DISCURSOS

LEÍDOS ANTE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

EN LA RECEPCIÓN PÚBLICA

DEL

SR. D. SIMÓN ARCHILLA Y ESPEJO

el día 10 de Junio de 1888

MADRID

IMPRENTA DE DON LUIS AGUADO

Calle de Pontejos, 8

1888

DISCURSO

DEL

SR. D. SIMÓN ARCHILLA Y ESPEJO

Señores:

Cuando á mediados del año anterior os servísteis llamarme á vuestro seno, propúseme desde luego acudir á él presuroso, queriendo significar con mi presteza en responder á tan honrosa invitación, no solo el buen deseo que me animaba de cumplir mi cometido y cooperar con vosotros á los altos fines de esta sabia Corporación, en cuanto á mis débiles fuerzas y quebrantada salud fuera dado, sino también la grande estima en que tenía el honor que me haceis de elevarme hasta vuestra altura, y mi gratitud á la Academia, en cuya benévola indulgencia se halla el principal, si no mi único título, para ocupar este puesto, al que, sin temeridad, nunca pudieron aspirar mis cortos merecimientos.

Y tal era mi deseo de expresaros así cuánta era mi gratitud, que á los ojos de ésta aparecía como plazo interminable el corto tiempo de las vacaciones que habían de transcurrir para que, reanudadas vuestras tareas, pudiera yo ver cumplido mi propósito.

¿Quién había de decirme entonces que pasaría todo un año y buena parte de otro sin dar satisfacción á tan natural y legítimo deseo? ¿Ni cómo presumir á la sazón que la insidiosa enfermedad que há largos años viene minando mi existencia había de exacerbarse tanto, apenas me eligiéseis, y continuar su obra destructora con tan tenaz y decidido empeño? Forzado desde entonces á prescindir de todo trabajo, y obligado á renunciar á él cuantas veces lo intentaron mis agotadas fuerzas, sentíme inclinado á creer en más de una ocasión que no llegaría para mí la hora, ya que no de pagar la deuda con vosotros contraída, de hacer, al menos, pública ostentación de mi reconocimiento en la solemnidad de este acto.

Por fin, esta hora ha llegado. ¡Pero en qué condiciones para mí, señores! Acudiendo tarde á vuestra llamada y, como árbol duramente sacudido por recia tormenta, no pudiendo ofreceros después de ésta sino pobres frutos, escasos y marcados con el sello de la pasada borrasca, en vez de aquél, exuberante en profundos conceptos y brillantes pensamientos, exornado con todas las galas del buen decir, y madurado al influjo de amoroso trabajo, que cada uno de vosotros ha traído á este recinto en momentos análogos al presente.

No extrañéis, pues, que lleno de confusión me presente ante vosotros, al venir en tales circunstancias á dirigiros por vez primera la palabra. Y esta confusión se acrece sobremanera al considerar que he de ser yo, oscuro Catedrático, el que venga á reemplazar en este puesto, que tanto honró en vida el Excmo. Señor D. Francisco de Paula Márquez, al distinguido Académico cuya pérdida todos deploramos; que, así en el seno de esta Academia como en el Consejo de Instrucción pública, á que pertenecía; ya al frente del Observatorio Astronómico de San Fernando y de la Escuela de Artes y Oficios de esta Corte; ya al prestar al país los importantes servicios que le llevaron al puesto de Brigadier de la Armada, dió siempre vivo ejemplo de inteligente celo é incansable actividad, y, donde quiera, contínuas y relevantes pruebas de profunda ciencia, de amplios y variados conocimientos, de gran competencia en las difíciles cuestiones de la

Administración y en la organización de la Enseñanza pública, y, lo que es más raro aún y tiene más valor é importancia, de noble y entero carácter, de elevación de ideas é independencia de juicio, y de intachable y concienzuda rectitud, á prueba de todo género de halagos y contradicciones.

Séame, pues, lícito, señores, ya que no cabe el declinar la inmerecida honra con que os habéis servido distinguirme, ni es dado á mi pequeñez llenar el hueco que entre vosotros ha dejado tan notoria y respetable personalidad, seguir sus huellas é inspirarme en su ejemplo, para que, al ocuparlo yo, no se muestre tan al desnudo el desfavorable contraste, ni parezca del todo vacío su sitial.

Debiendo, por disposición de los Estatutos, desarrollar un punto concerniente á las Ciencias Exactas, y creyéndome en cierto modo obligado, por razón de oficio, á elegirle en el Análisis infinitesimal, me propongo exponer á vuestra consideración algunas reflexiones acerca de las ideas capitales que informan esta importante rama de la ciencia matemática.

Al preferir este punto, he tenido muy en cuenta vuestra condición y la mía, y la naturaleza de las teorías del Análisis, tan rebelde á prestarse dócil á las exigencias de este acto. He creído que tal asunto, por su importancia y trascendencia especulativa, era digno de ocupar vuestra atención; y en el espectáculo lleno de provechosas enseñanzas que ofrece la empeñada controversia mantenida por los geómetras más insignes y los más profundos pensadores de los siglos XVII y XVIII, con el propósito de establecer sobre sólidas bases el Cálculo diferencial, y en el vivo interés que despierta tan prolongada y singular contienda, he buscado un modo de hacer que resalten menos las deficiencias que en el fondo han de producir mi corto saber y escasa erudición, y el desaliño en la forma, hijo de malos hábitos contraidos en la enseñanza, donde la necesidad de ser claro obliga á veces á descuidar, ya que no á sacrificar, la forma al fondo, en la exposición de la ordenada serie de verdades que constituyen la ciencia matemática.

Debiendo, además, por la índole propia del asunto, señalar la oscuridad que reinó en la mente de sabios tan grandes como Newton y Leibnitz, de matemáticos como Bernoulli, Euler y Lagrange, y de tantos otros, en lo que toca á la concepción de aquellas primeras nociones; las causas productoras de esa oscuridad; y cómo ésta, trascendiendo á todas las ideas que con ellas tienen íntima conexión, les impidió dar base sólida y verdaderamente matemática al Cálculo diferencial, llevándoles en más de una ocasión á errar en puntos en los que hoy cualquier docta medianía puede discurrir sin temor de extraviarse; al ver el singular empeño con el que todos y cada uno se esmeran siempre en hacer que resalten las contradicciones que entraña la agena doctrina, sin parar mientes en las que envuelve la propia, sin duda porque en la serena esfera de la pura especulación se cumple, lo mismo que en el dominio del mundo moral, la gran verdad consignada en los Libros Santos y expresada por el que es la Verdad misma, de que vemos la paja en el ojo ageno y no llegamos á ver la viga en el nuestro; al considerar, repito, con qué facilidad aquellos insignes varones cayeron en los mismos errores que pretendían corregir cuantas veces intentaron establecer la teoría infinitesimal sobre su legítimo y natural fundamento, os inclinaréis, ciertamente, á ser benévolos con las apreciaciones que me permita aventurar, en este delicado asunto, y á no escasearme la indulgencia, tan propia de vuestro saber y elevación de ideas como necesaria para mí en este momento.

La idea del infinito se halla tan estrechamente relacionada con la especulación matemática, que bien puede decirse sin pecar de exagerado que casi no hay problema de esta ciencia, si tiene cierto grado de generalidad é importancia, que por manera más ó menos directa no dependa de esa noción fundamental.

Aparece en las puertas mismas de la Aritmética, al concebir la generación de la serie natural de los números; muéstrase al establecer la equivalencia entre ciertas fracciones ordinarias y otras decimales, y se impone como elemento ineludible de los números inconmensurables y de las teorías de ellos dependientes.

De igual manera la encontramos interviniendo en las primeras ideas de la Geometría y formando la trama y como la sustancia de las verdades elementales que constituyen el sólido cimiento sobre que se apoya tan vasta ciencia; y, á medida que las dificultades crecen por referirse á investigaciones más y más complejas, la noción del infinito influye más y de un modo más directo. Pero donde esta noción interviene por manera más amplia, y se muestra en toda su fecundidad, y revela toda su importancia, es en el Análisis algebráico, y muy especialmente en la parte de éste á que se da el nombre de infinitesimal. Aquí las primeras nociones y las consecuencias que de ellas se deducen, las relaciones entre los diversos elementos de una misma teoría, las afinidades y dependencia más ó menos próxima ó remota entre teorías en apariencia distintas, la naturaleza íntima y hasta la estructura misma de los métodos demostrativos y de investigación, todo está tan estrechamente ligado, en conexión tan íntima, y, por decirlo así, tan saturada de la noción del infinito, que ni es posible dar un paso en esta ciencia sin tropezar con él, ni aventurarse en cualquier sentido en la inmensa extensión del Análisis infinitesimal sin temor de extraviarse y caer, si no alumbra el camino la poderosa luz que brota como de inagotable manantial de esa fecundísima noción.

Nada tiene, pues, de extraño que, intentando Leibnitz escribir un tratado, que no llegó á publicar, de la ciencia por él creada, y que otros se encargaron de exponer y desarrollar, surgiese en su mente, imponiéndose aun antes de producida la obra, el título de *Scientia infiniti* que había de llevar y que se proponía darle.

¿Cuál es la causa de ese hecho, y el natural orígen y racional fundamento en cuya virtud tal idea interviene en la especulación analítica? Por poco que se profundice, alcánzase que esa intervención es de todo punto necesaria por dos causas distintas é igualmente poderosas. Es la primera la amplia generalidad que compete á las leyes de variación numérica; y la segunda la necesidad de atribuir á esa variación el carácter de contínua: generalidad que aparece como uno de los rasgos más salientes del Algebra, y modo de variacion indispensable si sus especulaciones se han de aplicar á todo lo que puede ser numéricamente determinado, y muy en particular al estudio de las leyes del mundo físico, que, por referirse á fenómenos que se realizan en el espacio y se suceden en el tiempo, se nos muestran de ordinario, ya que no en todos los casos, cumpliéndose conforme á la ley de continuidad.

Pero si la simple variación es un concepto que no entraña dificultades, no sucede lo propio cuando se le atribuye el carácter de continuidad, y por su medio pretendemos elevarnos á la concepción ideal de un número producido y determinado por una ley de generación contínua.

Entonces, por la naturaleza misma de elementos tan heterogéneos como el número y la continuidad, entre los cuales no cabe relación directa é inmediata de ninguna especie, y por la necesidad ineludible de relacionarlos de algún modo, siquiera sea indirecto, para que asociados puedan aparecer ante el espíritu como unidad inteligible, surge, imponiéndose cual único medio de alcanzar ese fin, la consideración infinitesimal, ya con la forma de lo infinitamente grande ó de lo infinitamente pequeño, ya encubriendo una y otra bajo las apariencias más asequibles del límite.

Y como la noción de infinitamente pequeño refiérese de inmediata manera á la de infinitamente grande, puesto que éste puede siempre mirarse como recíproco de aquél; y como la del límite, ligada, aunque de indirecto modo, con la de la variable que lo determina, redúcese á aquellas y de las mismas depende, por tener su origen en las relaciones habidas entre una constante y la suma de ésta con un infinitamente pequeño, resulta que toda consideración infinitesimal no es otra cosa que una consideración acerca del infinito.

No se mirará, pues, sino como la cosa más natural que, debiendo yo discurrir en este momento acerca de los principios que sirven de base racional al cálculo, y de las transformaciones que han sufrido desde su orígen para llegar á constituirse tal como ahora se nos muestran, haya comenzado ocupándome en considerar esta noción fundamental y su intervención en la especulación matemática, y el que ahora procure determinar la idea que corresponde á la misma, tal como interviene en el Análisis, después de ver la que de ella tuvieron los que, precediéndonos, llegaron por su medio á plantar y hacer crecer y desarrollarse el frondoso árbol de la ciencia analítica.

Ni es tampoco sino muy natural, que la noción del infinito apareciese desde luego como la base obligada sobre la que había de apoyarse el peso entero del Cálculo infinitesimal, cuando del fondo y como de la sustancia de esta idea madre se vieron surgir por vez primera los gérmenes de tan fecunda rama de las ciencias exactas, que de su savia nutrióse exclusivamente esa doctrina en su rápido y asombroso desarrollo, y que cuando sus frutos ya maduros llegaron á producir aquella exhuberante fecundidad, que en el corto plazo de breves años hizo avanzar los linderos de la ciencia más de lo que habían progresado en el largo período de veinte siglos, todavía quedaba la noción del infinito campeando en los dominios del Análisis, como la idea capital que todo lo domina y avasalla, en la cual y por la cual los más intrincados problemas alcanzan pronta y completa solución, y las más árduas dificultades parecen resolverse, como si no hubiera obstáculo capaz de resistir el brioso empuje de tan poderoso instrumento, puesto en buen hora al servicio de la investigación matemática.

Pero esa noción, orígen, al parecer, exclusivo de tan preciados frutos, que se muestra como manantial inagotable y foco poderoso de luz que todo lo esclarece y vivifica en las abstrusas y difíciles investigaciones de las ciencias exactas, aparece y se muestra en los dominios de la razón como la luz material en los del mundo físico, que, si alumbra y vivifica, y por su medio los espacios se iluminan, y las cosas se nos muestran en la profusa variedad de formas y colores que por su combinación y contraste originan el encanto que nos embarga en la contemplación de la naturaleza, es en sí misma abismo de tenebrosa oscuridad, sin matiz ni color que revele su presencia, reducida á misteriosa corriente, que muda circula á través de los espacios, donde lleva su influjo, que no puede ejercer sin elementos adecuados, cual fecunda semilla condenada á perpétua esterilidad si no encuentra tierra á cuyo abrigo germine.

La noción del infinito se nos aparece con formas tan varias y bajo aspectos tan diversos como las de los objetos á que se aplica; y de aquí el que esta palabra sea un término de múltiple sentido, y corresponda en realidad á ideas completamente distintas. Necesario es, pues, antes de usarla, precisar ese sentido y determinar bien la noción á que corresponde en nuestra mente: porque, si ésta es vaga, no podemos deducir de ella sino consecuencias vagas y mal determinadas, como el orígen de donde arrancan; y si, por ventura, entre los elementos que concurren á determinar dicha noción aplicada á un objeto, los hay que pugnan entre sí, ó que son contradictorios, tenida en cuenta la naturaleza especial de ese objeto, el absurdo y contradicción se mostrarán por doquiera en las consecuencias, ya con las groseras formas del error ostensible, ya con una de esas mil engañosas, con las que suele disfrazarse tomando las apariencias de la verdad, cuyo puesto á veces ocupa, y cuyas prerrogativas usurpa, casi siempre por nuestras preocupaciones y prejuicios, y no pocas por nuestras miserias y flaqueza.

Es la noción del infinito, como tantas otras de donde arranca la investigación científica, primitiva é irreductible; y como todas ellas participa en algún modo de aquella condición que, refiriéndose al tiempo, obligaba á decir á un tan ilustre y profundo pensador como San Agustín, *si non quæris scio, si quæris nescio quid sit:* presenta esta importantísima noción una doble faz, oscura ó luminosa, según el punto de vista desde el cual se considere: luz sin penumbra, oscuridad sin gradaciones que suavicen la dureza del contraste, cuando del uno se pasa al contrapuesto punto de vista, en cuyo tránsito la visión intelectual, deslumbrada, se ofusca y oscurece y pierde la conciencia del camino que recorre para llegar del uno al otro término, y, desorientada, no acierta á darse cuenta de las condiciones contradictorias que ostenta la misteriosa vía que ha de ponerlos en mútua comunicación. Y como esta vía no puede ser otra, para el geómetra, que el raciocinio deductivo, que, partiendo de las verdades fundamentales consignadas en las definiciones, postulados y axiomas, conduzca sin tropiezo á las distintas verdades, con cuya trama se constituye la ciencia, forzoso será admitir, si dichas contradicciones no tienen su orígen en ilegítima aplicación de aquel procedimiento intelectual, que por necesidad radican en los principios y concepciones que sirven de único fundamento al raciocinio, en cuyo fondo resalta en primer término la idea del infinito.

De dos modos distintos cabe considerar esta noción, en sus aplicaciones á la ciencia matemática. Es el uno, el correspondiente á aquella infinidad atribuida al tiempo, que vemos transcurrir sin término que lo limite, sin fin en su contínuo é incesante desarrollo; y el otro el que resulta de la consideración del espacio, cuando es imaginado como inmensa capacidad que nada limita y determina. La primera es, en cierto modo, y por decirlo así, una infinidad por hacer, al menos en lo que al tiempo futuro concierne; la segunda una infinidad ya hecha y subsistente. Una y otra, consideradas como magnitudes, aparecen mayores que todas las de su especie, pero con una diferencia; pues mientras en aquella que se refiere al tiempo la magnitud que atribuimos á la infinidad *no es, sino que puede ser* mayor que toda magnitud determinada, no sólo puede ser, sino que de hecho lo *es* en la que se refiere al espacio. De ambas se dice en Matemáticas que son infinitas, porque infinito significa lo que no tiene fin, lo que carece de límite que lo determine, de término donde concluye; y las dos cumplen con esa condición. No obstante, esas dos concepciones son de tan distinta naturaleza, que entre ellas media un abismo, pues se hallan separadas por toda la distancia que aleja la potencia del acto: lo que puede ser de lo que es; lo posible de lo real.

La infinidad, considerada á la manera de la que suele atribuirse al espacio, ha sido en esta materia la concepción fundamental de los geómetras hasta muy entrado el presente siglo; y como las apariencias de legitimidad que pudo presentar la aplicación de ese informe é indeterminado concepto al número y la distancia, primeros elementos del Análisis y la Geometría, arrancan, á no dudarlo, de la clara idea que se creía tener del espacio, paréceme oportuno, antes de mostrar las consecuencias que en el terreno matemático produjo esa doctrina, exhibir, á título de prefacio, los fundamentos de esa claridad, condensados y expuestos con toda su fuerza por Archytas, matemático griego y filósofo de la escuela Pitagórica: «Si el mundo no es infinito, »dice, supongámonos colocados en su extremidad. ¿Podré ó no »podré extender mi mano aún más allá? Decir que no, es absurdo; »y, si puedo, habrá alguna cosa, sea cuerpo ó lugar, fuera del »mundo. De cualquier modo que razonemos, se renovará siempre »la misma cuestión: luego si hay algo más allá á donde la mano »puede extenderse, el infinito existe; porque ese algo es cuerpo »ó lugar: si cuerpo, la proposición queda demostrada; y, si lugar, »como éste es aquello en que un cuerpo existe ó puede existir, »dado que ese existir fuese *in potentia*, habría que colocarle en»tre las cosas eternas, y entonces el infinito sería á la vez un »cuerpo y un lugar.» [1]

Como no entra en mi propósito, ni sería pertinente en este momento, mostrar lo que de contradictorio, vago ó indeterminado hay en esta manera de razonar, que alcanza ciertas apariencias de fascinadora evidencia, no me ocuparé en ello; mas sí me parece conveniente consignar que, aun sin entrar en el terreno metafísico, y siguiendo, por el contrario, un criterio exclusivamente positivista, tan en boga en nuestros días, ya podría deponer el Análisis infinitesimal, como testigo de mayor excepción, con todo el peso de su doctrina como argumento *ad hominem*, en el litigio filosófico que ha de fallar acerca de la finidad ó infinidad real del espacio.

Así como de dos modos diversos se puede considerar la noción del infinito, así también cabe y es necesario considerar bajo un doble concepto la de número, elemento de toda especulación analítica; porque puede el número concebirse como resultado de simple agregación de unidades, que se determina bajo el concepto único de multiplicidad, ó como término de una compara-

---

[1] Hoefer. *Histoire des Mathématiques*, París, 1874; páginas 133 y 134.

ción entre dos cantidades de la misma naturaleza. Tales maneras de considerar ó concebir el número no son independientes, de modo que la una pueda establecerse prescindiendo por completo de la otra. La segunda presupone la primera, sin la cual el resultado de la comparación nada podría ser en ausencia del elemento único capaz de producir esa determinación, desde el punto de vista que se considera; y la primera no basta para las necesidades del Análisis, ni aun del Algebra, ni siquiera para las de la simple Aritmética, porque la agregación de unidades tan solo puede engendrar un número discontinuo, que pasando bruscamente de uno cualquiera al que le sigue, sin transición ni intermedio, es incapaz de determinar, representándolas bajo el concepto numérico, todas las fases y modos de ser del *quantum* que consideramos en las cosas, y á que atribuimos el concepto de continuidad, ó la cualidad de ser ó engendrarse de una manera continua.

Concebido el número como resultado de la comparación de dos cantidades de igual naturaleza, no presenta desde luego esa dificultad; pero surge al punto un nuevo obstáculo ó, mejor dicho, la primitiva deficiencia bajo otro aspecto considerada. Porque habiéndose de concebir el resultado de esa comparación, como multiplicidad, ó razón de multiplicidades á lo sumo, y habiéndose de expresar, para determinarla, por el número abstracto, único medio que tiene á su alcance la inteligencia para conseguirlo, y siendo aquél por su generación esencialmente discontinuo, dedúcese que, si bien no habrá cantidad capaz de medida á la cual no corresponda un número así concebido que la determine, hay por fuerza que aceptar la existencia de números que, si es lícito decirlo así, no tienen expresión numérica. Estos números singulares, llamados inconmensurables, que no pertenecen á la categoría del abstracto ó vulgar, que no pueden concebirse ni como simple multiplicidad ni como razón de multiplicidades numéricamente expresable, y cuyo ser ó posibilidad contempla, á pesar de esto, la razón humana, concibiéndolos con perfecta claridad cuando los mira desde el punto de vista conveniente, desempeñan tan importante papel en la ciencia matemática que sin ellos es imposible constituirla. Por su medio cabe el estudio de la cantidad continua y la concepción de un número ideal, al que sin contradicción pueda atribuirse el mismo carácter, en cuanto es susceptible de representar, determinándolo, todo valor correspondiente á una cantidad continua; y se completa y perfecciona la serie numérica, necesariamente incompleta é imperfecta, si no viniera á servir de complemento al ordinario ó común este nuevo número, creado por la razón para las necesidades de la investigación científica.

Pero es preciso reconocer que el número inconmensurable, que nace de esta segunda concepción por modo tan natural y sencillo, de la misma noción que engendra al conmensurable, sin diferencia, en cuanto á la manera de producirse, presenta, en sí mismo considerado, cierto sello de oscuridad, cierto carácter contradictorio, que no pierde sin el concurso de otra noción, que es indispensable introducir en el cálculo, capaz de llenar el vacío que acabamos de señalar, y que naturalmente había de producirse, al solo intento de querer expresar, bajo todos sus modos y formas, lo continuo por lo discontinuo, la cantidad por el simple número.

Esta importantísima noción, que aparece así, imponiéndose en los umbrales mismos de la ciencia, es la noción del límite. Pero ésta presupone la de infinitamente pequeño, la que á su vez implica la de infinitamente grande: nociones todas tan relacionadas entre sí y con la continuidad analítica, que sin ellas no es posible dar un paso que corresponda á una marcha tan racional como la índole de la ciencia matemática requiere en el dominio propio del Análisis infinitesimal. Y como el concepto que corresponde á estas nociones capitales, necesarias para tener cabal ideal del simple número, tal como la ciencia matemática lo considera, no puede ser completo y acabado sin el conocimiento perfecto de sus mutuas relaciones y natural subordinación y dependencia, resulta, por modo indudable, que no es más difícil la concepción clara de los principios fundamentales del Cálculo infinitesimal que la del simple número, y que el que no conciba con perfecta claridad las nociones fundamentales sobre que descansa dicho Cálculo, ni acierte á coordinarlas en su mente sin confusión, ni vaguedad, ni contradicción de ningún género, no puede tener idea racional del simple número; pues que, en suma, con esas nociones y solo con ellas, hase logrado en nuestros días encontrar la solución del gran problema, en vano perseguido durante dos largos siglos por los matemáticos más eminentes y los más ilustres pensadores, afanosos de asentar sobre bases sólidas y racionales el Cálculo infinitesimal.

