Esta integral, de la forma $\iint \left(w\,L(z) - z\,M(w)\right) ds\,dt = 0$ en que $M(z)$ es la adjunta de $L(z)$, conduce a la solución de la ecuación diferencial $L(z) = f(s, t)$ en la superficie esférica, siendo $w$, la paramétrica, función de las coordenadas generales $s, t$ y del punto $\sigma, \tau$ que al aproximarse $s\,t$ a $\sigma, \tau$ es infinita logarítmica como el potencial en el plano; función simétrica de $s, t$, y $\sigma\,\tau$, continua, derivable cuanto se quiera en cualquier punto distinto del $\sigma\,\tau$. Pues en virtud de la anulación de la integral anterior, la solución de $L(z) = f(s, t)$ en la superficie esférica, resulta ser $\iint \left(wf - z\,M(w)\right) ds\,dt = -z(\sigma\,\tau)$. Esto supone, naturalmente, que la homogénea $L(z) = o$ no tiene solución. Si las tiene, también las tiene la adjunta $M(z) = o$ y para que $L(z) = f$ tenga solución es preciso la ortogonalidad de las soluciones de la adjunta $y\,f$. Hilbert da en la página 224 un medio de construir la paramétrica con las funciones que figuran en los coeficientes de la ecuación diferencial lineal de segundo orden.

Las cuatro últimas lecciones de esta parte se refieren a ecuaciones de orden superior y sistemas de ecuaciones en derivadas parciales. La Elasticidad, la Hidrodinámica, las ecuaciones de Maxwell y Dirac son los ejemplos típicos. Se estudian los valores propios y la propagación a lo largo de obstáculos, con especial análisis de las condiciones en los límites. La excelente obra de Levi Civita sobre propagación en ondas (Bolonia. 1931), y la ya mencionada de Hadamard, podrán ser de gran utilidad en el estudio de la lección 91.

La 92 es de orden más abstracto y se refiere principalmente a teoremas de existencia que abarquen casos más generales que los de la Kowalewsky; la escuela francesa ha sido pródiga en el análisis de este problema. (V. especialmente Riquier: "Les systèmes d'équations aux derivées partielles", París, 1910.—Idem fascículo XXXI del "Mémorial de Villat", París, 1928.—Véase también Janet, tomo XXI del "Mémorial" referido, y el volumen IV de la "Colección Juliá", París, 1929: "Leçons sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles.

Fué mi primera intención redactar este comentario en forma tal que pudiera servir como compendio y formulario; en éste, recogiendo las fórmulas fundamentales; en aquél, esquematizando los métodos; la premura y otros trabajos lo han dificultado. Pues el uso y manejo de un "resumen" rinde en Matemática servicios semejantes a los de los manuales de Ingeniería para los técnicos. Afortunadamente, existe la edición alemana del "Pascal".

## IX

En el complemento al programa se han reunido materias que o forman parte del texto, tales como Ecuaciones integrales y Cálculo de variaciones, o constituyen conocimientos que interesan al que estudia otras disciplinas, materias de las que fuera difícil haber en otras clases la oportunidad de una orientación. Siquiera sea ésta la del programa, interesa señalar su existencia cuando cualesquiera circunstancias impidan entrar en su desarrollo. En este caso se hallan indudablemente aquellos estudios propios de la Física matemática, funciones que figuran en los estudios de Geología y Astronomía, Integrales recíprocas y transformadas y por lo tanto los problemas de espectro continuo, y funciones cuasi periódicas que intervienen en diversos problemas de Mecánica celeste y atómica. Además, la admirable contribución matemática de Volterra en la teoría de funcionales, bien merece que se inicie el alumno en ella. La integración cuantitativa sobre la base del cálculo de interpolación y diferencias, por lo menos en sus principios más rudimentarios debe figurar en el programa para dar una idea del desarrollo de este cálculo, de su semejanza con las ecuaciones diferenciales, mayor complicación por su carácter funcional más elevado, cálculo inverso y casos más corrientes que ofrece la prática en su planteo, v. gr., en ecuaciones lineales. Se completan estas lecciones con otras sobre Cálculo diferencial absoluto y algunas cuestiones modernas sobre Matrices, de interés en Ciencia pura y aplicada.

Las ecuaciones integrales han sido objeto de multitud de textos y tratados. La exposición de Goursat en su tomo II, debida a quien tanto ha contribuído a la teoría, es excelente desde todo punto de vista, y se consigna íntegra en el programa. Como aplicación se resuelven los problemas del potencial y análogos por densidades de capa simple y capa doble. El programa condensa mucho el contenido, pero se menciona en él no sólo la demostración de las soluciones, valores propios, funciones propias, etc., sino también el modo práctico de calcularlos numéricamente. Figuran en él los métodos de Schmidt, que me cupo la honra de explicar en 1908 en la Universidad de Barcelona y están expuestos en los "Mathematische Annalen", 1907 y 1908. Aparte del texto de Goursat, es recomendable el de Hilbert, ya mencionado, y la Enciclopedia Teubner, artículo de Hellinger Toeplitz. Para introducción, a quienes no posean el Goursat, el fascículo de los Cambridge Tracts de Bocher (1904), paréceme el más adecuado. Las integrales no lineales podrán estudiarse en l opublicado por Iglitsch en el tratado ya mencionado de Mises, Brunswick, 1931, completado con lo que ha aparecido después debido a Lichtenstein. (V. "Nichtlineare Integralgleichungen". Berlín, 1931.)

En el cálculo de variaciones se ha seguido el texto, completándolo con los estudios de extremales cerradas (cuya bibliografía completa aparecerá en una memoria de doctorado próxima a publicarse, debida al señor Romaña), y con la introducción del concepto de grupo según E. Noether. Para la introducción al cálculo de variaciones en extenso se recomienda Russel: "Recherches sur le calcul de variations: Journal de Liouville, 1926, pág. 395.

## X

La tercera parte podrá ser estudiada en el excelente tratado de Courant Hilbert sobre métodos de la Física matemática. Comienza con un estudio de integrales recíprocas, y funciones características y determinantes. Este tema, que fué abordado en mi discurso inaugural del curso de 1929 a 1930, tiene extensión tan considerable que haría falta un curso para exponerlo. En dicho discurso se contiene alguna bibliografía adecuada para orientación. Son cuestiones que abren paso al Cálculo funcional, a la representación por integrales definidas, al estudio de los espacios de Hilbert, al método simbólico de Heaviside, y por lo tanto merecen un estudio monográfico. Los métodos de Courant en el estudio de valores propios, el uso y manejo de la forma diferencial cuadrática y su paralelo con la forma algébrica cuadrática, las propiedades de máximo y mínimo, son de tal sencillez y de tal importancia que no podían faltar en un programa de ecuaciones integrales, y más existiendo un texto, bastante leído, que las expone con gran claridad.

La cuarta parte es un estudio especial de funciones harmónicas esféricas, elipsoidales y de Mathieu. La enseñanza de la Geodesia en las Facultades, de la Aerodinámica en algunas escuelas recientemente creadas, y ya, gracias a la personalidad de su director, dotadas de gran prestigio, de la Electricidad en Telecomunicación, desarrollada con gran amplitud entre ingenieros especialistas, la nueva asignatura de Geofísica, etc., necesitan de tales desarrollos a los que le han dedicado tres lecciones. En mi juventud, cuando era por todos leído Maxwell y la obra de Thomson y Tait había robado varias horas al sueño, había vivo estímulo por el conocimiento y manejo de tales funciones. Ya entonces estaba agotado el Heine, pero había un ejemplar en el Observatorio y lo leíamos en los intervalos de las clases de Astronomía en una mesa redonda situada en una sala de techo elevado que apenas lograba calentar la lumbre de un brasero. El frío exterior se compensaba con el ardiente deseo de saber. Para una introducción es suficiente el Neumann (F.), Tratado del potencial, Leipzig, 1887; más recientemente se ha editado el tratado de Wangerin, Leipzig, 1921 y 1922; el año pasado Hobson publicó en Cambridge un tomo de grandes dimensiones sobre la materia, que es desde entonces el más indicado como de consulta, en paridad con el de Watson, del mismo editor, sobre funciones cilíndricas, Cambridge, 1922. Ciertas obras especiales contienen también desarrollos sobre funciones esféricas, v. gr., la de Darwin sobre figuras elipsoidales, donde se transcribe la memoria de 1901 de las "Phylosophical Transactions", y el mismo tomo IV en la Mecánica de Apell sobre el equilibrio de una masa flúida animada de rotación y sometida a sus acciones mutuas.

