

**REAL ACADEMIA DE CIENCIAS  
EXACTAS, FISICAS Y NATURALES**

---

**Nudos, cristales y números:  
Aspectos de la topología  
de baja dimensión**

**DISCURSO**

LEIDO EN EL ACTO DE SU RECEPCION

POR EL

**EXCMO. SR. D. JOSE MARIA MONTESINOS  
AMILIBIA**

Y

**CONTESTACION**

DEL

**EXCMO. SR. D. JOSE J. ETAYO MIQUEO**

EL DIA 7 DE NOVIEMBRE DE 1990



**MADRID**

DOMICILIO DE LA ACADEMIA:

**VALVERDE, 22 — TELEFONO 521 25 29**

**1990**

*Depósito Legal: M. 38.530 - 1990*

---

*REALIGRAF, S. A. - Burgos, 12 - 28039 Madrid*

**D I S C U R S O**  
del  
**EXCMO. SR. D. JOSE MARIA MONTESINOS AMILIBIA**

**tema:**

**NUDOS, CRISTALES Y NUMEROS:  
ASPECTOS DE LA TOPOLOGIA DE BAJA DIMENSION.**

Excmo. Sr. Presidente,  
Excmos. Sres. Académicos,  
Señoras, señores:

Al comenzar mi discurso, debo ante todo agradecer profundamente a los miembros de esta corporación, dedicada al cultivo de las ciencias, el haberme elegido para compartir con ellos sus tareas científicas.

Siguiendo la tradición de la Academia, me corresponde hacer el panegírico de mi ilustre predecesor, **Federico Goded Echeverría**. Como no le conocí personalmente, resumiré las entrañables palabras que sobre él pronunció el Excmo. Sr. Académico D. **Alberto Dou Mas de Xexás** el día de la recepción de aquél en la Academia, el 2 de Junio de 1971.

**Federico Goded Echeverría** nació en Madrid en el año 1917, terminando su carrera de Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos en el año 1944. Inmediatamente comenzó sus investigaciones, que se desarrollaron principalmente en los campos de la Mecánica de los medios continuos y de la Ingeniería Nuclear, en la que alcanzó renombre internacional. Le fue ofrecida la Cátedra de Ingeniería Nuclear de la Universidad norteamericana de Notre Dame, pero no aceptó la oferta y siguió desarrollando sus tareas científicas y docentes en su Cátedra de Técnicas Nucleares de la Escuela de Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos de Madrid.

Pasó **Federico Goded Echeverría** largas temporadas en centros de investigación extranjeros, principalmente en Francia, Inglaterra y Estados Unidos; y dedicó la última parte de su vida científica al cultivo de la mecánica cuántica y a la publicación de varios libros especializados. Como dice de él **Alberto Dou Mas de Xexás**, "no puede menos de causar asombro la amplitud de la labor realizada por Goded; la extraordinaria riqueza de conocimientos no concentrados alrededor de un solo tema ni siquiera alrededor de una sola disciplina". Sirva esta frase como homenaje a su labor científica.

Todos aquellos con los que he hablado y que conocieron

personalmente a **Federico Goded Echeverría** coinciden en señalar su talante humano, sencillo, humilde, junto con una penetrante perspicacia. Repitiendo sus propias palabras en honor de **D. Ricardo San Juan Llosá**, deseo que nuestro país nunca deje de producir hombres como **D. Federico Goded Echeverría**.

## NUDOS, CRISTALES Y NUMEROS: ASPECTOS DE LA TOPOLOGIA DE BAJA DIMENSION.

Pronunciar un discurso, para una ocasión como ésta, no parece tarea fácil, pues es necesario encontrar el balance justo entre lo aceptable y lo tolerable. Pero las ciencias que se cultivan en esta Academia tienen entre sí muchas afinidades, lo cual da pie a tratar de exponer aquí algunas de ellas que me parecen de especial belleza e interés.

El hilo conductor será la *Topología de dimensión baja*, ciencia que estudia nudos y variedades de dimensiones inferiores a cinco. Este nombre, Topología de dimensión baja, se empieza a utilizar en congresos y reuniones científicas a finales de la década de los setenta. Pero no pensemos que empezó su andadura en esos años. Fue ya cultivada por figuras tan conocidas e importantes como **Euler**, **Gauß**, **Riemann**, **Klein** y **Poincaré**; y por muchos otros durante este siglo. Sin embargo, fue en el año 1976 cuando esta nueva ciencia experimentó un notable desarrollo, si no una completa revolución. Un matemático norteamericano, **W. Thurston**, de formación geómetra-diferencial, comenzó a emplear métodos geométricos que proporcionaron nuevo impulso a la Topología de dimensión baja. Quiero hablar hoy aquí de estos nuevos métodos e ideas.

### La Teoría de Nudos.

Comenzaremos con un rápido bosquejo de la teoría de nudos y de la teoría de variedades.

Un nudo es una curva en el espacio, cerrada y sin puntos dobles. Suele suponerse, para evitar la posibilidad de anudamientos infinitos, que la curva es además diferenciable. Por tanto un nudo es una abstracción de una cuerda cerrada y anudada que la reduce a una línea.

Este concepto es muy antiguo. Existe una cultura del nudo muy desarrollada que ha dado nombre específico a muchos de ellos. Esto entraña el logro de una abstracción topológica. En efecto, el nombre se da al nudo independientemente del tamaño, tensión u otras propiedades de la cuerda; sólo depende del anudamiento, que es un concepto topológico.

Este fenómeno es paralelo, y probablemente anterior, al concepto análogo de número. Aquí también se realiza una abstracción, esta vez sobre una colección de cosas.

Pero ambos conceptos difieren profundamente. Uno es cualitativo, el otro es cuantitativo. Por ello, el concepto matemático de número se adelantó en varios milenios al concepto matemático de nudo. La entrada de éste en las matemáticas siguió a un desarrollo más y más abstracto de la geometría. Este proceso destiló, finalmente, de las figuras lo que hoy llamamos propiedades topológicas. Como lo que individúa a un nudo es su naturaleza topológica, no nos puede extrañar que hasta el siglo pasado no se extrajera de un nudo un objeto de naturaleza matemática. Hoy sabemos que los nudos ocupan con respecto a la topología de variedades un lugar primordial. Así, muchas cuestiones de topología se reducen en último extremo a propiedades de nudos. En este sentido, su estructura topológica expresa de manera concisa y misteriosa fenómenos topológicos que les son aparentemente muy lejanos.

Más interesante todavía. En el desarrollo matemático de los nudos, surgen problemas de la teoría de números, muy profundos. Nudos y números están pues íntimamente relacionados: otra prueba de la asombrosa unidad de la Matemática, que en último extremo no hace sino reflejar la inabarcable simplicidad y grandeza de Dios.

Fue Gauß quien obtuvo el primer resultado de la teoría de sistemas de nudos o teoría de enlaces. Además impulsó el estudio de esta teoría, que prosiguió su discípulo Listing, el primero que utilizó la palabra Topología en este contexto. Pero la teoría de nudos y enlaces se ha desarrollado principalmente en este siglo: en Alemania hasta la segunda guerra mundial, y después también en Estados Unidos, Inglaterra y otros países.

## La Teoría de Variedades.

El concepto de variedad entró en matemáticas de la mano del concepto de superficie. Hasta **Gauß**, una superficie era un lugar de puntos del espacio que satisfacen cierta ecuación. **Gauß** fue el primero que vio una superficie como un lugar de puntos del espacio, parametrizado por puntos del plano. Esta primera etapa de abstracción le ayudó a descubrir que la curvatura total es una propiedad intrínseca de la superficie, abriendo así camino a la generalización de **Riemann**. La aportación de este matemático es doble. En su tesis doctoral<sup>(1)</sup> introdujo las ahora llamadas superficies de **Riemann**. Claramente entendió que debían ser estudiadas con los métodos del *Analysis Situs*, contribuyendo de este modo a sentar las bases de lo que luego, en las manos de **Poincaré**, comenzaron a ser las Topologías combinatoria y algebraica. En segundo lugar, **Riemann**, tomando el hilo de las ideas de **Gauß**, estableció los fundamentos de la geometría **Riemanniana** moderna; lo que implica una idea clara del concepto de variedad  $n$ -dimensional<sup>(2)</sup>. El concepto moderno de superficie de **Riemann** (y el de variedad) aparece por primera vez en el año 1913, en el libro de **H. Weyl** "El concepto de superficie de **Riemann**".

El proceso geométrico que finalmente condujo a la clasificación de superficies cerradas familiarizó a los matemáticos de finales del siglo pasado y comienzos de éste con la imagen de una superficie como un polígono con lados identificados. Por otro lado, la noción inicial de superficie de **Riemann** lleva consigo el concepto de lo que luego se llamó *cubierta ramificada*. De modo que la identificación de lados en polígonos y las cubiertas ramificadas son los procedimientos de construcción de superficies que ellos utilizaban.

De este bosquejo histórico me interesa únicamente resaltar dos aspectos del proceso de abstracción que condujo al concepto de variedad. Uno fue el paso de la dimensión dos a dimensiones arbitrariamente altas. El otro consistió en despojar a la superficie de su geometría, estudiando de ella tan sólo sus propiedades topológicas. **Riemann** se vio abocado a ello, debido al proceso combinatorio —cortado y pegado de varias copias del plano de **Gauß**—

---

(1) "Fundamentos para una teoría general de funciones de variable compleja" (1851).

(2) "Sobre las hipótesis que sirven de fundamento a la Geometría" (1854).



que empleó para la construcción de las superficies que llevan su nombre. Todas estas ideas llegaron hasta **Poincaré**, quien poseyó por tanto un concepto moderno de variedad, en sus versiones combinatoria y diferenciable.

## Las Variedades en sus Comienzos.

Al proceso de despojar a una superficie de su geometría siguió el de geometrizarla. La influencia de los trabajos de **Riemann**, **Helmholtz**, **Lie**, **Killing** condujo a demostrar que toda superficie cerrada se obtiene como cociente por un grupo de movimientos sin puntos fijos del plano, en alguna de sus tres formas fundamentales (planos esférico, euclídeo e hiperbólico). Esto equivale a afirmar que toda superficie cerrada posee una métrica **Riemanniana** de curvatura constante (positiva, cero, o negativa). Por *geometrizar* una superficie entiendo el asignarle una de estas geometrías (esférica, euclídea o hiperbólica). Estos resultados marcan, pues, la primera etapa de geometrización de la Topología.

El estudio de las variedades cerradas, de dimensión tres que llamaré en lo que sigue simplemente "variedades", siguió un camino similar pero más lento. Fue iniciado por **Dyck** y desarrollado por **Poincaré** paralelamente a sus estudios del *Analysis situs*. El y su contemporáneo **Heegaard** descubrieron un modo de construir todas las variedades. Es el procedimiento combinatorio que llamamos ahora el diagrama de **Heegaard**. Empleando este diagrama, **Poincaré** construyó la variedad que lleva su nombre. Se distingue por tener la homotopía de una esfera tridimensional sin serlo. La distinción con la esfera la logró **Poincaré** definiendo un nuevo invariante, el grupo fundamental, y calculándolo para la variedad que lleva su nombre. Hoy sabemos que la variedad de **Poincaré** es el dominio de discontinuidad de un grupo finito de isometrías de la esfera tridimensional. Por tanto esta variedad es geometrizable con la geometría esférica.

**Heegaard** también imaginó otro procedimiento de construcción de 3-variedades: las cubiertas ramificadas sobre nudos y enlaces de la esfera. Más tarde, **Dehn** definió el concepto de cirugía en un enlace de la esfera (y por ejemplo recobró de este modo la variedad de **Poincaré**).

Estas construcciones y métodos clásicos han visto un renacer en los últimos años, y, ya en combinación con los métodos de **Thurston**, ya por sí

sólos, han servido al logro de importantes resultados.

