DISCURSO

LEÍDO ANTE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

POR EL SEÑOR

D. CECILIO JIMÉNEZ RUEDA

EN SU RECEPCIÓN PÚBLICA

Y

CONTESTACIÓN

DEL SEÑOR

D. LUIS OCTAVIO DE TOLEDO

EL DÍA 17 DE FEBRERO DE 1918

MADRID
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO DE FORTANET
IMPRESOR DE LA REAL ACADEMIA DE LA HISTORIA
Libertad, 29.—Teléf.° 991

1918

DISCURSO

DEL SEÑOR

D. CECILIO JIMÉNEZ RUEDA

SEÑORES ACADÉMICOS:

Faltaría a la verdad si negara que mis caros e íntimos anhelos, en mi juventud y aun pasada ella, fueron una Cátedra en la Central y esta Academia. Pero las aspiraciones de todo hombre consciente del límite de sus propias facultades podrían muy bien clasificarse en próximas, remotas y utópicas, según cuando espere verlas realizadas, en consonancia con sus medios de acción, aquilatados allá en lo más íntimo de la conciencia, donde no solemos engañarnos.

Si tratándose de la primera aspiración, la tuve siempre entre las realizables, más próxima o más remotamente, y perdóneseme esta franqueza, en gracia a la sinceridad con que os hablo, cuanto más pensaba en la segunda, más la alejaba de mí, hasta dar con ella en la región de las utopías, de la que no volvía a salir sino merced a esos momentos de reacción, en que nuestro espíritu, siguiendo el ritmo que gobierna lo creado, alterna con otros instantes de desaliento y desilusión.

Mas desde el momento en que las primeras molestias seniles empiezan a alborear y la cabeza se cubre de canas, los períodos de desaliento se alargan al mismo tiempo que los de reacción alentadora se acortan, y en estas circunstancias se hallaba mi espíritu, cuando en brevísimo espacio de tiempo, vuestra bondad, nunca tan bien probada como ahora, ha convertido en realidad palpable aquel sueño dorado de mi vida íntima, que se esfumaba en las vagas lontananzas de lo futuro, elevándome a esta suprema jerarquía en el orden de lo científico.

Tan alta estimo la distinción con que me habéis honrado, que materialmente me encuentro confundido. Así es que si busco razones que tranquilicen mi conciencia, explicándome, de algún modo, las que vosotros hayáis tenido para elegirme, ni las encuentro, ni logro razonar; porque en mi alma no hay cabida en este instante más que para el sentimiento, y uno de éstos entre todos, mi gratitud, es el que la invade y llena por completo.

Pero esta gratitud, que será antidoto contra todo conato de desfallecimiento, pugna, como todo sentimiento hondo, por exteriorizarse; y no veo por ahora, y en estas circunstancias, medio más adecuado de lograrlo, que cumplir lo más eficaz y rápidamente posible el precepto de vuestros Estatutos, que me manda venir a ofreceros este modestísimo trabajo, para el que pido toda vuestra benevolencia, que es mucha, procurando incorporarme de este modo, cuanto antes, a vuestras tareas, y poner toda mi voluntad, única facultad de mi espíritu que aún conserva los arrestos de la juventud, al servicio de la Academia y de la ejecución de los trabajos que ésta me confiare.

De que mi voluntad ha de estar siempre propicia, es buena garantía el no haberme faltado nunca en mis más arduos empeños. Mas ¡ay!, que no es sólo voluntad lo que hace falta para el buen acierto y esmerada solución de los problemas que la sociedad confía a vuestras deliberaciones; y por eso más de una vez habré de menester de vuestro saber y de vuestra indulgencia, que no dudo me otorgaréis, ya que a creerlo me induce vuestra anterior liberalidad para conmigo.

De este modo únicamente podré corresponder al compromiso adquirido y aceptar tranquilo la responsabilidad que desde hoy siento ya pesar sobre mí, y en esa creencia y fortalecido mi ánimo por ella, pasar adelante en este mal hilvanado discurso, al que tan solícitamente prestáis vuestra atención.

* * *

Suelen unirse en estos actos académicos, los motivos de complacencia y de cordial satisfacción que les dan carácter de fiesta, con los recuerdos, siempre bien sentidos, de algún malogrado compañero, que, rindiendo tributo a la muerte, dejó su puesto a otro, en este continuo renovar que lo inseguro y mezquino de la vida del hombre traen aparejado.

Mas por un conjunto de especialísimas circunstancias, el caso presente es uno de los muy contados en la vida de esta docta Corporación, en que podría, con visos de razón, prescindirse de traer a cuento notas del contraste que dejo señalado, ya que la vacante se ha producido sin que la implacable y severa Parca haya, afortunadamente, espigado en vuestras filas, arrebatándonos algún sabio ilustre o algún maestro querido y respetado.

Ha ocurrido, y no creo pecar de indiscreto, pues es público y notorio, que ante las apremiantes exigencias actuales de la vida científica de las colectividades sabias, necesitadas del concurso activo y asiduo de todos sus miembros, mientras instituciones similares extranjeras prescinden, abreviando trámites, de los discursos de recepción de sus individuos, respetuosos vosotros con las gloriosas tradiciones españolas propias de estas solemnidades y señaladamente con las de esta Academia, os habéis limitado a poner nuevamente en uso el vigor legal del art. 69 de vuestros Estatutos, que, por la acción lenitiva del tiempo, había llegado a no ser frecuentemente observado con estricta sujeción al espíritu y a la letra con que fuera redactado.

Obliga dicho artículo a los señores Académicos electos a presentar su discurso de entrada en el plazo de un año, a contar desde el día de su elección, y os obliga asimismo a vosotros *(dura lex, sed lex)* a declarar la plaza vacante, y a proveerla de nuevo cuando transcurrido dicho año el elegido hase visto imposibilitado de venir a rendir esta prueba de respeto a la tradición y de consideración a la índole de vuestras tareas.

Magnánimas, sin embargo, nuestras leyes en estos casos de inevitable severidad, no podía faltar al mencionado art. 69 un aditamento compensador, y éste dice: Que el electo cuya plaza se proveyere, podrá aún presentar su discurso y, cumplida esta formalidad, ingresar en la Academia en la primera vacante de su sección que más tarde se produjere.

Tales han sido las causas de la vacante cuya provisión celebramos en este acto, y las razones de la singularidad de hacerlo en vida de mi ilustre antecesor en este puesto. Antecesor y compañero a la vez de Profesorado, cuya estimación es grande por su ingenio y su valer entre cuantos le conocen y entre vosotros mismos, que no dudasteis en llamarle a vuestro lado, abriéndole las puertas de esta Academia; pero mucho más, y muy especialmente lo es, para quien logró vencer con él y casi en los mismos momentos y circunstancias en los más trascendentales actos académicos de nuestra carrera universitaria. Por esto y por mi sentir, no dudo que interpreto fielmente vuestro pensamiento y vuestro deseo, haciendo votos, como cordialmente los hago, por que véase aquél pronto libre de las causas que contra su voluntad determinaron su retardo y pueda de ese modo cumplir oportunamente con las formalidades requeridas por la tradición y vuestras leyes.

* * *

Mas pecaría de ingrato si, dando aquí por terminadas estas consideraciones, pasara por alto a mi inolvidable maestro DON EDUARDO LEÓN Y ORTIZ, que, electo para ocupar este mismo sillón de la Academia, siete años antes que mi predecesor, pasó a mejor vida, casi repentinamente, a los sesenta y ocho años de edad, cuando acababa de limar los párrafos, ya compuestos, de su discurso de recepción, y apilaba materiales para trazar las últimas líneas que aun faltaban a tan notable trabajo titulado *Bosquejo del estudio de las mareas,* que por tan irreparable pérdida no llegó a leerse en este sitio. Solícita, no obstante, siempre esta Academia con la buena memoria de los que fueron sus ilustres miembros, honró la del insigne maestro LEÓN Y ORTIZ, recabando, con la eficaz ayuda del Sr. Ventosa, lo que había de aquel discurso, y publicándolo, como obra póstuma del mismo, en el tomo XIV de su Revista.

Era LEÓN hombre de un talento natural envidiable y de una cultura y erudición vastísimas y, sin embargo, jamás buscó notoriedad, ni hizo ostentación de su mérito propio; y esto, más bien que por modestia, lo cual requiere reflexión, por sencillez de carácter; pues no parece que se daba cuenta de su propia moderación.

Su ingénita naturalidad le llevó siempre a manifestar sin rebozo ni eufemismos lo que sentía; y esto, qué pudo alguna vez acarrearle algún disgusto, era la causa de la atención con que se le escuchaba. No se esforzaba por agradar y, sin embargo, agradaba; no se proponía nunca dar lecciones y siempre se sacaba de sus pláticas alguna enseñanza.

Un solo hecho sencillo de su vida íntima, que no veo inconveniente en hacer público, muertos sus protagonistas, revela de una vez y en toda su grandeza la personalidad moral de León, cuya vida de soltero pudiera presentarle como un tanto egoísta, siendo así que a salvar a su hermana de una brusca e inesperada desgracia de fortuna, sacrificó aquél todos sus ahorros y aspiraciones naturales, amparándola en su casa al lado de su madre, hasta la muerte de ambas, y sin que en un solo aniversario dejara después de elevar al cielo, por ellas, religiosas ofrendas, ni de mantener siempre frescas en la tierra las flores que adornaban sus sepulturas.

La labor científica del Sr. León y Ortiz es también muy grande, y, sin embargo, no la luce como debiera, por esa despreocupación en que vivió siempre, tratándose de asuntos que sólo afectaban a su interés personal.

En su concienzuda traducción del *Tratado de Geodesia de* Clarke, cuyo texto se desenvuelve en 530 páginas, ha puesto unas 400 notas, muchas de las cuales, como la relativa a la corrección, tanto del tiempo de la oscilación, como de la longitud del péndulo de segundos, por efecto del balance de sostén, y otras, son verdaderos artículos, que ocupan cinco o seis páginas casi completas de letra muy menuda, y todas ellas están apretadamente llenas de interesantes datos históricos, o de otras ciencias, o de ingeniosos desarrollos o transformaciones de cálculo; notas que avaloran extraordinariamente el mérito del texto inglés, y, sin embargo, sólo dice León de ellas en su prólogo, que unas tienen por objeto completar la reseña de los trabajos realizados por el Instituto Geográfico y Observatorio de Madrid, que otras son un sucinto extracto de lo contenido en Memorias o libros especiales salidos de dichos Centros, y otras ofrecen transformaciones para pasar de las fórmulas de partida a las que han de ser demostradas. Con lo cual deja así medio cubierta con nombre extranjero no pequeña cantidad de trabajo suyo personal y de ciencia genuinamente española.

Y no hablamos de la traducción de la *Física de Ganot,* en colaboración con Sánchez Pardo, ni de la de *Calor y frío de Tyndall,* por ser sobrado conocidas. No lo son ya tanto sus discursos de apertura, modelos de bien decir, de la Universidad de Valencia en 1881 y de la de Madrid en 1890, sobre *Importancia de la Geometría pura,* el primero, y sobre la *Figura de la Tierra* el segundo; redactado éste en catorce días para salvar la fiesta universitaria de la inoportunidad en que un cambio de Gobierno colocó el hecho por otro catedrático; ni la multitud de artículos originales y traducidos que deja diseminados en varias revistas españolas, pues León no quiso colaborar en Revistas extranjeras, no porque desconociese el inmenso valor que tiene la actuación científica cuando se hace de acuerdo con sabios de otras partes, sino porque a su españolismo exagerado, si es que cabe exageración en esto, repugnó siempre cierta propensión a no tomarse en consideración de valía entre nosotros, muchas veces, los trabajos de aquellos que no ostentan alguno previamente sancionado por el extranjero.

Pueden citarse entre sus producciones originales un artículo sobre *Poliedros regulares,* publicado en la *Revista de la Sociedad de Profesores de Ciencias;* uno titulado *Relaciones Trigonométricas,* que vió la luz en las *Ciencias de la Naturaleza,* y uno dirigido *Al público* y otro sobre *Tablas de Logaritmos de sumas y diferencias* insertos en el *Archivo de Matemáticas;* Revista esta última, a cuyo sostenimiento contribuyó, no sólo con artículos propios y traducciones en que no figura su nombre, sino también con recursos pecuniarios; y finalmente todos los que ha publicado en la *Revista de la Sociedad Matemática Española,* como *Arco de meridiano elíptico, Analogías trigonométricas, Geometría vectorial* y *Biografía de Don Jorge Juan.*

Llena este último artículo el número XIII de la colección de dicha Revista, con el que la mencionada Sociedad, en enero de 1913, festejó el segundo centenario del natalicio del insigne marino noveldense, y en el cual, como hecho al calor del fuego sagrado de su patria chica, no se sabe qué admirar más: si lo castizo, correcto y elegante del lenguaje o la cantidad de datos históricos, cotejos con otros recientes de trabajos de Jorge Juan, y citas, grabados, etc., que el hermoso trabajo contiene.

Mucho más puede decirse del esclarecido maestro, a quien, desde los tiempos en que asistí a su Cátedra, profesé extraordinario cariño, nacido de afinidades espirituales y alimentado luego con ese conjunto de atenciones y mercedes que siempre prodigó LEÓN entre sus discípulos. Mas el hecho de haber sido publicada por D. Luis Octavio de Toledo su biografía en la Revista de la Sociedad Matemática Española, me dispensa de continuarla yo aquí y sólo recordaré la frase que al terminar puso aquél en boca de D. José Echegaray: «Fué LEÓN un hombre bueno, que buscó la verdad y cumplió con su deber.»

Y dicho esto podría ya entrar en materia dando por terminadas legítimas recordaciones; pero es el caso que el ilustre numerario de cuya labor en esta Academia va a ser la mía, por azares de la suerte, pobre y menguada continuación, fué el meritísimo general de división D. Diego de OLLERO Y CARMONA, que, aunque un poco lejana ya su producción científica, no es por eso menos digna de especial mención.

Fué el General OLLERO hombre de una caballerosidad y de un trato tan exquisito, que cuantos tuvieron la suerte, y hablo por experiencia, de conversar con él una sola vez, quedaron sus amigos para siempre. Procedía del Cuerpo de Artillería, en el cual había sido Profesor de la Academia, Director del Museo y Presidente de la Comisión de experiencias del Arma; todo lo cual explica y justifica su gran competencia en cuantos asuntos conciernen a la ciencia del artillero.

Compuso un *Tratado de Balística* que fué impreso por cuenta del Estado, según Real orden de 30 de Junio de 1890, y en el mismo año publicó unas *Tablas balísticas,* síntesis de trabajos sueltos anteriores, que comprenden las inglesas, las de la Casa Krup, de Siacci, de Mayevski y de Braccialini, y complementarias de los diversos factores del tiro. Es autor de un *Tratado de Cálculo de*

Probabilidades, del que dos capítulos están consagrados a teorías tan difíciles como las de *Errores y Mínimos cuadrados,* no obstante lo cual están expuestas con admirable sencillez, razón principal de que dicha obra alcanzara a la tercera edición y de que fuese premiada con medalla de oro en la Exposición Universal de Barcelona de 1888. También compuso, en colaboración con don Tomás Pérez Griñón, un *Curso de Cálculo infinitesimal,* y todas estas obras merecieron laudatorios informes de los Centros técnicos correspondientes.

Pero en donde su ingenio se manifestó más fecundo es como inventor de aparatos de precisión de Mecánica y de Cálculo, como son: el eclímetro o escuadra automática de puntería; su círculo de puntería para la determinación de las elevaciones de las piezas, fuera de ellas; la regla balística para el cálculo de las ordenadas de la trayectoria, con graduación especial para el fusil Mauser; la regla para el cálculo de perforación de las corazas o planchas de blindaje y el balígrafo; aparatos todos ellos que dan soluciones sencillas con empleo de sistemas originales que difieren de los seguidos en el extranjero.

Un informe de la Inspección general de los Establecimientos de instrucción militar relativo a un último invento del señor Ollero, como es su Regla de Cálculo, fundada en haber obtenido, con una perfección mayor que hasta entonces, una de las coincidencias de la regla fija con la móvil, dice: Que se ejecutan con esta regla las cuatro operaciones aritméticas, y, por el empleo de escalas especiales, hace posibles las operaciones con funciones, calcula fórmulas y resuelve los problemas de la Trigonometría, siendo, por tanto, aplicable a la Topografía y a la Geodesia; y permite, lo que más la avalora para el Ejército, solucionar inmediatamente sobre el terreno, ciertas cuestiones que se presentan en el tiro de combate [1].

Y aunque hase dicho que esta regla fué, para ofrecerla al público, construída en París, sólo se hizo en los talleres de precisión

[1] Copia del texto de este informe, del de la exposición a las Cortes y otros pormenores los debemos a la diligencia de nuestro particular amigo el comandante de Estado Mayor D. Juan López Soler.

del Museo de Artillería un modelo, desistiéndose de la de París, porque el precio de la ejecución, queriendo correr parejas con el saber de nuestro general, no se armonizó, como suele suceder, con los recursos de su posición.

Fueron base de la invención de esta serie de aparatos las aficiones de su autor por la Nomografía, ciencia sistematizada por M. D'Ocagne y a la que Lalanne prestó su teoría de las Anamorfosis, la cual cultivó Ollero con fruto, por las muchas aplicaciones que entrevió desde un principio para la Balística, su ciencia predilecta; y en 1903 publicó unas *Nociones de Nomografía balística,* conjunto de procedimientos para dar interpretación nomográfica a diversas fórmulas matemáticas, y conducente a obtener nomogramas o ábacos que, dentro de un plan general, resolvieran los diferentes problemas; partiendo de la resistencia del aire a los movimientos de los proyectiles, continuando por las tablas balísticas que se derivan de aquellas fórmulas, y acabando por las que relacionan los diversos elementos del tiro; y aun llegaba a más, pues pretendía que las diversas soluciones se presentasen enlazadas entre sí de tal modo que ofrecieran una imagen de la variación simultánea de los diversos elementos que en el tiro se consideran.

Sabido es que en el problema fundamental de la balística intervienen una porción de variables y de funciones de estas variables, como la velocidad inicial, la en un punto de la trayectoria y la pseudovelocidad [1]; el ángulo de proyección, el de caída y de situación del blanco; la inclinación de la trayectoria, las coordenadas de los puntos de ésta, la resistencia del aire y los coeficientes balísticos dependientes del peso, forma y demás accidentes del proyectil.

Tabuladas y reducidas a escala varias de estas funciones, distribuyéndolas sobre los lados y paralelas medias de un rectángulo, disminuyendo en constantes dadas los valores de unas, y adoptando módulos especiales para otras, a fin de reducir los dibujos y aumentar la curvatura de algunas curvas, parece haber logrado nuestro general su propósito en los dos ábacos descritos

[1] Llámase así la proyección en sentido vertical de la velocidad v sobre la dirección de la velocidad inicial.

en su Nomografía. Y aunque muchos de esos números estén tomados de tablas de antemano construídas por otras escuelas, las constantes disminuciones de los mismos, las modificaciones que esto introduce en las integrales que dan otros, y las comprobaciones de cálculos que necesiten todos, bastan para acreditar a cualquiera de un ingenio nada vulgar y de una constancia en el trabajo digna de todo encomio.

En el *Memorial del Artillero,* diseminada entre los años 1880 a 1890, se ve una parte de la labor del Sr. Ollero, que luego fué cristalizando en las obras e inventos antes citados, pero en el que aun quedan muchas pinceladas y notas de su fecundo estímulo.

La Patria le recompensó con distinción que sólo a señalados servicios, excepcionales trabajos y méritos sobresalientes, suele pocas veces otorgar: la de haber sido propuesto a las Cortes, y votado por éstas, el ascenso del Sr. Ollero a general de división, a pesar de hallarse por su edad en la sección de reserva; ley que fué sancionada en 1906 y a la que dieron base laudatorios informes de los Centros técnicos del Cuerpo y una encomiástica exposición del Ministro del ramo a las Cortes.

Deferente esta Academia con las aficiones nomográficas del general Ollero, publicó, sin duda, aquel tema para el concurso de premios de 1907, que fué el de su muerte, en que se pedían unas nociones de nomografía, y, apoyándose en ellas, la composición de nuevos sistemas de ábacos, interesantes en teoría y útiles a la vez a las ciencias físico-matemáticas. Premio cuyo tema, aunque se volvió a reproducir en 1914, ni en uno ni en otro concurso tuvo licitadores; y al dar cuenta, finalmente, de su muerte a la Academia el Sr. Echegaray, dijo: «A más de sus profundos estudios y de sus utilísimas invenciones consagró a la Patria constantes anhelos y entusiasmos de pundonoroso militar siempre dispuesto a todo género de sacrificios por ella».

I

Tema: Su división. Hecho el merecido elogio a la memoria de los varones insignes, que un día fueron, cada uno en su esfera, propulsores incansables del adelanto matemático en España, no como a sus altas virtudes corresponde, pero sí con la convicción, cariño y respeto del que siente cuanto queda consignado, paso a ocupar unos momentos vuestra atención con

Algunas consideraciones acerca de la evolución de los conceptos de punto, recta, plano y espacio.

A las transformaciones y extensión que en el sucesivo desenvolvimiento de la Geometría han sufrido los contenidos de esas palabras, desde el punto sin extensión hasta el plano de Riemann y el espacio abstracto de *n* dimensiones, va unida la casi totalidad de la doctrina actual de la Geometría, y fuera vana pretensión querer encerrar en los límites de un discurso los vastísimos horizontes que se descubren hoy desde todos los puntos del campo de tan armónica disciplina científica.

Por eso no nos ocuparemos de los significados de esas palabras, desde el punto de vista de los varios papeles que pueden representar, en relación con otros entes geométricos, y en los que se les conoce con multitud de apelativos, como puntos, rectas y planos singulares, múltiples, inversos; puntos cónicos y de contacto; rectas tangentes, isogonales y antiparalelas; planos coordenados, de desvanecimiento; centrales de homologías, etc. No entra tampoco en nuestro propósito poner la mira en las más elevadas y sutiles abstracciones geométricas contenidas en dichos cuatro términos, ni disertar acerca de las últimas complicadas correspondencias geométricas que entre ellos pueden ser establecidas; porque aun así nada nuevo podría presentar a vuestra consideración, y, en cambio, si estos trabajos pudieran influir, siquiera en parte mínima, contra la aversión o simplemente pereza del medio social, cuando se le ofrece lectura matemática, nada menos a propósito para sacudir esa pereza que las altas especulaciones, el tecnicismo ininteligible por exagerado modernismo, y una distancia infranqueable entre lo que se da y el nivel medio de nuestra cultura matemática.

Pensando, pues (aunque sólo sea halagüeña ilusión), en cierta virtualidad de estos actos contra esa indiferencia apuntada del medio y a favor del laudable estímulo en los pocos principiantes y aficionados que a ellos acuden, nada más natural, en esta hipótesis, que buscar el contacto con la ciencia de las aulas, y hasta tomar algunas ideas en ese mismo campo y en el de la historia, para que cuanto hemos de decir venga como natural extensión y sin brusquedades, respecto al caudal corriente aludido de los conocimientos matemáticos, cual corresponde a todo empeño de verdadera divulgación.

Modernamente existen tantas Geometrías, no sólo como grupos de operaciones o de transformaciones pueden concebirse entre los elementos de un conjunto de entes geométricos, sino como concepciones distintas del espacio, que es uno de esos conjuntos, podemos tener.

Las aparentes contradicciones que surgen al estudiar el espacio en el terreno de la Filosofía, como es el hecho de que para percibir el lugar ocupado por los objetos externos, tengamos necesidad de que esté de antemano en nuestra conciencia la misma idea del espacio que tales objetos nos hubieran debido de dar, han conducido a filósofo tan eminente como Kant a negar toda realidad objetiva al especio y a considerar a éste como mera condición subjetiva necesaria de la inteligencia humana en su función de conocer.

A esto replican otros filósofos, como Balmes, que lo necesario *a priori* para que se produzca el fenómeno de la sensación de espacio, es sencillamente la propia facultad de sentir en nuestra alma y la existencia de objetos exteriores que la impresionen, dándonos un conjunto de sensaciones diversas, indiscernibles en un primer momento, y entre las cuales va siempre mezclada la idea de extensión, que por eso parece indesalojable de la inteligencia.

Según Stallo, el espacio no es ni un objeto físico de sensación ni una forma innata del espíritu, sino un concepto.

La Geometría se aparta desde luego de esas discusiones y de esos conceptos filosóficos del espacio, y sólo se preocupa de perfeccionar la idea habitual para hacerla apta a sus propios fines. Nuestras concepciones geométricas actuales del espacio pueden reducirse a tres principales, cada una de las cuales se presenta luego con circunstancias y detalles variados, a saber: el espacio *intuitivo habitual,* el espacio *físico* y los espacios *abstractos de cualquier número de dimensiones.*

El primero, como todos vosotros sabéis, es aquel que nuestro espíritu se ha forjado, tomando de los cuerpos materiales ciertas partes como su forma y tamaño, superficies, líneas, puntos, que por abstracción idealiza luego, y después combina, originando las figuras geométricas de las cuales estudia, al fin, no sólo aquellas relaciones y propiedades que caen por entero dentro del trozo de dicho espacio en que el hombre se mueve y puede constantemente aquilatar con su experiencia, sino también aquellas otras que se refieren a más dilatados dominios espaciales y a las cuales llega por pura intuición, como la infinitud de la recta, el postulado de Euclides y multitud de conceptos análogos.

Las principales dificultades en el rigor de las verdades geométricas nacen precisamente de estas últimas relaciones y conceptos de carácter no experimental, los cuales tienden a revestir formas absolutas o *a priori,* poco en armonía con la tendencia bien entendida a hacer de los elementos de la Geometría una ciencia natural.

Al ilustre geómetra Moritz Pasch, de la Universidad de Giessen, sugirieron esas mismas dificultades, en 1882, la idea de construir una Geometría concretada a una porción del espacio limitada por una superficie cerrada, con rectas y planos confinados por ella e introduciendo luego, con el nombre de *impropios*, puntos, rectas y planos que podían suponerse fuera de este recinto, pero cuyas determinaciones y propiedades se establecen desde dentro con sus propios elementos. Y, según Riemann, no es condición necesaria que el espacio intuitivo ilimitado sea *infinito*, puesto que podría ser reentrante en sí mismo, como una esfera de tres dimensiones situada en una variedad de cuatro.

Nuestras sensaciones del espacio real son de tres clases: visuales, tactiles y motoras. La intuición apoyada sólo en sensaciones visuales nos da una variedad del espacio intuitivo, que puede denominarse *espacio proyectivo*, en el cual la imagen de cada punto exterior a nosotros nos la sugieren las proyecciones del mismo en cada retina; esto es, los dos rayos luminosos proyectantes, con los cuales coinciden de ordinario las visuales que desde ambos ojos van a converger en el punto. Y la experiencia atestigua que la visión de un punto luminoso se produce, aunque dicho punto no exista, siempre que recibamos dos rayos luminosos, vengan de donde vinieren, que desde poco antes de tocar en nuestras retinas coincidan con las visuales dirigidas desde ambos ojos al lugar en que tal punto se ve situado, como ocurre con las imágenes virtuales de los espejos y lentes. Este es el fundamento de la idea de Pasch: admitir, no sólo los puntos propios de su espacial recinto, sino los correspondientes a dos rayos visuales concurrentes en un lugar exterior al mismo, cuya existencia real no podemos, por tanto, atestiguar, pero cuyo conjunto de dos tales rayos introdúcese en la Geometría con el nombre de punto *impropio*, según Pasch, o de punto *ideal*, según Klein, siempre que las partes a nuestro alcance, de dichos rayos, realicen ciertas posiciones y enlaces con otros elementos geométricos, que fueran suficientes para determinar dicho punto si cayera dentro del espacio propiamente dicho.

Las sensaciones tactiles y motoras nos dan otra porción de ideas contenidas en la de espacio, como direcciones, ángulos, distancias, movimientos, giros, etc., etc., siendo insuficientes las de cada grupo para una cabal intuición del mismo, pero cuya reunión, unida a las sensaciones visuales y auxiliada por nuestras facultades de abstraer y de generalizar, completa en nosotros la idea del conjunto armónico que hemos denominado espacio intuitivo.

Por espacio físico, como el propio calificativo lo indica, se ha entendido siempre el íntimamente unido a los cuerpos físicos y a sus movimientos efectivos, cuyas propiedades nos son reveladas pura y exclusivamente por los sentidos, auxiliados, si es preciso, por instrumentos adecuados físicos o matemáticos, pero sin que nos sea permitido añadir o quitar nada a la idea que esos medios forman en nosotros. Como dado por la sola experiencia sensorial es un conjunto de cosas sueltas y finitas.

Muchas cuestiones geométricas hacen necesaria esta distinción entre el espacio físico y el intuitivo.

En efecto, modalidades de nuestros sentidos nos dan sensaciones de continuidad allí donde no la hay, v. gr., las figuras del cinematógrafo, la apariencia de bruñido que ofrecen a la simple vista los limbos graduados de precisión; la indistinción al tacto de dos puntas agudas a menos de un milímetro de distancia, el sonido producido por la rueda de Savart, etc. Y aunque acortando la velocidad al paso de la cinta cinematográfica y a la rueda de Savart, o ampliando al microscopio la graduación del limbo o la distancia entre las puntas, la discontinuidad aparece, no se ha hecho con esto más que alejar un poco la dificultad, teniendo que ser al fin la intuición la que forme la idea habitual del continuo, obscura de suyo, pero esencial en la de espacio y trascendental en la Matemática.

Mas la idea intuitiva del continuo había llegado a establecer una distinción entre los continuos lineales, superficiales y de volumen, denominados *simplemente*, *doblemente* y *triplemente* infinitos, a la cual nan puesto término los continuos de Cantor, constituídos por conjuntos no numerables de elementos que se prestan al establecimiento de correspondencias biunívocas entre puntos de un continuo lineal y los de otro superficial o espacial.

Consideremos, v. gr., un cubo y tomemos sus aristas por unidad y tres concurrentes de ellas por ejes coordenados; representemos las distancias al origen de los puntos de una arista por decimales, sin parte entera, de infinitas cifras, en que puedan ser ceros, pero no nueves, las siguientes a una dada: tales son las expresiones de los números positivos racionales e irracionales menores que *uno*. Con decimales sacados de cada uno de éstos, tomando la primera cifra detrás de la coma, y sucesivamente las 4.ª, 7.ª, 10.ª, etc., siguientes, representemos la coordenada x de un punto; tomando la segunda cifra y a continuación sucesivamente las 5.ª, 8.ª, 11.ª, etc., representemos la y, y con la tercera cifra, seguida de las 6.ª, 9.ª, 12.ª, etc., la z.

De este modo queda establecida entre los puntos del cubo y los de su arista una correspondencia tal que no hay punto de la arista que no tenga su único correspondiente en el cubo y recíprocamente, es decir, *una correspondencia biunívoca, aunque no* a puntos *sucesivos* de la arista corresponderán puntos sucesivos del cubo.

Consideremos, como segundo ejemplo, dos ángulos planos completos y adyacentes de 1° y de 179°. No hay ningún rayo contenido en el último que no tenga su único conjugado armónico en el ángulo de un grado respecto de los lados de éste, y recíprocamente; existiendo así entre los infinitos rayos de uno y otro ángulo una correspondencia biunívoca, y escapando a nuestra intuición, cómo siendo coordinables ambos conjuntos infinitos, está el uno contenido en un ángulo de 179° sin dejar vacíos y el otro en un ángulo de un grado sin superposiciones; y aunque la frase más *denso* o menos denso pudiera expresar el hecho, no lo explica, ni esa densidad puede equipararse a la física que de ordinario se usa en medios discontinuos.

Bastan estos ejemplos para comprender sin esfuerzo cuán distintos son los conceptos del continuo físico, del intuitivo y del matemático, que no pueden perderse de vista cuando de ahondar en estas cuestiones se trata.

Por otra parte, el trazo físico de una curva en el papel es un camino de cierta anchura no eliminable; y el contacto dibujado de dos curvas es un arco confundido de ambas jamás reducible a un solo elemento. Nuestra facultad de abstraer y de generalizar forma, de esas groseras percepciones del orden físico, los conceptos puros de curva y de contacto geométricos del orden intuitivo. Pero ni aun así bastan tales conceptos a satisfacer las exigencias actuales del progreso matemático. Construid, por ejemplo, a un solo lado de un segmento, considerado como base, un triángulo isósceles de 18°, de ángulo básico; a la parte de afuera de cada uno de sus dos últimos lados otros tantos triángulos isósceles semejantes, y así sucesiva e indefinidamente; el conjunto de los vértices de todos esos triángulos es una línea continua, en el sentido de que entre dos cualesquiera de sus puntos, por próximos que se supongan, hay siempre nuevos puntos; y, sin embargo, esa línea no puede dibujarse por trazo continuo, ni tiene tangentes ni otros contactos en ninguno de sus puntos. Son, pues, distintos los conceptos de curva y de contacto en el espacio físico, en el intuitivo y en el dominio matemático.

Finalmente, si la suma de ángulos de todo triángulo no pudiera exceder de dos rectos, bastaría que un solo triángulo fuera euclideo, es decir, tuviera esa suma igual a dos rectos, para que lo fuesen todos; porque ese único triángulo euclideo daría dos triángulos rectángulos euclideos al trazarle una altura; con dos iguales de éstos se compondrían paralelogramos rectángulos, y una red de éstos suficientemente grande daría por sus diagonales nuevos triángulos rectángulos euclideos reducibles a otros de catetos arbitrariamente dados, con los que se compone todo triángulo. De esto no es difícil deducir la verdad contenida en el postulado de Euclides. Ahora bien, la suma de los ángulos de un triángulo lobatschewskiano, es tanto menor cuanto más grande es, como la de uno de Riemann es tanto mayor cuanto más grande es. De aquí que, para decidir por experiencia, de la consideración de un solo triángulo, si el espacio es euclideo, lobatschewskiano o riemanniano convenga ensayar triángulos muy grandes.

Pero los triángulos geodésicos y astronómicos, habida cuenta de los errores de observación, no han jamás permitido reconocer que la suma de los ángulos de ningún triángulo rectilíneo del mundo físico difiera en más o en menos de dos ángulos rectos. Y aunque los enormes triángulos, cuyas bases son diámetros de la órbita terrestre y sus vértices opuestos estrellas de paralaje nula, tienen una suma de ángulos en la base de dos rectos, es porque la pequeñez de dichas paralajes cae detro de la amplitud de los errores de observación y no pueden ser tenidas en cuenta. Mas, aunque así no fuera, habría, según Poincaré, dos hipótesis que tomar: la de que el espacio físico se acomodaba a la Geometría de Riemannn, o la de que la propagación de la luz no era rectilínea, siquiera su pequeña curvatura no fuera apreciable más que a tan enormes distancias. Tal es otra razón de la distinción entre el espacio físico y el espacio intuitivo.

En los espacios abstractos, por último, no es ya condición precisa que sus elementos sean propiamente puntos, ni cuerpos, en los que, dentro de los límites muy variables de la observación, no puedan discernirse partes; sino que pueden considerarse como tales, entes abstractos de cualquier naturaleza como números, vectores, cónicas, involuciones, superficies, elementos imaginarios, etc., sometidos sólo a la condición de formar un conjunto, entre cuyos elementos puedan definirse grupos de operaciones, y, al mismo tiempo, se pueda tener en cuenta un sistema de postulados y de conceptos primitivos.

Si éstos están contenidos en los de los puntos, rectas y planos del espacio intuitivo se podrán aplicar a éste muchas de las verdades demostradas en aquéllos; en caso contrario, las verdades expresadas en lenguaje geométrico relativas a espacios abstractos no tendrán nada de geométricas y habrá que saberlas traducir luego al lenguaje propio del orden de conocimientos a que se apliquen.

Mediante estas consideraciones quedará bosquejado el contenido, extensión y estructura de este trabajo con sólo indicar que su objeto es partir de los conceptos que de los cuatro términos tenían los *antiguos* y seguirles a través de sus generalizaciones adquiridas por la introducción de los elementos del orden *axiomático,* los *ideales* o *impropios*, los *en el infinito* y los *imaginarios* en el espacio intuitivo habitual, completando el cuadro con *algo de lo que pueden significar en espacios abstractos* de cualquier número de dimensiones.

II

Escuela clásica. Hace muchos años dijimos [1], sin conocerla, que la más antigua definición propiamente científica de la línea recta debía ser de Platón, 400 años antes de Jesucristo, y de este gran filósofo lo es, en efecto, según Parménides, quien asegura [2] definió aquél la recta como la *línea cuyo medio obscurece sus dos extremidades;* o lo que es lo mismo, cuyos puntos intermedios y sus dos extremos están situados sobre un mismo rayo visual.

