REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

Pequeña historia de las conexiones geométricas

DISCURSO

LEIDO EN EL ACTO DE SU RECEPCION

POR EL

EXCMO. SR. D. JOSE JAVIER ETAYO MIQUEO

Y

CONTESTACION

DEL

EXCMO. SR. D. ENRIQUE LINES ESCARDO

EL DIA 23 DE FEBRERO DE 1983

MADRID
DOMICILIO DE LA ACADEMIA:
VALVERDE, 22.—TELEFONO 221-25-29
1983

ISBN: 84-600-2994-8

Depósito Legal: M. 5.897-1983

TALLERES GRÁFICOS VDA. DE C. BERMEJO - SANTA ENGRACIA, 122 - MADRID-3

DISCURSO

DEL

EXCMO. SR. D. JOSE JAVIER ETAYO MIQUEO

TEMA:

PEQUEÑA HISTORIA DE LAS CONEXIONES GEOMETRICAS

Excmo. Sr. Presidente,
Excmos. Sres. Académicos,
Señoras, Señores:

En el breve y, sin embargo, largo camino de una vida, la atención se concentra en unos cuantos puntos que sirven de referencia para describirla. Tienen unos —más ocultos, salvo para uno mismo, y también más decisivos— carácter de encrucijada, y de la opción en ellos tomada va a depender el discurrir de todo el camino. Pero hay otros que al exterior brillan más y son los puntos culminantes de él, los que de alguna manera dibujan la imagen radiográfica de ese historial. En una biografía modesta, como la mía, no era pensable alcanzar altas cumbres; a lo más pequeños repechos desde donde otearla. Mas vosotros habéis querido, con generosa benevolencia, elevarme hoy al más esclarecido lugar que jamás aspiré a ocupar. Si digo esto y le añado, parca pero sentidamente, el emocionado tributo de gratitud que os debo, ni toméis aquello por falsa humildad ni lo último como tópica y obligada cortesía. Muchas gracias, de todo corazón.

Y ahora, cuando me es dado contemplar desde aquí el camino andado, sería imperdonable no ver cómo se enseñorea de él la figura de quien supo durante toda mi vida académica acompañarme y guiarme, estuvo presente —¡siempre!— en mis puntos cruciales, me dio enseñanza, acogida, amistad, ejemplo. Sin él, no estaría yo aquí. Todos reconocéis este retrato: es el maestro. Yo soy testigo del sentimiento, cariño y gratitud con que en las circunstancias en que hoy me encuentro habéis glosado, cuantos los habéis tenido, la personalidad de vuestros maestros. Permitid que también yo, a fuer de bien nacido y por haber sido uno de esos hombres privilegiados que han gozado de don tan alto, me detenga en el recuerdo de un maestro egregio, con seguridad uno de los hombres a quienes más debe la matemática española, con cuyo concurso podemos, gracias a Dios, y quiera Él prolongarlo, contar aún; mi maestro: DON PEDRO ABELLANAS.

Fue, sí, mi primera encrucijada: la primera hora del primer día de clase de un primer curso de la Licenciatura en Matemáticas; octubre de 1945 en Zaragoza, en la vieja Facultad de la plaza de Paraíso, tan añorada por quienes en ella estuvimos, tan sugeridora de recuerdos, tan querida. Un joven catedrático de treinta y un años nos sumergió de improviso, como por una zambullida, en una geometría insólita, poderosa, iluminadora. Nada parecido habíamos visto hasta entonces; nada tampoco, más que esto, tuvimos. Pienso ahora, visto desde aquí, que quedé ya literalmente atrapado; y otros como yo. Decíamos que no nos enseñaba geometría, que nos enseñaba a «hacer geometría». Aquella geometría sólida, rigurosamente edificada, transmitida, y también reclamada, con una exigencia que no era más que el puro reflejo de la que para consigo mismo tenía. Sólo en dos cursos recibimos sus lecciones y ésa fue toda la geometría que aprendimos: no necesitamos más. Sus apuntes eran nuestra biblia. Nos marcó. Yo sé que él también recuerda con un calor muy hondo aquellos años de Zaragoza y a aquellos sus primeros discípulos. ¡Ay!, al pensar en esto se me agolpan las remembranzas y no puedo evitar la evocación de lugares y personas, y de aquel ambiente y aquellas relaciones, de aquella universidad y de aquel modo de trabajar, lleno de dificultades pero también de dignidad; de aquel tiempo, en suma, que, tal vez por ser mi tiempo, yo tanto he amado.

Terminada mi carrera quedé como solíamos quedarnos entonces: en desamparo total, sin saber qué hacer ni a dónde dirigirnos. Dos años antes se había trasladado D. Pedro a Madrid por nueva oposición. Decidí venir a verle tras otros dos años de incertidumbres. No creía que pudiera trabajar con él: sólo pensar en ello me habría situado al borde de la ensoñación. He de resumir: sí que trabajé con él; desde entonces yo creo que, poco o mucho, he trabajado con él en todo. A su lado aprendí la carrera docente pasando por todos los puestos, desde ayudante interino gratuito a profesor adjunto suyo, hasta obtener la cátedra; él dirigió mi tesis doctoral y mis trabajos de investigación; me asoció en su empeño por la mejora de la enseñanza y en tantos otros por los que se ha interesado. Porque nada de cuanto concierne a la ciencia que cultiva le ha sido ajeno y en toda ocasión ha puesto a contribución su vigor intelectual, la lucidez de sus ideas, un entusiasmo siempre renovado, tesonera voluntad y animoso empuje, aun a sabiendas de lo baldío de su esfuerzo en algunos casos. D. Pedro ha sido, en fin, una gran parte de mi vida y constituye desde mí mismo la constancia de una deuda impagable. Pero él nunca buscó el provecho propio y desdeñó cualquier clase de exhibicionismo. Sólo ha valorado la dedicación, el estudio y el trabajo, legándonos a todos la impronta de su ejemplo.

Me gustaría decirlo —más bellamente y para compendiarlo todo— con palabras de uno de aquellos discípulos de la primera hora, seguramente, y con cuánta razón, el más querido para él: JUAN SANCHO GUIMERÁ, catedrático hoy de Salamanca. Para mí siempre admirado y fiel compañero y, por encima de todo, amigo entrañable y fraternal. Quien mencionaba, en cierta ya lejana ocasión, *a don Pedro Abellanas, de quien he recibido* —escribía—, *y otros muchos conmigo, el testimonio y la fe de que la ciencia como contemplación es algo que todavía no pertenece al pasado.*

* * *

En el proceso emocional de quien accede a este estrado —emociones hechas de alegría y desconcierto, que van desde la gratitud de contar con la opinión y el aprecio de colegas tan preclaros hasta la descarnada consideración de las propias limitaciones; acaso, ¿por qué no?, un poco de vanidad; indudablemente un mucho de inquietud—, aparece casi siempre una nota oscura y dolorosa: la de venir a suceder a un académico tristemente desaparecido; un académico al que, por regla general, nos han ligado las relaciones de respeto, consideración y afecto que debemos a nuestros mayores. Así, vengo yo a suceder a DON GERMÁN ANCOCHEA (q. e. p. d.).

No es fácil que ninguno de nosotros le haya olvidado: cuantos aquí estamos, coincidentes con él en la Academia, en la Universidad o en el entorno amistoso, podemos traer a la memoria, a nuestros ojos y a nuestros oídos, la figura, el gesto, la voz y las palabras de D. Germán. Mi recuerdo se detiene conmovidamente en sus últimos meses en los que el acerbo sufrimiento con que tuvo que afrontar su fin nos llenó a todos de piedad. Esta proximidad de su presencia siento que me exime de hacer la acostumbrada semblanza que el protocolo establece. Cercano está el homenaje póstumo que en esta misma casa se le rindió conjuntamente por la Academia y por la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense, de la que fue miembro eminente. Asimismo le fueron dedicadas las Jornadas

Matemáticas Hispano-Lusas celebradas el año pasado en Salamanca, porque también aquella histórica Universidad le había contado entre sus catedráticos. En una y otra ocasión, sus colaboradores y amigos delinearon de mano maestra el perfil del profesor Ancochea, sus actitudes, su personalidad, su obra. ¿Quién de nosotros no escuchó aquella descripción o no ha leído después la publicación de la misma?

Hay en ella un par de trazos que, sin embargo, no me resisto a citar sumariamente, aun cayendo en la reincidencia que había querido evitar. Uno es la elegancia, ante todo intelectual, la que intenta descubrir el camino más breve, menos barroco y pesado, para el tratamiento de cada cuestión; la que le llevó a repensar resultados ya conocidos en persecución de una vía más bella, como si encarnase aquella definición de JULIÁN MARÍAS: *Los buenos matemáticos son aquellos que buscan y encuentran una solución «elegante» a sus problemas. Elegante es aquello que, después de* elegir, *se queda con el mínimo de elementos necesarios, renunciando a lo superfluo.*

El otro breve apunte se refiere a su rigor científico, al talante crítico, tenazmente mantenido unas veces, matizado otras por una suave, y en ocasiones punzante, ironía. Yo creo que, como todos lo han señalado, son éstos los rasgos característicos de una personalidad como la suya, a un mismo tiempo robusta y brillante.

No esperéis encontrar tales cualidades en su sucesor: difícilmente podréis imaginar lo mate, apagado y gris que ahora me siento. Algo, quizás externo, sí que me une, en cambio, a D. Germán: el cultivo de unas áreas de la ciencia comunes o próximas; seguramente la razón por la que me habéis designado para cubrir su vacante. Él comenzó trabajando en geometría diferencial, iniciado en ella por uno de sus más eximios representantes: el profesor Cartan. Más adelante se interesó, y muy fuertemente, por el álgebra y la geometría algebraica: «Ahora ando ya por el álgebra como por mi casa, lo mismo que me pasaba antes con la geometría diferencial», me decía una vez. Yo creo que fue la aparición de la obra incompleta de A. GROTHENDIECK, una sinfonía interrumpida me parece que en el cuarto movimiento, y que él consideraba inhumana para proponerla como objeto de estudio, lo que le hizo volver los ojos a la nunca desatendida geometría de sus primeros tiempos, enriquecida por nuevas y últimas aportaciones, y en ella fue formando a sus colaboradores más recientes.

No obstante, D. Germán seguía confesándose cartaniano. Aún tengo presente, a este propósito, el respingo de agradable sorpresa con que en mis oposiciones, de cuyo tribunal formaba parte, recibió el anuncio de que mi lección magistral versaría sobre la teoría de la referencia móvil; mucho me temo, sin embargo, que el tratamiento que yo di al tema no fue el que él esperaba. Pero ello me ha hecho pensar que acaso ningún homenaje mejor podía tributar a la memoria de quien tan poco amigo era de ellos, que dedicar este mi discurso, al tomar posesión de la medalla que él ostentó, a un argumento que hubiera podido complacerle, al tiempo que conferir un afectuoso signo de continuidad a su paso por esta Academia.