Esas nociones supremas, aportadas al dominio de la ciencia por la naturaleza y condición de la cantidad variable, conforme á la ley de continuidad, aunque pueden concebirse con cierta independencia y nacen de diversas maneras en muy variadas cuestiones, sin que en la consideración de cada una hayan de intervenir directamente y por modo inmediato las demás, derívanse, en definitiva y convergen, como á tronco común de donde naturalmente arrancan, de la noción fundamental del infinito; y la claridad y confusión con que la inteligencia las ve en sí y en sus mutuas relaciones, y la legitimidad de su empleo como instrumento ó medio de la investigación matemática, estriba exclusivamente en la claridad ó confusión con que la razón contemple esa idea capital, y en que su modo de intervenir en la investigación sea tan natural y legítimo como la índole de los estudios matemáticos requiere. Pero la verdad es que en la mente de todos los matemáticos no ha aparecido siempre la noción del infinito con aquella claridad y determinación necesarias para servir de natural y legítimo fundamento á las teorías del Análisis; ni ha habido conformidad de pareceres acerca de si las cantidades infinitas podrían entrar en la especulación como elementos de un razonamiento legítimo; ni siquiera los que tal condición les concedían atinaron á encontrar el modo como esa intervención pudiera tener lugar, sin que, ya en un sentido, ya en otro, apareciesen dificultades insuperables.

Estas dificultades, en que los geómetras de la antigüedad no tropezaron ostensiblemente, alzáronse rebeldes desde los primeros ensayos que á principios del siglo XVII se hicieron con el intento de perfeccionar el procedimiento demostrativo de aquellos en ciertas cuestienes difíciles, pretendiendo suplir las deficiencias que, á su entender, presentaban, por medio de recursos, que consistían en la consideración directa del infinito; y, desde entonces, constantemente se han manifestado, ó bien en la imposibilidad de deducir de principios evidentes por sí mismos, ó con todo rigor demostrados por procedimiento lógico y completamente conforme á las severas leyes del raciocinio, las verdades á que por inducción se elevaba la inteligencia matemática en alas de la consideración del infinito; ó bien en la imposibilidad de despojar á los principios del carácter absurdo ó contradictorio que presentaban, cuando, siguiendo una marcha contraria, asentábanse los que servían de base á la introducción del infinito bajo cualquiera de sus diversas formas, y pretendíase deducir de ellos la verdad matemática.

Los antiguos, que siguieron la primera marcha, salvaron las dificultades, rechazando la noción del infinito como elemento demostrativo, y supliéndole por el largo y penoso método de reducción al absurdo; pero en los trabajos de los geómetras modernos que, en general, han seguido el otro procedimiento y usado y abusado de la noción del infinito, quedaron subsistentes, y ha costado ímprobo trabajo resolverlas, hasta que se ha logrado determinar con suficiente claridad el verdadero papel que desempeña en el Análisis matemático y la manera legítima de intervenir en el mismo esa importantísima noción, cosa no puesta en claro sino en nuestros días.

Resulta de lo expuesto, que estudiar lo que haya de natural y legítimo, y lo que de absurdo puede haber en los principios sobre los cuales se ha pretendido exclusivamente asentar el Cálculo infinitesimal en las diversas fases que la cuestión ha presentado, redúcese, conforme ya antes hemos dicho, á estudiar el concepto que de la suprema noción del infinito, en sus relaciones con la de número, tuvieron los hombres eminentes que con sus trabajos llegaron á encauzar é imprimir rumbo fijo al pensamiento matemático. Porque, á no dudarlo, todas las dificultades que se han mostrado y pueden aparecer en los principios, se derivan tan solo y arrancan exclusivamente de las que latentes persisten en la concepción analítica de aquella idea fundamental; pues el absurdo de consecuencia legítimamente establecida, por necesidad radica en contradicción habida en las premisas, y porque no pudiendo dar un paso en la ciencia desde que la investigación alcanza cierto grado de elevación ó generalidad, sin que de directa ó indirecta manera hayan de intervenir la noción del límite, la de infinitamente pequeño, y la de variación continua, todas las dificultades anejas á la clara concepción de estas ideas capitales se resuelven al resolverse las que el infinito matemático presenta, puesto que, como ya lo hemos dicho, el infinitamente pequeño puede siempre mirarse como la inversa ó recíproca del infinitamente grande; la noción del límite se refiere á la de infinitamente pequeño; y el fondo oscuro que presenta la continuidad, sólo aparece al suponer dividida la cantidad continua, y atribuir al número que expresa las partes que la constituyen, el concepto de infinidad.

Veamos, pues, el concepto que de la misma han tenido los geómetras; y, comenzando por los de la antigüedad, y reduciendo nuestro examen al de las ideas de Arquímedes, que en este punto resume todas las de aquella época, fijémonos tan solo en dos de sus trabajos: el libro *Del número de las arenas,* porque trata directamente del número infinito; y el de la *Cuadratura de la parábola,* en el que por vez primera, además de lo que el título expresa, se suma una serie infinita y aparece la noción del límite y la de infinitamente pequeño, aunque el insigne geómetra no les haga intervenir en aquella memorable investigación. Dejemos hablar al primero de esos libros, dedicado á Gelon, rey de Siracusa, que comienza así:

«Creen algunos ¡oh rey Gelon! que el número de los granos de arena es infinito; mas no ya el de las que rodean á Siracusa y cubren las restantes playas de Sicilia, sino el de las »que puede haber en todas las regiones habitadas y desiertas, »está lejos de serlo. Hay otros que juzgan no ser infinito su »número; pero creen que es imposible asignar ninguno determinado que lo exprese. ¿Qué juzgarían los que tal opinan, al »considerar semejante masa de arenas, si imaginaran que la »Tierra entera, levantada hasta la cumbre de los más altos montes, con los mares y todas sus cavidades, se hallase repleta de »ellas, y todavía pusieran la consideración en el conjunto de »una multitud de moles iguales á la supuesta? Ciertamente que »no vacilarían de afirmar que el número de granos de arena contenidos en dicho conjunto, habría de exceder con mucho, y en »gran manera, á todo número. Mas voy á hacer patente, por demostraciones geométricas, que tú comprenderás, que entre los »números dados por mí, y consignados en las cartas que escribí á Zeuxippo, hay algunos que no solo exceden al de los »granos de arena que contendría toda la Tierra, sino también »al de los que pudiera contener el mundo entero: y no ignoras »que muchos astrónomos dan el nombre de Mundo á la esfera

»que teniendo su centro en el de la Tierra, tiene por radio la dis»tancia de ésta al Sol.» [1]..... y discurriendo así Arquímedes, y suponiendo que el grano de arena tiene el volumen de una semilla de adormidera, determina un número más grande que el de los granos de adormidera que cabrían en tan enorme esfera, y aun en la incomparablemente mayor, cuya superficie tocase á la región de las estrellas fijas.

No cumple á mi propósito discutir los fines que el gran geómetra se propuso en este libro, ni examinar tampoco la luz que puede dar respecto al orden sucesivo en que algunas de sus obras fueron producidas [2]. Bástame, tan solo, consignar que en la mente de Arquímedes aparece el número infinito mayor que todo número, y que á ninguno determinado, por grande que sea, puede atribuírsele el carácter de infinito. Porque ¿qué otra cosa significa ese ensanchar cada vez mayor de los límites de aquella inmensa capacidad, y llevarlos hasta los confines del universo material, no deteniéndose más que en el punto donde falta toda realidad sensible, sino la afirmación explícita y positiva de que, á donde quiera que dichos límites se llevaran, aun en alas de la imaginación más atrevida, ésta había de detenerse al fin, rendida, cual persiguiendo una quimera, sin encontrar jamás otra cosa que espacios finitos y numéricamente asignables, sin haber adelantado un paso siquiera, después de tanto caminar, en la imposible tarea de realizar por ese medio lo que en la mente del hombre corresponde á la noción del infinito? Este, ciertamente, no tiene á los ojos de Arquímedes, cuando lo considera en el número, el carácter determinado que corresponde á una noción

---

[1] Archimidis *Opera*; Apollini Pergæi *Conicorum*, lib. III.—Theodosii *Sphærica methodo nova illustrata et succinte demonstrata*, per Is. Barrow.—Londini, 1675, pág. 277 y 278.

[2] *Histoire des Sciences Mathématiques et Physiques*, per M. Marie.—París, 1883, t. I, pág. 85.

sobre la que de modo legítimo puede recaer el razonamiento propio de las ciencias exactas; y, no cabiendo entre el mismo y el número finito relación alguna determinada y numéricamente expresable, carece de la primera y más importante condición para entrar como elemento de la especulación matemática, en la que lo vago é indefinido no tienen cabida, y en donde la luz clara y abundante de la evidencia no puede faltar, sin que al punto la oscuridad se difunda por do quiera, y á veces se condense de tal modo, entorpeciendo á la razón en su recto ejercicio, que ésta, extraviada y tropezando, llegue á caer al fin, sin poderlo evitar, en el abismo de las más absurdas y monstruosas contradicciones.

Por eso, á no dudarlo, este insigne geómetra, modelo perfecto de rigor lógico en el razonamiento matemático, no se deja seducir por la pasmosa facilidad con la que en alas de la inducción podemos remontarnos y llegar de un solo vuelo hasta tocar casi las más altas verdades, conducidos por la vaga é informe noción del infinito; y desdeñando ese camino fácil, pero que le somete á la humillante condición de cerrar los ojos, antes de llegar á la verdad apetecida, para no ver ni imaginar siquiera la misteriosa vía que á ella conduce, prefiere la marcha ordinaria, en la que nunca se pierde la conciencia del rumbo que se lleva y del que hay que seguir para alcanzar el término anhelado; y no vacila en separarse del camino recto y tomar otro, aunque más largo, seguro, antes que, cual ciego menesteroso del tutelar auxilio de prestado guía, tender la mano y dejarse conducir por el misterioso é incomprensible poder de oscuro y contradictorio raciocinio. Tal hace en el famoso libro de la *Cuadratura de la parábola,* donde brilla explendoroso el fecundo genio y la inagotable inventiva del geómetra de Siracusa. En él establece Arquímedes por vez primera la exacta equivalencia entre el área de la parábola y la de una figura rectilínea; y también por vez primera determina allí la suma de una serie infinita, realizando prodigios de ingenio, haciendo gala y como alarde de lujo en la variedad de procedimientos para alcanzar su objeto, y de portentosa sagacidad para evitar y vencer las dificultades de que se hallaba sembrado el áspero camino que á aquel había de conducirle. Y en este libro y en los procedimientos en él consignados se encuentran, no sólo el gérmen de las ideas, sino las ideas mismas de donde arrancan, si no todas, la mayor parte de las concepciones que muchos siglos después, tras de larga y penosa elaboración científica, habían de servir de base sólida y natural fundamento al Cálculo infinitesimal. Y, cosa singular, que á pesar de su aparente anomalía tiene sencilla explicación: estas nociones capitales, de que por decirlo así se halla saturado el inmortal trabajo del príncipe de los geómetras de la antigüedad, que resaltan en cada una de las líneas de sus cortas páginas, no se encuentran allí explícitamente consignadas, ni intervienen de directa manera en la investigación; antes, por el contrario, todo el arte y refinamiento de ingenio que rebosa en el imperecedero escrito, tiene por principal objeto el empeño sistemático de que no intervengan dichas nociones, de pasarse sin ellas, aunque su consideración se impone, aunque no es posible que pasen inadvertidas por el que lee y mucho menos por el que pudo y supo escribirlo, dado que por medio de ellas se ve con plena evidencia cuál ha de ser la solución del problema; pues á pesar de todo, como si desdeñase tan seductora oferta, como queriendo hacer alarde de vencer, sin apelar á medios extraordinarios, dificultades al parecer insuperables, con recursos comunes, pero más que nada, y en realidad por conservar á la ciencia exacta el caracter que le es propio y no desnaturalizar la evidencia de sus conclusiones derivándola de la inducción únicamente, prescinde de aquellas nociones que ni entran en su plan ni convienen á sus propósitos; y, fundándose en propiedades particulares que nacen del problema particular de que se trata, llega á la solución sin que intervengan aquellas ideas que del fondo de la cuestión surgen, y que veinte siglos después, utilizadas por los geómetras del siglo XVII, dan origen al Cálculo infinitesimal.

Porque ¿quién puede dudar de que Arquímedes demuestra que el área de la parábola es constantemente igual á la suma de un número cualquiera de términos de aquella notable serie por cuyo medio la expresa, con tal que se le añada una fracción determinada del último, y que éste puede alcanzar valores más pequeños que todo valor prefijado, cuando crece más y más el número de los que se consideran? Y el que esto hace ¿no es indudable también que tiene, de la noción del límite y de la de infinitamente pequeño, una idea clara, é idéntica á la que poseen los geómetras modernos, después de constituido de modo riguroso en el presente siglo el Cálculo infinitesimal? En la mente del gran geómetra existían, sí, estas nociones perfectamente definidas, aunque ni siquiera se haya tomado el trabajo de darles nombre; y no sólo éstas, sino también la que corresponde á la concepción, aún más oscura de lo que es, y realmente debe entenderse y ahora se entiende, por la suma de una serie infinita.

Quien explícitamente consigna que no hay ninguna magnitud determinada que sea infinita, ni nada determinado y tan grande, que, por grande que sea no sea numéricamente expresable, como Arquímedes lo hace en su libro *Del número de las arenas*, y quien, como este insigne geómetra, no ve en la noción de infinidad caracteres de determinación suficientes para constituir un elemento de la especulación matemática, como rigurosamente se deduce de la *Cuadratura de la parábola*, aunque explícitamente no lo consigne; no cabe, repetimos, que tenga de aquellas nociones que se le imponen y que por fuerza ha debido considerar en el curso de su especulación, otro concepto que el que le atribuimos, y es patrimonio común, tras largo batallar, de los matemáticos de la edad presente.

Solo una de las nociones sobre las que había de asentarse al fin el Cálculo infinitesimal no considera Arquímedes en sus escritos, ni de ellos resulta como consecuencia inmediata y necesaria: la del límite de la razón de dos infinitamente pequeños ó de dos infinitamente grandes; cosa por otra parte natural, por no haberse ocupado en las consideraciones que nacen del concepto de la cantidad, mirada como variable. Pero, fuera de esta idea capital, todas las demás en que se apoya la teoría infinitesimal palpitan en el fondo de sus inmortales investigaciones.

Y esto no es decir que Arquímedes haya de ser el fundador de dicho Cálculo, como algunos pretenden. No: Arquímedes llegó solo á resolver difíciles problemas, que después tuvieron solución natural y sencilla por el Cálculo infinitesimal; y en los medios que puso en juego para conseguirlo, creó, sin haberlo pretendido, la mayor parte de las nociones fundamentales que, mal interpretadas, habían de servir más tarde de causa ocasional de dicho cálculo, y después, restablecidas á su primitivo, genuíno y natural valor, de asiento racional al mismo, adquiriendo al fin por su medio el Cálculo infinitesimal base lógica y carácter, á la vez que racional, verdaderamente matemático.

Tales fueron las ideas de este hombre insigne y de los grandes geómetras de la antigüedad, en lo que concierne á la noción del infinito y al papel que le corresponde en las consideraciones matemáticas.

Por eso aquellos hombres eminentes, que partían de la infinidad del espacio, no viendo con perfecta claridad la noción del infinito en el número y la de su correlativo el infinitamente pequeño, no pudieron mirarlos como elementos adecuados para asentar sobre ellos la especulación matemática; pues entre esos números inconcebibles y las cantidades finitas, base de todo cálculo, ni veían ni podían percibir lazo alguno que llegase á relacionarlos, estableciendo la mutua dependencia que alcanza á determinar de un modo perfecto y completo los de la una por los de la otra categoría; de tal modo, que esa mutua dependencia y subordinación hiciera posible el concentrar, por decirlo así, toda la ciencia en los principios; de cuya fecunda virtualidad pudiese brotar, al calor del trabajo intelectual, la verdad matemática completa, por vía exclusivamente deductiva. Por eso se explica aquel prescindir de dichos elementos, que como medio inductivo les fueron, sin duda alguna, de grande utilidad y provecho; aquel exquisito cuidado con que al establecer sus teorías procuran excluirlos como elementos de la especulación; y aquella especie de espanto con que los miraban, como temerosos de que las oscuridades que entraña su concepción vinieran á reflejarse en el cuerpo de la ciencia matemática y á turbar la diáfana claridad que brilla en todas sus verdades y que constituía y constituye el más preclaro don y el más envidiable privilegio de las ciencias exactas.

Y este orden de ideas, en que Arquímedes y los geómetras de la antigüedad se colocaron al considerar la idea del infinito actual, en sus relaciones con las del número y distancia, bases de toda investigación analítica y geométrica, es á todas luces natural y legítimo: como que lo contrario conduce inevitablemente á consecuencias y conceptos contradictorios.

En efecto, la distancia es una relación que nace de la *posición* de dos puntos *determinados* en el espacio. Suprimid uno de los dos puntos á que esta noción se refiere, y la noción misma se extingue, pues no cabe relación sin términos sobre los que recaiga. ¿Qué es, ó qué puede ser una distancia infinita, aún dado el supuesto de que el espacio fuera realmente infinito? Dada la posición del primer punto, ¿cuál sería la del segundo para que la distancia que ambos determinan pudiera tener el carácter que exige la noción de lo infinito? Realmente no cabe ninguna; pues cualquiera que fuese la *posición* en el espacio de ese segundo punto, siempre habría otros aún más allá, que, determinando distancias mayores, viniesen á despojarla del carácter de infinita, si hubiera llegado á atribuírsele; sin que sea posible encontrar ese carácter de infinidad, sino cuando el segundo punto ocupara la última posición posible en el espacio: es decir, cuando hubiese llegado al fin de una cosa sin fin.

Y otro tanto puede decirse del número, ya como simple conjunto de unidades, ya como resultado de la razón ó comparación de dos cantidades. Porque, atendiendo á la primera de esas concepciones, como la serie de los números llamados naturales es infinita, es decir, no tiene fin ni término en que se detenga y concluya, y contiene todo número posible, sin que haya ninguno que en ella no se encuentre; y como estos van creciendo á medida que en la serie se avanza y todos los en ella comprendidos son finitos y de relación determinada con cualquiera otro fijo de la misma, resulta que, para obtener el número infinito, mayor que ninguno otro, no hay más medio que elegir el último de dicha serie: esto es, realizar la quimera de encontrar el fin de una cosa que no lo tiene.

A igual término se llega mirando el número como resultado de la razón ó comparación de dos cantidades. Si la primera permanece constante y la otra decrece, el número, resultado de dicha comparación, crece; y, cuando la última disminuye indefinidamente, el número obtenido crece sin límite. ¿Cómo podrá obtenerse por semejante procedimiento el número infinito, ya que todos los realizados por los distintos valores de aquel elemento variable son completamente determinados y necesariamente finitos? No hay más que un solo medio, y ese consiste en que realmente llegue á anularse aquel elemento variable; y así el número infinito sería el resultado de la comparación de una cantidad á cero: es decir, sería el resultado de la comparación en que falta uno de los dos términos que se han de comparar, que como comparación es nada, pues no puede haberla, y como resultado de la misma, verdadero contrasentido, concepto absurdo y contradictorio. No existen, pues, el número y distancia infinitos, y no cabe atribuirles, sin contradicción, el concepto de infinidad que repugna á su propia condición y naturaleza.

Ya á principios del siglo XVII encontramos la nueva pléyade de matemáticos que emprenden la gran obra de continuar los trabajos de los antiguos, interrumpidos por un largo período que se acerca á dos mil años. Mas ¡qué grandes diferencias resaltan entre los unos y los otros! Que no en vano transcurren veinte siglos; y como el tiempo todo lo cambia, no había de escapar el pensamiento matemático á esa ley inexorable.

Aquella especie de religioso temor de los antiguos ante la consideración del infinito, había llegado á desaparecer para los hombres de este período. No temieron aplicar á ella el Análisis matemático; y, seducidos por las engañosas apariencias que no lograron extraviar á los antiguos, y arrastrados por la pasmosa facilidad con que, por su medio, las consecuencias se ordenaban y lo desconocido aparecía como producto de evocación misteriosa, no tardaron en considerar semejante procedimiento como la cosa más natural, y en asentar sobre tan incierta base los fundamentos de la investigación; cayendo así en el abismo de monstruosas contradicciones que, por necesidad, habían de producirse al adoptar como punto de partida conceptos contradictorios é incompatibles por su misma naturaleza.

Entre ellos aparece en primer término Buenaventura Cavalieri con su teoría ó método de los indivisibles. No es tan grande el espacio de mil novecientos años que media entre éste y Arquímedes, como grande es la distancia que separa la doctrina matemática de uno y otro geómetra; mas como á pesar de la inmensa inferioridad de la doctrina de Cavalieri, comparada á la de Arquímedes, cuyas deficiencias pretendía suplir, fué un gran paso dado en el camino de la ciencia infinitesimal, y en cierto modo origen de las nuevas consideraciones é ideas nuevas producidas en el siglo XVII, habremos de examinar qué es en sí esta teoría, y qué elementos no tenidos aún en cuenta ó considerados de diversa manera hasta entonces, trajo al Análisis matemático.

El método de los indivisibles es una aplicación directa é inmediata de la noción del infinito á la resolución de los problemas matemáticos.

Como al dividir un todo en partes iguales éstas decrecen á medida que su número aumenta, deduce Cavalieri que, cuando dicho número sea infinito y, por consiguiente, el mayor de todos, la parte, resultado de la correspondiente división, alcanzará el *mínimum* de pequeñez, elemento á que dió el nombre de indivisible.

Ninguna porción finita de la recta goza del carácter que atribuye á lo indivisible, que solo encuentra en el punto. En el triángulo, descompuesto por rectas paralelas á uno de sus lados, en el cono dividido por planos paralelos á la base, los trapecios y troncos de cono originados por esos modos de descomposición, alcanzan la condición de indivisibles por la división infinita, y se transforman, mediante ésta, en rectas y círculos paralelos á las bases respectivas; y de ello infiere que la longitud de una recta es la suma del infinito número de puntos que contiene; el área del triángulo la suma de infinidad de líneas; y el volumen del cono la suma del infinito número de círculos que se obtienen cortándole por medio de planos paralelos á la base.

De esta manera y por tal concepción, ayudado de la consideración de las razones finitas de esas sumas infinitas, establece directamente y con aparente sencillez y facilidad, las mismas verdades que por reducción al absurdo demostraron los antiguos, y así constituye un método del que se deducían, como sin esfuerzo, consecuencias verdaderas, por cualquier otro procedimiento laboriosamente alcanzadas.

La teoría de los indivisibles, á la vez que fecunda, sencilla é intuitiva, mostraba todas las apariencias de luminosa en el punto mismo en que radica la oscuridad y confusión de ideas que entraña. La noción de indivisible es, en sí misma considerada, dura de admitir como dice Newton, y con ella las sumas de puntos que determinan líneas, las de líneas produciendo superficies, y las de superficies originando cuerpos; pero aparecían en cierto modo como justificadas tan extravagantes concepciones, al considerar que, por medio del movimiento, el punto engendra la línea, ésta la superficie, y la superficie el volúmen; y que, del conjunto constituido por la série infinita de posiciones del elemento generador, resulta la entidad originada, á la manera que de los sumandos nace la suma que éstos determinan.

El método de los indivisibles fué el primer paso dado por la Geometría en el siglo XVII en el terreno infinitesimal, la primera intervención sistemática del infinito en la investigación, y á la vez el orígen natural de la mayor parte de las concepciones á él anejas, ó por lo menos con él intimamente relacionadas, que sirvieron de fundamento á los métodos ya analíticos, ya geométricos, que se propusieron en aquel tiempo para resolver los célebres problemas de los máximos y minímos, de las tangentes y centros de gravedad, y tantas otras cuestiones tan diversas por la forma como análogas en el fondo que, con la teoría de las séries, aportaron los elementos necesarios para fundar sobre ellos el Cálculo infinitesimal.