## El libro de Seifert y Threlfall.

En 1934, **Seifert** y **Threlfall** publicaron su libro "Lecciones de Topología" uno de los mejores nunca escritos sobre esta materia. Es interesantísimo leer allí la situación de la Topología de variedades en aquella época. Es claro que el problema de la clasificación de variedades se vislumbraba como una tarea formidable, muy por encima de las posibilidades de entonces. Por eso sólo prestan atención a métodos de construir variedades. Además del diagrama de **Heegaard** y de la cirugía de **Dehn**, mencionan dos métodos más: el de las *formas espaciales* y el de los *espacios fibrados*. Estos dos métodos constituyen el meollo de nuestro discurso. He aquí lo que **Seifert** y **Threlfall** dicen sobre el problema de las *formas espaciales*:

"Por una forma espacial se entiende una variedad  $n$ -dimensional a la que se imprime primeramente una cierta métrica, esférica, euclídea o hiperbólica, es decir, que todo punto posea un entorno aplicable congruentemente sobre una esfera maciza de una de las tres formas métricas fundamentales —espacio  $n$ -dimensional esférico, espacio euclídeo o hiperbólico— (condición de homogeneidad de la métrica). (...) Ahora puede verse que, en dos dimensiones, toda superficie cerrada aparece como dominio de discontinuidad de un grupo de movimientos sin puntos fijos de una de las tres formas métricas fundamentales (superficie esférica, y planos euclídeo e hiperbólico). (...) No vale lo análogo en tres dimensiones, y un ejemplo de ello lo tenemos en el producto topológico de la superficie esférica y la circunferencia. Sin embargo, los dominios de discontinuidad en tres dimensiones ofrecen al menos un abundante material de ejemplos. (...) Los grupos de movimientos de los espacios esférico y euclídeo con dominios finitos de discontinuidad se pueden enumerar por completo, (...) Los dominios de discontinuidad del espacio hiperbólico son menos conocidos; pueden verse en **Löbell** y **Weber-Seifert**."

Como vemos, **Seifert** y **Threlfall** mencionaron las variedades que son cociente del espacio euclídeo, (esférico, hiperbólico) mediante la acción propia y discontinua de un grupo de movimientos. Este cociente es lo que llaman *dominio de discontinuidad*. Claro es que estas variedades poseen la geometría correspondiente. Como ellos indican, se habían ya enumerado todas las

variedades con geometría esférica y euclídea, pero sobre las variedades hiperbólicas sólo tienen conocimiento de los ejemplos de Löbell y el de Weber y Seifert (el docedaedro hiperbólico). ¿Cómo habrían reaccionado de saber que, cincuenta y cinco años después, la topología y geometría de las variedades hiperbólicas ocuparían la casi exclusiva atención de los topólogos geométricos? Antes de pasar al otro método de construcción de variedades, remacharé que, en su libro, Seifert y Threlfall sólo concedían importancia a tres geometrías, y que por entonces la geometría hiperbólica no pasaba de ser una curiosidad.

Escuchen ahora qué dicen estos autores sobre el segundo procedimiento de construir variedades, el método de los espacios fibrados:

"Para el estudio de los espacios fibrados dan ocasión los dominios de discontinuidad de los grupos de movimientos esféricos, así como los espacios compuestos por elementos de línea, o direcciones, de superficies cerradas (...), al aparecer provistos de una determinada fibrición. Las fibras de los dominios de discontinuidad son las trayectorias de los grupos continuos de movimientos de la 3-esfera unitaria (llamada también hiperesfera); en los espacios de direcciones, una fibra queda constituida por las direcciones que pasan por un punto determinado. Un espacio fibrado es ahora una variedad tridimensional, cuyos puntos aparecen distribuidos sobre  $\infty^2$  curvas cerradas, las llamadas *fibras*; por cada punto pasa, precisamente, una fibra, y cada fibra  $H$  posee un "entorno fibrado", esto es, un subconjunto tal de fibras que, conteniendo a  $H$ , pueda aplicarse, conservando las fibras, sobre un "anillo fibrado macizo", transformándose  $H$  en la fibra central. Un anillo fibrado macizo es un cilindro circular recto del espacio euclídeo, fibrado por las rectas paralelas al eje y cuyas bases inferior y superior se han llevado a coincidir mediante un movimiento helicoidal de ángulo racional. (...) Hay variedades no fibrales en modo alguno, pues la fibrabilidad va ligada a una cierta propiedad necesaria del grupo fundamental. Por ejemplo, ni las formas espaciales hiperbólicas cerradas, ni la casi totalidad de las sumas topológicas (...) son fibrales."

Los espacios fibrados de los que aquí hablan no son los fibrados localmente triviales de hoy en día, pues poseen fibras excepcionales, descritas perfectamente en la cita anterior. Estas variedades se conocen actualmente con el nombre de variedades de Seifert.

## La Conjetura de Thurston.

**Seifert** explícitamente indica que las variedades hiperbólicas no son fibrables. ¿Qué hubiera dicho **Seifert** si hubiera oído que la topología de variedades es substancialmente la topología de las variedades hiperbólicas y la de las variedades que llevan su nombre? Pues esta es precisamente la maravillosa intuición de **Thurston** que pasará a describir enseguida, no sin antes rendir homenaje a una serie de matemáticos europeos y americanos sin los cuales no se hubiera podido alcanzar la madurez necesaria que permitió a **Thurston** enunciar sus importantes conjeturas.

En efecto **Johannson** (discípulo de **Waldhausen** en la mejor tradición alemana de **Dehn**, **Reidemeister**, **Kneser** y **Haken**), y los matemáticos americanos **Jaco** y **Shalen**, en colaboración, obtuvieron independientemente el mismo resultado. A saber, que una variedad puede descomponerse de modo único en piezas. Las piezas o bien son variedades de **Seifert**, o son simples. Una pieza es simple cuando sus únicos toros esenciales son fronterizos. De este modo redujeron el estudio de las variedades al de estas piezas. Este resultado marca el clímax de los métodos combinatorios utilizados sistemáticamente desde el principio del estudio de las variedades hasta 1976.

A partir de ese año, **Thurston**, en la Universidad de Princeton, imparte sus famosas clases, recogidas en el trabajo titulado "La Geometría y Topología de 3-variedades". Allí sienta las bases de la segunda etapa de geometrización de la topología. Geómetra genial, lleva el estudio de las variedades hiperbólicas, que antes constituían sólo una curiosidad, a ocupar un papel central en la topología. Sus métodos revelan el carácter de los verdaderos genios; adelantándose a su tiempo, sin las herramientas necesarias todavía por descubrir, irrumpe vigorosamente, llevado de su intuición, y admira a todos con sus convincentes pero no rigurosos argumentos. Una pléyade de discípulos y colegas veteranos batallan desde entonces, para entender y desarrollar las ideas del maestro.

¿Qué imaginó **Thurston**? Primeramente, amplió el número de geometrías de tres a ocho, debilitando ligeramente los requerimientos que antes nos describieron **Seifert** y **Threlfall**. En segundo lugar, conjeturó que toda variedad irreducible por el método de **Jaco-Shalen** y **Johannson**, admite una de esas ocho geometrías y sólo una.

## Las Ocho Geometrías.

Ahora bien, siete de las ocho geometrías son perfectamente conocidas. En efecto, estas siete geometrías producen variedades de Seifert con una sola excepción, casi trivial, a saber: los fibrados sobre el círculo con fibra un toro y monodromía tipo Anosov, que están clasificados por una matriz entera  $2 \times 2$ . Solamente queda una geometría interesante, por desconocida: la geometría hiperbólica. Por eso, la investigación está actualmente concentrada en el estudio de las variedades hiperbólicas.

La geometrización de las variedades tiene además ventajas sobre la geometrización de las superficies. En efecto, mientras una superficie puede admitir infinitas estructuras de variedad hiperbólica, probó Mostow que una variedad sólo puede admitir una. Los invariantes métricos de ésta son por tanto, y automáticamente, invariantes topológicos de aquélla. El volumen de la variedad, por ejemplo, es un invariante topológico.

Otro aspecto de la teoría es que muchos nudos son hiperbólicos. Quiere esto decir que su espacio complementario admite una única métrica Riemanniana de curvatura *constante* negativa, completa y de volumen finito. Este es un invariante que ha sido calculado para muchos nudos. Dos nudos de distinto volumen son necesariamente distintos, y esto ilustra maravillosamente la táctica del proceso de geometrización: éste será interesante si es único, cosa que no ocurre en el caso bidimensional.

Ciertamente, Thurston, ni nadie, ha sido capaz todavía de probar su conjetura en general, pero el efecto de las ideas de Thurston es evidente. Liberó a la topología del estancamiento en que se encontraba en el año 1976, e impulsó el estudio de las variedades hiperbólicas, señalando su papel central en la Topología, algo inimaginable cuando Seifert y Threlfall escribieron su libro en 1934.

Interesa notar que la validez de la conjetura de Thurston implica la respuesta afirmativa a la llamada conjetura de Poincaré. Este es uno de los problemas más famosos y más difíciles de las Matemáticas. Ha resistido el esfuerzo de muchos matemáticos —y entre ellos algunos de los mejores— durante casi el siglo que tiene ya de existencia. Pero no discutiré aquí este problema que llevaría por sí mismo varias horas.

Como contrapunto a este bosquejo histórico y antes de entrar en la parte descriptiva de este discurso, conviene indicar que hoy en día subsisten, junto con el método de **Thurston**, otros más. El que ha producido resultados más espectaculares es el puramente combinatorio introducido por **Scharlemann** en la teoría de variedades y por **Jones** en la teoría de nudos. La importancia del método de **Jones** está clara, pero su significado, puesto en relación con la física muy recientemente, no parece que pueda desvelarse en un futuro próximo. **Culler**, **Morgan** y **Shalen** han utilizado resultados de geometría algebraica para obtener importantes teoremas sobre variedades y nudos. Estos métodos, junto con el de **Scharlemann**, han sido utilizados por **Culler**, **Gordon**, **Luecke** y **Shalen** en la investigación de la propiedad  $P$  y en el problema relacionado de caracterizar un nudo por su espacio exterior.

## Calidoscopios.

La geometrización de **Thurston** se entiende con más claridad en el contexto de los calidoscopios (*orbifolds*). Este es un concepto que generaliza el de variedad. Ya hemos visto que la idea de variedad de **Riemann** es la de un espacio localmente euclídeo (y por tanto igual en las cercanías de todos sus puntos), pero susceptible de "cerrar espacio" de varias maneras posibles llamadas, muy propiamente pues, variedades. Con **Thurston**, este concepto sufre un sutil cambio al que sin embargo yo adscribo importantes consecuencias. Para **Thurston**, una variedad es el dominio de discontinuidad de un grupo que actúa sin puntos fijos, propia y discontinuamente en un espacio dotado de cierta métrica. Este espacio es una de las ocho geometrías de **Thurston**, a saber: esférica, euclídea, hiperbólica, producto de la esfera de dimensión dos por la recta real, producto del plano hiperbólico por la recta real, cubierta universal del espacio unitario tangente al plano hiperbólico, grupo de **Heisenberg** y geometría nilpotente. Un grupo que actúa en uno de estos espacios propia y discontinuamente y *sin puntos fijos* da una variedad. ¿Qué ocurre si la acción tiene puntos fijos? El dominio de discontinuidad, aunque conocido y trabajado desde antiguo en casos particulares, no se concebía como poseedor de una estructura asimilable a la de variedad. Otra aportación de **Thurston** consistió en estructurar los dominios de discontinuidad para grupos con puntos fijos. Les dio el nombre de *orbifolds*, que yo traduzco por calidoscopio por razones que pronto aparecerán claras. Este concepto fue en realidad un redescubrimiento, pues **Satake** lo había considerado y estudiado con anterioridad en un contexto algo diferente.

Un calidoscopio es pues un artificio que contiene información sobre un grupo que actúa propia y discontinuamente, en general *con puntos fijos*, en una variedad. Si la acción no tiene puntos fijos, el calidoscopio (que es una especie de variedad singular) carece de singularidad y simplemente es una variedad. En la siguiente parte de este discurso, más descriptiva, veremos de aclarar estos conceptos.

## La Cristalografía Geométrica.

Para dar una idea, siquiera imperfecta, de lo que Thurston ha imaginado y en parte demostrado, echaremos una ojeada al mundo de la cristalografía geométrica. Escriben Gluske y Trueblood que "la característica fundamental del estado cristalino es un *alto grado de orden interno*, al menos en teoría; en otras palabras, los objetos (moléculas, átomos, o iones) de los que está compuesto el cristal están situados de una manera regular, que se repite una y otra vez en todas direcciones"<sup>(3)</sup>. La observación de las facetas de un cristal, de granate o piritá por ejemplo, da una indicación de que eso ciertamente ocurre. El empleo de los rayos X ha confirmado brillantemente tal hipótesis. A nosotros no nos interesa ahora entender los porqués de tales distribuciones simétricas de átomos, sino averiguar cuántas posibilidades de ordenamientos simétricos hay. El problema análogo en el plano es averiguar cuántos ordenamientos simétricos pueden dibujarse en el plano euclídeo. Basta mirar a través de un calidoscopio para comprender que hay infinitos. Pero, naturalmente, todos los motivos obtenidos con un mismo calidoscopio siguen la misma ley de formación, o dicho técnicamente, poseen el mismo grupo de simetría. Por eso, el problema interesante es el de averiguar cuántos y cuáles son estos grupos de simetría. Esta es la pregunta fundamental de la cristalografía *n*-dimensional. En dimensión dos fue respondida experimentalmente (no demostrada) por los artistas nazaries que decoraron la Alhambra entre los siglos XIII y XV. Los diecisiete grupos planos posibles aparecen representados en la Alhambra en motivos ornamentales cuya forma y colorido son difícilmente superables. En dimensión tres —la dimensión de los cristales reales— la

---

<sup>(3)</sup>J. P. Gluske y K. N. Trueblood: "Crystal structure analysis". Oxford. U. Press. 2<sup>a</sup> edición (1985).

pregunta fue contestada casi simultáneamente por tres cristalógrafos de escuelas diferentes <sup>(4)</sup>. Sabemos ahora que hay 230 grupos cristalográficos, perfectamente estudiados, y la disposición interna de átomos de una materia cristalina cualquiera sigue la ley fijada por uno de esos 230 grupos. La determinación de estos grupos es comparable al éxito alcanzado por los astrónomos que predijeron la existencia de Urano.