Las funciones de Mathieu han sido objeto de análisis por parte de diversos autores modernos y el campo de sus aplicaciones ha venido extendiéndose, por lo que las consagramos una lección en el programa. Esta lección va seguida del planteo y resolución por vía de ejemplo, de uno de los problemas de mayor interés en la Física moderna y Técnica de propagación en medios periódicos. Elementos de referencia los puede hallar el estudiante muy numerosos, resumidos, por ejemplo, en el fascículo de Humbert del Memorial 1926, y en los "Ergebnisse der mathematischen Wissenschaften", 1932, fascículo de Strutt, Berlín.

Las funciones cuasi periódicas que antiguamente quedaban relegadas a la Mecánica celeste (series trigonométricas del tiempo, sin que los períodos sean harmónicos), han sido objeto de estudio recientemente y ya multitud de textos las han popularizado. Sobre ellas se dió en Madrid un coloquio en 1929. Se señala una lección para exponer sus propiedades fundamentales con referencia a las dos obras recientemente publicadas, del propio Bohr una en los "Ergebnisse der mathematischen Wisenschaften", 1932, y de Besicovitch en Cambridge, 1932, la otra. Dada la importancia del método de análisis de Weyl, se señala al estudioso su memoria "Integralgleichungen und fastperiodische Funktionen", publicada en los "Mathematische Annalen", 1926, volumen dedicado a la memoria de Riemann.

Las funciones cuasi periódicas presentan en la cuasi periodicidad una propiedad invariante en operaciones de suma y multiplicación, algunas veces también en división, derivación, integración y otros procesos límites. Aunque en la lección indicada se estudia principalmente el paralelo con las periódicas en su parte de desarrollo y representación, el interés de las funciones cuasi periódicas desde el punto de vista del Análisis no sólo se basa en el estudio de series trigonométricas más generales que las de Fourier, sino en la circunstancia de que, considerada la variable compleja y definida la función analítica cuasi periódica por $f(z + a i)$ cuasi igual a $f(z)$ para infinitos valores de $a$ enteros, su serie de Dirichlet no necesita que los coeficientes de $z$ en la exponencial formen una sucesión monotona decreciente. Pero dejando aparte estas aplicaciones, que interesan más a la teoría de funciones, aquellas constituyen hoy un capítulo interesante de las ecuaciones diferenciales y en diferencias finitas, no sólo como soluciones, sino por ofrecerse en varios problemas funciones de esta clase coeficientes de las derivadas (v. gr., en ecuaciones lineales).

Se dedican al Análisis funcional tres lecciones, tomando por base la "Teoría de las funcionales", del ilustre Volterra, editada en Madrid, completada por algunos estudios de aplicación a la Dinámica, iniciados por el propio Volterra en 1914, y que tratan los sistemas de puntos discretos como los gases y enjambres meteóricos, y los sistemas continuos, como hilos flexibles, estudiados en el espacio de infinitas dimensiones, pues son infinitos los parámetros que los determinan. Cada sistema viene caracterizado en cada una de sus configuraciones por un conjunto de funciones que pueden considerarse como "coordenadas". Las ecuaciones de Lagrange se convierten en integrodiferenciales; la métrica definida por la fuerza viva en un espacio ordinario de Riemann en los sistemas con un número finito de grados de libertad, se convierte en una variedad funcional con su métrica propia, y el grupo cinemático de movimientos en un grupo funcional con infinitos parámetros. (V. la tesis de Moisil, de la Universidad de Bucarest, *1929*.) Las contribuciones de la escuela francesa de Hadamard, Levy y Gateaux, responden a la pregunta sobre ecuaciones en derivadas funcionales. Los estudiosos que deseen especializarse en estas cuestiones podrán consultar como introducción el texto de Levy sobre Cálculo funcional, París, 1922, y el fascículo correspondiente del Memorial (1925). Para acrecentar el interés del estudioso, se hace referencia en el programa a las aplicaciones del Cálculo funcional a la Economía, teorías de Depreciación y Monopolio, cuestiones de Seguros de vida, de Herencia e Histéresis.

La segunda división en la parte segunda del complemento, abarca varias lecciones dedicadas a la Interpolación, Cálculo de diferencias, Teoría de la aproximación e integración cuantitativa de ecuaciones en derivadas parciales. Aun cuando el Cálculo de diferencias exigiría de por sí un programa, no se trata en estas lecciones de seguir paso a paso un texto como el Nordlund, Vorlesungen über Differenzenrechnung, Berlín, 1924, aunque se procure instruir en cuanto pueda tener mayor interés en las aplicaciones cuantitativas, insistiendo en aquellas cuestiones de más elevado alcance teórico, especialmente en las contribuciones de Poincaré, Birkhoff y Hilb. (V. pág. 300 y siguientes de la obra citada de Nordlund). Las lecciones sobre aproximación se encuentran desarrolladas principalmente en el tratado de Jackson, "The Theory of aproximation", N. York, 1930. Métodos para el cálculo numérico de ecuaciones en derivadas parciales pueden hallarse en artículos de Courant, Levy y Friederichs en las "Nachrichten" de Gotinga, en 1922, 1926 y 1929; diversos trabajos de Hencky, Wolf, Gerschgorin, Bergman, en la "Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik", años 1922, 1926, 1930, 1931; las dos memorias de Ritz y Trefftz, de donde arrancan los métodos a) de variación con las condiciones límites exactas y b) de ecuación diferencial o en diferencias con condiciones límites aproximadas, en el Crelle 1909 y Congreso de Mecánica aplicada de Zurich, 1926, respectivamente. (V. además, la memoria de Picone en los Rendiconti di Palermo, 1927) (*).

Dada la necesidad que del conocimiento de la Matemática de aplicación tienen físicos, economistas, ingenieros, etc., y la convicción de ser precisamente la Matemática que más han de necesitar en la práctica y que, por lo tanto, conviene mucho contribuir a su divulgación y desarrollo,

(*) Podrá consultarse también el fascículo 49 del Mémorial, donde Kriloff trata con abundante bibliografía los métodos de solución aproximada de los problemas de Física matemática, 1931, y el artículo del mismo autor en la "Revista matemática hispano-americana" del mismo año.

me ha parecido indispensable insistir en ese tema. Es de esperar que el manejo de los métodos numéricos y de cálculo gráfico y mecánico se extienda cada día más entre nosotros, que hemos tenido la fortuna de con? tar con un Torres Quevedo, cuyo nombre perdurará en la historia de los métodos mecánicos de resolución algébrica de ecuaciones, y que con tanto elogio es mencionado en multitud de obras extranjeras.