Grande fué el influjo que ejerció en la dirección del pensamiento matemático el método de los indivisibles; todas ó casi todas las concepciones matemáticas de tan memorable período, se hallan, por modo más ó menos directo, impregnadas de su espíritu; y en los trabajos de Cavalieri hay que buscar el verdadero fundamento de ese sello especial que presentan las nuevas ideas que aquellos métodos entrañan. Y nada más natural; porque en la teoría de los indivisibles entran, no solo los infinitamente grandes y pequeños, sino también razones de infinitamente grandes y sumas de infinidad de sumandos, sin que falte nada de lo que es sustancial, ni en aquellos diversos metodos que fueron como los precursores del Cálculo infinitesimal, ni en este mismo Cálculo. A la verdad, hay una diferencia que distingue el método de los indivisibles de la doctrina de Leibnitz, puesto que el infinitamente pequeño que Cavalieri considera indivisible, es mirado por aquel y por los discípulos de su escuela, no solo como divisible, sino como capaz de división infinita, é igualmente sus partes y las que de estas divisiones sucesivas se originan; pero es necesario no olvidar que la doctrina de Cavalieri fué el primer paso franco dado en el terreno de la Geometría infinitesimal, y que era lo más natural, y en cierto modo lo más lógico, al derivar el indivisible del infinito, atribuir á ese infinitamente pequeño el mismo carácter absoluto, en lo que á la pequeñez concierne, que respecto de la magnitud ostentaba el infinitamente grande, del que se deriva.

Pero una vez dado este primer paso, y salvadas con fortuna las dificultades en que se pudiera tropezar, lo demás era fácil y hacedero; y tras de la concepción absoluta del infinito en el número, había de venir, y vino, la de los infinitos relativos y subordinados, y con ella, la serie infinita de infinitamente pequeños de diversos órdenes, base de la doctrina de Leibnitz; que no por eso deja de tener natural filiación entre las que nacieron con motivo y, en cierto modo, como consecuencia de las teorías de Cavalieri.

El método de los indivisibles no fué recibido sin protesta, á causa de lo contradictorio de su concepción fundamental; y el mismo Cavalieri, agobiado por el peso de irrebatibles argumentos, llegó á decir que el indivisible no lo es en absoluto, y que solo debía ser mirado como incomparable.

He aquí de qué manera opina acerca de la verdadera índole de dicho método Pascal, cuyas ideas respecto al infinito matemático tanto distan de las de sus contemporáneos.

Con motivo de la determinación del centro de gravedad de las figuras curvilíneas dice [1]: «Que todo lo que se demuestra por »las reglas propias de los indivisibles, se puede demostrar tam»bién con todo rigor por el método de los antiguos; y así, los dos »métodos solo difieren en la manera de hablar, cosa que no pue»de molestar á las personas razonables, desde el momento en que »se expresa lo que por dicha manera de hablar debe entenderse. »Por eso, no tengo inconveniente en emplear las locuciones del »lenguaje de los indivisibles: *suma de líneas*, *suma de planos;* »y así, cuando considero, por ejemplo, el diámetro de un semi»círculo dividido en un número indefinido de partes iguales, por »cuyos puntos de división se trazan otras tantas ordenadas, no »tendré dificultad en usar de la locución *suma de ordenadas;* »lenguaje que no parece geométrico á los que penetran poco la »teoría de los indivisibles y se imaginan que es pecar contra la »Geometría, expresar un plano por un número indefinido de lí»neas: lo que solo proviene de su falta de inteligencia, puesto que »por ello no se entiende otra cosa que la suma del número inde»finido de rectángulos formados por cada ordenada y cada una de »las pequeñas porciones resultantes de la división del diámetro; »suma que es ciertamente un plano que solo difiere del espacio »del semicírculo en una cantidad menor que ninguna dada.»

---

[1] *Œuvres complètes de Blaise Pascal.* Tomo III. París, 1872. Lettre de *Dettonville à Carcavi*, pág. 372.

Como se ve, Pascal rechaza la noción del indivisible; y buscando la justificación del método, no en la noción del infinito, sino en la del *indefinido*, crèe encontrarla en la condición de que la diferencia entre dicha suma de rectángulos y el área del semicírculo *es* menor que toda cantidad dada: y no echa de ver que al razonar de esta manera, para justificar los resultados de la doctrina de los indivisibles, no sólo arruina por completo dicho método, privándole de su natural fundamento, sino también la misma doctrina que intenta establecer; pues al afirmar que la diferencia entre el área del círculo y la suma del indefinido número de rectángulos que considera es menor que toda cantidad dada, afirma que entre ellas media una diferencia; y el que ésta sea, ó mejor dicho, *pueda llegar á ser* menor que toda cantidad *dada*, no impide que la diferencia exista, y, por consiguiente, que ambas cosas sean desiguales. Sin que sirvan para suplir el vacío de su argumentación, al llegar por medio de tales premisas á semejante consecuencia, las consideraciones que antes hace diciendo: «que al reemplazar las porciones de la magnitud pro»puesta, que pueden ser muy irregulares, por las porciones regu»lares que en su lugar sustituye la Geometría, y que *no alteran* »*sus razones;* ó, de otro modo, que, sustituyendo á las porciones »de líneas curvas sus cuerdas, no se cambia nada; puesto que la »suma de las porciones sustituidas no difiere de la suma de las »verdaderas, sino en cantidad menor que ninguna dada» [1]: porque solo podía ser *geométrico* éste razonamiento, como Pascal pretende, demostrando, cosa que no hace, que aquellas razones son iguales; ó expresando en qué sentido podrían serlo; ó dando una razón para que aquellos elementos, que no son nulos, aunque *pueden llegar á ser* menores que toda cantidad *prefijada*, permitan establecer la igualdad ó perfecta equivalencia, que es el término á que

[1] La citada obra, tomo III, pág. 371.

por dicho procedimiento se pretende llegar. Mas no por eso es menos notable este pasaje, en el que se ve como un primer bosquejo del principio de la sustitución de unos elementos por otros, diferentes entre sí infinitamente poco, en la consideración de los límites de las sumas y razones de cantidades infinitesimales, y en el cual la noción del infinito se remplaza por la de lo *indefinido*, esquivando con prudente reserva, á imitación de Arquímedes y de los grandes geómetras de la antigüedad, la informe noción del infinito; pero cayendo en el defecto de todos los de los siglos XVII y XVIII, de considerar rigurosamente iguales dos cantidades que difieren en un infinitamente pequeño, sin explicar cómo puede ser esto, lo mismo en absoluto que de un modo relativo, cuando dicha diferencia no es, en realidad, nula. Prueba inequívoca de la oscuridad con que el concepto de lo infinito y los demás con él relacionados aparecían ante el espíritu de este hombre ilustre, ya en sí mismos considerados, ya también en su manera legítima de intervenir en las especulaciones analíticas.

No nos detendremos en exponer los diversos métodos que, con tan varias formas, fundados en consideraciones infinitesimales, sirvieron para dar solución á los grandes problemas de la ciencia en el período que media entre Cavalieri y Leibnitz. Bástanos tan solo consignar que, no obstante la variedad de formas con que se ostenta, á causa de la naturaleza de los problemas en que interviene, la doctrina infinitesimal contenida en los métodos de las indeterminadas y de las tangentes de Descartes, en el de los máximos y mínimos de Fermat, en los trabajos matemáticos de Hudde y Ricci, y en los de Sluce y Barrow, referentes á las mismas cuestiones de máximos y tangentes, redúcese, en suma, en lo que al infinitamente pequeño concierne, á considerarle, de directa ó indirecta manera, como una concepción legítima; y, sin profundizar el fundamento de esa legitimidad ni desentrañar las dificultades que envuelve, mirar como despreciable ante la cantidad finita todo elemento infinitamente pequeño; y en lo que toca al infinitamente grande, de la más alta importancia en la teoría de las series infinitas, que tanto desarrollo alcanzó en este período, á considerar el infinito como elemento directo de la especulación analítica, y en sus relaciones con lo finito é infinitesimal, vaga y confusamente adivinadas, más que científicamente establecidas, encontrar modo de realizar lo que no había medio ni aun de concebir. En una palabra; á la afirmación gratuita, convertida en una especie de axioma, de que lo infinitamente pequeño puede despreciarse ante lo finito, sin error en los resultados á que conducen las operaciones en que ambos elementos intervienen; y á la cualidad misteriosa é inexplicable atribuida á la intervención del infinito, de ser la espada que corta, ya que no desate, el nudo gordiano de las más abstrusas cuestiones matemáticas.

Y porque no se nos tache de exagerados, entre los mil ejemplos que se podrían aducir para corroborar esta afirmación, citaremos únicamente la célebre serie

$$1-x+x^2-x^3\ldots\ldots \quad :$$

que, equivalente á $\frac{1}{1+x}$ cuando x es menor que uno, toma la forma, si x es igual á la unidad, de

$$1-1+1-1+\ldots\ldots \quad :$$

y este conjunto de términos, que solo puede adquirir, cualquiera que sea su número, los valores 0 ó 1, según que se considere un número par ó impar, adquiere, según el mismo Leibnitz, el inconcebible valor de $\frac{1}{2}$, considerando en dicha serie la totalidad infinita de sus términos: error que sólo se explica, dada la penetración de este hombre insigne, por la confusión con que concebía las nociones fundamentales: confusión que, haciéndole ver como legítimo lo que era contradictorio, conducíale á afirmar como verdadero, por ser consecuencia de aquello, lo que á todas luces es falso, y el simple buen sentido, cuando no lo estorba algún prejuicio, ve con toda evidencia como absurdo.

Hacia el último cuarto del siglo XVII aparecen el método de las Fluxiones, de Newton, y el que después se llamó Cálculo *diferencial*, debido á Leibnitz: los cuales, mostrándose primero como medios de dar fácil y general solución á los diversos problemas que á la sazón preocupaban á los geómetras, adquieren bien pronto el carácter propio que los distingue, y que tanto los diferencia de aquellos métodos particulares, destinados solo á resolver ciertos y determinados problemas, ya referentes á la geometría, ya concernientes al análisis.

Uno y otro matemático consideran sus métodos «como perteneciendo exclusivamente al dominio del Análisis», aunque indiferentemente aplicables á casi todo linaje de especulación matemática; ambos fundan las consideraciones sobre que lo establecen en el concepto de las cantidades variables; y los dos reducen, en sustancia, la cuestión á exponer la ley de variación de esas cantidades por conceptos más amplios y generales que la forma explícita y analítica que las determinan, valiéndose para ello de nociones y elementos que, aunque distintos en apariencia, se refieren á las mismas ideas y convergen hacia la concepción fundamental del infinito, de la que, el uno de directa y el otro de indirecta manera, se derivan. Ambos conciben una manera general de expresar, no solo los estados sucesivos de la cantidad variable, cualquiera que sea su ley de variación en los diversos momentos de su desarrollo, sino también la nota especial y característica que distingue y determina cada modo particular de variar: de tal manera que sea como una nueva y verdadera definición analítica, que, implicando el conjunto de las propiedades de las funciones, haga posible su estudio, tan completo y acabado como se pudiera necesitar. Y al concebir este pensamiento, uno y otro crean el Cálculo infinitesimal; y al buscar los medios adecuados á tan alto fin, é investigar cuál sea esa nota característica, la encuentra el uno en la consideración de cantidades finitas, cuyo origen infinitesimal se pierde en las oscuridades de la continuidad, y el otro la halla en la consideración directa de lo infinitesimal, por cuyo medio pretende rehacer lo continuo y construir con incrementos sucesivos é infinitamente pequeños todo valor de la función: y así produce Leibnitz la *diferencial*, idea madre de su pensamiento, y Newton la *fluxión*, de la que todo depende en el orden de sus ideas.

Los once lemas con que comienza el primer libro de los *Principios matemáticos de la Filosofía natural*, exponen los fundamentos de la doctrina á que Newton dió el nombre de *método de las fluxiones*. En ellos considera los infinitamente pequeños y los límites de las sumas y razones de los mismos; pero, no encontrando, acaso, esta noción bastante clara, la establece sobre la razón de las cantidades que nacen ó se extinguen. Ve, sin duda alguna, su penetrante genio, que la teoría de las primeras y últimas razones no abunda tampoco en claridad; y, no obstante, la adopta, prefiriéndola al método de los indivisibles, que, según su propia expresión, es duro de admitir: y para ello procura dar razones que, si no traen más luz á la cuestión, resuelven, de algún modo, las objeciones que contra ella se pueden formular y que condensa presentándolas con vigorosa forma. Pero es indudable que la argumentación de Newton, al impugnarlas, es pobre y endeble por demás.

He aquí cómo este hombre insigne formula él mismo las objeciones contra su método de las primeras y últimas razones, y los argumentos con que en vano procura refutarlas.

«Se puede objetar, dice, al principio de las primeras ó últi»mas razones, que las cantidades que se desvanecen no tienen »razón última; porque ésta, antes de desvanecerse, no es la últi»ma, y después que se ha desvanecido ó anulado, ya no existe, »y por lo tanto, no tienen razón alguna.» Y añade, como de soslayo, sin intentar directamente rebatir la objeción, pero atacándola de indirecta manera con los más intencionados argumentos que le es posible aducir para demostrar (que no puede ser otro su propósito), la legitimidad de su concepción: «Se po»dría sostener con el mismo razonamiento, que un cuerpo que »llega con movimiento retardado á un punto en que su movi»miento se extingue, no tiene última velocidad; porque se dirá: »antes que el cuerpo llegue á dicho lugar, no tiene aún su últi»ma velocidad, y cuando ha llegado no tiene ninguna, puesto »que el movimiento se ha extinguido. Pero la respuesta á este »argumento es fácil. Se debe entender por última velocidad de »este cuerpo aquella con la cual se mueve, no antes ni después »de haber alcanzado el lugar en que su movimiento cesa, sino »en el instante preciso en que llega á dicho lugar, y con la cual »el movimiento se extingue.»

Tal es la manera como Newton pretende resolver, sin llegar más que á eludir, y solo en las apariencias, la dificultad; y tales los conceptos con los que reemplaza el método de los indivisibles y las ideas de Cavalieri.

Pero ¿cuál es esa última velocidad que corresponde al momento preciso del tiempo en que el movimiento se extingue, y que no es la que tiene antes ni después de haberse parado?

Observemos que en la hipótesis del ilustre autor del *Método de las fluxiones* la velocidad de ese cuerpo es una función del tiempo, que tiene un valor fijo y determinado y distinto para cada uno de sus momentos; pero que, por la naturaleza misma del supuesto, es nula ó se extingue en el instante preciso en que el móvil llega al punto en que el movimiento cesa. Preguntar, pues, cuál es la última velocidad de ese móvil, no es otra cosa que preguntar cuál es la que corresponde al momento mismo del tiempo en que el cuerpo llega á su posición límite; y esta velocidad, de hecho, es nula, puesto que, como función del tiempo, tal es el valor que le corresponde.

No hay, por consiguiente, ni puede haber última velocidad distinta de cero. Porque realiza el móvil una serie infinita de velocidades variables con el tiempo, que disminuyen en valor á medida que éste se acerca sin cesar á un momento determinado; pero como, al realizarse ese momento, la velocidad se extingue, si esta velocidad extinguida, cuyo valor es nulo, no es la última, habrá de serlo alguna correspondiente á un tiempo anterior ó posterior: esto último no puede ser; porque después de parado el cuerpo, por carecer de movimiento, no puede tener velocidad; y, si lo primero, como ésta se supone que no es nula y tiene que ser determinada y no puede haber otra menor, por ser la última, se cae por necesidad en el indivisible de Cavalieri ó en el infinitamente pequeño actual de la escuela de Leibnitz.

Vése por lo expuesto cuán efímera es la argumentación de Newton en este caso, y qué poco á propósito el ejemplo aducido para contrarrestar la invencible fuerza de la objeción que en vano procura rebatir.

Esa última velocidad que Newton busca y que no puede encontrar porque no existe, pero cuya existencia mirada desde cierto punto de vista parece tan evidente como la del mismo movimiento de que se trata; debe esa apariencia á la ambigüedad y confusión de conceptos que viene á prestarle una aparente realidad; la cual, como engañoso espejismo, huye á medida que nos aproximamos para tocarla, y se mantiene siempre á igual distancia, por más que afanosos la persigamos, hasta quedar convencidos de que se corre tras un vano fantasma, que nos seduce y extravía con fascinadoras y engañosas apariencias.

Y aunque la cosa es tan clara, insistiremos un momento más en ella, ya que la confusión de donde nace la oscuridad que entraña esta doctrina es la misma que aparece en otras que, con diversa forma, habremos de encontrar después.

Por más que Newton explícitamente no lo hace, sin duda alguna razonaba así al formular esos argumentos. El móvil realiza una serie variable de velocidades que, arrancando de la inicial, terminan en la velocidad cero ó nula; y, así, la velocidad que sucesivamente ha ido decreciendo llega á anularse: luego, puesto que en un momento del tiempo ha pasado del ser al no ser, forzoso es que haya habido una última velocidad distinta de cero con la que el cuerpo haya realizado su último movimiento, anterior, por lo tanto, al momento preciso en que llega á la posición límite, en el que ya no tiene velocidad. Lo que es durante algún tiempo y deja de ser, deja de ser en un momento indivisible del tiempo, y ese momento es el último de su existencia. En ese último instante del tiempo es, y, al ser, tiene todos los atributos inherentes á la existencia: luego hay un momento último en la existencia del movimiento en el que éste subsiste con todas sus condiciones, y por ende con una cierta velocidad, puesto que sin velocidad no hay movimiento.

Tal argumentación en la apariencia no tiene réplica, y sin embargo es un sofisma.

La cosa es idéntica en el fondo y por la forma á la que resultaría de plantear la siguiente cuestión: ¿Cuál es la última posición, y con ella la última distancia al punto *B*, de un móvil que, partiendo del lugar *A*, se acerca y llega de un modo continuo al *B*? La respuesta es obvia y de simple buen sentido. La última posición es el mismo punto *B*, y la última distancia del móvil al punto *B*, ó es nula, ó de no admitir esta última como distancia, no hay ninguna que cumpla con semejante condición. O dicho de otra manera: la última posición, ó la última distancia, es la última; y de no admitir la última como tal, ni hay última posición ni última distancia. Sin que valga decir que la que se búsca no es la que tiene el punto cuando ya no se mueve, ni antes de haber alcanzado la inmovilidad, sino la que realiza en el instante mismo en que deja de moverse; porque el punto *B* es, no solo lugar y residencia permanente del móvil, después que el movimiento se extinguió, sino á la vez posición real y verdadera del punto, determinada en uno de los instantes en que el cuerpo se movía: siendo esta cualidad la que le asigna la condición de última, por no haber otra ulterior, y aquella la que la hace aparecer como externo y extraño al movimiento mismo.

La confusión de este papel doble del punto *B* es la que puede proyectar oscuridad en cuestión tan clara y de tan perfecta evidencia, y la que necesariamente conduce á conclusiones contradictorias si, por el inútil empeño de encontrar solución á lo que no la tiene, hacemos afirmaciones que aspiren á conciliar lo inconciliable.

Vano juego de palabras que á nada conduce, y que sirve tan solo para mal cubrir las dificultades que nacen de conceptos contradictorios ó que pueden surgir de cualquier término ambiguo ó equívoco, y que, á lo sumo, alcanzan á trasladar artificiosamente las dificultades, haciéndolas pasar de un punto á otro, pero permaneciendo subsistentes en realidad.

¿Qué diríamos al que se propusiera averiguar si los dos puntos que determinan y limitan una recta forman ó no parte de la misma? Lo primero sería preguntar qué se entiende por puntos de la línea; porque si solo se consideran pertenecerle los que caen entre los dos extremos, aquellos que la terminan no pertenecen á la misma; y si el pertenecer á dicha línea consiste en encontrarse sobre ella y no estar fuera de la parte comprendida entre dichos puntos, evidentemente los extremos constituyen parte de la línea. En el primer caso, ésta no tiene un punto que sea el último y en el cual se termine, si no miramos como últimos los que la limitan: en el segundo, los extremos de la línea serían sus últimos puntos. Finalmente, si nada se determina respecto á los dos supuestos anteriores, ni se establece distinción alguna entre las dos funciones que desempeñan los puntos que determina el segmento rectilíneo de que se trata, podrá sostenerse, con igual razón, que aquellos puntos son ó no son los extremos de la línea; que ésta tiene ó no puntos últimos; y que sus extremos pertenecen ó no á la recta, según aquel de los puntos de vista mencionados desde el cual la cuestión se considere.

Tal sucede á Newton al bustar la última velocidad del movimiento. Excluye como última la única que, de algún modo considerada, puede serlo; y, no pudiendo concebir que una cosa que se extingue no tenga un último momento en el cual *sea,* se afana en vano por encontrar lo que no hay; pues su existencia implica contradicción; y, pretendiendo dar base sólida al razonamiento matemático de las primeras y las últimas razones en que descansa su método, cae, de hecho, sin advertirlo, en el sistema de los indivisibles, que le parece tan duro de admitir.

Y que Newton queda poco satisfecho de su argumentación, y que á pesar de su asombroso genio esta cuestión no se le muestra con plena claridad, y que en su mente domina la inevitable confusión que tal modo de considerarla había de producir, aparece con toda evidencia en las explicaciones que da á seguida y con las que pretende ilustrar más el asunto.

Define, al efecto, las últimas razones de las cantidades que nacen ó se extinguen, diciendo que son razones de cantidades que crecen ó disminuyen, no antes ni después que se desvanezcan, sino en el instante mismo en que concluyen de disminuir ó comienzan á aumentar; y añade: «Se podrá objetar que siendo de-

»terminadas las últimas razones de las cantidades que se extin-»guen, también lo serán las magnitudes de dichas cantidades; »pero tal objeción se apoya en un supuesto falso, porque las úl-»timas razones de las cantidades que se extinguen no son las ra-»zones de estas últimas cantidades ó de cantidades determinadas »é indivisibles, sino los *límites* á que sin cesar se aproximan »aquellas: límites á los que puedan acercarse tanto como se »quiera, que nunca pueden exceder, y á los que jamás podrían »llegar sino en el infinito; *nisi in infinitum*. Se comprende esto »aún con mayor claridad, añade, en las cantidades infinitamente »grandes. Si dos cantidades, cuya diferencia es dada, aumentan »al infinito, su última razón, que es determinada, será, con toda »certeza, la razón de igualdad; y, sin embargo, las últimas ó las »mayores á que esta razón corresponde, no serán cantidades de-»terminadas. Así, cuando en lo sucesivo use, para ser más claro, »de las palabras *cantidades que se desvanecen*, *últimas canti-»dades*, *cantidades muy pequeñas*, no habrá de entenderse por »estas locuciones cantidades de magnitud determinada, sino »cantidades que decrecen al infinito» [1].

Huelga, después de esta cita textual, todo comentario, porque en sustancia, la doctrina de los dos últimos párrafos es la refutación acabada de la que se consigna en los que les preceden, y que con detalle hemos expuesto; sin que sea bastante, para atenuar lo ostensible de la contradicción, el que pueda mirarse la velocidad como el límite de la razón de cantidades que se desvanecen: porque, en sí misma considerada, y prescindiendo del procedimiento que para adquirir esa noción se haya podido seguir, la velocidad en cuestión es una cantidad que se desvanece, y de ella es de la que Newton afirma, aunque de indirecta manera,

---

[1] Principes Mathématiques de la Philosophie naturelle.—París, 1759.—Tomo 1.°, págs. 47, 48 y 49.

que tiene un último valor, que, sin ser nulo, corresponde, al instante mismo en que, llegando al último lugar, el movimiento cesa.

Pero si Newton, al pretender así dar base sólida á la especulación en que interviene la noción del infinito y hacer su doctrina más clara que resultaba por el método de los indivisibles, no alcanza ni con mucho este fin, no por eso es menos notable la teoría de las primeras y últimas razones. En esta se consideran de modo explícito, y acaso por vez primera, todas y cada una de las nociones sobre las que ha llegado en definitiva á asentarse con forma legítima el Cálculo infinitesimal.