Pero las investigaciones matemáticas casi siempre tienen una motivación interna, aunque el origen remoto de los conceptos y definiciones sea el mundo real sensible. Por eso no es de extrañar que incluso respondida, como hemos visto, la pregunta fundamental de la cristalografía en las dimensiones dos y tres, el matemático no descanse en su búsqueda, y siga investigando el problema en una dimensión arbitraria. **Bieberbach** demostró que el número de grupos cristalográficos de una dimensión dada es finito. Hoy sabemos cuántos y, en cierta medida, cómo son los grupos 4-dimensionales; también el problema se sigue investigando en general, pero más importante aún, la pregunta fundamental de la cristalografía puede ampliarse y abarcar al estudio de grupos que actúan cristalográficamente en espacios no euclídeos.

No adelantemos esta generalización ahora, y ciñámonos al caso euclídeo tridimensional. ¿Qué estructura poseen estos 230 grupos de que estamos hablando? Tomemos uno cualquiera de estos grupos y consideremos sus traslaciones. Estas consisten en ciertos desplazamientos que aplicados a la malla cristalina la superponen consigo misma. Forman un subgrupo constituido por los vectores de una red o malla tridimensional. El cociente del grupo cristalográfico por su subgrupo de traslaciones resulta ser un subgrupo finito del grupo ortogonal tridimensional, que llamaremos *grupo de holonomía* del cristal. Es fácil descubrir cuál es el significado geométrico de tal grupo. Si de la materia cristalina estudiada, el granate por ejemplo, tomamos varios cristales del mismo tipo (trapezoidros, por ejemplo), veremos que el desarrollo de sus correspondientes caras no es el mismo. Parece como si el cristal hubiera crecido en torno a un punto de condensación y que este germen de cristal creciera de modo más rápido en unas direcciones que en otras. El resultado es que algunas de sus caras son muy pequeñas o incluso están ausentes, al haber sido subsumidas por caras vecinas. Así que sólo en casos excepcionales, muy

---

<sup>(4)</sup>**Fedorov** (1890), Rusia; **Schoenflies** (1890), Alemania; **Barlow**(1894), Inglaterra.



apreciados por los coleccionistas, aparece un cristal perfectamente simétrico, cuyo grupo de simetría es un grupo finito de rotaciones. En los casos en que tal perfección no se logra, la simetría del cristal es la misma, pero a menos de traslaciones; pues al girar una cara para superponerla con otra es necesario además trasladarla, para lograr la superposición. Así que el grupo de simetría interna del cristal se revela al exterior (en los cristales macroscópicos) a menos de traslaciones. Este es justamente el grupo de holonomía del cristal, que tratábamos de describir. Como sólo hay un número finito de éstos, por ser subgrupos finitos del grupo ortogonal y existir una restricción en los órdenes de las rotaciones (que sólo pueden ser 2,3,4, ó 6), las 230 clases aparecen al combinar las posibles mallas de vectores traslativos con los 32 grupos de holonomía posibles.

## Minerales y Nudos.

Hasta aquí, el desarrollo clásico de la cristalografía. Pero demos un paso adelante que nos conducirá al concepto de *caleidoscopio* y con ello al centro de las ideas de Thurston. Consideraremos el espacio cociente del espacio euclídeo bajo la acción de uno de esos 230 grupos cristalográficos. Tenemos, por ejemplo, el que gobierna la estructura interna del mineral llamado *ulmanita*, un compuesto de azufre, antimonio y níquel<sup>(5)</sup>. En este ejemplo, el espacio cociente es topológicamente la esfera tridimensional. Así que esta esfera es el resultado de plegar el espacio euclídeo sobre sí mismo conforme a las plegaduras determinadas por la acción del grupo de simetría de la *ulmanita*. En este proceso de plegado, hay ciertas líneas rectas que sirven de charnelas. Estas líneas son los ejes de las rotaciones del grupo. Al realizar el plegado y obtener la 3-esfera, estas líneas o charnelas (infinitas) se identifican entre sí y se proyectan sobre una única curva cerrada de la 3-esfera. Si visualizamos la 3-esfera como nuestro espacio euclídeo compactado con un punto del infinito, la curva cerrada imagen de las charnelas es una curva anudada. En el caso de la *ulmanita*, esta curva es el *nudo de Saboya*, bien conocido por todos sin necesidad de dibujarlo, pues es el nudo con forma de ocho que aparece en los cordones de las armas nobiliarias de arzobispos y cardenales, y que podemos ver

---

<sup>(5)</sup>NiSbS.

en las fachadas de muchos de nuestros más nobles edificios. Para los matemáticos este nudo está caracterizado por el mínimo número de cruces que pueden aparecer en una proyección plana del mismo; este número es precisamente cuatro.

Vemos pues que el grupo cristalográfico del mineral *ulmanita* y el *nudo de Saboya* están relacionados. Examinemos más de cerca la estructura de este nudo. Como el proceso de plegado del espacio euclídeo para dar la 3-esfera es biunívoco —un homeomorfismo local— fuera de las líneas de charnelas del plegado, el espacio exterior al nudo hereda una estructura euclídea en la que el nudo aparece como la colección de puntos singulares de la estructura. Es como si en un paisaje totalmente plano apareciese una cadena de montañas que destruye localmente la perfecta planura. Pues bien, sucede que toda la información sobre nuestro grupo cristalográfico de la *ulmanita* está encerrada en esta estructura euclídea singular que posee el *nudo de Saboya* (el espacio exterior, para ser precisos). A este objeto geométrico: 3-esfera junto con nudo y estructura euclídea singular, se le llama *calidoscopio euclídeo tridimensional*. Hay uno para cada uno de los 230 grupos cristalográficos.

En este contexto, la pregunta fundamental de la cristalografía tridimensional consiste en averiguar cómo son estos 230 calidoscopios. Es notable que esta pregunta sea —en principio— más fácil de contestar que la primitiva. Veamos el porqué. Consideremos, por ejemplo, los *anillos de Borromeo*, un enlace de tres nudos que representa la Santísima Trinidad. (Los círculos están dos a dos separados, pero el enlace entero no puede deshacerse.) Si uno descubre que los *anillos de Borromeo* son la singularidad de una estructura euclídea de la 3-esfera, deduce inmediatamente que tal estructura de calidoscopio euclídeo se obtiene como cociente de la acción de cierto grupo cristalográfico en el espacio euclídeo, pero no nos dice *a priori* cuál sea el grupo. Sin embargo, *es posible obtenerlo*, aunque mediante un proceso nada fácil. Esta información implícita o arcana encerrada en la estructura del calidoscopio euclídeo hace plausible mi afirmación anterior sobre la mayor facilidad del problema de la descripción de calidoscopios euclídeos, frente al de la descripción de todos los grupos cristalográficos euclídeos. Veamos este proceso en un ejemplo bidimensional.

Antes hemos hablado del *nudo de Saboya* contenido en la esfera de dimensión tres. Esta puede imaginarse como una esfera de radio infinito y por tanto podemos pensar que el espacio euclídeo difiere de ella en que le falta un punto a distancia infinita. La analogía con la dimensión dos es clara si

pensamos que un plano es una esfera bidimensional de radio infinito a la que le falta un punto (del infinito). Pues bien, tomemos una esfera bidimensional concreta, por ejemplo la superficie de un tetraedro regular. Esta es, topológicamente hablando, una esfera, que posee fuera de los vértices del tetraedro una geometría euclídea, o dicho más técnicamente, una estructura de variedad Riemanniana de curvatura constante cero. Los vértices del tetraedro son singulares con respecto a esta estructura, ya que el ángulo total en torno a un vértice del tetraedro es tres veces  $60^\circ$ , es decir, dos rectos, en lugar de los cuatro rectos que tendría si fuera un punto ordinario del plano euclídeo. Y en efecto, pueden realizarse sobre el tetraedro, privado de sus vértices, todas las operaciones que solemos hacer en geometría plana: trazado de rectas, medida de distancias y ángulos, etc. Por ejemplo, tomando un punto base en una cara del tetraedro, podemos fijar en él un hilo y trazar una geodésica sobre el tetraedro, enrollando el hilo sobre él. Al llegar el hilo a una arista, se prolonga sobre la cara adyacente mediante la regla de "ángulo de incidencia igual a ángulo de salida". Así, el hilo se podrá enrollar sin límite mientras no dé con uno de los vértices del tetraedro. Lo curioso es que al realizar este proceso, el hilo nunca se cruza consigo mismo. Esto da cuenta de la geometría fuera de los vértices. En torno a un vértice, la geometría está también controlada: es la de un cono de papel cuyo ángulo en el vértice es de dos rectos. Podemos pensar en nuestro tetraedro como en un calidoscopio bidimensional euclídeo.

En caso del calidoscopio euclídeo de dimensión tres determinado por el *nudo de Saboya*, el papel del tetraedro lo interpreta el espacio euclídeo con un punto en el infinito (ó 3-esfera); el de los vértices lo interpretan los puntos del *nudo de Saboya*. Fuera de éste hay geometría euclídea; en torno a él, la geometría podría describirse diciendo que un disco de papel "perpendicular" al nudo forma un cono de  $120^\circ$  con ápice en el nudo.

Siendo nuestro tetraedro un calidoscopio euclídeo plano, debe de existir un grupo cristalográfico plano asociado a él. Y en efecto, el tetraedro tiene suficiente "geometría" como para reconstruir tal grupo cristalográfico. Para verlo, supongamos que aplicamos pintura fresca de diversos colores sobre nuestro tetraedro de un modo totalmente irregular y asimétrico. Colocamos ahora una cara del tetraedro sobre el papel imprimiendo sobre éste los colores de tal cara. Fabricaremos un diseño coloreado simétrico en el papel al hacer rodar sobre éste el tetraedro. Pronto un área de papel tan grande como queramos habrá quedado cubierta de pintura. El diseño simétrico así obtenido posee un grupo de simetría, que es el grupo cristalográfico plano tal que, bajo su acción, el

plano euclídeo da como cociente el tetraedro original. Como corolario de esta construcción, vemos cómo el hilo enrollado sobre el tetraedro se desenrollará sobre el papel proporcionando una colección de líneas rectas en el plano. Dos cualesquiera de ellas estarán relacionadas entre sí por las traslaciones y rotaciones del grupo de simetría. Como las rotaciones de éste son de  $180^\circ$  (ángulo total en el vértice del tetraedro), deducimos que todas las rectas creadas al rodar el tetraedro sobre el plano son paralelas, y al no cortarse en el plano euclídeo tampoco pueden cortarse sobre el tetraedro.

Pues de modo totalmente análogo, la esfera en la que está nuestro *nudo de Saboya* puede desarrollarse sobre el espacio euclídeo. Al hacerlo se obtiene un motivo simétrico tridimensional cuyo grupo de simetría, el del mineral *ulmanita*, reproduce como cociente al *nudo de Saboya* en la 3-esfera. El nudo mismo da lugar en el espacio euclídeo a los ejes de rotación ternaria del grupo cristalográfico. El paralelismo entre el *nudo de Saboya* y el tetraedro es completo.

Entre estos 230 calidoscopios euclídeos hay cinco no singulares. Son pues cinco las variedades euclídeas que corresponden a los grupos cristalográficos que actúan sin puntos fijos. Hemos dicho antes que esas cinco variedades son fibrados de **Seifert**. Los restantes 225 calidoscopios euclídeos son singulares y, como **Bonahon** y **Siebenmann** han puesto de manifiesto, admiten —con alguna excepción— una estructura fibrada de **Seifert** singular. ¿Tiene esta fibración de **Seifert** así descubierta un significado mineralógico? ¿De qué modo se traduce en las propiedades del cristal? Son preguntas naturales, a las que sólo una colaboración estrecha entre cristalógrafos y matemáticos podría dar respuesta<sup>(6)</sup>. Como curiosidad, mencionaré que los cristales de los sistemas hexagonal y tetragonal tienen una fibración única. Los cristales del sistema ortorrómbico poseen tres fibraciones mutuamente ortogonales.