## XI

El programa termina con seis lecciones sobre Cálculo diferencial absoluto, matrices infinitas y grupos continuos finitos; en las dos primeras se pretende dar una idea del cálculo diferencial absoluto sobre la base del texto de Levi Civita traducido a varios idiomas (la última edición alemana es de 1928) y el de Plans, premiado por esta Academia (*). Las teorías de la Gravitación y Relatividad constituyen conocimientos clásicos para nuestra generación. Es preciso, pues, dotarla de la herramienta con la cual aparece la teoría de la dependencia del campo universal y la materia en su forma más cabal y adecuada, que permite expresar cómo la materia, en efecto, aun en su forma energética, influye en los elementos de referencia y deforma la retícula que sirve para describirla. Afortunadamente, el extraordinario interés que tales estudios han despertado ha originado tal cantidad de "instrucciones" para el uso y disposición del andamiaje, que, a poca atención que el tema dedique, el menos avisado resulta perfectamente impuesto. Y la cultura general en estas cuestiones determina evidentemente mayor y más rápido avance, pues nada empuja la investigación como la curiosidad convertida en obsesión irresistible. Y la curiosidad por saber de las relaciones de materia y radiación aún consideradas como elementos de una unidad superior, la singularidad del signo en las relaciones electromagnéticas y su ausencia en las gravitatorias, la transformación periódica global de una forma energética en otra, la penetración en entrañas cada vez más profundas de una estructura cada vez más pequeña y que al reducirse se diluye y esquiva la medida más

(*) V. también F. Peña: Sobre traslación paralela infinitesimal. "Revista Matemática Hispanoamericana", Madrid, 1924.

allá de una precisión determinada, sólo puede satisfacerse encuadrando el estudio en la retícula de un complejo espacio-tiempo especial, cuya imagen más clara deriva de la teoría de las superficies de Gauss, y en cuyos elementos figuran, por así decirlo, transportados, los fundamentales de la geometría intrínseca, determinados, como efectivamente sospechara el genio de Riemann y demostrara Einstein, por las energías de la masa y la radiación.

Lo que el programa exige se limita a lo que tiene interés principalmente físico, pues existiendo cátedra de Geometría diferencial, a ella tiene que estar encomendada la enseñanza de desarrollos más abstractos, especialmente sobre los invariantes diferenciales, que tienden a dar de la Geometría una definición más amplia de la que diera Klein en el Programa de Erlangen fundada en la noción de grupo (Vorlesungen über höhere Geometrie, editadas por Blaschke, Berlín, 1926); las nuevas nociones de espacios y sus invariantes conducen a ello, como indicaba Veblen en el Congreso de Bolonia de 1928. (V. del mismo autor "The Foundations of differential Geometry", Cambridge, 1932).

Las lecciones últimas se refieren a cuestiones objeto de investigación moderna. El estudioso las hallará desarrolladas principalmente en el tratado de Wintner: "Spektraltheorie der unendlichen Matrizen", Leipzig, 1929, y en las obras recientemente publicadas sobre aplicación de la Teoría de los grupos a los Cuantos. Sobre aplicaciones de los grupos, además de la obra fundamental de Weyl "Gruppentheorie und Quantenmechanik", en dos ediciones, Leipzig, 1928 y 1932, han aparecido en menos de un año otras tres en Alemania; de Wigner, 1931, Brunswick; de V. J. Waerden, 1932, Berlín, y de V. Neumann, también en 1932, Berlín. A un movimiento de tamaña importancia no puede menos de prestarse la atención debida, y por tal motivo se consignan algunas lecciones como preliminares para los que, estudiantes principalmente de Física, piensen dedicarse al estudio de su parte teórica o siquiera comprender el sentido y manejo de los métodos de cálculo que facilitan su progreso.

La introducción de la teoría de grupos en las cuestiones de mecánica atómica, es el único modo de establecer con rigor matemático las propiedades que las ecuaciones expresan y que por su dificultad especial es dificilísimo integrar. Además, para deducir propiedades y teoría, la integración numérica sirve para bien poco. El estudioso tiene en esta cuestión el ejemplo más claro y palpable de cómo es más útil en la discusión el examen cualitativo general (grupo de rotaciones que admite el átomo en el espacio de tres dimensiones, substitución de los mismos entre sí, y por lo tanto, grupo de permutaciones), que deriva de la misma hipótesis o imagen nacida del examen de la realidad observable, que el perseguir sobre la formulación de la correspondencia la deducción ciega del proceso resolutivo. Es un triunfo nuevo de la noción de grupo, o como el propio Weyl en el prólogo de su "Gruppentheorie und Quantenmechanik" expresa, de un nuevo aliento que parece animar la Física y aun la Matemática moderna, el sentido griego de la Forma que reclama la situación primordial que parecía haberle arrebatado el concepto de Número en los cimientos de la Lógica.

La lección 124 del programa está orientada principalmente en el tratado de V. der Waerden, ya mencionado, y en ella se pide la teoría de la representación de grupos por transformaciones lineales que tiene su origen en Frobenius, fué estudiada por Schur y desarrollada por Weyl. Resuelta que todos los números a que conduce la teoría de los cuantos son elementos fundamentales de representaciones de grupos.

La última lección se refiere a la teoría de los espacios de Hilbert, v. gr., según Neumann, "Grundlagen der Quantenmechanik, 1932, Berlín (*).

## XII

Cuantos comentarios se acumulan en este apéndice a la redacción del programa tienen por objeto servir de auxiliares, de primera orientación, completada con observaciones y consejos orales. Si éstos no pudiesen darse, son suficientes aquellas para que cualquier profesor de la asignatura o entendido en estas materias pueda hallarse suficientemente enterado de lo que se desea y pide, y todos han de ver el deseo de informar a la juventud estudiosa, de señalarle la extensión del horizonte que se ofrece a su contemplación y análisis y hasta cuyas fronteras podrán acompañarle los autores que se citan si los toma como guía, El estudio de las vías del saber y caminos de investigación que van abriéndose en el campo de la Ciencia matemática, me han llevado a adquirir cierto conocimiento del plan general de comunicaciones; paréceme, pues, estar en condiciones, como agente que conoce la geografía, de indicar al viajero el camino que conduce a determinada región. Las que yo he explorado con más ahinco se hallan al margen de ese plan, en un campo adjunto, el de

(*) El estudioso puede consultar al mismo fin, entre otros textos mencionados en la primera parte, la obra de Vitali: "Geometria nello spazio hilbertiano", editada en Bolonia, 1929.

la Mecánica racional, donde tal vez me sea dado aportar un grano de arena al grandioso dique que embalsa el caudal de nuestros conocimientos en tal disciplina.

La gran variedad de conocimientos que en el programa se consignan, su extensión y desarrollo, pueden dar la impresión de que sea imposible su adquisición ordenada y su dominio cómo deben dominarse los conceptos en la Matemática. El temor de que la extensión reduzca la profundidad y de que, aun con lo dicho en el capítulo III de esta segunda parte, se requiera un tiempo muy superior a un curso para la enseñanza de tales materias necesariamente acompañada de repeticiones, repasos, problemas y ejercicios escritos y orales, es perfectamente justificado. También lo es el que produce la contemplación de la enorme cantidad de revistas, textos, conferencias, cursos, coloquios, laboratorios y teorías que enriquecen la Didáctica hasta el punto de poderse preguntar si no habrá en todo ello un aparato monstruoso de formalismo, en desproporción inadecuada para la investigación de nuevos conceptos. Todos hemos leído cómo Lagrange compadecía a los que habían de sucederle, porque él tuvo que leer a Euler y aun hubo de añadir no poco, agravando la tarea de sus sucesores. En otro orden, es la crisis de superproducción que presenciamos en la Técnica.

Ahora bien; mi opinión es francamente optimista. La crisis técnica que sigue oscilaciones periódicas no del todo desconocidas, viene forzada, y no sólo por el estudio y el trabajo y el adelanto. Viene obligada por un exceso de confianza en el éxito e inercia de especulaciones que no pudieron prolongarse y cuya llama, caldeada por la codicia, la reflexión y buena fe hubieran debido sofocar oportuna y cautelosamente. ¿Pero quién renegará de las comodidades de la Civilización y renunciará a las conquistas de la Técnica?

El problema tiene y tendrá solución, como lo tiene el exceso de producción matemática, acaso sostenido alguna vez por móviles económicos, y lo tiene, no sólo por ser éstos fácilmente corregibles, sino por razones de método primero, por razones de imprescindibilidad después. Razones de método son evidentes. Por ventura, en el mismo tiempo se recorre una teoría hasta su más moderno desarrollo, que se necesitaba antes para estudiar una parte mucho menor; porque la Ciencia consiste también en reconocer las analogías de hechos y conceptos fundiéndolos en una unidad superior, que, a veces, y por serlo, resulta de mayor claridad y sencillez. Esta unidad exige nuevos conceptos, los descubre ella misma en su fuerza de síntesis; me atrevo a decir que los crea.