Pero es que, además, este problema de las conexiones se ha llegado a tomar como la culminación en algún sentido de la geometría diferencial; con él, con la idea de dotar de una geometría a una variedad, se cierra, en opinión de algunos, este gran capítulo de la matemática. Todo lo que lo rebase se sale de la pura geometría y se adentra ya en los dominios de las ecuaciones diferenciales o de la topología diferencial.

Y también, por otra parte, desde un punto de vista subjetivo, hay dos razones que abonan esta elección. Una, por poder aludir a algunas de las pequeñas cosas que venimos haciendo en nuestros «talleres», porque pienso que sería menos personal un discurso en el que no figurase alguna aportación, aunque fuera modesta. Y la segunda porque, dentro de la aridez que, en general, es propia de cualquier exposición demasiado especializada, y más al parecer si se trata de una especialidad matemática, esta de hoy permite manejar determinados modelos y conceptos de conocimiento común, por lo que espero pueda resultar menos indeseable a quienes han tenido la amabilidad de venir a escucharme. No tendré, por ello, empacho en situarme a veces en niveles que acaso puedan parecer impropios de esta alta tribuna y que incluso algún antiguo alumno, si aquí estuviera o leyese después el texto, reconozca en ciertos parajes trozos de mis lecciones universitarias, puesto que voy a atender más a la presentación que a la originalidad del contenido. Lo cual tampoco acabo de encontrar indecoroso en un matemático como el que os habla, de pequeña significación en el trabajo creador pero a quien le habría gustado acercarse, en la medida de lo posible, al modelo propugnado por el profesor Laín Entralgo, de *los que con devoción y honestidad se entregan a la misión de enseñar ciencia que ellos mismos no han hecho y han tenido la ambiciosa humildad de aprender bien.*

1. Preludio de Cartan

Tomemos el problema casi desde sus inicios. Nadie mejor para introducirnos en él que el propio Élie Cartan con quien había de estudiar Ancochea en 1933. De unos años antes datan dos hermosas conferencias [1] (*) en las que expone la vía para cohonestar las distintas concepciones de la geometría que entonces reinaban. Aunque trate de resumir una parte de estas exposiciones, no me importa acudir abundantemente a citas textuales, dada la claridad, la maestría y la belleza con que están escritas. (Por comodidad tipográfica no entrecomillaré ni pondré en cursiva las citas literalmente tomadas; prácticamente abarcan todo este apartado.)

Una primera concepción de la geometría es la de F. Klein: la idea fundamental de Klein puede asociarse, como se sabe, a las más antiguas nociones de la ciencia. La geometría elemental es el estudio de las propiedades de las figuras que son independientes de su posición particular en el espacio. Se ha necesitado un número grande de siglos para traducir esta frase un poco vaga en un lenguaje preciso: las propiedades que estudia la geometría elemental son las que permanecen invariantes por un cierto conjunto de transformaciones que forman un grupo, a saber, los desplazamientos. El axioma según el cual dos figuras iguales a una tercera son iguales entre sí expresa precisamente la propiedad de los desplazamientos de formar un grupo. De una manera general, todo grupo continuo de transformaciones, afinidades, homografías, etc., define una geometría autónoma, geometría afín, proyectiva..., del mismo modo que el grupo de los desplazamientos o movimientos definía la geometría euclídea. A ese grupo se le llama el *grupo fundamental* de la geometría en cuestión, y el espacio se dice *homogéneo* en el sentido de que sus propiedades son invariantes por las transformaciones del grupo fundamental.

(*) Las citas numéricas se refieren a las notas incluidas al final.

La segunda concepción es la de B. RIEMANN para quien la noción geométrica fundamental es la de longitud; pero, obedeciendo a la tendencia general de la física de su tiempo y repugnándole la idea de someter esta noción a leyes *a priori* que hacen intervenir en cada región del espacio al espacio entero, supone definida la longitud paso a paso, entorno a entorno —«de proche en proche»— mediante una forma diferencial que, para mayor sencillez, se puede suponer cuadrática pero que es en principio arbitraria. El espacio ordinario se reencuentra como un caso muy particular de los espacios más generales introducidos por Riemann.

Es claro que la geometría de Riemann no entra del todo en el marco del programa de Klein, pues una variedad riemanniana no admite en general ninguna clase de homogeneidad, pero su importancia creció desde que Einstein intentó por entonces reunir en una sola y misma teoría la gravitación, la óptica y el electromagnetismo. La relatividad general arrojó sobre la física y la filosofía el antagonismo que existía entre los dos principios directores de la geometría. El espacio-tiempo de la mecánica clásica y el de la relatividad restringida son del tipo de Klein; el de la relatividad generalizada es del tipo de Riemann. Este mismo hecho de que casi todos los fenómenos estudiados por la ciencia durante largos siglos podían explicarse tanto colocándose en uno de los puntos de vista como en el otro era altamente significativo y sugería, a pesar de todo, la posibilidad de una síntesis que englobase los dos principios antagonistas.

Es el desarrollo mismo de la teoría de la relatividad, comprometida por la obligación paradójica de interpretar en y por un Universo no homogéneo los resultados de numerosas experiencias hechas por observadores creyentes en la homogeneidad de este Universo, lo que permitió llenar en parte la laguna que separaba los espacios de Riemann del espacio euclídeo. En efecto, si bien un espacio de Riemann no tiene una homogeneidad absoluta, tiene empero una especie de homogeneidad infinitesimal: en el entorno inmediato de un punto dado es asimilable a un espacio euclídeo, al que llamaremos espacio tangente. Pero si dos pequeños trozos próximos de un espacio de Riemann se asimilan, cada uno, a un pequeño trozo de espacio euclídeo, dichos dos pequeños trozos no tienen relación alguna entre sí, no pueden, *sin un nuevo convenio,* ser considerados como perteneciendo a un mismo y único espacio euclídeo.

El primer paso en esta dirección fue dado por obra de T. LEVI-

CIVITÀ, mediante la introducción de la noción de *paralelismo*. He aquí cómo, gracias a esta noción, pueden ser presentadas las cosas. Si se considera en un espacio de Riemann una curva continua $p\ q$, se construye mediante la forma de longitud el espacio tangente en p, del cual forman parte ese punto y los infinitamente próximos; haciendo esta construcción en los diferentes puntos de la curva, se pueden referir, paso a paso, a uno solo los espacios euclídeos tangentes en ellos; en consecuencia, también, salvo infinitésimos de segundo orden, los puntos del espacio de Riemann próximos a la curva $p\ q$ vendrán, por esta especie de desarrollo, a localizarse en el espacio euclídeo tangente en p. La palabra *desarrollo* ha sido empleada con toda intención. Si, en efecto, el procedimiento que acabamos de indicar se aplica a una superficie ordinaria sumergida en el espacio euclídeo y considerada, por tanto, como un espacio de Riemann bidimensional definido mediante el elemento de longitud de la superficie, esa referencia paso a paso de los planos euclídeos tangentes a la superficie a lo largo de una línea $p\ q$ de ella es idéntica al desarrollo clásico sobre un plano de la desarrollable circunscrita a la superficie a lo largo de $p\ q$, es decir, de la envolvente de esa familia de planos.

Como se ve, la noción de paralelismo de Levi-Cività permite asimilar a un verdadero espacio euclídeo, o por lo menos a una porción de este espacio, toda la región de un espacio de Riemann situada en torno a un arco de curva trazado en él. Si imaginamos, además, en el caso de la superficie sumergida en el espacio euclídeo, un vector tangente a ella en p, no existirá, en general, en q un vector tangente que sea en dicho espacio equipolente al anterior. Pero sí podemos considerar aquel vector que, siendo tangente en q, se coloca en tal posición de equipolencia en el desarrollo que hemos hecho sobre el plano tangente en p; podemos decir así que el vector en q es el equipolente al vector dado en p, o que lo hemos trasladado desde p, a lo largo del arco $p\ q$, conservándose la equipolencia en ese traslado.

La diferencia esencial que aún subsiste entre un espacio de Riemann y el espacio euclídeo es, como se sabe, la siguiente: Si se unen p y q por otro arco diferente y se desarrolla sobre el espacio tangente en p la región que rodea este arco, como hicimos antes con el otro, no se obtendrá para el punto q y el pequeño trozo de espacio que lo rodea ni la misma posición ni la misma «postura», respectivamente; es decir, los vectores equipolentes al de p en uno y otro desarrollo ni tienen el mismo origen ni son equipolentes entre sí en el espacio euclídeo tangente en p. Se expresa esto diciendo que la superficie, o el espacio de Riemann en general, es un espacio euclídeo *no holónomo*. Mas es importante hacer notar que no lo era por sí mismo, esto es, por su solo elemento lineal de longitud, sino que *ha llegado a serlo gracias a la definición de paralelismo de Levi-Cività.*

En resumen, pues, podemos obtener mediante este proceso un vector equipolente a otro dado *a lo largo de una curva* que una los puntos en los que se sitúan esos vectores. Diremos que hemos trasladado el vector tangente en p hasta la posición que ocupa su equipolente en q, y a esa transformación de un vector en el otro la llamaremos traslación del vector a lo largo de la curva; en nuestro caso diremos que es una *traslación euclídea*. De este modo, para el arco $p\,q$ queda establecida una transformación del espacio euclídeo tangente en p en el tangente en q, transformación que es claramente una isometría entre ambos espacios. A esa isometría la llamaremos *conexión euclídea* o *de Levi-Cività*.

Pero sería restringir su alcance no percibir en ella más que un procedimiento de comparación de vectores tomados en dos puntos suficientemente próximos. Es necesario, por el contrario, ver ahí un medio de introducir en un espacio de Riemann toda la gama de los desplazamientos euclídeos, al menos en lo que se refiere a los efectos que se producen en una región infinitamente pequeña del espacio. Y, de la misma manera, si tomamos no necesariamente el espacio euclídeo tangente, sino el espacio vectorial subyacente en él, o el espacio afín o el proyectivo construidos sobre ese espacio vectorial, un tratamiento similar permitiría establecer isomorfismos lineales, afinidades, proyectividades, respectivamente, entre los espacios tangentes en dos puntos. Aparecerían así las conexiones lineales, afines o proyectivas. Recíprocamente, y con más generalidad, toda transformación propia, establecida a través de una curva, entre los espacios de determinado tipo tangentes en dos puntos de ella, permite dotar, siquiera de un modo parcial, a nuestra variedad o espacio no holónomo de la geometría que corresponde a ese grupo de transformaciones.

2. Traslación y derivación

Puesto que la cuestión planteada en el caso riemanniano es trasladar un vector a una cierta posición que hemos llamado de equipolencia o paralelismo, analicémosla en el caso euclídeo para ver cuál es la idea que aparece en la base de este problema. Esta idea está ligada, como ya era intuído desde los mismos comienzos de la geometría diferencial, al concepto de derivada.