Newton asigna, sin comprender toda la importancia que había de tener su consideración, lo que esencialmente constituye la noción del límite; esto es, la imposibilidad de que la variable pueda adquirir el valor que determina como tal; define el infinitamente pequeño como hoy se concibe; danos en la fluxión la noción de la derivada con todos los caracteres que la distinguen; y casi, casi llega á vislumbrar el verdadero papel que corresponde al infinito en la especulación matemática: pero le falta algo: y este algo, que tan poco parece, es lo bastante para que la teoría de las fluxiones no constituya una doctrina con el rigor lógico que el carácter de la ciencia exacta requiere, y se halle además condenada á aquella misma infecundidad que veremos después en la teoría de las funciones analíticas de Lagrange.

El método de Leibnitz está basado en la concepción del infinitamente pequeño. Este tiene su origen en la idea del infinitamente grande, ante el cual lo finito, conforme á las creencias de la época, aparece como nada, sin que su adición ni supresión aumente ni disminuya la infinidad; y se halla definido y completamente caracterizado por las propiedades que se deducen de este orden de ideas. El infinitamente pequeño, por su adición ó supresión, nada modifica la entidad finita, que es realmente infinita, comparada con el infinitamente pequeño; y así como lo finito puede despreciarse ante el infinitamente grande, así ante lo finito será legítimo despreciar el infinitamente pequeño, sin que las relaciones de las cantidades finitas así modificadas se alteren. Y una vez puesto en este camino, y viendo en el infinitamente pequeño una entidad real, que integra y constituye lo finito mediante la adición de un número infinito de aquellos, (como la continuidad ni se modifica ni se extingue en el infinitamente pequeño, como no se modifica ni extingue en el elemento finito, resultado de la división de un infinito continuo en un número infinito de partes), deduce, no sin cierta lógica, que dicho elemento infinitamente pequeño puede dividirse también en un número infinito de partes, y que cada una de estas es un infinitamente pequeño, respecto al infinitamente pequeño de que procede: de donde á su vez resulta, continuando este procedimiento, la existencia de los infinitamente pequeños de orden superior, con tan justo título como el de aquellos de donde proceden, y la propiedad común á los de todo orden de poderse despreciar ante los de orden inferior, con los cuales comparados aparecen como nada.

Es consecuencia de esta doctrina la serie de propiedades que caracterizan los infinitamente pequeños, entre las cuales descuellan la que resulta de la identidad $dy=dy$, que, puesta bajo la forma $dy=\frac{dy}{dx}dx$, define y determina la diferencial de una función dy como el producto del coeficiente diferencial de la misma por la diferencial de la variable.

Esta diferencial en nada se distingue, ni nada nuevo y ajeno y extraño al incremento real de la función representa, sino el ser infinitamente pequeña: esto es, haber llegado disminuyendo al grado de pequeñez ideal determinado por la división en un número infinito de partes iguales; ó haber alcanzado, en cierto modo, en el infinito, el límite ideal de la pequeñez por medio del decrecimiento infinito del incremento de la variable. Así que, para reintegrar, para reconstituir este incremento, bastaría indudablemente componer con las partes el todo, mediante la multiplicación por el infinito si las partes son iguales, ó por la adición si fueren distintas; y el producto ó la suma así constituída sería igual, rigurosamente igual, al incremento finito en cuestión; y, por lo tanto, el valor y expresión propia de una función, correspondiente á cualquiera de los de la variable, será en todo caso igual al valor fijo del cual se parte en la función para darle el incremento (ó dicho de otra manera, á una constante arbitraria, puesto que aquel valor fijo es cualquiera de los que la función puede tomar), más la suma del infinito número de sus diferenciales. Esta suma, que se representa por el símbolo á que se da el nombre de integral, no difiere de la suma ordinaria más que en ser infinito el número de sumandos, é infinitamente pequeño el valor de cada uno de estos.

Asi, este método da lugar á un doble problema: 1.° dada una función, hallar su diferencial; 2.° dada la diferencial, hallar su integral, ó sea la función que diferenciada produjo la diferencial.

Y como, en definitiva, el coeficiente diferencial es una cantidad finita, función de la variable, en general, y su mismo origen y notación está indicando el método y la marcha para determinarlo en cada función particular, resulta de este conjunto de ideas, completo y acabado, el cuadro entero del Cálculo diferencial; y en los resultados obtenidos por éste, al diferenciar las funciones explícitas que consideran los elementos, se encuentran los primeros lineamientos que han de servir de base á los ulteriores desarrollos del Cálculo integral.

A la verdad que no cabe modelo más perfecto de sencillez, y de encadenamiento y subordinación natural de ideas, que el que aparece y se destaca del corto bosquejo que de la concepción de

Leibnitz acabamos de hacer. Todo en ella brota y se desenvuelve de espontánea manera, y como sin esfuerzo aparente: no hay concepción científica que, abrazando un orden tan complejo de ideas, presente unidad más completa, ni armonía más perfecta entre el todo y cada una de sus partes: en una palabra, no cabe una concepción errónea, ni más bella, ni con más brillantez expuesta y concebida, ni que tales apariencias de verdad presente; hasta tal punto que, después que el frío escalpelo de la razón, removiendo las apariencias que seducen, deja ver al desnudo su verdadero fondo y lo que son en realidad aquellas fascinadoras apariencias y el carácter propio que las distingue, con el séquito de monstruosas contradicciones que entraña, todavía, después de deshecho el encanto, se siente uno como inclinado á dudar si no será víctima de una fascinación en el sentido opuesto: porque apenas se puede concebir que el error llegue á presentar formas que, fuera de este caso, solo tuvo la verdad misma; y mucho menos el hecho anómalo y singular, y único acaso en la historia de las ciencias, de que conceptos erróneos conduzcan siempre, y siempre por el camino más directo, natural y sencillo, y, por consiguiente, el más elegante, no á las puertas, sino al seno mismo de la verdad; pudiendo, no sin cierta razón, decirse que el Cálculo infinitesimal así concebido, es un procedimiento seguro de llegar á la verdad por la vía misteriosa é incomprensible del error.

Las ideas de Leibnitz, fundamento de su cálculo, son, como aparece de lo expuesto, erróneas, por la concepción falsa del infinitamente pequeño que le sirve de base: concepto que saca su falsedad de la falsa noción del infinito en el número y de su legítimo uso en la especulación matemática. Pero si, prescindiendo de esto se le tiene por legítimo, por fuerza hay que aceptar todo lo demás, arrastrados por las inflexibles leyes de la lógica; y entonces el infinitamente pequeño, que es menor que toda cantidad infita, no será nulo, y podrá decirse de él, como Carnot decía, que es una entidad comprendida entre cero y la cantidad; una existencia intermedia entre la nada y el sér; que es nada y es algo, según el punto de vista desde el que se la considere; y que ni representa nada inteligible á la razón, ni puede concebirse sino como contradicción manifiesta, sobre la que no cabe especulación legítima de ningún género; y mucho menos la matemática, que siempre recae y conduce á resultados completamente determinados, y en la que la vaguedad y la indeterminación del concepto no tienen entrada, si éste ha de intervenir como elemento directo é inmediato de sus operaciones.

No habiendo medio entre considerar los infinitamente pequeños como entidades ideales llegadas al límite posible de su decrecimiento, lo cual es inconcebible dada su condición de cantidades continuas, y, lo que es más sensible, mirar el Cálculo diferencial como simple método de aproximación, que deja de serlo para convertirse en exacto mediante la oscura consideración del infinito que ni aclara ni explica, sino que simplemente ó elude ó encubre la dificultad; Euler, que no podía concebir como método de aproximación aquel que siempre conduce á la verdad, no aproximada sino exacta, y con la forma y expresión que le es propia, y de la manera más sencilla, y por el camino más corto; ni conciliar las ideas y propiedades de los infinitamente pequeños, tales como los concebían Leibnitz y los matemáticos de su escuela, busca la solución del rebelde problema, y cree dar cima á la grande empresa que tantos y tan importantes pensadores no habían podido realizar, suponiendo que las cantidades infinitesimales que consideran dichos cálculos, no son infinitamente pequeñas en el sentido antes entendido, sino verdaderos ceros de cantidad: pudiendo decirse que el método, para Euler, se reduce al cálculo de ceros ó cantidades llegadas por el decrecimiento á la nada. Era una especie de cálculo de sombras de cantidades que fueron y dejaron de ser, no quedando de ellas más que el vestigio, la sombra de su existir, expresados por los símbolos llamados diferenciales. Bien es verdad que Euler, como espantado de su propia idea, aun sin conciencia de la absurdidad monstruosa que entraña, trata de suplir esta carencia de ser de los elementos infinitesimales, no en ellos mismos, sino en la noción menos vaga á sus ojos del límite de dos cantidades. Newton, que, con su penetrante mirada, distinguía con perfecta claridad lo absurdo de concepción semejante, inventó el método de las primeras y últimas razones para evitar esa dificultad; pero Euler, sin tener de este asunto ideas tan claras como Newton, reproduce la doctrina de éste, y durante mucho tiempo el Cálculo infinitesimal es mirado como un cálculo de ceros ó de cantidades nulas, ya consideradas en sí mismas, ya miradas como razones á través de la noción del límite.

Vese, pues, que la luz aportada á la cuestión por Euler ni brilla, ni es de naturaleza propia para aclarar las dificultades insuperables que abundaban en los principios y en todo el cuerpo de doctrina del análisis, viniendo á sembrar la duda en los resultados á que conducía; ó, por lo menos, á producir cierto estado de vacilación y excepticismo creado en el seno del espíritu, fatigado de tanto luchar en vano, como si comenzara á renunciar á la esperanza de alcanzar tan codiciado fin.

Y este estado del espíritu matemático, después de los infructuosos ensayos de Dalembert y Lagrange, traducido en hechos y reducido á doctrina, aparece en el trabajo de Carnot que tiene por título *Reflexiones sobre la Metafísica del Cálculo infinitesimal*, y vió la luz pública después que la teoría de las funciones analíticas. Sostiene Carnot, en esa obra, que el Cálculo diferencial es un cálculo erróneo durante todos los momentos de su marcha; pero que tambien lo es de errores compensados, en el que los producidos, por una hipótesis falsa, se subsanan en el resultado con el prescindir de los elementos contradictorios que conducen á error. Este prescindir lo realiza, según Carnot, el mismo cálculo, con la eliminación de todo elemento infinitesimal: y por este medio el error desaparece, el carácter de método de aproximación cesa, y llegamos á la plena posesión de la verdad. Mas, por lo visto, tan poca fe tenía en su propia doctrina que, no contento con proponer esto, dice que se puede considerar, al estilo de Euler, como un cálculo de verdaderos ceros; en cuyo caso el desprecio de uno de ellos ante una cantidad finita, es legítimo y de rigor: de manera que, para Carnot, el Cálculo infinitesimal es un método de aproximación erróneo en absoluto, pero de errores compensados; y á la vez dice que puede mirarse como un cálculo de cantidades verdaderamente nulas, lo que le asigna todo el rigor requerido, de igual manera que lo adquiere por el otro procedimiento, fundado en conceptos completamente extraños á los de éste, y contradictorios é incompatibles entre sí.

Pobre y menguada idea del análisis infinitesimal, que, reducido á esas proporciones, queda despojado de toda su grandeza, que estriba en el rigor del raciocinio, en la verdad del concepto, y en la evidencia irrefutable é irresistible de sus conclusiones; donde la claridad más viva resplandece sin oscuridad de ningún género que la amengüe, ni nube alguna que empañe la pura transparencia del ambiente en el que se agita, y donde únicamente puede vivir la verdadera especulación matemática.

Las ideas de Carnot, como doctrina científica, despojadas de la parte de ornato que las decora, del aparato científico en que van diluidas, como temerosas de mostrarse escuetas y tales como son en sí mismas, parécenme reducidas á la siguiente afirmación, ya hecha por todos los que le precedieron al tratar de la cuestión que se ventila: el Cálculo infinitesimal no puede concebirse sin contradicción: esto es, sin que el absurdo se muestre al punto, constituyendo la trama y como la sustancia misma del pensamiento analítico, cuando se adoptan como fundamentales las ideas que le han servido de base: luego el método infinitesimal es tan solo un método de simple aproximación y erróneo, considerado en el terreno de la lógica. Pero el Cálculo infinitesimal conduce siempre á la verdad por un camino que, si es oscuro considerado de un modo, es luminoso si se mira como verdad lo que está lejos de serlo: así, este cálculo prodigioso que bajo un concepto aparece erróneo, y lo es realmente, bajo otro es un procedimiento legítimo, en cuanto no sólo es capaz de conducir, sino que de hecho conduce en todo caso á la verdad: luego el Cálculo infinitesimal no es un cálculo erróneo; y, como no cabe el conciliar términos tan opuestos, ni es posible dejar de afirmar estas dos cosas, que pugnan por verse reunidas, cree Carnot, siguiendo en esto á Lagrange, salvada la dificultad con el juego de palabras y el artificio de afirmar que es un cálculo erróneo, pero de errores compensados por la virtualidad misma del método, que, despojando esta suma de verdad y de error del elemento falso, y depurando así la verdad, llega al fin á mostrarla resplandeciente en el resultado. Este procedimiento extraño, que parece resolver la dificultad, la deja tal cual es, sin añadir á la teoria ni idea ni elemento nuevo, reducida á la simple afirmación, á todas luces evidente, de lo erróneo de los conceptos y del razonamiento, mirados tal como se les considera, y de la verdad que se alcanza siempre por este procedimiento inexplicable, en que la verdad se construye y fabrica con la sustancia del error.

He aquí como juzga Lagrange las teorías de sus predecesores en lo que concierne al Cálculo infinitesimal: «Los principios »de éste, tal como los concebían Leibnitz, los Bernoulli y »L'Hospital, fundados en la consideración de los infinitamente pequeños de diversos órdenes, carecían de base por falta de

»demostración; pero esta base fué dada por Dalembert y Euler, »mostrando, en aplicaciones particulares, que las diferencias que »se juzgaban infinitamente pequeñas y entraban en los cálculos, »eran y debían ser rigurosamente nulas, y que sus razones, única »cosa que entra en aquellas, son tan solo límites de razones de »diferencias finitas ó indefinitas. Pero es necesario confesar, aña»de, que aunque esta idea es rigorosa en sí misma, no es bastan»te clara para servir de principio á una ciencia cuya certidumbre »debe asentarse sobre la evidencia. Además, como el cálculo di»ferencial emplea y considera, en efecto, cantidades infinita»mente pequeñas, ó que se suponen tales, la verdadera metafísi»ca de este cálculo consiste en que el error cometido por una falsa »suposición, se corrige ó compensa por el que nace de los proce»dimientos mismos del cálculo, que solo retiene en la diferen»ciación cantidades del mismo orden. Cosa fácil de comprobar, »con ejemplos; pero de la que acaso sería difícil dar una demos»tración general.» [1]

Dice que Newton, para evitar la consideración de los infinitamente pequeños, supone las cantidades engendradas por el movimiento, y establece un método para determinar directamente las velocidades, ó más bien, la razón de las velocidades con las que la función y su variable son producidas, al que dió el nombre de método de las fluxiones; pero encuentra que la idea de movimiento, como elemento fundamental de dicho cálculo, no es la más natural, ni la misma noción de velocidad, cuando no es constante, es bastante clara para servir de fundamento á dicha teoría. Ni el método de las primeras y últimas razones de las cantidades que se extinguen, al que en definitiva se reducen las demostraciones del fluxional, es tampoco adecuado, según

[1] *Théorie des Fonctions analytiques*, par J. L. Lagrange de l'Institut national.—París,—an V. pág.ˢ 2, y 3.

Lagrange, á su propósito, «porque dicha razón no ofrece al espí»ritu una idea clara y precisa cuando los dos términos de la razón »se anulan á la vez», ocurriendo lo mismo al método de los resíduos debido á Landen, enderezado al mismo fin, por cuyo medio no puede mirarse sólidamente establecida la teoría, aunque por los procedimientos del mismo se hubiesen encontrado desde luego las reglas más sencillas y cómodas para el mecanismo de las operaciones. Juzga Lagrange que el desarrollo de las funciones en series contiene los verdaderos principios del Cálculo diferencial, independientes de toda consideración de límites é infinitamente pequeños; y, estudiando ciertas funciones que se originan de dicho desarrollo, crea el cálculo de las derivadas, que, en efecto, no es otra cosa en el fondo que el Cálculo diferencial.

El pensamiento de Lagrange en esta importantísima cuestión puede formularse así: toda función es desarrollable en serie, ordenada con respecto á las potencias enteras y crecientes de la variable, y los coeficientes de estas potencias se derivan de la función propuesta, conforme á leyes determinadas. Pero la misma ley que engendra la primera de estas funciones ó coeficientes, partiendo de la función, origina la segunda partiendo de la primera, y en general una cualquiera por medio de la que la precede. Estas diversas funciones, producidas por una ley común que, por derivarse las unas de las otras y todas de la función propuesta, se llaman funciones derivadas de la misma, obtiénense de la función desarrollada en serie, sin apelar á otros medios que los recursos del Álgebra elemental; y como estas funciones, procedentes de una, dos ó más derivaciones sucesivas, á las que se da el nombre de derivadas primera, segunda, tercera..... no son ciertamente otra cosa que las expresiones llamadas en el Cálculo diferencial de Leibnitz coeficientes diferenciales de primero, segundo, tercer orden....., y con estos solos elementos se constituye el Cálculo diferencial para los matemáticos de esa escuela; resulta que la teoría de las derivadas, no sólo es el Cálculo diferencial mismo, sino que á la vez se encuentra establecido sobre principios ciertos, sin que para nada intervengan ni la noción de límite ni la de infinitamente pequeño: nociones vagas ú oscuras, cuando no contradictorias, é incapaces de servir de sólido fundamento á una teoría matemática.

Ilusión frustrada de tan grande hombre, que, aceptada como verdad indiscutible desde luego, no necesitó del trascurso de una sola generación para quedar reducida á sus verdaderas proporciones. La conducta ulterior del mismo Lagrange, abandonando los nuevos derroteros que acababa de abrir á la investigación matemática para seguir las ya usadas vías del antiguo cálculo en sus obras posteriores, hubiera inclinado á mirar como ilusorio el propósito que creyó logrado; aunque la crítica no hubiese demostrado, ni se hubiera echado de ver después, que su sistema se apoyaba en la petición de principio, que supone el intento de establecer la noción de la derivada sobre la serie de Taylor, cuando ésta no puede legítimamente establecerse sobre otra base que la infinitesimal, ó por lo menos, sobre el concepto de la derivada: cosa que, desde un principio, había notado Wronsky en su crítica de la teoría de las funciones analíticas, y bien pronto concluyeron por ver todos los geómetras.

Las concepciones de Newton y Leibnitz, lo mismo que la de Lagrange, adolecían del vicio capital de querer resolver la cuestión, excluyendo sistemáticamente éste, y no teniendo en cuenta aquéllos, todos los datos necesarios para conseguirlo; vicio que nacía del desconocimiento casi completo del legítimo papel que podía corresponder al infinito en las especulaciones del análisis.

Leibnitz, en efecto, del supuesto falso, vago é indeterminado del número infinito, llega por modo necesario al concepto de los infinitamente pequeños, á su clasificación en órdenes, y á las propiedades fundamentales que en su teoría les corresponden: con las cuales puede establecer el Cálculo diferencial, sin que en él haya de intervenir la noción de límite, absolutamente necesaria é ineludible en toda consideración general acerca de las cantidades contínuas representadas por números.

Lagrange rechaza la noción de límite y la de infinitamente pequeño; establece la teoría de las funciones analíticas sobre el desarrollo de estas en serie infinita; y hace salir de dicho desarrollo, por los procedimientos ordinarios del Algebra, la serie completa de las derivadas de la función; sin tener en cuenta que la noción de límite, que pretende evitar, es indispensable para establecer, no sólo los elementos del Algebra que sirven de apoyo á su investigación, sino también la misma noción de serie infinita y su equivalencia con la función que representa; y que las relaciones que enlazan al infinitamente grande y pequeño, y á éste con la noción del límite, son tan estrechas y de naturaleza tal, que no es potestativo el aceptar una y rechazar las otras; porque cualquiera de ellas presupone necesariamente las demás, y es forzoso, ó rechazarlas todas ó aceptarlas todas á la vez: y al obrar así, buscando por tan extraviado camino, lo que por medio más natural y directo es hacedero encontrar, condena su teoría á la infecundidad que la caracteriza, á causa del falso y poco natural origen que atribuye á la derivada.

Newton, por el contrario, ni peca por las sistemáticas exclusiones de Lagrange, ni por las deficiencias de Leibnitz. Todo lo que es indispensable para dar con la clave del enigma le es conocido; de todo tiene ideas sanas y racionales; ni uno solo de los elementos de la cuestión, tal como hoy se la concibe, se le oculta: porque, como Arquímedes, rechaza la idea del número infinito, elemento directo é inmediato de especulación; como los geómetras de nuestra época, concibe el infinitamente pequeño cual simple variable que decrece sin límites; considera los valores finitos de los límites de razones de infinitamente pequeños y grandes, y los límites de sumas de infinitamente pequeños, y atribuye explícitamente á la noción del límite el carácter que le distingue, y le es esencial en el órden de ideas del moderno análisis: esquiva, no obstante, sin rechazarlo en absoluto, el empleo del infinitamente pequeño, que no acierta, á pesar de todo, á despojar del carácter vago é indeterminado con que se le muestra, sin duda por sus relaciones con el infinitamente grande que, lo mismo á Newton que á los demás geómetras, se mostró siempre con el carácter absoluto de mayor que todo lo imaginable; y, para evitar la consideración de las cantidades infinitas, apela á la de las primeras y últimas razones, y por su medio determina la fluxión, elemento fundamental de su sistema, y base necesaria de su manera de concebir la cantidad que varía de un modo continuo. Y al obrar así, y al excluir con rara sagacidad los elementos infinitesimales que podían proyectar cierta oscuridad en la raiz misma de su método, y al no considerar de modo explícito el límite, sin duda por su relación necesaria con el infinitamente pequeño, se priva voluntariamente del concurso de tan valiosos medios de investigación; y ni llega á la síntesis moderna, que con todos ellos construye la noción de diferencial, ni consigue dar á su método la base sólida que pretende; y se condena en cambio á luchar con las dificultades de aplicación, en que no tropieza el de Leibnitz, más natural, más fácil y sencillo, que se plega dócil á todas las necesidades de la especulación, y es, por consiguiente, más fecundo que el de las fluxiones, sobre el cual llega por completo á prevalecer.

La teoría de las funciones analíticas reinó sin rival en los primeros años del presente siglo. Pero cuando el edificio creado por Lagrange comenzó á derrumbarse, mediante la crítica de los principios en que se apoyaba y de los progresos realizados por el análisis, volvió á dominar respecto á la naturaleza del Cálculo infinitesimal la misma confusión de ideas que existía antes de la aparición de la teoría de las funciones analíticas. En este estado de la ciencia y disposición de los espíritus, aparecieron en el primer cuarto de la presente centuria, los trabajos de Cauchy referentes al análisis, que fueron el punto de partida de la nueva doctrina infinitesimal.

No entraremos á exponer el sucesivo desarrollo de las ideas en esta última evolución del pensamiento analítico, con el fin de legitimar la doctrina infinitesimal. Obra de la actual generación y de la que nos ha precedido, debida al concurso de casi todos los geómetras que en la presente centuria han estudiado el Cálculo infinitesimal, si tuvo su origen en los trabajos de Cauchy, recibió su primer impulso en las obras de Duhamel: y como la enumeración de la parte que corresponde á cada uno de los matemáticos en la tarea de perfeccionar y dar el conveniente desarrollo á las ideas capitales de aquél y á la forma expositiva de éste, ni entra en nuestro propósito, ni cabría en los límites de este discurso, consideraremos tan solo la doctrina en sí misma, y, sin descender á detalles, mostraremos únicamente lo que tiene de fundamental, y de qué manera la nueva teoría logra aclarar las dificultades que presentaba la antigua.