La pretensión de lanzar al estudiante a combate con los textos aquí enumerados, sería ramo de locura. Pero el Profesor se debe al Estado, no sólo para contribuir al progreso mundial, que a ésto alcanzan pocos, sino para resolver el problema de orientar, despertar afición, descubrir vocación y aptitud. Crea el genio; y el que no lo es, educa. No pretenderá el geógrafo instruir en Geografía recorriendo a pie y en plazo brefe un muy dilatado territorio, pero sí comenzará por señalar las viejas rutas del comercio y del tráfico; explicará la triple razón que hubo de determinarlas, topográfica, política y estratégica; y al más curioso de un valle, de una cuenca o comarca dirá los elementos históricos y de relación, el clima, la geología, la antropología, la industria y agricultura, dándole a conocer las fuentes en que podrá adelantar en sus conocimientos y donde se compendia lo que otros hicieron; comentará cómo en el trabajo del último investigador, acaso del genio antiguo, se descubren y poseen a la vez razones e ideas que dan la clave de multitud de preguntas y hacen innecesario el análisis que llevó a conclusiones ya por todos reconocidas.

Y la aptitud tiene sus gradaciones. Puede ser tal que se baste y eduque automáticamente y vea el límite infranqueable en cuanto alce la vista al horizonte ignorado. Para hacer esta aptitud posible, para preparar su advenimiento y reconocerla, hay que tener montado todo el tinglado de la cultura y cuidar en él de todos los enlaces y celosías. Su apariencia monstruosa y complicada se simplifica cada dia en sus detalles y alcanza cada vez mayores ámbitos; como el puente antiguo de mallas apretadas y tupidas se substituye en la construcción moderna por estructuras transparentes salvando luces considerables.

## FINAL

Yo quisiera, señores Académicos, terminar con palabras que tradujeran nuevamente, como al empezar el discurso, los sentimientos de gratitud y de afecto que embargan mi ánimo. Corrido de mí mismo, no acierto a calcular lo que separa mi deseo de la realidad que puedo ofrendaros, y mi confusión se hace tamaña si acudo a préstamo de la memoria, sugiriendo el recuerdo de quienes he recibido enseñanza, o evocando las contemporáneas figuras de la Ciencia matemática cultivada con aptitud generadora de bien merecida fama.

Confiemos en nuestro esfuerzo, en la voluntad de saber, sin desfallecimiento y con fé. Importa cavar en lo profundo para arraigar en tierra fértil. Cualquiera que sea el medio en que hayamos de desenvolvernos, la corriente que nos arrastre y el escollo que se tercie en la derrota, vibre la hélice de nuestro navío impulsada por el fuego de la Voluntad y gire el timón sorteando adversidades dirigido por la Inteligencia, serena y templada. Si la nave no llega a puerto, habremos al menos instruído a la marinería para que un día resplandezca su mirada ante amaneceres más claros. ¡Es preciso navegar!

La Academia de Ciencias, buque de alto bordo y de gloriosos destinos, dirigido por insigne piloto, navega seguro en dirección a una meta de siempre mayor prestigio. En aquella y en la figura no menos ilustre del timonel perpetuo transparenta con espontánea naturalidad ese núcleo espiritual de característica nobleza genuinamente española, de que sería un crimen, no ya el menosprecio, sino la irreverencia. Porque doquiera se hayan ensalzado las cualidades de la raza, el mayor homenaje ha correspondido al modo magnánimo, que no en vano siglos de porfía y de gesta han hecho legendario en España.

Madrid.—Septiembre de 1932.

## AL PRECEDENTE DISCURSO CONTESTA EN NOMBRE DE LA ACADEMIA D. J. REY PASTOR EN LOS SIGUIENTES TERMINOS:

SEÑORES:

Feliz oportunidad es la que me depara nuestro querido presidente de rendir público homenaje al antiguo académico, que hoy se incorpora como titular, a la vez que me brinda ocasión para dedicar un cariñoso recuerdo al llorado colega que en nombre de esta Corporación hubo de darme la bienvenida cuando años atrás fuí llamado a colaborar en sus tareas.

Poco tiempo conocí a Krahe, y fugaces cual relámpagos fueron los momentos de nuestro trato; pero suficientes para estimar su caballerosidad y admirar su clara inteligencia. Krahe sintió, acaso más vivamente que ningún otro coetáneo suyo, la sed de investigación, la voluptuosidad del problema (*). Dentro del estrecho marco de la matemática elemental en que tuvo que encerrar su vocación truncada y aprovechando las escasas horas libres que le dejaba la agobiadora tarea docente, encontraba íntimo placer en resolver cuestiones interesantes de Geometría del triángulo, relacionadas con el Algebra y en plantearse problemas de Geometría diferencial, que enviaba a la revista "Mathesis" y otras publicaciones análogas.

La familia y la ciencia se disputaron su afecto, y llenaban su alma idealista condenada a galera perpetua; en ambos sentimientos elevados encontró Krahe el solaz espiritual que fortalecía y templaba su espíritu para la monótona labor profesional, bien al contrario del gigante mitológico que, como otros muchos, ni gigantes ni mitológicos, necesitaba tocar el impuro suelo para recobrar sus fuerzas y proseguir la lucha.

(*) Justo y oportuno es rendir en esta ocasión el homenaje de un recuerdo a otro positivo valor, desconocido por el vulgo, que realizó en los comienzos de su carrera valiosos trabajos de investigación, también dentro del campo elemental. Me refiero al que fué sabio director del Instituto de Toledo, D. Ventura Reyes Prósper.

Con ser temperamentos tan dispares encuentro aquí, en esta doble y purísima afección, coartada por las trabas de la vida, un punto de semejanza con la altísima figura que por derecho propio e indiscutible viene hoy a ocupar su vacante entre nosotros.

De darle la bienvenida y de escribir su elogio me ha encargado la Presidencia; pero no de analizar su obra proteiforme y multifacética, ardua tarea que haría necesaria la conjunción de matemáticos, físicos e ingenieros de múltiples especialidades. Debo, pues, renunciar a tamaña empresa, y mucho más fácil será para mí escudarme con prestigios extraños bien forjados y trazar con mano ajena la semblanza de nuestro nuevo colega.

No puedo atestiguar los juicios encomiásticos que Einstein hubo de dedicarle cuando estuvo entre nosotros; pero permítaseme un recuerdo personal que los corrobora. Llegado a Buenos Aires el mismo día en que el glorioso físico se embarcaba hacia Europa, ya terminado su ciclo de conferencias en la Argentina, sólo pude cruzar con él breves palabras, entre el maremágnum de visitantes que acudieron al vapor a despedirle; y al preguntarle por las impresiones que había recibido en su reciente viaje por España, me dijo literalmente: "He descubierto un hombre extraordinario: Terradas." En esta sola palabra estaba condensada la impresión más fuerte de todo lo visto y conocido entre nosotros.

Con ser tan valioso este juicio, no es único en labios autorizados: es Weyl quien imprime en el frontispicio de su obra sobre el problema del espacio la más expresiva dedicatoria que nunca vi dirigida a sabio alguno; y son Severi y Broggi y muchos otros quienes se maravillan de que sea posible conocer los últimos trabajos matemáticos para quien cultiva a la par tantas y tan variadas disciplinas; y Polya, con su expresivo estilo, se pregunta si "están locos los españoles", cuando se entera de que obligamos a hacer oposiciones a quien durante un cuarto de siglo superó a todos sus colegas; y en el Congreso de Bolonia se le nombra Vicepresidente, por iniciativa de Pincherle; y en el reciente de Zürich es elegido miembro del Comité de eminencias encargado de reorganizar la fenecida Unión internacional de matemáticos.

Léase al final de estos discursos la lista de sus trabajos; pero con ser tan copiosa y variada, no expresa suficientemente la inmensa cantidad que en ellos se encierra de pensamiento original. Para no citar sino un ejemplo, en ella figuran, bajo el inexpresivo título de *conferencias*, verdaderos tratados en que se expone el estado actual de toda una teoría, con todo su rico caudal bibliográfico; y modestamente englobados bajo una sola cifra, varios discursos académicos; pero justo es hacer notar que cada uno de ellos es una verdadera monografía, densa en ideas, elegante de estilo y rica en erudición.