Pensemos, por ponernos en el caso más simple, en las derivadas direccionales en el plano euclídeo. Si $\mathbf{v}$: (v^1, v^2) es un vector unitario de él y $f(x^1, x^2)$ una función diferenciable, la derivada de esta función en la dirección del vector $\mathbf{v}$ en un punto p, de coordenadas (p^1, p^2), es

$$\partial_{\mathbf{v}} f(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p^1 + t\, v^1, p^2 + t\, v^2) - f(p^1, p^2)}{t} = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)_p v^1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^2}\right)_p v_2 =$$
$$= \operatorname{grad} f(p) \cdot \mathbf{v}.$$

Llamando φ_t a la transformación del plano que hace pasar de cada punto (p^1, p^2) al $(p^1 + t\, v^1, p^2 + t\, v^2)$, es decir, a la transformación de ecuaciones

$$x^1 = p^1 + t\, v^1$$
$$x^2 = p^2 + t\, v^2$$

es claro que se trata de una traslación definida por el vector $t\, \mathbf{v}$, de la misma dirección que $\mathbf{v}$, lo que da una significación geométrica a la derivada: el límite de la diferencia relativa del valor de la función en el punto dado al que toma en el punto trasladado, al tender éste al dado en la dirección del vector $\mathbf{v}$ [2]. Es decir:

$$\partial_{\mathbf{v}} f(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\varphi_t(p)) - f(p)}{t}$$

Si consideramos ahora, para cada valor de t, el conjunto $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ de todas las traslaciones en la dirección del vector $\mathbf{v}$, tal conjunto forma un grupo respecto de la multiplicación o composición de estas traslaciones; en esa composición, $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$, y φ_0 es la transformación idéntica del plano. Se tiene así un homomorfismo del grupo aditivo $\mathbb{R}$ en el grupo $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ de todas las traslaciones del plano en la dirección de un vector $\mathbf{v}$, de modo que a cada $t \in \mathbb{R}$ le corresponde la traslación φ_t definida por el vector $t\,\mathbf{v}$. Se trata, pues, de un grupo de traslaciones dependiente, mediante ese homomorfismo, de un parámetro t: a cada valor de t se le asocia una traslación del grupo. La ecuación general de las traslaciones del grupo sería:

$$\varphi_t(x^1, x^2) = (x^1 + t\,v^1, x^2 + t\,v^2),$$

para cada punto (x^1, x^2) del plano y cada valor $t \in \mathbb{R}$ del parámetro. Por ser esas funciones diferenciables, tanto respecto de las coordenadas del punto como del parámetro, se dice que es un *grupo uniparamétrico de traslaciones.*

Si se transforma un punto $p\ (p^1, p^2)$ por cada una de las traslaciones φ_t, se obtiene el conjunto de todos los puntos

$$(x^1, x^2) = (p^1 + t\,v^1, p^2 + t\,v^2).$$

Pero

$$x^1 = p^1 + t\,v^1, \quad x^2 = p^2 + t\,v^2$$

son las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por p y tiene la dirección del vector $\mathbf{v}$. A esa recta se le llama la *órbita* del punto p mediante $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$. Cada punto del plano tendrá una órbita formada por todos los puntos transformados del dado por todas las traslaciones del grupo, quedando así clasificado el plano en todas estas órbitas, que forman el conjunto de todas las rectas paralelas al vector $\mathbf{v}$.

Sea ahora X un campo vectorial diferenciable, es decir, definido por un par de funciones diferenciables

$$(X^1(x^1, x^2), \quad X^2(x^1, x^2));$$

a cada punto $p\ (p^1, p^2)$ le asigna un vector

$$X_p : (X^1(p^1, p^2), \quad X^2(p^1, p^2)).$$

Siguiendo idéntico razonamiento, definiremos $\partial_{\mathbf{v}} X$ por sus componentes, como el

$$\lim_{t \to 0} \frac{(X^1(x^1 + t\,v^1, x^2 + t\,v^2), \quad X^2(x^1 + t\,v^1, x^2 + t\,v^2)) - (X^1(x^1, x^2), \quad X^2(x^1, x^2))}{t}$$

$$= (\partial_{\mathbf{v}} X^1(x^1, x^2), \quad \partial_{\mathbf{v}} X^2(x^1, x^2)).$$

Si X^1 y X^2 son constantes,

$$X^1(x^1, x^2) = a^1, \quad X^2(x^1, x^2) = a^2,$$

para todo punto (x^1, x^2), el campo X asigna a cada punto p el vector X_p: (a^1, a^2); todos los vectores del campo son, pues, de las mismas coordenadas o, lo que es lo mismo, en cada punto hay un vector y todos ellos son equipolentes; un *campo constante* no es, pues, otra cosa que un vector libre, toda una clase de vectores equipolentes entre sí. Ahora bien, en este caso, cualquiera que sea el vector $\mathbf{v}$,

$$\partial_{\mathbf{v}} X^i(x^1, x^2) = \partial_{\mathbf{v}} a^i = \text{grad}\, a^i \cdot \mathbf{v} = 0, \quad i = 1, 2,$$

de modo que $\partial_{\mathbf{v}} X = 0$. Recíprocamente, si un campo X es tal que $\partial_{\mathbf{v}} X = 0$ para todo vector $\mathbf{v}$ y, por tanto,

$$\text{grad}\, X^1 = 0, \quad \text{grad}\, X^2 = 0,$$

las funciones X^1 y X^2 serán constantes.

Llegamos, pues a esta conclusión: *Un campo vectorial del plano es constante, es decir, está formado por vectores equipolentes, si y sólo si la derivada direccional del campo es cero, cualquiera que sea el vector respecto del cual se derive.* Ahora bien, por las construcciones efectuadas resulta que un campo constante permanece invariante por cualquier traslación euclídea: sometido un vector del campo a una traslación, su transformado es el vector equipolente en el punto imagen, es decir, el vector que el campo asocia a este último punto; así, el campo queda invariante. Con lo que llegamos al siguiente resultado: Un campo vectorial del plano es invariante por una traslación euclídea del mismo cuando y sólo cuando la derivada direccional del campo respecto del vector de la traslación es nula. Queda así establecida la ligazón buscada entre traslaciones y derivadas: *el campo vectorial obtenido trasladando un vector por un grupo uniparamétrico de traslaciones tiene derivada direccional nula respecto del vector que define el grupo y recíprocamente.*

Esto sucede en el plano euclídeo o, similarmente, en cualquier espacio euclídeo, con las generalizaciones habituales. Pero ¿qué podemos hacer en espacios a los que Cartan llamaba no homogéneos? Nos falta en ellos el grupo uniparamétrico de traslaciones: precisamente de eso se trata, de definir una traslación. La técnica descrita nos sugiere la posible generalización de aquel grupo uniparamétrico de traslaciones, y por tanto de la derivada, en dos direcciones distintas: la que se refiere al grupo uniparamétrico y la de las traslaciones.

En un tal espacio —al que ya desde ahora llamaremos *variedad diferenciable*, con todo lo que esto entraña de superación de una serie de conceptos en los que no podemos entrar ahora [3]—, no tendremos en general traslaciones en el sentido euclídeo, pero sí pueden existir otros grupos uniparamétricos de transformaciones; a cada uno de tales grupos podemos asociarle una derivada siguiendo exactamente el mismo proceso que relacionaba el grupo de las traslaciones con la derivada direccional. A la derivada así obtenida se le llama *derivada de Lie.*

Otra dirección sería la de generalizar la idea de traslación. Hemos visto que si un campo de vectores tenía derivada direccional nula, los vectores se obtenían de uno de ellos mediante traslaciones en la dirección dada. Entonces, si sobre la variedad podemos dar una definición conveniente de derivada, un campo vectorial que se anule mediante esa derivada estará formado por vectores que diremos *trasladados* de uno de ellos; ésta será la *derivada covariante.*

Analicemos brevemente estos conceptos.

3. La derivada de Lie

Sea, pues, M una variedad diferenciable de dimensión arbitraria n, y $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ un grupo uniparamétrico de transformaciones de M. Para cada $t \in \mathbb{R}$, el correspondiente elemento φ_t del grupo es una aplicación diferenciable de M en M, y tal grupo está sometido a las condiciones que indicábamos al hablar del caso particular de las traslaciones en una cierta dirección. Según esas condiciones, la transformación φ_{-t} será la inversa de φ_t y cada una de éstas será por tanto un difeomorfismo, ya que su inversa es también diferenciable.

Dado un punto $p \in M$, el conjunto de puntos $\{\varphi_t(p) \mid t \in \mathbb{R}\}$ es una curva de M a la que llamaremos la *órbita de p*. Así, lo mismo que en el caso particular antes expuesto, queda M clasificada en las órbitas de todos sus puntos respecto del grupo uniparamétrico;

aquí serán curvas de M las que allí formaban un sistema de rectas paralelas a la dirección de traslación.

Definir ahora una derivación asociada al grupo $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ no es más que aplicar formalmente a este grupo la definición que antes se vio de derivada direccional: si f es una función diferenciable en el punto $p \in M$, la derivada de f en p respecto de $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ será:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\varphi_t(p)) - f(p)}{t},$$

es decir, el límite de la diferencia relativa de la función en el punto dado a la función en el punto transformado, al tender éste al primero a lo largo de la órbita. Llamemos X_p a esa derivada, o sea,

$$X_p f = \lim_{t \to 0} \frac{f(\varphi_t(p)) - f(p)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\varphi_t(p)) - f(\varphi_0(p))}{t},$$

por las condiciones dichas. Es evidente que

$$X_p(f+g) = X_p f + X_p g; \quad X_p(fg) = f(p) \cdot X_p g + X_p f \cdot g(p);$$
$$X_p r = 0, \quad \text{para} \quad r \in \mathbb{R}.$$

Así, según una idea bien conocida, esa derivada es un vector tangente en p no sólo a M sino, precisamente, a la órbita $\{\varphi_t(p) \mid t \in \mathbb{R}\}$. En el ejemplo de las traslaciones sería justamente el vector $\mathbf{v}$. También aquí tenemos, pues, en cada punto p un vector X_p asociado al grupo uniparamétrico, que es el vector tangente en p a su órbita. Queda definido así un campo vectorial X: el que a cada punto p asigna el vector X_p. A X se le llama *campo vectorial asociado al grupo uniparamétrico* $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$.

Como todo campo vectorial, transforma una función f en otra, $X f$, que, a cada punto p, hace corresponder el número $(X f)(p) = X_p f$, de modo que podemos denotar formalmente la función $X f$ por

$$Xf = \lim_{t \to 0} \frac{f \circ \varphi_t - f}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f \circ \varphi_t - f \circ \varphi_0}{t}$$

Pero la composición $f \circ \varphi_t$ es una función que diremos transformada de la f por el grupo uniparamétrico, y a esa transformación la denotaremos por φ_t^*:

$$\varphi_t^*(f) = f \circ \varphi_t.$$

La $\varphi_t{}^*$ es la transpuesta de φ_t en el sentido de que

$$(\varphi_t{}^* f)(p) = f(\varphi_t(p)), \quad \text{es decir,} \quad \varphi_t{}^*(f) = f \circ \varphi_t.$$

Así, pues,

$$Xf = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi_t{}^* f - f}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi_t{}^* f - \varphi_0{}^* f}{t},$$

lo que permite denotar simbólicamente el campo X asociado a $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ por:

$$X = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi_t{}^* - \varphi_0{}^*}{t}$$

con la significación dada en las expresiones anteriores.