Que no hay ciencia más pobre en ideas que la ciencia analítica es un hecho evidente, puesto que únicamente versa sobre la noción de cantidad; y que apenas hay alguna que sea tan rica en hechos y en leyes admirables á que los hechos obedecen, lo proclaman de consuno los libros y memorias, y colecciones académicas, y revistas científicas, que acrecen cada día el número, ya abrumador, de volúmenes que encierran el conjunto de los trabajos analíticos de nuestro tiempo. ¿De qué manera aquella innumerable multitud de hechos se producen, elaborados con tan pobre y escaso número de elementos? ¿Cómo estos hechos y las leyes á que se encuentran sometidos alcanzan la fecunda y asombrosa generalidad que les distingue? En una palabra, ¿en qué estriba, en qué consiste, de qué procede la exhuberante fecundidad de la ciencia analítica, y la razón de la especie de primacía y como superioridad con que aparece respecto á las demás ramas de las ciencias exactas?

No es fácil dar solución *à priori*, á estas cuestiones; porque esto supondría el conocimiento perfecto de los fines y medios del análisis como ciencia de la cantidad; en lo cual no hay conformidad completa entre los matemáticos. Pero, si no es fácil *à priori* hacerlo, se puede examinar el proceso histórico del desarrollo de esta ciencia, y sacar de ese examen como el promedio de lo que las ideas fundamentales representan en la mente del matemático, cuando de ellas usa; estudiar la tendencia común y el fin general á que se enderezan; y deducir de este estudio, no solo la causa de aquella fecundidad, y la tendencia general del pensamiento analítico, y los medios que pone en juego para alcanzar el fin á que aspira, sino también si esos medios son adecuados á su fin y suficientes ó insuficientes para conseguirlo.

Yo no sé, señores, si los matemáticos han considerado bastante qué es y á qué corresponde en nuestra mente eso que en el dominio del análisis llamamos cantidad. Y es de tal importancia la cuestión, que en saberlo ó ignorarlo estriba el que con claridad se sepa de qué trata el análisis. Y digo que no sé si se han fijado bastante en esta importante cuestión, porque confieso ingenuamente que no sé si semejante duda procede de mi falta de erudición ó de que en realidad no se encuentre determinado ese concepto con suficiente claridad en los libros; puesto que, á pesar de mi buen deseo, no he llegado á averiguar por ellos lo que sea.

Y no es que yo crea que de toda noción y entidad que considera una ciencia, pueda y deba darse una definición; pues, por poco que entienda del modo cómo la ciencia se constituye, bien sé que hay cosas que no pueden definirse, y no por la oscuridad del conocimiento que de las mismas alcanza la inteligencia, sino, como dice Pascal, á causa de la misma perfección de este conocimiento, que, á la vez que imposibilita el definirlas, hace inútil la definición, por cuyo medio no alcanzaríamos un conocimiento más completo y acabado que el que ya de esas entidades poseíamos. Pero á esta clase de cosas indefinibles, de las que la inteligencia, por otras vías que la deductiva, llega á tomar posesión, y sin las cuales ni la ciencia matemática ni otra alguna puede dar un paso, porque entran como elemento y base obligada de la especulación científica, no pertenece lo que llamamos cantidad en el análisis. Esta es una entidad compleja, constituída por la síntesis de diversos elementos reunidos por la mente humana bajo lo forma de una perfecta unidad. Es posible considerar aisladamente, y en sus mutuas relaciones, estos diversos elementos, y estudiar de qué manera cada uno de ellos concurre á constituir la entidad en cuestión; y hay que hacerlo necesariamente para poder distinguirla, por sus notas características, de toda otra noción afín, sin lo cual no puede servir de base á la ciencia matemática, ni mucho menos pueden tampoco alcanzar las deducciones de ésta la evidencia especial que las distingue, y que, con justa razón, les ha conquistado el nombre, muy propio, de ciencias exactas.

La verdad es que el tenaz y no interrumpido trabajo de los siglos XVII y XVIII, en su afán de legitimar los fundamentos del cálculo, si bien infructuoso en cuanto al logro inmediato de ese fin, había sido, no obstante, importantísimo, puesto que de él habían salido todos los elementos necesarios para encontrar la solución de tan capital problema, y se habian discutido bajo todas sus formas, y puesto en evidencia, y mostrado en toda su fecundidad las nociones que habían de servir de base á aquella solución: así es que solo había ya necesidad de un espíritu bastante eleva-do, que, considerando estos elementos, y comprendiendo sus mutuas relaciones, los enlazase en una síntesis capaz de alcanzar lo que á cada uno, ó solo á una parte de ellos, no había sido dado el conseguir. Porque Newton había mostrado la importancia de la fluxión ó derivada, y cómo ésta se originaba de la noción del límite, por cuyo medio la cantidad continua caía bajo el dominio de la especulación matemática; pero sin encontrar la forma analítica adecuada á los medios y fines de aquella: Leibnitz había encontrado por un rasgo de su penetrante espíritu filosófico la forma legítima, y con ella el procedimiento natural del cálculo en las investigaciones del análisis; pero sin alcanzar la verdadera razón de aquella forma y este procedimiento: y Lagrange, al dar á la derivada un origen distinto del que le atribuyó Newton, y al prescindir del concepto fundamental de Leibnitz, y edificar el cálculo apoyado tan solo en el coeficiente diferencial, había logrado evidenciar que el análisis se concentra exclusivamente en la noción de la derivada, ó, por lo menos, que no hay consideración verdaderamente analítica, que pueda mirarse como independiente de ese importantísimo elemento, y además, que el objeto principal, si no único, del análisis, era el estudio de las funciones concebidas del modo más general.

Pero después de tanto infructuoso ensayo, y de tanto malogrado propósito, para llegar á ver claro en cuestión de suyo tan oscura, era necesario conseguir lo que desde un principio tan difícil aparecía: había necesidad de obligar á la noción del infinito á someterse dócil y servir de instrumento á las necesidades del análisis; y á esto se oponía no solo el carácter y sello especial con que la noción del infinito se mostraba á la consideración matemática, cuando se aplicaba al número y la distancia, sino también el criterio filosófico que había de servir de fundamento á la legítima intervención del infinito en el análisis.

Un conjunto fortuito de circunstancias facilitó el último paso que aun quedaba por dar, haciendo que un hombre eminente, de genio penetrante é investigador, de incansable actividad y originalidad al parecer inagotable, viniese á tratar de la cuestión apoyado en las únicas ideas filosóficas concernientes al infinito, mediante las cuales podía llegarse, y, en efecto, se ha llegado, á la solución de tan importante y capital problema. Yo no sé si esta feliz coincidencia ha sido bien notada, y se ha medido bien todo el alcance de las consecuencias que, tanto en el dominio de las ciencias matemáticas camo fuera de él, tienen las ideas de Cauchy, relativas á esta cuestión; y si la brillante escuela de geómetras, que siguiendo la inspiración de aquel grande hombre ha llegado á constituir el análisis infinitesimal sobre las bases en que hoy se apoya, ha considerado lo que en el terreno filosófico significa la doctrina por sus trabajos creada, y las radicales consecuencias que de la misma se desprenden, como último corolario, millares de veces repetido, y con asombrosa unanimidad proclamado por todos los hechos y principios del expresado cálculo: consecuencias que, no por pertenecer al dominio exclusivamente matemático, dejan de tener importancia en el filosófico, puesto que son la negación rotunda y completa de doctrinas muy en boga en nuestros días, acerca de la naturaleza del tiempo y del espacio.

Mas, dejando á un lado estas cuestiones, permitidme, señores, discurrir por breves momentos acerca de las ideas en que se funda la nueva doctrina, antes de elevarnos á la síntesis por ella constituída, y que alcanza al fin el anhelado objeto.

La cantidad que entra en las consideraciones puramente analíticas, tal como se muestra á la mente del geómetra que la somete á su especulación, no es simplemente el *quantum* de las cosas; no son las cosas mismas concretas, á cuyo estudio pueden aplicarse las teorías analíticas; ni siquiera el *quantum* abstracto que en las cosas objeto de nuestro estudio podemos considerar.

Es algo de esto, sin serlo todo; y es algo más á la vez, que ni se encuentra necesariamente en el *quantum* de las cosas, ni en las cosas mismas, y que allí pone la inteligencia para construir un ente, no real, ni correspondiendo á la realidad objetiva, sino simplemente posible, ó con existencia meramente potencial.

Analicemos las ideas ó nociones esenciales que entran á constituir la cantidad analítica, tal como resulta del examen atento, hecho sin preocupaciones ni prejuicios, del pensamiento matemático, en su largo y laborioso ejercicio; y para ello veamos qué es en su conjunto el vasto tejido de fórmulas y de métodos, de cálculos y de procedimientos, de ideas y de principios, con cuyos materiales realiza sus admirables construcciones la ciencia analítica; y, fijándonos desde luego en su elemento más común, y material obligado de toda elaboración, en la fórmula ó expresión algebráica, determinemos qué es, y qué papel desempeña, y de qué elementos esenciales se compone, y á qué orden de ideas corresponde en la mente del matemático; y de este examen, que ha de ser complejo por demás, puesto que con todo tiene íntima conexión, lo mismo con los procedimientos y métodos que con los principios y nociones fundamentales, deduzcamos lo que tanto nos importa averiguar.

Esa fórmula, considerada en sí misma; esa expresión analítica, prescindiendo de toda relación que tenga ó pueda tener con cualquier otra, nos aparece simplemente como una serie de operaciones hechas con los símbolos que entran en la expresión, representando ó teniendo el lugar de las cantidades á que la fórmula se refiere, si procede de una cuestión concreta. Dos son, pues, sus elementos constitutivos: uno, los símbolos representantes de las cantidades que considera la fórmula; otro, las operaciones actuadas ó que han de actuarse con las cantidades representadas por aquellos símbolos; y la fórmula, en sí misma considerada, ni es otra cosa, ni corresponde á otra noción que á la del resultado obtenido ó la cantidad actuada por medio de esas operaciones.

Nada más sencillo ni más claro que tal concepto de la expresión analítica ó fórmula; pero á condición de que las ideas que esos símbolos representan, y las operaciones realizadas actuando sobre dichos elementos, se hallen perfectamente determinadas ó definidas, sin que puedan dar lugar ni á duda, ni á confusión, ni á equívoco.

Veamos, no lo que acaso puedan ser en la ciencia del porvenir, sino lo que realmente son en la actual, esas cantidades y las operaciones por su medio concebidas, y encontraremos, sin grande esfuerzo, que las cantidades que considera el análisis en sus concepciones puramente especulativas, se hallan determinadas por números: esto es, que los símbolos que entran en las fórmulas representan números, pero números dotados de ciertos atributos, propios más de la cantidad que del número mismo, y que tales atributos, unidos á aquellos números, constituyen una entidad ideal con unidad perfecta en la mente del matemático. Pero no es el *quantum* ó verdadera cantidad correspondiente á ningún orden concreto, ni siquiera el *quantum* abstraido ó la cantidad abstracta de las cosas sobre que podemos especular; es un *quantum* especial, puesto que se halla dotado de condiciones ó atributos propios exclusivamente de la noción que en el análisis puro llamamos cantidad. Esta no es el simple número, porque en ella intervienen, entre otras, las afecciones positiva y negativa que no entran por necesidad en el concepto de número; la consideramos además, ya como constante, ya como variable; y en sus variaciones como pudiendo realizar toda ley de variacion, y muy en particular la continua, vedada al simple número, por la naturaleza de su ley primitiva y elemental de generación, esencialmente discontinua.

La cantidad analítica es, pues, un número variable, conforme á toda ley posible de variación, que en general varía de una manera contínua, y se halla dotado, además, de afecciones ó modos de ser que no pertenecen á la esencia del número, como tampoco corresponden á ésta, ni la de variabilidad, ni, mucho menos, la de continuidad, en pugna con la noción común del mismo.

La síntesis de estos elementos, tan complejos y en cierto modo heterogéneos, es la que corresponde á la noción que el matemático considera en las especulaciones analíticas, y á la que en ellas se designa con el nombre de cantidad. Pero formaría una idea incompleta de su unidad y de la manera cómo se constituye con aquellos elementos, el que solo la considerase aislada y prescindiese de las relaciones íntimas que cada uno de ellos y la entidad por los mismos constituida tiene con la forma analítica que le sirve de expresión: forma que se compenetra de tal modo con aquellos elementos y con la entidad por ellos realizada, que sus propiedades esenciales, así como el verdadero concepto de dichos elementos, no alcanzan la definición suficiente ó el grado de claridad y determinación completa que les corresponde, sino mediante la intervención de dicha forma, que aparece así como causa generadora de la naturaleza propia de la entidad constituida y de los elementos que á su constitución contribuyen.

Pero esta forma de la cantidad analítica no es otra cosa que lo que antes hemos llamado fórmula ó expresión, que en sustancia no es más que una serie de operaciones hechas con las cantidades que representan los símbolos sobre que se opera. En estas formas ó fórmulas entran unos elementos con el carácter de constantes, otros con el de variables, si aquella pertenece al análisis y no á la simple álgebra; y las constantes, por la misma naturaleza del símbolo, pueden recibir todo valor, aunque entren en la expresión con el carácter de cantidades de valor fijo y determinado, y se diferencian en algo de las variables, que también pueden adquirir todo valor, pero que, como aquellas, ni entran ni pueden entrar en la fórmula sino con uno solo de sus valores, y éste, además, determinado. Porque es de necesidad tener muy presente una cosa que con mucha frecuencia se olvida, ó, por lo menos, no se tiene en cuenta: que la fórmula ó expresión analítica, con sus símbolos correspondientes á operaciones y cantidades, no es ni más ni menos que una serie de pensamientos, escritos con una escritura más perfecta, á la verdad, que la ordinaria, pero al fin y al cabo, un razonamiento ó una serie de razonamientos, cuya naturaleza especial con sus consecuencias no hemos de buscar en la escritura ni en los caracteres por cuyo medio se expresan. Es preciso ver las ideas que dan vida y palpitan bajo aquellos símbolos estériles, y reducidos á simple conjunto de trazos cuando no corresponden á ningún concepto, ó, lo que para el caso es igual, cuando aquellos conceptos son contradictorios ó conducen á contradictorias consecuencias. Y si la fórmula no es más que una serie de razonamientos, la legitimidad de estos y las consecuencias que de ellos se deriven, y la entidad que corresponda al resultado de aquella serie de operaciones intelectuales, solo podemos conocerla mediante el exámen ó análisis de las ideas sobre las que el razonamiento recae, y de la forma de este razonamiento; teniendo tanta importancia en el resultado la manera de razonar como los elementos sobre los que se razona, y hallándose determinado dicho resultado por la mutua actuación, y, por decirlo así, compenetración de tan hetereogéneos medios. Pero la cantidad analítica, en su verdadero concepto, en aquel con que se presenta en la mente del matemático que de ella usa, no nace *à priori*, sino que se deriva y ha tenido su origen en la consideración *à posteriori* de la expresada fórmula analítica, concebida en su más completa generalidad.

Vemos, pues, que una cuestión, tan sencilla en la apariencia, complícase á medida que penetramos en su fondo, y correríamos el peligro de introducir más confusión que claridad si no procediéramos con mucho orden en este punto. En gracia á la brevedad, nada diremos respecto á lo que al concepto de variación atañe, ni tampoco de las afecciones ó modos de ser de la cantidad; cuyo origen puramente analítico no se halla aún establecido en el estado actual de la ciencia; ni de la noción de continuidad, porque nadie puede dudar que estas cualidades que suponemos en la cantidad analítica no se hallen realmente en ella contenidas, tal como la concibe el matemático, interviniendo en las especulaciones del puro análisis. Pero sí debemos en este momento considerar dos cosas de verdadera importancia: una, el carácter esencial que distingue á la constante indeterminada de la variable; otra, la condición simplemente numérica de la cantidad analítica: el primero, por las consecuencias que de esa distinción se deducen; la segunda, para esclarecer un punto que, á mi entender, es causa de multitud de equívocos y falsas concepciones que tocan directamente al fondo y á la esencia misma de la cuestión de que se trata.

La constante se distingue de la variable en que aquella entra en la fórmula con un valor fijo, mientras que ésta varía, es decir, recibe una serie infinita de valores que determinan aquellos modos de ser que, referidos á la misma entidad, la hacen aparecer pasando de un estado á otro que le sigue en el orden del tiempo: tránsito que constituye la variación. Pero, cuando la fórmula ó expresión analítica de que se trata se refiere á una cuestión general, como ocurre en casi todas las del análisis, las constantes están representadas en la expresión analítica como las variables, por símbolos, que ni tienen ni pueden tener, por su misma naturaleza, valor esplícitamente determinado; y, á causa de esa indeterminación numérica de los símbolos, aunque las constantes solo pueden entrar en la fórmula con valor fijo para cada uno que dicha fórmula determine, pueden adquirir todo valor posible cuando se considera el conjunto ó la totalidad de los que la fórmula representa.

Así las constantes que entran en las expresiones analíticas, consideradas como el conjunto de valores á que el símbolo se refiere en todos los casos, representan todo valor posible, y no se distinguen en realidad de la variable, que á su vez también representa todo valor, si no en que los pertenecientes á la variable se presentan ordenados y produciéndose de un modo sucesivo en el tiempo; mientras que en los que corresponden á la constante, ni hay ni se supone ordenación alguna, y se muestran como una infinidad de valores, capaz de determinarse numéricamente de todas las maneras posibles, sin que ninguna condición determine el orden en que esos valores puedan ó deban producirse. En una palabra; los valores representados por la fórmula, aparecen constituyendo una série infinita, correspondiente á cada valor particular que tome la constante, y, por lo tanto, como una infinidad de séries infinitas, respecto á las que nada se determina tocante al orden en que cada una de aquellas séries infinitas se ha de producir en el tiempo; mientras que el orden de sucesión ó producción sucesiva de valores, se halla determinado en cada una de aquellas séries infinitas, particularmente consideradas.

De esto se deduce, como consecuencia inmediata, que, si solo se atiende á la consideración del conjunto de valores que la fórmula determina, el establecer un orden de sucesión en los concebidos sin orden alguno prefijado, nada altera su totalidad como simple conjunto; y, por consiguiente, que si conviene á los fines ulteriores de la investigación suponer un orden de sucesión en los valores que pueda recibir la constante, será lícito hacerlo sin incurrir por ello en contradición; lo que, en realidad, equivale á considerar la constante como variable, siempre que así convenga, con tal que su variación sea completamente independiente de la de la primitiva variable.

Procediendo la mayor parte de los resultados obtenidos por el análisis y las teorías que constituyen esta ciencia, del estudio y solución de problemas referentes á cantidades concretas, representando y refiriéndose los símbolos que entran en las expresiones analíticas, por cuyo medio se obtuvieron aquellas soluciones y alcanzaron dichos resultados, á esas mismas cantidades concretas, ¿qué de extrañar es que, ya por la concisión del lenguaje, ya por no distinguir el carácter especial de la cuestión, mirada bajo su doble aspecto de solución del problema, por una parte, y por otra de fórmula analítica independiente de este, y aplicable acaso sin modificación alguna á mil distintos del primero por su índole especial, y por la naturaleza de las cantidades concretas á que se refieren; qué de extrañar es, señores, que se creyese que las cantidades concretas entraban ellas mismas en las fórmulas, ó, por lo menos, la cantidad abstracta obtenida por la inteligencia mediante la consideración de lo que hay de común, prescindiendo de lo particular y de lo vario que se encuentra en la numerosa serie de cantidades sometidas á la especulación analítica? ¿Y qué de extrañar es que, á pesar del carácter numérico con que aparecían determinándose esas cantidades en la mayor parte de los casos [1]; al observar que las consecuencias generales deducidas de las fórmulas eran independientes de la unidad que se adoptase para aquella representación numérica, pudiera llegarse á creer que la relación establecida por la fórmula entre los elementos ó cantidades relacionadas era por su naturaleza independiente de la noción del número, y, por consiguiente, que eran verdaderas cantidades y no números los que entraban y constituían el fondo común de la especulación analítica? Nada más natural, señores, que semejante creencia; y aun no admitiéndolo así, y no

[1] Menos en las teorías de las cantidades simbólicas, y en la de las llamadas operaciones abstractas, en las que, aun quedando cierto carácter numérico que en ellas persiste, los símbolos y las fórmulas no expresan necesariamente números, al menos concebidas dichas teorías del modo más general y abstracto.

viendo en los simbolos que encierran las fórmulas más que simples números, para evitar largas perífrasis, para dar concisión y vigor al lenguaje, y claridad y evidencia á las conclusiones; para no verse en la necesidad de distinguir á cada paso entre lo abstracto y lo concreto; nada más natural, tampoco, qué designar con el nombre de cantidad, y mirar *convencionalmente* como tal, la idea que expresa cada símbolo; puesto que este lenguaje, una vez determinado su alcance y su valor, no presenta peligro alguno, ni se presta á equívocos, y es por el contrario, ciertamente, orígen de fecunda sencillez y elegancia en los resultados.

Pero si era indiferente en dicho sentido el carácter que á los símbolos se pudiera atribuir, no lo es, en verdad, el doble punto de vista que la cuestión presenta; sino que, por el contrario, su esclarecimiento tiene un interés vital y es de toda necesidad indispensable; porque un punto de vista excluye al otro, y las consecuencias que de los mismos se deducen pugnan entre sí, y con las nociones comunes y universalmente aceptadas, hasta tal punto que, de mirar las cantidades que expresan los símbolos como simples números, hay que rechazar ciertas aspiraciones que hoy se manifiestan apareciendo con la pretensión de modificar la ciencia en sus ideas y procedimientos; y el tomar como válido y legítimo y verdadero el contrario punto de vista, obligaría á rehacer la ciencia analítica de la base á la cúspide, pues tal como se encuentra hoy constituida carecería de fundamento sólido en que apoyarse.

Puede concebirse con claridad qué es una operación hecha con cantidades concretas, sin que en ella tenga participación alguna el número, si se determinan bien las condiciones mediante las cuales la operación ha de traducirse en hecho como resultado; mas esto no es posible sin que la naturaleza de la cantidad concreta sobre la que se opera influya de preponderante y especial modo, y por ello no se puede aplicar el concepto general de las operaciones que el análisis considera, ni á toda especie de cantidades concretas, ni aun á las de una especie determinada. Pueden concebirse y se han estudiado operaciones recayendo sobre entidades concretas de especie dada, que han llegado á constituir verdaderas teorías científicas de carácter matemático; se han encontrado grandes analogías entre sus leyes y las series de hechos concretos á que se refieren, y leyes y series de hechos analíticos; pero todas ellas presentan el sello especial y particularísimo que la naturaleza de las cantidades sobre que versan les imprime, y, á pesar de aquellas analogías, su influjo no puede extenderse sino á la región particularísima en que se ejerce.

De aquí la incapacidad, que llevan en sí esas leyes, de adquirir el carácter general de las leyes del análisis; generalidad que les haga indiferentemente aplicables á todo objeto capaz de definición matemática.

Y es claro que lo que no se puede atribuir á especie alguna determinada de cantidades concretas, mucho menos se puede atribuirlo á todas, y, por consiguiente, no es posible admitir que las operaciones del análisis recaigan sobre simples cantidades abstractas, independientes de toda otra consideración, incluso la numérica.

Pero, si, en vez de las cantidades, se consideran los números que como resultado de su medida las determinan, entonces, aun tratándose de problemas referentes á cantidades concretas, lo que entrará en las fórmulas no serán las cantidades mismas, sino los números por cuyo medio se expresan. Y como todo objeto capaz de determinación matemática es por ello precisamente susceptible de determinación numérica, resulta que en la consideración numérica de las cosas es donde únicamente podemos encontrar el carácter general que distingue las especulaciones del análisis.