Un siglo después, según Proclo, en su comentario al primer libro de Euclides, este gran geómetra ordenó y demostró muchas cosas hasta entonces vagas e imperfectas, diciendo del punto que era una *cosa indivisible* y de la línea que era una *longitud sin anchura*. Más recientemente, según Pasch, debe definirse el punto: todo cuerpo en el que, dentro de los límites de la observación no pueden apreciarse partes, y las líneas como sendas sobre las cuales sea imposible recorrer caminos diferentes sin salirse de los límites impuestos por la observación, en cuya vaguedad, muy apropiada para las ideas que nacen de la interpretación de los fenómenos, estriba la distinción entre los conceptos modernos y los antiguos.

De la recta dió Euclides una definición cuya traducción latina de Cristóforo Clavio es ésta: *Recta linea est quae ex aequo sua*

[1] Notas para la Historia de la Geometría de la recta. *Revista de Ciencias y Letras*. Abril de 1895.

[2] Edición F. Didot. I. París, 1891, pag 634, y J. L. Heiberg. Abh. Geschichte der Math., 1904.

interiacet puncta: y en la interpretación que debe darse a esas palabras no coinciden todos los geómetras.

Según unos la idea expresada es la de la coincidencia de la *longitud* y de la *distancia* entre cada *dos* de sus puntos, lo cual envuelven ser *mínima distancia* entre ellos, y se cae en la definición que dió Arquímedes pocos años después, diciendo: *Lineam rectam esse minima earum quae terminos habent eosdem;* definición que volvió a resucitar Legendre en 1794. Otros interpretan el sentido de Euclides como línea que *permanece idéntica,* o que se *apoya uniformemente,* o que *reposa igualmente* entre cada dos de sus puntos.

Si esta identidad de forma significa sólo la posibilidad de hacer *resbalar* un segmento de recta, con ajustamiento a la misma, a lo largo de ella queda confundida con la circunferencia y con la *hélice cilíndrica* sobre cilindro de revolución. Pero si ese acoplamiento del segmento a los diversos trozos iguales de recta, se entiende con posibilidad de *resbalar y girar* a la vez, en ese caso dicha propiedad es peculiar y privativa de la línea recta. Algunos, finalmente, dan a la definición euclidea el sentido de ser *simétrica* la *recta de sí misma respecto de cualquiera de sus puntos.*

También es referida por Proclo, atribuyéndola a Herón de Alejandría la definición que considera la recta como la *única línea que permanece inmóvil cuando se supone girando alrededor de dos de sus puntos;* y Gaus hizo observar de paso que es, en efecto, esta la propiedad en que se funda la práctica para comprobar si una cierta línea es recta o no, cuando se opera con el teodolito.

Ha habido y hay muchos geómetras, Grassmann entre ellos, que miran la recta como la *línea que conserva en cada uno de sus puntos una dirección constante;* idea contenida en el concepto *analítico-geométrico* de *coeficiente angular,* el cual, exprésese como se quiera, es razón de la diferencia de ordenadas a la de abscisas de dos puntos cualesquiera de la recta, y envuelve siempre una idea de semejanza. Y Leibniz, en una carta a Giordano, publicada en la edición Gerardt de sus obras, la considera como la *línea que divide en dos partes congruentes al plano*, y éste como la *superficie que divide a su vez al espacio en dos* *partes congruentes.* Claro que también una *sinusoide* divide al plano en dos partes congruentes. Pero si la congruencia hubiera de entenderse por ser la recta un eje de simetría del plano, estaría definida. Juan Bolyai, en un apéndice a la obra de su padre Wolfang *Tentamem, in elementa Matheseos* etc., traducida al francés por Höuel en 1868, bajo el titulo *Ciencia absoluta del espacio,* etc., y Lobatschewski en sus *Nuevos elementos de Geometría con una teoría completa de paralelas,* publicados en 1829 en el correo de Kasan, y en los *Gelehrten Schriften* de la Universidad, partiendo del supuesto de que es más facil definir el círculo que la recta, han considerado a ésta como el lugar de las intersecciones de dos *haces* de círculos coplanarios concéntricos iguales, y al plano como el lugar de las intersecciones de dos haces de esferas concéntricas e iguales, o lo que es lo mismo, como lugares de los puntos de un plano o del espacio, respectivamente equidistantes de dos fijos; datos estos últimos que conducen fácilmente a escribir la ecuación del plano bajo su forma normal, y lo mismo la ecuación normal de la recta [1]. También definen la recta como lugar de puntos equidistantes de tres puntos fijos.

La más antigua definición de *plano* es la de *Herón,* que dijo ser *la superficie que contiene enteramente toda recta que une dos cualesquiera de sus puntos.* Para Euclides era *la superficie que está igualmente situada con relación a sus rectas;* definición obscura que parece postular que una recta y un punto fuera de ella *determinen* un plano. Gaus propuso definir el plano como el *lugar de las perpendiculares a una recta en uno de sus pun-*

[1] En efecto: sea a, b y c las coordenadas rectangulares del pie de la perpendicular p al plano dado desde el origen O de las coordenadas; $2a$, $2b$ y $2c$, serán las del punto simétrico Q del origen con respecto al plano, y sean x, y, z las de un punto cualquiera de éste; se tendrá sucesivamente:

$$x^2+y^2+z^2=(x-2a)^2+(y-2b)^2+(z-2c)^2;$$

$$0=-4ax-4by-4cz+4a^2+4b^2+4c^2.$$

$$ax+by+cz=p^2; \qquad \frac{a}{p}x+\frac{b}{p}y+\frac{c}{p}z=p;$$

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p;$$

y lo mismo para la recta.

tos. A esto mismo equivale la definición de Deahna, que, haciendo girar a una esfera alrededor de un diámetro, y probando que cada uno de sus puntos describe una curva cerrada, llamaba *plano* al lugar de los rayos proyectantes, desde el centro de la esfera, de los puntos de aquellas de dichas curvas que dividen a la superficie esférica en dos partes congruentes.

Staudt define primero la *radiación* de rayos y las porciones de la misma y las superficies limitantes de estas porciones, que llama superficies *cónicas completas,* si están formadas por *rayos enteros,* y *simples,* si por *semirrayos;* y dícense *cerradas* las que limitan totalmente una porción sola de radiación. Las cerradas y completas las llama de *orden par* cuando el rayo generador vuelve a la posición inicial tal como partió de ella, y de *orden impar* cuando vuelve *invertido;* o lo que es lo mismo, cortando la superficie cónica por una esfera concéntrica, cada generatriz es cortada en dos puntos *antípodas*, y la superficie cónica será de orden par cuando las intersecciones de la generatriz describen sobre la esfera *dos* líneas cerradas *distintas* tales, que los puntos de una son antípodas de los de la otra, y de *orden impar* cuando describen una sola curva cerrada cuyos puntos son antípodas dos a dos. Sienta a seguida que toda recta que tiene común con la superficie cónica, el vértice y otro punto está toda entera en la superficie, y define el *plano* diciendo que es una *superficie cónica de orden impar en la que puede hacer de vértice uno cualquiera de sus puntos,* con lo cual queda sentado que toda recta que tenga dos puntos comunes con un plano está toda entera en dicho plano.

Por donde se ve que lo difícil ha sido en todo tiempo definir bien esos conceptos de recta y plano, y, principalmente, el de recta. Si todas esas definiciones son defectuosas ante la severa crítica actual, muchos siglos han servido como buenas, y lo que es más notable, a pesar de semejantes defectos, jamás se ha dejado de tener un concepto exacto de la línea recta finita y un criterio bastante seguro para el manejo de la recta infinita.

Prueba este aserto el que de no haber tenido ese concepto claro, no se hubieran podido percibir las deficiencias de aquellas definiciones, reconocidas en todos los tiempos; pero también da esa impresión el hecho notable de que en todas las lenguas arias, germánicas y célticas, a las ideas absolutas de justicia, de bien y de verdad, casi innatas en la especie humana, va siempre estrechamente unida la idea de la recta. Basta observar a este propósito cómo del sánscrito *argu* = recto, física y moralmente considerado, sale *arguta* = rectitud, honradez; y cómo de la raíz *arg. rag* de esa palabra, viene *rego, regula* y *rectus,* el inglés *rigt* y el alemán *recht,* todas con el doble significado de lo que va derechamente, sin torcerse ni desviarse hacia un lado ni hacia otro, moral y físicamente [1].

¿Cómo, pues, se comprende que teniendo los hombres clara idea de una cosa no acertaran a definirla con rigurosa precisión? Se ha hablado de la imposibilidad de definir ideas primitivas, ideas simples, etc.; pero las ideas de recta y plano no son primitivas, ni simples; en cambio, requieren el concurso previo de un cierto número de conceptos primitivos y de *postulados,* que, sin expresarlos, cada geómetra ha tenido en cuenta, y ha supuesto tácitamente que los demás también los habían de tener, por ser simultáneos con los de recta y plano en nuestra conciencia, antes de discernir unos de otros. Toda la imperfección de esas definiciones está en eso: en haberse callado qué cosas se tomaban como ideas primitivas y qué verdades como postulados.

Colocad delante de las definiciones de Euclides y de Leibniz, como nociones primitivas las de *punto* y *equidistancia,* y con ayuda de un sistema apropiado de postulados sentar las nociones de *simetría* sobre la recta, plano y espacio, y tales definiciones servirían perfectamente para formular con todo rigor los principios de la Geometría. Poned ante la de Arquímedes, como concepto primitivo, el de *distancia* entre dos puntos y el de *mayor* y *menor,* y determinar, bajo los postulados estrictamente precisos, la lon-

[1] En casi todas las épocas se ha usado de una regla o bastón recto en toda su longitud, como símbolo o emblema del bien y de la justicia; y cualquiera que sea la razón del uso actual del bastón de autoridad, no sería difícil encontrar entre sus orígenes, más o menos remotas concomitancias con estos fundamentos.

gitud de una línea. Sentad ante la de Grassmann la idea primitiva de *dirección* con el auxilio sólo de puntos de referencia, sin tener en cuenta la noción de recta, haciendo de la Geometría una especie de *Análisis Vectorial,* y nadie habría puesto en duda nunca el rigor lógico de tales maneras de presentarla.

En suma, todas las definiciones de los antiguos son aceptables si se expresan y concretan ciertos postulados de *congruencias* y de *movimientos* que sirven para su formulación, y si se precisan entre puntos, igualdades, equidistancias, simetrías, direcciones, longitudes, mayor y menor, etc., aquellas nociones estrictamente necesarias que deben ser tomadas como primitivas; y digo que todas son buenas, porque todas, con tales aclaraciones, permiten que en las demostraciones en que interviene la recta, pueda pensarse ésta invariablemente unida a una figura indeformable, e imaginar un movimiento tal que mientras todos los puntos de la recta permanezcan inmóviles, los de la figura situados fuera de ella se muevan; lo que juntamente con la constante posibilidad de prolongación por sus dos extremidades y la noción de la continuidad de sus puntos, constituyen las ideas integrantes de la recta.

Y como éstas se tenían, aunque no se les llegara a dar buena forma de expresión, de ahí que toda la Geometría antigua haya sido aceptada sin protestas hasta fines del siglo XVIII. Antes de los trabajos de Lobatschewski, negando el postulado de Euclides, habíase puesto en evidencia que, sin darnos cuenta, veníamos aceptando otros varios postulados; y cuando, ahondando en esto, se vió que eran éstos tantos en número que toda la base de la Geometría parecía quedar en el aire, fué cuando la alarma se apoderó de los espíritus e hizo exclamar a D'Alembert (1770) *que la definición y propiedades de la línea recta, así como el postulado de las paralelas eran el escándalo de los Elementos de Geometría.*

A partir de esta época se han ido sustituyendo a esa manera de ver, al principio lentamente y luego más rápidamente, varias concepciones impuestas por una crítica severa, desprovistas de prejuicios del orden intuitivo, pero caída a veces en otros del orden lógico [1], que empezando por no admitir ciertos postulados clásicos, y admitiendo otros, han acabado por dejar bien sentado que la Geometría, al tenor de la Mecánica racional, es una Ciencia del grupo de las Físico-Naturales, en las que hay un número de proposiciones fundamentales del orden físico, cuyo conocimiento sólo la experiencia puede proporcionarnos, y cuyas otras verdades pueden ser establecidas con todo rigor por deducciones lógicas, sin que vuelva a tenerse que recurrir más a la experiencia.

Consecuentes con este aspecto de la cuestión Pasch, Schur y otros geómetras más exclusivamente lógicos, como Hilbert y Peano, han tomado a su cargo reducir a un *mínimo* el número de esas proposiciones del orden natural, entre conceptos primitivos y postulados, haciendo, por una lógica inflexible, que desaparezcan las obscuridades que, desde ese punto de vista, tenían las demostraciones de la escuela clásica, y dando al cuerpo de doctrina de tal Geometría un carácter de absoluta pureza, no muy conforme siempre con las impurezas de la realidad, pero sí muy apto para el estudio de la Geometría superior.

Replica a esto Félix Klein, que la insuficiente determinación que traen consigo los datos suministrados por la experiencia y por la intuición hacen que los postulados geométricos tengan que contener, por mucho que se les depure, algunas cosas arbitrarias relativamente a aquellos datos; y, por consiguiente, que en Geometría, como en toda Ciencia física, habrá siempre cierto grado de libertad para hacer una elección entre varias representaciones posibles de la misma realidad; lo que puede también enunciarse diciendo que la reducción a un mínimo de los postulados y conceptos primitivos no es un problema determinado. Y esto es cierto, aunque una sistematización de los postulados en cinco grupos: de enlace, ordenación, congruencia, paralelismo y continuidad, y las condiciones que se les han impuesto de ser independientes, compatibles, simples o sin desdoblamientos posibles, y versar sobre

[1] Pues no cabe duda que cuando se exagera la simplicidad de los postulados e ideas primitivas, se puede caer en no salir de proposiciones apenas diferentes del principio de contradicción.

relaciones muy evidentes del espacio intuitivo, hayan restringido algo aquella libertad.

Aun va más lejos Poincaré, en la Ciencia y la Hipótesis, sentando que los axiomas geométricos no son ni juicios sintéticos *a priori*, ni hechos experimentales, sino pura y simplemente *convenciones*, conforme a las cuales se interpretan luego los hechos que la experiencia nos ofrece; y esta afirmación —dice F. Enríquez en la Enciclopedia de las Ciencias Matemáticas [1]— conduce a la tesis kantiana, que niega toda realidad al espacio; pero no va tan lejos, pues a poco que se piense, no es lo mismo negar toda objetividad al espacio que elegir una entre todas las convenciones posibles acerca del modo de ser de esa realidad externa.

Los postulados de la Geometría —añade el *ilustre matemático* francés— son definiciones disfrazadas, y son rigurosamente ciertos, aunque las leyes experimentales que han determinado su adopción no sean más que aproximadas; todo lo cual hace que tenga el mismo sentido preguntar si es verdadera la Geometría no euclidiana, como si son verdaderas las coordenadas plükerianas o la representación axonométrica.

Hay, finalmente, otros geómetras como Meray, Paolis, etc., que desearían poner como verdades fundamentales de la Geometría hechos y movimientos del orden intuitivo de la Mecánica, que acercaran esta Ciencia a la Geometría.

A poco que se medite sobre estas cosas, échase pronto de ver el carácter doble, *lógico-intuitivo*, de la Geometría, y la pugna entre los partidarios del predominio exclusivo de uno u otro en los elementos. Monumentos geométricos impecables ha erigido la lógica, pero en muchos casos para contemplados en una vitrina sin contacto con el mundo exterior o a lo sumo para el progreso de las abstractas idealidades de la ciencia. A errores sin cuento ha conducido la sola intuición, entre los que basta recordar la existencia de derivada en toda función continua; la extensión por *continuidad* a elementos imaginarios de verdades demostradas sólo en elementos reales, la posibilidad de trazado continuo

[1] Edición francesa. Tomo III, primer volumen, pág. 5.

y rectificación de todas las curvas, la existencia siempre de tangentes y otras.

Pero ¿cuántas geniales ideas no se deben al poder de la intuición en sus variadas formas de imaginativa, inductiva, numérica, física, etc.? La sola intuición física, por la cual de los fundamentos de la teoría del potencial sacó Riemann sus descubrimientos, entre los que descuella la notable superficie que lleva su nombre, es suficiente, por su fecundidad, a inmortalizar a su autor y a preconizar el método intuitivo como uno de los más prolíficos y a veces insustituíble, aunque lleve siempre en sí la falta de rigor científico [1].

En Matemáticas no podrá nunca prescindirse de la intuición; pero no deberá emplearse como elemento demostrativo, sino sólo como guía para las demostraciones y como recurso de invención.

[1] En su conferencia VI ante el Congreso de Matemáticos de Chicago, sobre «El carácter de la Intuición del Espacio», divide Félix Klein la intuición en *natural y refinada,* y dice que en la enseñanza es, no sólo admisible, sino absolutamente necesario, que al principio sea menos abstracta, y se aluda a los refinamientos gradualmente a medida que el estudiante vaya siendo capaz de comprenderlos.

Estas notas me son inspiradas —dice— por el recelo de un daño que no hace más que aumentar y amenaza al sistema de enseñanza superior en Alemania: el daño de una escisión entre la ciencia matemática abstracta y sus aplicaciones científicas y teóricas. Una tal escisión sería deplorable, pues tendría por consecuencia hacer reposar las ciencias aplicadas sobre una base incierta y aislar a los sabios que no se ocupan más que de las Matemáticas puras.

III

Axiomática. Hace una veintena de años que viene concretándose con el nombre de Axiomática una parte de la Ciencia, que se consagra, como indicamos antes, a precisar los conceptos primitivos y axiomas o postulados de que no se puede prescindir, a enunciarlos, a establecer su independencia y compatibilidad y las condiciones a que deben obedecer, a definir mediante ellos los conceptos de *punto, recta, plano* y *espacio,* y a construir, apoyándose en esas ideas, las primeras fundamentales proposiciones sobre que ha de gravitar luego el peso de la Ciencia entera.

En la introducción a sus Fundamentos de la Geometría, dice Schur, que desde unos diez años, que hacen hoy diez y nueve, viene sintiéndose la necesidad de dar a la Geometría unas bases rigurosas, las cuales formula él en ocho postulados, sin contar los de movimiento, paralelismo, etc., cuatro definiciones y once teoremas; y nuestro compañero D. Julio Rey Pastor, en sus Fundamentos de la Geometría Proyectiva Superior, obra a que otorgó esta Academia el premio del duque de Alba, y en la que apenas hay punto importante de la Geometría que no haya, a grandes rasgos, expuesto con su privilegiada sagacidad, ha formado un sistema mixto de *diez* con los axiomas de Pasch relativos a la recta y los del plano propuestos por Peano y simplificados por Moore, que, aunque en el fondo están en los de Schur, porque éste sintetiza a veces dos en un solo enunciado, no cabe duda que están más aquilatados y satisfacen mejor las condiciones impuestas.

Suelen constar estos sistemas, de proposiciones alusivas a la existencia, división y prolongación del segmento, como preparación para la definición de la línea recta, de otras relativas a la existencia, carácter, definición, determinación y división del plano, y de un último grupo que hace referencia a la existencia, definición y propiedades del espacio.

Dos axiomas y una definición sientan la existencia del segmento rectilíneo al postular: 1.° Que existe una variedad ilimitada de elementos que se denominan *puntos.* 2.° Que dos puntos diferentes cualesquiera determinan *unívocamente* un conjunto de infinitos puntos, al que ellos mismos pertenecen como *extremos,* que se llama segmento; y al sentar que puede decirse de todo segmento que *une* sus extremos, y de todo punto de un segmento distinto de éstos, que está *entre ellos,* que es *interior* o que *pertenece* al segmento, o bien que éste *pasa* por aquel punto; designándose finalmente con el calificativo de *exteriores* los puntos que no pertenecen al segmento.

Tres axiomas y dos teoremas establecen la división de todo segmento. Por los axiomas se admite, cosas bien intuitivas. 3.° Que si un punto es interior a un segmento, ninguno de los extremos de éste está en el segmento determinado por dicho punto y el otro extremo. 4.° Que si un punto es interior a un segmento, dicho punto, con cada uno de los extremos de éste, determina otros dos segmentos cuyos puntos pertenecen al primero. 5.° Recíprocamente: que los puntos de un segmento, en cuyo interior hay ya marcado un punto, pertenecen, excepto éste, que pertenece a los dos, a uno u otro de los segmentos determinados por ese punto con los extremos del primero, pero no a los dos a un mismo tiempo.

Con lo cual es ya demostrable, y con demostración sencilla: que el segmento determinado por dos puntos interiores a otro es parte de éste [1].

[1] Sea AB el segmento y C y D dos de sus puntos interiores en el orden $ACDB$. Todo punto de CD es punto del segmento AD, y, por tanto, de AB (axioma 4.°). Todo punto de DB no pertenece a AD, ni, por tanto, á CD (axioma 5.°). Luego si los puntos del segmento CD pertenecen todos al conjunto AB, y algunos de éste no pertenecen a aquél, CD es una parte de AB. Si C se confunde con A, o D con B, la demostración es inmediata según los axiomas 3.°, 4.° y 5.°.

Y que si en el interior de un segmento hay un punto, lo divide en dos: v. gr., de la derecha y de la izquierda, y todo punto del segmento de la derecha, por ejemplo, forma un segmento con el extremo de la izquierda en cuyo interior está el primer punto considerado [1].

Llámase *prolongación* de un segmento por un extremo al conjunto, cuando existe, de todos los puntos tales que en los segmentos que determinan con el otro extremo está siempre contenido el extremo considerado. Y he aquí ahora dos nuevos postulados relativos a este concepto de la prolongación: 6.º De dos prolongaciones de un segmento por un mismo extremo B, terminadas una en D y la otra en E, uno de estos dos últimos puntos, está necesariamente entre el otro y el punto B. 7.º En el segmento determinado por dos puntos, uno de la prolongación a la derecha y otro de la prolongación a la izquierda de un segmento dado, los extremos de éste son interiores a aquél.

Estos dos postulados añadidos a los anteriores permiten demostrar sin tropiezo alguno que: si C es un punto interior al segmento AB, primero: la prolongación de AC por el extremo C se compone del segmento CB y de la prolongación de AB por el extremo B; [2] y segundo: que las prolongaciones de dos segmentos, uno interior al otro, y terminados en un mismo extremo B por este extremo, son coincidentes [3].

[1] Sea AB el segmento; C un punto de su interior y D un punto del interior de CD, todos ellos en el orden $ACDB$. Puesto que D es un punto del segmento CB, pertenece también al AB (axioma 5.º). Y no perteneciendo C al segmento DB (axioma 3.º), y estando por hipótesis en AB, tiene que pertenecer a AD (axioma 5.º).

[2] Todo punto de CB determina con A un segmento en cuyo interior esta C según el teorema que precede: y pertenece (def. de prolongación) a la prolongación de AC por el extremo C. Todo punto D de la prolongación de AB por el extremo B, es tal que B está en el segmento AD (def. de prolongación), y como C está en AB por hipótesis y AB en AD (axioma 4.º), C está en AD (axioma 5.º); luego D pertenece también a la prolongación de AC, y recíprocamente.

[3] Sea D un punto de la prolongación de AB; B estará en el segmento AD, según definición de prolongación; y estando C en AB también estará en AD; (axioma 4.º), pero estando C en AB, B no está en AC (axioma 3.º); y si C divide a AD en dos segmentos AC y CD y B no está en AC, tiene que estar en CD; y estando B en CD, D es, por definición, de la prolongación de CB. Análogamente se demuestra el recíproco.

Y henos aquí ya en condiciones de definir la línea recta con todo rigor diciendo que es *el conjunto de todos los puntos de un segmento y de sus dos prolongaciones;* y en condiciones también de demostrar el teorema fundamental de la recta de *estar siempre determinada por dos cualesquiera de sus puntos;* para lo cual bastará probar que uno de los extremos del segmento definidor de una recta puede sustituirse por otro punto de esa recta sin que el conjunto de sus puntos sufra alteración.

Si en el segmento AB se sustituye el extremo de la derecha B por un punto interior C, los puntos del segmento AC son comunes a las dos rectas AB y AC, y lo mismo los de las prolongaciones de ambas por su extremo común A. Los puntos del segmento CB, como pertenecientes al AB y a la prolongación del AC por su extremo C, así como los de la prolongación del AB por su extremo B, también son comunes a las dos rectas, según los teoremas relativos a las prolongaciones. Si el punto C se supone en la prolongación de AB por su extremo B, este punto B es interior al segmento AC y, según lo acabado de decir, ambas rectas AB y AC son una misma.

Exactamente lo mismo ocurre si el punto C se supone en la prolongación del segmento AB por el extremo A; y pudiéndose sustituir después el otro extremo A del segmento AC por un nuevo punto D de la recta AC, síguese que ambos extremos A y B, definidores de la recta dada, han sido así sustituídos por otros cualesquiera C y D de la misma recta, sin que el conjunto de los puntos que la constituyen haya sufrido alteración.

Defínense acto seguido las *semirrectas* o *semirrayos* de un origen común A diciendo que son, por una parte, un cierto segmento AB, del que sea extremo el punto A, más la prolongación del mismo por su extremo B, y, por otra parte, la prolongación de ese segmento por su extremo A. Con esto es fácil ver que dos tales semirrayos no pueden tener más punto común que el A, el cual estará en el interior del segmento determinado por dos puntos, uno de cada semirrayo, y en una prolongación del determinado por dos puntos de uno solo de ambos semirrayos.

Para la teoría del plano, presentada bajo la gran generalidad que llevan estas concepciones no hacen falta por lo pronto más que dos postulados: uno, el *octavo* del sistema que venimos considerando, por el que se admite que hay puntos exteriores a toda recta; y otro, el *noveno,* según el cual aceptamos intuitivamente lo siguiente: que se denomine triángulo a la figura constituída por tres puntos ABC no situados en línea recta, llamados *vértices,* por los tres segmentos BC, CA, y AB, que dos a dos de esos puntos determinan llamados *lados opuestos* y por todos los puntos de los segmentos determinados por un vértice y puntos de su lado opuesto; y que si en el segmento determinado por uno de los tres vértices A, por ejemplo, y por un punto D de su lado opuesto, se toma un nuevo punto E la recta EB tiene un punto común con el lado AC y la EC un punto común con el lado AB del triángulo dado.

La proposición recíproca de este postulado que ha venido figurando como tal hasta hace poco, puede ser hoy demostrada fácilmente apoyándose en la directa, y dice: que los segmentos determinados por cada uno de *dos* vértices de un triángulo con un punto de cada uno de sus lados opuestos tienen siempre un punto común [1].

Por todo lo cual no hay ya dificultad alguna en que con todo rigor pueda ser definido el *plano* diciendo que es el *conjunto de los puntos de todas las rectas determinadas por cada vértice de un triángulo con cada punto de sus lados opuestos.*

Dichas rectas forman tres conjuntos, que constituyen los tres ángulos del triángulo. Los puntos de cada recta de un conjunto de esos se dividen en tres partes: puntos del segmento comprendido entre el vértice y su lado opuesto; puntos de su prolongación por el vértice, cuyo conjunto llamaremos *prolongación del triángulo*

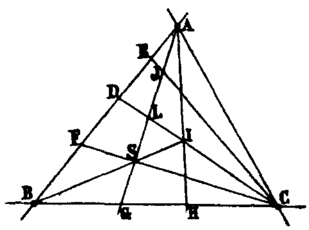

Fig. 1.ª

[1] Sea ABC el triángulo; CD y AG los segmentos del enunciado; J un punto de AG. La recta CJ tiene un punto E en AB (post. 9.°), y sobre el triángulo CAD, AJ tiene que tener, según el postulado 9.°, un punto L en CD. Si fuera S el punto tomado arbitrariamente en AG, CS tendría un punto F en AB; BS un punto I en CD; AI un punto H en CB, y CI un punto L en AG; todo conforme al axioma 9.° y recíproco, aplicados a los triángulos ABC, BCD, ABC y AGC (fig. 1.ª).

por el vértice, y puntos de las otras prolongaciones, cuyo conjunto es la prolongación del triángulo por el lado de que se trate; fraccionándose el plano en siete partes: el triángulo, las tres prolongaciones por los vértices y las tres por los lados.

Según el teorema recíproco del postulado 9.°, los puntos del interior de los segmentos de los tres conjuntos de rectas consideradas son comunes y constituyen los puntos del triángulo. Las prolongaciones de éste no tienen más puntos comunes que los situados en las seis prolongaciones de sus tres lados; siendo esto que acabamos de decir, juntamente con las proposiciones relativas al triángulo, todos los antecedentes necesarios para presentar ya el teorema fundamental del plano: el que establece que tres cualesquiera ABC de los puntos de un plano lo determinan y que simultáneamente toda recta que tiene en él dos cualesquiera de sus puntos está enteramente situada en dicho plano.

Desde luego es fácil ver, y esto suele presentarse en concepto de *lema*, que las rectas que unen un vértice del triángulo definidor de un plano a puntos de las prolongaciones de su lado opuesto pertenecen al plano; porque sus puntos se pueden unir a uno de los vértices convenientemente elegido, para que la recta de unión corte a su lado opuesto y pertenezca a las de uno de los tres ángulos, en virtud siempre del postulado 9.° o de su teorema recíproco, aplicados a triángulos fácilmente distinguibles entre los que la figura ofrece, o se pueden suponer en ella.

Asimismo, todavía en concepto de lema, las rectas determinadas por dos puntos del contorno ABC del triángulo definidor están también en el plano; porque los puntos del segmento que esas rectas tienen dentro del triángulo, unidos a uno de los vértices opuestos a los lados atravesados por la secante, dan rectas que cortan a uno de estos lados en virtud del postulado 9.°, y pertenecen a un ángulo del triángulo. Y los puntos de las prolongaciones, de la secante, también pueden ser unidos a un vértice de modo que la recta de unión corte al lado opuesto o a sus prolongaciones, en virtud del mismo postulado 9.°, o de su teorema recíproco, aplicados a triángulos cuyo señalamiento no tiene dificultad.

Cualquier vértice del triángulo determinante de un plano puede ser sustituído por otro situado en uno de los lados que concurren en aquél o en sus prolongaciones: v. gr.: C por C_1 situado en BC, sin que el conjunto de los puntos del plano sufra alteración. Afirmación que, una vez evidenciada[1], permite sustituir un vértice C del triángulo definidor por un punto C_1 cualquiera del plano; puesto que C_1 no puede estar más que en las rectas del ángulo A, o del B, o del C, si ha de ser un punto del plano. Si está en rectas AA' del ángulo A, se podrá sustituir sucesivamente ABC por ABA', y éste por ABC_1, y lo mismo si el punto nuevo está en rectas del ángulo B. Si estuviera en rectas del ángulo C, se sustituiría sucesivamente ABC por $AC'C$, éste por $AC'C_1$, y éste por ABC_1. Y por reiterada aplicación de este resultado podrán, últimamente, ser sustituídos los tres puntos ABC por otros tres cualesquiera $A_1B_1C_1$ no situados en línea recta. Y como si una recta tiene dos puntos en un plano, pueden éstos, en unión de un tercero exterior, tomarse como elementos determinantes, queda probado que dicha recta, toda entera, estará situada en dicho plano.

Atiéndese, finalmente, a la división del plano por una de sus rectas en dos *lados* o *semiplanos* tales, que todo segmento cuyos extremos estén en uno mismo de los dos semiplanos no tienen punto alguno común con la recta de separación, mientras que los que tienen un extremo a un lado y el otro al otro, tienen necesa-

[1] En efecto; las rectas del ángulo A pertenecen a los dos planos ABC y ABC_1 en virtud del lema 1.° Las rectas del ángulo B de ABC cortan a AC_1, y las del mismo ángulo de ABC_1 cortan a AC (postulado 9.°) y recíproco. Las del ángulo C de ABC cortan a AC_1, y tienen dos puntos en el contorno del ABC_1, y las del C_1 de ABC_1 tienen dos puntos en el contorno del ABC; unos y otros puntos pertenecen, por consiguiente, a los dos planos (fig. 2.ª).

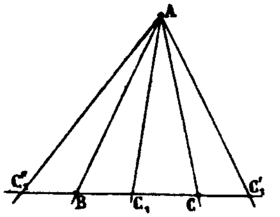

Fig. 2.ª

Si C'_1 estuviera en la prolongación de BC por su extremo C, este C estaría entre B y C'_1 y tomando como primer triángulo el ABC'_1, por el caso anterior, sería $ABC'_1 = ABC$. Si C''_1 estuviera en la prolongación de BC por B, entonces, aplicando dos veces la conclusión anterior, se tendría:

$$ABC = AC''_1C = AC''_1B = ABC''_1.$$

riamente un punto común con dicha recta. Lo cual se evidencia tomando dos puntos A y B sobre esa recta y otro C fuera de ella como elementos definidores del plano, y considerando aquellos segmentos CP que parten de C y tienen su otro extremo P en el triángulo ABC o en sus prolongaciones por (C), (CA), o (CB) para lo primero; o bien en las prolongaciones por (A), por (B) o por (AB), para lo segundo; a todos los cuales se les puede aplicar la idea de punto de una prolongación y el postulado 9.º o su recíproco, que prueban lo afirmado.

Esta manera de introducir la idea de plano geométrico apoyándola en los conceptos de punto y de recta, mediante la admisión de puntos exteriores a una recta, fué primeramente indicada por Peano y, después de aquilatado por E. A. Moore el alcance del postulado 9.º, constituye el más sencillo y natural camino para dicha presentación, preferible a cualquiera otra en que se postule el plano como un elemento nuevo, según hicieron Pasch e Hilbert; pues no deduciéndose de los solos axiomas presentados para la recta, que las que unen un punto exterior con los de una recta fija formen una superficie de esta especie, como se podría hacer ver con sistemas de líneas que cumplen los postulados de una recta y no los del plano, síguese qne no es legítima la definición directa del plano, sin un nuevo postulado colocado entre dicha definición y los axiomas de la recta; si bien no puede desconocerse tampoco que esa falta de legitimación trae una mayor simplificación y rapidez en la exposición de la Geometría plana.

Y pasando ya al concepto de espacio, observamos que si para introducir el plano hubo que admitir la existencia de puntos situados fuera de cada recta, para dar idea del espacio E_3 hay que admitir (y esto constituye el postulado *décimo* del sistema que venimos considerando) *que existen puntos situados fuera de cada plano.*

Tal idea permite definir un tetraedro como una figura formada por cuatro puntos $ABCD$ no situados en un mismo plano, llamados *vértices,* por los segmentos que cada dos de esos puntos determinan, llamados *aristas;* por los triángulos que forman cada tres, llamados *caras* (diciéndose de un vértice que es *opuesto* a la cara definida por los otros tres, y de una arista que es opuesta a la determinada por los otros dos), y por el conjunto de los puntos de los segmentos determinados por cada vértice y los puntos de su cara opuesta, llamados puntos del *tetraedro;* pudiéndose sentar a renglón seguido con todo rigor que:

Un espacio E_3 *es el conjunto de todos los puntos de las rectas determinadas por cada vértice de un tetraedro con cada uno de los puntos de su cara opuesta, más los de las determinadas por los infinitos pares de puntos situados uno en una y otro en otra de cada dos aristas opuestas.*

Las rectas definidoras de una especie E_3 vienen, pues, separadas en siete conjuntos: cuatro llamados *triedros,* de las que unen un vértice a puntos de su cara opuesta, y tres de las que unen puntos de cada par de aristas opuestas.

Todo plano determinado por los extremos de una arista AB y por un punto E de su arista opuesta CD (o por ésta y un punto F de AB) pertenece enteramente al espacio $ABCD$, porque las rectas del ángulo A del triángulo ABE pertenecen al triedro A, las del ángulo B a las del triedro B y las del ángulo E a las que se apoyan en puntos de las aristas AB y CD. De donde se sigue que los puntos del segmento AA' de una recta del triedro A, comprendido entre este vértice y su cara opuesta, son comunes a los de los segmentos análogos de rectas de los otros tres triedros, y a los segmentos EF definidos por puntos de dos aristas opuestas, y constituyen lo que hemos denominado puntos del tetraedro [1]; en cambio no tienen puntos comunes las prolongaciones de ninguno de esos segmentos; y de ahí que los puntos del espacio E_3 queden

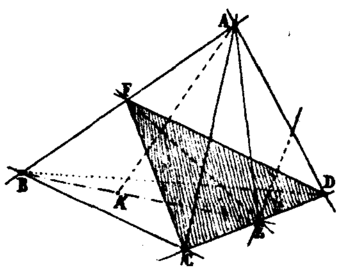

Fig. 3.ª

[1] Pues las rectas AA' y EF, como de dos ángulos del triángulo ABE, se cortan. Las rectas que cortan a dos lados, CD y FD, del triángulo CDF, teniendo sus puntos comunes con los puntos del plano CDF, pertenecen al espacio $E_3 = ABCD$ (fig. 3.ª).

Lo mismo se dice respecto de las rectas que cortan a CF y DF.

separados por el tetraedro en quince partes, a saber: el tetraedro mismo; las cuatro formadas por las prolongaciones hacia los vértices de los segmentos AA', etc., llamadas prolongaciones del tetraedro por sus vértices; las cuatro formadas con las prolongaciones de los mismos segmentos por sus otros extremos, llamados prolongaciones del tetraedro por sus caras, y las seis formadas por las prolongaciones de los segmentos EF que se apoyan en dos aristas opuestas.