A su vez, φ_t define también una aplicación entre los vectores tangentes que es transpuesta de $\varphi_t{}^*$ en el sentido anterior, y que denotaremos por φ_{t*}. Si Y_p es un vector tangente a M en p, el vector $\varphi_{t*} Y_p$ será un vector tangente en $\varphi_t(p)$ que quedará definido cuando sepamos cómo actúa sobre las funciones; de acuerdo con lo dicho, dada una función f definida en $\varphi_t(p)$ definiremos

$$(\varphi_{t*} Y_p) f = Y_p(\varphi_t{}^* f), \quad \text{es decir:} \quad \varphi_{t*}(Y_p) = Y_p \circ \varphi_t{}^*.$$

Y si Y es el campo que a cada punto p asigna el vector Y_p, se tiene también que su transformado por φ_{t*}, es decir, el campo Z definido lógicamente por $\varphi_{t*} Y_p = Z_{\varphi_t(p)}$, verifica [4]:

$$\varphi_{t*} Y = \varphi_t{}^{-1*} \circ Y \circ \varphi_t{}^*.$$

Podemos ahora definir la derivada del campo Y respecto del grupo $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$, o respecto del campo X asociado a éste, mediante una fórmula similar a la de la derivada de una función, es decir:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi_{0*} Y - \varphi_{t*} Y}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{Y - \varphi_{t*} Y}{t}.$$

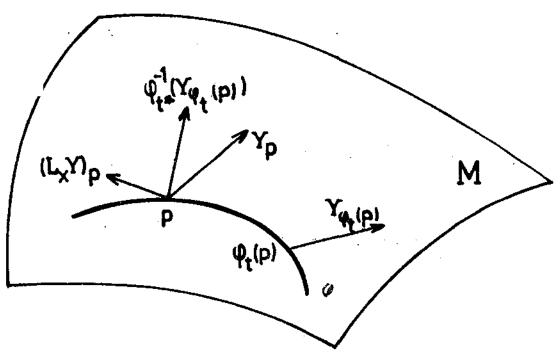
(La transposición de φ_{t*} respecto de $\varphi_t{}^*$ obliga, como se sabe, a que los términos en el numerador estén cambiados de orden en una respecto de la otra.) A esa derivada del campo Y respecto del campo X la llamaremos *derivada de Lie* y escribiremos:

$$L_X Y = \lim_{t \to 0} \frac{Y - \varphi_{t*} Y}{t}.$$

Se demuestra [5] que esa derivada de Lie de Y respecto de X, que es a su vez un campo vectorial, se obtiene también mediante el producto cruzado de Lie $[X, Y]$; esto es:

$$(L_X Y)f = [X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf).$$

Una vez más podemos comprobar ahora, a partir de esta expresión, que si $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ es el grupo de traslaciones del espacio euclídeo definidas por un vector $\mathbf{v}$, el campo X sería el campo constante $\mathbf{v}$ y la derivada de Lie L_X coincide con la derivada direccional $\partial_{\mathbf{v}}$. Nuestra derivada de Lie es, pues, una generalización de la derivada direccional obtenida mediante la utilización de un grupo uniparamétrico más general que el de las traslaciones en una cierta dirección.



La expresión obtenida proporciona una idea geométrica de lo que es la derivada de Lie. Sea, como antes, el campo $L_X Y$ y veamos cuál es el vector $(L_X Y)_p$ que asigna al punto p. En la órbita de p tomemos un punto arbitrario $\varphi_t(p)$; el campo Y asocia a dichos puntos los vectores Y_p e $Y_{\varphi_t(p)}$; si este último se transforma por $\varphi_{t*}^{-1} = \varphi_{-t*}$, se tendrá el vector $\varphi_{-t*}(Y_{\varphi_t(p)})$ tangente en el punto p; la diferencia entre él y el Y_p, partida por t, será también un vector tangente en p, y su límite es:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi_{-t*}(Y_{\varphi_t(p)}) - Y_p}{t} = \lim_{-t \to 0} \frac{Y_p - \varphi_{-t*}(Y_{\varphi_t(p)})}{-t} = \left(\lim_{-t \to 0} \frac{Y - \varphi_{-t*}(Y)}{-t}\right)_p =$$

$$= \left(\lim_{t \to 0} \frac{Y - \varphi_{t*}(Y)}{t}\right)_p = (L_X Y)_p,$$

que es justamente el vector que buscábamos. Hecho esto en todos los puntos p de M, quedará definido el campo $L_X Y$.

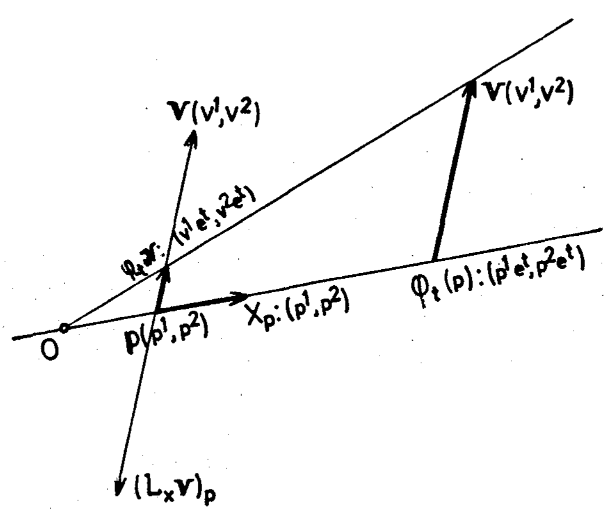
Podemos observar que los campos Y invariantes por las transformaciones del grupo, es decir, los que verifican $\varphi_{t*} Y = Y$, son los que tienen derivada de Lie nula: $L_X Y = 0$; son, pues, a las transformaciones del grupo lo que los campos constantes a las traslaciones euclídeas, aunque, naturalmente, no tienen por qué estar relacionados por equipolencia, que puede no estar siquiera definida. Y, aun estándolo, un campo de vectores equipolentes puede no tener derivada nula respecto de un grupo uniparamétrico que no sea de traslaciones.

Veámoslo en este ejemplo bien sencillo. La variedad es el plano euclídeo del que se ha suprimido un punto. El grupo uniparamétrico de las homotecias directas con centro ese punto tomado como origen es el definido por la ecuación:

$$\varphi_t (x^1, x^2) = (x^1 e^t, x^2 e^t).$$

La órbita que pasa por un punto p (p^1, p^2) es el conjunto de puntos

$$x^1 = p^1 e^t, \quad x^2 = p^2 e^t \Longrightarrow \frac{x^1}{p^1} = \frac{x^2}{p^2}$$



o sea, la recta que pasa por p y por el origen. Las órbitas son, pues, las rectas del haz de vértice el origen, excluyendo éste en todas, como se ha dicho. El vector tangente en p a la órbita que pasa por él es el de coordenadas

$$\left(\frac{d x^1}{d t}, \frac{d x^2}{d t}\right)_{t=0} = (p^1, p^2),$$

así que el campo X asociado al grupo $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ es el campo cuyas coordenadas son (x^1, x^2). Un campo vectorial Y de coordenadas (Y^1, Y^2) tiene por derivada de Lie $L_X\ Y = [X, Y]$, que es el campo de coordenadas

$$\left(x^1 \frac{\partial Y^1}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial Y^1}{\partial x^2} - Y^1, \quad x^1 \frac{\partial Y^2}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial Y^2}{\partial x^2} - Y^2\right)$$

Evidentemente, el campo X: (x^1, x^2) verifica $L_X\ X = \mathbf{0}$. Y si Y fuese un campo constante, $\mathbf{v}$: (v^1, v^2), su derivada de Lie es $(-v^1, -v^2)$, es decir, el campo opuesto de $\mathbf{v}$ pero no el campo nulo. En la figura se ve la interpretación geométrica hecha antes: el vector $\mathbf{v}$ en un punto se transforma en su «homotético» mediante cada φ_t.

Es ya una cuestión técnica de rutina extender la derivada de Lie a formas diferenciales o a campos tensoriales cualesquiera, siguiendo exactamente los mismos pasos. En particular, para una función f había resultado: $L_X f = X f$.

4. Derivadas covariantes

Así que hemos procedido a generalizar la teoría clásica de la derivación con la de derivación de Lie, sin más que pasar de las traslaciones euclídeas en una cierta dirección a otras transformaciones diferenciables cualesquiera que formen también grupo uniparamétrico. Pero, como dijimos en su momento, podíamos haber procedido al revés: generalizar la idea de derivada, considerar para la nueva definición campos de vectores de derivada nula y llamar entonces *traslación* (o *traslado paralelo*) a la transformación que pasa de un vector a otro de ese campo a través de una curva que una los orígenes de esos vectores. Esta noción generaliza, como se ve, la de Levi-Cività y, más aún, la de equipolencia o traslación euclídea. Vamos a intentar su formalización.

Recurramos para ello al modelo de partida: la derivada direccional en el plano euclídeo, por ejemplo. Veíamos que un campo vectorial X de componentes

$$(X^1(x^1, x^2), \quad X^2(x^1, x^2))$$

era constante cuando grad. $X^1 =$ grad. $X^2 = 0$, esto es, cuando $d X^1 = d X^2 = 0$; llamando, como es habitual, $d X$ al vector de coordenadas $(d X^1, d X^2)$, diremos que X es invariante por las traslaciones cuando $d X = 0$, y a $d X$ le llamaremos *diferencial del campo* X. Esta definición es independiente de la base elegida en el plano: si ésta es $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ y tomamos una nueva base $\{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$, donde $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}'_j a^j_i$, $a^j_i \in \mathbb{R}$, las coordenadas de X en la nueva base, (X'^1, X'^2) son: $X'^i = a^i_j X^j$, y el vector de coordenadas

$$(d X'^1, d X'^2) = (a^1_j \, d X^j, a^2_j \, d X^j)$$

en la base $\{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$ tiene coordenadas $(d X^1, d X^2)$ en la base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, luego es el mismo vector $d X$.

Ahora bien, $d X$ es un campo vectorial del plano cuyos coeficientes no son escalares, funciones en este caso, sino diferenciales lineales, esto es, covectores. De hecho, respecto de la base dada, $d X$ lo escribiremos correctamente en la forma

$$d X = \mathbf{u}_1 \otimes d X^1 + \mathbf{u}_2 \otimes d X^2,$$

lo que equivale a establecer que $d X$ es un tensor (1, 1), una vez contravariante y una vez covariante. Así, pues, la diferencial ordinaria del plano euclídeo, que transforma una función f, que es un tensor (0, 0), en una forma, $d f$, que es (0, 1), transforma también un campo vectorial X, o tensor (1, 0), en un tensor (1, 1), $d X$, es decir, aumenta en una unidad el índice de covariancia de tales tensores. Esa diferencial es, por otra parte, siempre $\mathbb{R}$-lineal y verifica, lo mismo que en el caso del producto de funciones, que también

$$d(f X) = d f \otimes X + f \cdot d X.$$

Cualquier diferencial que queramos definir ahora sobre una variedad, si ha de ser una extensión de ésta, debería contar con la verificación de unas propiedades parejas.