En toda serie concreta de hechos numéricamente determinables, y en las mismas cosas concretas cuya completa definición matemática pueda establecerse, aparece desde luego, ó por lo menos puede en ellas concebir nuestro espíritu, una doble serie de cosas de distinta naturaleza: la serie de los hechos concretos, ó de las diversas formas con que estos sucesivamente aparecen, y la serie de números determinados por esos mismos hechos: series entre las que no hay más lazos de relación directa que los que nosotros hemos establecido, mediante su coexistencia ó realización simultánea en el tiempo. Por ella, esas dos series de hechos, extrañas la una á la otra, se determinan mutuamente en el sentido de que la presencia del uno acusa la del otro, y la consideración de cualquiera de ellos lleva aneja y como aparejada la de su correspondiente en la otra serie; y, cuando esta determinación es absoluta y tan completa como es necesario para que, bajo el aspecto que se considera, nada quede vago, nada incierto ó indeterminado, cabe hacer en una de ellas el estudio de los hechos correspondientes á la otra, y referir así el estudio de las cosas de un orden al de las de otro orden de cosas.

Las cosas que pueden determinarse numéricamente y presentar infinidad de aspectos, que aparecen como modificaciones de las mismas, dan lugar á otros tantos números sometidos á una ley de producción, ó dicho de otra manera, á una función analítica, que es la verdadera ley numérica de aquellos hechos. Pero aunque los números determinados por esta función expresen y detallen por completo la fisonomía de la cosa bajo todas sus formas y manifestaciones, esos números jamás podrán confundirse con aquellos hechos, y las operaciones á que sometemos esos números en sus transformaciones sucesivas, para alcanzar los resultados numéricos que se buscan, no serán ni podrán ser operaciones actuadas con los hechos, por más que aquellas transformaciones y aquellas operaciones numéricas puedan expresar y expresen las transformaciones ó el tránsito de uno de esos hechos á los otros.

La distinción entre ambos órdenes queda subsistente, sin que nada sea capaz de borrarla; y precisamente en esa persistencia de su propio carácter y en la independencia real que existe entre las dos series de hechos, es donde reside el origen y fundamento de la generalidad del análisis, y su ilimitado poder de aplicación. De esta manera, entre esa serie de hechos que consideramos como modos diversos de ser de uno mismo, el cual, modificándose en el espacio y en el tiempo, da lugar á la inagotable serie de modos particulares de ser, relacionados entre sí y referidos á una cierta unidad, por lo que llamamos ley de aquel fenómeno; y la serie de números respectiva y sucesivamente correspondientes á aquellos hechos, que miramos también como maneras de ser de un número variable que se diversifica y particulariza desarrollándose en los momentos sucesivos del tiempo, se establece tan íntima solidaridad y dependencia, tal reciprocidad y correlación mútua, que allí donde se muestra el uno aparece al punto el otro, con los caracteres únicos y exclusivos que les son propios, y que bastan para determinar de la manera más completa el uno por medio del otro desde el punto de vista que se considera. Así, por semejante artificio de la inteligencia, dos series de cosas completamente distintas por su misma naturaleza, como lo son, de una parte, los hechos concretos del mundo físico con el ser y realidad que les es propia en la inagotable serie de sus transformaciones, y, de otra, una serie de números que se hallan íntimamente relacionados con aquellos, aunque de indirecta manera, por su simple coexistencia en el tiempo, mútuamente se determinan de la manera más perfecta, y en tanto grado y de tal manera, que no solo es posible estudiar los fenómenos en sus más variadas manifestaciones, por medio de una función analítica que es solo expresión exclusiva de una ley numérica, sino que también se pueden estudiar las propiedades abstractas y simplemente numéricas de las funciones analíticas en las leyes de los fenómenos concretos. Ejemplo de lo primero es la Geometría y la Mecánica, la Astronomía y la Física matemática; y de lo segundo, el Análisis mismo, en el cual, con tanta frecuencia, los principios más generales referentes á concepciones abstractas y simplemente numéricas se deducen de propiedades geométricas ó mecánicas, correspondientes á entidades completamente extrañas á la entidad numérica que se considera.

Esta especial é ingeniosa manera de determinar todos y cada uno de los elementos que constituyen una serie ilimitada de hechos, por medio de otra serie ilimitada de números, la realiza el Análisis por el concepto fundamental de la cantidad variable, producida conforme á una ley de generación continua.

Es tan sencillo y, por decirlo así, tan rudimentario y vulgar semejante modo de determinar, representando unas cosas por otras de diferente condición y naturaleza, que no es de extrañar que, por su misma sencillez, haya pasado casi del todo inadvertido, no solo este modo de determinación, sino el importantísimo papel que el mismo desempeña en la especulación analítica, que le es deudora de su inmensa generalidad con todos los caracteres que la distingue.

Necesario será, pues, no ver en los símbolos que entran en la fórmula sino simples números; en las operaciones de ésta simples operaciones numéricas; y, en la fórmula misma, solo un número variable ó una ley de generación numérica, expresada por la forma analítica que aquella determina: ley de variación á que se da el nombre de variable, y á la que, al considerarla dependiente de los diversos números que concurren á determinar su valor en cada caso particular, se le llama función de dichos elementos, ó función analítica de la variable, de que sus valores dependen.

La variable, ó función analítica así concebida, es la piedra angular de toda concepción numérica, y de ella nacen por modo natural todas las que sirven de fundamento, no solo al Análisis, considerado como la ciencia de la cantidad variable, sino al Algebra, su parte más elemental, en la que la noción de variabilidad no interviene de manera explícita.

Desde luego, si una variable ó función analítica se halla constituida por una serie ordenada de valores, claro es que en esa ordenación caben dos modos generales de producir la misma serie de valores: el ordinario, al que podría llamarse progresivo, en contraposición al opuesto, que teniendo lugar en orden inverso, aunque sometido á la misma ley, se podría denominar regresivo; y estas dos maneras generales y únicas, de concebir desarrollándose los valores de la variable ordenados conforme á la misma ley de sucesión, corresponden de un modo completo á la noción común de las afecciones llamadas positiva y negativa, teniendo un origen puramente analítico, sin que nada intervenga para determinarlas fuera de la noción del número y orden propio del Análisis, aunque fuera de él tengan también aplicación. Y acaso, sin apelar á otras nociones que á las de número y orden, pueda concebirse algún día tan natural y legítimamente establecida la afección llamada imaginaria, por la consideración de las funciones de dos variables independientes, como por las de una sola se establece la de los números positivos y negativos; sin que haya necesidad de apelar á recursos sacados de lo concreto, como sucede en la teoría de las cantidades imaginarias, geométricamente consideradas, y en cierto modo también en la de las cantidades complejas.

Considerando los valores de la función, no solo presenta ésta una infinidad, cuando se tienen en cuenta todos los que puede recibir, sino que también, al suponer que la variación tiene lugar entre dos cualesquiera, por próximos que se les suponga, en virtud de la continuidad aparecerá igualmente con una infinidad de valores, correspondientes á aquel intervalo: de donde resulta que tal modo de concebir la función es inseparable de la idea del infinito.

Los tres modos generales de variar, que comprenden toda función ó ley de variación posible, establecen la división fundamental de las variables en los tres grupos de cantidades que se designan con los nombres de finitas, infinitamente pequeñas, é infinitamente grandes.

La comparación de dos infinitamente pequeños, ó infinitamente grandes, da origen á los infinitamente pequeños é infinitamente grandes relativos, de los que á su vez se deriva, por modo natural, la noción de los órdenes infinitesimales, que permite concebir toda cantidad como un infinitamente pequeño ó infinitamente grande determinado en su naturaleza, por el orden que le corresponde; y de la comparación, por vía de diferencia, de las cantidades del mismo orden, resulta la noción de las que difieren infinitamente poco: y con todos estos elementos se constituye la teoría general de las simples variables ó cuya ley de variación no se determina, consideradas como infinitamente pequeños ó infinitamente grandes: siendo sus principios más importantes los relativos á la sustitución de unos elementos por otros de los que difieren infinitamente poco, en las sumas y razones de los mismos, sin que ni sus órdenes ni sus límites se modifiquen.

La naturaleza especial del infinitamente pequeño y del infinitamente grande es lo que caracteriza estas teorías; y aunque esas denominaciones son las mismas del antiguo orden de ideas, corresponden, en realidad, á nociones de todo punto distintas. La infinidad que el Análisis actual considera es otra infinidad que la concebida por los geómetras que nos precedieron: la de estos es la infinidad absoluta, que nace de la consideración del espacio infinito, mayor de hecho que toda magnitud; mientras que la correspondiente á las actuales teorías del Análisis, es la que parece surgir de la naturaleza y condición del tiempo: el infinitamente pequeño que éstas consideran no *es*, de hecho, sino que tan solo *puede ser*, menor que todo valor prefijado; y el infinitamente grande solo *puede* ser, pero no *es* mayor que toda magnitud dada. Es más: esta infinidad potencial que interviene en las actuales especulaciones del Análisis, jamás se atribuye á ninguno de los valores particulares, que puede tomar ni el infinitamente pequeño ni el infinitamente grande; valores que son con los que entran en las expresiones analíticas, determinando los que á éstas corresponden. Estos valores son finitos, y no solo finitos sino determinados: de manera que la especulación versa sobre relaciones habidas entre cantidades finitas exclusivamente, y por eso no puede presentar oscuridad de ningún género. Bien es verdad, que se dice de las variables que son infinitamente grandes ó pequeñas; pero esta infinidad se refiere á la variable considerada como conjunto de valores, no á ninguno de estos, que, individualmente considerados, son todos finitos, por más que en su desarrollo sucesivo por medio de la ley de generación que los produce puedan alcanzar valores que excedan en magnitud ó pequeñez á todo valor *prefijado*. La infinidad se refiere á la variable como grupo, como colección ó género de valores; de ninguna manera á los valores particulares ó especies de ese género, que son los únicos elementos sobre los que recae el razonamiento matemático: concepción completamente distinta de las antiguas concepciones, en las que la infinidad era una infinidad actual, y esta, elemento directo del raciocinio que supone la expresión analítica.

Réstanos, para concluir la exposición de los principios referentes al Análisis, examinar de qué modo el límite y la derivada salen del concepto general de cantidad variable, y cómo con ellos se constituye la diferencial, síntesis y concepto supremo del

Análisis que los contiene á todos y al que todos se subordinan. No entraremos en detalles respecto á la noción del límite, porque en lo que precede hemos expuesto lo más importante que á la misma hace relación, ó á lo que á su origen infinitesimal se refiere: solo insistiremos en lo que, á nuestro entender, constituye la esencia de esta importante noción, esto es, la imposibilidad de que la variable que determina una cantidad como límite, puede realizar como uno de sus valores dicho valor límite. En esa condición estriba toda la importancia y fecundidad de este elemento analítico. Sin que sea obstáculo para atribuirle el carácter que le asignamos, que al determinar, por ejemplo, la derivada de una función, pueda el incremento de la variable realizar todos los valores, incluso aquel que recibe el incremento; porque en dicha investigación la verdadera variable independiente es el incremento, y, por ello, éste puede variar conforme á cualquier ley, sin más restricción que la de no producir otros valores que los que realiza la variable principal, y, por consiguiente, conforme á leyes que, llenando esta última condición, imposibiliten la anulación del incremento.

La noción de la derivada nace en virtud de la teoría infinitesimal, del incremento infinitamente pequeño de la función, por modo tan natural y sencillo cuando la derivada existe, como de la de variable é infinitamente pequeño nace la del límite, por cuyo medio aquella se determina. Pero esta importante noción tiene otro origen no menos natural y directo, que arranca de la naturaleza misma de la variable continua.

Las funciones ó cantidades variables no varían de modo uniforme é igual en los diversos momentos de su desarrollo: así, cuando la variable, partiendo de uno de sus valores, aumenta una cantidad dada, el aumento que por ello corresponde á la función será distinto para cada valor de la variable que sirva de punto de partida; y de aquí que, al pretender formarse una idea clara de la variación relativa de la función, comparada con la de su variable, ó sea de la rapidez con que la función varía, se tropieza en las mismas dificultades que al determinar la velocidad de un movimiento variado; pero la noción de esa rapidez es un elemento que determina y define la variación de la función, como la velocidad determina al movimiento mismo; y los medios que pone en juego la inteligencia, en el proceso común por el que se eleva de los hechos en que se apoya esa noción á la noción misma por ellos producida, son precisamente los que sirven para determinar y definir matemáticamente esa rapidez, como límite de la razón de las variaciones infinitamente pequeñas de la función y su variable.

La noción de derivada es como un nuevo sentido abierto á la percepción matemática, por cuyo medio ésta alcanza lo que sin ella no habría modo de conseguir.

La derivada es una de las nociones más fecundas de la ciencia; es, en la teoria de las funciones, único objeto del Análisis, lo que la recta en las figuras planas y lo que el círculo en las curvas; es la manera única de expresar, con carácter verdaderamente matemático, la mayor parte de las nociones sobre que se asientan las ciencias, á las que el Análisis puede con fruto aplicarse, como sucede en la Geometría, la Mecánica y la Física, y en el Análisis mismo; pues que en éste la derivada es el principio en que descansa el estudio de la variación de las cantidades, y el medio por el cual la inteligencia, no sólo llega á alcanzar ideas claras y completamente definidas de esas leyes de variación, sino que también encuentra en ese importante elemento la poderosa palanca capaz de remover todos los obstáculos que se oponen al conocimiento de sus más complejas é intrincadas leyes.

La noción de derivada llega á borrar la distinción entre las cantidades conmensurables é inconmensurables, y la mucho más radical de las funciones llamadas algebráicas y trascendentes. Ante el concepto general de esta noción, semejantes distinciones desaparecen, y lo conmensurable é inconmensurable, lo algebráico y lo trascendente se muestran con el mismo carácter y bajo una faz común, derivándose de la misma fuente que por igual y sin distinción á todos los produce. Y esto procede de que la noción de derivada nace de la del límite, que por su carácter indirecto, por su condición especial y manera de definir las cantidades, tiene la facultad de determinar como límite de estas, otras de naturaleza y condición que no caben en dicho género. Así, por lo algebráico podrá determinarse lo trascendente como límite, y viceversa; y es propio de esa facultad expresar como límite, lo más complicado por lo más sencillo; lo excluido de una cosa por medio de esa cosa, en la que no cabe y á la que no se reduce por modo directo y ordinario.

De aquí la inmensa fecundidad de esta importantísima noción, que, fuera del papel matemático que la corresponde, es á la vez el único medio que tiene la inteligencia para llegar por inducción á ciertas verdades, que corresponden á la legítima expresión de conceptos que no sería posible representar con su verdadero valor y tal como la inteligencia los concibe, sin el procedimiento mismo por cuyo medio se establece analíticamente la derivada; la que así aparece, á la vez que como matemático, como elemento lógico que de continuo pone en juego la razón humana para aquilatar y precisar el valor de muchas ideas adquiridas, ya por intuición directa, ya por medio del procedimiento inductivo, lo mismo en las ciencias matemáticas que en otros órdenes científicos del conocimiento. Por eso, á pesar del poco valor lógico de las ideas en que asentó Lagrange su teoría de las funciones, fué ésta de inmensa importancia y trascendencia, por el sólo hecho de haber patentizado el papel que toca á las derivadas en el Cálculo infinitesimal, mostrando que todo en él se reduce á determinar las derivadas de funciones dadas, ó bien al paso de estas á las funciones de donde provienen.

Concurren, pues, á la constitución del análisis infinitesimal, de indirecta manera, la noción del infinito bajo sus dos formas de infinitamente pequeño é infinitamente grande; y, de directo modo, la noción de variable, la de continuidad aplicada á éste, y la de variación por incrementos sucesivos, esencialmente discontínua: finalmente; como medio de establecer relación indirecta, ya que directa é inmediata es imposible entre ambos modos, continuo y discontínuo de generación, la noción del límite, bajo este concepto la más importante entre todos los elementos analíticos.

Porque no sólo tiene el límite íntimas relaciones con todos los demás, sino que por su medio cosas tan heterogéneas como estas pueden reducirse á perfecta unidad, y ser contempladas sin contradicción ni oscuridad por la inteligencia, y aparecer como concepciones racionales, y mostrarse con la virtualidad, que de hecho tienen, para explicar la deficiencia del antiguo orden de ideas y la solidez y valor lógicos necesarios para servir de base científica al Análisis.

Sin la noción del límite, ni la teoría de las series, ni la del Cálculo infinitesimal pueden concebirse con carácter verdaderamente racional y matemático. Por el límite se determina la noción de derivada, y con ésta se engendra la de diferencial, concebida, no como incremento infinitamente pequeño de la función, sino como cantidad esencialmente distinta de él; pero, aunque distinta, tan íntimamente con él relacionada y con la función de que procede, que es hacedero, con su auxilio, pasar no sólo de la diferencia á la diferencial, sino también por camino llano y abundante de luz, de ésta á la función misma; viniendo así el límite, que es la única vía que conduce sin tropiezo de la diferencia á la diferencial, á ser como puente ideal que pone en comunicación el análisis finito con el infinitesimal, y franquea el paso de la variación discontinua á la continua. La diferencial no es la diferencia, pero difiere de ella infinitamente poco: no es el inconcebible valor que la diferencia habría de alcanzar en el límite, pero su razón al incremento de la variable es constantemente igual á la derivada. Entre todos los infinitamente pequeños que difieren infinitamente poco del incremento de la función, es la diferencial el de forma más sencilla posible, cuando en su expresión entra la derivada; y de estas propiedades, que definen la diferencial como el producto de la derivada por el incremento de la variable, resulta una función tan bien determinada como la derivada misma, á la cual equivale á pesar de su distinta forma: noción dotada además de toda la claridad y de toda la sencillez apetecibles.

La diferencial saca toda la fecundidad que le es propia de su analogía é intimidad con el incremento infinitamente pequeño de la función; y de las analogías y diferencias entre ambas nociones, matemáticamente establecidas y lógicamente determinadas, arranca la legitimidad del Cálculo infinitesimal como teoría científica.

Y como la diferencial se expresa por medio de la derivada y el incremento infinitamente pequeño de la función, en virtud de relaciones tan sencillas que dar uno de estos elementos es tanto como dar el otro, resulta que, por la síntesis de ambos en la noción de diferencial, ésta contiene en sí la de la derivada y la de incremento infinitamente pequeño, y, por lo tanto, las del límite y de continuidad: en una palabra, todas las que esencialmente sirven de base al Análisis. Pero la diferencial se determina por procedimientos generales de cálculo, en los que, no interviene por modo explícito la noción del límite, fuera de los que sirven para encontrar la de las funciones simples: además, la razón de la diferencial al incremento de la variable, es constante y rigurosamente igual al límite de la razón de los incrementos de la función y de la variable; y por eso se llega á suprimir en cierto modo, por la intervención de la diferencial, el carácter indirecto que presenta el procedimiento del cálculo en lo que á la derivada se refiere; logrando así replegar á los principios de la teoría y concentrar en los mismos ese carácter indirecto que, á no dndarlo, presenta en sí misma la noción del límite, considerada en sus relaciones con la variable que lo determina.

Y así, por medio de este nuevo concepto de las diferenciales, todo el cálculo de estas se legitima, y con éste el integral; y las ecuaciones diferenciales que antes no había medio de concebir, sino como inexactas ó como correspondientes á un orden de ideas contradictorio, adquieren, por fin, mediante el órden de ideas que ha reemplazado al antiguo, el carácter lógico y verdaderamente matemático que les corresponde.

A la luz de la nueva doctrina, es ya noción vulgar la de la razón de ciertos infinitamente pequeños, que, aunque siempre finita, no tiende hacia límite alguno; se ve claramente que la continuidad de una función no implica que los incrementos de ésta y de su variable hayan de ser del mismo orden; y se conciben y determinan, como lo ha hecho Weierstrass, funciones continuas que no tienen derivada: cosas, si no inconcebibles, difíciles de entender y de explicar en el antiguo orden de ideas. Apenas si hay aspiración, por atrevida que aparezca, que no sea legítima para la fecunda generalidad y alcance de la nueva doctrina, una vez depurada del elemento inadecuado que tanta sombra proyectaba en las especulaciones del análisis.

Y es que el espíritu humano, del sentimiento de su propia flaqueza, y de lo pobre de sus medios de conocer, saca la incontrastable fuerza que le distingue, con la cual no halla obstáculo que no venza, dentro de sus propios dominios; y con aquella evidencia con que percibe que hay cosas á las que no le es dado llegar, con la misma se le muestra lo ilimitado de su alcance en las investigaciones que caen dentro de su propia esfera de acción: sin que el conocimiento de tal limitación tenga para él nada de humillante; como, en el orden físico, no se siente humillado tampoco el hombre porque su estatura no exceda de los límites que le fueron señalados. Antes por el contrario: al contemplar la maravillosa armonía que resplandece en todo el Universo, y los múltiples lazos que, en mutua dependencia, relacionan sus diversas partes; al considerar que, aunque todo en él ha sido hecho *in pondere et in numero et mensura*, á donde quiera que dirijamos la mirada advertimos siempre aquella doble infinidad de pequeñez y magnitud que, si podemos concebir, no acertamos á comprender; al vernos siempre «colocados, como dice Pascal, »entre una infinidad y una nada de extensión, entre una infini»dad y una nada de número, entre una infinidad y una nada de »movimiento, entre una infinidad y una nada de tiempo», [1] la Matemática reconoce su incompetencia para sondear, con recursos propios, tan recónditos arcanos, y, prescindiendo del infinito actual, cuyo estudio no le pertenece, estudia tan solo las cosas y relaciones finitas. Y entonces, ya en su propia y natural esfera, ni hay traba alguna que pueda detenerle, ni obstáculo invencible á su perseverante actividad, y á los titánicos esfuerzos, y á los inagotables recursos que tiene la razón humana en su recto ejercicio, afanosa por tomar posesión de la verdad, que es su aspiración soberana.—HE DICHO.

---

[1] *Œuvres complètes de Blaise Pascal.*—París, 1872.—Tomo III *De l'esprit géométrique*; pág. 174.

DISCURSO

DEL EXCMO. SEÑOR

D. GUMERSINDO DE VICUÑA Y LAZCANO

Señores:

Un hombre modesto, conocido tan solo de vosotros que le habéis abierto estas puertas, y de sus compañeros y discípulos de las Universidades, es el que entra á compartir desde hoy nuestras tareas. No ha frecuentado los Ateneos y los Círculos en que se brilla, ni se ha valido de la prensa para divulgar su nombre, hoy que tanto se usa y se abusa de ese medio; ni siquiera ha tomado parte alguna en la Política, que á muchos fascina y atrae. Alumno de la Escuela de Ingenieros de Caminos y de la Facultad de Ciencias más tarde, profesor de la Universidad católica que hubo en esta Corte hacia 1870, Catedrático por oposición de Algebra superior y Geometría Analítica en la oficial de Barcelona, y luego de Cálculos diferencial é integral en la misma, trasladado por concurso á la de Madrid, mostró en todas ocasiones un espíritu investigador en las ramas más abstrusas de las ciencias matemáticas, que le dió justa y notable fama, así como un celo por la enseñanza que le acreditó como meritísimo maestro. Su delicada salud, que bien se nota solo al mirarle, no le impidió estudiar á fondo, meditar mucho y escribir un libro, calificado por esta Academia como «original, importante y notable por más de un concepto».

Y, cosa singular: el autor del dictamen á que me he de referir más adelante con algún detalle, relativo á dicho libro, era el Excmo. Sr. D. Francisco de Paula Márquez, á quien hoy reemplaza el Sr. Archilla: de tal suerte que nuestro nuevo compañero, en vez de dar un apretado abrazo á quien por tan eficaz manera contribuyó á que le hayais elegido, se ha visto en la necesidad de haceros notar con sentidas frases el vacío que entre nosotros ha dejado el sabio Director del Observatorio astronómico de San Fernando, el celoso Comisario Regio del Conservatorio de Artes, el asiduo Consejero de Instrucción pública.