Toda recta que tenga dos puntos comunes con un espacio E_3 *y todo plano que tenga tres no situados en línea recta, están por entero en dicho espacio y éste queda determinado por cuatro cualesquiera de sus puntos* ABCD, *no situados en un plano.*

Pues la consideración del plano CDF prueba que pertenecen al mismo espacio las rectas de unión de los puntos de una arista con los de una cualquiera de las caras que se cortan en la arista opuesta, y también las rectas de unión de dos puntos de dos caras, tomados sobre rectas que estén en un plano con la arista no situada en ellas.

Y como, según esto, pertenece al mismo espacio el plano determinado por un vértice del tetraedro con una recta secante de dos lados de su cara opuesta, síguese la pertenencia al referido espacio de toda recta que una dos puntos cualesquiera de dos caras; fundamento, estas tres últimas conclusiones, de que el mismo conjunto de puntos proporciona un tetraedro $ABCD$, que otro constituído por tres ABC de esos puntos y un cuarto D' tomado en cualquiera de las aristas concurrentes en D, y recíprocamente.

Lo cual puede interpretarse diciendo que un vértice del tetraedro determinante de un espacio E_3 puede ser trasladado a un punto interior de una de las aristas concurrentes en él; y recíprocamente, también a un punto de la prolongación de las mismas aristas, y por reiteración de estas traslaciones pueden los cuatro vértices de dicho tetraedro ser sustituídos por otros cuatro puntos cualesquiera análogos del mismo espacio.

También se verifica aquí que un espacio E_3 es dividido por todo plano del mismo en dos partes tales que un segmento determinado por un punto de una y otro de la otra parte tiene necesariamente un punto en dicho plano, y no lo tiene todo segmento determinado por dos puntos de una misma de las dos partes. Proposición que se demuestra como en el triángulo, tomando tres puntos ABC del plano secante y uno D exterior para definir dicho espacio; y observando que los segmentos que, partiendo de D, tienen su otro extremo P en las prolongaciones del tetraedro $ABCD$ por su cara opuesta (ABC), por el vértice (A) o por el (B) o por el (C), o bien en las prolongaciones del mismo por las aristas (AB) (BC) o (CA), cortan, según las definiciones de esas siete regiones, al plano dado ABC, y no lo cortan los que tienen dicho otro extremo P en una de las otras ocho regiones.

Para sentar que dos planos α y β que tienen un punto común S tienen común una recta que pasa por dicho punto, hay una demostración que no difiere esencialmente de la clásica, consistente en asegurar sobre el plano α dos puntos A y B a distinto lado de los dos en que β divide al espacio, tales que el segmento AB no pase por S; en cuyo caso contendrá otro punto Q de β; y la recta SQ pertenecerá a los dos planos.

Pero esto supone algo más, puesto que dos planos con un punto común en un espacio de más de tres dimensiones pueden no tener una recta común, por caer en distintos espacios E_3 de aquél.

Al llegar al espacio E_3, en efecto, y después que hubiéramos ampliado los conceptos restringidos de recta, plano y espacio E_3 que venimos considerando, convirtiéndolos en la recta, plano y espacio E_3 de carácter proyectivo, podríamos continuar postulando que *fuera de un espacio* E_3 *existen puntos;* definiendo un espacio E_4, el conjunto de los puntos de todas las rectas que pasan por los puntos de E_3 y por uno exterior al mismo; que fuera de un espacio E_4 *existen puntos;* y definiendo un espacio E_5: el conjunto de los puntos de todas las rectas que pasan por los puntos de E_4 y por un punto exterior al mismo; y así sucesivamente hasta el espacio E_n. Pero también podríamos hacer punto en el espacio E_3 y sentar como postulado, de otro carácter que los anteriores, que:

Fuera de un espacio E_3 *no existen puntos*. Únicamente con esta restricción es como es legítima la demostración de que *dos* *planos con un punto común tienen una recta* común, o lo que es lo mismo, este teorema necesita del citado postulado y viceversa; por lo cual Hilbert lo presentó como postulado, aunque así no se exterioriza tan claramente su genuino carácter de limitar a tres las dimensiones del espacio.

Pudiera verse contradicción en que se siente por un lado que no hay puntos fuera del espacio de tres dimensiones y en que se admita por otro que sí los hay. Esta aparente contradicción da a conocer, según Veronese, expositor de la generación recurrente de los espacios proyectivos de n dimensiones, el verdadero alcance de la proposición: *fuera de un espacio* E_3 *no existen puntos;* que es una pura *convención de carácter práctico,* tan estricta y justa como cuando nos circunscribimos a la Geometría plana, prescindiendo de que existan puntos fuera del plano, y equivale a esto: que el espacio a que vamos a circunscribir nuestras experiencias geométricas es un espacio de tres dimensiones.

Para garantir la compatibilidad del sistema de postulados presentados suele usarse de un artificio consistente en llamar puntos las ternas de *números,* que pueden ser coordenadas cartesianas de los puntos de un espacio de tres dimensiones, en el cual se tenga ya hecha la compatibilidad de una cierta Geometría, como ocurre con la Geometría euclídea: en introducir, constituídos con aquellas ternas de números como elementos, los segmentos, rectas, planos, etc., definiéndolos por expresiones analíticas y ecuaciones entre dichas coordenadas, sin que dejen de satisfacer a los postulados admitidos; y en ver que tales entes así definidos no envuelven contradicciones lógicas de ninguna especie, ni de sus mutuas relaciones se deducen absurdos, como fácilmente evidenciaría para los diez anteriores postulados quien maneje un poco la Geometría analítica [1].

La independencia de un axioma, respecto de los otros, se prueba igualmente viendo que hay un sistema de elementos y de entes geométricos que satisface al grupo y no a aquel cuya independencia se quiere probar. Consideremos, dice Schur, que el

[1] Véase Rey Pastor: *Fundamentos de la Geometría Proyectiva Superior,* núm. 64.

postulado primero: *Existen infinitos elementos llamados puntos,* se refiera a los puntos de un espacio euclideo de tres dimensiones, excepción hecha de un punto O y de los de dos rectas que se cruzan, que no pasen por O. Que el postulado segundo: *Dos puntos* A *y* B *determinan unívocamente un conjunto infinito de ellos llamado segmento*, se refiera a los arcos comprendidos entre A y B, que no contengan O, de toda cónica que pasa por ABO, y corta a las dos rectas. Este sistema que satisface los postulados de la recta y al primero del plano, no satisface al segundo del plano más que en ciertos casos en que los vértices ABC del triángulo, el punto O y las dos rectas de exclusión, pertenezcan a un mismo hiperboloide; luego la independencia del postulado 9.° queda establecida.

Análogamente, si como conjunto de infinitos puntos se toman los del espacio euclideo situados a un solo lado de un plano euclideo α, y como definición del segmento dado por dos puntos A y B se toma el arco de un círculo, comprendido entre ellos, cuyo plano sea siempre perpendicular a α, los diez postulados y el de Lobatschewski son compatibles con este sistema; pero no lo es el postulado de Euclides, lo que prueba que aquéllos son independientes de éste; y con nuevos conjuntos de puntos se vería que también son independientes de toda idea previa sobre las paralelas; y, por consiguiente, que valen para las tres Geometrías elíptica, parabólica e hiperbólica; por lo cual no ha hecho falta hasta ahora tratar de la naturaleza de los elementos del infinito.

IV

Elementos ideales. Ni en la definición de segmento se ha dicho nada de la continuidad de sus puntos, que pueden ser discontinuos, ni en la prolongación se ha prejuzgado nada acerca de su posibilidad, que pudiera en casos no darse, porque hemos operado hasta aquí, en un espacio limitado. Para introducir ya el concepto de espacio proyectivo hay necesidad de hacer nuevas hipótesis acerca de lo primero y de salirse con el pensamiento para lo segundo, fuera de los límites de ese espacio, a fin de que al proyectar los puntos de una recta desde un punto exterior a ella pueda establecerse correspondencia biunívoca entre dichos puntos y todos los rayos del haz proyectante, como también entre los puntos de un plano y todos los rayos de una radiación proyectante, y a fin también de que el carácter *dual* que, sin excepción, tiene la Geometría de la radiación de vértice propio, puesto que cada dos de sus rayos determinan un plano y cada dos de sus planos un rayo, pueda hacerse extensivo, sin excepción, a la Geometría del plano.

Esto se logra con la introducción de los elementos *ideales;* pero ésta requiere el concurso previo de ciertas proposiciones como las de los triaristas y radiaciones en perspectiva, que, aunque conocidísimas, conviene dar a su presentación una forma que deje a salvo toda objeción que a los nuevos conceptos pudiera oponerse.

El teorema de los triaristas homológicos, o teorema de Desargues en la radiación, dice, como sabéis: que si las aristas aa', bb', cc', de dos triaristas relacionados, de vértice común, están sobre planos concurrentes en una recta d, los pares de caras homólogas (opuestas a esas aristas) se cortan en rectas de un plano δ, y recíprocamente; y a esta proposición ha dado D. Ventura Reyes Prosper, catedrático del Instituto de Toledo, una demostración que ha sido incorporada a la enseñanza oficial alemana [1], fundada en que cada rayo de tres coplanarios de una radiación separa siempre a dos semirrayos de los otros dos; en los postulados y teoremas del plano y en la intersección de los planos de dos construídos triangulos, tan ingeniosamente combinados, que apenas interviene el vértice de los triaristas; a cuya no intervención en absoluto tienden las nuevas concepciones [2].

[1] Schur: *Grundlagen der Geometrie*, pág. 15.

[2] Se toman en a y a' puntos A y A' a distinto lado de d. El segmento AA' tendrá un punto D en d. Se toma en b' un punto B' a distinto lado que D respecto de b, y el segmento DB' tendrá un punto B en b (fig. 4.ª). Si el plano $DBNA'$ pasara por el vértice de los triaristas, los planos ab y a' b' se confundirían; todas sus rectas serían comunes y habría una coplanaria con las $(ac\text{-}a'c')$ y $(bc\text{-}b'c')$. Si $DBNA'$ no pasa por el vértice, en dicho plano no hay ninguna de las seis aristas y podremos tomar sobre c un punto C, que no esté en $DBNA'$ y caiga a distinto lado que D respecto de c'; así el segmento DC tendrá un punto C' en c'. Ahora bien, por el triángulo ACA' se cortan AC y $A'C'$ en M; por el DCB' se cortan CB y $C'B'$ en L; y por el $AA'B'$ se cortan AB y $A'B'$ en N. Y perteneciendo L, M, N a los planos de los dos triángulos ABC y $A'B'C'$, pertenecen a su intersección, y las tres rectas l, m, n, de intersección de caras opuestas están en el plano determinado por L, M, N con el vértice.

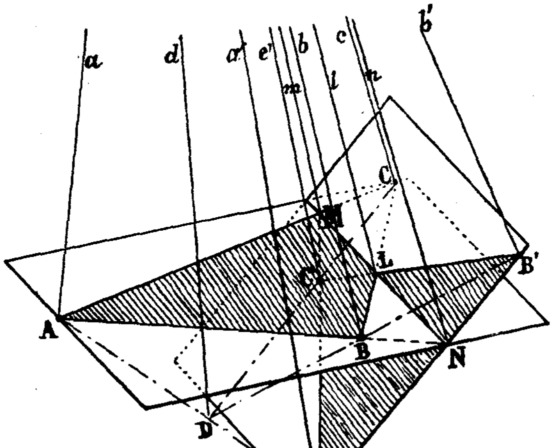

Fig. 4.ª

Para la recíproca se halla d como intersección de aa' y bb', se traza el plano dc que cortará al a' c' en una recta c_1, que no puede ser otra que c', por la perspectiva de los triaristas abc y a' b' c'_1, que tienen el mismo plano de homología mn que abc y a' b' c'.

También recordáis seguramente el otro teorema de las radiaciones perspectivas que dice que si dos radiaciones de vértices distintos V y V' se cortan por un plano ε no perteneciente a ninguna de ellas, y se relacionan entre sí de modo que sean correspondientes los pares de rayos de una y otra que proyectan un mismo punto de ε, dicha correspondencia es biunívoca, a cada tres rayos de un plano de una, corresponden tres rayos de otro plano de la otra, y los planos comunes y rayo común de las dos radiaciones se corresponden consigo mismos.

Esta proposición, que cuando se trata de elementos propios es sencillísima, es el fundamento para la introducción de los elementos ideales, y su establecimiento requiere nn minucioso examen de las circunstancias y situaciones en que los elementos que en ella intervienen pueden encontrarse.

Primeramente conviene ver que a un haz de planos de arista r de la radiación V corresponde un haz de planos de arista r' de la radiación V', lo cual no tiene nada de particular cuando la recta r corta el plano de la homología ε, en cuyo caso la r' lo cortará en el mismo punto, y los planos correspondientes de ambos haces serán los que desde V y V' proyectan rayos del haz de rayos de vértice $r\varepsilon$ situado en el plano de la homología. Pero puede suceder que moviéndose el punto $r\varepsilon$ sobre dicho plano, llegue a posiciones para las cuales no podamos garantizar su existencia (como cuando él se saliera del recinto limitado del referido plano ε en que operamos).

No utilizando del rayo r más puntos que los que estén a un mismo lado del plano ε, vamos a ver que aun en este caso subsiste la correspondencia de los dos haces de planos de aristas r y r'.

Porque si son m, n y p las trazas sobre ε de tres planos del haz r de la radiación V, no estarán a nuestra disposición de estas tres rectas más puntos que aquellos de cada una que caen a un mismo lado respecto de las otras dos, y entonces es fácil, como se indica, construir dos triángulos, ABC y $A'B'C'$, cuyos lados homólogos se corten en puntos J, K, L, de una recta y cuyos vértices homólogos A y A', B y B', C y C' caigan, respectivamente, sobre las mencionadas rectas m, n y p [1]. Y siendo homológicos entonces, respecto del eje r, los triaristas $V\,(ABC)$ y $V\,(A'B'C')$, y teniendo los $V'\,(A\,B\,C)$ y $V'\,(A'\,B'\,C')$ cortándose en rectas $V'J$, $V'K$, $V'L$ de un plano sus pares de caras homólogas, en virtud del teorema anterior, tendrán sus pares de aristas homólogas sobre planos $V'm$, $V'n$, $V'p$ que pasan por otra recta r' de su radiación. Luego a todo rayo r de V, corte o no corte a nuestra vista al plano ε, le corresponde biunívocamente un rayo r' de V'.

En segundo lugar, hemos de considerar tres rayos a, b y c de un plano de la radiación V. Si ellos cortan a ε, los puntos $a\varepsilon$, $b\varepsilon$ y $c\varepsilon$ estarán en línea recta, y por ésta pasará al plano que contiene los rayos homólogos $a'\ b'\ c'$.

Pero si a, b, c, estando en un plano, no encuentran a ε, puédense siempre construir, como se indica [2], dos triaristas $l\ m\ n$ y $l'\ m'\ n'$, de vértice V, cuyos pares de caras homólogas se corten en a, b y c, respectivamente, y como estas tres rectas están

[1] Se toman A y A' arbitrariamente sobre m. Se toma K al otro lado de p a que están A y A'; y se trazan KA y KA' que tendrán sobre p los puntos C y C'. Se toman B y B' sobre n de modo que B' y C' estén a distinto lado de BC; con lo que BC y $B'C'$ tendrán un punto común J. Según el postulado del triángulo aplicado al $A'B'K$, KJ tiene un punto L de $A'B'$, y según la homología de los triaristas $V\,(A\ B\ C)$ y $V\,(A'\ B'\ C')$ respecto de r, el lado $A\,B$ pasa también por L (fig. 5.ª).

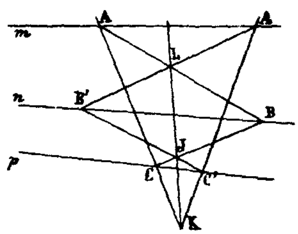

Fig. 5.ª

[2] Se hace pasar por c un plano que corte a ε. Sobre su traza se toman dos puntos L y M, y se nombra $VL = l$, $VM = m$ y $(bL,\ aM) = n$, cuya traza en ε será N. Se hace pasar por b otro plano. Sobre su traza en ε se toman dos puntos L' y N' y se supone $VL' = l'$, $VN' = n'$ y $(aN',\ cL') = m'$, cortando ésta a ε en M'. De este modo las caras de los triaristas $l\,m\,n$ y $l'\ m'\ n'$ pasan: las $l\,m$ y $l'\ m'$ por c; las $l\,n$ y $l'\ n'$ por b; y las $m\,n$ y $m'\ n'$ por a. Euclídeamente puede reducirse la figura a las trazas de los triaristas sobre ε, imaginando en este plano las direcciones de a, b y c, a las que serán paralelos los pares de lados de los triángulos LMN y $L'\,M'\,N'$, que quedarán de ese modo homotéticos. Después de esto es fácil imaginar el caso en que a, b y c no sean paralelas ni corten, a la vista, al plano ε.

por hipótesis en un plano, los planos de los pares de aristas homólogas ll', mm', nn' de esos dos triaristas se cortarán en un rayo r. Pero, cortando a ε esos tres planos, los triaristas que desde V' proyectan los triángulos LMN y $L'\ M'\ N'$, trazas de aquéllos, esto es, los triaristas $l_1\ m_1\ n_1$ y $l'_1\ m'_1\ n'_1$ serán perspectivos respecto del eje r' homólogo del r; y, por consiguiente, también sus pares de caras correspondientes se cortarán en rectas a', b', c', de V', que estarán en un plano. Luego a toda terna de rayos coplanarios de una radiación, corten o no a nuestra vista al plano de la homología, corresponde biunívocamente otra terna de rayos coplanarios en la otra radiación.

Por último, que los planos que pasan por las vértices de las dos radiaciones se corresponden consigo mismos cuando dichos planos cortan al de la homología, es evidente; y es evidente también, después de lo dicho en la primera parte de este razonamiento, que a todo rayo r de uno de esos planos secantes del de homología, aunque r no lo sea, corresponde un rayo r' situado en el mismo plano, puesto que pudiéndose determinar r por el plano doble con cualquiera otro, su homólogo vendría también determinado por el plano doble y el homólogo del otro. Si los vértices de las dos radiaciones están a distinto lado del plano de homología, el segmento VV' tiene un punto en dicho plano y no hay plano doble que no corte al de homología. Pero si los vértices V y V' de las dos radiaciones están a un mismo lado del ε, puede ocurrir que un cierto plano $V'\ r$ no lo corte.

Tómase en este caso, al otro lado de ε una radiación V'' relacionada perspectivamente con cada una de las dadas por el mismo plano de homología. Dos rayos r y r' homólogos de V y V' tendrán siempre un mismo rayo r'' correspondiente en V'' puesto que los planos rV'' y $r'\ V''$ no tienen más que una recta común r''. Tómese un punto T en el segmento VV'; el plano $r''\ T$ cortará al ε en una recta r''', tal que todos los rayos homólogos de las radiaciones dadas situados en los planos Vr''' y $V'\ r'''$ serán unos mismos, ya se tome como plano para relacionarlas el plano ε o el $r''T$. Y, siendo en esta última correspondencia homólogos también los rr'' y $r'r''$, lo serán los rayos dados r y r', intersección el primero de los planos rr'' y Vr''' e intersección el segundo de los $r'r''$ y $V'r'''$ homólogos de aquéllos. Y como están finalmente r y r' a distinto lado del plano nuevo de referencia Tr'', estarán en un mismo plano. Con lo cual queda sentado, de un modo general, que dos rayos homólogos cualesquiera están siempre en un mismo plano, que es el determinado por uno de ellos y el vértice de la otra radiación; el cual será siempre doble, ya corten o no dichos rayos, o dicho plano, al plano de la homología.

Hemos llegado al término de esta minuciosa, aunque no muy atractiva, revisión de circunstancias en la correspondencia biunívoca entre los elementos de un plano y los de dos radiaciones homológicas por él; y si la habéis seguido en sus detalles, no habréis dejado de observar cuánto ingenio hay puesto en ella para hacer posible siempre, con construcciones sobre el campo conocido del plano de homología, la determinación, en todos los casos, de elementos homólogos de ambas radiaciones. Así que, cuando se introduzcan en la Ciencia, con el nombre de *elementos ideales del plano*, las partes fundamentales de esas construcciones, nada arbitrario se habrá introducido en la Geometría plana, mientras su campo de acción se habrá ensanchado extraordinariamente.

Síguese inmediatamente de esa discusión: 1.° Que dos rectas a y b de un plano, independientemente de que se corten o no, determinan una radiación de rayos; es decir, se pueden construir los rayos de esa radiación que pasan por cada punto P del espacio, hallando las intersecciones de los pares de planos aP y bP, de las que no hay más que una por cada punto P, y dos de estos rayos (aP, bP) y (aQ, bQ) están siempre en un plano. 2.° Que dos rectas a y b de un plano, córtense o no, más dos puntos exteriores V y V' determinan dos rayos

$$(Va, \quad Vb) = r \qquad \text{y} \qquad (V'a, \quad V'b) = r',$$

uno de cada radiación, que son homólogos; y no sólo ellos entre sí están en un mismo plano, sino que cada uno de ellos está también en un plano con cada una de las trazas de los planos que pasan por el otro, sobre el plano ab. 3.° Dos rectas a y b de un plano, córtense o no, determinan un haz de rayos al que ellas pertenecen; es decir, por todo punto C del plano ab se puede hallar el rayo c del haz, construyendo primero el rayo r de una radiación de vértice V que determinan Va y Vb, y hallando luego la intersección del plano rC con el ab.

Pero la figura última, enseña, a su vez, a trazar por un punto C de un plano en que hay dos rectas m y n, una recta concurrente con ellas sin emplear construcciones fuera del plano, y córtense o no dichas rectas en los límites en que se opera; para lo cual basta construir un triángulo cuyos vértices sean el punto dado C y otros dos A y B de cada una de las rectas m y n; en tomar A' y B' sobre m y n, de modo que el segmento $A'B'$ corte al AB en L; en unir A' y L con un punto K de la prolongación de AC, y en unir el punto B' con la intersección J de LK y BC. El punto común C' de $B'J$ y $A'K$ unido con C determina la recta pedida.

Las rectas de una radiación vienen ligadas por dos condiciones: la de estar cada dos en un plano y la de pasar todas por un punto. Mas como la primera supone la segunda cuando el vértice es propio, y suple perfectamente a la segunda en todas las construcciones cuando no se tiene una garantía de la existencia real de dicho vértice, podemos nosotros definir la radiación de rayos: el conjunto de todas las rectas, cada una de las cuales está en un plano con cada una de las otras, sin estar todas en un mismo plano. Cuando dicha radiación tenga vértice propiamente dicho, ella define este vértice; cuando no, define lo que debe entenderse por un *punto ideal.* Un *punto ideal* es, pues, el conjunto de rectas cada una de las cuales está en un plano con cada una de las otras, sin estar todas en un plano, en el caso en que no se tiene seguridad de la existencia real de su punto de concurso. De este modo tienen una misma manera de determinación los puntos *propios* y los *ideales.* Así, *una recta y un plano, o bien dos rectas de un mismo plano, determinan siempre un punto real o ideal.*

Ahora bien, si se tienen dos puntos ideales, dados por sus correspondientes radiaciones, por cada punto del espacio pasa un plano común a ambas, que es el determinado por los rayos de una y otra que pasan por dicho punto; plano que contiene todavía una infinidad de pares de rayos de las dos radiaciones. Todos los planos construídos de ese modo forman un haz de planos cuyo eje, cuando las radiaciones dadas son de vértices propios, es la recta que une estos vértices, y cuando no hay garantía de la existencia de esa recta, introdúcese el propio haz de planos bajo la denominación de una *recta ideal.* Una recta ideal queda, pues, determinada por dos puntos ideales; y como puede tomarse para éstos un mismo plano común a sus dos radiaciones, *determínase una recta ideal por un plano y dos rectas situadas fuera de él*, una de cada radiación, que pueden suponerse, o no, trazadas por un punto; o por *un plano y dos rectas de la primera radiación y otras dos de la segunda,* situadas las cuatro en dicho plano; o bien, finalmente, por dos planos propios del haz que representa.

Si suponemos dicha determinación hecha por un plano π y por dos rayos l y m trazados por un punto P del espacio, toda recta n trazada por P, en el plano lm, determina con el plano π un punto *ideal;* y el conjunto de todos los puntos ideales así determinados pertenece a la recta ideal dada. Si tres puntos de una recta ideal πl, πm, πn, se unen a otro punto Q del espacio, los tres rayos nuevos proyectantes l' m' n', estarán también en un plano, según el teorema de las radiaciones homológicas; y este plano pertenecerá al haz de la recta ideal dada πlmn, y, al mismo tiempo, a las radiaciones de dichos tres puntos ideales; y, por ende, a las de todos los puntos ideales de aquella recta.

Y estas consideraciones permiten que muchos teoremas establecidos sólo con elementos propios, puedan ser generalizados al caso en que alternen con elementos ideales, por ejemplo: tres planos propios, un plano propio y una recta ideal, o bien dos rectas ideales de un mismo plano, determinan siempre un *punto* propio o ideal. Pues como la recta ideal del segundo caso la determinan dos planos propios y las dos rectas ideales del tercero dos pares de planos propios, de los que tiene que ser común un plano de cada par para que las rectas ideales estén en un plano, los elementos propios determinantes, en los tres casos, son tres planos. Si los tres planos pasan por una recta propia o ideal, tienen infinitos puntos reales o ideales. Si no, dos de ellos determinan una recta propia o ideal; con la cual el tercero no puede tener más que un punto común, como es fácil ver en detalle [1].

Entre puntos propios e ideales y rectas propias e ideales, no hay elemento de un plano que no tenga su correspondiente en una radiación perspectiva con él, ni ninguno de la radiación que no tenga su correspondiente en el plano; y a la perfecta dualidad existente en la radiación corresponde una perfecta dualidad existente en el plano; pudiéndose decir de éste, de un modo general, que cada dos de sus puntos determinan una recta y cada dos de sus rectas determinan un punto, sean unos y otros propios o ideales.

El teorema de Desargues relativo a los triángulos homológicos en un plano, que dice que si los vértices correspondientes de dos triángulos están alineados con un centro, sus pares de lados homólogos se cortan en puntos de una recta, y recíprocamente, es ahora verdadero para los diversos casos en que todos o parte de los elementos que intervienen en él, incluso el centro y eje de homología, sean propios o ideales; y su demostración resulta inmediatamente, con sólo cortar dos triaristas perspectivos por un plano que no pase por su vértice común.

[1] Sean α β y γ los tres planos dados. Por cada punto P del espacio pasa un plano α', β', γ', de cada uno de los haces $\beta\gamma$, $\alpha\beta$ y $\alpha\gamma$ respectivamente. Dos de estos planos β' y γ' (figura 6.ª) se cortan en una recta r y pertenecen a la radiación de vértice αr. Siendo común a α y γ' por un lado y a α y β' por otro ese vértice, a dicha radiación pertenecen los haces de planos $\gamma\alpha\gamma'$ y $\beta\alpha\beta'$; y por tanto los planos β y γ; y, por consiguiente, la arista del haz $\beta\gamma$. Y si esta arista y r pertenecen a una misma radiación, están en un plano: luego el plano α' pasa también por r, que es el significado geométrico de la proposición.

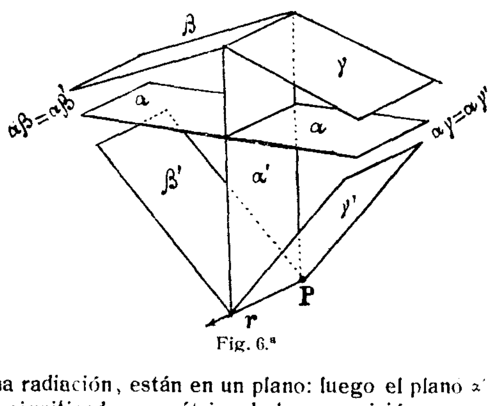

Fig. 6.ª

Por otra parte, en la demostración del teorema dargesiano de la radiación intervinieron, como vimos, dos triángulos ABC y $A'\ B'\ C'$ de planos diferentes, sobre los cuales giró toda la argumentación ideada por Reyes Proper. Ese solo hecho prueba que el teorema actual es cierto también para triángulos de planos diferentes. Y, aunque por la naturaleza de aquella construcción, los vértices de aquellos dos triángulos, y el centro y eje de su homología, eran elementos propios, con los recursos de que ahora disponemos, puede ser la misma figura utilizada, y el teorema válido, para el caso de ser ideales una parte o todos los puntos y rectas que en su construcción intervienen, y estar en un mismo plano o en planos diferentes los triángulos supuestos, todo lo cual da al teorema de Desargues una generalidad extraordinaria.

Por eso se utiliza dicho teorema para toda construcción fundamental con elementos ideales, y esa construcción, cuando la figura es plana, puede realizarse totalmente en el interior de su plano, excepción hecha del tirado de una recta por un punto propio y uno ideal, que requiere, como vimos, la intervención de una radiación en que el plano se supone colocado. Esta excepción es legítima porque, aunque la construcción en su plano de dos triángulos homológicos con dos pares de vértices sobre las rectas definidoras del punto ideal, y uno del tercer par en el punto dado, nos conduciría al punto incógnito de este tercer par de vértices, y, por tanto, a la recta pedida, puede ocurrir que dicho último vértice resultara ideal, y en este caso no habríamos salido del problema propuesto. Sin embargo, dada la libertad para elegir los vértices de los triángulos, la mayor parte de las veces podrá también dicho problema ser resuelto con recursos exclusivos del plano.

Para hallar, en segundo lugar, el punto γ de intersección de una recta propia c, con la de unión de dos puntos ideales α y β se construye un triángulo ABC que tenga dos vértices A y B en c y dos lados AC y BC, pasando por β y α respectivamente. Se toma arbitrariamente un punto C' y este punto se une con β y α: sobre cuyas rectas se procura que caigan los lados correspondientes de los AC y BC de un segundo triángulo homológico de aquél; el tercer lado de este triángulo, juntamente con la recta c, determinan el punto ideal pedido [1].

Para construir, en tercer lugar, el punto de intersección de dos rectas ideales que pueden suponerse siempre, dada una por dos puntos ideales A y B, y la otra por una recta *ideal* d, se construye un primer triángulo ABC que tenga dichos dos puntos ideales y un tercero propio C por vértices; se toma la recta ideal d por eje, de homología, y se construye otro triángulo $A_1\ B_1\ C_1$, de dos vértices propios a lo menos, homológico del anterior; del cual dos lados corten a sus homólogos del primer triángulo en puntos de d y además sea propio el centro de la homología V; el tercer lado $A_1\ B_1$ de este triángulo resuelve el problema, porque sus intersecciones con el eje de la homología (recta ideal) y con su lado homólogo AB (recta también ideal) son un solo y mismo punto, que es el que se buscaba [2].

[1] Dicha construcción en detalle es la siguiente: Tomemos sobre c dos puntos propios A y B y determinemos el punto propio o ideal C de intersección de las rectas $A\beta$ y $B\alpha$ (fig. 7.ª). La libertad que así resulta en la elección del punto C nos permite que, tomando otro punto C' y uniéndolo con β y con α, podamos tomar sobre la recta $C'\beta$ un punto A' que esté al otro lado que A respecto de CC'. De este modo los segmentos CC' y AA' tienen que tener un punto común V. La recta propia BV y la $C'\alpha$ tienen un punto B' real o ideal común; de tal modo que las rectas c y $A'B'$ determinan el punto ideal pedido.

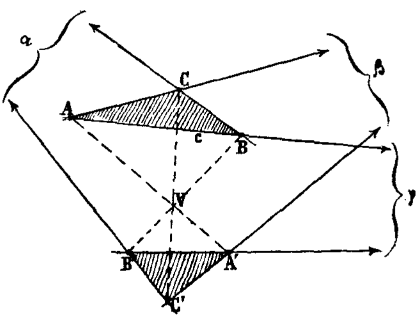

Fig. 7.ª

[2] Los detalles de construcción (fig. 8.ª), relativos a este problema, son los siguientes: Se trazan las rectas CA y CB que unen un punto propio C a los dos ideales dados A y B. Se hallan por el problema anterior los puntos α y β en que dichas dos rectas cortan a la recta ideal dada d. Se toma un punto arbitrario A_1, el cual se une

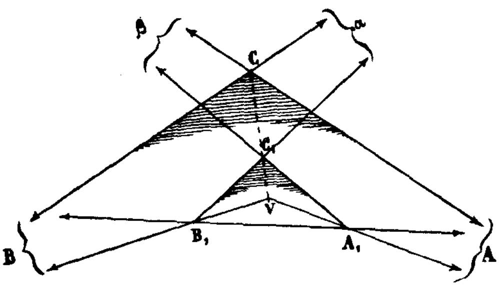

Fig. 8.ª

Resultado sorprendente que prueba cómo, a base del teorema de Desargues, podemos nosotros ejecutar toda construcción con elementos ideales de un plano, mediante el trazado de rectas propias del mismo plano; pero debemos hacer constar al mismo tiempo que, en cambio, el propio teorema de Desargues no puede ser establecido con los nueve primeros postulados relativos a la recta y al plano solamente, sino que requiere la aceptación del *décimo*, en el que se postula la existencia de puntos existentes fuera de un plano.

Y con esto podemos ya pasar a ocuparnos del *plano ideal*, que nos permitirá introducir en el espacio una dualidad entre puntos y planos, análoga a la que los otros elementos ideales han permitido en el plano entre puntos y rectas. Pero antes conviene que nos fijemos en aquella proposición que dice que si dos planos están relacionados, mediante el auxilio de un centro ideal exterior T, de modo que sean correspondientes los puntos en que son ambos planos cortados por todo rayo propio o ideal trazado por aquel centro, a cada tres puntos de una recta propia o ideal de uno de los planos, les corresponden tres puntos de una recta del otro plano.

Si los tres puntos considerados en el primero de los dos planos están en una recta propia, prueban la tesis, la definición de recta ideal y sus modos de determinación, caso de que los correspondientes, todos o algunos, tengan que ser ideales. Pero si los tres puntos M, N, P, dados en el primer plano son ellos ideales, no pudiendo estar entonces más que en una recta ideal, podríamos construir en dicho plano dos triángulos homológicos que tuvieran dicha recta ideal por eje de homología, y su centro de homología fuera un punto propio V, las proyecciones de estos triángulos desde el centro T sobre el segundo plano dado serían otros dos triángulos también homológicos respecto del centro V' proyección del V, los cuales tendrían, en consecuencia, sus tres pares de lados homólogos cor-

con A y con β. Sobre A_1A se toma un punto V al otro lado de $A_1\beta$ a que está C. Se une C con V, y el segmento CV tendrá un punto C_1 en $A_1\beta$. Las rectas VB y $C_1\alpha$ tendrán un punto real o ideal común B_1 y la recta B_1A_1 es la que se pide, pues tiene que concurrir con $d = \alpha\beta$ y con AB, según la homología de los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ respecto del centro V.

tándose en puntos $M'N'P'$ de una recta y estos puntos serán las proyecciones de los puntos dados [1].

Todo lo cual, traducido al lenguaje corriente, quiere decir que el lugar de todas las rectas ideales determinadas por un punto ideal T, juntamente con los puntos MNP de una recta ideal, es cortado por un plano (el segundo de los dados) en una recta $M'N'P'$. Y esto nos autoriza a llamar a dicho lugar geométrico un *plano ideal,* y además a sentar que toda recta ideal que tiene dos puntos comunes con un plano ideal está enteramente contenida en dicho plano, y lo divide en dos partes, puesto que el plano definidor de una tal recta divide al espacio, y, por tanto, a todo plano ideal que tenga esa recta por directriz.

A su vez son sencillas verdades desprendidas del nuevo concepto de plano y de proposiciones anteriores, las de que: toda recta ideal es determinada *por dos planos;* todo plano tiene con un plano ideal una recta común: y según la definición de recta ideal, todo plano ideal es encontrado por una recta ideal en un punto, que es único, siempre que dicha recta no esté contenida en el plano. De todo lo cual se sigue inmediatamente que dos planos ideales tienen común una recta determinada por las intersecciones

[1] Para hacer ver la posibilidad de la construcción indicada arriba: Tracemos por P una recta y tomemos sobre ella dos puntos propios A y B. Unamos A con N y B con M (fig. 9.ª), y estas dos rectas acusarán el punto propio o ideal C. Tomemos un nuevo punto C_1 y sobre la recta C_1N un punto A_1 al otro lado de CC_1 a que está A. El segmento AA_1 tendrá con el CC_1 un punto propio común V. Se halla el punto propio o ideal B_1 de intersección de C_1M y A_1P, y según el teorema de Desargues la recta BB_1 pasa por V. Proyectando esa figura entera sobre el segundo plano sin cuidarse de MN y P, los nuevos triángulos $A'B'C'$ y $A'_1B'_1C'_1$ serán perspectivos respecto de V', proyección de V, y tendrán sus pares de lados homólogos, cortándose en puntos $M'N'P'$ de una recta homóloga de la MNP.