Sea, pues, ahora M una variedad diferenciable de dimensión n; al módulo de tensores (r, s), r veces contravariantes y s veces covariantes, lo denotaremos por $\mathcal{T}^r{}_s$, y por $\mathcal{T}$ al álgebra de todos los campos tensoriales. Llamaremos *diferencial covariante* en M a toda aplicación $\nabla : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$ que verifique las siguientes condiciones:

1) $\nabla(\mathcal{T}^r{}_s) \subset \mathcal{T}^r{}_{s+1}$.

2) $\nabla f = df$, para toda $f \in \mathcal{T}^0{}_0$.

3) $\nabla(aK + a'K') = a \cdot \nabla K + a' \cdot \nabla K'$, con $K, K' \in \mathcal{T}$; $a, a' \in \mathbb{R}$

4) $\nabla(K \otimes K') = \nabla K \otimes K' + K \otimes \nabla K'$, $K, K' \in \mathcal{T}$.

Evidentemente la diferencial ordinaria del espacio euclídeo no es más que una particularización de esta diferencial covariante. Todavía se le impone una condición adicional para poder relacionar la diferencial de los vectores con la de los covectores y poder extenderla así de modo unívoco a todos los tensores mediante la condición 4); esta condición adicional es: 5) ∇ conmuta con la contracción interior. Así bastará ya definir la diferencial covariante de un campo vectorial.

Sea X este campo; en cada sistema local de coordenadas tendrá X unas componentes. Si $(x^1, \ldots, x^n)$ es un tal sistema de coordenadas, el campo X se puede escribir en la forma

$$X = \frac{\partial}{\partial x^i} X^i, \quad \text{donde} \quad (X^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, X^n(x^1, \ldots, x^n))$$

son las funciones coordenadas de X. La no homogeneidad de M impide que podamos definir la diferencial de X como el campo de coordenadas $(dX^1, \ldots, dX^n)$, al igual que hacíamos en el caso euclídeo que sí era un espacio homogéneo y, por tanto, una base del mismo era válida en todo él. Aquí, en cambio, pasando a otro entorno coordenado con $(x'^1, \ldots, x'^n)$ como base local, si $X = \dfrac{\partial}{\partial x'^i} X'^i$, se tendrá que $X'^i = \dfrac{\partial x'^i}{\partial x^j} X^j$ es la ecuación del cambio de coordenadas; entonces, si consideramos el campo de coordenadas $(dX'^1, \ldots, dX'^n)$ en la nueva base, este campo será:

$$\frac{\partial}{\partial x'^i} \otimes dX'^i = \frac{\partial}{\partial x'^i} \otimes d\left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} X^j\right) = \frac{\partial}{\partial x'^i} \otimes \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dX^j +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x'^i} \otimes d\left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right) X^j = \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes dX^j + \frac{\partial}{\partial x'^i} \otimes d\left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right) X^j.$$

El segundo sumando impide, pues, que $\frac{\partial}{\partial x'^i} \otimes d X'^i$ sea igual a $\frac{\partial}{\partial x^j} \otimes d X^j$, es decir, que la definición sea independiente del sistema de coordenadas. Ese sumando es nulo en el espacio euclídeo, pues lo que aquí es la función $\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}$ era allí el número real a^i_j.

Busquemos, pues, directamente una definición para ∇X. Por las condiciones de ∇ deberá cumplirse:

$$\nabla X = \nabla \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes X^i \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \nabla X^i + \nabla \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot X^i =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes d X^i + \nabla \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot X^i.$$

De modo que estará perfectamente determinada en este mapa local cuando decidamos el valor de $\nabla \frac{\partial}{\partial x^i}$. Pero, siendo $\frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathcal{T}^1{}_0$, será $\nabla \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathcal{T}^1{}_1$, de modo que será un vector con coordenadas formas diferenciales; si llamamos $(\omega_i^1, \ldots, \omega_i^n)$ a esas formas, tendremos:

$$\nabla \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes \omega_i^j.$$

Por consiguiente, cada elección de esas n^2 formas lineales ω^j_i nos da una diferencial covariante. Una precaución a tomar, para que la definición sea independiente de las bases, es ver cómo han de estar relacionadas con ellas las formas elegidas en otro entorno coordenado. Si éste es, como antes, el de coordenadas locales $(x'^1, \ldots, x'^n)$ y llamamos ω'^j_i a las formas de la diferencial en él, es decir,

$$\nabla \frac{\partial}{\partial x'^i} = \frac{\partial}{\partial x'^j} \otimes \omega_i'^j,$$

se tendrá, de $\dfrac{\partial}{\partial x'^i} = \dfrac{\partial}{\partial x^h} \cdot \dfrac{\partial x^h}{\partial x'^i}$:

$$\nabla \frac{\partial}{\partial x'^i} = \nabla\left(\frac{\partial}{\partial x^h} \cdot \frac{\partial x^h}{\partial x'^i}\right) = \frac{\partial}{\partial x^h} \otimes d\left(\frac{\partial x^h}{\partial x'^i}\right) + \nabla \frac{\partial}{\partial x^h} \cdot \frac{\partial x^h}{\partial x'^i} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^h} \otimes d\left(\frac{\partial x^h}{\partial x'^i}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \otimes \omega^k{}_h\right) \frac{\partial x^h}{\partial x'^i} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x'^j} \cdot \frac{\partial x'^j}{\partial x^h} \otimes d\left(\frac{\partial x^h}{\partial x'^i}\right) + \frac{\partial}{\partial x'^j} \cdot \frac{\partial x'^j}{\partial x^k} \otimes \omega^k{}_h \frac{\partial x^h}{\partial x'^i}$$

de donde, igualando a la primera expresión:

$$\omega'^j{}_i = \frac{\partial x'^j}{\partial x^k} \omega^k{}_h \frac{\partial x^h}{\partial x'^i} + \frac{\partial x'^j}{\partial x^h} d\left(\frac{\partial x^h}{\partial x'^i}\right).$$

Dadas, pues, las formas $\omega^j{}_i$ en una base local, están determinadas por la expresión anterior en las demás bases.

Así, definir una diferencial covariante sobre M es lo mismo que designar n^2 formas diferenciales lineales $(\omega^j{}_i)$ en una determinada base local. Diremos que una diferencial covariante, así entendida, es una *conexión lineal* sobre la variedad M, y a las $(\omega^j{}_i)$ las llamaremos *formas de la conexión*. Es claro que, en el caso de la diferencial ordinaria del espacio euclídeo, las formas de la conexión son nulas.

Continuando en el mismo entorno coordenado, al ser cada $\omega^j{}_i$ una forma diferencial lineal, tendrá una expresión en función de las diferenciales de la base de la forma:

$$\omega^j{}_i = \Gamma^j{}_{ki}\, d\, x^k.$$

Las coordenadas $\Gamma^j{}_{ki}$ de las formas de la conexión, en número de n^3, determinan igualmente a ésta y son llamadas *símbolos de la conexión*. Al pasar a otro entorno coordenado cambiarán de acuerdo con la variación ya indicada para las respectivas formas.

Hemos visto que el campo $X = \dfrac{\partial}{\partial x^i} \cdot X^i$ tenía una diferencial covariante

$$\nabla X = \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes d\,X^i + \nabla \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \mathrm{X}^i = \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes d\,X^i + \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \otimes \omega_i{}^j\right) X^i =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes (d\,X^j + \omega_i{}^j\,\mathrm{X}^i) = \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes \left(\frac{\partial\,\mathrm{X}^j}{\partial x^k} + \Gamma^j{}_{ki}\,X^i\right) d\,x^k,$$

siendo así un tensor (1, 1) considerado en esta forma como un vector con coordenadas covectores. De igual modo puede ser visto como un covector con coordenadas vectores:

$$\nabla X = \frac{\partial}{\partial x^j} \cdot \left(\frac{\partial X^j}{\partial x^k} + \Gamma^j{}_{ki}\,X^i\right) \otimes d\,x^k$$

Escribimos

$$\nabla_k X^j = \frac{X^j}{\partial x^k} + \Gamma^j{}_{ki}\,X^i,$$

y al vector

$$\nabla_k X = \frac{\partial}{\partial x^j} \cdot \nabla_k X^j,$$

que es la k-ésima coordenada del covector ∇X, le llamaremos *derivada covariante* del campo X respecto del vector $\dfrac{\partial}{\partial x^k}$. Las derivadas covariantes son, por consiguiente, para la diferencial covariante como las derivadas parciales para la diferencial ordinaria; más en particular, si la diferencial covariante es la ordinaria euclídea, las correspondientes derivadas covariantes coinciden con las parciales, ya que entonces los símbolos $\Gamma^i{}_{ki}$ son nulos. La generalización que estamos haciendo es, pues, clara.

Son inmediatas las siguientes propiedades de esta derivación covariante:

a) Si $Y = \dfrac{\partial}{\partial x^i} \cdot Y^i$, $\nabla_k (X + Y) = \dfrac{\partial}{\partial x^i} \cdot \left(\dfrac{\partial (X^i + Y^i)}{\partial x^k} + \Gamma^i{}_{kj} (X^j + Y^j)\right) =$

$= \nabla_k X + \nabla_k Y.$

b) $\nabla_k (a X) = a \cdot \nabla_k X$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

c) $$\nabla_k (f X) = \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \left(\frac{\partial (f X^i)}{\partial x^k} + \Gamma^i{}_{kj} (f X^j) \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x^k} \cdot X^i + f \frac{\partial X^i}{\partial x^k} + f \cdot \Gamma^i{}_{kj} X^j \right) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x^k} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} X^i \right) + f \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^k} + \Gamma^i{}_{kj} X^j \right) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x^k} \cdot X + f \cdot \nabla_k X.$$

d) Si $X = \dfrac{\partial}{\partial x^h} = \dfrac{\partial}{\partial x^i} \cdot \delta^i{}_h$,

$$\nabla_k \frac{\partial}{\partial x^h} = \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \left(\frac{\partial \delta^i{}_h}{\partial x^k} + \Gamma^i{}_{kj} \delta^j{}_h \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \Gamma^i{}_{kh} = \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \omega^i{}_h \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)$$

Esta expresión y la

$$\nabla \frac{\partial}{\partial x^h} = \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \omega^i{}_h$$

sugieren de modo muy natural la definición de derivada covariante respecto de un campo cualquiera Z:

$$\nabla_Z \frac{\partial}{\partial x^h} = \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \omega^i{}_h (Z),$$

la cual está dotada de las siguientes propiedades:

i) $$\nabla_{Y+Z} \frac{\partial}{\partial x^h} = \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \omega^i{}_h (Y+Z) = \nabla_Y \frac{\partial}{\partial x^h} + \nabla_Z \frac{\partial}{\partial x^h}$$

ii) $$\nabla_{fY} \frac{\partial}{\partial x^h} = \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \omega^i{}_h (f Y) = f \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \omega^i{}_h (Y) = f \cdot \nabla_Y \frac{\partial}{\partial x^h}$$

Con lo cual llegamos al caso más general de derivada covariante.