---

<sup>(6)</sup>No descarto que esta respuesta sea mineralógicamente obvia, pero aun así es interesante la pregunta.

## La Cristalografía Esférica.

Análogas consideraciones pueden hacerse con las restantes siete geometrías. Tomemos, por ejemplo, la geometría esférica. Para facilitar la comprensión pensemos más bien en el resultado de identificar puntos antipodales de la esfera, es decir, en el espacio proyectivo real  $P$ . Podemos visualizar  $P$  como el espacio euclídeo ordinario al que se le añade un punto del infinito por cada haz de rectas paralelas. Si un haz es una nube de meteoritos con trayectorias sensiblemente paralelas que entran en la atmósfera terrestre, el punto del infinito añadido correspondería al "punto de fuga" de la lluvia de estrellas, es decir, al punto ideal del que "parecen" diverger todas las estrellas fugaces. Las geodésicas de  $P$  son simplemente las rectas proyectivas. Estas son topológicamente círculos de longitud normalizada  $\pi$ . Al revés que en el caso del espacio euclídeo, cuyos movimientos son bien conocidos por todos, los movimientos en  $P$  son más difíciles de entender. Hay un tipo de movimiento, llamado corrimiento, que tiene la propiedad siguiente: la recta que junta un punto con su imagen corre sobre sí misma en una distancia  $\varphi$  (comprendida entre  $0$  y  $\pi$ ) y, a la vez, un plano que pase por tal recta gira bajo la acción del corrimiento en un ángulo de medida  $\varphi$ . Por tanto las trayectorias bajo la acción de una familia de corrimientos forman una congruencia de rectas (congruencia de Clifford), es decir, una descomposición de  $P$  en rectas disjuntas dos a dos. Esta congruencia puede visualizarse como las rectas a derecha que fibran un sistema coaxial de hiperboloides reglados de revolución. Un corrimiento a derechas desplaza el eje del sistema mientras hace avanzar y girar cada hiperboloide sobre sí mismo y cada recta sobre sí misma. Es pues una especie de movimiento helicoidal. Todo movimiento de  $P$  es la composición de dos corrimientos: uno a derechas, el otro a izquierdas. El grupo de corrimientos a derechas es isomorfo al grupo de rotaciones del espacio euclídeo. En efecto, un tal corrimiento está determinando por un eje y por el ángulo  $2\varphi$ . Fijados éstos, el eje determina la congruencia de Clifford a la que pertenece, y ésta se mueve sobre sí misma en la distancia  $\varphi$ .

Los grupos cristalográficos de  $P$  son necesariamente finitos y, como nos han dicho Seifert y Threlfall, son conocidos desde los años 30. Como ejemplo podemos ilustrar la construcción de uno de ellos. Tomemos un cubo esférico  $K$  centrado en el origen de  $P$  y con distancia esférica entre caras opuestas igual a un recto. Tomemos un corrimiento a derechas que mueva una cara del cubo sobre su cara opuesta. Como el desplazamiento es de  $90^\circ$ , el giro que

experimenta la cara es también de  $90^\circ$ , y por tanto el cubo avanza  $90^\circ$  y gira, creándose así un cubo  $K'$ . El cubo  $K$  y su imagen  $K'$  tienen en común dos caras opuestas, pero por lo demás  $K$  y  $K'$  son exteriores uno del otro. Esto, que sería impensable en nuestro espacio euclídeo ordinario, es ciertamente posible en  $\mathbf{P}$ . Basta imaginar que  $K'$  descansa sobre una cara de  $K$  y que, *pasando por puntos del infinito*, vuelve hasta descansar también sobre la cara opuesta de  $K$ . Hay otros dos pares de caras opuestas en  $K$  y por tanto otros dos corrimientos más. El grupo formado por la identidad y estos tres corrimientos es el grupo diédrico de orden cuatro o grupo de **Klein**. Este es un grupo cristalográfico esférico que actúa en  $\mathbf{P}$  sin puntos fijos, teselándolo en cuatro cubos. Su dominio de discontinuidad es un cubo con lados opuestos identificados mediante un giro de  $90^\circ$  que se llama *espacio cuaterniónico esférico*.

Si en vez de un cubo tomamos un dodecaedro esférico regular, sus 60 movimientos de simetría corresponden a 60 corrimientos de órdenes 2,3 y 5.  $\mathbf{P}$  queda teselado con 60 dodecaedros esféricos. El dominio de discontinuidad es un dodecaedro con caras opuestas identificadas por giros de  $\pi/5$ . Es la variedad que descubrió **Poincaré**, que como dijimos es una variedad esférica.

En este caso esférico, el número de calidoscopios es infinito aunque de modo natural aparecen agrupados en un número finito de familias perfectamente conocidas. Como sucede en el caso euclídeo, el problema aquí ha sido resuelto.

Valgan estas consideraciones como ejemplos de la riqueza geométrica que poseen dos de las ocho geometrías. Del resto no me voy a ocupar ahora, excepto de la geometría hiperbólica, la más interesante y rica de las ocho.

## El Espacio Hiperbólico.

Sobre el espacio hiperbólico hay una copiosa bibliografía y no parece posible decir nada nuevo sobre él. Aun a riesgo de abusar de la paciencia de muchos, digamos algo acerca de su estructura, y de los modelos que a lo largo de su breve historia se han empleado para probar su consistencia y para tener una imagen a la vez operativa y concreta.

El modelo de **Poincaré** del espacio hiperbólico  $\mathbf{H}^3$  lo constituyen

los puntos internos a una esfera situada en el espacio euclídeo. Llamaremos a tal esfera la esfera del infinito. El módulo de la velocidad de un móvil cuando pasa por un punto del modelo de **Poincaré** es el módulo medido euclídeamente, pero dividido por la distancia del punto a la esfera del infinito. El ángulo que forman dos vectores es el ángulo euclídeo. Así que si el punto está cerca de la esfera del infinito, la escala con que hay que mirar los acontecimientos infinitesimales en tal punto es muy grande. De un modo gráfico, imagínese que el modelo está lleno de un líquido cuyo índice de refracción crece con su distancia al centro. Un rayo de luz (una geodésica o línea recta) seguiría una trayectoria circular ortogonal a la esfera del infinito. Esta descripción del espacio hiperbólico puede hacerse aún más práctica si pensamos que la esfera del infinito es un plano (o esfera de radio infinito) y que los puntos del modelo son los situados encima de él. Las geodésicas en este caso son semicírculos perpendiculares al plano del infinito. Los planos (o superficies totalmente geodésicas) del espacio hiperbólico son las semiesferas perpendiculares al plano del infinito. Este modelo especial de **Poincaré** suele llamarse el modelo del semiespacio, y es muy útil, pues permite introducir en el estudio del espacio hiperbólico los números complejos y, de rechazo, métodos aritméticos. En efecto, si el plano del infinito del modelo se piensa como el plano de **Gauß** y, añadiéndole un punto del infinito, como la recta proyectiva compleja  $CP^1$  o esfera de **Riemann**, puede demostrarse que las isometrías del espacio hiperbólico son inducidas por las proyectividades (es decir, homografías y antihomografías) de la esfera de **Riemann**, de modo que el grupo de isometrías es en substancia un grupo de matrices  $2 \times 2$  complejas. Las homografías y antihomografías de  $CP^1$  son simplemente los difeomorfismos de  $CP^1$  que pasan círculos a círculos, y son conformes (y biholomorfas). El subgrupo que fija el punto del infinito pasa entonces rectas a rectas (por lo que es afín), y pasa círculos a círculos, y es por tanto el grupo de las semejanzas del plano. Deducimos así que la geometría de un haz de rectas paralelas (que comparten el mismo punto del infinito) del espacio hiperbólico es la geometría de las semejanzas del plano. Las superficies ortogonales a tal haz se llaman horisferas, y el subgrupo del grupo de semejanzas que fija una horisfera es el grupo euclídeo. Así que la geometría de la horisfera es la geometría del plano euclídeo; ¡un hecho que ya fue adelantado por **Gauß**!

Este modelo, que hemos definido como una variedad **Riemanniana** especial, distorsiona las rectas pero no los ángulos, y es muy útil en la práctica. Para pensar, es más adecuado el modelo de  $H^3$  de **Beltrami**, tan favorecido por **Klein** en sus investigaciones que lo llamaremos modelo de **Beltrami-Klein**. Al igual que en el modelo inicial de **Poincaré**, los puntos de  $H^3$

son los del interior de una esfera, o más generalmente, de una cuádrica tipo elipsoide, pero en el espacio proyectivo tridimensional en vez de en el espacio euclídeo. Las rectas o geodésicas del modelo son los segmentos de rectas interceptadas por la esfera. Los ángulos y distancias están aquí distorsionados. Una idea de la distorsión angular la da el hecho de que el haz de rectas perpendiculares a un plano dado pasa por el polo de este plano con respecto a la esfera. Este polo yace fuera de la esfera, es un *punto del ultrainfinito*, y como vemos tiene un significado geométrico preciso. Un haz de rectas que pasa por él posee superficies ortogonales. Sólo una de ellas es un plano (hiperbólico); las demás superficies son elipsoides tangentes a la esfera del infinito a lo largo de su intersección con el plano. Cada uno de estos elipsoides es el lugar geométrico de los puntos que están a una misma distancia del plano hiperbólico y se llaman *equidistantes*, y esto da idea de la distorsión de la distancia. Así que la geometría de un haz de rectas con vértice en el ultrainfinito es la geometría del plano hiperbólico. Las isometrías en este modelo son las homografías del espacio proyectivo que fijan la esfera del infinito. O más brevemente, las homografías de la esfera del infinito. Estas obviamente permutan entre sí los círculos contenidos en la esfera del infinito, así que por proyección estereográfica sobre el plano ecuatorial se proyectan precisamente en los difeomorfismos de la esfera de **Riemann** que pasan círculos a círculos. Se deduce que la relación entre el modelo de **Beltrami-Klein** y el de **Poincaré** está dada por la proyección estereográfica. Una consecuencia importante de esta relación es que el ángulo hiperbólico de dos planos en el modelo de **Beltrami** es el ángulo euclídeo de sus círculos del infinito. En efecto, estos se proyectan estereográficamente en dos círculos, cuyo ángulo es el mismo que el de las semiesferas que definen.

Este modelo de **Beltrami-Klein** es el más real de todos. En efecto, un habitante de un mundo hiperbólico vería un plano externo a él como los puntos del interior de un disco cuyo radio sería función de la distancia del plano al observador. El borde del disco sería el horizonte del plano para el observador. Con más precisión, el observador *vería* el modelo de **Beltrami-Klein** del plano hiperbólico. Para decirlo más gráficamente, si el plano contuviera una línea férrea recta, el observador situado en un avión vería los raíles como una elipse bitangente al horizonte del plano. Las travесas le aparecerían convergiendo todas a un punto exterior al horizonte. Cualquier movimiento del observador se traduciría en una variación de lo observado. Esta variación sería una homografía que fijaría el horizonte.



## La Cristalografía Hiperbólica.

Hasta aquí las generalidades sobre el espacio hiperbólico. Ahora hablaremos sobre los grupos cristalográficos hiperbólicos o redes. Estos, en exacta analogía con sus correspondientes euclídeos, son los subgrupos del grupo de isometrías del espacio hiperbólico que actúan propia y discontinuamente de modo que sus dominios de discontinuidad (los calidoscopios hiperbólicos) sean completos y de volumen finito. Aclaremos esto con un par de ejemplos: tomemos un tetraedro regular inscrito en una esfera. Si el interior de ésta es el modelo de Beltrami-Klein del espacio hiperbólico, los ángulos diédricos hiperbólicos de nuestro tetraedro coincidirán todos con el ángulo que forman entre sí los círculos del infinito de dos caras del tetraedro. Es sencillo ver que el ángulo es de  $60^\circ$ . Al tetraedro así obtenido se le llama tetraedro ideal, pues sus vértices son puntos del infinito. Si pensamos en las caras de nuestro tetraedro como cuatro espejos, podremos reflejar el tetraedro a través de sus caras; y haciendo esto una y otra vez con los tetraedros así obtenidos, rellenaremos el interior de la esfera con tetraedros, de modo que no hay solapamientos. Esto es un embaldosado del espacio hiperbólico mediante tetraedros ideales, y hay 6 tetraedros en torno de cada arista. Nótese que los vértices de todos los tetraedros son puntos del infinito y por tanto no pertenecen al espacio hiperbólico. El grupo generado por las reflexiones en las caras del tetraedro original es un grupo cristalográfico hiperbólico. El calidoscopio cociente del espacio hiperbólico mediante la acción de este grupo es el tetraedro original, que aunque no es compacto tiene volumen finito. Su métrica hiperbólica es además completa.