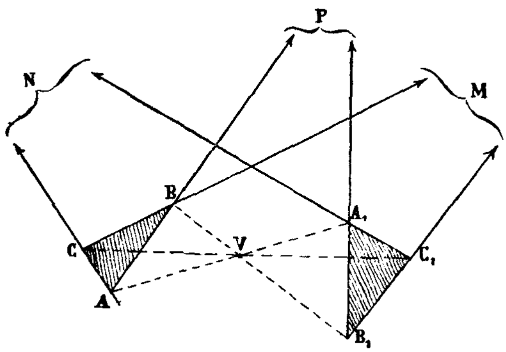

Fig. 9.ª

de dos pares de sus rectas ideales, obtenidas las de cada par, como intersecciones con un tercero, de los dos planos dados. Y, finalmente, lo que es consecuencia de lo anterior: que tres planos ideales tienen común un punto o una recta que no pueden ser más que ideales. Viéndose asimismo que toda recta y todo plano que tengan un punto propio, no pueden ser más que recta propia y plano propio, respectivamente, etc., etc.

Pasch introduce el concepto de *plano ideal*, demostrando que, así como entre elementos propios, dado un triángulo ABC, toda recta que une un punto E del lado AC a un punto D de la prolongación de AB por el extremo A, corta al lado BC de dicho triángulo en un punto F, asimismo ocurre cuando son ideales todos los mencionados elementos, y esto independientemente de que por los puntos A, B y C pueda o no pueda pasar un plano.

El artificio demostrativo de Pasch es también mucho más laborioso, pues proyecta sobre un plano propio π, convenientemente elegido, los puntos $ABCDE$ desde dos puntos propios K y M no situados separadamente en un plano con A, B, C; con lo que obtiene en π dos figuras planas $A_2B_2C_2D_2E_2$ y $A_3B_3C_3D_3E_3$, en las que no están alineados $A_2B_2C_2$ ni $A_3B_3C_3$ y sí lo están $D_2A_2B_2$ a la vez que $A_2E_2C_2$, así como también $D_3A_3B_3$, a la vez que $A_3E_3C_3$. Desde un punto L del segmento MK proyecta la figura $A_2B_2C_2D_2E_2$ y hace de modo que las figuras radiadas $L(A_2B_2C_2D_2E_2)$ y $M(A_3B_3C_3D_3E_3)$ sean perspectivas respecto de una cierta figura plana $A_1B_1C_1D_1E_1$, cuyos puntos están en la misma disposición. Y de aquí que si las rectas B_2C_2 y D_2E_2 se cortan en F_2 y las B_3C_3 y D_3E_3 en F_3, las F_2L y F_3M tengan que cortarse en un punto F_1 de las rectas B_1C_1 y D_1E_1; y, por tanto que la recta $MF_3 = MF$ está en un plano con $MB_3 = MB$ y $MC_3 = MC$ y también en un plano con $MD_3 = MD$ y $ME_3 = ME$, que es lo que geométricamente se da a entender cuando se dice que la recta DE corta a la BC o que está en el plano ABC, independientemente de la existencia real de dicho plano, que por eso se le llama *plano ideal*.

Pero eso de que la recta DE tenga que cortar a la BC, cuando los puntos D y E se toman respecto de los ABC en la disposición indicada, no es otra cosa que una extensión a puntos ideales, del postulado segundo del plano, que dice que si respecto del triángulo *BDC*, en el segmento *CA*, se toma un punto *E*, la prolongación de *DE* corta al lado opuesto *BC*; y es claro que si los dos postulados del plano se verifican en lo que hemos llamado plano ideal, todas las propiedades y relaciones obtenidas entre los elementos de los planos propios quedan *ipso facto* generalizadas a planos ideales, y la proposición fundamental del plano en la Geometría proyectiva es la contenida en el teorema anterior de Pasch, a saber: que si cuatro puntos *ABCD*, no tres a tres en línea recta, son tales que *BC* y *AD* se cortan, también se cortan *AB* y *DC* por un lado y *AC* y *BD* por otro. No otra cosa debe verse en el concepto de plano ideal, definido por los tres puntos ideales *ABC*.

La universalidad dada con los elementos ideales a los fundamentos de la Geometría Proyectiva, es, como habréis visto a poco que os hayáis fijado en ello, mucho más amplia que la que se logra con los llamados elementos en el infinito y los postulados sobre paralelas; puesto que para el concepto de punto ideal, no ha hecho falta más que los postulados relativos a los segmentos de un triángulo contenido en un limitado dominio, y no ha habido que hacer hipótesis ninguna acerca del modo como pueden cortarse dos rectas de un plano; todo lo cual hace aptos los conceptos geométricos ideales para fundamentar las Geometrías no euclideas, cada una de las cuales se diferencia de la euclidea, y ellas entre si por las diferentes maneras de ser y de comportarse dos rectas de un plano ilimitado, difiriéndose así la postulación de si dos rectas propias de un plano tienen un solo punto en el infinito o dos o ninguno.

Esta independencia de la Geometría Proyectiva, respecto de los postulados sobre paralelas, lograda con los elementos ideales, fué hecha notar primeramente por Félix Klein, aunque Pasch había ya algún tiempo antes indicado dicha posibilidad y sembrado preciosos elementos para el completo desenvolvimiento de tales ideas. La forma aparentemente elemental en que estos conceptos vienen expuestos, ha hecho que no se hayan apercibido de todo su valor los geómetras ni haya sido por éstos bien apreciado todo su alcance hasta ha poco tiempo y después de las indagaciones de Hilbert; y entre nosotros puede decirse que aun no han adquirido carta de naturaleza, ni se dan más que en las lecciones de Geometría superior, que nuestro estimado compañero Sr. Vegas profesa de algún tiempo a esta fecha en un curso del período del Doctorado de Ciencias Exactas; lo cual explica, por otra parte, la indiferencia con que el público español ha acogido la esmerada traducción hecha de la obra de Pasch por los Sres. Rey y Álvarez Ude.

Una recta tiene un segmento que es el encerrado en el dominio espacial en que operamos, cuyos puntos son todos propios; segmento que puede faltar en absoluto si es ideal, y dos prolongaciones de puntos ideales, sobre cuya posibilidad real nada se prejuzga, que permiten en cualquiera perspectiva de la misma, desde un punto propio o ideal exterior, asignar puntos distintos de dicha recta a todos los rayos del haz proyectante, sin que quede ningún punto que no tenga su rayo proyectante ni ningún rayo que no tenga en la recta su punto de intersección propio o ideal. Y como la sucesión de rayos en el haz es *cerrada* y *cíclica,* de aquí que en el espacio proyectivo haya que convenir también que la recta es una línea cerrada y que sus puntos se suceden en un orden cíclico. Esta disposición cíclica de todos los puntos de todas los rectas de un plano, y el carácter proyectivo de tal disposición para todos los centros propios o ideales del plano desde los que aquellas rectas pueden ser proyectadas, juntamente con la constante existencia del punto común a cada dos rectas de un plano, dan al plano del espacio proyectivo el carácter de superficie que *tiene un sentido*, como la radiación, mientras que en el espacio proyectivo, lo mismo que en el ordinario, hay siempre *dos sentidos helicoidales* no reductibles el uno al otro.

* * *

El postulado de Arquímedes, según el cual *dados dos segmentos hay siempre un múltiplo del más pequeño que excede al más grande,* y otros postulados de congruencia, permiten introducir *números* que se corresponden con los puntos de una recta, mediante la operación de *medir;* pero como los axiomas de congruencia no tienen carácter proyectivo, ha habido necesidad de introducir dichos números por otros caminos que tienen por fundamento el concepto de equivalencia proyectiva y la formación de redes como la *red armónica,* o serie de puntos... $A_{-3}\ A_{-2}\ A_{-1}\ A\ A_1\ A_2\ A_3$... C, tales que cada uno es separado armónico del anteprecedente respecto del precedente y de un punto fijo C, y constituyen un conjunto numerable, habiendo, por tanto, un número entero asignable a cada punto; o como la red de Möbius, compuesta de una multitud de redes armónicas, cada una de las cuales contiene los puntos de la anterior y otros nuevos entre cada dos, que corresponden a expresiones numéricas de dos términos, como los quebrados, o sea a los números racionales; la cual red, como estos números, constituye otro conjunto numerable, pero no continuo [1].

Y si admitiéramos que sobre una recta no hay más puntos que los correspondientes a una red de Möbius, en un haz perspectivo con ella no habría más rayos que los correspondientes a esos puntos, es decir, los expresables también por los términos de un quebrado; y definidos los puntos del plano, como intersecciones de dos rayos, uno de cada uno, de dos tales haces, el plano no tendría más puntos que las intersecciones de cada dos rayos coordenados, que fueran expresables por números racionales; y siguiendo así, el espacio no tendría más puntos tampoco que las intersecciones de cada tres planos, de los haces de planos que desde tres aristas de una cara de tetraedro, proyectan las redes de Möbius situada sobre sus aristas opuestas. Los *puntos, segmentos, rectas, planos* y *espacio* así concebidos, darían origen a una clase de Geometría, no continua, que podría llamarse *racional,* la cual podría ser estudiada desde el punto de vista *métrico* como desde el punto de vista *proyectivo;* pero no sería toda la Geometría.

Para que nuestros conceptos de *punto, recta, plano* y *espacio* respondan a todas las exigencias ulteriores, hay necesidad de pos-

[1] Véase nuestro *Tratado de las Formas Geométricas de primera categoría,* números 132 y 133. En donde, aunque los números asignados a los términos de la *escala* o *red* armónica, se trata de justificarlos por proyección sobre una escala de partes iguales propiamente dicha, pueden, sin embargo, ser introducidos simplemente como indicadores de resultados de la operación de contar.

tular la *continuidad* de la recta, que es la base de la continuidad en el plano y de la continuidad en el espacio E_3 y en los espacios de orden superior. He aquí cómo suele enunciarse el postulado sobre la *continuidad,* llamado de Cantor. Si sobre un segmento rectilíneo OM hay dos series ilimitadas de segmentos OA_1 OA_2 OA_3... de una parte, OB_1 OB_2 OB_3... de otra, tales que los segmentos de la primera serie crezcan, mientras que los de la segunda decrezcan indefinidamente, en forma que los segmentos A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3... decrezcan constantemente y puedan llegar a ser más pequeños que todo segmento arbitrariamente fijado de antemano (por pequeño que sea) a partir de un cierto índice n (dependiente del pequeño segmento fijado), existe sobre el segmento OM un punto X, y sólo uno, tal, que OX es más grande que todos los segmentos de la primera serie y más pequeño que todos los de la segunda [1]. Con el postulado de Arquímedes se puede hallar la razón de cualquier segmento m al segmento unidad u, cuando esa razón es un número racional, y comprenderla entre dos números fraccionarios tan poco diferentes como se quiera, cuando aquélla no es expresable en números racionales, esto es, expresarla por un número irracional. Y con el postulado de Cantor se puede recíprocamente hallar sobre la recta OM, el punto X que corresponde a un número irracional dado. El conjunto, pues, de estos dos postulados, en todo tiempo mejor o peor expresados, proporciona los recursos para la representación *cartesiana* de los puntos de la recta y consiguientemente para la representación cartesiana de los puntos del plano y de los del espacio.

Sin embargo, no teniendo carácter proyectivo los postulados de congruencia, base de la operación de *medir,* no lo tiene esta operación, y por eso no contiene la Geometría Proyectiva la noción de medida ni las que de ella dependen. Pero esto no quiere decir que no puedan figurar los números en la Geometría Proyectiva, puesto que también vienen los números de la operación de

[1] El papel del postulado de Cantor ha sido también desempeñado por un postulado llamado de *integralidad,* que dice que el espacio es una variedad de puntos que no puede ser aumentada por adición de otros puntos, en forma que la variedad aumentada satisfaga todavía al sistema de postulados, base de la Geometría.

contar, y ésta tiene carácter proyectivo, como hemos visto que se dan en la red de Möbius.

Mas no siendo continua esta red, ni valiendo proyectivamente el postulado de Cantor, han enunciado otros, Weierstrass y Dedekind, equivalentes ambos en el fondo, y sólo diferentes en la forma, de los cuales dice el primero: Que si un segmento OM contiene una serie ilimitada de puntos sucesivos $A_1\ A_2\ A_3 \ldots$, existe un punto límite B, en cuyo *entorno* (o segmento tan pequeño como se quiera, continente de B) se encuentra uno al menos de los puntos de aquella serie; y el segundo que: Si un segmento OM es dividido por dos clases de puntos, a cuya primera clase pertenezca O y a la segunda M, si todo punto de OM pertenece a una de las dos clases, y si un punto de la primera clase se encuentra en el interior de todo segmento limitado por O y un punto de la segunda clase, existe un punto X tal, que todos los puntos de OX pertenecen a la primera y los de XM a la segunda clase, y se demuestra que X es único, pudiendo coincidir con O o con M.

Las dos clases de puntos en que la hipótesis de Dedekind divide al segmento pueden ser tales, que la primera tenga un último punto y la segunda un primero distinto, en cuyo caso se dice que hay un *salto;* o que la primera tenga un último punto y la segunda no tenga primero, o al revés: la primera no tenga último y la segunda sí tenga primero; o bien, finalmente, que ni la primera tenga último punto, ni la segunda primero, en cuyo caso se dice que hay en el segmento un *vacío.* El concepto de continuidad de Dedekind tiene por fin excluir los saltos y los vacíos.

Ahora bien, si se tienen en cuenta las correspondencias sólo biunívocas de Cantor entre puntos de variedades de diferente número de dimensiones; la imposibilidad de establecer dichas correspondencias, a la vez, *biunívocas* y *continuas;* la existencia de curvas que llenan un área, etc., se comprenderá que la teoría matemática del continuo es, por sí sola, lo bastante trascendente para constituir un tema vastísimo, no comprendido en el objeto y plan de este discurso; tema que hemos rozado aquí, no sólo para completar la idea del conjunto de puntos sucesivos y continuos que hemos llamado segmento, base del de recta, plano y espacio, sino porque también en ese concepto se apoya el más general y exacto de *curva* sin puntos múltiples, cual es el de Jordán: *conjunto de puntos en posible correspondencia*, biunívoca y continua, con los de un segmento, la cual será *cerrada* o *abierta*, según que haya o no un solo punto de la misma al que correspondan los extremos del segmento; y todavía, y muy principalmente, porque para introducir en los espacios abstractos, que no tienen puntos propiamente dichos por elementos, el concepto de línea o *variedad continua de una dimensión*, o espacio elemental $\bar{E}_1$, hace falta elegir de antemano un tipo determinado de línea suficientemente sencillo, al cual, por correspondencias biunívocas y continuas, se refieran en su definición aquellas variedades; y ningún tipo tan sencillo de línea para ese fin como el de la línea recta del espacio euclídeo. Esta última es la idea de Riemann cuando aconseja equiparar la variación continua del elemento generador de una variedad elemental, con la noción de la duración o tiempo de su generación.

Por eso nos permitimos insistir un poco más en este punto, trayendo a cuento el enunciado que en sus *Fundamentos de la Geometría Proyectiva superior*, antes citada, pone el señor Rey Pastor, que dice: Que si se dan los infinitos segmentos AA_1, AA_2, AA_3 ... tales que cada uno contenga al anterior y todos ellos estén contenidos en AB, hay un segmento AL interior a AB o coincidente con él, que los comprende a todos sin que haya ningún otro segmento AL' interior a AL, que cumpla igual condición; forma de postulado de la continuidad con la que se prueba que la red armónica $A\ A_1\ A_2\ A_3$ ... C tiene a su punto C como punto límite de los segmentos $AA_1\ AA_2\ AA_3$ ..., que es una forma proyectiva del postulado de Arquímedes; y con la que se demuestra que en los segmentos $A_1B_1\ A_2B_2\ A_3B_3$ del postulado de Cantor hay un punto X único situado en todos ellos, lo cual es también una forma proyectiva de ese postulado. En efecto, la sucesión $OA_1\ OA_2\ OA_3$ ... contenida en OB_n tiene un punto límite X situado en OB_n cualquiera que sea n, o lo que es lo mismo, B_n está en XM; y, según el mismo nuevo postulado, la sucesión $MB_1\ MB_2\ MB_3$ ... tiene un punto límite X' coincidente con X;

pues si estuviera en el interior del segmento MX, el segmento XX' sería interior a todos los segmentos A_n B_n lo cual excluye el enunciado mismo de Cantor: y con esto y otras notables propiedades a que semejante enunciado da base, se llega a sentar que la *recta continua no es un conjunto numerable;* y, como lo es la red de Möbius, que la recta tiene puntos exteriores a dicha red, y estos puntos exteriores forman un conjunto infinito no numerable, porque de serlo lo sería la recta, suma de éste y el anterior, y, por último, que en todo segmento hay infinitos puntos de la red de Möbius e infinitos de la red binaria [1].

Es admirable cómo la inteligencia humana acondicionada para lo finito y relativo, en su lucha con lo absoluto e infinito, va poco a poco desbrozando el camino que a tan capitales ideas conduce, y cómo, aun convencida de que no serán nunca totalmente cogidas en su conciencia, como no lo es el *infinitamente pequeño actual,* ni su inseparable el infinito actual, ambos integrantes del *continuo,* va creando ideas, como las de *conjunto proyectivo, coordinación de conjuntos infinitos, potencia de los mismos, entorno de un punto, puntos de condensación, saltos, cortaduras,* etc., con las cuales, al par que evidencia los peligros de una aceptación intuitiva de aquellas ideas, enseña de qué modo pueden, por sucesivas aproximaciones, ser manejadas por el hombre, sin menoscabo del rigor lógico de sus deducciones. No otra idea persiguen los diversos postulados de la continuidad.

La equiparación, por otro lado, del continuo de una variedad geométrica elemental con el continuo analítico de una variable real X, si bien permite introducir un conjunto innumerable de puntos en dicha variedad, independientemente del concepto de congruencia, no nos enseña nada respecto a la construcción interna de ese conjunto. Por eso, para algunos geómetras, es más general el concepto de la continuidad de una variedad geométrica elemental $\bar{E}_1$ que el del continuo analítico de una variable *real.*

No obstante, hasta hoy, este último modo de ver la continuidad de la recta, equiparable al continuo de una variable real X, es el

[1] Rey Pastor: *Fundamentos de la Geometría proyectiva superior,* números 94 a 99.

más inteligible y seguro para cuantas aplicaciones puedan hacerse de esta ciencia. Y si se apura mucho, ya que muchos valores de la variable real X no tienen una construcción geométrica ni aritmética exacta, y sólo son manejables en el dominio de lo físico por segmentos o números racionales aproximados, aun podría utilizarse para el continuo una *variable racional*, con tal de que se aplique sólo al espacio físico y a condición de que para puntos no incluídos en la red de Möbius quede sentado que su representación es sólo aproximada, conocido el grado de aproximación y abierto el camino para nuevas aproximaciones.

Después de sentar Pasch la teoría de las redes de puntos, de designar por $X = ABEP$ el índice de P en la red ABE, y de advertir cómo X pasa por todos los valores racionales incluso infinito, y cómo determina completamente el elemento P de la red, pasa a su determinación por dos números, y por una razón doble de cuatro números; esto es, introduce las coordenadas *ordinarias*, las *homogéneas* y las *proyectivas* de los elementos de la red, respecto de tres puntos fundamentales de ésta. Después de lo cual ya no tiene dificultad la introducción de las coordenadas, puntuales y tangenciales, de las redes de segunda y de tercera categoría.

Las dificultades empiezan desde que se trata de considerar un punto P no comprendido en la red. Para este caso sienta el principio de que *es siempre posible señalar un segmento* MN *dentro del cual no puedan distinguirse puntos separados, y tal que ocurra lo mismo para todos los segmentos congruentes o menores que él.* Construye a derecha e izquierda de P puntos propios de la red dada ABE; entre éstos y P otros B' y E' y uno A' fuera de $B'E'$; de este modo los índices de los puntos próximos a P en la red $A'\,B'\,E'$, son fraccionarios; y tomando a derecha e izquierda de P segmentos de los de puntos no discernibles, y en cada uno de éstos un punto de la red $A'\,B'\,E'$, reducidos los índices de estos dos últimos puntos H' y K' a común denominador v, el punto correspondiente a todo quebrado de la serie

$$\frac{1}{v+1},\quad \frac{2}{v+1},\quad \ldots\ldots,\quad \frac{n}{v+1},$$

que esté comprendido entre las fracciones representativas de los H' y K', no puede diferir sensiblemente de P; porque si difiriera se podrían hacer nuevas intercalaciones entre H' y P, por un lado, y entre P y K', por otro. Por la relación analítica que liga a la coordenada de P en la red $A'\,B'\,E'$, y las de A' B' y E' en la red ABE se deduce fácilmente la coordenada de P en esta última red, y luego se generaliza esto fácilmente a la determinación de puntos del plano y del espacio.

Ahora bien, si los puntos de un conjunto de puntos dados no se confunden con los de la red espacial, esto es, si la figura correspondiente a las coordenadas halladas no coincide exactamente con la dada, la investigación analítica relativa a la primera se podrá, no obstante, comprobar en la segunda, aunque sólo sea *aproximadamente*. Y esto es bastante para que en todas las investigaciones analíticas pueda decirse con todo rigor que el *punto matemático* es el sistema de *cuatro números reales*, no nulos a la vez, de un sistema fundamental de coordenadas homogéneas, o los productos de esos cuatro números por otro cualquiera finito y diferente de cero.

El *plano matemático*, el conjunto de los puntos matemáticos que satisfacen a la vez a una ecuación lineal

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0;$$

siendo u_1, u_2, u_3, u_4, las coordenadas homogéneas de este plano.

Y, por último, la *recta matemática*, el conjunto de puntos matemáticos que satisfacen a la vez a dos ecuaciones lineales, siendo puntos de un segmento de extremos (x_1, x_2, x_3, x_4) e' (y_1, y_2, y_3, y_4), los números de la forma

$$(x_1 + \lambda y_1), \quad (x_2 + \lambda y_2), \quad (x_3 + \lambda y_3), \quad (x_4 + \lambda y_4),$$

en que λ es un número arbitrario positivo, incluso 0 e ∞, que corresponden a los extremos del segmento. Estos conceptos de punto, segmento, recta, plano y espacio, aunque sacados de los entes geométricos correspondientes, son puramente analíticos y responden perfectamente a todos los postulados admitidos, incluso al de continuidad, a pesar de no haber podido imaginar ésta en el espacio real más que aproximadamente; es decir, que el número, que ha sido tenido siempre como ente esencialmente discontinuo, viene a ser el instrumento fundamental para instituir el continuo geométrico; probando esto, una vez más, la escasa diferenciación entre los *números* y el *espacio*, y la gran verdad de aquellas palabras de Hilbert de que el Álgebra no es otra cosa que una Geometría escrita, ni la Geometría otra que un Álgebra dibujada.

V

Elementos en el infinito. Aunque en el orden lógico los elementos en el infinito deben venir tras de los ideales, en el orden histórico son anteriores.

En la Geometría llamada *parabólica*, que tiene por fundamento el postulado de Euclides que dice que *por un punto fuera de una recta no se le puede trazar más que una paralela*, nacieron observando que dos rectas de un plano son entonces secantes o paralelas; y que si cuando son secantes tienen un plano y un punto común, cuando paralelas tienen un plano y una *dirección común.*

Y como estas dos últimas circunstancias juegan en la Geometría euclidea el mismo papel que un punto propio, se le llamó *punto en el infinito.* Todas las rectas, cada una de las cuales está en un plano con todas las demás, sin estar todas en un plano, o pasan por un punto o son paralelas; en el primer caso forman una radiación de vértice propio y en el segundo de vértice en el infinito. Y este concepto de punto en el infinito, en la hipótesis euclidea, es el mismo punto ideal, con la sola circunstancia de ser aquí único en cada recta. Un haz de rayos con el vértice en el infinito es el conjunto de todas las rectas de un plano paralelas a una dada.

El conjunto de todas las direcciones contenidas en un plano es común con el de las direcciones contenidas en cualquier otro plano paralelo, direcciones que son las de cada uno de los rayos de un haz de vértice propio, contenido en uno cualquiera de esos planos. Como las referidas direcciones son sucesivas y continuas en el haz, los puntos del infinito por ellas representados constituyen una línea plana que, no teniendo más que un punto común con cada recta del plano, es de primer orden y se la llama *recta del infinito* de dicho plano y de todos sus paralelos.

El conjunto de todas las direcciones posibles en un espacio euclideo, representadas por los rayos de una radiación de vértice propio, queda determinado por una recta y un punto no situado en ella, ambos en el infinito; del mismo modo que la radiación queda determinada por un plano (el representante de la recta del infinito), y un rayo no situado en él, que es el representante del punto del infinito; y, distribuyéndose la totalidad de puntos del infinito en los de las rectas del infinito que se apoyan en ambos elementos determinantes, tiene dicho conjunto la misma generación de un plano, y se le llama *plano del infinito*.

Que por un punto pasa una sola recta paralela a otra, un solo plano paralelo a dos no paralelas, o paralelo a otro plano; y que por dos puntos o por una recta pasa un solo plano paralelo a una recta, son cinco proposiciones contenidas en las que dicen que dos puntos determinan una recta y tres un plano, con sólo admitir que los elementos puedan ser propios o del infinito.

El empleo de éstos en Geometría no introduce nada arbitrario, cuando los teoremas en que intervienen se demuestran aparte o apoyándolos en otros que ya contuvieran dichos elementos, quedando todo reducido al paso fácil del lenguaje figurado con que se les expresa al lenguaje corriente, y viceversa; y, en cambio, proporcionan grandes recursos de síntesis y de análisis y aun de investigación, sin contar la sencillez y simplificación que llevan a cuantas demostraciones ellos afectan.

No puede dejarse de insistir en estas cosas tan vulgares, porque aun hay entre nosotros quien escribe que «si tuviera una recta paralela a las generatrices de un cilindro un punto al infinito con cada una de ellas, deberían esos puntos formar el perímetro de una curva; y no se oponga, añade, el otro absurdo de que todas las generatrices de un cilindro tienen común un solo punto al infinito, etc.», lo cual prueba cuán difícil es que, a pesar de su sencillez, o quizá por ella, tan capitales ideas se abran rectamente paso en todas las inteligencias, y cuánto hay que insistir, multiplicando los ejemplos, para arrancar hasta los últimos vestigios de semejantes aberraciones.

La segunda hipótesis que acerca de las paralelas puede hacerse y que origina la Geometría llamada hiperbólica, es la contenida en el postulado de Lobatschewski [1] que admite *que por un punto fuera de una recta se le pueden trazar dos paralelas.* En este caso las dos paralelas forman dos ángulos completos adyacentes, tales que todos los rayos contenidos en uno de ellos cortan a la recta dada, los del otro ángulo no la cortan, y las paralelas son los elementos por donde se pasa de una de esas dos regiones del haz a la otra.

Dos rectas de un plano pueden, pues, ser secantes, paralelas y neutrales. Las secantes determinan en la recta dada puntos propios; las paralelas y neutrales, puntos en el infinito, y éstos tienen ahora el mismo significado que los puntos ideales. Toda recta propia tiene un segmento de puntos propios y otro de puntos en el infinito.

Las rectas conservan el carácter de paralelismo en todos sus puntos; son recíprocamente paralelas, y dos paralelas a una tercera son paralelas entre sí, como en la Geometría euclidea.

Pero la suma de los ángulos de un triángulo rectilíneo no puede exceder de dos rectos, y si en uno de ellos valiera dos rectos, ocurriría lo mismo en cualquier otro triángulo, según vimos antes. Como los triángulos isósceles con un vértice básico común fuera de una recta y lados opuestos a ese vértice a continuación unos de otros sobre esa recta tienen sus ángulos básicos decrecientes por mitades, se puede trazar por un punto una recta que forme con otra un ángulo tan pequeño como se quiera; y si dos perpendiculares a una recta fueran paralelas, la suma de los ángulos de un triángulo rectilíneo sería igual a dos rectos, puesto que se le podría hacer diferir de ese valor en menos de lo que se quisiera. Llamando ángulo de paralelismo al formado por la paralela y la perpen-

[1] Los alemanes llaman a esta Geometría de Gauss, porque éste en sus cartas a Schumacher ha dicho que desde 1792 viene obteniendo resultados en el mismo sentido que los de Lobatschewski; pero tales trabajos no se han publicado.

dicular o *distancia* a una recta desde un punto, cuanto más éste se separe de la recta más pequeño es, y tiende a un recto cuando la distancia tiende a *cero*. La distancia entre dos paralelas decrece a medida que éstas se prolongan en el sentido del paralelismo. Las perpendiculares en los puntos medios de los lados de un triángulo o no se encuentran o concurren en un punto, etc., etc.

Todas estas verdades, y las que suelen seguirles relativas a la línea límite de un plano u *horiciclo* a la superficie límite u *horiesfera* y las que sientan las fórmulas trigonométricas relativas a esta Geometría, tal como las concibió Lobatschewski, no ofrecen dificultad al que pueda prescindir de los hábitos de la Geometría euclídea y de la intuición del espacio ordinario [1].

Un recurso que facilita la intuición de esta Geometría consiste en introducir en el espacio ordinario ciertas líneas y superficies que, por satisfacer a los postulados admitidos de la recta, del plano y del espacio, puedan ser miradas como tales, y con las que se llegue a la realización física, aunque sea con demostraciones euclídeas, del nuevo postulado y de sus consecuencias.

Aparte de la ayuda que a la deducción lógica presta la representación interna de hechos análogos a los que son objeto del conocimiento, tiene este recurso la ventaja de sentar la independencia del nuevo postulado y de poner término a las discusiones sobre su posibilidad; pero no debe de perderse de vista que tales medios no demuestran nada en los nuevos dominios: sólo ayudan a su comprensión.

Una imagen, pues, de espacio lobatschewskiano es la ya citada

[1] Dichas fórmulas trigonométricas vienen en función de los ángulos de paralelismo relativos a distancias dadas por los lados del triángulo, que se indican: $\Pi(a)$, $\Pi(b)$, $\Pi(c)$, y son:

$$\operatorname{sen} A \operatorname{tg} \Pi(a) = \operatorname{sen} B \operatorname{tg} \Pi(b);$$

$$(\cos A + \cos B \cos C) \operatorname{sen} \Pi(a) = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C;$$

$$(\cot A \operatorname{sen} C \operatorname{sen} \Pi(b) + \cos C) \cos \Pi(a) = \cos \Pi(b);$$

$$\cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) \operatorname{sen} \Pi(a) + \operatorname{sen} \Pi(b) \operatorname{sen} \Pi(c) = \operatorname{sen} \Pi(a),$$

las cuales se convierten en las de la Trigonometría ordinaria con sólo suponer el triángulo infinitamente pequeño. (Véase *Etudes Géométriques sur la Téorie des Paraleles,* par Lobatschewski. Traduit par Hoüel, 1895, pág. 33.)

del conjunto de todos los puntos situados a un solo lado de un plano euclídeo, llamado *fundamental*, en el cual se considere como segmento entre dos puntos el arco comprendido entre ellos de la semicircunferencia que pasa por dichos puntos y es perpendicular al plano fundamental, o el segmento rectilíneo ordinario que determinan, si éste fuera perpendicular a dicho plano.

Uno cualquiera de los arcos o segmentos así formados puede evidentemente ser prolongado por sus dos extremos, constituyéndose con ambas prolongaciones y el segmento la imagen de la recta lobatschewskiana. Fuera de una de estas rectas existen puntos, y tres de éstos determinan un triángulo. Los puntos de todas las rectas (semicircunferencias) que unen los vértices de un tal triángulo a puntos de sus lados opuestos constituyen un plano; y a poco que se haya prestado atención habráse podido comprender que tales planos no son, euclideamente, sino semisuperficies esféricas perpendiculares al plano fundamental. Sean, en efecto, ABC los tres puntos dados. Ellos y el simétrico A' del A respecto del plano fundamental determina una superficie esférica entera que contiene los arcos $A'AB$ y $A'AC$, y como en estos arcos estarán los puntos simétricos de B y de C, también contendrá el círculo menor $BCB'C'$. La semisuperficie esférica utilizable contendrá los demás arcos determinados por un vértice y puntos de su lado opuesto, por contener los simétricos de esos puntos la superficie esférica entera. En el caso de estar los tres puntos ABC en un plano euclideo perpendicular al fundamental, él mismo hace de plano lobatschewskiano.

Fuera de uno de estos planos existen puntos; cuatro de éstos, $ABCD$, no situados en un plano, forman un tetraedro, y éste determina la imagen del espacio lobatschewskiano.

Supongamos ahora un plano euclideo α perpendicular al fundamental y desde un extremo del diámetro perpendicular a α del hemisferio que contiene un triángulo ABC, hagamos sobre α la proyección estereográfica de dicho triángulo y de su simétrico $A'B'C'$. Se habrán obtenido dos triángulos $A_1B_1C_1$ y $A'_1B'_1C'_1$ simétricos respecto de la traza del plano fundamental en el de proyección, como eje de simetría, formados con arcos de círculos perpendiculares a dicho eje. Si tomamos ahora la figura inversa del triángulo $A_1B_1C_1$ respecto de A'_1, como centro de inversión, el nuevo triángulo $A_2B_2C_2$ tendrá dos lados rectilíneos A_2B_2 y A_2C_2 y el tercero B_2C_2 curvo con la convexidad hacia el interior del triángulo; con lo que queda dicho que la suma de sus ángulos es menor que dos rectos, y como los ángulos de $A_2B_2C_2$, $A_1B_1C_1$ y ABC son respectivamente iguales, la suma de los ángulos del ABC es menor que dos rectos.

Si un lado AB del triángulo ABC fuera recta euclidea perpendicular al plano fundamental, los otros dos lados serían arcos circulares situados con AB en un mismo plano euclideo perpendicular al fundamental, y se podría hacer la inversión de dicho triángulo tomando como centro de inversión el punto simétrico del A respecto del plano fundamental, lo cual nos conduciría inmediatamente al mismo resultado.

Por un punto V exterior a una de esas semicircunferencias-rectas se le pueden trazar dos análogas tangentes (imágenes de dos paralelas) cuyos contactos con aquélla estarán en el plano fundamental. Del haz de semicircunferencias que pasan por V, las comprendidas en el ángulo de las tangentes continente de la recta dada cortan a ésta; las del adyacente no la cortan. Si la recta dada fuera una perpendicular al plano fundamental, sus paralelas por un punto V serían la paralela euclidea, y el semicírculo tangente a dicha recta en el punto en que atraviesa al plano fundamental. La constancia del paralelismo en los puntos de un arco, su reciprocidad y la propiedad de ser paralelas entre si dos paralelas a una tercera, son inherentes a la condición de tangencia que representa aquí al paralelismo.

También decrece la distancia entre dos arcos tangentes (paralelas) a medida que se prolongan; el ángulo de paralelismo se ve aquí inmediatamente que es función de la distancia, decreciendo con ella y teniendo por límite un recto cuando la distancia se anula, etc., etc.

Ahora bien, si en el espacio en que está confinada la Tierra con su atmósfera, y tomando por plano fundamental uno en el Sol perpendicular a la recta Tierra-Sol, supuesta inmóvil, se construyera una geometría concebida como se acaba de exponer, ¿habría diferencia apreciable por la observación entre esa Geometría y la vulgar o euclidea?

La contestación que *in mente* habéis dado ya a esta pregunta expresa mejor que nada el carácter de los postulados acerca de las paralelas.

La tercera y última hipótesis acerca de esta cuestión es el postulado de Riemann, por el que se admite que por un punto fuera de una recta no se le puede trazar ninguna paralela. Las rectas de un plano en esta hipótesis no pueden ser más que secantes. La Geometría basada en esta hipótesis se denomina *elíptica*.

Aunque Lambert consideró como modelo de Geometría plana de Riemann la de la superficie esférica, en que los círculos máximos hacen de rectas y en la que se cumple que por un punto fuera de uno de ellos no se puede trazar otro que no lo corte; que la suma de los ángulos de un triángulo excede de dos rectos, etc., hay el inconveniente de que dos puntos no determinarían siempre una recta, y F. Klein ha demostrado que cuando se toma una superficie dada para referir a ella las construcciones que conciernen a la Geometría plana no euclidea, no es más que lo relativo a una limitada región del plano, lo que se puede parangonar con una región limitada de dicha superficie; no siendo legítimo aplicar al plano todo lo que se pueda decir de la superficie completa.

Esta Geometría se puede reflejar enteramente en la ordinaria de las radiaciones de rayos en que los puntos, rectas y distancias del plano elíptico vengan representadas por rayos, haces y ángulos rectilíneos de la radiación, viéndose así la perfecta compatibilidad de la hipótesis de Riemann con los postulados admitidos de la recta y de la congruencia en el plano. No bastan, sin embargo, las interpretaciones planas no euclideas para la perfecta independencia del postulado de Euclides respecto de los postulados concernientes al espacio, pues cabría que en éste pudiera aquél ser demostrado. Por eso se ha echado mano de la teoría de las variedades tridimensionales de curvatura constante y de las determinaciones métricas de Cayley sobre cuádricas, interpretadas no euclideamente por Klein.