Siendo $Y = \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot Y^i$, se tendrá:

$$\nabla_Y X = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i} Y^i} X = Y^i \nabla_i X.$$

Las propiedades fundamentales de esta derivada covariante de un campo X respecto de otro Y son ya deducciones directas de las que acabamos de ver:

1) $\nabla_Y (X + Z) \{= Y^i \nabla_i (X + Z) = Y^i (\nabla_i X + \nabla_i Z) \} = \nabla_Y X + \nabla_Y Z.$

2) $\nabla_Y (f X) \Big\{ = Y^i \nabla_i (f X) = Y^i \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot X + f \cdot \nabla_i X \right) =$

$\left(Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) f \cdot X + f \cdot \nabla_Y X \Big\} = Y f \cdot X + f \cdot \nabla_Y X.$

3) $\nabla_{Y+Z} X \Big\{ = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i} (Y^i + Z^i)} X = (Y^i + Z^i) \nabla_i X = Y^i \nabla_i X + Z^i \nabla_i X \Big\} =$

$= \nabla_Y X + \nabla_Z X.$

4) $\nabla_{f Y} X \Big\{ = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i} (f Y^i)} X = f Y^i \nabla_i X \Big\} = f \cdot \nabla_Y X.$

5. El traslado paralelo

Ya estamos en condiciones de definir el traslado de un vector, dada la conexión lineal o diferencial covariante sobre la variedad. El vector y sus traladados a los distintos puntos formarán un campo vectorial cuya diferencial covariante es nula: ésa es la idea que había presidido la introducción de nuestro concepto generalizado de traslación. Habremos ahora de formalizar esta idea.

Sea c una curva diferenciable sobre M, es decir, una aplicación diferenciable de $\mathbb{R}$ en M; a cada $t \in \mathbb{R}$ le hace corresponder el punto $c(t) \in M$. En un cierto mapa local las coordenadas de los puntos de la curva son $(x^1(t), \ldots, x^n(t))$, para los valores de t que correspondan al entorno coordenado, y

$$\left(\frac{d x^1}{d t}, \ldots, \frac{d x^n}{d t} \right)$$

las coordenadas del vector tangente a la curva en cada punto. Supongamos que el punto correspondiente a $t = 0$ es $p = c(0)$, de coordenadas $(p^1, \ldots, p^n)$, o sea, $x^i(0) = p^i$, $i = 1, \ldots, n$; y sea

$$X_p = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p a^i$$

un vector tangente en p a M; este vector es el que queremos trasladar paralelamente a sí mismo a lo largo de c. Consideremos para ello una familia aún sin determinar de vectores

$$X_{c(t)} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{c(t)} f^i(t),$$

tangente cada uno a la variedad en un punto $c(t)$ de la curva. Para que sean trasladados del X_p paralelamente a sí mismos a lo largo de esta curva, habrá de verificarse, según el razonamiento que hemos venido haciendo, que en el punto p el vector de la familia sea precisamente el X_p y que la diferencial covariante de ese campo $X_{c(t)}$ de vectores sea cero, esto es:

$$X_p = X_{c(0)} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p f^i(0) \Rightarrow f^i(0) = a^i \tag{1}$$

$$\nabla X_{c(t)} = \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes (d f^j(t) + \omega_i{}^j f^i(t)) = 0 \Rightarrow \frac{d f^j(t)}{d t} + \Gamma^j{}_{ki} \frac{d x^k(t)}{d t} f^i(t) = 0 \tag{2}$$

Ha resultado un sistema lineal (2) de n ecuaciones diferenciales de primer orden que, para la condición inicial (1), asegura la existencia de una solución única $(f^1(t), \ldots, f^n(t))$, válida en un cierto segmento $[-r, r] \subset \mathbb{R}$ y formada por funciones diferenciables. Así, en cada punto $q = c(t_0)$, $|t_0| < r$, de esa curva, el vector

$$X_q = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q f^i(t_0)$$

será el paralelo a X_p en ese punto, trasladado a lo largo de la curva c. El sistema de ecuaciones (2) es el que nos resuelve el problema del transporte o traslado paralelo.

Si ahora tomásemos otro vector,

$$Y_p = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p b^i,$$

tangente en p, el sistema (2) con la condición inicial $f^i(0) = b^i$ nos daría una solución $(g^1(t), \ldots, g^n(t))$, como antes, y el vector

$$Y_q = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q g^i(t_0)$$

sería el trasladado a q del vector Y_p. Así, a lo largo de c, se establece una aplicación entre los vectores tangentes a M en p y los tangentes en q, es decir, una aplicación entre ambos espacios vectoriales tangentes, $T_p(M)$ y $T_q(M)$. El carácter lineal de las ecuaciones (2) implica, de un modo absolutamente trivial, la linealidad de esa aplicación; aplicación que es además invertible sin más que tomar las mismas ecuaciones con la condición inicial correspondiente al valor t_0 del parámetro. Resulta, pues, que *el traslado paralelo de un punto p a un punto q a lo largo de la curva c que los une es un isomorfismo, τ_c: $T_p(M) \longrightarrow T_q(M)$, entre los espacios tangentes en uno y otro punto,* isomorfismo obtenido a través de las ecuaciones (2). Estas ecuaciones están formuladas en términos de coordenadas locales en un abierto al que pertenecen p y q; es ya una cuestión técnica el paso a puntos de los demás abiertos coordenados que recubren la curva c.

Podemos establecer aquel isomorfismo mediante una base en cada uno de los espacios tangentes, como es bien sabido. Si $\{X_1, \ldots, X_n\}_p$ son n vectores que constituyen una base del espacio $T_p(M)$, sus transformados mediante τ_c formarán una base $\{X_1, \ldots, X_n\}_q$ de $T_q(M)$. Pues bien, todo vector $Y_p \in T_p(M)$ tendrá unas coordenadas $v^i \in \mathbb{R}$, por ejemplo, respecto de la base de $T_p(M)$: $Y_p = (X_i)_p v^i$: entonces, su transformado por el traslado paralelo es el vector

$$\tau_c(Y_p) = Y_q = (X_i)_q v^i,$$

es decir, el vector que tiene las mismas coordenadas en la base trasladada de la anterior al punto q:

$$\tau_c((X_i)_p v^i) = (\tau_c(X_i)_p) v^i.$$

¿Cuál será el caso de Levi-Cività, el cual ha sido tomado como punto de partida para hacer esta generalización? Supongamos una superficie en un espacio euclídeo, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2)$, es decir,

$$x^1 = x^1(u^1, u^2), \quad x^2 = x^2(u^1, u^2), \quad x^3 = x^3(u^1, u^2).$$

La forma cuadrática de esta superficie, que define en ella la longitud al considerarla como espacio de Riemann, es el producto del vector $d\,\mathbf{x}$ por sí mismo, o sea,

$$d\,\mathbf{x} \otimes d\,\mathbf{x} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i} d\,u^i\right) \otimes \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^j} d\,u^j\right) = g_{11}\, d\,u^1 \otimes d\,u^1 + 2\, g_{12}\, d\,u^1 \otimes d\,u^2 + \\ + g_{22}\, d\,u^2 \otimes d\,u^2,$$

con los productos escalares

$$g_{ij} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^j}.$$

A partir de esta forma se definen los símbolos de Christoffel,

$$\Gamma^h{}_{ij} = \frac{1}{2} g^{hk} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right)$$

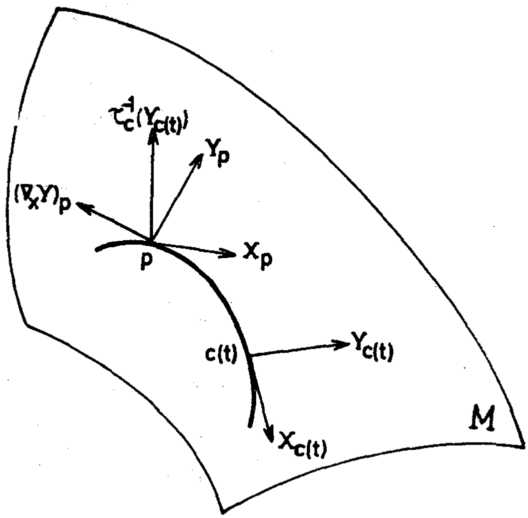
donde g^{hk} son las componentes contravariantes del tensor g_{ij} (o las componentes del tensor inverso de éste). Pues bien, la conexión definida en la superficie por los símbolos de Christoffel como símbolos de la conexión, es decir, aquella que tiene como formas de la conexión las $\omega^h{}_j = \Gamma^h{}_{ij}\, d\,u^i$, es la conexión de Levi-Cività o conexión euclídea.

Para esta conexión —ya lo dijimos en su momento— el transporte paralelo τ_c a lo largo de una curva trazada sobre la superficie es, no solamente un isomorfismo entre los planos tangentes a la superficie, sino una isometría: un vector se traslada a otro que tendrá su mismo módulo, dos vectores a otros dos que forman el mismo ángulo; en una palabra, una base ortonormal en un punto p se traslada a otra base también ortonormal en el punto q. La razón es que el tensor de la métrica (g_{ij}), tensor covariante de orden 2, como se sabe, que además es simétrico y definido positivo, tiene diferencial covariante nula respecto de esta conexión:

$$\nabla\,(g_{ij}\, d\,u^i \otimes d\,u^j) = 0\,;$$

o sea, el campo tensorial de la métrica riemanniana es invariante o paralelo respecto de la conexión euclídea.

El problema de la diferencial covariante de un tensor, que aquí hemos mencionado, está resuelto por las propiedades de la misma, entre las que figura la de poder aplicarla a productos tensoriales y extenderla así a tensores de cualquier tipo.



Aludamos, finalmente, a la interpretación geométrica de la derivada covariante, análogamente a como antes hicimos con la de Lie, con la cual tiene, como no podía ser menos, algunas similitudes. Supongamos que ∇ es una conexión lineal y X e Y dos campos vectoriales sobre M; queremos hallar $\nabla_X Y$, lo que supone saber determinar $(\nabla_X Y)_p$, en cada punto p de M. Sea $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ el grupo uniparamétrico (al menos local) asociado a X, es decir, las órbitas de ese grupo son tangentes en cada uno de sus puntos al vector que el campo X asocia a ese punto, lo que también se expresa diciendo que esas órbitas son las curvas integrales del campo X. Llamemos

$$c(t) = \{\varphi_t(p) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

a la órbita del punto p, con $c(0) = p$. El campo Y asigna el vector Y_p al punto p y el $Y_{c(t)}$ a cada punto $c(t)$ de esa curva. El traslado paralelo

$$\tau_c : T_p(M) \longrightarrow T_{c(t)}(M),$$

que es invertible, como dijimos, permite definir en $T_p(M)$ el vector $\tau_c^{-1}(Y_{c(t)})$, que es el trasladado del $Y_{c(t)}$ por el isomorfismo inverso. Entonces,

$$(\nabla_X Y)_p = \lim_{t \to 0} \frac{\tau_c^{-1}(Y_{c(t)}) - Y_p}{t},$$

lo que nos ilustra geométricamente el problema de la derivada covariante.