Ejemplos similares a este pueden obtenerse al considerar las teselaciones regulares del espacio hiperbólico. Una de ellas, de gran interés, es la teselación mediante dodecaedros rectángulos. En este caso el dodecaedro regular está dentro de la esfera y con un tamaño tal que sus ángulos diedros son de  $90^\circ$ . Por reflexión en sus caras se obtiene un apilamiento de dodecaedros, cuatro en cada arista y ocho en cada vértice. El calidoscopio en este caso es el dodecaedro mismo, que es compacto.

La cuestión, todavía en estado incipiente, es la de clasificación de los grupos cristalográficos hiperbólicos completos y de volumen finito. En gran contraste con el caso euclídeo, aquí hay infinidad de calidoscopios hiperbólicos. Entre éstos son de especial interés aquellos calidoscopios hiperbólicos completos no singulares de volumen finito, también

llamados variedades hiperbólicas completas de volumen finito. En contraste con los caleidocopios de dimensión dos, los calidoscopios hiperbólicos de dimensión tres tienen una única estructura hiperbólica, como dijimos anteriormente. Esta extraordinaria rigidez de los calidoscopios tridimensionales permite considerar los invariantes métricos de la estructura hiperbólica como invariantes topológicos del calidoscopio. En particular, el volumen de un calidoscopio hiperbólico es un invariante topológico.

Nuestro conocimiento de los calidoscopios hiperbólicos o, lo que es equivalente, de los grupos cristalográficos hiperbólicos o redes es todavía muy limitado y únicamente mencionaré algunos procedimientos de construcción: el método geométrico, el método de las representaciones, el método de completación y el método aritmético.

Los dos ejemplos anteriores del tetraedro y dodecaedro de ángulos diédricos de  $60^\circ$  y  $90^\circ$  respectivamente, ilustran perfectamente el método geométrico. La idea, que **Poincaré** fue el primero en desarrollar, consiste en representar un calidoscopio mediante un poliedro con caras identificadas. Después se intenta geometrizarlo, encajándolo en el espacio hiperbólico de modo que las identificaciones vengan dadas por restricciones de isometrías. De este modo se descubrió el dodecaedro hiperbólico de **Weber** y **Seifert** mencionado más arriba. Muchos matemáticos han trabajado este método; mención especial merece la escuela rusa de **Makarov**, **Vinberg**, **Andre'ev**, **Nikulin**, entre otros, que han estudiado los grupos cristalográficos hiperbólicos generados por reflexiones. Los planos de reflexión descomponen al espacio en poliedros convexos cuyos ángulos diédricos son fracciones exactas de  $\pi$ . **Andre'ev** ha proporcionado una condición necesaria y suficiente para decidir si un poliedro dado existe o no en el espacio hiperbólico. Recientemente, y continuando la labor de **Best** y otros, **Mennicke** y **Helling** han construido calidoscopios hiperbólicos que son cubiertas cíclicas del nudo de *Saboya* de  $n$  hojas para  $n \geq 4$ , pero cuyas redes no están generadas por reflexiones. La construcción involucra un análisis muy delicado del dominio fundamental.

El método de las representaciones fue introducido por **Riley**. Su idea parte de que, en muchos casos, el grupo fundamental del complemento de un nudo determina al nudo. Entonces, para hallar estructuras hiperbólicas de volumen finito en el complemento de un nudo, considera isomorfismos del grupo de éste en subgrupos de  $PSL(2, \mathbb{C})$ , que es el grupo de isometrías directas de  $\mathbb{H}^3$ , cuando se toma el modelo del semiespacio. La condición es que los meridianos del nudo se transformen en elementos parabólicos de  $PSL(2, \mathbb{C})$ . De este modo

Riley demostró que los complementos del *nudo de Saboya*, de los *anillos de Borromeo*, del *enlace de Whitehead*, etc, son hiperbólicos de volumen finito.

El método de la compleción se debe a Thurston. Es muy probable que el descubrimiento de este método fuera el detonante del resto de sus investigaciones en geometría hiperbólica. Su idea es considerar una estructura hiperbólica no completa en el complemento de un nudo. La compleción de la estructura es un calidoscopio cuyo espacio subyacente se obtiene por cirugía de Dehn en el nudo, y la singularidad es el ánima de la cirugía. De este modo pudo Thurston estudiar variedades hiperbólicas que se obtienen por cirugía en el *nudo de Saboya*.

## El Método Aritmético.

El método aritmético, cultivado por Picard, Bianchi y otros se entiende mejor mediante el siguiente ejemplo elemental. Denotando al grupo aditivo del espacio vectorial real de dimensión  $n$  por  $\mathbb{R}^n$ , consideramos sus redes (cocompactas), es decir, subgrupos discretos de  $\mathbb{R}^n$  (con cociente compacto). Puede probarse que para toda red cocompacta de  $\mathbb{R}^n$  existe un isomorfismo de  $\mathbb{R}^n$  que la envía a la red  $\mathbb{Z}^n$  de puntos de coordenadas enteras de  $\mathbb{R}^n$ . Este resultado puede resumirse diciendo que toda red cocompacta de  $\mathbb{R}^n$  es *aritmética*: "igual" a  $\mathbb{Z}^n$ .

Puede hacerse una construcción análoga para los grupos lineales algebraicos definidos sobre un cuerpo de números  $k$ , llamados  $k$ -grupos. Un grupo de matrices invertibles, con entradas reales o complejas, se dice que es un  $k$ -grupo (real o complejo) si las entradas de las matrices forman el conjunto de ceros de un número finito de polinomios con coeficientes en  $k$ . Los  $k$ -grupos conexos coinciden con los grupos de Lie semisimples, conexos y con centro trivial. Estos grupos  $G$  hacen el papel de  $\mathbb{R}^n$  en el ejemplo anterior; el papel de  $\mathbb{Z}^n$  lo interpreta el subgrupo  $G_1$  de  $G$  formado de matrices invertibles en  $G_1$  cuyas entradas son enteros algebraicos. En efecto, Borel y Harish-Chandra probaron que  $G_1$  es una red de covolumen finito de  $G$  siempre que  $k$  cumpla ciertas condiciones restrictivas. Entonces, un subgrupo  $\Gamma$  de  $G$  se dice *aritmético* si es conmensurable con  $G_1$ , es decir si  $\Gamma \cap G_1$  es de índice finito tanto en  $G_1$  como en  $\Gamma$ . Es claro que tal  $\Gamma$  es una red de covolumen finito.

Esta teoría se aplica al grupo  $G$  de isometrías directas de  $\mathbb{H}^3$  de

dos modos diversos. En efecto  $G$ , pensado como el grupo de isometrías de  $\mathbf{H}^3$  en el modelo de **Beltrami-Klein**, es un grupo de *Lie real*, conexo, simple, con centro trivial. Pero, pensado  $G$  como el grupo  $PSL(2, \mathbf{C})$ , resulta ser un grupo de *Lie complejo*, conexo, simple, con centro trivial. Hay pues dos fuentes de redes de  $G$  de tipo aritmético. En primer lugar, las redes aritmético-reales consideradas por **Vinberg**: son las redes de  $G$  real, isomorfas a un subgrupo aritmético de algún  $k$ -grupo  $H$ , real, isomorfo a  $G$ . En segundo lugar, las redes aritmético-complejas, consideradas por **Takeuchi** y **Reid**, son las redes de  $G$  complejo, isomorfas a un subgrupo aritmético de algún  $k$ -grupo  $H$ , complejo, isomorfo a  $G$ .

El resultado más interesante, debido a **Makarov** (y a **Vinberg**), es que no todo grupo cristalográfico de isometrías de  $\mathbf{H}^3$  es aritmético (real o complejo). Esto contrasta fuertemente con el resultado de **Margulis** según el cual toda red de un grupo de *Lie real*, conexo, simple, con centro trivial, es aritmética siempre que el  $\mathbf{R}$ -rango del grupo sea  $\geq 2$ . Naturalmente, el grupo de isometrías directas de  $\mathbf{H}^3$  tiene rango 1, y para él resulta falso el teorema de **Margulis**.

Es interesante averiguar si las redes aritméticas son la excepción o más bien el caso general. Consideremos para ello los ejemplos de **Picard** y **Bianchi** mencionados antes. **Picard** tomó el subgrupo de  $PSL(2, \mathbf{C})$ , llamado ahora grupo de **Picard**, formado de matrices cuyas entradas son los enteros de **Gauß**. **Bianchi** generalizó esta situación y consideró los llamados grupos de **Bianchi**; en éstos las entradas están en el anillo de enteros de un cuerpo de números que es una extensión cuadrática totalmente imaginaria de  $\mathbf{Q}$ . Por el teorema de **Borel** y **Harish-Chandra**, tales grupos de **Bianchi** son redes de covolumen finito aunque no cocompactas. De hecho, como ya observó **Bianchi**, el número de "puntos del infinito" del calidoscopio hiperbólico correspondiente a un grupo de **Bianchi** coincide con el número de clases de ideales del anillo de enteros algebraicos de la definición del grupo de **Bianchi**. Este se ocupó de dichas redes y calculó en muchos casos el calidoscopio hiperbólico asociado. Resulta ser el determinado por el complemento de un nudo sólo en un caso, a saber: el *nudo de Saboya*. Como **Reid** probó recientemente, este es el único nudo hiperbólico que es aritmético. Como hay infinitos nudos hiperbólicos, esto parece indicar que los calidoscopios hiperbólicos aritméticos son bastante escasos.

En esta dirección han investigado recientemente **Eldstrodt**, **Grunewald**, **Hatcher**, **Helling** y **Mennicke**, entre otros. La escuela rusa se ha

ocupado de averiguar qué redes generadas por reflexiones son aritméticas. La solución se debe a **Vinberg**, esencialmente, con un desarrollo posterior a cargo de **Nikulín**, **Mennicke**, **Reid** y **Scharlau**, entre otros.

La aritmeticidad de los calidoscopios cuya singularidad es el *nudo de Saboya* ha sido estudiada por **Helling** y **Mennicke**, y para los *anillos de Borromeo* en un trabajo realizado en colaboración con **Hilden** y **Lozano**. El resultado es que sólo un número finito de tales calidoscopios son aritméticos, y que una cantidad infinita de ellos son hiperbólicos.

El estudio de la aritmeticidad de redes hiperbólicas tiene un interés múltiple. Por un lado, y por analogía con el caso bidimensional, se espera obtener importantes resultados puramente aritméticos como consecuencia de este estudio. Por otro lado, es posible deducir propiedades geométricas a partir de la aritmeticidad de una red. Por ejemplo, el cálculo del volumen del calidoscopio correspondiente se convierte en un problema relativamente fácil. Una tercera razón es la esperanza de que las propiedades aritméticas de una red  $\Gamma$  puedan elucidar la estructura de los subgrupos de índice finito de  $\Gamma$ .

En relación con esto último mencionaré un resultado obtenido en colaboración con **Hilden** y **Lozano**. La red  $\mathcal{B}_{444}$  cuyo calidoscopio asociado está formado por los *anillos de Borromeo* con isotropía cíclica de orden cuatro<sup>(7)</sup> es universal en el siguiente sentido. Dada una 3-variedad cerrada y orientable  $M$ , existe un subgrupo de índice finito  $\Gamma$  de  $\mathcal{B}_{444}$  cuyo calidoscopio asociado tiene a  $M$  como espacio subyacente. Así pues, los subgrupos de índice finito de  $\mathcal{B}_{444}$  definen *todas* las 3-variedades cerradas y orientables. De entre éstas, aquéllas con grupo fundamental trivial (los posibles contraejemplos a la conjetura de **Poincaré**) corresponden a los subgrupos de índice finito de  $\mathcal{B}_{444}$  generados por elementos de orden finito. Estos subgrupos son pues muy importantes ya que su estudio puede resolver la conjetura de **Poincaré**. Pues bien, tratamos de utilizar la propiedad de que  $\mathcal{B}_{444}$  es una red aritmética para entender sus subgrupos de índice finito.

\* \* \*

---

<sup>(7)</sup>Un dominio fundamental para  $\mathcal{B}_{444}$  en  $H^3$  es el dodecaedro rectángulo mencionado antes.