Para poder nosotros exponer algo de estas determinaciones métricas, como complemento de los conceptos de punto, recta, plano y espacio que venimos considerando, necesitamos decir, aunque sea brevemente, algo acerca de los *polos, polares y planos polares absolutos y de las involuciones y polaridades absolutas,* que son entes en el infinito o ligados a estos, característicos de cada una de las tres geometrías.

Dos series congruentes [1] distintas situadas en una recta *propia,* son acordes o discordes, denominadas también *directas* e *inversas.* En este segundo caso tienen un solo *punto propio* de coincidencia y constituyen la involución llamada *simétrica.* Esta involución tiene siempre otro punto doble ideal, que suele denominarse *asociado* del primero, por ser su conjugado armónico respecto de cualquier par de puntos simétricos.

Si las series son acordes, no son involutivas, sino simplemente proyectivas, en la proyectividad especial que define la congruencia, y no tienen punto propio de coincidencia. Pero su involución *unida,* la que define cada punto con el conjugado armónico que le corresponde respecto de sus dos homólogos de la congruencia, esto es, la involución definida por cada punto y su asociado, que, como veremos luego, tiene los mismos puntos dobles que la proyectividad, puede ser parabólica o no. En el primer caso, que es el de la Geometría euclídea, todos los puntos de la recta tienen un solo asociado que se llama el *punto absoluto* o del infinito de dicha recta; en el segundo, correspondiente a las otras dos geometrías, la propia involución, unida a la congruencia, se dice la *involución absoluta* de la recta que le sirve de base. Al pasar de una figura a otra congruente con ella, coinciden los elementos asociados de cada dos rectas homólogas y, por tanto, los absolutos.

Dos haces de rayos *congruentes* distintos situados en un plano y con el vértice común, pueden ser acordes o discordes, esto es, directos o inversos; en este último caso constituyen una involu-

[1] La *congruencia* se entiende aquí, y en todo lo que sigue, congruencia en sentido proyectivo; es decir, en la proyectividad que define un movimiento con un punto o involución invariante; dos segmentos o ángulos congruentes serán dos segmentos o ángulos de elementos correspondientes.

ción simétrica, que tiene dos rayos propios de coincidencia que se dicen perpendiculares entre sí: uno, cuyos puntos son todos de coincidencia, y otro que contiene dos series congruentes inversas. Esta congruencia equivale a un giro del plano alrededor del primer rayo doble, según el cual cada semirrayo del haz y cada punto del plano coincide con su simétrico.

Por un giro alrededor del segundo rayo doble, cada semirrayo coincide con el suplementario de su simétrico, y cada punto con el conjugado de su simétrico en la involución inversa que el vértice del haz determina en el rayo simétrico. Las dos operaciones sucesivas llevan cada semirrayo sobre su opuesto y cada punto sobre su simétrico respecto del vértice, lo que equivale a un giro alrededor de éste como centro.

Si los haces son acordes, son sólo *proyectivos* por la congruencia; pero su involución unida es siempre una involución *rectangular* que carece por lo mismo de rayos de coincidencia propios y se llama *involución absoluta* del haz de rayos. Cuando cada dos rayos correspondientes de la congruencia son perpendiculares, ésta se confunde con la involución absoluta. La congruencia directa equivale a un giro del plano alrededor del vértice.

En los haces de planos de primer orden pueden hacerse consideraciones análogas para los pares definidos por cada uno y su conjugado armónico, respecto a los que les corresponden como anterior y como posterior en un giro efectuado en el haz; y definir su *involución absoluta* el conjunto de todos sus pares de planos perpendiculares [1].

Cuando dos figuras congruentes de un plano propio tienen dos puntos propios de coincidencia, todos los puntos de la recta *r* que los une son de coincidencia; y cada dos puntos homólogos pueden permutarse entre sí, y, por consiguiente, la relación entre las dos figuras es involutiva y tienen además otro único punto de coincidencia exterior a *r*, que es el punto ideal *R*, asociado al de inter-

[1] Estas relaciones de perpendicularidad coinciden con las que se definen más adelante; y no hay inconveniente en que se tomen en un primer momento en el concepto vulgar, con tal que se piense en seguida en la otra posible interpretación esencialmente proyectiva.

sección con dicha recta de toda otra que una dos puntos homólogos; esto es, asociado a todos los puntos del eje *r*. Ese punto se llama *polo absoluto* de la recta *r*; y todas las que pasan por él, en el plano, contienen series congruentes, en las que *R* y su intersección con el eje son puntos de coincidencia. La recta *r* y toda otra que pase por su polo absoluto tienen entre sí una dependencia recíproca tal, que cada una de ellas pasa por el polo absoluto de la otra y son *perpendiculares;* pero esta relación de perpendicularidad es diferente en la Geometría euclídea y en las no euclídeas; en aquélla, el polo absoluto de una recta *a* y de todas las de un mismo plano con ella, que pasan por su punto del infinito, es uno mismo; mientras que en éstas el polo absoluto de una recta *a* es sólo asociado del en que la corte otra *b* que pase por él; y las perpendiculares a esta segunda recta *b* tendrán, en general, polos absolutos distintos, aunque situados en dicha recta *b*.

Todos los puntos de un plano propio asociados a uno dado *O* en el mismo, están en una recta, que se llama la *polar absoluta* de *O* en dicho plano; la cual no pasa por *O*, es recta ideal y sus puntos son *polos absolutos* de las rectas del plano que pasan por dicho punto *O*. Puesto que trazando por *O* dos rectas perpendiculares a y a_1 y dos b y c simétricas respecto de *a*, como eje de simetría de puntos de coincidencia, esto supone una congruencia en que b y c se corresponden y sus puntos homólogos M y M', N y N' también, y éstos están sobre rectas perpendiculares a *a*, cuyas intersecciones con ésta tienen el mismo punto asociado que tiene el O en a_1, lo que quiere decir que las series OMN y $OM'N'$ son perspectivas, y la recta de correspondencia de los puntos asociados al O en b y c, que son también puntos homólogos de esa perspectividad, pasa por dicho polo. Análogamente se prueba que esa recta de correspondencia pasa por el polo absoluto de *a*. Los dos polos de a y a_1 y los puntos asociados al O en b y c están, pues, en línea recta, y análogamente sucede a todos los otros puntos asociados al *O*.

Si en las Geometrías no euclídeas se toman en un plano cuatro puntos propios *ABCD*, que de tres en tres no estén en línea recta, y sus polares absolutas respectivas *abcd*, éstas no pasarán tampoco por un punto, tomadas de tres en tres; y entre ambos grupos de elementos definen una *correlación,* en la que a las rectas AB, AC, AD, etc., corresponden sus polos absolutos ab, ac, ad, etcétera. Tomemos un quinto punto E, y llamamos E' al punto correspondiente a la recta AE. La proyectividad de $A\,(BCDE)$ con $A\,(ab, ac, ad, E')$, siendo *la involución absoluta* de vértice A, prueba que E' es polo absoluto de AE. En general, a cada punto propio del plano corresponde su polar absoluta, y a cada recta propia su polo absoluto; y dicha correlación es independiente de sus elementos definidores. Sean dos rectas $(A\text{-}ab)$ y $(B\text{-}ab)$ de la primera figura; por pasar ambas por ab tienen sus puntos correspondientes A' y B' en AB de la segunda figura; y como a la recta $A'B' = AB$ de la primera figura le corresponde el mismo punto ab de la segunda, y lo mismo puede decirse de los demás pares, la correlación es involutiva, y constituye un sistema plano polar.

Este sistema se llama el *sistema polar absoluto* del plano considerado. Si nos colocáramos ahora en el punto de vista de la Geometría euclidea, los puntos asociados a dos de los definidores A y B de la polaridad, sobre la recta AB, coinciden en uno: el del infinito, o punto absoluto de la recta AB; las polares a y b, teniendo dos puntos comunes, a saber: éste y el ab coinciden, y en ellas coinciden, por lo mismo, las otras polares. Tal recta, única en su clase, se llama *recta absoluta* del plano, y no es otra que la que hemos llamado al principio su recta del infinto, la cual es aquí la polar absoluta de todos los puntos del referido plano.

Ahora bien, las involuciones absolutas de los haces de rayos, cuyos vértices son puntos de ese plano, son cortadas por la recta del infinito del plano en unos mismos pares de una sola involución. Puesto, que, si a un par de rayos rectangular a y a' de vértice V, se le trazan, desde otro punto V' del plano, rayos respectivamente perpendiculares b y b', será b' perpendicular a a' y pasarán a y b' por el polo absoluto de a' y recíprocamente.

La involución así definida sobre la recta del infinito de un plano se llama la *involución absoluta* de dicho plano.

Y, aunque anticipando ideas por no volver más sobre este asunto, como cada dos puntos conjugados de esa involución absoluta están siempre separados por los otros pares, por estarlo los rayos correspondientes de todo haz en involución absoluta perspectivo con ella, sus puntos dobles *son imaginarios,* y se les denomina puntos *cíclicos* del plano y de todos sus paralelos, así como las rectas imaginarias que los proyectan desde un punto cualquiera de esos planos se les llama *rectas isótropas;* también se suelen designar los puntos cíclicos con los nombres de *umbílicos,* puntos *circulares* y puntos *normales* del plano. Lo de *cíclicos* les viene porque la involución de diámetros conjugados de todo círculo es rectangular; su sección por la recta del infinito (polar del centro), una involución de puntos conjugados respecto del círculo y de todos los del mismo plano y de sus paralelos; lo que se expresa diciendo que todos esos círculos pasan por ese mismo par de puntos.

Puntos cíclicos, imaginarios, y por añadidura en el infinito, todos los círculos de un plano pasando por ellos, rectas isótropas, es decir, imaginarias y perpendiculares a sí mismas, etc., son términos y conceptos capaces de desilusionar el ánimo mejor dispuesto, no familiarizado con semejante tecnicismo. Y, sin embargo, el que haya seguido la generalización verá que todo ello expresa hechos tan sencillos como éstos: que por todos los puntos de un plano y de sus paralelos se pueden trazar en ellos infinitos pares de rectas perpendiculares entre sí; que si una recta es perpendicular a otra, ésta lo es a aquélla; que por cada par de rectas perpendiculares entre sí trazadas por un punto hay otro par análogo, por otro punto, paralelas a las del primero; que jamás pueden coincidir las dos rectas de ninguno de esos pares perpendiculares, y que los puntos de uno de dos diámetros perpendiculares de un círculo tienen sus polares respecto del mismo paralelas al otro.

Volviendo a considerar las geometrías no euclídeas, se demuestran fácilmente las disposiciones, determinaciones y relaciones ordinarias entre rectas y planos perpendiculares con las relaciones de congruencia; y pasándolas al lenguaje convencional admitido, el hecho de que todas las perpendiculares a un plano estén de dos en dos a su vez en planos, indica que todas pasan por un punto ideal, el cual se llama *polo absoluto del plano,* y es *asociado* a todos los puntos propios del mismo, y polo absoluto de todas sus rectas propias; si dos planos son perpendiculares, cada uno de ellos contiene el polo absoluto del otro, y recíprocamente, lo cual puede tomarse como definición de perpendicularidad. Si una recta e describe un haz de rayos de vértice V, su plano perpendicular en V, describe un haz de planos, cuya arista es perpendicular al plano del primer haz, y correlativamente, y ambos haces son proyectivos.

Cuatro rayos a, b, c, d, de una radiación de vértice V, que de tres en tres no estén en un plano y sus cuatro planos perpendiculares $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$, determinan una correlación. Sea ae un plano del haz de planos (ae, ab, ac, ad) y e_1, b_1, c_1, d_1, los cuatro rayos que les corresponden en la correlación; tres de los cuales, b_1, c_1, d_1, están en el plano α; si e_1 no lo estuviera y designáramos por e' la perpendicular al plano ae, que estará en α, serían proyectivos los haces b_1, c_1, d_1, e_1 y b_1, c_1, d_1, e', por serlo ambos con el haz de planos, el uno por la proyectividad que supone la correlación, y el otro por perpendicularidad; luego e_1 y e' son un mismo rayo. Dicha correlación es, pues, una polaridad e independiente de sus elementos definidores. Tal sistema se llama *sistema polar radiado absoluto* del punto V.

Las polares absolutas del punto propio V en todos los planos de su radiación se cortan de dos en dos, puesto que tienen que pasar por el punto asociado del V en la recta intersección de cada dos planos, y como no pasan todas por un punto, están todas en un plano. Éste se llama *plano polar absoluto* del punto V, y contiene, además de las polares absolutas de V, todos sus puntos asociados en las rectas de la radiación y todos los polos absolutos de los planos de ésta.

Los polos absolutos de una recta a en los planos que pasan por ella, unidos a uno de sus puntos A, dan rectas perpendiculares a la misma, que están en un plano π; luego aquellos polos están en este plano, son puntos asociados al A y forman la polar absoluta de este punto en el plano π. Esta recta, polar de todos los puntos de a en los planos perpendiculares a ésta que por ellos pasan, se llama *la polar absoluta* de a.

Si se toman cinco puntos A, B, C, D, E, propios, que de cuatro en cuatro no estén en un plano y sus planos polares absolutos α, β, γ, δ, ε, estos planos, en las geometrías no euclideas, no pasan cada cuatro por un punto, porque si pasaran, ese punto sería polo absoluto de los planos determinados por cada tres de los cuatro puntos considerados, lo cual no puede ser; ambos conjuntos de elementos determinan, pues, una correlación que, análogamente a como se ha hecho para el sistema polar absoluto de un plano, se prueba que es una polaridad, independiente de los elementos definidores. Tal es el llamado *sistema polar absoluto* de las geometrías no euclideas que, como se ha visto, no puede ser nunca un sistema focal y contiene todas las polaridades absolutas de categoría inferior.

En la Geometría euclidea, los planos α y β contienen la polar absoluta de la recta AB, y como los puntos $\overline{AB}\alpha$ (asociado del A) y $\overline{AB}\beta$ (asociado del B) en esta recta coinciden, también coincidirán los planos α y β y todos los demás análogos. Todos los puntos propios del espacio tienen ahora un mismo plano polar absoluto, que es un plano ideal y se llama el *plano absoluto* del espacio, que no es otro que el que llamamos al principio el plano del *infinito*. Los sistemas polares radiados absolutos de todos los puntos propios son cortados por el plano absoluto en un mismo sistema plano polar absoluto, puesto que si dos rayos, uno de cada radiación, son paralelos, sus planos polares radiados respectivos también lo son y determinan el mismo polo y polar en el infinito. Tal es el llamado *sistema plano polar absoluto del espacio euclidiano*.

Sistema plano polar absoluto que no puede tener puntos dobles reales, por lo mismo que la radiación polar absoluta no tiene ningún rayo contenido en su plano polar y representa una cónica imaginaria, que es cortada por todos los planos reales en los puntos *cíclicos* de estos planos.

En las tres geometrías, al pasar de una figura a otra congruente, el sistema polar absoluto queda invariante, constituyendo algo característico de cada una de las tres concepciones del espacio, que fija a cada punto, recta y plano propios sus elementos polares absolutos, con sólo convenir en cuál de los tres puntos de vista nos colocamos.

Si se tiene un triángulo ABC rectángulo en A, y se traza en B la perpendicular l al cateto AB, tomando el punto medio M de la hipotenusa, y el D situado en la prolongación del segmento AM, siendo AM congruente con MD, por un giro alrededor de M los puntos asociados de éste no habrán variado, y la recta BD coincidirá con la AC, probándose así la igualdad de los ángulos alterno-internos que estas dos rectas forman con la hipotenusa. Pero según se trate de geometría parabólica, hiperbólica o elíptica, la recta BD quedará sobre la perpendicular l, entre ésta y la hipotenusa, o al otro lado de l, lo cual origina la igualdad, inferioridad o superioridad respecto de dos rectos de la suma de los ángulos de un triángulo.

En las geometrías no euclídeas, las involuciones absolutas definidas sobre cada una de sus rectas propias tienen todos los pares de puntos conjugados o asociados, separados por cada uno de los demás, o no separados por ningún otro par. En el primer caso se está en la geometría de Riemann, y en el segundo en la lobatschewskiana.

* * *

Como a cada sistema polar corresponde una superficie de segundo orden real o imaginaria, cuyos elementos son polares de sí mismos, las relativas a cada uno de los modos de ser del sistema polar absoluto pueden tomarse como *fundamentales* para establecer una *métrica* general de base proyectiva a la manera de Cayley. Si se toma por superficie fundamental una propiamente dicha de segundo grado *imaginaria*, se obtiene la geometría elíptica; si se elige una superficie de segundo grado real, no reglada, tomando en consideración de puntos propios los situados dentro de esta superficie, se está en la geometría hiperbólica, y se cae en la parabólica cuando se hace degenerar la superficie fundamental de la métrica de Cayley en una sección cónica imaginaria, como antes hemos indicado.

El problema de la medida en las figuras de una dimensión se reduce a hallar la distancia entre dos puntos y el ángulo de dos rectas. Todos los demás, incluso determinación de diedros, se valúan por medio de esos.

Si la serie de puntos y el haz de rayos son formas duales y muy análogas en el plano desde el punto de vista proyectivo, desde el punto de vista métrico, las distancias son funciones algébricas de las coordenadas, se hallan sobre base infinita, determínanse de una manera uniforme, y la subdivisión en partes iguales es sencilla; mientras que los ángulos son funciones trascendentes, están sobre base finita, determínanse por múltiplos de un período, y su subdivisión es muchas veces imposible.

A pesar de esto, ambas determinaciones tienen común: la posibilidad de adicionar las diferencias de medida con la de ser nula ésta entre un elemento y él mismo, y la de no alterarse por un desplazamiento en el espacio. Ambas permiten construir por sucesivos desplazamientos las escalas respectivas y tomar la diferencia de dos medidas por el número de divisiones de escala comprendidas entre ellas.

Pero estos sucesivos movimientos entran en la noción de transformación lineal de una figura elemental en sí misma, lo mismo cuando son corrimientos en la serie que rotaciones en el haz. Las determinaciones métricas de la serie y del haz quedan así encerradas en un solo concepto: el de *transformación lineal,* y éstas, en las figuras de una dimensión, según hemos visto, son de dos clases: las que dejan fijos dos elementos reales o imaginarios de la figura y las que dejan fijo un solo elemento. En la Geometría euclidea las mediciones en la serie corresponden a transformaciones de la segunda clase, cuyo elemento fijo es el del infinito, y las del haz a las de la primera, cuyos elementos fijos son las rectas isótropas del haz. Para que la identificación de ambas clases de medidas sea perfecta, hay que colocarse en el dominio de las geometrías no euclideas, en las que las transformaciones lineales de las series dejan en ellas dos puntos fijos en el infinito; reales en la hiperbólica e imaginarios en la elíptica. Esto es, pues, lo general; las mediciones en la Geometría euclidea pueden venir luego como caso particular.

Tomando esos dos elementos fundamentales en el infinito P y Q como base de un sistema de coordenadas homogéneas x_1 x_2, y designando su razón por z, la transformación lineal que construye la escala viene dada por la ecuación $z' = hz_1$. Su reiterada aplicación produce:

$$z_1,\ hz_1,\ h^2z_1,\ h^3z_1,\ h^4z_1,\ h^5z_1, \ldots$$

que es la serie de los elementos de dicha escala, cuyas distancias al elemento A de abscisa z_1 son dadas por la serie de los números enteros. Por transformaciones lineales análogas interpoladas entre las que han dado esos elementos se obtienen las subdivisiones, en cuyas distancias a z_1 el exponente de h es fraccionario; y continuando así se puede admitir que

$$z = h^\alpha z_1$$

(en que α es un número racional o irracional) es la determinación de un elemento cualquiera z; y, tomando logaritmos, el número α que la expresa, será: $\alpha = \log \frac{z}{z_1} : \log h$; o bien $\alpha = k \log \frac{z}{z_1}$; forma, como se ve, que adiciona diferencias de medida, anula la distancia de un elemento asimismo, y deja inalterada la distancia entre dos cuando se opera una transformación lineal. Y como la razón $z : z_1$ es evidentemente la doble $(PQZA)$, puede decirse que:

La determinación métrica de la distancia o ángulo entre dos elementos de una figura de primera categoría es igual al producto de una cierta constante por el logaritmo de la razón doble de dichos dos elementos y los fundamentales.

Si los elementos P y Q no son base de coordenadas vendrán dados por una ecuación de la forma: $az_1^2 + 2bz_1z_2 + cz_2^2 = 0$, o sea abreviadamente: $\Omega zz = 0$; y la razón doble de ellos y otros dos x_1 x_2 e y_1 y_2 es, como se sabe:

$$\frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega^2_{xy} - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega^2_{xy} - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}},$$

la cual da para la medida de ZA

$$ZA = k \cdot \log \frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega^2_{xy} - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega^2_{xy} - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}},$$

en la cual es

$$\Omega_{xy} = a x_1 y_1 + b(x_1 y_2 + x_2 y_1) + c x_2 y_2,$$

y la constante k se toma imaginaria o real, según que se trate de geometría elíptica o hiperbólica. En el caso de geometría parabólica no tiene sentido esa definición de la medida; pero puede buscársele tomando a k inversamente proporcional a $\sqrt{b^2 - ac}$ y considerando aquélla como límite de la hiperbólica, al tender a cero el expresado radical; lo cual conduce a la métrica ordinaria de la geometría euclidea.

En las *formas de segunda categoría* se obtienen para la distancia entre dos puntos en función de Ω_{xx}, y para el ángulo de dos rectas en función de Φ_{uu}, expresiones idénticas a las anteriores, con la sola diferencia de que ahora $\Omega_{xx} = 0$ y $\Phi_{uu} = 0$ son las ecuaciones de la cónica absoluta en coordenadas puntuales y tangenciales, respectivamente; y las funciones Ω_{yx} y Φ_{uv} son las que se obtienen de sustituir en las anteriores x_1^2 por $x_1 y_1$; $x_1 x_2$ por $\frac{1}{2}(x_1 y_2 + x_2 y_1)$, etc., y análogamente se procede para las formas de tercera categoría.

Lo que precede os habrá hecho recordar lo que ya sabíais: el trascendentalísimo papel que juegan los elementos en el infinito, tanto en la geometría proyectiva como en la métrica, abarcándose con ellos el inmenso campo de las tres geometrías y proporcionando recursos, imposible de tocar aquí, para apurar las variedades de geometrías que se ofrecen en cada campo, como cuando en la elíptica se trata de aquilatar si todas sus radiaciones de rectas tienen vértice y cuántos son éstos, y estando la clave de la clasificación de muchas líneas y superficies en el número y la naturaleza de sus elementos en el infinito.

VI

Elementos imaginarios. Los problemas geométricos de segundo grado, como hallar las intersecciones de una cónica con una recta o con un plano y sus correlativos, construir las cónicas definidas por cuatro puntos y una tangente o por cuatro tangentes y un punto, etc., tienen, en la geometría plana, casi siempre como fundamento o apoyo una de estas dos cuestiones.

Dadas sobre una recta real dos series proyectivas, o dados dos haces de rayos proyectivos con el vértice propio común, hallar los elementos coincidentes homólogos de la proyectividad.

Y concretándonos ahora a las figuras de primera categoría, compréndese, sin esfuerzo, que una de éstas, ABC ..., puede tener dos elementos fijos P y Q coincidentes con sus homólogos en una infinidad de proyectividades con otras figuras $A'B'C'$ ..., puesto que entre los tres pares de elementos definidores de la proyectividad pueden figurar como dobles constantemente los P y Q y variar a voluntad los del tercer par, constituyendo lo que se llama un haz de proyectividades.

Entre las figuras $A'B'C'$, ..., proyectivas con la ABC ..., en esas condiciones, existe una, y sólo una, que está en involución con ella, que se denomina involución unida a esas proyectividades, y que da sin ambigüedad con sus *elementos dobles*, los que responden al problema.

Si esa involución es hiperbólica, es decir, si ninguno de sus pares de conjugados está separado por otro, dichos elementos son reales. Pero si es elíptica, es decir, si todo par de conjugados separa a otro, el problema no tiene solución real, y propone Staudt que se tome entonces como solución la propia involución unida, denominándola *par de puntos o de rectas o de planos imaginarios conjugados, según que se trate de series o de haces de rayos* o *de planos*.

La involución unida está constituída, como indicamos antes, por los pares formados con cada elemento y con su conjugado armónico respecto de los dos que en la proyectividad le corresponden, cuando se considera aquél como perteneciente a la primera o a la segunda figura; y lo mismo puede servir para determinar los elementos imaginarios que los reales cuando existen.

Y para ver (concretándonos a las series) que los así definidos están en involución y que ésta tiene los mismos puntos dobles que la proyectividad, supongamos ésta trasladada a una cónica y que al punto A, considerado como de la primera serie, le corresponda el A_1; y considerando como de la segunda, el A_2. La recta AA (tangente en A), que une dos puntos no homólogos de una y otra serie, y la A_1A_2 que une sus homólogos, se cortan en un punto N, *exterior*, del eje proyectivo. La otra tangente a la cónica desde N la toca en un punto A', conjugado armónico del A respecto de A_1 y A_2. Y como la cuerda AA' (polar de N), debe pasar por el polo del eje proyectivo, e igualmente todas las cuerdas análogas a la AA', síguese que estos pares de puntos AA' constituyen una involución; y que ésta tiene el mismo eje proyectivo, y, por tanto, los mismos puntos dobles reales o imaginarios que la proyectividad dada.

En los haces tangenciales de segundo orden se demuestra análogamente la propiedad correlativa; en la radiación las dos cuestiones perspectivas de esas, y para las series de primer orden no hay más que ponerlas en posición perspectiva con figuras de segundo orden.

Y como, por otra parte, lo mismo queda determinada una cónica por puntos o por tangentes, cuando estos datos son reales que cuando son imaginarios conjugados, dados por involuciones, la introducción de éstas por aquéllos, queda legitimada, siendo incalculable su utilidad y trascendencia.

Considerados de este modo los elementos imaginarios, vienen apareados, y los razonamientos y deducciones geométricas exigen frecuentemente puntos, rectas y planos imaginarios aislados. Por ejemplo, en el problema de hacer pasar una recta por dos puntos imaginarios no conjugados, como la recta solución no puede ser real en este caso, hay que empezar por relacionar perspectivamente las dos involuciones definidoras, con correspondencia de todos sus pares de elementos conjugados. Y para esto tomaríamos el punto común a las rectas reales en que vienen definidos los puntos imaginarios, su conjugado en una y otra involución y los pares de cada una, separados armónicamente por ese primer par; pues es sabido que en las involuciones elípticas todo par de elementos conjugados tiene otro par, y sólo otro, que los separa armónicamente (trasladada la involución a una cónica, los dos puntos alineados con su centro perspectivo y con el de intersección de las tangentes en el par dado).

De esta manera se habrán construído dos series perspectivas desde dos centros distintos V y V' (puntos diagonales del cuadrivértice formado por los pares de conjugados armónicos construídos en una y otra involución), desde cada uno de los cuales son proyectadas ambas involuciones de puntos por una misma de rayos, y todo esto en virtud de que si se corresponden perspectivamente dos pares de elementos conjugados de dos involuciones se corresponden del mismo modo todos los demás pares [1].

Resulta de todo esto que queda indeterminado cuál de los dos puntos V o V' es el alineado con los imaginarios dados. Si admitimos que lo están ambos, como cada una de las involuciones V o V' tiene dos rayos dobles imaginarios, pasan por los puntos imaginarios dados cuatro rectas imaginarias y las dos reales que los contienen; lo cual es, por otra parte, lo que debe suceder, puesto que

[1] Si los dos pares dados en correspondencia perspectiva son los dobles, es evidente. Si son los $A\,A'\,B\,B'$ de una y los $A_1\,A'_1\,B_1\,B'_1$ de otra, sean C y C' un nuevo par de conjugados de la primera y $C_1 C'_1$ sus perspectivas en la otra. Será:

$$\left.\begin{array}{l} C\,C'\,A\,B \;\overline{\wedge}\; C_1\,C'_1\,A_1\,B_1 \\ C'\,C\,A'\,B' \;\overline{\wedge}\; C'_1\,C_1\,A'_1\,B'_1 \end{array}\right\} \quad \text{de donde:} \quad C_1\,C'_1\,A_1\,B_1 \;\overline{\wedge}\; C'_1\,C_1\,A'_1\,B'_1$$

por ser proyectivas las dos primeras. Luego C_1 y C'_1, son otro par de conjugadas de la segunda involución, puesto que se corresponden doblemente.

los imaginarios dados no son dos, sino cuatro puntos; y todo cuadrivértice completo tiene seis lados.

¿Cómo, pues, distinguir qué pareja de esos cuatro puntos define cada una de esas seis rectas? Inducido por el doble signo con que vienen afectadas las cantidades imaginarias del análisis, tuvo Staudt la feliz idea de asociar al concepto de involución el de uno de los sentidos opuestos en que pueden moverse o girar sobre su base sus elementos. De este modo, si AA' BB' son dos pares de una involución elíptica las cuaternas $(ABA'B')$, $(BA'B'A)$, etc., indican un sentido y representan un solo elemento imaginario; las $(AB'A'B)$, $(BAB'A')$, etc., indican el sentido opuesto y representan el elemento imaginario conjugado.

Ciertamente que un mismo elemento imaginario tiene infinitas representaciones; pero dado un sentido (ABA') en una de ellas queda determinado el mismo sentido MNM' en las otras.

Y he aquí cómo por tan sencillo como ingenioso convenio se salvan todas las dificultades. Pues si dos cuaternas de puntos de una y otra involución $(ABA'B')$ y $MNM'N')$ son perspectivas y están en una semirrecta de las en que el punto común divide a sus bases, cuando el sentido sea en las dos hacia dicho punto común o al revés, el centro perspectivo V es el que está fuera del ángulo de dichas semirrectas; y los sentidos ABA' y MNM' de ambas series corresponderán con el aba' del haz proyectante, como sus opuestos BAB' y NMN' corresponderán con el opuesto bab' del haz. Si en las mismas circunstancias, el sentido de $(ABA'B')$ es convergiendo al punto común de las semibases y el de $(MNM'N')$ alejándose, o viceversa, el centro perspectivo V' estará dentro del ángulo de dichas semibases; y los sentidos ABA' y MNM' de ambas series, aunque opuestos, corresponderán como antes con un solo sentido mnm' del haz, y sus opuestos con el opuesto de éste. Estas perspectividades, conteniendo, como homólogas, las representaciones armónicas que parten del punto común [1], prueban que hay *una sola manera* de relacionar perspectivamente, con correspondencia de pares

[1] Según la nota de la página 91.

de conjugados y de los sentidos tomados; a la vez, dos involuciones elípticas. O en otros términos:

1.º Hay un solo punto *real* situado en línea recta con dos imaginarios no conjugados de un plano real, y ese punto es el mismo que está alineado con sus conjugados.

2.º Dos puntos imaginarios no conjugados de un plano real determinan una sola recta imaginaria, la cual se dice de *primera especie*. Y si a esto se añade que por dos puntos imaginarios conjugados pasa la sola recta real, base de la involución que los define; que por un punto imaginario $(ABA'B')$ y uno real P pasa la recta imaginaria $(a\ b\ a'\ b')$, perspectiva desde P de $(A\ B\ A'\ B')$, o la sola recta real, base de la involución $(ABA'B')$, si P está en dicha base, etc., comprenderáse, sin esfuerzo, la gran generalidad alcanzada por la proposición: *dos puntos de un plano no determinan una recta.*

Correlativamente se ve que si V y V' son los vértices de dos haces en involución representativos de dos rectas imaginarias del plano real, a su rayo común y $(a\ b\ a'\ b')$, $(a\ c\ a''\ c'')$ dos representaciones armónicas de dichas rectas, ambas involuciones son perspectivas de dos modos, pues los puntos bc, $a'a''$ y $b'c''$ están en una recta r, y los bc'', $a'a''$ y $b'c$ en otra s, que son dos diagonales de cuadrilátero completo (b, b', c, c''). La involución sobre r tomada en sentido conveniente es el punto imaginario de intersección de las rectas imaginarias dadas, cuando los sentidos de sus representaciones son opuestos entre sí de uno de los dos modos; y tomada en sentido contrario es el punto en que se cortan las rectas conjugadas de las dadas; esto es: cuando los sentidos de sus representaciones son todavía opuestos, pero del otro modo. La involución sobre s es la intersección de las rectas dadas cuando sus representaciones tienen un mismo sentido; tomando aquélla hacia el lado conveniente cuando este sentido común es uno, y hacia el lado contrario cuando éste es el opuesto. Luego:

1.º Hay una sola recta real concurrente con dos imaginarias no conjugadas del plano real, y esa recta es la misma que concurre con sus conjugadas.

2.° Dos rectas imaginarias no conjugadas del plano real, determinan un solo punto imaginario.

Y si a esto se añade que dos rectas imaginarias conjugadas se cortan en el punto real, vértice de la involución que las define, que una recta imaginaria y una real se cortan en el punto imaginario sección por ésta de la involución que define aquélla, o en el solo punto real, vértice de esta involución, si la recta real pasa por él, etc., se tendrá idea de la generalidad alcanzada por el enunciado: *Dos rectas de un plano real determinan un punto.*

Las perspectivas de las dos cuestiones que acabamos de indicar, desde un punto exterior a su plano autorizan a sentar:

1.° Que hay una sola recta real situada en un plano con dos imaginarias no conjugadas de una radiación, la cual es la misma, que está también en un plano con sus conjugadas.

2.° Que dos rayos imaginarios no conjugados de una radiación determinan un solo plano imaginario. Cuando los rayos imaginarios son conjugados determinan el plano propio de su involución. Cuando uno de los rayos es imaginario y el otro real determinan el plano que desde éste proyecta la involución que define aquél, o un solo plano real si el de la involución pasa por el rayo real. Y correlativamente:

3.° Hay un solo plano propio concurrente con dos imaginarios no conjugados de una radiación, el cual es el mismo que concurre con sus conjugados.

4.° Dos planos imaginarios no conjugados de una radiación determinan un solo rayo imaginario, etc.

También puede representarse el punto imaginario por dos pares de puntos conjugados de una involución elíptica sobre una cónica dada, asociada a un sentido indicado sobre dicha curva; y para pasar de esta representación de segundo orden a la del primero, anteriormente expuesta, basta observar que la recta real, asiento del punto imaginario dado, tiene que ser el eje proyectivo de la involución sobre la cónica, que es la polar de su centro perspectivo y pasa siempre por los puntos dobles reales o imaginarios de dicha involución; su involución rectilínea representativa es la proyección de la anterior desde un punto de la curva sobre dicho eje proyectivo, y el sentido es el que resulta de esa proyección siguiendo el dado en la cónica, el cual es único por ser interior el centro proyectivo.

El paso inverso de la representación de primer orden del punto imaginario de plano real a la de segundo se obtiene tomando una cónica, entre las infinitas que hay, respecto de la cual sean conjugados los pares de puntos correspondientes de la involución dada, y proyectando ésta sobre dicha curva desde uno de sus puntos; pudiéndose servir para ello del hecho de que las rectas que unen dos puntos fijos cualesquiera M y N del plano, con los pares de puntos conjugados de la involución dada $ABA'B'$, se cortan en puntos de una cónica que pasa por M y N, respecto de la cual son conjugados los pares de (AA', BB') y conjugada también la base de ésta con la recta MN, y en que la involución resultante de proyectar la dada desde M o N tiene por eje proyectivo la misma recta base de ésta [1].

Análogamente puede representarse la recta imaginaria de primera especie por una involución tangencial de segundo orden asociada a un sentido de la sucesión de sus rayos. Para pasar de esta representación a la de primer orden se toma por punto real de la recta representada el centro perspectivo de la involución dada, que es el polo de su eje proyectivo, y luego desde él se toma la perspectiva de cualquier sección producida en el haz de segundo orden por uno de sus rayos. Para el paso inverso se procede correlativamente con lo dicho acerca del punto. Por donde se ve

[1] En efecto: los rayos, tales como MA y NA' y como MA' y NA, siendo homólogos de dos haces proyectivos no perspectivos se cortan en puntos T y T' de una cónica La tangente en M y la recta MN, siendo dos rayos homólogos de esos haces, cortan a AA' en dos puntos conjugados P y S; la tangente en N y la recta MN lo mismo, y como el punto S es en los dos casos uno mismo, el P no puede ser diferente Las dos tangentes se cortan, pues, en P, polo de MN. Y siendo MNT un triángulo inscrito, la recta AA', que pasa por el polo de un lado, es cortada por los otros dos MT y NT en dos puntos conjugados; AA' y MN son también conjugadas, puesto que la primera contiene el polo P de la segunda. Luego MN contiene el polo Q de AA', el cual es el conjugado armónico de S respecto de M y N. Y los cuadriláteros completos, tales como $MNTT'AA'$, de los que una diagonal es AA' y otra la MN, prueban que la tercera diagonal TT' tiene siempre que pasar por Q, lo cual demuestra el teorema.

que el punto y la recta imaginaria de primera especie de plano real tienen una sola base de representación de primer orden e infinitas para sus representaciones de segundo orden.