Como se ve, la diferencia con la derivada de Lie estriba en que aquí $Y_{c(t)}$ se traslada al punto p aplicándole la traslación definida por la conexión; en el caso de la derivada de Lie, se pasaba de $Y_{c(t)}$ a su imagen mediante φ_{t*}^{-1}, es decir, mediante la transformación del grupo uniparamétrico asociado al campo X.

6. Derivaciones

Esta analogía entre las dos derivadas, covariante y de Lie, provoca la existencia de propiedades iguales —no todas— en ambas derivadas. En particular, la derivada de Lie tiene las tres primeras propiedades que habíamos obtenido para las covariantes:

$$1)\quad L_X(Y+Z)\{=[X, Y+Z]=[X,Y]+[X,Z]\}=L_X Y+L_X Z,$$

$$2)\quad L_X(fY)\{=[X,fY]=f[X,Y]+Xf\cdot Y\}=f\cdot L_X Y+Xf\cdot Y,$$

$$3)\quad L_{X+Y}Z\{=[X+Y,Z]=[X,Z]+[Y,Z]\}=L_X Z+L_Y Z,$$

de acuerdo con las propiedades del producto cruzado; las cuales impiden, en cambio, que se verifique la 4), ya que:

$$L_{fX}Y\{=[fX,Y]=f[X,Y]-Yf\cdot X\}=f\cdot L_X Y-Yf\cdot X,$$

no es en general igual a $f\cdot L_X Y$, como ocurría con la derivada covariante, salvo que f sea una constante. En cambio sí verifica la siguiente nueva propiedad:

$$4)\quad L_{[X,Y]}Z\{=[[X,Y],Z]=-[[Y,Z],X]-[[Z,X],Y]=$$
$$=[X,[Y,Z]]-[Y,[X,Z]]=L_X(L_Y Z)-L_Y(L_X Z)\}=[L_X,L_Y]Z.$$

Propiedad que, en general, no es cierta para la derivada covariante, sino que está ligada con el tensor de curvatura R de la conexión correspondiente por la expresión:

$$R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]} .$$

Por cierto que si la conexión tuviese curvatura cero sí que se cumpliría para la derivada ∇ la propiedad 4) de la derivada de Lie y podríamos llamar conexión de Lie a esta conexión sin curvatura, aun cuando la derivada covariante no coincida con la de Lie, es decir, aunque sea $\nabla_X Y \neq [X, Y]$. Tentativas ha habido de definir conexiones de Lie atendiendo a estas ideas. I. CATTANEO-GASPARINI utiliza esta definición de carácter local: Si $X = \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot X^i$ en un entorno coordenado, se define la conexión por

$$\nabla_X Y = X^i \cdot L_{\frac{\partial}{\partial x^i}} Y = \frac{\partial}{\partial x^j} \cdot \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} X^i \right).$$

Esta conexión, que llama de Lie, satisface las propiedades de la derivada covariante, excepto, como ha puesto de manifiesto uno de nuestros colaboradores, la de ser independiente de las coordenadas. Sólo si la variedad es paralelizable y, por tanto, existe un sistema de coordenadas válido en toda ella, podría servir esa definición; de lo contrario, no parece justo llamarla conexión [6].

Lo que sí es cierto es que las notas comunes de las derivadas de Lie y de las covariantes deben llevarnos a la definición de una noción general de derivada de la cual sean éstas casos particulares. Esta definición, que puede adoptar distintas formas, queda cubierta, por ejemplo, por las condiciones siguientes: Sea X un campo vectorial sobre la variedad diferenciable M; llamaremos *derivada en la dirección del campo X*, o *respecto de X*, a toda aplicación

$$D_X : \mathcal{T}^r{}_s (M) \longrightarrow \mathcal{T}^r{}_s (M),$$

para cualquier tipo (r, s) de tensores, que verifique:

1) $D_X(K + L) = D_X K + D_X L$
2) $D_X(K \otimes N) = D_X K \otimes N + K \otimes D_X N$
3) $D_X f = X f$

para cualesquiera campos tensoriales K, L, N y cualquier función diferenciable f

4) D_X conmuta con la contracción tensorial.

A $D_X K$ se le llama la derivada de K en la dirección del vector X. Una tal derivada queda determinada por el campo X y por su actuación sobre los vectores. En efecto, si θ es una forma diferencial lineal, su transformada $D_X \theta$ es la forma que, para cada campo vectorial Y, actúa del siguiente modo [7]:

$$(D_X \theta)\, Y = X(\theta(Y)) - \theta(D_X Y).$$

Ahora, por la propiedad 2), conocida la derivada de los campos vectoriales y de las formas, se puede calcular la de cualquier tensor. En particular,

$$D_X(f\, Y) = X f \cdot Y + f \cdot D_X Y,$$

que es una de las propiedades que cumplían las derivadas particulares antes estudiadas. Esto nos dice también que cualquier tensor S de tipo (1, 1) puede ser considerado como una derivada en la dirección del campo nulo, ya que $S(f\, Y) = f \cdot S(Y)$.

A las derivadas que acaban de ser introducidas les son aplicables las definiciones habituales de adición, multiplicación por funciones y multiplicación cruzada, resultando que la suma de dos derivadas en las direcciones, respectivamente, de los campos X e Y es una derivada en la dirección del campo $X + Y$, el producto de una función f por una derivada en la dirección de X es una derivada en la dirección del campo $f X$, y el producto cruzado de dos derivadas en las direcciones de los campos X e Y es una derivada en la dirección del campo $[X, Y]$. Resulta así que el conjunto, que denotaremos por $\mathfrak{D}(M)$, de las derivadas aquí definidas constituye un módulo sobre las funciones y también un álgebra de Lie (sobre el cuerpo real). Por consiguiente, estas derivadas respecto de los campos de M poseen análogas estructuras a las de estos campos, que forman igualmente el módulo $\mathcal{T}^1{}_0(M)$ de los campos vectoriales y que a su vez puede ser dotado de la estructura de $\mathbb{R}$-álgebra de Lie para el producto cruzado de campos.

Esto nos sugiere la posibilidad de establecer, de modo natural, morfismos entre estas estructuras, que coinciden en la parte aditiva. Así, llamaremos *derivación de* M a toda aplicación $\mathbb{R}$-lineal D: $\mathcal{T}^1{}_0(M) \longrightarrow \mathfrak{D}(M)$, definida por $D(X) = D_X$. Esto es, a cada campo X hace corresponder una derivada D_X en la dirección del mismo, y verifica:

$$D_{X+Y} = D_X + D_Y; \quad D_{rX} = r\,D_X, \quad r \in \mathbb{R}.$$

A partir de aquí podemos obtener dos particularizaciones:

A) Diremos que ∇ es una *derivación covariante* (o una *conexión lineal de M*) cuando sea un homomorfismo del módulo $\mathcal{T}^1{}_0(M)$ en el $\mathcal{D}(M)$. Es decir:

$$\nabla_{fX} = f \cdot \nabla_X$$

B) Diremos que $\mathcal{L}$ es una *derivación de Lie* cuando se trata de un homomorfismo entre las álgebras de Lie $\mathcal{T}^1{}_0(M)$ y $\mathcal{D}(M)$:

$$\mathcal{L}_{[X,Y]} = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y].$$

En el caso A) se tienen justamente las conexiones estudiadas con anterioridad. El caso B) es, en cambio, más general que la clásica derivada de Lie en la que $L_X = [X, -]$, definida por $L_X Y = [X, Y]$.

7. Pseudoderivaciones y casi-derivaciones

Si consideramos ahora el conjunto de todas las derivaciones acabadas de definir e introducimos en él, del modo habitual, las operaciones con que hemos venido trabajando, nos desaparecen las estructuras que habíamos llegado a obtener. En efecto, si, por ejemplo, D y D' son dos derivaciones y llamamos, como se ha dicho, suma de ambas a la aplicación $D + D'$: $\mathcal{T}^1{}_0(M) \longrightarrow \mathcal{D}(M)$ definida por:

$$(D + D')(X) = D(X) + D'(X) = D_X + D'_X,$$

esta última es ciertamente una derivada pero no en la dirección del campo X sino del campo $2X$, por lo que $D + D'$ no cumple la definición de derivación. De igual modo, tampoco lo es $f\,D$, ya que a cada $X \in \mathcal{T}^1{}_0$ hace corresponder una derivada en la dirección del campo $f\,X$; o $[D, D']$ que al campo X le haría corresponder una derivada en la dirección del campo nulo, es decir, un tensor (1, 1). Se impone, pues, extender la noción de derivación a unos nuevos operadores que comprendan las derivaciones como casos particulares y para los que reencontremos las estructuras anteriores.

Sea D una derivación y $S \in \mathcal{T}^1_1(M)$ un tensor (1, 1), el cual puede ser considerado como un endomorfismo del módulo $\mathcal{T}^1_0(M)$, al actuar sobre cada campo X por la contracción del producto $S \otimes X$; a esa actuación la representaremos por $S\,X$. El par (D, S) define una aplicación $\mathcal{T}^1_0(M) \longmapsto \mathfrak{D}(M)$ al hacer corresponder a cada $X \in \mathcal{T}^1_0(M)$ la derivada $D_{S\,X}$ que la derivación D asocia al campo $S\,X$. Así, pues:

$$(D, S)_X f = D_{SX} f = (S\,X)\,f, \quad (D, S)_X (f\,Y) = (S\,X)\,f \cdot Y + f\,(D, S)_X\,Y.$$

A la aplicación $(D, S)\colon \mathcal{T}^1_0(M) \longrightarrow \mathfrak{D}(M)$ así definida se le denomina *pseudoderivación*; D y S se llaman, respectivamente, *derivación* y *tensor* componentes de la pseudoderivación anterior. Si $S = I$ es el tensor de Kronecker, $I\,X = X$, la pseudoderivación queda reducida a la derivación, $(D, I) = D$; de modo que las derivaciones son un caso particular de las pseudoderivaciones.

En uno de nuestros trabajos [8] estudiamos algunas propiedades de estos operadores. Para la definición natural de adición, la suma de dos pseudoderivaciones de tensores S y S', respectivamente, es una pseudoderivación de tensor $S + S'$; el producto cruzado de ambas, una pseudoderivación cuyo tensor es la diferencia de los productos tensoriales contraídos, $S \otimes S' - S' \otimes S$, y el producto de una función f por una pseudoderivación de tensor S es una pseudoderivación de tensor $f\,S$.

Resulta, entonces, que el conjunto de las pseudoderivaciones de M es un módulo sobre las funciones y un álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$. Queda así conseguido nuestro propósito. Si, además, D fuese una derivación covariante ∇, la pseudoderivación (∇, S) que verificaría $(\nabla, S)_{fX} = f\,(\nabla, S)_X$ se llamaría una *pseudoderivación covariante* o una *pseudoconexión*. El conjunto de las pseudoconexiones constituye un submódulo del módulo de las pseudoderivaciones.