Con esto pongo punto final a este discurso. Mi deseo ha sido dar a ustedes una idea de lo que hace un geómetra actual en una parcela muy pequeña de la Topología. Es una visión parcial, porque actualmente es difícil, si no prácticamente imposible, mantener una perspectiva completa de una rama importante de las matemáticas. Pero espero que al menos se hayan hecho cargo de su fuerza unificadora: cómo aspectos de la naturaleza tan lejanos pueden estar tan íntimamente ligados a través de la matemática, es un misterio. La idea de que tal ligazón pudiera realmente existir se hizo más y más clara a medida que se fue extendiendo la idea de la existencia de un Dios personal y creador, cuya simplicidad substancial contiene la clave de la unidad del Universo. Es porque estoy convencido de ello por lo que me parece tan pobre la siguiente frase de **Jacobi** a **Legendre**, escrita el 2 de Julio de 1830:

"**Fourier** opinaba que la finalidad primordial de las matemáticas consistía en su utilidad pública y en la explicación de los fenómenos naturales; pero un filósofo como él debería haber sabido que la finalidad única de la ciencia es la de rendir honor al espíritu humano y que, por ello, una cuestión sobre números vale tanto como una cuestión sobre el sistema del mundo".

Pero se ve fácilmente que si una cuestión sobre números vale tanto como una cuestión sobre el sistema del mundo, no es porque ambas cuestiones las haya planteado un mismo hombre, sino porque ambas entidades —números y mundo— tienen un mismo origen. No siendo éste el espíritu humano, sino el Divino, deducimos que la *finalidad primera de la ciencia es justamente la de rendir honor al Espíritu Divino*.

He dicho.



Nudo trébol (a derecha y a izquierda)

SAVOIA AOSTA



S · P · Q · R

Nudo de Saboya en un puente sobre el Tíber

**DISCURSO DE CONTESTACION**  
**del**  
**EXCMO. SR. D. JOSE JAVIER ETAYO MIQUEO**

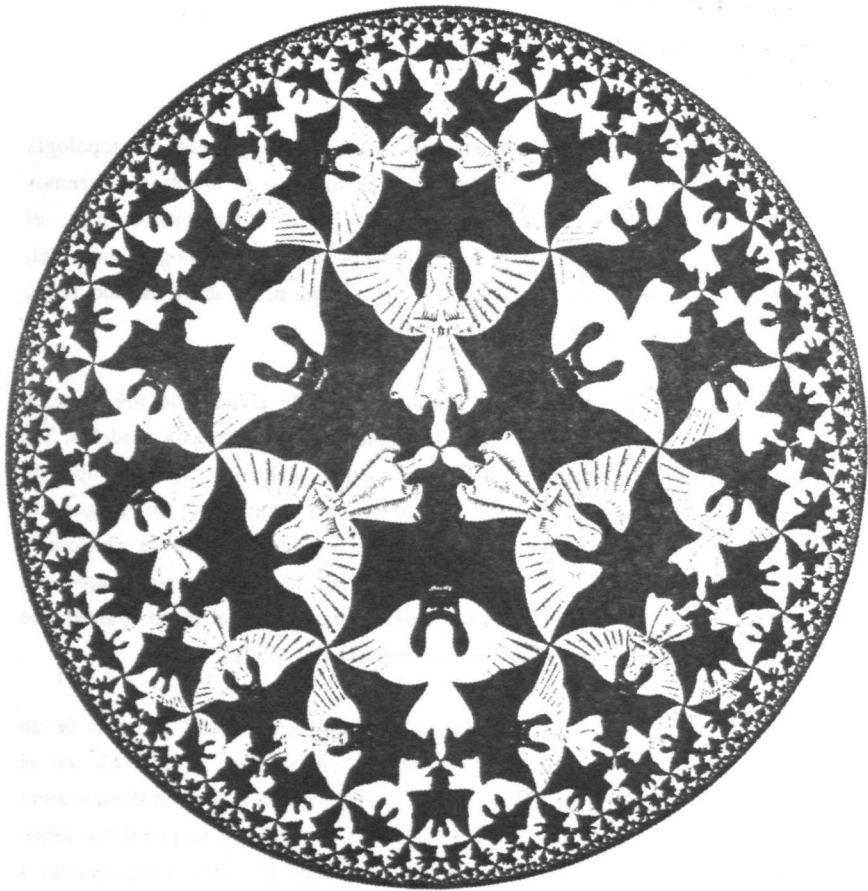


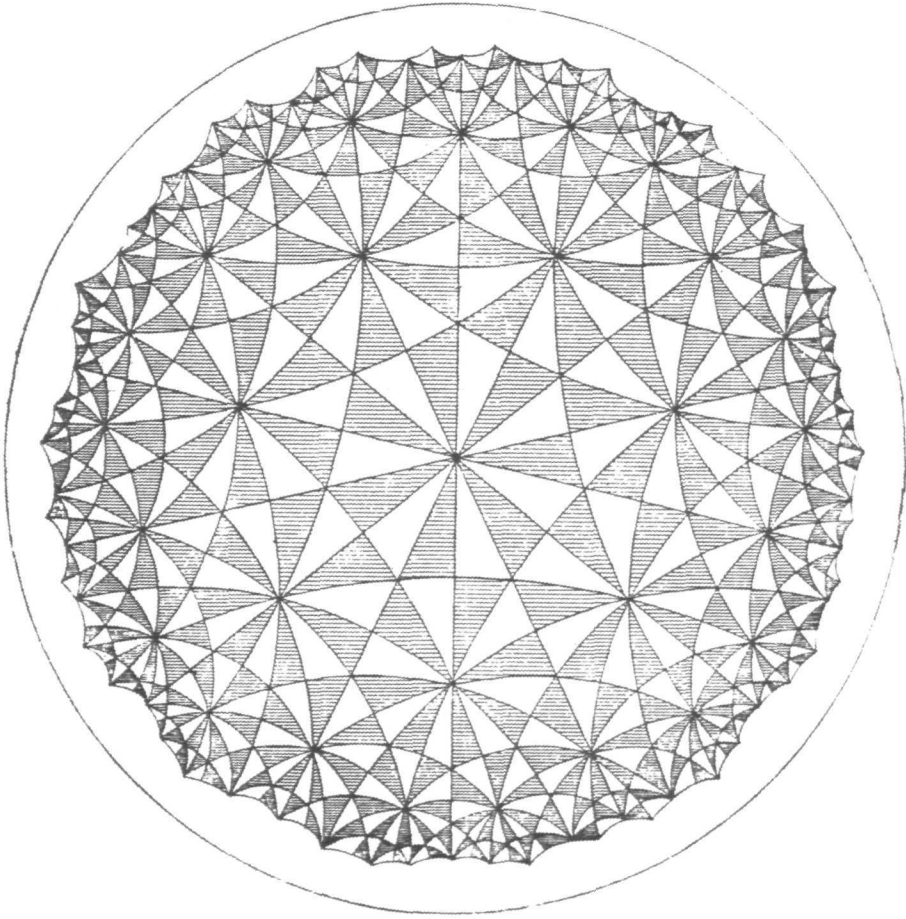
Excmo. Sr. Presidente,  
Excmos. Sres. Académicos,  
Señoras, señores:

Por vez primera, según mis cuentas, se presenta la topología ante los umbrales de esta casa. Verdad es que muchos de nosotros utilizamos técnicas topológicas, como también algebraicas o diferenciales, para el tratamiento y resolución de nuestros problemas, pero la topología como tal, como ciencia en sí misma, la topología en estado puro, es ahora cuando llega, de la mano de **José María Montesinos Amilibia**.

Y habéis visto cómo nos ha presentado algunos de sus aspectos con multiforme colorido, con variedad de problemas, aplicaciones y modelos. Tal ha sido, que a veces parecería que nos estaban hablando de otro tipo de materias o, acaso, que nos hacía su autor una exhibición de juegos de prestidigitación. Mete un granate, o un cristal de ulmanita, en la chistera y saca un nudo arzobispal, pone ante nuestra mirada un calidoscopio y aparecen unos atauriques de la Alhambra... Lo mismo podría haber hecho un trenzado de curvas sobre un toro y salir después hablándonos del DNA.

No es ninguna novedad. Hace unos meses recibí las actas de un congreso internacional de geometría celebrado en Santiago el año 88: en el primero de los trabajos se habla de un determinado grupo  $\Gamma^3$  de transformaciones engendrado por ciertas simetrías y se demuestra el siguiente sorprendente lema: *Un elemento  $g \in \Gamma^3$  conserva la orientación si y sólo si conserva los ángeles y los diablos*. Al que sigue la, después de eso, ya no tan sorprendente definición: "Un subgrupo  $H$  de  $\Gamma^3$ , sin torsión y que conserva la orientación, se llama *celestial*". ¿Esperaban ustedes esta nomenclatura en un artículo matemático? Su mismo título, "Cielo e infierno" —*Heaven & Hell*—, parece impropio, y es el nombre de un grabado, también llamado *Circle limit IV*, del conocido y original artista holandés **M. C. Escher**, autor, por cierto, pintiparado para ilustrar el tema de los calidoscopios. Este representa un disco en el que ángeles blancos y demonios negros se alternan y encajan como las piezas de un puzzle y componen una figura cuyo esquema se asemeja a un





plano hiperbólico<sup>(1)</sup>, del tipo de los que en dimensión 3 nos ha descrito Montesinos.

Los autores del artículo, I. R. Aitchison y J. H. Rubinstein, de la Universidad de Melbourne, buscan cabalmente utilizar aquellas simetrías para la construcción de variedades tridimensionales, por lo que, después de lo oído, no es extraño que se remitan a un resultado que ya habían obtenido por otras vías Montesinos y algunos de sus colaboradores. Para no escandalizarnos demasiado, enunciemos el teorema de estos últimos y recuperemos nuestra jerga tradicional: *Toda 3-variedad orientable y cerrada puede obtenerse identificando caras de un número finito de dodecaedros*. Desde el cielo, o desde el infierno, volvemos nuevamente a la tierra.

Y quizá nos sintamos como aquel asendereado hidalgo al ser despertado también en tierra, cuando soñaba celestes visiones, justamente para dar cuenta "de lo que en aquel infierno había visto": "¿Infierno le llamáis?, dijo don Quijote. Pues no le llaméis ansí, porque no lo merece." Y esto sucedía —y perdonadme, por favor, lo fácil de la cita!— cuando acababan de sacarlo de la famosa cueva de Montesinos. Nuestro Montesinos de hoy nos ha invitado a contemplar todo un panorama científico rebosante de imaginación, de analogías, de variadas suertes de objetos y de relaciones, a través de sus nudos: nos introduce así bien amarrados en su gruta para mostrarnos las admirables cosas que en ella se contienen. ¿No recordáis la otra escena?: "...tenía gran deseo de entrar en ella, y ver a ojos vistas, si eran verdaderas las maravillas que della se decían por todos aquellos contornos"; de modo que "le ataron luego fortísimamente con las sogas" y así llegó al fondo de la sima: "Ofrecióseme luego a la vista un real y suntuoso palacio o alcázar, cuyos muros y paredes parecían de transparente y claro cristal fabricados". Vale la pena releer el pasaje en el que Cervantes, con cáustico aunque suave humor negro, transcribe la narración de cómo el caballero Montesinos tuvo que arrancar el corazón de su primo, el doliente Durandarte, tras la rota de Roncesvalles.

No muy lejos de este lugar, en San Sebastián, veía la luz hace cuarenta y seis años José M<sup>a</sup> Montesinos. El mismo dice que de chico era mal alumno y que "no le gustaban las cuentas"; y cree, y en eso coincide con su

---

<sup>(1)</sup>Reproducimos la ilustración que publicó *El País* (26 abril, 1990), así como un modelo más convencional de plano hiperbólico, que sirva de comparación.

hermano **Angel María**, que en tiempos colaboró conmigo y hoy es Catedrático de geometría diferencial en la Universidad de Valencia, que fue la habilidad y el tesón de su padre lo que despertó su interés por la ciencia, en realidad por la ciencia abstracta, a la que tan poco proclives se sienten los vascos. Es muy frecuente en nuestro mundo estudioso encontrar la figura del padre señalando con su ejemplo un norte, inconscientemente, sin pretender orientar hacia él, ni menos forzar voluntades, pero que sirve, con su sola trayectoria, de referencia para unas metas que él no llegó acaso a alcanzar e incluso ni a vislumbrar.