También la recta imaginaria de primera especie y el plano imaginario tienen una sola base de representación de primer orden en la radiación, e infinitas en superficies cónicas de segundo orden, de la misma radiación, y su establecimiento y paso recíproco se logra por perspectiva de las dos cuestiones anteriores.

En las relaciones llamadas realproyectivas entre elementos imaginarios son homólogos los pares de sus involuciones respectivas; las cuaternas que se toman para definirlas también conviene que sean de elementos homólogos, y que se puedan hacer partir de elementos dados. Y esto puede siempre lograrse de una sola manera en virtud de que si $(ABA'B')$ es una representación de un punto imaginario **A** de una recta real (y por perspectividad se extiende a otros elementos), queda determinada la representación del mismo elemento o de su conjugado $\bar{\mathbf{A}} = (MNM'N')$, de modo que le sea proyectiva y parta de un punto dado M. Y como dado M está dado su conjugado M' hay que hallar sólo los puntos N y N', lo cual se logra fácilmente [1], y, una vez obtenido, puédese

[1] Haciendo pasar por M y M' una cónica, y proyectando sobre ésta, desde C, la involución $(ABA'B') \barwedge (MNM'N')$, se tendrá una involución sobre dicha cónica, en la que $(ABA'B')$ habrá determinado un sentido, y cuyo centro proyectivo E estará en el segmento MM' (fig. 10). Determinemos el punto F tal que $MEM'F \barwedge ABA'B'$. El punto F estará fuera de la cónica por tener que estar separado del E por M y M' a causa de estarlo B' de B por A y A'; las tangentes desde F tocan en G y G_1. Tomemos el G que esté con M y M' en el sentido $(ABA'B')$, y su conjugado H en la involución sobre la cónica. Las proyecciones sobre MM' desde C de estos dos últimos puntos dan los N y N' pedidos; porque $ABA'B' \barwedge MEM'F \barwedge G(MEM'F) \barwedge MHM'G \barwedge C(MHM'G) \barwedge MNM'N'$. Si en vez de G se toma G_1 se hubiera obtenido la proyectividad con el conjugado $\bar{\mathbf{A}}$. Si $ABA'B'$ fuera armónica G se confundiría con C y G_1 con H, y se estaría en el caso ya citado en el paréntesis de la página 91 en que $MNM'N'$ también es armónica.

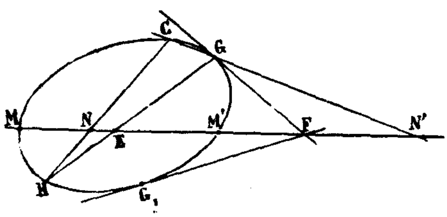

Fig. 10.

relacionar proyectivamente una involución consigo misma, tomándo varias cuaternas con un par común y hallando sus proyectivas a partir de otro par común. También puede ser $ABA'B'$ de una serie y $MNM'N'$ de otra, empezando por tomar sus representaciones armónicas, que son siempre proyectivas.

Pasando ya a considerar elementos imaginarios del espacio, sentaremos ante todo: que toda recta real a que no corta a la arista de un plano imaginario determina con éste un punto imaginario que no es otra cosa que la involución resultante en a al cortar esta recta al haz de planos involutivo que define aquel plano. Y todo plano propio α que no pase por la arista real de un plano imaginario corta a éste según una recta imaginaria de primera especie, que no es tampoco otra cosa que el haz de rayos involutivo resultante al cortar este plano al haz de planos en involución que define al imaginario.

En segundo lugar, son también relaciones en el espacio las siguientes:

1.ª Una recta imaginaria de primera especie $(aba'b')$ y un plano imaginario $(\alpha\beta\alpha'\beta')$ o se pertenecen o se cortan, determinando en este último caso, un punto real o imaginario. Lo primero cuando $(aba'b')$ sea una sección de $(\alpha\beta\alpha'\beta')$; lo segundo cuando el vértice de $(aba'b')$ esté en la arista de $(\alpha\beta\alpha'\beta')$, y lo tercero cuando no ocurra ni lo uno ni lo otro. En este tercer caso, si el plano de $(aba'b')$ pasa por la arista del haz de planos, la sección que esta arista produce en el haz $(aba'b')$ es el punto imaginario pedido; si no pasa, la perspectividad de $(aba'b')$ con la sección que su plano produce en $(\alpha\beta\alpha'\beta')$ determina una recta propia, asiento del punto imaginario pedido.

2.ª Una recta imaginaria de primera especie $(aba'b')$ y un punto imaginario $(ABA'B')$ o se pertenecen o pasa por ellos, determinándolo, un plano real o un plano imaginario. Lo primero cuando $(aba'b')$ es una perspectiva de $(ABA'B')$; lo segundo cuando en el plano de $(aba'b')$ esté la base de $(ABA'B')$, y lo tercero cuando no ocurra ni lo uno ni lo otro. En este último caso puede suceder que la base de $(ABA'B')$ contenga el vértice del haz $(aba'b')$, y entonces cada rayo de éste con aquella recta-base, determina un plano del haz de planos involutivo definidor del plano imaginario pedido; y si no lo contiene, la perspectividad de $(aba'b')$ con el haz que desde su vértice proyecta la serie $(ABA'B')$ determina una recta real que es el eje del plano imaginario pedido.

Para poder continuar estableciendo otras determinaciones de elementos imaginarios en el espacio tenemos necesidad de presentar ya la recta imaginaria de segunda especie (elemento perturbador del imaginarismo, como le llamó Steiner), la cual es por lo pronto una involución elíptica en un haz alabeado de segundo orden, juntamente con uno de los dos sentidos en que el rayo generador puede moverse sobre el hiperboloide o paraboloide que lo contiene; recta que no tiene ningún punto real ni pasa por ella ningún plano real.

Sábese que entre los sistemas involutivos del espacio, además de los homológicos, hay los llamados de *dos ejes,* en que los puntos situados sobre éstos, los planos que por ellos pasan y las rectas que cortan a ambos son los únicos elementos dobles; y hay además los sistemas con *sólo rectas dobles,* que pueden referirse a los de dos ejes en el caso en que éstos son imaginarios. El conjunto de rectas dobles en los dos casos es una congruencia de primer orden, porque por cada punto, y separadamente en cada plano del espacio, no hay más que una de dichas rectas; y en ambos casos existen infinitos haces alabeados, en involución, contenidos en el sistema involutivo del espacio. Los rayos directores de estos haces alabeados son rectas dobles o simplemente conjugadas del sistema involutivo, según que contengan o no cada dos puntos conjugados. Las involuciones alabeadas que en ellas se apoyan o tienen unos mismos rayos dobles reales que son los *ejes* del sistema involutivo del espacio, o no tienen rayos dobles; en el caso que no los tienen, todas esas involuciones alabeadas, por lo que diremos en seguida, pueden tomarse como representativas de un mismo par de ejes o rectas imaginarias conjugadas que se cruzan, correspondiendo cada una a uno de los dos sentidos de la sucesión.

De modo que las representaciones de una recta imaginaria de segunda especie son infinitas bajo dos conceptos: porque pueden hacerse por cualesquiera dos pares de rayos conjugados de una involución alabeada, y porque dichos pares pueden ser tomados en cualquiera de las infinitas involuciones alabeadas de la misma especie contenidas en el sistema involutivo del espacio que una primera involución alabeada define.

Los ejes de los sistemas involutivos del espacio, sean reales o imaginarios, son bases de series de puntos dobles y aristas de haces de planos dobles reales o imaginarios, respectivamente; determinados, caso de imaginarios: los puntos por las secciones que en la representación alabeada de los ejes dan los planos reales del espacio, y los planos, por las perspectivas de dicha representación, desde cada punto propio del espacio. Las demás rectas dobles sólo contienen involuciones de puntos y de planos.

En efecto, en una recta imaginaria de segunda especie representada por la involución alabeada $(ghg'h')$ en el sentido (ghg'), este sentido determina uno mismo en cada una de las involuciones de puntos o de planos situados en sus rayos directores pqr, y estas involuciones están en perspectiva con la $(ghg'h')$, puesto que los haces de planos de aristas p y q, por ejemplo, son perspectivos con una misma serie de puntos $r\,(ghg'h')$, y correlativamente; y no cambian de sentido cuando se tome por serie la $t\,(ghg'h')$ situada en otro rayo director, ni cuando se pasa a otra representación $(efe'f')$ de la recta de segunda especie, en cuyo haz director (pqs) figuren los mismos p y q de antes, ni cuando por su intermedio se pasa a otra representación cualquiera.

Si a cualquiera de las involuciones elípticas alabeadas contenidas en un sistema involutivo del espacio, que son proyectivas con las de planos trazados por uno cualquiera de sus rayos directores, se asocia un sentido determinado, su relación perspectiva con las involuciones de puntos y de planos contenidas en los mencionados rayos directores exige que estos infinitos puntos imaginarios sean atribuídos a la recta imaginaria de segunda especie dada; y que esos infinitos planos imaginarios, cada uno de los cuales contiene uno de los puntos, sean también planos que pasan por dicha recta.

Por otra parte, las diferentes representaciones $(ghg'h')$,

$(efe'f')$ de una recta de segunda especie por dos cuaternas de rectas tomadas cada una en un haz alabeado distinto son perspectivas con las infinitas representaciones de sus puntos y todas están en el mismo sentido que las de sus haces de planos perspectivos $p\,(ghg'h')\,q\,(efe'f')$. Todo lo cual justifica el que pueda representarse también la recta imaginaria de segunda especie por un *sistema involutivo no homológico del espacio sin puntos ni planos dobles, considerado en un sentido;* y el que formen parte de ella todos los puntos que son involuciones de primer orden de puntos conjugados contenidas en dicho sistema, y el que pasen por ella todos los planos que son involuciones de planos conjugados contenidas en el mismo, tomadas unas y otras en el sentido determinado por el sistema. Y como las bases de todos esos puntos y de todos esos planos imaginarios son las rectas dobles del sistema, que forman una congruencia lineal de rectas reales, esta congruencia es el asiento o base real de la recta imaginaria de segunda especie.

Entendido cuanto en una recta imaginaria de segunda especie hay encerrado y sus varios modos de representación, cumple a nuestro propósito exponer nuevas determinaciones de elementos en que intervengan rectas de esta especie. Así:

Toda recta de segunda especie determina con cualquier plano real un punto imaginario, y con cualquier punto real un plano imaginario, ideas antes ligeramente apuntadas. En efecto, en primer lugar, todo plano real contiene un rayo doble d que es su intersección con el plano que le es conjugado en la involución del espacio dada, y esta recta doble tiene común con la de segunda especie el punto imaginario representado por la sección involutiva rectilínea que ella produce en una representación alabeada $(aba'b')$ de la recta imaginaria que tenga d por rayo director; involución rectilínea que es la misma de los pares de puntos conjugados que da en esa base doble el sistema involutivo del espacio, y la misma que corresponde al eje proyectivo d de la involución puntual de segundo orden que el plano real dado produce en cualquier representación alabeada $(ghg'h')$ de la imaginaria.

En segundo lugar, por todo punto real pasa un rayo doble d_1

de la involución del espacio que venimos considerando, que es el que lo une a su punto conjugado; y esta recta d_1 es arista de un plano imaginario representado por la perspectiva, desde ella, de una representación $(aba'b')$ de la recta imaginaria, que tenga d_1 por rayo director; involución de planos que es la misma de los pares de planos conjugados del sistema del espacio que pasan por d_1, y la misma que corresponde al eje proyectivo d_1 de la involución radiada de segundo orden que desde el punto real dado proyecta cualquier representación alabeada $(ghg'h')$ de la imaginaria de segunda especie dada.

Dos puntos imaginarios cuyas bases reales se cruzan determinan una recta imaginaria de segunda especie. Pues tomando en uno de los dos puntos imaginarios una representación $(MNM'N')$ que a partir del punto M sea proyectiva con la $(ABA'B')$ del otro, según vimos que podía hacerse, y designando las rectas AM, BN, $A'M'$ y $B'N'$ por $aba'b'$, respectivamente, se tiene una representación de la recta buscada en la involución alabeada $(aba'b')$, la cual determina de un solo modo el sistema involutivo del espacio en que la recta imaginaria pedida está contenida; porque las rectas de unión de puntos homólogos de dos series proyectivas en bases que se cruzan forman un haz alabeado de segundo orden; la involución $(aba'b')$ definida en él por $(ABA'B') \barwedge (MNM'N')$, determina un sistema involutivo del espacio, y a éste pertenecen todos los otros haces involutivos que se originen cambiando el punto M de la involución $(MNM'N')$ y conservando su proyectividad con la misma $(ABA'B')$.

Dos planos imaginarios, cuyas aristas reales se cruzan, determinan una recta imaginaria de segunda especie, lo que se demuestra sin dificultad, calcando, por correlación, lo dicho en el caso anterior. August introduce estas dos propiedades como definición de recta imaginaria de segunda especie, llamando así al conjunto de elementos imaginarios determinados o por dos puntos o por dos planos cuyas bases reales se cruzan. Y aunque no se vea de ese modo tan inmediatamente el complicado artificio geométrico de una tal recta, se obtienen en cambio varias ventajas: como unificar las definiciones de recta imaginaria de primera y de segunda especie, que serán siempre intersecciones de dos planos imaginarios, cuyas aristas reales se corten o se crucen, o unión de puntos imaginarios en análogas condiciones; facilitar el estudio analítico del imaginarismo permitiendo presentar la recta imaginaria por dos ecuaciones lineales, y autorizar a extender el concepto de imaginarismo a espacios de especie superior, en los que las involuciones no homológicas de Staudt se complican extraordinariamente.

Toda recta imaginaria que tenga dos puntos comunes P y Q con cualquier plano imaginario está toda entera contenida en dicho plano. Si la recta es imaginaria de primera especie, como las involuciones P y Q, tienen que ser secciones del haz de planos en involución definidor del plano imaginario y secciones del haz de rayos en involución definidor de la recta, este haz de rayos es sección del de planos, y los sentidos de estos dos tienen que corresponderse, por corresponderse ambos con los de P y Q. Si la recta es de segunda especie, las representaciones de los citados puntos P y Q, teniendo que estar en rectas dobles de la congruencia que representa la recta y ser perspectivas con una representación $(aba'b')$ de ésta, y teniendo que ser perspectivas también con la representación involutiva del plano, los planos reales de esta representación, conteniendo a $a\, b\, a'\, b'$..., hace que su arista corte a estas rectas y sea un rayo director de $(aba'b')$; lo que juntamente con la correspondencia de sentidos prueban el teorema.

Una recta y un punto no situado en ella determinan un plano; lo cual ha sido ya examinado cuando la recta es de primera especie. Si ésta es de segunda especie, trazaríamos primero por el punto imaginario dado de base r, no doble, un plano real, el cual sabemos tiene común con la recta imaginaria un segundo punto imaginario de base doble s. La recta que pasa por estos dos puntos imaginarios r y s de un plano real es imaginaria de primera especie y, por consiguiente, contiene siempre un solo punto real P; y la perspectiva desde este punto, de una representación de la recta de segunda especie $(aba'b')$, o la perspectiva, desde la recta doble que pasa por P, de la involución s, es el plano imaginario pedido; el cual contendrá, a su vez, la recta de primera especie anteriormente fijada en el plano real auxiliar, y las análogas contenidas en cualquier otro plano auxiliar, lo que da al plano imaginario una generación rectilínea análoga a las del plano real. Si la base real r del punto imaginario es recta de la congruencia en que se asienta la recta de segunda especie $(a\,b\,a'\,b')$, tomada r como rayo director de ésta, el plano $r\,(a\,b\,a'\,b')$ será el pedido.

Una recta y un plano que no pase por ella determinan un punto. Cuestión ya examinada cuando la recta es de primera especie. Mas si ésta fuera la $(a\,b\,a'\,b')$ de segunda especie y la arista real r del plano no fuera doble, tomaríamos primero en ésta un punto real M, por el cual y por la recta $(a\,b\,a'\,b')$ sabemos que pasa siempre un segundo plano imaginario de arista doble s del sistema involutivo del espacio. La intersección de estos dos planos imaginarios r y s pertenecientes a una misma radiación de vértice M, es una recta imaginaria de primera especie, la cual está siempre en un plano real π. La sección por π de una representación de la recta de segunda especie $(a\,b\,a'\,b')$, o la sección por la recta doble contenida en π del haz involutivo s, es el punto imaginario pedido, por el cual pasará a su vez la recta de primera especie anteriormente fijada en el punto M y todas las análogas trazadas por cualquier otro punto real auxiliar. Si r fuera doble, el punto sería el $r\,(a\,b\,a'\,b')$ como antes.

Una recta imaginaria de primera especie $P\,(A\,B\,A'\,B')$ y una de segunda especie $(a\,b\,a'\,b')$ tendrán un punto imaginario común, cuando la recta doble de la involución no homológica del espacio situada en el plano PAB contenga una involución de puntos conjugados del sistema $(a\,b\,a'\,b')$ que sea sección del haz $P\,(A\,B\,A'\,B')$. Y en este caso el plano imaginario que determinan es el que desde la recta doble que pasa por P proyecta la serie $(A\,B\,A'\,B')$.

Dos rectas imaginarias de segunda especie $(a\,b\,a'\,b')$ y $(c\,d\,c'\,d')$ tendrán un punto común, si las dos congruencias lineales de rectas reales dobles en que vienen definidas tienen común una de esas rectas r con una misma involución de puntos conjugados $(A\,B\,A'\,B')$

respecto de los dos sistemas involutivos del espacio. En este caso teniendo que ser los haces de planos conjugados de arista *r*, en los dos sistemas, perspectivos con $(ABA'B')$, son uno mismo, que es el que define el plano imaginario que contiene ambas rectas, y recíprocamente.

Observando atentamente las maneras de corresponderse los sentidos de dos elementos imaginarios dados y del determinado por ellos, se ve inmediatamente que los elementos determinados por un grupo de otros, y por los conjugados de los de ese grupo, son a su vez elementos imaginarios conjugados.

Que tres puntos imaginarios, dos imaginarios y uno real, uno imaginario y dos reales, o los tres reales determinan un plano o están en una recta, y que tres planos reales o imaginarios todos o algunos pasan por una recta o determinan un punto único común a todos ellos, son consecuencia de los teoremas anteriores, que se sacan hallando primero el elemento determinado por dos datos y luego el determinado por éste y el tercero.

El cuidado con los *sentidos* de las involuciones al pasar de unos elementos a otros proyectivos, ya que no van esencialmente comprendidos en la proyectividad, ha determinado a muchos geómetras (llamados no separativos), como Segre, a tomar siempre unidos los pares de elementos conjugados, y a otros, como Klein y Lüroth, a servirse de las *proyectividades cíclicas* del orden *n*, que son las dadas por la relación

$$A_1 A_2 A_3, \ldots, A_n \barwedge A_2 A_3 A_4, \ldots, A_n A_1,$$

las cuales definen los puntos dobles imaginarios como las involuciones elípticas ligadas a la proyectividad, y que, en el fondo, los grupos cíclicos de sus elementos no son otra cosa que grupos de elementos conjugados de involuciones de orden superior [1]: como lo prueba por otro lado el verificarse en ellas la propiedad fundamental de las involuciones, de que si en una proyectividad entre elementos de una figura de primera categoría hay uno solo, de posición general, que forme un grupo cíclico, ocurre otro tanto a

[1] Véase *Tratado de Geometría Analítica,* por D. Miguel Vegas, segunda edición, tomo I, núm. 105.

los otros elementos y la proyectividad es cíclica, es decir, es involutiva [1].

Las potencias sucesivas de las proyectividades cíclicas son también proyectividades cíclicas; en las de orden par ($2n$) su potencia enésima es una involución ordinaria; por eso lo es el cuadrado P_2 de la proyectividad cíclica de cuarto orden, lo cual hace sencillo en este caso el paso de la representación cíclica de cuarto orden a la involutiva ordinaria de los elementos imaginarios.

Pero la proyectividad cíclica más sencilla que conviene usar para representar los elementos imaginarios es la de tercer orden, porque por una parte viene definida por tres elementos ABC de un grupo cíclico, y por otra parte este grupo permite establecer la distinción entre los dos elementos imaginarios conjugados que vendrían dados por ABC y por CBA, respectivamente.

H. Viener hace notar que cuando P es una proyectividad con elementos dobles reales $D_1 D_2$, sus potencias sucesivas $P, P^2, P^3, \ldots$, hacen corresponder a un elemento A los $A_1 A_2 A_3, \ldots$, que tienen como límite un elemento doble D_1; y las potencias $P^{-1}, P^{-2}, P^{-3}, \ldots$, hacen corresponder al mismo A los $A_{-1} A_{-2} A_{-3}, \ldots$, que tienden al otro elemento doble D_2; y que las series análogas que tengan por origen dos elementos diferentes M y N son proyectivas. Y propone utilizar ambas series, caso de que la proyectividad no tenga elementos dobles reales, como representante de uno y otro de dos elementos imaginarios conjugados respectivamente. Amoedo, finalmente, considera juntamente con la transformación homográfica P el haz de proyectividades indicadas al principio, que tienen los mismos puntos dobles; haz que comprende una sola involución de segundo grado y una infinidad de transformaciones cíclicas.

Cualquiera que sea el sistema de representación adoptado para

[1] Pues si se define la proyectividad por tres pares tomados en el ciclo dado $A_1 A_2 A_3 \barwedge A_2 A_3 A_4$, para cualquier nuevo elemento B_1 se tendría

$$A_1 A_2 A_3 B_1 \barwedge A_2 A_3 A_4 B_2 \barwedge A_3 A_4 A_5 B_3 \barwedge \ldots \barwedge A_1 A_2 A_3 B_{n+1}.$$

Luego siendo proyectivas la primera y última cuaterna $B_1 = B_{n+1}$; y la sucesión $B_1 B_2 B_3 \ldots B_n$ forma otro ciclo.

los elementos imaginarios de las figuras reales de primera categoría, las generalizaciones introducidas con ellos obedecen a la ley matemática de contener los conceptos anteriores de punto, recta y plano reales, ideales o en el infinito, los cuales pueden venir dados por involuciones parabólicas, como en las tangentes a una cónica cuyos puntos son todos conjugados con el punto real de contacto, o por involuciones hiperbólicas unidas a un sentido, el cual indicaría, a partir del centro de la involución, como lo indica el signo + o el —, el punto doble de que se trata. Lo mismo puede decirse de las representaciones por proyectividades cuando no llevan la condición expresa de ser cíclicas de orden superior al segundo, porque éstas no tienen nunca elementos dobles reales, y caracterizan sólo a los imaginarios.

Y cualquiera que sean estas representaciones, los elementos del espacio, ya sean todos imaginarios o en parte reales y en parte imaginarios, tienen las mismas propiedades fundamentales, responden al sistema de postulados admitido, con cierta modificación del concepto de segmento y de ángulo imaginario, y obedecen a los mismos principios generales que cuando se suponen todos reales. Fácilmente se ve, con efecto, la subsistencia de la ley de dualidad, uno de los más fecundos principios geométricos cuando se considera, por ejemplo, una recta imaginaria de primera especie, conjunto de *puntos* imaginarios representados por involuciones en todas las *rectas reales* del *plano real* que contiene aquella recta, en correlación con otra recta imaginaria de primera especie, arista de un haz de planos imaginarios representados por involuciones de planos, sobre todas las *rectas reales* (aristas) que pasan por el *punto real* de aquella recta, etc., etc.

Existe actualmente tal riqueza de teorías, relaciones, correspondencias biunívocas y multiunívocas, entre los elementos imaginarios del espacio ordinario, o entre los de espacios de órdenes superiores; de líneas y superficies con elementos imaginarios, o totalmente imaginarias, dadas por polaridades sin elementos dobles reales o dadas por sucesiones (cadenas e hilos) de entes imaginarios convenientemente condicionados; y de cuestiones de puro Análisis o de Geometría analítica relativas a esa clase de elementos, que se necesitarían muchos volúmenes para dar sucinta idea del caudal científico a ellos consagrado [1], cumpliendo a nuestro objeto indicar ya solamente algo relativo a continuidad de los elementos de los entes imaginarios y a sus representaciones abreviadas mediante un *elemento fundamental.*

* * *

En la representación de un dado elemento imaginario por una involución sobre una base real de primer grado, es evidente que puede tomarse para primer elemento de la cuaterna determinante *uno cualquiera* de dicha base, y como siempre puede hacerse que esa representación sea armónica, el tercer elemento de la cuaterna viene dado con el primero, en cuanto se den los otros dos. Quedan a nuestra disposición para mover el elemento imaginario sobre su base real los segundo y cuarto elementos de la cuaterna armónica. Habrá, pues, sobre una base real de primer grado tantos elementos imaginarios como parejas de sus elementos reales puedan formarse.

Podemos admitir, como postulado: que si desde dos elementos K y L muy próximos de una base real parten representaciones $(KMK'M')$ y $(LNL'N')$ de dos elementos imaginarios A y B, cuyos elementos reales correspondientes en dichas cuaternas estén también muy próximos, dichos elementos A y B, así como sus conjugados A y B, estén, a su vez, muy próximos, y que tanto más éstos se aproximarán cuanto más aquéllos se aproximen.

De este modo, si de los elementos disponibles de la cuaterna se fija todavía el segundo, moviendo el otro por toda la base real, se obtendrá una sucesión lineal de elementos imaginarios, y a cada posición del cuarto elemento, supuesto fijo, corresponderá (mo-

[1] Pueden consultarse sólo en español: *El Tratado de Geometría de la Posición;* y el discurso de entrada en esta Academia de D. Eduardo Torroja; *El Tratado de Geometría Analítica*, y el discurso de entrada en esta misma Academia de D. Miguel Vegas; los *Fundamentos de la Geometría Proyectiva superior,* de D. Julio Rey Pastor, y el *Estudio sintético de los Espacios Complejos de n dimensiones,* de D. Olegario Fernández Baños; en cuyas obras está, además, la bibliografía extranjera más completa y selecta acerca de estas cuestiones. Nuestra aportación pretende ser el enlace que, a nuestro modo de ver, hacía falta, entre la definición del imaginarismo y el contenido de estas obras.

viendo el segundo) otras tantas sucesiones lineales de los elementos imaginarios de dicha base. Los espacios constituídos por todos los elementos de una base real de primer orden en el plano real forman, pues, una variedad de dos dimensiones; análogamente se vería que los conjuntos de elementos de base real en el espacio son variedades de cuatro dimensiones.

Con ciertas restricciones pueden hacerse extensivas estas consideraciones a los elementos contenidos en bases imaginarias. La recta imaginaria de primera especie tiene como puntos los determinados sobre cada una de las rectas del plano de representación por su haz involutivo, excepción hecha de las rectas de dicho haz, que dan todas un solo punto, que es su vértice. En cambio, los puntos de la recta imaginaria de segunda especie son los determinados en cada una de las rectas de la congruencia elíptica respectiva, por los pares de puntos conjugados del sistema involutivo del espacio que representa; congruencia de rectas que es una variedad de dos dimensiones, pero que, además, lleva la complicación de no poder ser representadas más que en el espacio reglado, que es una variedad de cuatro dimensiones. Los puntos, para acabar, del plano imaginario son los representados en cada una de las rectas del espacio, variedad de cuatro dimensiones, al cortar con ellas al haz de planos definidor del imaginario, excepción de las que cortan a su arista en un punto real que dan todas ese mismo punto, etc., etc.

Esta condición de la naturaleza del elemento imaginario de venir en multiplicidades de mayor número de dimensiones que las que corresponde a su base ha sido la causa de la mayoría de las dificultades con que ha tropezado su desenvolvimiento, convertidas en un fantasma para Steiner; por eso, aunque los espacios de *n* dimensiones no hubieran rendido a la ciencia otra utilidad que la de hacer posibles todas las representaciones imaginarias, habrían hecho un papel importantísimo en ella.

Pero lo que más ha preocupado a los geómetras ha sido lograr representaciones de elementos imaginarios mediante ûn solo elemento real situado en una variedad del mismo número de dimensiones que el conjunto de elementos imaginarios, v. gr., la variedad de puntos reales e imaginarios sobre una recta real de un plano también real, por la de puntos reales de este plano; la variedad de rectas reales e imaginarias sobre un plano real de una radiación propiamente dicha, por los rayos reales de ésta, etc., etc.

Para esto se toma, respecto al primer caso citado, en el plano de representación la recta a, asiento del conjunto de puntos a representar, llamada elemento *principal*, y otra recta r asiento de un punto imaginario R exterior a aquel conjunto, llamado elemento *fundamental;* y desde éste se proyecta aquel conjunto. Cada recta imaginaria proyectante tiene un punto real (que al principio queda dicho cómo se construye), y éste será el representante correspondiente a cada punto del conjunto. Recíprocamente, cada punto real del plano es vértice de una perspectiva del punto fundamental; y la sección de esa perspectiva involutiva por la base del conjunto dado será el punto imaginario representado. Los puntos reales del conjunto se representan por sí mismos, y los puntos reales de r representan todos al punto $P = ar$; así que, excepción hecha de este último caso, hay una correspondencia biunívoca entre los puntos del conjunto a representar y los puntos reales del plano de representación.

Conviene observar que los mismos puntos reales del plano de representación, con idéntico mecanismo, representan cada uno una recta imaginaria del haz de vértice imaginario constituído por el punto R, sólo que ahora éste hará de elemento principal y la variedad de puntos sobre a de elemento fundamental. Aplicando la ley de dualidad, por un simple calco de lo anterior, se obtendrían con las rectas reales del plano, las representaciones de todas las rectas reales e imaginarias de un haz de vértice real, sólo que este vértice haría ahora de elemento principal y otro punto del plano, vértice de una recta imaginaria dada, exterior a aquéllas, de recta fundamental [1]; representaciones que servirían además para los puntos imaginarios situados en la recta fundamental, es decir, para los puntos de una recta de base imaginaria.

No hay, por tanto, necesidad de detallar todas estas represen-

[1] Según lo dicho en las páginas 93 y 94.

taciones que virtualmente están contenidas en la primera. Volviendo, pues, a nuestra base a y punto fundamental R, tomemos en aquélla la representación armónica (PBQ_1B') de uno de sus puntos, y la representación también armónica (PCQ_2C') del punto R. Los puntos reales representativos del (PBQ_1B') y de su conjugado son los otros dos puntos diagonales S y S', diferentes del P, del cuadrivértice completo $BCC'B'$, los cuales están sobre la recta Q_1Q_2 y separados armónicamente por las bases del conjunto dado y del punto fundamental, todo lo cual facilita su construcción[1].

Desde el punto de vista de la Geometría euclidea ofrece este sistema de representación un caso notable, que es aquel en que se toma por elemento fundamental el *par de puntos cíclicos del plano*. Entonces la base r del punto fundamental es la recta del ∞, y la cuaterna armónica, sobre la base a dada, a partir del punto del infinito de ésta, de todo punto imaginario $\mathbf{A} = (\infty BQ_1B')$ dado en ella, viene constituída por dicho punto del infinito, su conjugado Q_1 (fijado por su abscisa x respecto a un origen O) y por dos conjugados B y B' que, por ser separados armónicos por los otros, tendrán que estar uno a un lado y otro al otro y equidistantes de Q_1, a una distancia y característica del punto de que se trata; de tal modo que éste variará cuando varíe Q_1, cuando varíe el par BB' y cuando varíen ambas cosas.

El conjugado del infinito en la *involución absoluta* definidora de los puntos cíclicos es el polo absoluto Q_2 de a por el que pasa la perpendicular a esta recta en Q_1; los otros dos puntos conjugados C y C' de la cuaterna armónica de dicha involución absoluta son los asociados de Q_1 en dos rectas trazadas por este punto, perpendiculares entre sí, para que formen par de la involución de rayos absoluta o rectangular, y simétricos a la vez respecto de Q_1Q_2 para que sean separados armónicos por a y $\overline{Q_1Q_2}$. Estas direcciones son, pues, las de las bisectrices del ángulo recto $(a\,\overline{Q_1Q_2})$.

El cuadrivértice $BCC'B'$ está formado ahora por las paralelas a esas dos últimas direcciones trazadas por B y por B', las cuales forman un cuadrado finito, y por las rectas a y $\overline{Q_1Q_2}$. Los otros

[1] Según lo dicho en las páginas 92 y 93.

dos vértices S y S' de este cuadrado, situados en $\overline{Q_1 Q_2}$, son los puntos diagonales del cuadrivértice $BCC'B'$, uno de los cuales es la representación del punto pedido $(\infty B Q_1 B')$ y otro la de su conjugado $(B' Q_1 B \infty)$; todo perfectamente de acuerdo con la interpretación Canchy o Argand-Gaus de las cantidades complejas del Análisis $x + y\sqrt{-1}$ y $x - y\sqrt{-1}$.

Si en vez de los puntos cíclicos se toman para puntos fundamentales dos imaginarios conjugados cualesquiera situados en la recta del infinito, ni la condición

$$a \perp \overline{Q_1 Q_2}, \text{ ni la } Q_1 B = Q_1 B' = Q_1 S$$

subsisten [1].

Por estas consideraciones se llama método de Gaus al procedimiento general de representación que contiene a éste, y plano de Gaus al conjunto de elementos que intervienen en dicha representación y su correlativa.

Si del plano de Gaus se hace una proyección estereográfica sobre una cuádrica sin puntos en el infinito, que puede ser tangente a aquel plano en un punto G, tomando como centro de proyección el punto V de contacto del plano tangente a dicha superficie desde la base del punto fundamental r del plano de Gaus, y haciendo de modo que los pares de conjugados de r lo sean respecto de la cuádrica, habráse definido una correspondencia biunívoca entre los puntos de aquel plano y los de esta cuádrica, que no tiene excepciones; pues al punto fundamental corresponde el V, y constituye otro método para la representación *mono-real* de los elementos imaginarios, llamado de *Riemann,* porque este gran geómetra sacó mucho partido del caso particular en que la cuádrica es una esfera y el elemento fundamental del plano de Gaus su par de puntos cíclicos.

El Sr. Rey Pastor propone un nuevo método que llama circular, en el que hace de figura fundamental una cónica, que puede ser

[1] No obstante, es tan sencilla y *natural* la involución absoluta en el infinito para punto fundamental, y por ende la *perpendicularidad* de la ordenada imaginaria respecto de su abscisa, que juzgamos cualquier otra dirección oblicua para la ordenada imaginaria, mucho menos cómoda y mucho más artificial.

una circunferencia, sobre la cual desde uno de sus puntos se proyectan todos los puntos reales de la recta a, asiento de los imaginarios que han sido dados directamente sobre ella, o que son secciones de un haz de rectas de vértice imaginario. Los puntos propios de dicha circunferencia representarán a los puntos propios de a, y toda involución entre ellos representará, por su centro proyectivo, al punto imaginario proyección sobre a de esa involución. Los puntos propios del círculo representan, pues, cada uno, dos puntos imaginarios conjugados, cuya separación se logra suponiendo al círculo dos hojas pegadas por su borde, y, miradas ambas desde un lado, considérase positiva la *superior* para las involuciones cuyo sentido es el de un observador que recorre el borde teniendo el círculo a su *izquierda*, y negativa la *inferior* para las involuciones de sentido contrario, y teniendo, para pasar de un punto a su conjugado, que pasar por un punto real del borde, si se ha de hacer el paso sin solución de continuidad.

Staudt toma como figura fundamental una recta imaginaria de segunda especie, y relaciona perspectivamente con ella toda figura de primera categoría. Los elementos de ésta, sin excepción, vendrán representados por las rectas reales de la congruencia elíptica, que es asiento de la recta de segunda especie.

Por eso importa establecer las reglas para las sucesiones y para las separaciones de sus elementos: sean L, M, N, F cuatro elementos de una de esas rectas imaginarias: l, m, n, f las rectas reales que los contienen; y supongamos que no pertenecen a una misma cuádrica alabeada. Tres de ellas, l, m, n, determinan una de estas superficies; y una generatriz a del otro sistema da con ellas los planos al, am, an; los planos que desde a proyectan los puntos $(ABA'B')$ de la involución sobre f, definidora del punto imaginario F, con su sentido ABA', por ejemplo, es decir, los planos aA, aB, aA', se suceden en el haz a en un sentido que puede ser el mismo $a(lmn)$, o el contrario. En el primer caso se dice que el punto F está en el sentido definido por dichos otros tres puntos, tomados en el orden L, M, N, y en el segundo, que está en el otro sentido NML. Cuando la recta f, asiento del punto $(ABA'B')$ pertenece al mismo haz alabeado, l, m, n, hay un solo plano af, en el que se confunden los aA, aB, aA', y no puede hablarse de sentido. Cuando tal ocurre se dice que F está *neutral* respecto de L, M, N.