Ha escogido el nuevo Académico como tema de su discurso el concepto del Cálculo infinitesimal, y en él ha dado nuevas muestras de cuán hondo ha meditado sobre punto tan abstracto. Partiendo de Arquímedes, el primer genio matemático de la antigüedad, y de los precursores de Newton, el gigante de las ciencias físico-matemáticas, y de Leibnitz, el eminente filósofo, llega hasta nuestro casi contemporáneo Cauchy, á quien principalmente sigue el Sr. Archilla en los conceptos de esta rama del saber.

Mirada desde cierta altura la historia de las ciencias, se ve la continuidad más completa, habiendo algunos saltos, pequeños en esta marcha general, colosales, sin embargo, para los contemporáneos, y que marcan la existencia de los grandes investigadores. Por esto la idea del elemento infinitesimal venía ya incubada desde antiguo; pero no adquirió carácter concreto hasta la famosa nota publicada por Leibnitz, en 1684, en las *Acta eruditorum*, de Leipzig, de seis páginas tan solo, pero que encerraba ya la base del Cálculo, y con más resonancia en 1687, cuando Newton publicó su inmortal libro *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, en el cual expuso el método de las fluxiones.

Graves discusiones y acerbas disputas produjo la prioridad del invento, pues el matemático inglés acusó al filósofo alemán de conocer previamente sus meditaciones, por la correspondencia que entrambos mantenían: de mano maestra y con juiciosa crítica expone toda esta controversia el Secretario de la Academia de Ciencias de París, M. Bertrand, en el prefacio de su obra monumental de Cálculos. Ni yo puedo entrar en ella, ni menos indicar la rica bibliografía de los escritores extranjeros; pero ha de serme permitido exponer la de los españoles, siquiera para justificar una vez más el aforismo de *parva propria magna, magna aliena parva*.

Casi cien años transcurrieron, á partir de las fechas hace poco citadas, hasta que se publicaron en nuestra patria libros en que se hiciera aplicación del procedimiento infinitesimal, y la bibliografía nacional no es rica en este punto.

El primer impreso español en que se usó el nuevo algoritmo es el de D. Jorge Juan, titulado *Examen marítimo*, quizás la obra científica de mayores vuelos y novedad relativa que se ha escrito entre nosotros [1], pues en ella se expusieron cosas antes no conocidas en la Hidrodinámica; aplícanse el Cálculo diferencial é integral con eficacia, aunque en sus elementos. De esta obra, que mereció los honores de la traducción [2], hízose, veinte años después de muerto su autor, una nueva edición, á la que el

---

[1] *Examen marítimo teórico-práctico, ó Tratado de Mecánica aplicada á la construcción, conocimiento y manejo de los navíos y demás embarcaciones: por Don Jorje Juan, Comendador de Aliaga en la Orden de San Juan, Jefe de escuadra de la Real Armada, Capitán de la compañía de Guardias Marinas, de la Real Sociedad de Londres, y de la Academia Real de Berlín.*—Madrid, 1771.—Dos tomos en 4.º de 428 y 411 páginas. En el prólogo da cuenta de la bibliografía extranjera, elogiando mucho la *Scientia navalis* de Euler (Berlín, 1749), aunque achacando á este, como á otros autores, el no tener en cuenta las observaciones prácticas, lo cual trata de evitar.

[2] Mr. Leveque publicó la traducción francesa en 1783.

ilustre marino Ciscar agregó como apéndice un tratadito de Cálculos [1].

Hacia aquel tiempo se publicó por el P. capuchino Villalpando un Compendio de Matemáticas en que se exponían los principios del Cálculo [2], y las obras de Bails, profesor de la Academia de San Fernando, que fueron de texto en este centro durante muchos años [3], y que influyeron bastante en la cultura científica del país, incluían las ciencias de aplicación con el uso del elemento infinitesimal.

---

[1] La segunda edición, en folio, es de 1793: solo se publicó el tomo 1.º de los cuatro que debía tener. Las notas del texto y las adiciones son de D. Gabriel Ciscar, Capitán de fragata (por entonces) y Director de los estudios de la Academia de Guardias Marinas del departamento de Cartagena.

Las adiciones se refieren principalmente á desarrollos de fórmulas trigonométricas, cuestiones de máximos y mínimos, estudio de curvas y unas nociones de Cálculos. Corrigió también algunos lunares de la obra, debidos principalmente á la precipitación con que debió escribirla D. Jorge Juan, en medio de sus muchas ocupaciones.

[2] *Tractatus præliminaris mathematicarum disciplinarum elementa in usum physicæ candidatorum, auctore R. P. Francisco a Villalpando, Ordinis Capucc., Philosophiæ et Theologiæ Profess.*—Madrid, 1778.

Empieza por nociones de Aritmética, Algebra y Geometría y Trigonometría; se ocupa luego de las secciones cónicas, y pasa á exponer, con gran concisión, los principios del Cálculo diferencial, aplicándole al estudio de las curvas, y á los máximos y mínimos, terminando con nociones del Cálculo integral y sus aplicaciones á la cuadratura de superficies, cubicación de volúmenes, rectificación de curvas y método inverso de las tangentes.

[3] Dos son las obras de Bails á que me refiero: una se titula *Principios de Matemática, donde se enseña la especulativa con su aplicación á la Dinámica, Hidrodinámica, Optica, Astronomía, Geografía, Gnomónica, Arquitectura, Perspectiva y al Calendario, por D. Benito Bails, Director de Matemáticas de la Real Academia de San Fernando, individuo de las Reales Academias Española, de la Historia, y de las Ciencias Naturales y Artes de Barcelona.*—Madrid, 1776 y siguientes.

Consta de tres tomos: el primero de las Matemáticas puras, inclusos los principios del Cálculo diferencial é integral; el segundo y el tercero de las demás ciencias que se enuncian en el título, y unas tablas trigonométricas. Se hicieron varias ediciones, por lo menos dos, en 1789 y 1795.

La otra obra se denomina *Elementos de Matemática:* el tomo 1.º se ocupa de Aritmética y Geometría; el 2.º de Algebra; el 3.º estudia las curvas y expone el Cálculo diferencial y sus aplicaciones á la Geometría y el integral

A fines también de la pasada centuria vió la luz en Italia un Compendio de Matemáticas, incluso el Cálculo diferencial, debido á un Jesuita español, el P. Campserver, el cual había enseñado estas ciencias en España antes de la expulsión de la Orden á que pertenecía [1]. Y nótese que la Compañía de Jesús, que tanto influyó en la enseñanza de las ciencias matemáticas en España durante los siglos XVII y XVIII, no tuvo en ella, que yo sepa, ningún tratadista de Cálculos, pues ni el notable músico y matemático Eximeno, que florecía en la época del autor ya citado, y que fué uno de los primeros profesores del Colegio de Artillería de Segovia, ni otros de diversos centros docentes se ocuparon de esta parte superior de la ciencia. Y á este propósito, lícito me será copiar las palabras del erudito Padre, contemporáneo de los anteriores, D. Juan Andrés, el cual decía por entonces que los matemáticos de aquel siglo, ó sea los Euler, Lagrange, Laplace, Gauss y otros, habían hecho poco, comparados con los de épocas anteriores; y añadía luego, refiriéndose á los adelantos de la Física, las siguientes curiosas palabras, que prueban el espejismo, aun de persona tan ilustrada, por el excesivo afán de alabar los tiempos que ya pasaron. Dicen así: «¿Qué puede hacerse en la Optica si no mejorar los cristales para hacer más fáciles las ob-

---

con bastantes desarrollos, sobre todo en la parte de cubicaciones; termina con la Trigonometría: los tres se imprimieron en 1779. El 4.º, que es la Dinámica, y el 5.º, la Hidrodinámica, datan de 1780; del siguiente año el 6.º, que es la Optica. Tiene además otros tomos, hasta once, referentes á Astronomía y Arquitectura civil é hidráulica.

[1] *Bibliotheca mathematica cum dictionario theoricis ac practicis, tam antiquorum quam recentiorum nobilioribus inventis, ac figuris convenientibus ornata et in sex tomos distributa: auctore Ignatio Campserver, presbytero hispano.*—Ferrara, 1789.

Al final del tomo 1.º da las nociones de Cálculo diferencial; en el 2.º se ocupa de Geometría, Trigonometría, Geometría analítica, método de las tangentes, máximos y mínimos, radios y evolutas, cuadraturas y otras cuestiones.

No he podido consultar más que el tomo 1.º y el índice del 2.º servaciones? La Acústica ya no admite más investigaciones, y tantos escritos de sonido y de música han dicho más de lo que requiere la materia. ¿Quién se atrevería á tocar el fuego, habiéndole manejado tan dignamente Boerhave? La máquina neumática, el barómetro, termómetro é higrómetro nos han manifestado el aire en todos sus aspectos. La electricidad y el aire fijo llegan ya á cansar, y enfadan las leyes del movimiento demostradas de tantas maneras: todo está ya examinado, todo dicho y vuelto á decir, y no se puede decir ni pensar cosa alguna que antes no la hayan dicho y pensado otros muchos» [1].

¡Cuán asombrado quedaría el buen Padre si resucitara y conociera las teorías de Fresnel y de Cauchy sobre la Optica; las investigaciones de Savart y de Helmholtz sobre la Acústica; la moderna Termodinámica y las máquinas térmicas, que han transformado los medios de comunicación; y sobre todo las maravillas teóricas de la Electricidad y sus portentosas aplicaciones prácticas!

En el Colegio de Artillería, ya citado, explicó los Cálculos desde su fundación, en 1764, el oficial del cuerpo D. Cipriano Vimercati, cuya obra manuscrita se ha perdido [2], y en 1795 se imprimió en Segovia la que después sirvió de texto, escrita por D. Pedro Giannini, que fué uno de los sabios traidos por Carlos III cuando pasó del trono de las dos Sicilias al de las Españas [3], y que formaba parte de una obra completa y concienzuda de matemáticas.

---

[1] *Disertación sobre las causas de los pocos progresos que hacen las ciencias en estos tiempos, dicha en la Real Academia de Ciencias y Buenas Letras de Mantua, por el Abate D. Juan Andrés, y traducida del italiano por D. Carlos Andrés.* Segunda edición. Imprenta Real, año de 1788. La cita se refiere á la página 19 de este folleto.

[2] Era el 7.º de una completa en ocho tomos. Véase á este propósito la biografía del general Loygorri, publicada en el *Memorial de Artillería*, de Abril de 1887, por nuestro respetable colega el general D. Pedro de La Llave.

[3] En 1782 comenzó á imprimir su obra titulada *Curso matemático para la*

Ninguno de los autores de obras muy conocidas en España á fines del siglo XVII, y que trataban de la parte superior de las ciencias, como las del Director de la Academia de Bruselas, Don Sebastián Fernández de Medrano, ni las de su contradictor el italiano Coppola, editadas en Madrid, ni las del ilustre Padre Jesuita Kresa, profesor del Colegio imperial de la córte y del de Marina de Cádiz, mencionan siquiera el por entonces nuevo instrumento analítico, y sucede lo mismo con los autores del siglo siguiente, excepto los ya nombrados, siendo de extrañar que no lo hagan así D. Ventura de Avila, profesor de la Academia militar de Matemáticas, establecida en Barcelona; D. Juan Bañón, Director de la Escuela Real de Murcia; el famoso Jesuita Padre Tomás Cerda; el Profesor del Seminario de Nobles de Madrid, D. Tadeo Lope y Aguilar [1]; ni siquiera el ilustre presbítero valenciano D. Tomás Vicente Tosca, cuyos libros eran tan conocidos, y se ocupaban de las principales especulaciones matemáticas.

Unicamente hallo cierta referencia en una disertación leida por un alumno del Seminario de Nobles, de Madrid, con ocasión de un certamen público y solemne, mientras que en fiestas literarias análogas á esta, y que indicaban el cuadro completo de la enseñanza, había tocado el punto del Cálculo infinitesimal un

---

enseñanza de los caballeros cadetes del Real Colegio militar de Artillería. Se terminó en 1803 con el tomo 4.º, dedicado á la Mecánica. El 3.º es el de Cálculos; está dividido en cuatro libros, que abrazan el diferencial y el integral; tiene 499 páginas en 4.º, sin el prólogo, y en éste cita las principales obras francesas á que se refiere.

[1] Este autor, en su obra titulada *Curso de Matemáticas para la enseñanza de los caballeros seminaristas del Real Seminario de Nobles de Madrid,* trae en el tomo 2.º (1795), dedicado á la Geometría, Trigonometría y Aplicación del Algebra á la Geometría, y, á su final, una sección que titula *Cálculo de las probabilidades,* en que se ocupa de las cuestiones elementales de este asunto, sin auxilio del elemento infinitesimal, versando principalmente sobre problemas de interés compuesto, anualidades y rentas vitalicias.

alumno español en un centro docente de Francia, á principios del pasado siglo [1].

El primer tratado especial de Cálculos no se publicó en España hasta los comienzos del actual siglo, y se debe á D. José Chaix, Vicedirector del Cuerpo de Ingenieros Cosmógrafos [2]: se decide por seguir el método que llama de los límites, aunque se inspira en Lagrange, y dice textualmente: «Sus principios son evidentes y sencillos, y si en todas sus demostraciones y aplicaciones no es tan breve como el de los infinitamente pequeños, le excede siempre en claridad, elegancia y evidencia: ade-

---

[1] La primera se titula *Conclusiones mathemáticas defendidas en el Real Seminario de Nobles, en presencia de sus Magestades Cathólicas los Reyes Nuestros Señores (que Dios guarde), por D. Leandro Carrillo, Cadete de Reales Guardias Españolas, y D. Edmundo Sarsfield, conde de Kilmalock, Seminaristas en dicho Real Seminario, presididas por el Padre Esteban Brannieri, de la Compañía de Jesús, dedicadas al Rey Nuestro Señor D. Carlos III, por el Seminario, como á su único patrono.*—Madrid 1760.

Es un folleto de 118 páginas, en que se indican brevemente las cuestiones capitales de las Matemáticas, incluyendo una indicación del Cálculo diferencial.

El otro escrito análogo, que prueba la prioridad del estudio que en el ramo á que me refiero había en Francia, dice así:

Théses de divers traités de Mathématiques, dedieés á son altesse royale Monneigneur le serenissime prince des Asturies, heritier presontif des Espagnes et des Indes, et soutenues, par Dom François de la Torre y Argaiz, Pensionnaire dans le College des RR. PP. Jésuites; Sous la direction du R. P. Jean Durranc, de la Compagnie de Jésus.—Toulouse, 1717.

Tiene solo 70 páginas, y se ocupa, entre otras cosas, de los infinitamente pequeños.

[2] *Instituciones de cálculo diferencial é integral con sus aplicaciones principales á las Matemáticas puras y mixtas*, por D. José Chaix, Vicedirector del Real Cuerpo de Ingenieros Cosmógrafos del Estado.—Tomo I.—Contiene el Cálculo diferencial y sus aplicaciones.—Madrid, 1801, Imprenta Real. En 4.°, 263 páginas y 7 láminas. Excelente edicion.

En el prólogo hace la historia, dando á Newton como verdadero descubridor del Cálculo.

El último de los nueve capítulos del texto es la exposición de algunos teoremas de la Mecánica, auxiliada por el Cálculo.

Hay además otro libro de Chaix, titulado *Memoria sobre un nuevo método general para transformar en series las funciones transcendentes, precedido de otro método particular para las funciones logarítmicas y exponenciales.*—Madrid, 1807.

más tiene este método, sobre los otros, la ventaja de que todas sus aplicaciones se pueden hacer por medio de un solo principio muy general y elegante, esto es, por medio del admirable teorema de Taylor. Por esto he preferido el método de los límites para explicar el Cálculo diferencial y hacer sus aplicaciones, pareciéndome superior á cuantos se conocen para este efecto.....» La obra del Sr. Chaix, en el tomo que únicamente se publicó, es concienzuda y clara. ¡Lástima grande que la guerra de la Independencia impidiera la edición de la parte relativa al Cálculo integral y la fructificación de tan buena semilla científica!

Publicose poco después una traducción de la Mecánica de Francœur, usando el Cálculo infinitesimal, que quizá se debe al mismo Chaix [1].

Había por aquel tiempo en España dos hombres de bastante valer en estas ramas superiores de la Matemática, además de los ya citados, y limitándome solo á los que cultivaron la especial á que me vengo refiriendo: el uno, D. José Rodríguez, más conocido entonces, y quizá también ahora, en el extranjero que en su patria, á pesar de haber sido, en unión del citado Chaix, los que ayudaron á Biot y Arago en la medición de una parte del arco del meridiano de París que pasa por España, y cuyos estudios como geodesta fueron muy apreciados en Inglaterra, donde residió varios años [2]; el otro, D. Agustín Pedrayes, compañero de Ciscar en la comisión internacional que se reunió en París para proponer las bases y detalles del sistema métrico-decimal,

---

[1] *Tratado de Mecánica elemental para los discípulos de la Escuela Politécnica de París.* Fué traducida, sin decir por quién, para el uso de los estudios de la Inspección general de caminos.—Madrid: Imprenta Real, 1803.—Excelente edición.

[2] Fué catedrático de la Universidad de Santiago; se le cita con encomio en la Enciclopedia inglesa, y publicó en Lóndres, 1812, el trabajo titulado: *Observations of the mensurement of three degreès of the meridian, by Josè Rodríguez Gonzàlez.*

quien, siguiendo una costumbre muy generalizada entre los matemáticos de allende los Pirineos en los siglos XVII y XVIII, propuso y resolvió cuestiones del Cálculo integral, abriendo al efecto un certámen entre todos los sabios del mundo [1].

Autores como Verdejo [2], Vallejo [3] y Odriozola, uno de nuestros Académicos fundadores [4], á quienes varios de vosotros habeis alcanzado, y algún otro, publican obras elementales y completas de las Matemáticas, conteniendo nociones del Cálculo infinitesimal. Respecto de tratados especiales del ramo, apenas puede citarse más que el del profundo García San Pedro [5], que honró

---

[1] *Solución del problema propuesto el año 1797, dado á luz por una asociación literaria.*—Madrid, 1805. Hay además una edición en latín.

El problema era integrar una función complicada, en la que casi todos los términos son diferenciales binomias. Según resulta, nadie lo resolvió más que Pedrayes, mereciendo la aprobación de Delambre; añade que de Berlín vino una solución á la Academia de Ciencias de París, que no fué aprobada por esta Corporación.

[2] *Compendio de Matemáticas puras y mixtas para instrucción de la juventud, por D. Francisco Verdejo González, Catedrático de Matemáticas de los reales estudios de esta Córte.*—El tomo I, Matemáticas elementales, es de 1794; el II, que contiene unas ligeras nociones de Cálculos y la Mecánica, es de 1802.

[3] Imposible es dar idea de los muchos, variados y no siempre congruentes escritos de este profesor, cuyo celo era notorio, y cuya actividad no cejó ni aun en sus últimos años. La obra en que se ocupó del Cálculo infinitesimal es el *Tratado elemental de Matemáticas, escrito de órden de S. M. para uno de los Caballeros seminaristas del Real Seminario de Nobles de Madrid y demás casas de educación del Reino, por D. José Mariano Vallejo, etc.* Dice que empezó á escribir esta obra en 1808; de ella se hicieron varias ediciones: en la cuarta, del año 1840, dedica las páginas 58 á 140 (en 4.°) á la exposición del Cálculo diferencial é integral.

[4] *Curso completo de Matemáticas puras, por D. José de Odriozola, Capitán del Real cuerpo de Artillería, Académico de mérito de la Real Academia de San Fernando de Nobles artes, y profesor que fué de Matemáticas en el Colegio de su arma. Tomo IV. Cálculo diferencial é integral*: Madrid 1829.—En 4.°, 343 páginas.

Es partidario de la teoría de las funciones derivadas. Fué libro de texto durante muchos años en la escuela especial de artillería de Segovia: ès superior á los de los autores últimamente citados.

[5] Prescindiendo de sus tratados de Geometría Analítica y de Mecánica, publicados ambos en 1840, y en los que estudiaba las cuestiones con auxilio del Cálculo infinitesimal, dando de este modo en el primero un estudio completo de las aplicaciones á la teoría de las curvas, la obra á que especialmen-

á esta Academia en los primeros años de su fundación: su obra indica un progreso en la ciencia española, mientras que entonces, y aún después, apenas se han usado otros textos, fuera de la Academia de Ingenieros de Guadalajara para que se escribió, y el citado de Odriozola en la de Artillería, que los franceses, bien en su lengua propia, como el Lacroix en un principio, el Duhamel después, prescindiendo del Sturm, del Boucharlat, del Timmermans y de algunos otros que sirvieron de texto en varias escuelas, ó traducciones, cuales las del libro de Navier, ya sin notas, como la realizada por el ingeniero Ardanaz, ya anotada, como la que llevó á efecto el arquitecto Cámara [1]: últimamente se ha adoptado en algunos centros el libro italiano de Rubini.

Como trabajos afines al asunto que me ocupa, debo citar el *Cálculo de Variaciones* de nuestro ilustre consocio Sr. Echegaray, con cuyo nombre se tropieza siempre al estudiar el movimiento científico de España en estos últimos treinta años [2]; el discurso sobre *Cálculo de las Probabilidades*, profundo en el

---

te aludo, es la titulada: *Teoría algebráica elemental de las cantidades que varían por incrementos positivos ó negativos de sus variables componentes, ó sea, Cálculo diferencial é integral, por el Teniente de ingenieros D. Fernando García San Pedro, profesor de la Academia de su Cuerpo. Obra destinada á la enseñanza en el Real Colegio general militar.*—Madrid: 1828.

Parece preferir el concepto de derivadas, aunque admite la denominación de elementos diferenciales: tiene pocas aplicaciones y es muy elemental en la parte de Cálculo integral. La obra es metódica, pero son de más fondo y mayor extensión las dos ya citadas, y que escribió doce años más tarde.

[1] La obra original del ilustre ingeniero francés data de 1834, y las traducciones del ingeniero de caminos, que llegó á Ministro de la Corona, Don Constantino Ardanáz, y del Catedrático de la escuela de Arquitectura, y más tarde de la Facultad de Ciencias de esta Universidad central, D. Eugenio de la Cámara, son posteriores. Esta última, editada en 1850, va precedida de una introducción referente á cuestiones de séries, con una ligera idea de las derivadas y de las teorías de las fluxiones y de los límites, y tiene numerosas notas en el texto, con la pretensión de aclararle en los pasajes que el traductor conceptuó oscuros.

[2] Es un folleto de 68 páginas y una lámina final, impreso en 1858, titulado *Cálculo de variaciones. Lecciones explicadas en la Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.*

fondo y castizo en la forma, como todos los escritos de nuestro digno Secretario [1]; así como un tratadito sobre este tema del profesor de la Academia de Artillería, Sr. Ollero [2], y los estudios sobre cuestiones relativas al infinito del reputado profesor de la Escuela de Ingenieros de Caminos, Sr. Portuondo [3], cuyas opiniones coinciden con las del Sr. Archilla; así como la traducción de la conocida obra del filósofo alemán, connaturalizado en Bélgica, M. Tiberghien [4].

Así las cosas, apareció el libro del Sr. Archilla titulado: *Estudios fundamentales del Cálculo diferencial.* Propúsose su autor dar una base sólida al Cálculo infinitesimal, abandonando aquel precepto implícito de varios escritores franceses, *allez en avant et la foi vous viendra,* ó sea, estudiad la ciencia en su parte útil; y por la comprobación de ella misma, más que por sus preliminares, comprendereis su verdad completa. Lejos de esto, quiere ante todo exponer fundamentalmente las bases de la teoría. Por eso decía el dictamen á que aludí al principio de esta contestación que «en el plan de esta obra, la primera parte», ó sea las cantidades cuya ley de variación no se determina, «es el fundamento sobre que descansa la doctrina expuesta en la segunda», ó sea las funciones, «y una y otra los preliminares lógicos de la tercera», que es el Cálculo diferencial propiamente dicho. De aquí «resulta tan natural é íntimamente relacionada la

---

[1] Es el de ingreso en esta Academia, en 1868, muy encomiástico del asunto de que trata.