El padre de **Montesinos**, que empezó siendo pastor en sus tierras zamoranas y, por tanto, hombre de fina observación de la naturaleza y de profunda meditación por desentrañar sus leyes, que conoce por directa visión el mapa del cielo y sus transformaciones, se hizo después maestro y así pudo serlo para sus hijos en el cultivo de las primeras letras y de los primeros números, a los que tan reacios se mostraban. *Observación y cálculo*, como es el mote de nuestra Academia, podría resumir por tanto su lección. Y *pastor y maestro*, las dos profesiones que la abonan y que, al nombrarlas, parece como si de algún modo mencionásemos lo sagrado: porque, que yo recuerde, son las únicas que a Sí mismo se atribuyó el que se llamaba Maestro y Buen Pastor.

No es extraño, pues, que Montesinos nos haya salido por un lado amante de la Naturaleza, bellamente representada en aquellos parajes de su tierra natal, de verdes montañas y suaves colinas, húmedos campos, cielos grises y un mar tantas veces embravecido. Se me hace que él es más gustador de la tierra que del mar, andarín muchas veces al azar —y tiene más de una anécdota de haberse distraído y perdido—, con largas caminatas a través de campos y montes que, por no sé qué extraño reflejo, me recuerdan las de aquellos héroes de *Amaya*, sus paisanos, que en una tarde parece que se recorrían media Euskalerría.

Por cierto que él había pensado, dados sus gustos, ser geólogo, pero cuando llegó al curso selectivo y entendió por dónde iba la matemática, tuvo el palpito de que su camino era este otro. Y matemático se hizo, y matemático puro, sin desdeñar las aplicaciones y los modelos naturales o artificiales, que bien lo hemos visto en su discurso. También aquí las lecciones de su padre han fructificado: "Yo que te enseñé a multiplicar y ahora no entiendo nada de lo que escribes", le suele decir alguna vez. Mejor podría recitarle las hermosas palabras del poema de nuestro compañero **Felipe Calvo**: "...entonces, hijo mío, bendecirás al Maestro que vino a esta Escuela para hacerte hombre, haciéndose él niño."

Yo le conocí como alumno en el último curso de su carrera, el 1966-67. Por entonces estaba ya en el entorno científico y humano de don **Francisco Botella**, catedrático en nuestra Universidad y sacerdote en todas partes. Tendríamos que resucitar alguna vez el recuerdo, para algunos aún cercano pero, para los más, inexistente, de los maestros que hemos tenido y que fueron los que hicieron posible el caminar de nuestra Universidad, prácticamente partiendo de cero, después de la guerra, en completo aislamiento y con solas sus fuerzas: para ellos está cayendo, en el mejor de los casos, el manto del olvido, cuando no el del más explícito desprecio.

El profesor **Botella** era un geómetra que supo ver el lugar que la topología estaba ocupando en el ámbito de la matemática y luchó por crear grupos de trabajo, por incluirla en los planes de estudio, porque dejase de ser una disciplina ancilar para establecerse, como así lo consiguió, con entidad propia. Pertenecía a aquel tipo de profesores que se cuidaban menos de su propia producción y de alimentar su historial que de aglutinar en torno a sí a un grupo de colaboradores que trabajasen en temas comunes. El los formaba para, ayudándoles luego en cuanto necesitaran, dejarles en total libertad de seguir la vía investigadora que cada uno prefiriese. (Mucho me temo que no hubiera sido hoy muy favorablemente evaluado por alguna comisión de investigación que se atuviera a criterios fabriles para juzgar trabajos de la mente.)

Así tenemos ya a **Montesinos**, bien enterado de las cuestiones básicas y en trance de orientar su línea de investigación, cuando le sale al camino uno de esos golpes de suerte, que dice él, y que todos sabemos que no es suerte, o que no es sólo suerte. Es un día del año 69 cuando recibe la comunicación de que en veinticuatro horas ha de presentarse en un campamento de Córdoba para cumplir como alférez el servicio militar. No tiene tiempo ni de pensar qué podía llevar allí para, en los ratos libres, hacer un estudio reposado a la sombra de un árbol. Va a la biblioteca y elige dos libros un poco al azar, buscando tan sólo que su lectura fuese accesible desde sus conocimientos. Uno es el de **Seifert** y **Threlfall** que repetidamente ha citado y el otro, sobre teoría de nudos: *An introduction to knot theory*, de **R. H. Crowell** y **R. H. Fox**. A solas se enfrentó durante aquel intervalo, seguido después de otro, por enfermedad, con problemas nuevos para él y, una vez dominados, con cuestiones abiertas para las que no disponía de ninguna referencia ni posibilidad de allegarla. El mismo tuvo que crear sus propias técnicas con las que resolvió una conjetura que planteaba **Fox** y realizó un estudio que él considera su principal trabajo, puesto que todo lo que después

ha hecho tiene su fundamento en aquellas construcciones. Así que, cuando volvió, dejó pasmado a **Botella** al espetarle: "Don Francisco, ya tengo la tesis". Y así era.

El profesor **Antonio Plans**, que estuvo en su tribunal, le aconsejó que se la enviase al propio **Fox**. Años más tarde se enteró de que, aún sin conocerle, presentó **Fox** en su seminario de la Universidad de Princeton el trabajo que **Montesinos** le había mandado, aunque él también había resuelto con otra técnica su propia conjetura. **Fox** hizo más: envió un artículo sobre el tema a nuestra *Revista Matemática Hispano-Americana* que se publica en el mismo volumen —hablo del año 72— en el que aparecen también algunos de **Montesinos**, citándose uno a otro. La muerte de **Fox** rompió una colaboración, todavía epistolar, que habría resultado sin duda altamente beneficiosa.

Aún puedo rememorar cómo nos informaba **Montesinos** en uno de nuestros congresos, seguramente en el hispano-luso celebrado en Lisboa aquel mismo año, de algunos de los resultados y problemas surgidos de su tesis doctoral titulada: "Sobre la conjetura de **Poincaré** y los recubridores ramificados sobre un nudo". El reducía esta conjetura a otras dos, llamémoslas A y B, y demostraba que la conjetura de **Poincaré** implicaba la conjetura B aunque no la A; y, en cambio, la verificación conjunta de las conjeturas A y B implicaba la de **Poincaré**. Pero desgraciadamente la conjetura A resultaba falsa, tal como **Fox** le había demostrado con un contraejemplo.

Después de esto, y aunque sea brevemente, tendré que decir cuál es la conjetura de **Poincaré**, ya que él ha preferido pasarla por alto. Podríamos enunciarla así: "Una variedad tridimensional localmente euclídea, cerrada —esto es, compacta y sin frontera— y simplemente conexa es homeomorfa a una esfera tridimensional o, equivalentemente, a  $\mathbb{R}^3$  compactado con un punto." Por si esto dice poco a quien no esté familiarizado con estas ideas y esta terminología, **Montesinos** ha hecho a veces una versión más popular: Imaginemos un perro atado a una estaca con una cuerda elástica o goma indefinidamente estirable y situado en un espacio tridimensional cuya forma global se desconoce pero, localmente, es euclídeo, es decir, en las cercanías de cada punto es un espacio como el que habitamos nosotros; y además es cerrado, o sea, que puede ser recubierto por un número finito de bolas. El perro se pasea por él de cualquier manera, sin ninguna limitación, hasta que, cansado, vuelve junto a su estaca y se echa a dormir. Liberada de la tensión que el perro ejerce sobre ella, la goma se contrae pero, en lugar de tirar del perro para arrastrarlo en sentido inverso por el camino que antes recorrió, es ella la que, seguramente

hecha un ovillo, va a posarse junto al perro y la estaca. Eso nos diría que el espacio es homeomorfo a una esfera.

Pero no nos lo dice, porque está aún sin demostrar. Y es curioso puesto que en dimensiones distintas de 3 se ha podido probar. Y es también importante notar que si la variedad es abierta, esto es, no compacta y sin frontera, aun cuando sea simplemente conexa, como es  $\mathbb{R}^3$ , no puede asegurarse que sea homeomorfa a  $\mathbb{R}^3$ .

Los problemas que, alrededor de esta conjetura, ha tratado Montesinos tienen en seguida repercusión entre quienes trabajan en ella. Joan Birman, de la Universidad de Columbia, le anima a que asista a un congreso que va a celebrarse en Cambridge y presente en él sus trabajos, si no quiere verse relegado y aislado; y allá acude a pesar de que aún no conoce el inglés. Después, desde el año 76, asiste a dos cursos en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, lo que le supuso culminar su formación. Se incorpora así a un grupo de unos veinte topólogos, americanos e ingleses, que habían venido trabajando en alta dimensión y que encontraban ya el tema agotado. En cambio, la dimensión baja, a la que muy pocos se habían dedicado, era mirada poco más que como una curiosa distracción; y es entonces cuando un nuevo golpe de suerte hace caer allí a nuestro amigo. Suerte, porque ése es justamente el momento en que la investigación en Topología pasa a ocuparse de la baja dimensión, después de haber terminado prácticamente con la dimensión alta. Y esta coincidencia, tan difícil de darse, de haber confluído por verdadera casualidad un grupo de estudiosos de análogas materias y de distintas procedencias, es considerada por todos ellos venturosamente decisiva. El guarda un recuerdo imborrable de aquellos que tanto le enseñaron y con los cuales ha seguido colaborando: Robert Edwards, Michael Hilden, González Acuña, Yukio Matsumoto, entre ellos. Aún no hace una semana, en las fechas en que escribo el borrador de este discurso, Matsumoto le ofrecía pasar un curso en Tokio, invitación que ha tenido que declinar.

Mejor me ha parecido relatar este proceso de formación de nuestro recipiendario que exhibir toda una lista de méritos que se pueden dar por supuestos, desde su titulación de Catedrático en la Universidad de Zaragoza primero y en la Complutense ahora, hasta su pertenencia al comité editorial de varias prestigiosas revistas; desde sus cursos monográficos en universidades españolas y extranjeras a intervenciones en congresos especializados; desde conferencias científicas y de divulgación a dirección de tesis doctorales; y más de medio centenar de publicaciones en revistas como *Annals of Mathematics*,



*Proceedings of the American Mathematical Society, Quarterly Journal of Mathematics, Michigan Mathematical Journal, Pacific Journal of Mathematics, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Bulletin of the London Mathematical Society, Topology, Mathematische Annalen, etc.*, amén de las españolas, naturalmente.

Dos cosas sí que es necesario decir aquí: obtuvo en 1975 el premio de nuestra Academia por un trabajo sobre representación de variedades tridimensionales y fue elegido Académico Correspondiente en 1986. Muchos de ustedes recordarán la conferencia que con tal motivo pronunció en esta casa con el título de "Calidoscopios en la Alhambra", en la que nos mostró espléndidas fotografías de los modelos decorativos que representan a los distintos grupos de simetría planos. Hay que decir que ya habían tocado el tema otros tratadistas que iban sucesivamente identificando cada grupo en un estucado o en un mosaico, y publicando sus hallazgos, hasta un número de trece grupos y ni uno más. Sólo la paciencia y, seguramente, la confianza también de **Montesinos** consiguió descubrir los restantes. Cuando sólo faltaba uno por localizar, el profesor granadino **Rafael Pérez Gómez**, condecorado con el premio de la Alhambra, consiguió a requerimiento de **Montesinos** señalárselo en el salón de Abencerrajes, y el cupo quedó completo. No se conoce seguramente otro monumento en que, por pura inspiración, consiguieran sus autores plasmar, sin saberlo, los diecisiete grupos del plano.

\* \* \*

Esto podría enlazar con la reglamentaria glosa que debo hacer del precedente discurso, discurso centrado, como era lógico esperar, en la especialidad que preferentemente cultiva su autor, la teoría de nudos y aspectos topológicos con ella relacionados. Yo no sé si a alguno de ustedes habrá sonado extraña, desde lo que solemos pensar que son las matemáticas, una problemática como la que aquí se ha presentado. Han sido muchos siglos —dice bien el autor— de consideración de la matemática como ciencia de la cantidad, del número y de la medida, según sus dos vertientes, para que ahora resulten familiares apreciaciones cualitativas. De un modo sistemático quizá no comiencen hasta el pasado siglo, cuando de él se enseña la geometría proyectiva, no atenta a problemas de tipo métrico. **Poincaré**, primer organizador seguramente de lo que hoy llamamos topología, lo decía así:

"Los geómetras distinguen ordinariamente dos tipos de geometrías, que califican de métrica la primera y proyectiva la segunda; la

geometría métrica está basada en la noción de distancia, (...) la geometría proyectiva está fundada en la noción de línea recta. (...) Se ha llamado con frecuencia a este segundo cuerpo de doctrina, geometría cualitativa; lo es, en efecto, si se opone a la primera: es claro que la medida, la cantidad, juega en ella un papel menos importante. No lo es, sin embargo, por entero."