El conjunto de todos los elementos que están neutrales respecto de tres dados constituyen lo que se llama una *cadena;* sus representaciones regladas constituyen una cuádrica alabeada, a la que por extensión se le suele llamar a veces también una cadena. Dos elementos F y G de una misma recta de segunda especie, que no perteneciendo a una misma cadena LMN están con los elementos de ésta, uno en el sentido LMN, y otro en el opuesto, tienen sus bases una a un lado y otra al otro de la superficie de la cadena. Una vez ligada una figura de primera categoría (v. gr., el conjunto de puntos de base real a), por perspectiva a la recta fundamental de segunda especie u, si por un plano π que pase por a se produce una sección en dicha recta fundamental, se obtendrá un punto R sobre la recta doble r contenida en π; como secciones con los diversos planos que pasan por u se obtendrán los rayos imaginarios del haz de vértice R, y como trazas de las rectas de la congruencia elíptica continente de u, los puntos reales de los rayos imaginarios de ese haz de vértice R, y habremos obtenido en π una representación gausiana de la figura de primera categoría dada. Todas las cadenas de los elementos de u darán cónicas en π, que contendrán el punto R y su conjugado, y que se llaman *cadenas* del conjunto de elementos de primera categoría en el plano de representación de Gaus. Dos puntos reales de este plano, uno interior y otro exterior a una cadena, están en sentidos contrarios respecto de los elementos de ésta, y cada uno de ellos está *neutral* respecto de tres de los mismos; y así como tres rectas de la congruencia determinan una cadena, tres puntos de un conjunto a determinan la cadena o cónica que pasa por ellos y por los puntos R y $\bar{R}$.

Una cadena viene a ser, pues, una sucesión lineal continua de elementos, definida la continuidad, caso de imaginarios, por la de una serie o haz real que aquéllos o algunas de sus perspectivas o secciones ha de contener o por los que han de pasar.

Los elementos reales de base real constituyen siempre una cadena, cada dos de los cuales están armónicamente separados por dos imaginarios conjugados cualesquiera de la misma base.

Cada cuatro imaginarios hacen una figura armónica cuando sus elementos representativos pertenecen a una misma cadena y están en ella dos separados armónicamente por los otros dos. Su orden de sucesión es el que sus representaciones tengan en la cadena que los contiene. Pues toda cadena queda dividida en dos partes por todo par de elementos M y N contenidos en ella; de tal modo, que si el elemento A cae en una de esas partes y el B en la otra, ambos están separados por los M y N, y constituirán una cuaterna ordenada $MANB$ cuando en la cadena tengan esa misma disposición.

Si dos puntos, F y G, pertenecientes a una misma figura uniforme están separados por la cadena LMN, lo están también por toda otra cadena que tenga común con la anterior dos puntos separados por los F y G. Y es curioso el hecho de que dos puntos de una recta son extremos de infinitos segmentos; dos rectas de un haz, lados comunes de infinitos ángulos, y dos planos de un haz, caras comunes de infinitos diedros: constituídos por los conjuntos de elementos de las diferentes cadenas que tienen comunes aquel par y están comprendidos entre ellos en un sentido determinado. En suma, el estudio suficientemente aquilatado de estas representaciones y de las relaciones entre las cadenas conduce a una conclusión importantísima cuya trascendencia surge con su sólo enunciado, a saber: que toda serie de resultados derivados para elementos reales por consideraciones proyectivas sobre formas uniformes correspondientes, tienen el mismo valor general cuando se introducen en ellas elementos imaginarios.

VII

Espacios de *n* dimensiones. Hemos llegado al punto en que los conceptos geométricos que venimos considerando alcanzan la mayor generalidad posible: primero, porque los elementos equiparables a los puntos del espacio ordinario pueden ser aquí entes de cualquier naturaleza, algébrica, geométrica y hasta física, como es la variedad de los colores, en cada uno de los cuales hay grados sucesivos de colorido, tono, intensidad y luminosidad, y como la variedad de las coordenadas cartesianas y el tiempo considerado como una coordenada más, en muchas cuestiones de alta Física [1]; y después, porque la admisión de que *fuera de un espacio de* n *dimensiones hay puntos,* nos permite construir el espacio siguiente de $n + 1$ dimensiones con sólo extender la ley de recurrencia por virtud de la cual se pasó de la recta al plano ordinario, y de éste al espacio E_3.

Los postulados para estas concepciones abstractas de la Geometría son los mismos ya sentados para los puntos, rectas y planos del espacio ordinario, excepción hecha, muchas veces, de los del *segmento,* por darse la recta directamente, y sustituyendo el de que *fuera del espacio* E_3 *no hay puntos* por el anteriormente citado, y aun introduciendo el que prepara la definición de plano bajo la forma que le dió Pasch de *que, si dos rectas se cortan, otras dos que corten a esas fuera de su punto común se cortan también;* porque esta forma es más general y apta para el espacio proyectivo, y no debe aquí prescindirse de nada que preste generali-

[1] Véase la conferencia de D. Blas Cabrera sobre una *Aplicación a la Física de la Geometría de cuatro dimensiones.* (28 Marzo 1914.)

dad a estos espacios abstractos, en los cuales se suponen desde luego existentes todas las generalizaciones anteriores, pudiendo, por tanto, alternar puntos, rectas y planos propios e ideales, imaginarios y reales, etc., sin perjuicio de que, en casos particulares, pueda concretarse la especulación a una variedad determinada.

Llamando radiación de $(n-1)$ *sima especie* al conjunto de rectas que proyectan un espacio E_{n-1}, de $(n-1)$ dimensiones, desde un punto P exterior al mismo, el conjunto de puntos de todas esas rectas es lo que se entiende por espacio de n dimensiones, el cual queda determinado por cualquiera de los espacios E_{n-1} contenidos en él, llamados hiperplanos de E_n, y por un punto P cualquiera del mismo exterior a dicho espacio inferior.

En el espacio de tres dimensiones determinado por un plano π y un punto P puede éste trasladarse a cualquier otro Q de una recta de la radiación $P\pi = E_3$, puesto que toda recta de la radiación $Q\pi$, teniendo dos puntos con E_3, está en éste, y recíprocamente. Y como otro plano, ρ, de $E_3 = Q\pi$, tiene que tener sus puntos en rectas de la radiación $Q\pi$, y recíprocamente, las radiaciones $Q\pi$ y $Q\rho$ son una misma, y uno mismo los conjuntos de puntos $P\pi$ y $Q\rho$.

Elevando sucesivamente por recurrencia los teoremas: toda recta con dos puntos y todo plano con tres, independientes entre sí, situados en un espacio de tres dimensiones, están enteramente contenidos en él, se llega a sentar que todo espacio E_n de orden inferior a otro E_m, que tienen común con éste tantos puntos independientes como indica su orden aumentado en una unidad, está todo entero contenido en E_m. Y entonces la demostración de la determinación del espacio E_m puede calcarse de la de E_3. Porque si son P y E_{m-1} los elementos determinantes de un espacio de m dimensiones, puédese trasladar P a otro punto Q de las rectas de la radiación PE_{m-1}; puesto que toda recta de la nueva radiación QE_{m-1}, teniendo dos puntos comunes con E_m (el Q y el de E_{m-1} que la determina), está toda entera en dicho espacio, y recíprocamente. Después puede sustituirse el hiperplano determinante de la radiación QE_{m-1} por otro F_{m-1} de E_m, puesto que sus puntos tendrán que estar todos en rectas de QE_{m-1}, y recíprocamente. Lo cual prueba que las radiaciones QE_{m-1} y QF_{m-1} son una misma; y definiendo la primera el mismo espacio que PE_{m-1}, síguese que los conjuntos de puntos PE_{m-1} y QF_{m-1} coinciden [1].

Los conjuntos de puntos, rectas y planos imaginarios, juntamente con los elementos reales situados en sus bases, que antes he presentado a vuestra consideración, pueden también ser elevados por la misma ley de recurrencia, y constituyen de ese modo los espacios que se denominan *complejos,* que son una variedad de los espacios abstractos.

Pero en los entes de elementos complejos vimos que no coinciden los números de dimensiones de sus bases reales, y los que les corresponden como conjuntos de elementos reales e imaginarios indistintamente.

Cuando no se consideran más que elementos reales, las variedades de puntos de una recta y de rayos de un haz de rectas o de planos de primer orden vienen determinados por *dos* de sus elementos y son espacios de *una dimensión,* o conjuntos dispuestos en una sola sucesión infinita, que se designa por ∞^1. El conjunto de puntos, o el de rectas de un plano, y el de rayos o de planos de una radiación, vienen determinados por *tres*, completamente independientes, de sus elementos, y son variedades de *dos* dimensiones, cuyos puntos, rectas o planos constituyentes, vienen en sucesión infinita de entes de una dimensión ∞^1, y por eso se representa su número por ∞^2. El conjunto de puntos o el de planos del espacio E_3 queda determinado por *cuatro* completamente independientes de sus elementos, y son variedades de *tres* dimensiones, cuyos puntos o cuyos planos vienen en sucesión de entes de *dos* dimensiones ∞^2, lo que autoriza a representar su número por ∞^3.

El espacio ordinario, considerado como conjunto de rectas, se determina por cuatro independientes de ellas *abcd,* puesto que las *a* y *b* como conjugadas y la *c* como pertenecientes determinan un complejo lineal de rectas; las mismas *a* y *b* como conjugadas y la *d* como perteneciente determinan otro complejo lineal.

[1] Pueden completarse estos conceptos en la obra *Fundamentos de la Geometría Proyectiva superior,* tantas veces citada, del Sr. Rey Pastor.

Y por todo punto P del espacio, en el plano Pc tiene el primer complejo un haz de rayos y en el plano Pd, el segundo, otro haz de rayos, con un rayo común; determinando entre los dos la radiación de rayos de vértice P; y lo mismo para todos los demás puntos del espacio. Esta variedad de rectas constituida por todas las del espacio ordinario tiene, sin embargo, *cuatro* dimensiones y su número se representa por ∞^4. Pero si no usáramos más que rectas en determinaciones de espacios compuestos de rectas, veríamos que *tres* independientes determinan un haz alabeado del que ellas forman parte, esto es, una sucesión serial de ∞^1 elementos, que desde este punto de vista puede mirarse como de *una dimensión*.

Que *cuatro* rectas independientes determinen una congruencia de rectas de primer orden, de la que ellas forman parte, compuesta de infinitos haces alabeados, esto es, por una sucesión de entes cada uno con ∞^1 elementos, que puede mirarse como de *dos* dimensiones.

Que *cinco* rectas independientes *abcde*, esto es, tales que cada tres no pasen por un punto ni estén en un plano y *cuatro* no estén en un mismo haz alabeado, determinan un *complejo lineal* del que ellas forman parte, que puede mirarse como un conjunto de *tres* dimensiones, y, por último, *seis* rectas independientes determinan el espacio ordinario reglado como variedad de *cuatro* dimensiones.

Bastan estos ejemplos para comprender que si entre el número de elementos reales determinantes de una forma real, su número de dimensiones, los órdenes de los infinitos que expresan la variedad y los grados de libertad de que un elemento goza en el conjunto, hay estrechas dependencias, distan mucho, no obstante, de poder ser expresadas, con relación a toda clase de elementos, bajo un solo enunciado.

En los espacios *puntuales* de puntos ordinarios, los números de dimensiones han sido constantemente una unidad menos que el número de elementos que los determinan; y este mismo criterio se sigue cuando se trata de *espacios complejos* en que hacen de elementos o datos puntos reales, propios o impropios, e imaginarios, con igual valor todos ellos en el conjunto. Ese número de dimensiones u orden se suele expresar por un *subíndice*, y se acostumbra a poner como exponente otro indicador de la *especie*, que es la diferencia entre el número de dimensiones del conjunto, y el del elemento que le sirve de base, considerándose para este fin el punto real como de dimensión *cero* y toda base imaginaria como de dimensión — 1, y siendo de especie 0 todos los espacios reales.

Así, por ejemplo, la recta imaginaria que determinan *un* punto imaginario A y *uno* real P exterior a su base es un espacio de *una* sola dimensión, y de *primera* especie, puesto que su base es el vértice. Su notación es $A^1{}_1$ y sus puntos pueden ordenarse en un infinito de segundo orden, porque hay uno por cada recta real del plano del haz AP, excepción hecha de las que pasan por P.

La recta imaginaria que determinan *dos* puntos imaginarios cuyas bases se cruzan es, asimismo, un espacio de una sola dimensión, y es de segunda especie, porque su base es uno de los ejes imaginarios de la congruencia elíptica, de dimensión — 1, y $1 - (-1) = 2$. Su notación es $A^2{}_1$, y el conjunto de sus puntos es un infinito de segundo orden, por haber uno en cada recta de aquella congruencia.

El plano imaginario, determinado por un punto imaginario y dos reales no situados en un mismo plano con la base del primero, es un espacio de *dos* dimensiones, y de primera especie, porque su base (arista del haz de planos que determinan los dos puntos reales), es de una dimensión. Tiene, pues, por notación $A^1{}_2$ y un conjunto de puntos expresable por ∞^1, cada uno situado sobre una recta del espacio ordinario, excepción de las que cortan a su arista en un punto, que dan sólo éste.

La *serie de puntos complejos* sobre recta real, quedando determinada por dos puntos reales, es un espacio de una dimensión, es de especie nula, con una notación $A^0{}_1$ y un número de ∞^2 puntos, cuyas representaciones reales en el plano de Gaus eran los ∞^2 puntos reales de éste. El conjunto de puntos de todos los planos del haz de planos complejos sobre arista real viene determinado por cuatro puntos reales, no situados en un plano: dos determinantes de una serie de puntos complejos de base real, y otros dos para la arista del haz, desde la cual se proyecta aquélla; es, pues, un espacio de *tres* dimensiones y de segunda especie A^2_3, puesto que la base o arista del haz de planos es de una sola dimensión. Correspondiéndole un conjunto de puntos dado por ∞^6, que son los ∞^2 sobre cada una de las ∞^4 rectas reales del espacio ordinario. El conjunto de los puntos de todos los rayos del haz de rectas complejas de vértice real, sección del anterior por un plano real, o perspectiva del A^0_1 desde un punto real exterior, es un espacio A^0_2 con ∞^4 elementos. El conjunto de los puntos de los rayos del haz complejo, determinado por un punto imaginario y cada uno de los puntos reales de un plano trazado por él, es asimismo un espacio A^0_2 que tiene *dos* dimensiones, porque lo determinan tres puntos reales y especie nula, que es la diferencia entre 2 y (+ 2), que corresponde a su plano base.

Estos ejemplos contenidos en el espacio puntual real E_3 bastan para comprender la estructura íntima de tales espacios y la extraordinaria complicación que adquirirían al elevar su orden o al tomar como elementos otras figuras complejas distintas de los puntos. En todos ellos se observa que los órdenes de los *infinitos* con que se designa la totalidad de sus puntos es el *duplo* del número de sus dimensiones.

Proyectando el plano imaginario de segunda especie A^1_2 contenido en E_3 desde un punto P exterior a éste, se tiene una radiación de ∞^4 rectas contenidas en un espacio de cuatro dimensiones E_4. El conjunto de los puntos de todas estas rectas es un espacio A^1_3 de tres dimensiones contenido en uno de cuatro; y tiene especie primera porque su base (plano determinado por el eje de A^1_2 y P), es de dos dimensiones, constituyendo así un hiperplano de primera especie del espacio E^0_4, con ∞^6 puntos.

Proyectando igualmente los puntos de una recta imaginaria de segunda especie A^2_1 desde un punto P de un espacio E_4 exterior al E_3 que contiene las rectas de la congruencia, asientos de los puntos de A^2_1, se obtiene un plano imaginario de segunda especie A^2_2, con un solo punto real, el P; con ∞^2 rectas imaginarias de primera especie, que son las que desde P proyectan los ∞^2 puntos imaginarios situados en las rectas de la congruencia, y con ∞^4 puntos que son los ∞^2 de cada una de las ∞^2 rectas dichas.

De este modo se irían obteniendo por proyección de los anteriores, desde puntos del espacio E_4, nuevos entes complejos contenidos en él, y así sucesivamente; debiendo llamar la atención sobre que la identidad de valor geométrico de los puntos reales e imaginarios de un conjunto cualquiera de esos, que contengan de ambas clases, es un hecho que puede comprobarse *a posteriori* con sólo fijarse en algunos de ellos. La recta imaginaria de primera especie, por ejemplo, definida por un punto imaginario y otro real, puede serlo por dos imaginarios de la misma, puesto que, siendo perspectivas las representaciones de éstos, son secciones de un mismo haz real de rectas. El plano imaginario de primera especie, determinado por un punto imaginario y dos reales, puede serlo por dos de sus puntos imaginarios y uno real, o por tres de sus puntos imaginarios; pues siendo éstos perspectivos dos a dos, por el primero y segundo y por el primero y tercero pasan dos haces de rectas que, siendo a su vez perspectivos, determinan un haz de planos como en el primer caso, etc., etc. Y obedeciendo dichos elementos a los postulados fundamentales de la Geometría y a sus consecuencias, puede extenderse a ellos todos los teoremas que de los mismos nacen, propios de la Geometría ordinaria [1].

Desde el punto de vista analítico, siempre que se tengan n parámetros o coordenadas, o bien n razones de todos esos números menos uno a éste (si son coordenadas homogéneas), de tal modo acondicionada su existencia, que cada grupo de valores arbitrarios atribuídos a dichas n cantidades nos permitan hallar una *entidad*, o simplemente una solución, y sólo una, compatible con las mencionadas condiciones de existencia, el conjunto de todos los entes o de todas las soluciones que pueden de ese modo ser determinadas constituye lo que se llama un espacio de n dimensiones. Todas las esferas imaginables en el espacio euclideo son, v. gr., elementos de un espacio de cuatro dimensiones, y lo mismo todas las cónicas

[1] Véase *Estudio sintético de los Espacios Complejos de* n *dimensiones*, de D. Olegario Fernández Baños; Tesis doctoral inspirada por el Sr. Rey Pastor y desarrollada bajo su dirección.

que se apoyan en cuatro rectas dadas independientes entre sí; así como las cúbicas alabeadas situadas sobre una superficie de segundo orden forman espacios de cinco dimensiones.

Un espacio de n dimensiones contiene en sí infinitos espacios de órdenes inferiores que vienen definidos, generalmente, por una o más ecuaciones entre las coordenadas o parámetros, siendo de entre estos espacios subordinados dignos de especial mención los definidos por ecuaciones lineales.

La importancia capital de estas concepciones está en la posibilidad de interpretar en ciertos espacios constituídos con entes de cualquier naturaleza propiedades y relaciones descubiertas de antemano en otros, lo cual se logra mediante relaciones que se establecen entre las coordenadas de los elementos variables de los dos espacios, que han de ser del mismo número de dimensiones; de tal modo que a cada elemento del uno corresponda uno o un número finito del otro, y constituyen estas relaciones medios fecundísimos de operar transformaciones geométricas, entre las que son notables las del grupo de las *racionales* o *biunívocas*, con elementos de excepción o fundamentales.

Por medio de una transformación de esta clase se puede referir al espacio punteado ordinario un complejo lineal de rectas, que vimos es un espacio de tres dimensiones, que tienen rectas por elementos; habiendo obtenido los Sres Noether y Lie, cada uno por su lado, multitud de propiedades notables, entre las que puede citarse el hecho de que al plano del espacio ordinario corresponde la congruencia lineal de un solo eje del complejo, y a una congruencia lineal cualquiera de éste, cuádricas que pasan por una cónica fija, etc., etc. La doctrina analítica de la *dualidad* no es más que la aplicación de este mismo principio al caso que más a la vista se tenía: el del espacio euclideo conjunto de puntos relacionado con el mismo considerado como conjunto de planos.

Representar las rectas del espacio ordinario, viene a decir Eugenio Beltrami [1] por sus seis coordenadas homogéneas $abclmn$, es como haber considerado una extensión quíntuple-

[1] *Cartas a Cremona* (Enero 1892).—*Obras Matemáticas*, de Cremona.

mente infinita, uno de cuyos elementos queda individualizado por seis valores independientes, $a' b' c' l' m' n'$, de esas coordenadas. Y si en esta extensión se aíslan después todos aquellos elementos, en número cuádruplemente infinito, cuyas cordenadas satisfacen a la ecuación cuadrática.

$$al + bm + cn = 0$$

que es la condición que impone la Geometría analítica a dichas coordenadas homogéneas para que puedan representar una recta en el espacio ordinario [1], los elementos así aislados son todas las rectas de este espacio.

Conteniendo las cónicas de un *plano euclideo dado* en sus ecuaciones homogéneas *seis* coeficientes, constituye su conjunto otra variedad quíntuplemente infinita. Y como la condición analítica para que una cónica φ sea inscripta en un triángulo inscripto en otra cónica ψ es cuadrática respecto de los coeficientes de esta última y puede ponerse bajo la misma forma

$$al + bm + cn = 0$$ [2]

vese fácilmente, mediante la relación biunívoca entre el espacio

[1] Véase *Tratado de Geometría Analítica*; de D. Miguel Vegas, 2.ª edición, tomo II, págs. 625 y 626, así como la 636 y siguientes.

[2] Si fuera $Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2Fuw^2 + 2Guw + 2Huw = 0$, la ecuación tangencial de la cónica fija φ y $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + gxz + 2hxy = 0$ la puntual de la cónica variable ψ, la condición de inscriptibilidad de la primera y de circunscriptibilidad de la segunda a un mismo triángulo (Salmon: *Cónicas*, pág. 483, edic. francesa, 1870) puede ponerse bajo la siguiente forma:

$$(Aa + Bb + Cc + 2Ff + 2Gg + 2Hh)^2 - 4\,[(BC - F^2)(bc - f^2) + (CA - G^2)(ca - g^2) + (AB - H^2)(ab - h^2) + 2(GH - AF)(gh - af) + 2(HF - BG)(hf - bg) + 2(FG - CH)(fg - ch)] = 0;$$

la cual, haciendo $A = B = C = 0$ y $F = G = H = 1$, como es lícito, se reduce a:

$$bc + ca + ab + 2af + 2bg + 2ch = 0$$

y haciendo en ésta

$$4f + b + c = l,\ 4g + c + a = m \text{ y } 4h + a + b = n$$

se reduce a su vez a: $al + bm + cn = 0$.

euclideo reglado y el plano conjunto de cónicas, ambos de cinco dimensiones en coordenadas homogéneas, que todas las cónicas ψ circunscriptas a triángulos circunscritos a una cónica fija φ constituyen una variedad de *cuatro* dimensiones de hecho análoga a la constituída por todas las rectas del espacio; y toda la Geometría sobre las rectas en el espacio tratada de este modo coincide con la Geometría de las cónicas del sistema ψ. Por ejemplo, a un complejo lineal de rectas

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \lambda l + \mu m + \nu n = 0$$

corresponde el grupo de cónicas del sistema ψ circunscritas a triángulos autopolares respecto de una cierta cónica cuyos coeficientes de su ecuación tangencial son $(\alpha + \mu + \nu)$, $(\beta + \nu + \lambda)$, $(\gamma + \lambda + \mu)$, λ, μ y ν. A un haz de rectas corresponde un haz de cónicas, etc., etc.

Comunica Cremona al mismo Beltrami que, si con los coeficientes de la ecuación cartesiana de una esfera

$$x_1(X^2 + Y^2 + Z^2 - 1) + 2x_2 X + 2x_3 Y +$$
$$+ 2x_4 Z + i x_5 (X^2 + Y^2 + Z^2 + 1) = 0$$

se forma la ecuación

$$x^2_1 + x^2_2 + x^2_3 + x^2_4 + x^2_5 = 0,$$

de la superficie ***absoluta***, en un espacio de cuatro dimensiones, cuyos elementos son las esferas del espacio ordinario, la ***distancia*** de dos elementos equivale exactamente al ángulo de dos esferas, entendido en el sentido ordinario [1].

Y el Sr. Vegas, en su *Tratado de Geometría Analítica*, advierte que, determinando los parámetros λ, η, ν, una cónica del complejo de cónicas representado por la ecuación

$$S - \lambda S' - \mu S'' - \nu S''' = 0$$

pueden dichos parámetros considerarse como sus coordenadas [2]

[1] *Obras Matemáticas,* de Cremona, tomo III.

[2] *Tratado de Geometría Analítica*, por D. Miguel Vegas, tomo I, capítulo XV.

Esto es, como las coordenadas de un elemento de un espacio constituído por el complejo de cónicas. En el cual una ecuación $f(\lambda\mu\nu) = 0$ representa una red de cónicas contenidas en el complejo, exactamente como la ecuación $f(xyz) = 0$ representa una superficie contenida en el espacio ordinario; y así como dos de éstas definen una linea de dicho espacio, dos de aquéllas definen un haz de cónicas del complejo; y así también como la ecuación

$$f(xyz) - K\varphi(xyz) = 0$$

representa todas las superficies que pasan por la línea de intersección de las dos $f(xyz) = 0$ y $\varphi(xyz) = 0$, así la ecuación $f(\lambda\mu\nu) - K\varphi(\lambda\eta\nu) = 0$ representa una red que contiene el haz de cónicas común a las dos reales representadas por las ecuaciones $f(\lambda\mu\nu) = 0$ y $\varphi(\lambda\mu\nu) = 0$, etc., siendo manifiesta la perfecta correlación entre las figuras y problemas del espacio ordinario y las figuras y problemas sobre los complejos.

* * *

Inagotables serían los ejemplos que de estas notabilísimas correlaciones podrían presentarse; pero es preciso terminar: bastante he abusado de vuestra benevolencia. Lo expuesto es suficiente para que quede bien sentado que puntos, rectas y planos ideales, en el infinito, absolutos e imaginarios, geometrías no euclideas y espacios abstractos de cualquier número de dimensiones, no son cosas quiméricas ni vanos juegos de palabras, sino cosas tangibles, representables y sobre las que pueden apoyarse demostraciones y resoluciones de cuestiones geométricas, que han llevado los dominios de esta ciencia a unos límites casi inconcebibles.

También creo haber dejado entrever cómo los conceptos de los absolutos de todas las geometrías, las mediciones de carácter superior establecidas para ellas, las relaciones proyectivas e involutivas de órdenes superiores y entre figuras complicadas de espacios no ordinarios, en suma: cuanto constituye el caudal inmenso de la Geometria superior, viene informado precisamente por las fundamentales relaciones de la Geometría proyectiva elemental. No seré yo quien justiprecie el contenido de esta ciencia en tal o en cual parte alícuota exacta del inventario total de la Geometría; lo que sí juzgo conveniente sentar es que sin un gran dominio de esa primera rama de la Geometría proyectiva es imposible abordar con fruto los extensos horizontes de la superior. Y que esa Geometría proyectiva elemental o de primer grado, aunque lo familiarizados que estamos con ella hácela aparecer sencilla, y en otras partes andan sus nociones entre los niños de la primera enseñanza, no es, sin embargo, tan de fácil alcance como a primera vista parece.

En el año de 1847 fué editada la *Geometría de Posición,* de Staudt, verdadero fundador de esa admirable disciplina. Pero los apéndices (o *beitrages)* que dicho autor fué poniendo a su primera concepción fueron apareciendo en los años 1856, 57, 60 y 67. Es decir, que en dar a conocer su obra completa tardó Staudt *veinte años.* Pero tardó mucho más tiempo en abrirse paso primero en Alemania misma y salvando las fronteras en extenderse luego por los demás paises.

No, como dice Hankel, porque la exclusión absoluta de las propiedades métricas de las figuras hiciera se la considerase como contraria a la naturaleza, sino porque lo elevado y abundante de su doctrina dificultaba su comprensión a la mayoría, y porque, como dice Fichte, obras verdaderamente revolucionarias no pueden ser juzgadas por sus contemporáneos: tienen antes que elevar su público y formarse por sí mismas el Tribunal.

La traducción francesa de la *Geometría de Posición,* de Reyes, es del año 1881, y la italiana de la de Staudt, de 1889, veinte y treinta años, respectivamente, después que fué dado a los alemanes tan singular instrumento. En la Estática gráfica de Culman, impresa en Zurich, en 1880, dice este autor que había creado en dicha capital, en 1860, un curso de invierno, apoyado en relaciones de la nueva Geometría; pero que pocos años antes era inútil buscar en Zurich, ni en la Escuela de Puentes y Calzadas de París, nada que tuviera relación con los trazados de Poncelet o de Michon, etc.; todo lo cual viene en corroboración de la resistencia del medio a la propagación de la nueva doctrina.

Ni más perezosa España, ni más diligente, hacia 1883 abrió sus puertas a tan fecundos métodos, gracias a la iniciativa y tesón del insigne maestro de todos, D. Eduardo Torroja y Caballá, de preclara inteligencia, velada hoy por traidora enfermedad, quien los dió como fundamento científico de su notable *Curso de Geometría descriptiva de la Universidad Central,* dando origen a una verdadera escuela de geómetras españoles, precursora y preparadora a la vez de la novísima que se inicia en estos momentos por el empuje de jóvenes maestros importadores y divulgadores de los fundamentos de la Geometría proyectiva superior.

Antes de Torroja circunscribíanse nuestros dominios geométricos a la métrica de Euclides, más o menos adicionada, con unas nociones sobre razones dobles; a la Analítica de Descartes, con un poco de coordenadas trilineales, y a la Descriptiva de Momge; por eso, tan injusto como fuera desconocer la vitalidad que trae la nueva generación, dispuesta a incorporarnos definitivamente a la ciencia europea, sería regatear méritos a quien hizo posible el advenimiento de la nueva era.

Nuestro atraso es más de falta de extensión que de ignorancia del contenido; y lo diré en términos económicos, que son los que informan hoy casi todas las ideas: no es más rica una nación por tener mucho caudal, sino por tenerlo más sabiamente distribuído, en forma que sea más reproductivo.

HE DICHO.

CONTESTACIÓN

DEL SEÑOR

D. LUIS OCTAVIO DE TOLEDO

SEÑORES:

Siempre es tarea grata la que desempeña el individuo de toda Corporación cuando tiene la honra de ostentar su representación en uno de estos actos y debe dar, en su nombre, la bienvenida a un nuevo compañero que lleno de sabiduría y méritos llega a ella para compartir sus labores, sus penas y sus glorias; pero en el caso actual la tarea que nuestro respetado y querido Presidente ha tenido la bondad de confiarme es doblemente grata, ya que no es ningún secreto que al Sr. Jiménez Rueda y a mí nos une hace largos años, no sólo una buena y fiel amistad, sino una comunidad de ideales científicos y profesionales, que hacen se reflejen en cada uno de nosotros las fatigas, decepciones y venturas que en estos terrenos recaen sobre el otro.

Un solo temor me asalta, y es el de no saber cumplir debidamente el honor que se me ha confiado, y que mi pobre pluma no acierte a expresar de modo adecuado la alegría y satisfacción con que acogemos al Sr. Jiménez Rueda cuantos formamos parte de esta Real Academia; pero bien sabe nuestro nuevo compañero, y cuantos me escuchan, que si yo no sé expresar estas ideas de felicitación sé sentirlas con todo mi corazón, y podéis perdonarme la falta de expresión por el exceso de sentimiento.

Llega el Sr. Jiménez Rueda a la Academia provisto de múltiples y muy aquilatados méritos adquiridos en largos años de constante y fecundo trabajo científico y en labor profesional no más breve ni menos fecunda. La lucha que mi digno compañero ha sostenido para llegar a obtener el renombre que tan merecidamente disfruta no ha sido corta ni breve, ni ha dejado de ser accidentada; y en ella podréis ver algunas de las características de su naturaleza: la de la constancia en el trabajo, la de una firme voluntad de vencer los obstáculos que a su marcha o desenvolvimiento se opusieron y la de una tenaz perseverancia, sin desmayos ni precipitaciones.

Nacido el Sr. Jiménez en la provincia de Granada, comienza sus estudios en su pueblo natal, Atarfe, y los continúa con gran brillantez en el Instituto de segunda enseñanza de la capital de su provincia, obteniendo en él premios ordinarios y matrículas de honor en casi todas las asignaturas del Bachillerato, más tres premios pecuniarios; el establecido en 1878 como extraordinario en todos los Institutos para solemnizar el primer enlace de S. M. el Rey Don Alfonso XII, habiendo tenido, además, la honra de figurar en el *Cuadro de Honor* que el Excmo. Sr. Ministro de Fomento ofreció a los primeros alumnos de todos los cursos en el año 1877. No menores triunfos obtuvo al estudiar la Licenciatura y Doctorado de la Facultad de Ciencias, pues también en sus diversos cursos obtiene multitud de premios y matrículas de honor, mereciendo mencionarse, especialmente, el obtenido en la asignatura de Geometría descriptiva, pues todos sabéis lo que su obtención en aquella lejana época significa.

Su amor a la enseñanza y su especial disposición para la función docente comienza a exteriorizarse desde su infancia: el Ayuntamiento de Atarfe le encarga de la enseñanza de una clase de párvulos, cuando sólo tenía diez años; a poco más de los quince, y cuando aun estaba estudiando la enseñanza secundaria, dirige en Granada, en compañía de un amigo, un colegio de primera y segunda enseñanza; poco después, estudiando en la Facultad y después de Licenciado, explica cursos diversos en colegios de Madrid y provincias; ingresa como Auxiliar numerario en la Facultad de Ciencias de la Universidad Central, a poco, y, en virtud de oposición, obtiene la plaza de Ayudante de Dibujo en la misma Facultad, y en ella explica cursos de materias tan relativamente heterogéneas, como el Análisis matemático y la Geodesia, el

Cálculo infinitesimal y la Astronomía, la Mecánica racional y Geometría descriptiva; aparte de cursos completos de Geometría general y Física matemática. En 1896 ingresa, al fin, en el Profesorado universitario, obteniendo en reñida y lucida oposición la Cátedra de Geometría y Geometría analítica de la Universidad de Valencia, pasando en 1900 a la que hoy regenta con el éxito y autoridad que todos conocéis.

El desempeño de sus cátedras, y la labor científica copiosa de que inmediatamente hablaré, que prueban la ruda, tenaz y constante lucha sostenida por nuestro compañero, no ha sido obstáculo para que haya desempeñado multitud de cargos que pudiéramos llamar accesorios, de carácter científico unos, otros puramente administrativos, en todos los cuales ha demostrado sus singulares dotes de competencia y energía. Ha sido, como antes he dicho, Ayudante de Dibujo de la Facultad de Ciencias de Madrid; ha estado encargado de la Estación Meteorológica de Valencia; fué Presidente honorario de la Sociedad Facultativa de Ciencias y Letras en 1895; Delegado de España en la Comisión Internacional de la Enseñanza Matemática de 1912 a 1914; Secretario de la Facultad de Ciencias desde 1905; Director actualmente de la Revista de la *Sociedad Matemática Española;* Vicepresidente de la Sección de Matemáticas de la Asociación para el progreso de las Ciencias, y algunos cargos más que no enumero por no hacer interminable esta ya fatigosa relación.

Antes de recordaros la labor científica de nuestro nuevo compañero habréis de permitirme una pequeña digresión, que espero sirva para avalorarla y para que os deis mejor cuenta del esfuerzo de inteligencia y voluntad que encierra. Pertenece el Sr. Jiménez Rueda a una generación que en cuanto se relaciona con los estudios matemáticos ha tenido que hacer sola su labor, mejor dicho, cada uno de los individuos que la componen ha tenido que ser su propio maestro y orientarse por sí mismo; ha tenido que autoeducarse y formarse científicamente, y esto con falta casi absoluta de Bibliotecas bien provistas, sin trabajos ni revistas recientes, y no sólo no recibiendo auxilio alguno exterior, sino teniendo que luchar con un ambiente completamente hostil a sus ansias de verdadera cultura matemática moderna, medio en el cual el estudiante de Matemáticas puras era mirado como un ente extravagante cuyas facultades mentales no se estimaban como muy seguras y normales. ¡Cuántas veces no habrá tenido nuestro compañero que contestar a la eterna pregunta: ¿y eso para qué sirve?, y cuántos esfuerzos habrá tenido que hacer para no dar la contestación atribuída a Laplace: «Las matemáticas sirven, cuando menos, para evitar que uno hable de lo que no entiende»!