[2] *Tratado de cálculo de probabilidades*, publicado en Segovia en 1879; obra de 240 páginas, fruto de lecturas bien escogidas y de estudios serios.

También sirvió de texto algún poco tiempo en la misma Academia de Segovia un libro de Cálculos del capitán D. Dámaso Bueno, titulado *Curso de Análisis infinitesimal.*

[3] *Ensayo sobre el infinito*, por A. Portuondo. Este precioso tratadito, como el del Sr. Archilla, tienen sus prólogos firmados en Abril de 1880, aquel en Madrid, éste en Barcelona.

[4] *Teoría de lo infinito*, traducido por G. Lizárraga.—Madrid 1872.

cantidad compleja, á que se da el nombre de *diferencial,* con la variación continua de las funciones, por medio de la teoría infinitesimal, como dicha variación lo está con la *derivada,* que tan íntima conexión tiene con la diferencial. Y como esta conexión y relaciones no se pueden, ó por lo menos no se ha podido hasta ahora, establecer de un modo rigoroso y lógico, sino por medio de la doctrina infinitesimal, de aquí que el autor de esta obra haya creido de absoluta necesidad establecer previamente, como lo hace en la primera parte, las nociones fundamentales de dicha teoría y los principios que la sirven de base.»

«Pero como una teoría no se puede considerar lógicamente establecida y con forma definitiva, si la doctrina en ella expuesta no es consecuencia natural de los principios que le sirven de fundamento, y éstos á su vez no resultan espontáneamente y como sin esfuerzo de las ideas capitales que informan, el Sr. Archilla, procurando establecer una ordenación lógica de los principios é ideas capitales, lo ha conseguido al referir todas las nociones fundamentales á la de variabilidad. Del fondo de ésta, y como de su misma esencia, brotan, por decirlo así, todas las que sirven de base á la teoría infinitesimal, mostrando desde luego las íntimas relaciones que entre ellas existen, en mútua subordinación y natural dependencia, y carácter propio, y el papel que á cada una corresponde en las consideraciones analíticas en que puedan intervenir. Estudio importantísimo, como lo es en toda ciencia, y más aún en la Matemática, el que tiene por objeto esclarecer los conceptos fundamentales, que ha permitido al Sr. Archilla dar una gran unidad á su obra, é imprimirle el sello de originalidad que en toda ella se nota, y muy particularmente en la primera y segunda parte y los principales capítulos de la tercera.»

Tales son las apreciaciones capitales que se hacían por esta corporación del libro de nuestro nuevo compañero, y para terminar este punto y resumir lo que á este aspecto de la ciencia se refiere, permitidme, señores Académicos, unas brevísimas consideraciones sobre las causas del atraso en que por mucho tiempo ha estado España en este linaje de especulaciones.

De todas las manifestaciones del ingenio humano, la menos característica, como propia de cada raza, es la científico-matemática. Concíbese, con efecto, que á ese conjunto de sentimientos y de aspiraciones, y hasta si se quiere, de elementos del clima y del suelo, que constituyen, al cabo de los siglos, el sello nacional, correspondan manifestaciones peculiares en las artes bellas y en la literatura, en las que ciertamente no ha quedado nuestra España á la zaga de ningún otro país. En las ciencias que se refieren á cosas materiales, propias de la región, ó á inclinaciones elevadísimas del espíritu, caben también la divergencia y el carácter, y por eso nuestros botánicos, nuestros metalurgistas y los antiguos escritores de Agricultura tienen originalidad y mérito, así como hay verdadera y brillante escuela española en Teología y en Mistica.

Pero el concepto de la cantidad, tan alejado de toda idea de frontera como de cualquier aptitud de raza, es universal y verdaderamente humano. Por eso, limitándome ahora á la parte más elevada de la ciencia, que se ocupa en los desarrollos de dicho concepto fundamental, á la que nuestros tratadistas llamaban *Matemáticas sublimes*, cuya base es el Cálculo infinitesimal, á nadie se le antojará querer explicar nuestro atraso relativo por elementos naturales, sino por el poco aprecio en que aquí se han tenido ciertos estudios, al lado de los teológicos y de los literarios, ó sea por la tendencia general de la juventud á buscar aquellas carreras que le proporcionaran mayor porvenir, dada la organización de todas las esferas de la vida en el país.

Brotaron las investigaciones del cálculo matemático allí donde el cultivo era mayor y mejor; hoy se propagan por todas partes, y el libro del Sr. Archilla ha venido á sellar una vez más la solidaridad del saber humano en la época presente.

En el discurso que acabais de oir, ceñido al asunto y castizo, propio de un espíritu investigador, y en el que ni huelga una palabra, ni queda en las sombras casi ninguna idea, habeis visto confirmadas las indicaciones anteriores; el libro las expone en forma doctrinal y docente; el discurso condensa su parte filosófica, al tratar del concepto del Cálculo diferencial, y siguiendo el orden histórico en el desarrollo de dicho concepto, para ir juzgando las deficiencias sucesivas y llegar á exponer la teoría que estima como verdadera y fija.

Los metafísicos, y singularmente Leibnitz, admiten la existencia real de los elementos infinitamente pequeños; la mayoría de los matemáticos, espíritus más positivos, por la índole de sus estudios, se ha decidido, en nuestro siglo al menos, por el método de los límites, inaugurado por los geómetras griegos, dibujado por Newton, ampliamente usado, aunque no dogmatizado, por Cauchy, y divulgado en nuestros días por Duhamel, ya en su conocido tratado de Cálculos, ya en su libro sobre los Métodos [1], digna despedida de un hombre consagrado por tantos años á la enseñanza. Parece, con efecto, que la idea de operar sobre cantidades casi nulas tiene algo de repulsivo para las inteligencias acostumbradas á la exactitud en los procedimientos, y de aquí su sustitución racional por los límites de dichas cantidades.

Para los que miran el Cálculo diferencial como fundado en la compensación de errores, se enlaza íntimamente con el Cálculo de Probabilidades, en la rama más fructífera de este, ó sea en sus aplicaciones á la Astronomía y á otras ciencias de observación, principalmente por el método que se llama de los mínimos

---

[1] *Des méthodes dans les sciences de raisonnement*, par J. M. C. Duhamel (1866-70).

cuadrados. Así decía Carnot [1], más geómetra que analista, imbuído por estas ideas, que «el mérito esencial, lo sublime, puede decirse, del método infinitesimal, es reunir la facilidad de los procedimientos de un cálculo sencillo de aproximación á la exactitud de los resultados del análisis ordinario».

Combatidos quedan por el nuevo Académico estos conceptos. Al nacer en el siglo de oro de las Ciencias matemáticas el nuevo Cálculo, se aspiraba solo á buscar métodos generales de tangentes á las curvas, y de cuadraturas y cubicaciones, llegándose á mayores resultados en la primera que en las dos últimas tentativas, por la falta de procedimientos generales de integración; pero se encontró un verdadero sistema de investigación general matemática, de mayor alcance que los hasta entonces conocidos, que derramó la luz á borbotones sobre todo el campo de la ciencia, y constituyó, una vez sometido á reglas y principios, la mayor conquista realizada en la ciencia de la cantidad, desde que el hombre meditó sobre tan abstruso asunto. Objeto en un principio de dudas y reservas, y hasta de burlas, por parte de muchos, no tardó este poderoso recurso en imponerse á todos, en vista de sus grandes resultados.

Vino más tarde el Cálculo de Variaciones, como algo colocado más allá del diferencial, en los elementos constitutivos del problema.

El Sr. Archilla ha omitido tratar del desarrollo sucesivo del Cálculo infinitesimal en sus teoremas y problemas, limitándose al concepto fundamental, y ha hecho perfectamente; porque semejante tarea cuadra más bien á un estudio sobre historia de las ciencias que á un tema cerrado y concreto, como el que con tanta brillantez ha expuesto. Al hacerlo, hubiera tropezado con

---

[1] *Reflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal;* edición de 1813, página 215.

la más ilustre de las dinastías científicas, la de los Bernouilli, que fué la que mayor parte tomó en tan útil empresa; pues Santiago y Juan, los dos primeros sabios de esta familia, y Euler, puede decirse que son los verdaderos creadores del Cálculo integral, como también lo son de los problemas y elementos fundamentales de lo que se ha venido llamando después Mecánica racional.

Volviendo al aspecto fundamental, habreis notado, señores Académicos, que de la opinión de nuestro nuevo compañero, compartida hoy por casi todos los que á estos asuntos se dedican, dedúcese que Leibnitz tuvo un concepto predominantemente filosófico, aunque sus nombres y notación subsisten aún; Newton, si bien vió é indicó diversos puntos de vista, se decidió por el mecánico; Lagrange procuró buscar un medio meramente algebráico; y Cauchy se elevó al matemático transcendente.

El que peor librado sale en esta comparación es Lagrange; pero no puede ocultarse que él dió la forma al Algebra y á los Cálculos, que vaciados por Lacroix en sus libros, han servido hasta nuestros días casi, en que el Algebra se halla en período de transformación, gracias á las investigaciones de los matemáticos ingleses y alemanes, así como los tratados de Cálculos han venido á informarse en las ideas de Cauchy, siendo Duhamel con respecto á él lo que Lacroix fué con relación á Lagrange. Queda siempre á este gran matemático la gloria de la constitución de la Mecánica analítica, y el molde que dió á esta ciencia subsiste en nuestros días aún, sobre todo en la Dinámica. Inspirábase, sin duda, en la filosofía materialista contemporánea, al querer borrar la idea de lo infinito y reducirlo todo á relaciones algebráicas; pero no cabe negar al geómetra piamontés un poder creador en sus conceptos fundamentales de otras investigaciones.

Con efecto, la teoría de las funciones derivadas, en la que también entra la idea de límite, estriba en el desarrollo en serie, por la fórmula de Taylor, de una función, y en tomar como instrumento, para el conocimiento cuantitativo, los coeficientes de la primera potencia de los incrementos y aun los de las sucesivas. Pero este procedimiento exige conocer anteriormente el desarrollo en serie de toda clase de funciones, y tener un criterio previo y seguro para saber su convergencia, y como este estudio no puede prefundizarse hasta conocer el Cálculo diferencial, de aquí que el método á que me refiero adolezca del defecto lógico de petición de principio, por más que se hayan hecho esfuerzos ingeniosos para evitar este escollo.

No: la idea del infinito no puede rechazarse en el Análisis matemático. El Sr. Archilla ha procurado combatir la confusión que frecuentemente ha reinado entre lo indefinido y lo infinito y ha huido de entrar en el concepto de éste aplicado al espacio, concretándose al que denomina, por contraposición, en el tiempo, y al empleo del infinitamente pequeño, dando idea clara de la generación ideal de las cantidades infinitesimales de órdenes sucesivos, por mútua comparación de unas con otras.

Cauchy expuso sus ideas sobre este asunto en su curso de Análisis, publicado en 1821, y en varias de las numerosísimas Memorias y notas sueltas que con asombrosa fecundidad dió á la Academia de Ciencias de París durante muchos años [1]. Insistió grandemente en las ideas fundamentales de continuidad y en la teoría de las series, y dejó así los elementos que, completados por nuestros contemporáneos, han servido de base para la teoría que acaba de presentarnos el nuevo Académico, aunque añadida y aclarada en ciertos puntos por su propio y peregrino ingenio.

---

[1] Véase *La vie et les travaux du Baron Cauchy*, por Valson.—Tomo II, página 21.

La última parte del discurso de nuestro nuevo compañero versa sobre el concepto de cantidad, y trata del carácter y fundamento de los elementos cardinales que entran en la Matemática. No es, á la verdad, esta parte tan detallada como toda la crítica doctrinal anterior, y parece que su autor se ha limitado á exponer, más que á razonar, sus ideas sobre tan importante materia, apremiado, sin duda, por el deseo de no dilatar más su ya largo escrito, y por haber indicado varios de sus puntos de vista al examinar los sistemas anteriores. Prescindiendo yo del concepto fundamental, me limito á señalar á vuestra atención la claridad con que expone la significación del uso de las constantes y de las variables en el Análisis matemático; la oportuna insistencia en fijar la importancia que tiene en la parte teórica, como en la de aplicación, el concepto de la derivada, ó sea del coeficiente diferencial, á la cual denomina como «un nuevo sentido abierto á la percepción matemática» y el medio original y nuevo, que deja vislumbrar, para que en su día pueda explicarse el verdadero concepto del llamado imaginarismo.

Respecto de este último punto, y después de dar una idea meramente algebráica de las afecciones positiva y negativa, considerando un órden progresivo y otro opuesto, ó sea regresivo, de las funciones de una sola variable, dice que acaso puede llegarse por un procedimiento análogo, sin necesidad de entrar en representaciones geométricas, á explicar lo imaginario, por la consideración de funciones de dos variables independientes, asunto digno de empeño, para que en otra ocasión pueda desarrollarlo por completo el nuevo Académico.

Como resumen y consecuencia primordial del discurso á que contesto, dedúcese el vuelo que han adquirido el Algebra y la Geometría desde el siglo XVII, y si pasamos á otras ciencias, ¡cuánto han adelantado muchas con el empleo del Cálculo infinitesimal!

La hipótesis de los elementos de volumen es una idea geométrica, no sólo aplicable á la cubicación teórica, sino á varias ramas de la Física-matemática, cuando á estos elementos van ligados ciertos parámetros, que representan determinadas cualidades físicas. Así se establecen los principios fundamentales de la Mecánica celeste, de la Elasticidad y de ciertas acciones eléctricas; y en la Dinámica se tratan las teorías de los centros de gravedad, de los momentos de inercia y otras de gran interés científico.

A veces se exponen, en este vasto terreno de la aplicación inmediata, las leyes que se denominan diferenciales, como sucede en la Termostática; y otras veces expresadas por ecuaciones de esta especie, deducidas de las condiciones de integrabilidad de ciertas expresiones, como ocurre en la Termodinámica. Más aún: el atraso, según se ha dicho frecuentemente, de la Física matemática, proviene en gran parte de la falta de métodos generales en ciertas investigaciones del Análisis matemático, y por esto se deben también algunos adelantos en la ciencia teórica á las necesidades de la aplicación al mundo material.

Allí donde existe la ley de la continuidad, allí donde puede considerarse la idea de molécula, ó el concepto de elemento de energía, ó en general el uso de variables con su verdadero carácter, allí entra el Cálculo diferencial, y más tarde, á veces, su inverso: el integral.

Sirva de ejemplo el problema planteado hace unos años sobre las pendientes en los ferro-carriles por un notable ingeniero y escritor científico, más conocido como político en la vecina República: M. de Freycinet [1]. Tomando como única variable inde-

---

[1] *Des pentes economiques en chemins de fer.*—París, 1861. Es autor, además, de una Mecánica que fué de texto algunos cursos en la Universidad de Madrid, y de otras obras.

pendiente el tráfico probable en un trozo corto de línea férrea, que se proyecte entre dos puntos, cuyo desnivel es conocido, es sabido que si se traza la línea de inclinación uniforme que, ceñida al terreno, supuesto continuo y sin repliegues, una los dos puntos, se tendrá la de menor longitud posible y máxima pendiente. El gasto de explotación, función del tráfico, será grande en este caso, y el interés del capital empleado en la construcción será pequeño. Si se disminuye la pendiente, baja el gasto primero, pero aumenta el capital últimamente citado, porque la línea tendrá mayor desarrollo. La ecuación que ligue estos dos elementos, y, por tanto, la pendiente con el tráfico, dará para ésta el valor mínimo que conviene emplear para obtener entre ambos elementos antagónicos la economía posible, igualando á cero el coeficiente diferencial de primer orden, conforme á la teoría bien conocida, y sin necesidad, en este caso, de acudir al de segundo.

Así se obtiene la llamada pendiente económica, fuerte si el tráfico es pequeño, y suave si es grande. Tal es la base de este problema, fundado en una de las teorías más bellas del Análisis infinitesimal, el cual se complica más cuando no se trata del caso sencillo y fundamental que acabo de exponer sumariamente.

La influencia de este Análisis se ha dejado sentir aun en ciencias de bien diversa clase. El estudio profundo que ha sido preciso efectuar sobre los conceptos fundamentales de la Matemática, ha traido, como consecuencia, un progreso importante en el de la Lógica, como ciencia madre en punto á las formas del pensamiento.

Esta, influida ya por Bacon y por Leibnitz, ha tenido en Inglaterra, durante la actual centuria, una brillante pléyade de escritores, inspirados en gran parte por los progresos de la Matemática, y numerosos adeptos en Alemania, Italia y Francia; las ideas del infinito y del infinitamente pequeño no han sido las que menos han servido de base á estos progresos, y ya que los lógicos han pretendido en todos tiempos dar á los matemáticos la base para sus investigaciones sucesivas, justo es que aquéllos hayan reconocido la repercusión de los mayores progresos realizados por éstos, comprobándose así una vez más la unidad de la ciencia.

Casi otro tanto pudiéramos decir de la Metafísica.

Todas las ramas de la Matemática están influidas por el elemento infinitesimal. Con él se tropieza en los comienzos de la Aritmética, y bien á las claras en cuanto se presentan las cantidades llamadas incomensurables [1], y por esto algunos, atendiendo al órden lógico más que al sistema pedagógico, proponen que se empiece el estudio de la ciencia de la cantidad por la concepción de Leibnitz.

He de repetirlo por última vez: contra la repugnancia que los empíricos han manifestado en diversas épocas al empleo del infinito en la Matemática, puede decirse que predomina hoy la idea opuesta, y es que no puede darse un solo paso en el exámen racional de dicha ciencia sin tropezar con la idea del infinito, bajo una ú otra forma. Así lo dice frecuentemente en sus diversas obras un matemático muy de moda, para los innovadores especialmente, hace unos cuantos años, y al cual no puede negarse, sin notoria injusticia, un sello de originalidad y rasgos

---

[1] El Diccionario de la Real Academia Española, en su última y muy mejorada edición, no trae la definición de este adjetivo, ni la de su opuesto, como tampoco la del sustantivo comensurabilidad ni la de su contrario.

En la práctica se usa por muchos literatos distinguidos la voz *incomensurable* como sinónima de *infinitamente grande*, y pudiera citar varios textos. Por ejemplo, dice recientemente uno de aquellos..... «ni aun siendo incomensurable la piedad divina bastará para.. ..»

Lo infinitamente grande, como lo infinitamente pequeño, es incomensurable; pero no todo lo incomensurable es infinitamente grande, aunque siempre puede considerarse engendrado por lo infinitamente pequeño, y solo se explica bien con su auxilio.

de profundo talento: me refiero á Wronski, el cual afirma y repite que el infinito es no solo un instrumento de investigación matemática, sino también la más importante de las verdades de esta ciencia, de suerte que esta no es posible sino por el auxilio del infinito.

Y no se crea que por dar una buena base en punto á los principios fundamentales y á las capitales ideas de esta, como de otras ciencias, se pierde en la enseñanza dentro de las escuelas tiempo alguno, pues vale más esto y exponer con claridad y fijeza los principios, que fatigar la atención de los alumnos con muchas cuestiones. La causa de la frecuencia con que suelen borrarse del recuerdo de éstos muchos asuntos cursados en las aulas, consiste precisamente en haber encomendado más á la memoria que al entendimiento los elementos cardinales.

Antes de concluir esta concisa y desaliñada contestación, que en vuestro nombre, aunque bajo mi responsabilidad científica, señores Académicos, estoy dando al discurso del Sr. Archilla, permitidme una ligera aplicación de esto que acabo de indicar, relativa á la enseñanza de los Cálculos en nuestro país. Notad, á este propósito, lo que ocurre en la práctica: el ingeniero militar, dedicado á sus ocupaciones en los regimientos del arma, y aun en la mayor parte de sus oficinas técnicas; el de caminos, consagrado al servicio de las obras públicas en las provincias, ó á las divisiones de ferrocarriles; el de minas, entregado á la metalurgia ó al laboreo de los elementos naturales; el mecánico, dentro de las fábricas ó en empresas industriales de diversa clase, al cabo de varios años de haber salido de los centros docentes en que estudiaron con lucimiento la asignatura de Cálculos, confiesan sin rubor que han olvidado las integrales inmediatas más sencillas; lo cual consiste en que acumularon demasiadas cuestiones, que no son de interés relativo para los hombres que se han de dedicar en su día á profesiones teórico-prácticas.

Cierto es que algunas disquisiciones son precisas para la Mecánica y para otras asignaturas, y además queda siempre de toda investigación eminentemente teórica, en la inteligencia de quien la comprendió, un *substratum* provechoso y útil; pero es innegable que á las veces se abusa de la superposición de teorías en perjuicio de la solidez de los conocimientos. Quédense en buen hora estos desarrollos especulativos para los que han de consagrarse á investigaciones científicas ó á la enseñanza, pero no para los que miran ante todo á los problemas de la aplicación.[1] Y no pretendo ahora sacar las consecuencias que pudiera de este razonamiento para la mejor organización de la enseñanza oficial en nuestros días.

No hay cosa más bella en las Matemáticas que el Análisis infinitesimal. Conocer la naturaleza y la clase de las expresiones cuantitativas, reduciéndolas á extremo tal que quede allí lo esencial y desaparezcan los adornos y las superfetaciones, es conocer el esqueleto del cuerpo matemático.

De este modo pueden compararse mejor las formas cuantitativas, y establecerse las relaciones fundamentales, base de la verdadera teoría. Si no se encuentra en esta rama de las Matemáticas aquella concatenación lógica que subyuga el espíritu, como sucede en la Geometría, tiene, en cambio, menos aridez que el estudio del Algebra, y se abren á la inteligencia unos

---

[1] M. Sonnet, autoridad irrecusable, dice en el prefacio de su obra de Cálculos, editada en 1870, lo siguiente, según su traducción literal: «El Análisis infinitesimal es una ciencia muy extensa y los autores que han tratado esta materia le consagran dos, y á veces tres gruesos volúmenes. Pero una parte muy grande de esta ciencia no tiene sino un interés puramente teórico, y queda sin aplicación en las cuestiones usuales que los ingenieros tienen que resolver. Las reglas de la diferenciación, el cálculo de las cuadraturas, la integración de las ecuaciones diferenciales más sencillas, y algunas aplicaciones geométricas consagradas por el uso, es todo lo que se necesita conocer para abordar el estudio de la Mecánica industrial ó el de la Estabilidad de las Construcciones.»

horizontes tan vastos en sus métodos, y de tan gran generalidad en sus aplicaciones inmediatas, que surge la idea de belleza, propia de las ciencias, tanto como de las artes, siempre que se las muestra en sus aspectos armónicos; tarea reservada al profesor que desea no limitarse á la rutina, y con la cual consigue estimular y afirmar el celo de sus discípulos.

Allá en las alturas de la Metafísica, en las nebulosidades de la razón, donde apenas se vislumbra la verdad por los genios, es cosa difícil marchar con seguro paso, y este es el terreno de los fundamentos del Análisis infinitesimal. Si cabe aquilatar y cotejar las investigaciones del saber humano, puede decirse que una sola afirmación, probada en tan elevados dominios, vale tanto como el conjunto de muchas en otros órdenes del conocimiento. De aquí el mérito de nuestro nuevo consocio y la esperanza que aún nos brindan sus poderosos recursos de investigación para animarle á que continúe por tan difíciles y escabrosos senderos.

La verdadera ciencia no consiste en saber muchas cosas, sino en organizar su conocimiento de modo que se sinteticen en principios. No basta acumular hechos, ni siquiera concordarlos en leyes inductivas; hay que fundir estas en otras racionales, cada vez más comprensivas en cantidad y más sencillas en calidad. La luz viene de lo alto, y uno sólo de sus rayos ilumina á cuantos se agitan y trabajan en inferiores regiones. Tal ha sido la marcha del Cálculo infinitesimal, y así se ha organizado como ciencia madre dentro de las Matemáticas, y no otra es la tarea constante del saber humano, en cualquier linage de estudios, sin que jamás le sea dado llegar á la visión total y simplicísima, reservada á la Inteligencia divina.—He dicho.