No es exacto, sin embargo, este calificativo; el erudito sólo siente la voluptuosidad del dato, con furor de coleccionista; es el glotón de conocimientos que deglute copiosamente, sin reparar en calidades; así como el *dilettante,* que se complace en desflorar con liviana curiosidad todos los manjares delicados, sin nutrirse de ninguno, es el goloso de la inteligencia; pero nuestro colega, de paladar altamente refinado, es más bien el sibarita de la sabiduría, capaz de saborear con delectación la suprema armonía de las ideas más excelsas y recientes, desdeñando los platos recalentados y las menudas migajas con que otros suelen alimentarse.

Avido siempre de conocer los más recientes progresos de todas las ciencias que su telescópica visión abarca, asombra su certera elección de los problemas capitales de cada una; y gracias a ella ha podido desarrollar, año tras año, cursos tan variados y difíciles sobre las disciplinas más dispares, con la máxima competencia, con el máximo entusiasmo y con el máximo desinterés.

Tal como se entiende el magisterio entre nosotros, cada profesor, cualquiera que sea su grado, debe elaborar en los primeros años de su carrera el programa y contenido de un curso, cuya repetición periódica suele llenar su vida entera. Cada uno de los veinte cursos totalmente diversos desarrollados por el eximio profesor en los más heterogéneos institutos de cultura superior españoles y americanos representa, pues, con el metro usual entre nosotros, la labor constructiva de toda una vida de profesor medio. La conclusión obligada de tales premisas parecería tan hiperbólica que no conviene enunciarla.

Hubiérase limitado a realizar esta labor titánica y quizá le perdonaríamos tamaña superioridad. Pero su actividad pasmosa, que desborda el estrecho marco de nuestra modesta vida intelectual, encontró todavía otros cauces para su exuberante vitalidad; y organizó importantes centros de cultura, y construyó magnas obras de ingeniería y dirigió grandes empresas. Los universitarios no podemos menos de admirar tales obras, ajenas a nuestra competencia, aunque procurando atenuar su mérito con los argumentos que consienta nuestra ignorancia técnica; pero no es posible ver con buenos ojos que así nos humille con su multiforme producción. Y todavía hay algo peor...; mas el pecado es tan grave, que prefiero valerme de otro ejemplo.

Más de una vez he oído a ciertos benevolentes críticos acres insinuaciones contra la más venerable figura de nuestro modesto mundo científico, por tener ciertos datos de que sus libros se venden bien y hasta le reportan algunos ingresos. Que alcance fama, pase; ya que no está en nuestras manos el impedirlo; pero ¿fama y provecho? ¡Eso es intolerable!

Insólito parecerá a muchos, por salirse de nuestras costumbres, el discurso que acabamos de escuchar; pero no menos inadecuada al uso corriente ha de sonar esta contestación, que más parece una acusación fiscal; y para que sea completa la indagatoria y para saber a ciencia cierta qué metro debemos aplicar para la valoración de su obra científica, es imprescindible aclarar previamente este punto esencial: el señor Terradas, ¿es derechista o izquierdista? Para ahorrarnos complicaciones, hay que reducir a este simplicísimo esquema todo el complejo mundo espiritual; y este cómodo encasillado nos evitará el enojoso trabajo de tener que analizar las obras.

Este método de valoración tan simple y expeditivo tiene, sin embargo, sus fallas. ¿Quién no recuerda la perplejidad de nuestras derechas y de nuestras izquierdas cuando, no hace muchos años, se trató de encasillar a Ganivet? Perdida su memoria entre los hielos nórdicos, se habían olvidado de clasificarlo; pero al llegar sus restos y leer apresuradamente sus obras, resultó que unos y otros encontraban razones para apropiárselo.

Todo espíritu refinado y, por tanto, complejo, escapa del simplicísimo esquema de los dos signos, + y —, que sólo es aplicable, como todos saben, a las magnitudes unidimensionales. Extremismo es simplismo, es linealidad, es carencia de amplitud y de profundidad.

Espíritu tolerante y comprensivo del aspecto defendible que existe en todas las tendencias políticas, aun en las más distantes del propio pensamiento, nuestro biografiado aceptó las invitaciones con que se le brindaba oportunidad de laborar por el resurgimiento de su patria.

Bajo la Mancomunidad catalana tuvo ocasión de desplegar sus múltiples actividades en la organización del *Institut d'estudis catalans*, y en la construcción de la red telefónica, de los ferrocarriles secundarios, ...; obra inmensa, exiguamente retribuída, que le deparó la satisfacción de contribuir al engrandecimiento de la tierra de sus mayores.

Y viendo en el llamamiento de la primera dictadura la posibilidad de laborar por España, sacrificó sus opiniones íntimas para trabajar conjuntamente con otros distinguidos compañeros nuestros, dentro del radio de sus posibilidades; y lo mismo habría hecho bajo cualquier régimen político orientado hacia el punto cardinal opuesto.

Aunque en verdad son superfluos y hasta resultan impertinentes los distingos elementales, como la incomprensión suele confundir toscamente los dos polos del orbe político y la mala voluntad está siempre en acecho buscando los flancos débiles para arremeter con su ataque virulento, bueno será aludir al antagonismo esencial entre el apolítico y el pampolítico, entre el equilibrado y el equilibrista.

En un polo de la gama ética está el técnico puro, respetuoso de todos los poderes constituídos, que nada necesita ni desea de la política y, ejerciendo su profesión al margen de todos los partidos, sin alistarse en ninguno, de todos recibe a la postre rudos golpes; en el otro están los evolucionistas habilidosos que, haciendo técnica de la política, en todos los partidos se inscriben oportunamente sin remilgos, y de todos sacan provecho, libando alternativamente las flores de todo color, para elaborar su propio panal.

Tolerancia para todas las ideas, caballerosidad en la propia conducta y benevolencia para el proceder ajeno; he aquí las normas éticas de nuestro eminente compañero, que rigen su vida ejemplar. Para quienes no lo conocieran sirva de prueba su discurso, en que se transparenta el dolor, pero limpio de rencores.

* * *

Hora es ya, para no alterar la costumbre establecida, de decir algo, siquiera sea brevísimamente, sobre el tema tan concienzudamente desarrollado. Usando el mismo símil náutico del discurso glosado, debo confesar paladinamente que para intentar el abordaje a la inmensa nave de las ecuaciones diferenciales con la débil navecilla de mis conocimientos, sólo dispongo de algunas estrechas, mas para mí sólidas pasarelas, que puedan servirme de puentes.

Una de ellas está formada por ciertas funciones de semiperiodicidad circular que defino por ecuaciones diferenciales de tipo sencillo y que generalizan las funciones que he llamado cíclicas en algunos trabajos hace tiempo publicados. También podría intentar el abordaje por el problema de Dirichlet, del que dí en años lejanos una solución muy elemental; o por la representación conforme, que está con él estrechamente ligada. Y otra pasarela me depararían las curvas W a que me dediqué una breve temporada. E igualmente podría servirme de las ecuaciones diferenciales cuyos coeficientes son funciones semianalíticas en un punto, con el sentido que dí a esta palabra en trabajos anteriores, tema que desde no ha muchos años vengo forjando en mi modesto taller.

Fácil esfuerzo sería el hacer pie sobre éstas para mí sólidas piedras y empinarme ante vosotros fingiendo elevada talla y aun aparentando dilatada visión del panorama de la teoría completa; pero no parece oportuno recargar más todavía la sesión con densos y para muchos ininteligibles conceptos. Bien está en el discurso capital; la ciencia tiene sus fueros, la academia sus costumbres y el recipiendario sus prerrogativas; pero disparar nuevas andanadas de tecnicismos sobre la multitud inerme, sería crueldad innecesaria.