Desde el primer tercio del siglo pasado, casi desde el comienzo, hasta sus últimos años, la cultura matemática española se nutrió casi exclusivamente de la lectura de libros elementales franceses, no siempre bien elegidos ni seleccionados con criterio sano. En la época a que me refiero el que llegaba a conocer y dominar las obras didácticas de Cirodde, Bourdon, Navier, Duhamel, o alguna otra semejante, era mirado como un matemático de mayor cuantía. Los nombres de los Abel y Galois, de los Riemann y Cayley, de los Weierstrass, Kroneker, Sylvester, y tantos otros, eran aquí casi desconocidos y no se pronunciaban nunca en nuestras aulas; y los de los grandes matemáticos contemporáneos, los Chasles, Hermite, Cremona, y tantos otros, se pronunciaban raras veces. Y aun los mismos nombres que se oían en todos los labios rara vez eran citados por sus obras verdaderamente interesantes, sino por alguna producción secundaria, no siempre bien elegida; sírvanme de ejemplo los nombres de Carlos Briot, conocido aquí por su *Tratado de Álgebra*, libro de muy escaso valor científico, y desconocido por su *Tratado de las funciones elípticas*, libro clásico, excelente siempre, aunque hoy un poco anticuado, pero el cual dudo fuera leído y entendido en España por más de media docena de personas en la época de su publicación (la primera edición es de 1859 y la segunda de 1875); y lo mismo digo de Legendre, conocidísimo por su poco acertado arreglo, o forma de exposición de la Geometría elemental, pero cuyos *Ejercicios de cálculo integral*, *Teoría de funciones elípticas* y *Teoría de números* pasaron desapercibidos, o poco menos.

La generación del Sr. Jiménez Rueda, vuelvo a repetir, ha sido y tenido el mérito de ser autodidáctica, si se me permite esta palabra, y ha tenido, además, el mérito no pequeño de preparar, y no disfrutar apenas, con su labor constante y tenaz esta época de ampliación de estudios matemáticos, de pensiones para estudiar en el extranjero, de creación y fomento de Bibliotecas matemáticas, de Laboratorios, de Sociedades y revistas que de Matemáticas se ocupan, aunque su vida no sea todavia lo brillante y lozana que todos deseamos.

Este proceso de avance en los estudios matemáticos pudiera sintetizarse en la forma siguiente: la época en que estudió el señor Jiménez Rueda puede caracterizarse como época en que las Matemáticas se estudian en un solo libro, generalmente no bueno; en la época en que se desarrolla, trabaja y enseña, se estudian en muchos libros y algunas, pocas, revistas; y así preparan la época que ahora se inicia en que han de estudiarse en muchas revistas, llevando a ellas una colaboración activa, y en pocos pero muy selectos libros.

Como es natural, en ese cuadro de tonos tan sombríos como ciertos que rápidamente os he pintado, no todo han sido obscuridad y tinieblas: en él han brillado dos faros luminosos de primer orden, nuestro llorado Presidente D. José Echegaray, y nuestro respetado compañero D. Eduardo Torroja, faro extingido definitivamente el primero, por desgracia, y sufriendo el segundo un eclipse que haga sea pasajero *El* que todo lo puede; y al lado de ellos, multitud de lucecillas de mayor o menor brillantez, apagadas ya muchas de ellas, brillando otras todavía, y cuyos nombres no cito por el natural temor de omitir alguna digna de mención. Echegaray, con sus brillantes y variados escritos y con sus atractivas e inimitables conferencias, dió a conocer y propagó multitud de teorías matemáticas que aquí se desconocían y que por nadie antes de él habían sido cultivadas en nuestra patria. Torroja, con la labor más callada y lenta, pero más constante y tenaz de su cátedra, introdujo la escuela geométrica de Staudt, creando una pléyade de discípulos, cuyos nombres están en todos vuestros labios, que han hecho y siguen haciendo intensa y muy profunda labor de cultura matemática.

En resumen: la generación del Sr. Jiménez Rueda ha tenido, además del mérito de crearse a sí misma, el de sentar las bases fundamentales para dar origen a la nueva generación que ahora se inicia, de fuerza vital, creadora potentísima: y lo ha hecho con la plena convicción y consciencia de que llegaría un día en que esta generación nueva había de arrollarla y de negarle el mérito de su abnegada actuación; pero cumplió con valentía su propósito y su misión, y al rendirse en la lucha debe hacerlo con la paz y tranquilidad de espíritu que da siempre el cumplimiento del deber.

Y veamos ahora la obra del Sr. Jiménez Rueda. El trabajo que aparece en primer lugar son sus *Prolegómenos de Aritmética Universal* (un folleto de 110 págs. Madrid, 1889), obra excelente inspirada en la Aritmética de Stolz, y en la cual se desarrollan con singular maestría los conceptos fundamentales de los diversos sistemas de números, y el de la teoría abstracta de las operaciones que con ellos pueden efectuarse, trabajo no apreciado en todo su valor cuando apareció, entre otras razones tal vez, por la atmósfera viciada que reinaba en la época de su publicación [1]. Siguieron a esta obra sus *Tratados de las Formas geométricas de primera y segunda categoría,* publicados en Valencia en el año 1898, que componen tres cuadernos, con un total de 1.081 páginas, y contienen una exposición admirable por lo ordenada, clara y sencilla de las teorías fundamentales de la Geometría proyectiva. ¡Lástima que la obra esté incompleta! Si nuestro compañero se decidiese a completarla, todos los amantes de las Matemáticas, y muy singularmente cuantos dan sus primeros pasos en los estudios geométricos, se lo agradecerían muy sinceramente.

Siguen a esta interesante obra las dos ediciones de su *Geometría Métrica* (tres, realmente, pues a las impresas en 1903 y 1909 precedió una litografiada de corto número de ejemplares), libro cuyo elogio no he de haceros porque todos le conocéis, y en el cual vienen educándose científicamente muchas generaciones de alumnos de nuestras Facultades de Ciencias y Escuelas Especiales, con gran provecho para ellos, pues con su estudio adquieren, no sólo los conocimientos geométricos que les son indispensables,

[1] De la obra de Stolz tuvo preparada nuestro compañero una versión que, por falta de editor, no se publicó.

sino aquella justeza en el pensar, aquella severidad en el razonar y aquella iniciación en el descubrimiento de lo desconocido que sólo pueden adquirirse en el estudio y meditación de libros que reunan las condiciones antedichas en tan alto grado como las reune el de nuestro compañero.

A las obras anteriores podéis añadir la *Memoria sobre la intuición en Geometría*, presentada en el Congreso de Ciencias de Zaragoza, Memoria llena de agudas y muy notables observaciones; la *Nota sobre un teorema de Geometría esférica*, utilísimo para establecer correlaciones entre teoremas del plano y de la radiación en Geometría métrica, presentada al Congreso de Valencia; su curiosísimo y ameno Discurso de apertura de la Sección de matemáticas del Congreso de Granada, y que al versar sobre el *Arte de las Lacerías Árabes* le permite, al par que rendir un tributo de cariño a su país natal, dar una muestra de sus conocimientos artísticos y de las relaciones que entre éstos y los científicos pueden encontrarse, cuando para hallarlas se aunan un estudio profundo y una elevación de miras poco vulgar. No menos notable es su *Memoria sobre la Enseñanza de la Geometría en España*, presentada al Congreso de Cambridge, que tantas y tan interesantes observaciones contiene. Agregad a esto una serie de artículos, notas, problemas y observaciones matemáticas publicadas en *El Progreso Matemático*, en el *Archivo de Matemáticas*, en la *Revista de Matemáticas Elementales*, y en la de la *Sociedad Matemática Española*, y más de 200 artículos de vulgarización científica de temas muy varios, y cuya sola enumeración sería para vosotros abrumadora, y tendréis una idea aproximada de su labor.

En todas estas obras debe verse, no sólo la ordenación metódica y la explicación clarísima de las materias expuestas, sino muy principalmente la multitud de ideas y proposiciones nuevas de que están llenos muchos de sus capitulos o partes. Recogidos al azar, que el campo es feraz y se presta a ópima cosecha, yo recuerdo la proposición en que se demuestra *que la suma de los cuadrados de las amplitudes de dos superficies cónicas de revolución polares rectangulares es igual al cuadrado de la am-*

plitud de un haz de semirrayos [1]. La aplicación de este teorema a la expresión de los volúmenes radiados de los ángulos poliedros en función de su superficie en lugar de hacerlo en función de sus diedros e igualmente las áreas de los polígonos esféricos en función de su perímetro evaluado en arco de circunferencia máxima en vez de hacerlo en función de sus ángulos, todo lo cual acerca más estas determinaciones a las áreas de las figuras planas, teoremas todos de cuyo descubrimiento puede enorgullecerse el señor Jiménez.

Notabilísima es también la forma que adopta en la exposición de las propiedades de los ángulos tetraédricos y paralelográmicos, esencialmente diversa de las adoptadas en otros libros. No menos curiosa y nueva es la demostración directa para los triángulos esféricos de que a mayor lado se opone mayor ángulo sin apoyarla ni en la propiedad del triángulo plano de que un lado es menor que la suma de los otros dos, ni en la correlativa del triedro; con el cual consigue llevar enlazados con carácter dual los teoremas de los triángulos planos y del triedro, y los de éste y del triángulo esférico. Añadid a lo citado las múltiples propiedades que combinando relaciones diversas va obteniendo en todos sus trabajos, y tendréis leve muestra de lo mucho y bueno que el Sr. Jiménez ha producido.

Mas si alguna duda teníais, y sólo no conociendo al Sr. Jiménez Rueda podíais abrigarla, la lectura que acabáis de oir de su discurso se habrá encargado de desvanecerla, porque, ¿habéis visto con cuánta facilidad acomete en él los más hondos problemas de la Geometría? ¿Habéis oído cuán acertadamente expone los diversos caminos, los derroteros tan varios que investigadores y expositores de los problemas de su ciencia favorita adoptan? No creo fácil que con su lectura precipitada y fragmentaria, cual estas solemnidades exigen, hayáis podido penetrar toda la intensidad de este trabajo magistral; pero tengo la evidencia de que al leerlo y meditarlo en vuestro gabinete de trabajo, más de una vez habéis de censurarme por la cortedad de los elogios que le dedico.

[1] Véanse Jiménez Rueda (C.): *Lecciones de Geometría métrica* (segunda edición, pág. 567) y *Formas geométricas de segunda categoría* (página 45).

Comienza el Sr. Jiménez Rueda haciendo notar cómo por caso fortuito y que raras veces acontece, si es que alguna vez aconteció, viene a esta Corporación a ocupar una vacante producida, no por la pérdida dolorosa de un compañero, sino por la aplicación de un precepto reglamentario que temporalmente ha privado a un muy querido amigo y compañero nuestro de tomar posesión de la medalla que va a usar. Mas, como muy oportunamente recuerda el Sr. Jiménez, la ausencia de ese ilustre e infatigable compañero, el señor D. José Ruiz Castizo, será sólo temporal y transitoria, y día llegará en que le contemos entre nosotros, pues la eterna e incansable *Trabajadora* se encargará, por desdicha, de aclarar nuestras filas, y una vez más habrá de cumplirse esta inexorable ley de nuestra mísera existencia.

Dedica después sentido recuerdo a los Sres. D. Eduardo León y Ortiz y D. Diego Ollero y Carmona, que le precedieron en el puesto que ocupa. Poco tengo que añadir a sus elogios: siempre consideré a León y Ortiz como uno de los hombres de mayor inteligencia y de más vasta cultura y superior ilustración del Profesorado de las Facultades de Ciencias de nuestro país. A pesar de su extraordinaria modestia y de su aparente apatía y dejadez, León era un trabajador infatigable que leía con afán y con fruto cuantos libros y revistas creía eran útiles o necesarios para sus estudios y sus escritos. En la época en que escribió la biografía de D. Jorge Juan estaba yo encargado de la publicación de la *Revista de la Sociedad Matemática Española*, en que vió la luz pública, y apremiándole un día para que me remitiese el original, que a mi juicio se retrasaba demasiado, verificándose una vez más el hecho de ser tan fácil pedir cuan difícil es dar buenos frutos, hubo de contestarme con gran calma: *estoy terminando el estudio de las obras de Jorge Juan, que no es fácil ni corto;* y era exacto; para aquel trabajo León hizo un estudio directo, profundo y detenido de las obras de aquel sabio español que en anteriores ocasiones no había realizado, y esta lectura de varios volúmenes de materias muy diversas, escritos en lenguaje hoy poco empleado, ni es sencilla ni hacedera en breve plazo. De su actuación como maestro nada puedo añadir a lo que en otra ocasión dije [1]: Sólo sí merece recordarse que en el curso de 1896 a 1897 explicó en la Escuela de Estudios Superiores del Ateneo unas lecciones acerca de algunos puntos de Mecánica Celeste, y que hasta este año, veintiuno después, no se ha conseguido que materia tan interesante figure en los cuadros de enseñanza universitaria.

Poco tiempo tuve la honra de tratar al general de Artillería don Diego Ollero y Carmona; pero en este corto espacio pude apreciar aquellas cualidades eximias que le adornaban y que hacían de él, además de un notabilísimo hombre de ciencia, un perfecto caballero lleno de nobleza y bondad. Nada podría deciros de sus obras que no haya sido ya repetido por sus biógrafos y recordado hoy por el Sr. Jiménez Rueda; su paso como Profesor de la Academia de Artillería dejó una huella tan profunda en aquel elevado Centro de enseñanza, que sus discípulos recuerdan hoy con satisfacción la profundidad de sus lecciones, al par que las cualidades de bondad del Jefe. Os demostrará esto el hecho siguiente referido por uno de sus más queridos discípulos, el coronel D. Tomás Pérez Griñón; he aquí sus palabras [2]: «En prueba de ello, permitidme un ligero recuerdo de un hecho que no olvido jamás. Explicaba en nuestra Academia de Segovia la clase de Cálculo infinitesimal, y aquel día nos daba a conocer la teoría de las curvas osculatrices. Llevaría cerca de una hora de explicación clara y metódica, y al terminarla hizo el resumen de cuanto había expuesto, según era su costumbre, y preguntando a continuación si todos habían quedado bien enterados. La clase en masa, compuesta de unos 40 alumnos, contestó casi poniéndose en pie: *Admirablemente, muy bien.* Era un homenaje, nunca visto en la Academia, a las condiciones del Profesor, hecho de una manera respetuosa, pero sin precedentes en los de su carácter militar, lo que no podía tomarse como una falta de respeto». Alguno de los instrumentos de su in-

[1] Véase D. EDUARDO LEÓN Y ORTIZ, *Nota biográfica*, por Luis Octavio de Toledo. — *Revista de la Sociedad Matemática Española*, año IV, pág. 1. Madrid. 1914.

[2] *Biografía del Excmo. Sr. General D. Diego Ollero y Carmona*, por D. Tomás Pérez Griñón, Coronel de Artillería. — *R. S. M. E.*, año II, página 149.

vención, la regla de cálculo, por ejemplo, si en lugar de su apellido español hubiera tenido un apelativo exótico, hubiera encontrado facilidades de construcción y propagación que a él le fueron, si no negadas en absoluto, regateadas con exceso.

Con el modesto título de *Algunas consideraciones acerca de la evolución de los conceptos de punto, recta, plano y espacio*, presenta el Sr. Jiménez Rueda su trabajo, y en verdad que, como habéis oído, su contenido es más, mucho más, que *algunas consideraciones* acerca de la evolución de esos fundamentales conceptos: en realidad es un examen detenido y minucioso de todos ellos y una revisión sintética y rápida, pero tan intensa, de los principios fundamentales de la Geometría, hecha con aquella precisión y lucidez, que sólo el conocimiento profundo de asunto tan abstracto y el haber dedicado a él largas vigilias y sendas horas de estudio y meditación permiten concretar en las páginas de un discurso. Ya él mismo confiesa la dificultad de examinar en trabajo de la índole del suyo actual la evolución de esos conceptos desde el punto sin extensión hasta el del espacio abstracto de n dimensiones; pero hemos de confesar que consigue tan admirablemente su propósito, que nada de verdadero interés deja por tratar y examinar; así que yo he de limitarme en mi labor a una simple glosa de lo expuesto por nuestro compañero, un índice, o poco más, que os sirva de guía cuando queráis volver a leer un punto concreto y determinado de los muchos que encierra.

Y no me es exigible otra cosa, pues viene el Sr. Jiménez a recorrer este campo después de haber obtenido en él ópima cosecha nuestro común compañero D. Julio Rey Pastor, el cual con sus conocimientos extraordinarios, con su agudeza de comprensión y observación excepcionales y con su sentido crítico insuperable, ha dedicado sendos artículos al estudio de estos asuntos en varias de sus obras, y muy especialmente en sus *Fundamentos de la Geometría Proyectiva superior*, que premió esta Academia. En campo recorrido tan recientemente por los Sres. Rey y Jiménez, ¿creéis que se podrá espigar gran cosa?

En la primera de las siete partes que al desarrollo de su tema dedica el Sr. Jiménez, examina y discute la idea de Kant, negando realidad objetiva al espacio, considerándole como mera condición subjetiva, oponiéndole la concepción de Balmes, entre otros, que juzgan necesario *a priori* que existan cuerpos para que se produzca la sensación espacial; y la de Stallo, para el cual es un concepto; y hace ver después cómo nuestras concepciones geométricas actuales del espacio se reducen a tres fundamentales: *el espacio intuitivo, el físico y los abstractos de* n *dimensiones.* Al examinar las dificultades que surgen en el rigor de las verdades geométricas estudia y pone de relieve las interesantes ideas de Pasch, introduciendo los elementos impropios; estudiando después la necesidad de diferenciar el espacio físico del intuitivo en muchas cuestiones geométricas. Y, por último, hace notar cómo en los espacios no es condición precisa que sus elementos sean propiamente puntos ni cuerpos en los que no puedan distinguirse partes, sino que pueden considerarse como tales entes abstractos de cualquier naturaleza, sometidos sólo a la condición de formar un conjunto entre cuyos elementos puedan definirse grupos de operaciones, y, al propio tiempo, se pueda tener en cuenta un sistema de postulados y de conceptos primitivos.

No menos interesante es el párrafo dedicado a la *escuela clásica,* en que examina y discute con gran detención las antiguas definiciones de punto y línea recta dadas por Platón, Euclides, Arquímedes (resucitada por Legendre), Herón y Grassmann, Leibnitz, ambos Bolyai y Lobatschewski; así como en las de plano de Herón, Gauss; la equivalente de Deahna y la más moderna de Staudt, haciendo observar las dificultades enormes que ha presentado siempre una buena definición de estos conceptos fundamentales, y de qué modo el hecho de tener un concepto claro de línea recta finita y un criterio bastante seguro para el empleo y manejo de la infinita han permitido percibir las deficiencias de todas esas definiciones y ha sugerido la necesidad de la admisión de cierto número de conceptos primitivos y postulados, probando cómo todas las definiciones de los antiguos son aceptables cuando a ellas se anteponen y completan ciertos postulados de *congruencia y de movimiento* que todos ellos admitieron sin manifestarlo explícitamente.

La crítica que de todas estas definiciones de conceptos geométricos fundamentales hace el Sr. Jiménez Rueda, le conduce al examen de los principios básicos de la llamada *Axiomática*. La severidad que el concepto de *rigor en Matemáticas* iniciaron Abel y Cauchy en el primer tercio del siglo pasado siguió desarrollándose en la segunda mitad del mismo con la revisión de los fundamentos del Análisis realizada por los Weierstrass, Dedekind, Du-Bois Reymond, Dini, Tannery y otros; con la aritmetización del mismo por Kronecher, que no ha sido mas que una forma de introducir el rigor en sus fundamentos; y que ha llegado a su pleno crecimiento con Jorge Cantor, Emilio Borel y la pléyade de matemáticos contemporáneos, creando y desenvolviendo la teoría de conjuntos, que, comenzando por deducir de las nociones simples de los conjuntos finitos la idea de número natural, llega con el estudio de las propiedades de los infinitos, y especialmente, con la de los mensurables o medibles, a penetrar en las ideas más elevadas del Análisis, dando origen al nuevo concepto de integral definida dado por Lebesgue y llevando por doquiera el espíritu de exactitud y precisión. Este espíritu y tendencia rigorista tenia que alcanzar fatalmente al examen de los principios de la Geometría, su rama hermana e inseparable, no menos necesitados de examen minucioso y cuidadosa definición.

Puede afirmarse que Moritz Pasch ha sido el primero en caracterizar el concepto de rigor matemático por estas dos condiciones [1]:

1.ª Se enuncian explícitamente, pero no se definen, un corto número de *conceptos primitivos,* por medio de los cuales se pueden definir todos los demás.

2.ª Se enuncian explícitamente las proposiciones fundamentales (axiomas, postulados), por medio de los cuales se deben demostrar lógicamente las demás (teoremas). Estas proposiciones fundamentales deben aparecer como puras *relaciones lógicas* entre los conceptos primitivos, y esto independientemente de la significación que se dé a estos conceptos primitivos.

[1] Véanse: *Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées. Principes de la Géometrie;* exposé par F. ENRIQUES (Bologne), tomo III, volumen I, pág. 6. REY PASTOR (J.): *Fundamentos de la Geometría Proyectiva superior,* pág. 80.

Características diferentes presenta el sistema o escuela lógica de Peano, Veronese e Hilbert, características que, definidas por Rey Pastor con toda precisión, no creo preciso repetir aquí.

Para satisfacer a estas condiciones de rigor, el mismo Pasch, primero, y Schur, después, sientan las bases de la Geometría en un conjunto de enunciados que comprenden, según el sistema de Schur, ocho postulados, sin contar los de movimiento, paralelismo, etc.; cuatro definiciones y once teoremas. A este sistema sustituye Rey Pastor un sistema mixto de *diez* proposiciones con los axiomas de Pasch, relativos a la recta, y los de plano propuestos por Peano y simplificados por Moore.

El más notable, tal vez, de estos postulados es el relativo a la introducción del punto: *Existe una variedad ilimitada de elementos que se denominan puntos;* y digo que es el más notable tal vez, porque en él se confiesa implícitamente, pero con toda lealtad, la imposibilidad de dar una definición justa y precisa de este fundamental elemento geométrico. Verdad es que *a posteriori,* y para garantizar la compatibilidad del sistema de postulados empleados, se utiliza el artificio de llamar puntos a las *ternas de números* (cuaternas si se emplean coordenadas homogéneas), que pueden ser las coordenadas cartesianas de los puntos de un espacio E_3, en el cual se haya construído ya una cierta geometría.

Lo que resulta inmediatamente de la admisión de estos conjuntos de axiomas, postulados y teoremas fundamentales es que sobre ellos se construye todo el edificio geométrico con un rigor y una concatenación lógica de las proposiciones verdaderamente admirable, pues si en algunos momentos nuestro espíritu vacila y se muestra a veces sorprendido acerca de la necesidad de la demostración de ciertas proposiciones, como, por ejemplo, *de la posibilidad de prolongar una recta,* un estudio más profundo y detenido disipa toda vacilación, pone bien de manifiesto esta necesidad y muestra cómo sólo los prejuicios de los que hemos sido educados en los métodos puramente intuitivos o, al menos, fundamentalmente intuitivos, pueden hacernos dudar acerca de esta necesidad. Por estas causas de rigor y sencillez, a la par, la *Axiomática* se va abriendo paso con bastante rapidez en la exposición de los elementos de la Geometría y reemplazando los procedimientos intuitivos, contribuyendo a ello no poco la propaganda acertadísima que con sus preciosos tratados elementales han hecho los matemáticos italianos Veronese, Gazzaniga, Enriques y Amaldi: yo espero que su ejemplo ha de seguirse en plazo muy breve por profesores españoles, y que dentro de poco la literatura científica española ha de contar con Tratados elementales de Geometría inspirados en estas sanas y beneficiosas doctrinas.

En todo el capítulo que sigue a la *Axiomática,* y en el cual se ocupa el Sr. Jiménez en el estudio, introducción e importancia de los *Elementos ideales,* palpita un deseo vehemente, expreso en algunos puntos, tácito en otros, pero que vigorosamente se dibuja y lee entre líneas, de que a estos interesantes elementos geométricos se les concede una carta de naturaleza y un derecho a la intervención activa en la exposición e investigación de las verdades geométricas muy superior a la que actualmente se les concede, demostrando en todos los párrafos la firme fe que tiene en su virtualidad y en su fuerza potencial.

Basándose en el teorema de Desargues, en la radiación o de los triaristas homológicos, recordando de paso la importante contribución que llevó a esta teoría nuestro eminente compañero don Ventura Reyes Prosper, y en el examen escrupuloso de las circunstancias y situaciones en que pueden hallarse los elementos que intervienen en el teorema de los elementos de las radiaciones perspectivas, que con toda precisión enuncia, llega a fundamentar de modo preciso la introducción de los elementos ideales.

En los párrafos que siguen define con exactitud, y con la posible sencillez, *el punto ideal,* haciendo observar cómo los puntos *ideales* y los *propios* tienen una misma manera de determinación, empleando como ejemplo las proposiciones que dicen: *Una recta y un plano, o bien, dos rectas de un mismo plano, determinan siempre un punto real o ideal,* distinguiendo los casos diversos en que el punto definido es de una o de otra naturaleza. La *recta ideal,* determinada por dos puntos ideales, y que no es más que el medio de introducción de un haz de planos construído en forma análoga al haz de planos cuyo eje es la recta que une dos puntos propios, y cuya determinación, además de las antes enunciadas, puede tomar formas muy diversas, que analiza con gran cuidado.

No menos interesante es la generalización que hace del teorema de Desargues relativo a los triángulos homológicos en un plano al extenderlo a los diversos casos en que todos, o parte al menos, de los elementos que intervienen en él, incluso el centro y eje de homología, sean propios o ideales, y las consecuencias que deduce de esta generalización, especialmente a las construcciones con elementos ideales.

Ocúpase después del *plano ideal,* elemento que permite introducir en el espacio una dualidad de puntos y planos análoga a la que los otros elementos ideales han permitido en el plano entre puntos y rectas, estudiando muy especialmente la forma en que Pasch introduce este concepto. Terminan esta interesante parte del trabajo del Sr. Jiménez Rueda algunas importantes reflexiones acerca de la independencia de la Geometría proyectiva respecto de los postulados relativos a paralelas, lograda con la intervención de elementos ideales, independencia señalada por Klein y Pasch, y no apreciada en todo su valor hasta que los trabajos de Hilbert la han puesto de manifiesto.

El postulado llamado de Arquímedes, y algunos de congruencia que permiten introducir *números* que se corresponden biunívocamente con los puntos de una recta, mediante la operación de medir y la de contar, el estudio de las redes *armónicas* y de Möbius, y los postulados de la *continuidad* de la recta de Cantor y Dedekind, vienen expuestos magistralmente en nuevos párrafos; nada sería posible añadir a las consideraciones que hace nuestro compañero, y a las páginas que a los mismos asuntos dedica el Sr. Rey en su obra tantas veces citada. Sólo sí haremos notar la exactitud y agudeza de observación que evidencia aquel párrafo en que se pone de manifiesto la labor intensa que la inteligencia humana ha realizado y realiza constantemente sin desmayo, para pasar de lo infinito y relativo, único que le es dado conocer con exactitud, a lo infinito y absoluto, salvándonos de los peligros que la intuición de estas ideas introdujo en tiempos pasados, y conduciéndonos con aproximaciones sucesivas a su manejo y conocimiento con rigor lógico suficiente.

Más conocidos y vulgarizados son los asuntos tratados por el Sr. Jiménez en el apartado V de su trabajo, *Elementos en el infinito,* pero no menos interesantes y no menor es la maestría que en su exposición despliega. En efecto, aprovecha las definiciones e introducción de los elementos en el infinito para exponer los fundamentos y diferencias de las geometrías euclidea, o parabólica; de Gauss-Lobatschewski, o hiperbólica, y de Riemann, o elíptica, y todo ello con aquella difícil sencillez que entusiasma y subyuga al conocedor de las materias, y que atrae y seduce al que por vez primera las saluda invitándole al estudio y meditación de teorías profundas y poco accesibles, pero que se le exponen en forma agradable y simpática, exenta de toda sospecha de dificultad.

Antes de entrar en la exposición de la teoría de las determinaciones métricas de Cayley sobre cuádricas, interpretadas no euclideamente por Klein, complementos necesarios de los conceptos de punto, recta, plano y espacio que va desarrollando, dedica sendos párrafos a las nociones que juzga indispensables acerca de los *polos, polares y planos polares absolutos y de las involuciones y polaridades absolutas,* entes en el infinito o ligados a los característicos de cada una de las tres Geometrías, y en los cuales estos elementos se estudian y analizan con singular esmero y atención.

Verdaderamente notable es la parte que dedica al problema de la medida en las figuras de una dimensión haciendo ver cómo las determinaciones métricas de la serie y del haz quedan encerradas en un solo concepto, el de *las transformaciones lineales,* y cómo éstas son en esencia de dos clases, las que dejan fijos dos elementos reales o imaginarios de la figura y las que dejan fijo un solo elemento, señalando al propio tiempo las características de cada una de las geometrías.

Observa Rey Pastor [1] que el verdadero fundador de la teoría

[1] Véase la pág. 292 de la obra citada anteriormente.

moderna del imaginarismo geométrico es el matemálico alemán Paulus, que en su *Tratado de Geometría Proyectiva* (1853) da por primera vez una definición rigurosa de los elementos imaginarios, definición completada y aclarada en diversos artículos del *Archiv de Grunert*. Paulus considera como sinónimas las expresiones *par de elementos imaginarios* e *involución elíptica*, siendo la primera locución nada más que un modo abreviado de designar la segunda, que es útil para dar generalidad a multitud de teoremas, definiendo, además, la incidencia, coincidencia, etcétera, de elementos imaginarios. Algunos años después, Staudt, en sus *Adiciones (Beiträge) a la Geometría de la Posición*, desarrolla la idea de Paulus dando una exposición rigurosa y sistemática de las operaciones con elementos imaginarios, introduciendo al mismo tiempo una modificación de importancia al agregar a cada involución un sentido determinado, con lo cual distingue cada elemento de su conjugado, llegando así a una distinción de interés entre los métodos posteriores de representación de elementos imaginarios, pues en tanto que en unos se *separa* cada elemento de su conjugado, en otros se procura evitar tal separación considerando *pares* de elementos conjugados.

Sin perder detalle, pero con rapidez al propio tiempo, va el Sr. Jiménez en la parte sexta de su trabajo exponiendo la teoría de Staudt relativa a *Elementos imaginarios*, explicando cómo existe un solo punto real situado en línea recta con dos imaginarios no conjugados del plano y cómo se determina y construye la recta imaginaria de primera especie que une dos tales puntos imaginarios; cómo hay una sola recta real concurrente con dos imaginarias no conjugadas del plano real, y cómo se determina y construye el punto imaginario de intersección de dos rectas imaginarias de primera especie de un plano. Hace ver también la existencia de una recta real situada en un plano con dos imaginarias no conjugadas de una radiación, y cómo se determina y construye el plano imaginario determinado por dos rectas de esa clase, así como la recta de intersección de dos planos imaginarios no conjugados de una radiación.

Con igual sencillez y lujo de pormenores trata a continuación de la representación de los elementos imaginarios de primer orden por figuras del segundo, y del paso recíproco de unas a otras representaciones, así como de la manera de relacionar proyectivamente dos involuciones, o una involución consigo misma, con correspondencia de sus pares de elementos conjugados y a partir de elementos previamente determinados, cuestiones ambas que juegan importantísimo papel en las construcciones con elementos imaginarios.

Entrando en los elementos imaginarios del espacio de tres dimensiones, y después de detallarnos cuándo y de qué manera una recta real o imaginaria pertenece a un plano imaginario dado, y en qué casos determina con él un punto real o imaginario, examina aquellas circunstancias que han de tener lugar para que una recta real o imaginaria pase por un punto imaginario y cuándo determina con él un plano real o imaginario, presentándonos la recta imaginaria de segunda especie, según las ideas de Staud, con todo el complicado andamiaje del sistema involutivo del espacio que la contiene, con todas las rectas de la congruencia elíptica que son el asiento de las involuciones puntuales representativas de los puntos de la recta de segunda especie en cuestión, y ejes de las involuciones de planos representativos de los planos imaginarios que pasan por ella, y con todos los haces de rectas alabeados de segundo orden que directamente la representan, debiendo observarse que si hay otros modos de definir la recta imaginaria de segunda especie por dos puntos o dos planos imaginarios cuyas rectas bases se cruzan, como luego indica el señor Jiménez, ninguno de ellos da una idea tan precisa y acabada de la naturaleza de una tal recta imaginaria como el sistema de Staudt, al cual hay que recurrir cada vez que con el empleo de los otros sistemas se tropieza en la más leve dificultad.

Con gran acopio de elementos constructivos examina, después de esto, los casos de determinación de un punto imaginario por un plano real y una recta imaginaria de segunda especie; de un plano imaginario por una de estas rectas y un punto real; de una recta imaginaria de segunda especie por dos puntos o dos planos imaginarios proyectivamente independientes; de un plano imaginario por un punto imaginario y una recta imaginaria de segunda especie; de un punto imaginario por un plano y una recta de segunda especie ambos imaginarios; y sienta las condiciones y circunstancias para que una recta imaginaria de primera o de segunda especie esté enteramente contenida en un plano imaginario, y para que dos rectas imaginarias de primera o de segunda especie tengan un punto común, o estén en un mismo plano, finalizando esta parte con extensas consideraciones acerca de la determinación de un punto por tres planos y de un plano por tres puntos en los casos en que los elementos determinantes son todos imaginarios, o lo son solamente dos o uno, y los restantes son reales.

He reseñado minuciosamente esta parte del trabajo de nuestro nuevo compañero porque, a excepción de los teoremas de carácter general contenidos en la Geometría del Sr. Torroja, es, a mi juicio, bastante nueva en nuestra literatura matemática: en el discurso de ingreso en esta Academia del Sr. Torroja se habla de los elementos imaginarios y se dice que reduciéndose las construcciones, en último extremo, a determinar una recta por dos puntos, un plano por tres, y sus análogos, pueden aplicarse a los elementos imaginarios sin más que tener presentes las propiedades más sencillas de la involución; no teniendo el Sr. Torroja, en realidad, necesidad de entrar en más detalles y pormenores, porque la finalidad de aquel discurso se encaminaba al establecimiento de la proyectividad entre elementos imaginarios como medio de lograr la generalización y simplificación que distingue a la Geometría pura. Y en trabajo análogo del Sr. Vegas, todo él consagrado al imaginarismo, tampoco tenía por qué abordar estos asuntos de determinaciones geométricas, porque sus puntos de vista eran más analíticos que geométricos puros; y en sus recientes trabajos, el Sr. Rey Pastor las ha supuesto conocidas por el lector, y como es muy posible que con las definiciones a la vista de los elementos imaginarios y la simple indicación de sus determinaciones más de un aficionado se encontrara perplejo ante los datos reales de un punto y de una recta imaginaria de segunda especie para construir el plano imaginario que pasa por ellos, y otros problemas análogos, entendemos que el Sr. Jiménez Rueda ha llenado con esta parte de su trabajo un gran vacío y prestado un excelente servicio al fomento de nuestra cultura matemática.

Pasa después a indicar las representaciones de los elementos imaginarios por proyectividades cíclicas, por potencias y por haces de proyectividades, y entra de lleno en las cuestiones de continuidad de los elementos imaginarios, una de las más complicadas y difíciles de la Geometría; y con las representaciones por un solo elemento real de estos entes complejos mediante proyecciones de un elemento central de proyección o elemento fundamental, según las ideas de Gauss, de Riemann y de Staudt, introduce el concepto de *cadena* por el que se completa el modo artificioso de manejar estos elementos en el terreno de la geometría pura, y llega hasta enlazarlos con las antiguas representaciones analíticas de Cauchy, tomando por elemento fundamental uno de los puntos cíclicos del plano de representación.

La última parte del discurso del Sr. Jiménez Rueda versa sobre los espacios abstractos de n dimensiones, los cuales presenta primero desde el punto de vista geométrico, y después bajo el aspecto analítico. Bajo el aspecto geométrico, definido y determinado el espacio E_n, ocúpase, como caso particular, de los espacios complejos, y en ellos, tras de breve discusión sobre dimensiones, grados de libertad y número de condiciones determinantes, deja sentadas nuevas propiedades de los entes con elementos imaginarios. Y desde el punto de vista analítico defínelos como conjuntos de entes determinados por grupos de valores atribuídos a las coordenadas de sistemas previamente establecidos, y después de advertir que la importancia de estas concepciones está en la posibilidad de interpretar en ciertos espacios constituídos con entes de cualquier naturaleza propiedades y relaciones descubiertas de antemano en otros, pasa a presentarnos unos cuantos casos concretos de estos pasos, como el de que la geometría de un complejo lineal de rectas, y la del grupo de cónicas circunscriptas a triángulos conjugados respecto de una cierta cónica, son iguales, y como el de que a una red de cónicas $f(\lambda, \mu, \nu) = 0$, contenidas en un complejo de cónicas, corresponde una superficie $f(x, y, z) = 0$ del espacio ordinario, etc.

He llegado al fin de mi labor: ahí tenéis condensado en pocos párrafos el contenido del discurso de nuestro nuevo compañero; ahí tenéis el índice, el guía que me había propuesto formular para llamaros la atención acerca de los puntos más culminantes, de las bellezas matemáticas más interesantes que esta nueva obra, que tanto honra a su autor, contiene. Y ahora, al terminar, permitidme que, además de repetir mi doble felicitación a la Real Academia y al Sr. Jiménez Rueda, os dé un leal consejo: *leed, estudiad y meditad el discurso del Sr. Jiménez Rueda, pero prescindid del índice que le he añadido.*