"Pero hay una tercera geometría en la que la cantidad es completamente superflua y que es puramente cualitativa: es el *Análisis situs*. En esta disciplina, dos figuras son equivalentes siempre que se pueda pasar de una a otra por una deformación continua, cualquiera que sea por otra parte la ley de esta deformación. (...) Así, una circunferencia es equivalente a una elipse o a una curva cerrada cualquiera, pero no es equivalente a un segmento de recta, porque este segmento no es cerrado; una esfera es equivalente a una superficie conexa cualquiera; no lo es a un toro, porque en el toro hay un agujero y en la esfera no. Supongamos un modelo cualquiera y la copia de este mismo modelo hecha por un dibujante torpe: las proporciones están alteradas, las rectas trazadas por una mano temblona han sufrido irregulares desviaciones y presentan curvaturas impropias. Desde el punto de vista de la geometría métrica, lo mismo que de la geometría proyectiva, las dos figuras no son equivalentes; sí lo son, por el contrario, desde el punto de vista del *Análisis situs*."

Tan grata resulta la exposición de Poincaré —el mejor prosista francés, se dijo en su tiempo—, que no me decido a abandonar ese texto, contenido en sus *Dernières pensées*, aunque lo estropee mi versión española:

"El *Análisis situs* es una ciencia muy importante para la geometría, (...) es ahí donde interviene verdaderamente la intuición geométrica. Cuando en un teorema de geometría métrica se apela a esta intuición es porque resulta imposible estudiar las propiedades métricas de una figura haciendo abstracción de sus propiedades cualitativas, es decir, de las que son el objeto propio del *Análisis situs*. Se ha dicho a menudo que la geometría es el arte de razonar bien sobre figuras mal hechas. No es esto una *boutade*, es una verdad sobre la que merece la pena reflexionar. Pero, ¿qué es una figura mal hecha? Es la que puede ejecutar el dibujante torpe del que hablábamos hace poco; altera las proporciones más o menos groseramente; sus rectas siguen un inquietante zig-zag; sus circunferencias presentan desdichadas abolladuras; todo esto no importa nada, no turbará de ningún modo al geómetra, no le impedirá razonar bien. Pero es preciso que el artista inexperto no represente una curva cerrada por una curva abierta, tres líneas que se cortan en un mismo

punto por tres líneas que no tienen ningún punto común, una superficie agujereada por una superficie sin agujeros. Entonces no será posible servirse de su figura y el razonamiento se hará inviable. La intuición no habría sido afectada por los defectos del dibujo que no interesaban más que a la geometría métrica o a la proyectiva; se haría imposible cuando estos defectos se refirieran al *Análisis situs* (...). Si [el geómetra] prescinde de las propiedades métricas o proyectivas de las figuras, si se detiene solamente en sus propiedades meramente cualitativas, es que ahí precisamente es donde interviene de verdad la intuición geométrica".

El *Análisis situs* —obvio es decirlo— es la *topología* o, más correctamente, una de las topologías hoy en consideración. Y la idea era vieja; lo que es nuevo en tiempo de **Poincaré** es hacer de ello un cuerpo de doctrina, una teoría sistemática. Problemas sueltos ya se habían estudiado; el mismo **Poincaré** cita uno bien conocido: "Si un poliedro es conexo, es decir, si no se puede trazar una curva cerrada sobre su superficie sin cortarlo en dos, el número de aristas es igual al de vértices más el de caras menos dos; y esto permanece cierto cuando las caras y las aristas de este poliedro son curvas". Es algo que se remonta a **Euler** y su generalización ha dado lugar después a importantes invariantes. (Y, voy a decirlo: a mí me pica la curiosidad de si no habrá algún tipo de analogía con la regla de las fases: el número de componentes independientes en un sistema en equilibrio es igual al número de fases más el de grados de libertad menos dos; número este último, el dos, que puede cambiar según sea el sistema, como también en la fórmula de **Euler** según sea la superficie.)

También de **Euler**, a quien se suele considerar si no el padre sí el precursor de la topología, es el famoso problema de los puentes de Königsberg, problema no cuantitativo sino de posición, más parecido a aquellos entretenimientos de los "tebeos", de ver que es imposible trazar caminos que no se crucen desde tres casas alineadas a tres pozos también alineados frente a ellas, o de dibujar una figura sin levantar el lápiz del papel. No es raro que problemas de este tipo parecieran poco más que meras curiosidades y no se calase en lo profundo de su planteamiento. Hay, por otra parte, un momento histórico para que determinadas teorías puedan aflorar: "los hechos matemáticos son siempre un fruto natural del ambiente cultural y de la sociedad de cada tiempo", dice **Rafael Rodríguez Vidal** en una referencia al problema del laberinto, íntimamente ligado al de los puentes de Königsberg. Aunque los griegos, por ejemplo, conocieron de sobra historias de laberintos, en ningún caso se les ocurrió considerarlas un problema y darles un tratamiento

matemático. Y ello no por falta de ingenio sino porque esos problemas de posición y de conexiones no interesaban por entonces en absoluto. En el laberinto de Creta entró Teseo para matar al Minotauro y volvió a salir gracias al hilo que portaba y cuyo extremo sostenía Ariadna. "No cabe un planteamiento ni una solución con menos sentido matemático de las cosas", dice con gracia R. Vidal.

Agreguemos que el problema del laberinto está matemáticamente resuelto: la salida está asegurada. Aunque Umberto Eco, que ha hecho de él casi un argumento de novela, distingue tres tipos: el griego, de Teseo, que tiene un centro y del que se sale siempre; el manierista, en forma de árbol y una única salida, en el que se puede uno perder; y el de red o rizoma, en el que cada calle puede cortarse con cualquier otra y no tiene centro ni periferia ni salida; por consiguiente, supongo, tampoco entrada.

¿Y los nudos? A ellos ha dedicado el profesor Montesinos gran parte de su actividad investigadora y, como es natural, un largo trozo de su discurso; en realidad, está subyacente en todo él. Nada puedo añadir por mi parte a la exposición de un reconocido especialista, cuando yo no lo soy. Por eso me ha parecido que mi papel podría consistir en apuntar algunas de las ideas preliminares, las pocas que yo sé, para allanar la lectura a quien tampoco lo sea. Un nudo, ya lo ha dicho el orador, es una curva cerrada: en el espacio tridimensional, en el que nos situamos, sería la abstracción del clásico nudo hecho en una cuerda que cerramos a continuación. Así resulta que todos los nudos son homeomorfos entre sí y homeomorfos, por tanto, a una circunferencia (a la que difícilmente, por cierto, llamaríamos "nudo"). Como pensamos que no todos los nudos son iguales, esta clasificación por homeomorfismos entre ellos no nos sirve.

¿Cómo distinguirlos, pues? Por supuesto, clasificándolos por una equivalencia, la primera operación que se plantea ante un conjunto amorfo de objetos no sólo el matemático, sino cualquier mente pensante. Una de las relaciones de equivalencia entre nudos se suele establecer del siguiente modo: dos nudos son equivalentes si hay un homeomorfismo del espacio en sí mismo que conserve la orientación y transforme un nudo en el otro. Dicho de otro modo, cuando un homeomorfismo entre ambos nudos, que siempre existe, se puede extender a un homeomorfismo del espacio en el que están sumergidos. Esto en el plano ocurre siempre —es un teorema de Schoenflies—, así que todos los nudos del plano son equivalentes y lo son, por tanto, a una circunferencia, que es un lazo "sin nudos": en otras palabras, no existen nudos en el plano, en el

sentido estricto.

La existencia, en cambio, de otros nudos en el espacio tridimensional, es decir, el hecho de que no se pueda extender a él el anterior teorema del plano, es uno de los mayores obstáculos para generalizar las ideas de éste al espacio. Y, curiosamente, no es el único caso en el que el paso de dimensión 2 a 3 supone un salto tan considerable como inesperado. Sigamos con los nudos: hagan ustedes en una cuerda el nudo corriente, el más sencillo, ése que todos conocemos y hacemos, cuidando luego de unir los extremos de la cuerda para que forme una curva cerrada. Tendremos un nudo de los llamados "de trébol". Pero si es usted zurdo y hace el lazo en sentido contrario, le va a salir un nudo prácticamente igual: en realidad sólo difieren ambos en que son simétricos, como lo son la mano derecha y la izquierda. Pues bien, estos nudos no son equivalentes, pese a todas sus analogías; no hay un homeomorfismo del espacio que conserve su orientación y aplique uno en el otro, porque en lo que difieren es, precisamente, en la manera de estar sumergidos en él. No sé, quizá nuestras abuelas, expertas artesanas de la calceta, podrían ilustrarnos de cómo echando la hebra de lana sobre la aguja con una o con otra orientación obtenían distintamente el que llamaban "punto al derecho" o el "punto al revés".

Estas construcciones primeras, que parecen un poco de ciencia recreativa, y que a alguien podrían hacer pensar, por su carácter imaginativo, que no pasan de meros pasatiempos, desembocan en realidad en problemas fecundos de investigación topológica y, en concreto, en el de desentrañar la estructura de los espacios, como **Montesinos** nos ha puesto de relieve. Así hemos visto cómo implicaban en seguida relaciones, a veces insospechadas, con otros conceptos matemáticos y científicos; pero mi comentario ha quedado muy en los comienzos. "Todo principio es fácil y los últimos peldaños son los más difíciles de subir", decía Goethe, y no hay más que ver los complicadísimos nudos que **Montesinos** dibuja en algunos de sus artículos. Pasa, en definitiva, como en aquella cueva, ya mentada otra vez, "cuya boca es espaciosa y ancha; pero llena de cambroneras y cabrahigos, de zarzas y malezas, tan espesas e intrincadas, que de todo en todo la ciegan y encubren". Y para poder gozar de sus ocultos tesoros habrá que hacer como nuestro caballero: "...poniendo mano a la espada, comenzó a derribar y a cortar de aquellas malezas que a la boca de la cueva estaban, por cuyo ruido y estruendo salieron por ella infinidad de grandísimos cuervos y grajos, tan espesos y con tanta priesa, que dieron con don Quijote en el suelo".

No diremos tal de nuestro nuevo académico que supo, como es

patente, vencer las dificultades y resistencias iniciales para situarse con plena autoridad en el dominio de estas también intrincadas cuestiones a que se dedica. Y quiero poner de manifiesto la modestia, muy propia de él, con que en su discurso ha aludido tan breve y oscuramente a sus propias aportaciones. Verán ustedes: en distintos trabajos y libros de la especialidad he encontrado alusiones a ciertos enlaces de Montesinos: *the Montesinos links*. Quise que me hablara de ello, porque podía ser interesante para mi exposición. Sus palabras fueron: "Es que casi no sé lo que son. Los que escriben de eso y les han puesto mi nombre lo saben mucho mejor que yo". Respuesta formidable: me parece mucho más bonito dejarla así simplemente transcrita que intentar explicarles ahora en qué consisten esos lazos.

Este es Montesinos: hombre serio, poco dado a las habladurías, concienzudo en su trabajo, concentrado, abstraído a veces en sus meditaciones, indiferente a tantas cosas que no importan. Pero interesado a la vez por otras muchas que no son exclusivas de su ciencia, porque la vida es mucho más rica que la imagen que ésta da: y pensemos en profundas convicciones religiosas, en experiencias vitales, buscadas y adquiridas, en un ancho despliegue de valores culturales, qué sé yo: hasta podría contarles que un viaje que hicimos juntos se lo pasó leyendo para sí, entre grandes risotadas, una novela humorística inglesa, tal vez de Wodehouse. No se le tome, pues, por hombre encasillado, monográficamente polarizado en una dirección y obsesionado sólo por lo que atañe a su campo. Aunque mucho de él esperamos, empero, en ese terreno y verdad es que no tiene nada de sencillo. Pero, como a su homónimo le decía el mal ferido Durandarte: "Paciencia y barajar". Y, de eso, nuestro nuevo compañero acumula vastas cantidades.

Amigo Montesinos: la Academia, por delegación de su Presidente, me ha hecho el honor de designarme para, en su nombre, darle la bienvenida a esta casa que desde ahora será también la suya. Cuando yo era chico y se usaba la práctica social de la visita, era costumbre del cabeza de familia terminar la primera que le hacía algún amigo o vecino con un ofrecimiento ritual. Portavoz ahora de la Academia, me acojo, para terminar celebrando su entrada en ella, a aquella misma fórmula en la que resplandece aún la vieja cortesía: ¡Ha tomado usted posesión de su casa!

He dicho.