Y además de esta razón de oportunidad, ¿qué significan esta media docena de rincones, para mí claros y apacibles, con los que estoy encariñado por haberlos labrado con mis manos, dentro del inmenso panorama que nos ha descrito magistralmente quien desde mucho antes de nacer yo a la vida científica ya venía ocupándose de sus problemas y desde hace algún tiempo viene consagrándose a su estudio intenso?

Panorama he dicho donde dice programa su autor, con grave riesgo de no ser interpretado rectamente. Porque estamos acostumbrados a que cada profesor vierta en su libro o en su programa todo aquello que sabe nos años de estudio y de práctica, todo el jugo científico de cada catedrá-
El libro de texto y su programa son los moldes en que cuaja, tras algunos años de estudio y de práctica, todo el jugo científico de cada catedrático, quien así conquista el derecho a la inactividad vitalicia, bastándole tener en buen estado de conservación éste su coágulo de sabiduría, para merecer bien de las gentes. Pero la admirable elasticidad mental del egregio catedrático, su eterna inquietud y su inagotable sed de aprender y enseñar se conjuran de consuno contra tales cristalizaciones de la ciencia y ha preferido ensayar el sistema consuetudinario en otros países de más cuidada tradición científica, a saber: el curso variable año tras año, que a la par de ofrecer en un largo ciclo de promociones estudiantiles una visión amplísima de todas las provincias de cada teoría, para que entre todos lo sepan todo, obliga al profesor a la eterna disciplina del estudio. Frente al lema que parece regir a muchos profesores de nuestros centros superiores de cultura: "semper docentis", hay que resucitar el viejo precepto de las universidades medioevales: "semper discentis".

Quizás parezca excesivamente elevado el nivel de este programa para los futuros profesores de Instituto que forman el núcleo más numeroso de la Facultad; pero no lo es, seguramente, dada su estructura de piezas intercambiables cada año, para los aspirantes al título de doctor en Ciencias Exactas y aun en Físicas; y como el incomprensible plan de estudios no hace distingos ni bifurcaciones, olvidando la formación metodológica y aun didáctica para unos y el adiestramiento en la investigación para los otros, limitándose a establecer entre ambas orientaciones esencialmente distintas la simple diferencia de una tesis, forzoso será sacrificar uno de los dos miembros de ésta para mí ininteligible ecuación.

Sigan, pues, como hasta ahora, preparándose a su manera los aspirantes al magisterio de segundo grado, esto es, adiestrándose para la acrobacia de las oposiciones, y confiemos en que algunos se salven milagrosamente de tal amaneramiento, que suele llamarse formación del profesorado, cuando en verdad debiera llamarse deformación. Admitida así, al parecer con general beneplácito, la enseñanza meramente informativa, el aditamento de tópicos elevados, aunque no lleguen a ser asimilados, o quizás precisamente por esto, no ha de causar sensible daño a la mayoría de los aspirantes a la licenciatura, y en cambio, para la selecta minoría que llegue a penetrar en ellos tendrá cierta eficacia educativa; y para los futuros profesores universitarios, los varios capítulos distinguidos con asterisco en el programa podrán señalarles diversas direcciones de especialización.

No puedo, sin embargo, disimular algunos reparos a su trabajo. Hubiera redactado un programa a la manera usual, reflejo de cualquiera de los clásicos tratados elementales que sirven de introducción a esta teoría, y no habría herido en lo hondo nuestros más íntimos sentimientos de dignidad profesional; pero presentar este programa repleto de nombres exóticos, en que se refleja el estado actual de la teoría completa, hasta sus progresos más recientes, tiene las trazas de un alarde intolerable, rayano en la pedantería.

Cierta admiradora de un conocido pintor inglés díjole una vez que en su opinión sincera él y Velázquez eran los más grandes maestros de todos los tiempos en el arte pictórico; lisonja que retrucó humorísticamente diciéndole: "Señora, ¿qué necesidad tiene usted de recordar a Velázquez?"

Nuestro nuevo compañero expresa en el discurso su alta estimación por todos nosotros, y a todos nos dedica lisonjeras alabanzas que, en nombre propio y ajeno, debo agradecer; pero ¿qué necesidad tenia de mentar a Poincaré?

Bien está, en ocasión tan propicia, cantar loas a Lagrange y Cauchy, a Green y Dirichlet, pues hasta ellos alcanza el círculo de nuestros conocimientos; pero ¿a qué hostigar nuestros celos científicos con este desfile de contemporáneos y aun amigos nuestros, hombres de nuestra hechura y de nuestra edad, que consagran su actividad a crear ciencia mientras nosotros necesitamos todas nuestras energías para hacer discursos y oposiciones y para idear todas las trabas posibles a quien pretenda superar nuestro sano nivel democrático?

Estos son nuestros reparos, de índole excesivamente personal; los del público serán ciertamente de categoría más elevada. Hubiérase limitado el recipiendario a encomiar la producción española, y su discurso habría sido optimista y patriótico, tanto más cuanto más sin medida hubiera manejado el ditirambo; pero nuestro colega sabe demasiado para contentarse y contentarnos con tan poco; cargue, pues, con el sambenito del pesimismo extranjerizante.

Con las oposiciones hemos topado, Sancho amigo; y este inevitable tropiezo trae a mi memoria una entrevista con el famoso matemático Young, profesor de Camdridge y de Calcutta, en cierta lejana ocasión en que se cruzaron nuestros periplos. Preguntábame con vivo interés por el método español para la elección de profesores, y al informarle menudamente del complicado mecanismo de las oposiciones, me interrumpió diciendo: "pero con ese sistema de tortura ¡no hay en el mundo ningún matemático de valor que pudiera llegar a ser profesor en España!"

Proposición cierta, como también lo es su recíproca; pues cada estudioso de los nuestros suele invertir los mejores años de su vida en preparar y hacer oposiciones, y los restantes en descansar de ellas.

Preguntábame asimismo el egregio colega británico qué clase de homenaje suelen tributar los universitarios españoles a los maestros más distinguidos por su labor docente y científica al celebrar las efemérides de sus bodas con la cátedra; y quedé perplejo sin saber qué contestarle; pero hoy habría podido darle la fórmula concreta: cuando se trata de cualquiera de los mediocres, que ni siquiera vegetan (porque vegetar ya es crecer), nadie se entera de tales aniversarios; pero cuando el profesor descuella excesivamente, cuando durante un cuarto de siglo, además de cumplir la simplicísima y monótona tarea que el Estado impone, ha desarrollado una intensa y desinteresada actividad docente de alto vuelo, tanto universitaria como extrauniversitaria; cuando se trata de rendir homenaje a la obra más extensa de importación de ciencia, tan actual como elevada, que se haya conocido en España en toda la Edad moderna, entonces las bodas de plata con las primeras oposiciones se celebran con nuevas oposiciones. No se vea, sin embargo, intención perversa en estas refinadas torturas que horripilaban al geómetra inglés; se imponen con el mejor deseo, para dar a los profesores veteranos ocasión de lucimiento mnemotécnico, a la par que se proporciona un divertido espectáculo de acrobacia, grato a la juventud deportiva.

Mas no temáis que por la rampa de estas leves ironías me deslice hacia el peligroso terreno personal; preferible es elevarse a la serena región de las causas generales de nuestros usos y de nuestra organización.

* * *

Cada uno de nuestros movimientos es función de tantas variables y nuestro espíritu flota en un campo de fuerzas tan complejas y misteriosas, que sería imposible averiguar cuál sea el recremento de autodeterminación en cada uno de nuestros actos; cuál sea la componente del movimiento que pueda atribuirse al propio motor, al libre albedrío. No parece admisible la hipótesis fatalista que considera a cada individuo como barco a la deriva en un mar de fuerzas cósmicas o biológicas; pero la hipótesis de un determinismo estadístico para las grandes colectividades ya parece más plausible y hasta se impone como corolario de la ley de los grandes números, que postula la compensación de esas numerosísimas pero pequeñas componentes arbitrarias, de signos y direcciones muy diversos.

Mas no se trata en modo alguno de aquel determinismo simplicísimo que el siglo XVIII plasmó en las ecuaciones diferenciales, haciendo derivar el porvenir de cada fenómeno del solo conocimiento de su estado presente y de los anteriores infinitamente próximos. Ni siquiera es el moderno determinismo hereditario que en sus casos más simples se traduce en ecuaciones integro-diferenciales, de numerosas y aun infinitas variables. Es una herencia de índole mucho más compleja, no expresable por los símbolos del Análisis Matemático.

Cada hombre es hijo de su tierra y de su tiempo; pero entiéndase bién: no sólo se es hijo del momento en que se vive, sino de todo el intervalo histórico transcurrido hasta ese momento; de todo lo acaecido en ese suelo, con preponderancia a lo que haya acontecido en otros suelos.

Es la herencia propia y también la ajena; es la triple herencia biológica, geográfica e histórica.

Estas son las grandes fuerzas que mueven a las muchedumbres humanas, mucho más análogas de lo que se cree a las muchedumbres de moléculas; y así se parece cada vez más la Sociología a la Biología y más se acerca la Biología a la Física. Pero si se acepta esta hipótesis, forzoso es admitir su corolario de la inconsciencia y la irresponsabilidad de las muchedumbres.

A ciertas características del ambiente español hemos aludido en algunos pasajes; y no por ser exclusivas nuestras, sino por darse en forma acentuada, como fruto obligado de nuestro pasado histórico. Así, por ejemplo, la falta de medida en las valoraciones, tanto en sentido encomiástico como peyorativo, es ante todo desconocimiento de patrones universales, fruto de ignorancia; y ésta es hija a su vez de todo un complejo histórico que ahora no es posible analizar; la pasión, que un distinguido escritor ha señalado como característica española, mejor diríamos la vehemencia en el apasionamiento, es, quizás, efecto telúrico, simple reflejo de la vehemencia y brusquedad del paisaje; y la ruín envidia hacia la prosperidad ajena, es herencia de todo un pasado de pobreza y aun miseria económica; y la eterna pelea de bandos tan antagónicos como incomprensivos, es el rezago de la lucha secular entre moros y cristianos; y el carácter puntilloso que tanto dificulta el normal funcionamiento de nuestros centros de estudio e investigación, es herencia del pundonoroso caballero medioeval; y del finchado hidalgo procede probablemente el prurito, tan acentuado en los haraganes, de exigir de los demás lo que deberían hacer, sin dar importancia ni aun parar mientes en todo lo que hayan producido, ni ocurrírseles nunca el señalarse tarea a sí mismos.

Hacer justicia es poner en lo justo, es ajustar; pero, refiriéndonos exclusivamente al orden intelectual, en vez del *ad-justus,* que es respeto a la jerarquía, al derecho, suele entenderse en España la otra etimología de ajustar, el *ad-juxta* (al lado de), que es emparejamiento, nivelación, que significa rebajar y aun destruir lo que destaca y sobresale. Tampoco debemos, sin embargo, protestar contra lo que es fatal e inevitable, como una ley cósmica; pues el mismo viento que eleva y acrece los médanos en los suelos ondulados con altos relieves, deshace los montículos que forma el azar en la desierta y monótona playa.

Conscientes de estas características que por ser nuestras debemos amar, ni avergonzados ni orgullosos, como ajenas a nuestra voluntad colectiva, ellas deben formar el supuesto obligado, el basamento forzoso de toda organización encaminada a propulsar la creación teorética, tan exigua y deficiente en todos los ramos del conocer.

Refiriéndonos muy particularmente a los estudios físico-matemáticos, ¿que orientación convendría seguir, compatible con la modestia de nuestra economía? Dos rumbos cardinales se ofrecen a nuestra perspectiva, y en este punto de encrucijada asoma nuestra amistosa discrepancia con el querido compañero.

¿Debemos consagrar todos nuestros esfuerzos a la previa tarea de asimilar la Matemática y la Física enteras y a difundirlas mediante cursos y conferencias, dilatando así nuestro escaso patrimonio hasta dominar todo el actual imperio físico-matemático antes de pensar en extenderlo?

¿Será preciso, por el contrario, renunciar a esta grandiosa aspiración y conformarnos modestamente con preparar reducidos equipos de estudiosos que a marchas forzadas por estrechas sendas y despreocupados del resto del paisaje alcancen siquiera algunos puntos fronterizos con la *terra incognita,* y hasta logren hacer en ella incursiones y pequeñas conquistas?

Es el primer rumbo el elegido por mi admirado compañero de viaje, como cuadra a sus extraordinarias aptitudes y a su insaciable sed de sabiduría. La segunda orientación, la única que consienten mis escasas fuerzas, ha sido la ensayada en tierras lejanas, por no consentirlo aquí, según dicen, nuestra rígida y arcaica legislación.

He aquí, frente a frente, dos concepciones de la ciencia y de la vida. La primera es un amor platónico y contemplativo, con arrebatos de éxtasis y rayano en el misticismo; la otra es el amor prolífico que nos impele con interior ímpetu irresistible, con verdadero apetito carnal, aun a sabiendas de que serán raquíticos los seres engendrados, a perpetuarnos en la ciencia.

De un lado está el gran señor, que se complace en mostrar a los visitantes las estancias de sus castillos y los inmensos feudos conquistados por antepasados, remotos en el tiempo y lejanos en el espacio; posesiones tan valiosas y tan extensas, que el conocerlas exige incansable actividad; y esfuerzos muy duros el conservarlas decorosamente.

Al otro lado, el modesto artesano que a costa de sacrificios heroicos construye con sus propias manos humildísima casita en el menguado solar a que alcanzaron sus recursos.

Algo más que casitas construyó con sus manos el gran señor que por breve tiempo viene a honrarnos con su compañía; baste recordar su magnífico estudio del movimiento de hilos según curvas, que pasó íntegro a tratados especiales; pero su espíritu alado ama las alturas desde donde se dominan más dilatados horizontes. Le horrorizaría confinarse de por vida en el estrecho calabozo de un capítulo de la ciencia, como es preciso a los hombres vulgares para hacerla avanzar, y prefiere volar hasta la celestial región donde se contemplan de cerca las almas de los genios máximos ungidas con óleo de eternidad.

Respetemos sus predilecciones y no incurramos en aquel lamentable prurito, a que antes aludí, de señalar tarea a los demás, manía siempre impertinente, que en este caso lindaría con la estulticia. Para todos los hombres laboriosos hay sitio bajo el sol. Para todos hay quehacer donde tanto hay por hacer.

Necesaria para nuestra satisfacción personal es la visión panorámica de la ciencia y necesaria para nuestro prestigio colectivo es la investigación. Lo que puede asegurarse ciegamente es que si en el arcano del porvenir está escrito que algún hombre de nuestra sangre y de nuestra lengua ha de crear algo verdaderamente grande, capaz de resarcirnos de nuestra legendaria pobreza científica, no será de los dotados de visión microscópica, aunque ciertamente son tan necesarios para el progreso; ni de los confinados entre las paredes de una estrecha especialidad, donde fatalmente se adquiere incurable miopía de pensamiento y se atrofia el sentido de la perspectiva.

Si los poderes públicos, y muy especialmente sus asesores letrados, a la vez que dedican meritísimo y nunca bastante ponderado esfuerzo a la difusión de la cultura elemental, desean en verdad que la ciencia teórica arraigue en nuestro suelo, deberán hacer un distingo de problemas y adoptar una dualidad de procedimientos, siguiendo en esto la admirable evolución del gobierno ruso. Bien está la igualdad niveladora en los principios básicos de toda cultura y de toda educación; mas, para enfilar el problema de la cultura superior con rumbo hacia las costas abruptas de la creación original, es forzoso virar en redondo, dando popa a la orientación igualitaria. Porque Ciencia es aristocracia; la inteligencia es señera.

Hay que descubrir en todas las capas sociales las vocaciones científicas y cuidarlas mimosamente, como a plantas de invernadero, sin reparar en sacrificios, hasta que su vegetación ya tupida asegure su propia perpetuidad. Hay que reajustar los valores culturales; pero no con la ley para todos, sino con la ley para cada uno; no el *ad-juxta,* sino el *ad-justus*. O bien, con la famosa máxima cuyo origen no sería discreto rememorar: "de cada uno según sus aptitudes; a cada uno según sus necesidades".

HE DICHO.

## APENDICE CON LA RELACION DE TRABAJOS CIENTIFICOS DE E. TERRADAS

### A.—TRABAJOS IMPRESOS ACERCA DE TEMAS DE INDOLE CIENTIFICA

1. Memoria sobre equilibrio y movimiento de hilos inelásticos.—Barcelona.—Premiada por la Academia de Ciencias.

2. Memoria del Doctorado en Exactas sobre casos especiales del movimiento de un hilo inextensible.

3. Memoria del Doctorado en Ciencias Físicas sobre la polarización policroica.

4. Teoría del electrómetro de cuadrantes, publicada en la Academia de Ciencias de Madrid.

5. Discurso en la inaugural del curso universitario de 1930 sobre integrales de Fourier Stieltjes.

6. Sobre rotación de un árbol. Publicado por la Academia de Ciencias de Madrid en homenaje al Sr. Gallardo (Ecuaciones de vibración).

7 a 12. Artículos Astática, Masa, Mecánica, Celeste, Precesión, Luna de la Encicolpedia "Espasa".

12 a 18. Idem íd. Capilaridad, Calor, Electricidad, Magnetismo, Optica y Polarización.

19 a 25. Idem íd. Algébricas, Ecuaciones diferenciales, Probabilidades, Potencial, Bessel, Grupo, Serie.

26 a 29. Idem íd. Resistencia de materiales, Hidrodinámica, Placa, Vibración.

30 a 32. Redacción de varios cursos monográficos de los Sres. Hadamard, sobre ecuaciones diferenciales; Rey Pastor, sobre representación conforme.

33. Tratado de corrientes alternas.—Barcelona, 1908.

34. Tratado de elementos discretos en la Radiación.—Barcelona, 1911.

35. Numerosos análisis bibliográficos en diversas revistas y problemas.

36. Proyecto de Enseñanza en las Escuelas Técnicas de la Diputación de Barcelona (Mecánica de máquinas y Electrotecnia).

37. Movimiento perturbado de una cuerda en la revista del Instituto de Estudios.—Barcelona.

38. Le Problème de la figure d'equilibre d'une masse fluide homogène en rotation.—Bolonia, Revista "Scientia".

39. Sur le mouvement d'un fil. International Congress of mathematicians.—Cambridge, 1912.

40. Conferencia sobre cálculo simbólico de Heaviside, publicada por los ingenieros de Telecomunicación.—Madrid, 1930.

41. Conferencias sobre estabilidad geométrica de estructuras elásticas, publicadas por la Escuela de Ingenieros de Caminos.—Madrid, 1927.

42. Discursos de contestación a los Sres. Lassaletta, Castells, Torroja y Pardillo en la Academia de Barcelona.

43. Apéndices al Tratado de Termodinámica de Plans y de Química de Mañas.

44. Fenómenos de polarización, en luz convergente, observables en láminas de cuarzo dextrogiras. Revista de la Academia de Ciencias de Madrid.

45. Deducción de una condición análoga a la de Arnold. para la conmutación. Idem íd.

46. Sur le mouvement d'un fil. Anales de la Academia Politécnica de Oporto, 1913 (Coimbra).

47. Los problemas de la Mecánica. Idem, 1918.

48. Discurso inaugural de la Sesión Primera en el Congreso de Ciencias de Sevilla.

49. Sobre Mecánica Estadística. Trabajo leído en el Congreso de Zaragoza de la Asociación para el Progreso de las Ciencias.

50. Estado actual del problema de la Estabilidad. Archivo del Instituto de Ciencias. Barcelona

51. Ha intervenido en trabajos de Doctorado y Memorias sobre ecuaciones integrales del Sr. Rubio, sobre la teoría del contacto de Herz del Sr. Rafael y sobre extremales cerradas y criterio de Whittaker del Sr. Romañá.

52. Sobre integrales singulares. Revista de la Academia de Ciencias de Barcelona, 1911.

53. Sobre la emisión de radiaciones por cuerpos fijos o en movimiento. Barcelona, 1909.

54. Efectos de la luz circularmente polarizada al atravesar una lámina cristalina absorbente. Anales de Física y Química, 1905, págs. 57.

55. Sobre algunas curvas realizadas por cuerdas en movimiento. Idem, 1905, páginas 208.

56. Sobre cálculo de intensidades en una red de conductores. Idem, pág. 419.

57. Sobre oscilaciones de una cuerda. Idem, pág. 255.

58 a 61. Figuras de equilibrio de un hilo elástico. 1906, págs. 79, 166, 232 y 357. (Es la teoría de la elástica alabeada.)

62. Elástica alabeada, 1907, pág. 7.

NOTA:

El 38 se halla citado en la obra de Veronnet sobre figuras de equilibrio de una masa flúida.

El 39 se halla copiado con indicación de procedencia en la obra de Greenhill: Giroscopic motion.

## B.—CURSOS EXTRAOFICIALES DE FISICA Y MATEMATICA

*a*) Curso sobre ecuaciones integrales, dado en la Universidad de Barcelona en 1908.

*b*) Curso sobre Funciones elípticas, dado en la Universidad de Zaragoza en 1907.

*c*) Curso sobre corrientes alternas y diagramas dado en la Universidad de Barcelona en 1909.

*d*) Curso sobre Elementos discretos de la materia y la Radiación dado en el Instituto de Estudios de Barcelona en 1910.

*e*) Ha introducido en España los cursos monográficos de intercambio, habiendo provocado los de los Sres. Weyl y Levi-Civita e intervenido en los del Sr. Hadamard.

*f*) Serie de conferencias en Madrid sobre problemas de Contorno.

*g*) Lecturas en Madrid sobre el tratado de Tonelli "Serie trigonometriche".

*h*) Coloquios en Madrid sobre diversos temas, especialmente: funciones cuasi periódicas, invariantes adiabáticos, teoremas tauberianos, extremales cerradas y torsión elástica.

*i*) Conferencias en la Escuela de Ingenieros Industriales sobre Plasticidad y Viscosidad (en publicación).

*j*) Conferencias en la Escuela de Ingenieros de Caminos sobre Pandeo (publicadas).

*k*) Conferencias en la Escuela de Ingenieros Aerotécnicos sobre Vibraciones de alas y cálculo de alas Junkers (en publicación).

*l*) Conferencias en la Academia de Ciencias de Madrid sobre Relatividad.

*m*) Cursos sobre Elastiiidad y Resistenria de materiales en Madrid en la Escuela de Ingenieros Aerotécnicos.

*n*) Curso de Mecánica racional e Hidrodinámica en la misma Escuela.

*o*) Curso de Transportes en la Escuela Industrial de la Mancomunidad de Cataluña.

*p*) Curso de Elasticidad con aplicación a los problemas de pandeo de superficies en la Universidad de Buenos Aires.

*q*) Conferencias de Física teórica sobre teoría de la Relatividad y de los Quanta en las Universidades de Santiago de Chile.

*r*) Conferencias sobre Estabilidad y Economía en el Instituto de Ingenieros Civiles de Lima.—Perú.

*s*) Curso sobre temas elegidos de Hidrodinámica en la Facultad de Ingeniería de Montevideo.

*t*) Curso de Estadística Matemática en la Universidad de Madrid (Facultad de Ciencias).

*u*) Curso de Teoría de funciones y ecuaciones diferenciales en la Universidad de Madrid.

*v*) Curso sobre ecuaciones de variación, y soluciones asintóticas y periódicas, en el Doctorado de la Universidad de Madrid.

*w*) Curso de Doctorado en la Universidad de Madrid sobre Métodos de la Física Matemática.

*x*) Conferencias sobre teoría mecánica de tierras (sedimento, filtración y contracción en arcillas) en el Laboratorio matemático de Madrid.

*y*) Curso sobre correspondencia entre variables aleatorias en la Facultad de Derecho de la Universidad de Madrid.

# INDICE