El concepto de pseudoconexión había sido ya introducido por C. Di Comite. Su punto de partida nos sugiere un planteamiento posiblemente más elegante de la definición de pseudoderivación una vez que hemos ya visto las motivaciones que nos han llevado a su construcción. Para ello elegimos una idea de derivada más general que la de derivada en la dirección de un campo, sin más que prescindir de la condición 3) que éstas han de cumplir. Según eso, una *derivada sobre M* es una aplicación $\overline{D}\colon \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$ que conserva el tipo de los tensores, esto es, $\overline{D}$: $\mathcal{T}^r{}_s(M) \longrightarrow \mathcal{T}^r{}_s(M)$ para cualquier (r, s), y verifica las propiedades:

1') $\overline{D}(K + L) = \overline{D}\,K + \overline{D}\,L$.

2') $\overline{D}(K \otimes N) = \overline{D}\,K \otimes N + K \otimes \overline{D}\,N$.

3') $\overline{D}$ conmuta con la contracción tensorial.

Resulta evidente que el conjunto $\overline{\mathfrak{D}}(M)$ de estas derivadas contiene al $\mathfrak{D}(M)$ de las derivadas respecto de campos de M y que $\overline{\mathfrak{D}}(M)$ es también un módulo sobre las funciones.

Pues bien, llamaremos *pseudoderivación* a toda aplicación $\mathbb{R}$-lineal P: $\mathcal{T}^1{}_0(M) \longrightarrow \overline{\mathfrak{D}}(M)$. Para cada $X \in \mathcal{T}^1{}_0(M)$, $P(X) = P_X$ es una derivada sobre M y se verifica:

$$P_{rX+sY} = r\,P_X + s\,P_Y, \quad r,s \in \mathbb{R}.$$

Si, además, P es lineal respecto de las funciones, esto es, $P_{fX} = f \cdot P_X$, diremos que se trata de una *pseudoderivación covariante* o una *pseudoconexión* [9]. El entronque con la definición anterior de pseudoderivación se establece al considerar la aplicación

$$S: \mathcal{T}^0{}_0(M) \times \mathcal{T}^1{}_0(M) \to \mathcal{T}^0{}_0(M)$$

definida por $S(f, X) = P_X(f)$, la cual, siendo un tensor $(1, 1)$ mediante la identificación $S(f, X) = (S\,X)(f)$, resulta ser el tensor de la pseudoderivación.

Entre derivaciones y pseudoderivaciones se sitúa un módulo intermedio, el de las casi-derivaciones, caso particular de pseudoderivaciones y que contiene al conjunto de derivaciones. En ellas se exige que el tensor S sea no degenerado, y designaremos por S^{-1} a su recíproco. Definamos en el álgebra de Grassmann de las formas exteriores de M una antiderivación δ de grado uno, con las condiciones:

$$\delta f(X) = (S\,X)(f)$$

$$2\,\delta\,\omega(X, Y) = S\,X(\omega(Y)) - S\,Y(\omega(X)) - \omega(S^{-1}[S\,X, S\,Y]), \quad \omega \in \mathcal{T}^0{}_1(M).$$

(Si S fuese el tensor de Kronecker, δ sería la diferencial exterior.)

Llamaremos, entonces, *casi-derivación* a toda aplicación $\mathbb{R}$-lineal C: $\mathcal{T}^1{}_0(M) \longrightarrow \overline{\mathfrak{D}}(M)$ tal que la derivada $C(X) = C_X$ verifique: $C_X f = \delta f(X)$. De ello resulta, pues,

$$C_X(f\,Y) = f \cdot C_X Y + \delta f(X) \cdot Y.$$

Si además fuese C lineal para las funciones, o sea, $C_{fX} = f \cdot C_X$, la casi-derivación se llamaría *covariante*, o bien, una *casi-conexión*. Las casi-conexiones fueron introducidas de modo local por YUNG-CHOW WONG y, después, ELENA VAMANU las definió globalmente en la forma en que aquí hemos expuesto las casi-derivaciones [10].

Como resumen de lo antedicho, y con las notaciones que hemos utilizado, las derivaciones y sus generalizaciones, casi- y pseudoderivaciones, se definen como *aplicaciones* $\mathbb{R}$-*lineales del módulo* $\mathcal{T}^1{}_0\,(M)$ *de campos vectoriales de* M *en el de las derivadas*, $\overline{\mathfrak{D}}\,(M)$, distinguiéndose unas de otras por su actuación sobre las funciones: $D_X f = X f$, en el caso de las derivaciones; $C_X f = \delta f(X)$, en el de las casi-derivaciones, y $P_X f = (S X) f$ en el de las pseudoderivaciones.

Según eso, verificarán

$$D_{X+Y} = D_X + D_Y, \quad D_{rX} = r\, D_X \; (r \in \mathbb{R}),$$

y lo mismo C_X y P_X. Todas ellas transforman tensores (r, s) en tensores (r, s) y cumplen

$$D_X(K + L) = D_X K + D_X L, \quad D_X(K \otimes N) = D_X K \otimes N + K \otimes D_X N,$$

y la conmutación con la contracción tensorial; e igualmente si en vez de D_X se trata de C_X o de P_X. Esto implica que, en cada caso, se verifique:

$$D_X(f Y) = X f \cdot Y + f D_X Y; \quad C_X(f Y) = \delta f(X) \cdot Y + f C_X Y;$$
$$P_X(f Y) = (S X) f \cdot Y + f P_X Y.$$

La caracterización viene dada, pues, por el tensor $S \in \mathcal{T}^1{}_1\,(M)$ de las pseudoderivaciones; si éste no es degenerado, se tienen las casi-derivaciones, y si, además, es el tensor de Kronecker, las derivaciones.

De igual modo, si esas aplicaciones fuesen homomorfismos de los módulos entre los que actúan y, por consiguiente, se cumpliese $D_{fX} = f\, D_X$, y lo mismo en el caso de C y P, tendríamos las conexiones, casi-conexiones y pseudoconexiones lineales, respectivamente.

El estudio de las derivaciones y sus ampliaciones, y su extensión al caso de orden superior, está siendo realizado, en fase bastante avanzada, por nuestro pequeño equipo; pero ya no vamos a entrar en este desarrollo.

8. El lenguaje de los fibrados

Cederemos otra vez la palabra a Cartan. Si consideramos de nuevo en un espacio de Riemann una pequeña región alrededor de un punto dado p, el conocimiento del elemento de longitud del espacio permite, hasta cierto punto, como ya se dijo, hacer de esta región un pequeño trozo del espacio euclídeo; se puede imaginar, por ejemplo, una referencia rectangular de origen p y referir a ella todos los puntos infinitamente próximos a p, atribuyéndoles así unas coordenadas cartesianas rectangulares: las fórmulas que traducen los cambios de coordenadas rectangulares son exactamente las mismas que en el espacio ordinario. La dificultad comienza —también se vio ya— cuando se consideran dos porciones vecinas del espacio, una alrededor de p y la otra alrededor de un punto próximo q; constituyen dos trozos de espacio euclídeo de alguna manera aislados uno del otro. Si asociamos a los puntos p y q dos referencias rectangulares, sabremos localizar, al modo euclídeo, el origen q de la segunda referencia respecto de la primera, pero no sabemos orientar los ejes de la segunda referencia con respecto a los de la primera. El transporte por paralelismo de Levi-Cività nos proveía precisamente de un medio de fijar esta postura, puesto que sabemos, gracias a él, reconocer cuándo dos vectores de orígenes p y q deben ser mirados como paralelos.

Ahora bien, el espacio euclídeo ordinario es un espacio de Klein cuyo grupo fundamental es el de los movimientos. Este grupo es el que contiene la esencia de la geometría ordinaria; las ecuaciones fundamentales que rigen el desplazamiento de una referencia móvil no son otras que las ecuaciones de estructura del grupo fundamental. En un espacio de Riemann a cada uno de cuyos puntos se ha asociado una referencia rectangular, el paso de una referencia a otra infinitamente próxima se hace también por una transformación de ese grupo, transformación que se puede descomponer en una traslación, dada por el elemento de longitud del espacio, y en una rotación dada por el traslado paralelo de Levi-Cività. Se puede decir, pues, que el espacio de Riemann admite el mismo grupo fundamental que el espacio euclídeo, pero la transformación del grupo que hace-pasar de una referencia a otra no está definida más que de entorno en entorno y sólo tiene sentido si se da el camino que une los orígenes de las dos referencias. Por eso decíamos que el espacio de Riemann es un espacio no holónomo de grupo fundamental el de los desplazamientos.

La *no holonomía* se revelaba mediante el desarrollo según dos arcos de curvas distintas que unían dos puntos o, lo que viene a ser lo mismo, si se desarrolla según una curva cerrada o *ciclo*. Un tal ciclo, que partiría del punto p para volver a él, llevaría asociada en el espacio tangente en p una transformación del grupo fundamental, la que pasaría de la referencia dada en p a la obtenida, también en p, por el traslado de la anterior a lo largo del ciclo. Así, al conjunto de ciclos que parten de p se le asociaría un conjunto de transformaciones del grupo fundamental que, se demuestra fácilmente, forman un subgrupo de aquél; es el llamado *grupo de holonomía* del espacio, que es esencialmente el mismo en todos los puntos p. Ese subgrupo da de alguna manera una medida de la no holonomía del espacio; si se reduce a la transformación idéntica, se tiene un espacio de Klein. He aquí, pues, un principio de clasificación de los espacios que tienen un mismo grupo fundamental. El grupo de holonomía mide el grado de no holonomía del espacio, a la manera que el grupo de Galois de una ecuación algebraica mide, también en cierto modo, el grado de irracionalidad de sus raíces y permite una clasificación de las ecuaciones según ese grado de irracionalidad.

No hay ya dificultad en imaginar espacios no holónomos con grupo fundamental cualquiera. Un espacio proyectivo no holónomo, por ejemplo —lo que ahora llamaríamos una variedad con conexión proyectiva—, se obtendrá asociando *in abstracto* a cada punto de una variedad un espacio proyectivo tangente y dando una ley que permita integrar en uno solo los espacios proyectivos asociados a dos puntos infinitamente próximos. Si, por ejemplo, se asigna a cada uno una referencia proyectiva, dicha ley se traducirá analíticamente por una transformación del grupo proyectivo que juega así el papel de grupo fundamental.

Hasta aquí, como habíamos anunciado, unos párrafos de CARTAN. Si los hemos traído a consideración es porque en ellos se vislumbra ya de un modo magistral la idea de espacio fibrado y de cómo una generalización de las conexiones, tal como él la plantea, nos debe conducir a la noción de conexión en un fibrado, problema que ya se le presentó cuando buscaba introducir la conexión proyectiva. La cuestión consiste en que a cada vector tangente en un punto le corresponda, mediante el traslado paralelo a lo largo de una curva, un vector tangente en otro punto próximo; o, equivalentemente, a cada referencia en un punto, una referencia en el otro punto. Y que esa correspondencia sea un isomorfismo de la estructura del espacio tangente: sería una isometría en el ejemplo de la conexión euclídea para una variedad riemanniana expuesto por Cartan, o un isomorfismo $\mathbb{R}$-lineal si consideramos los espacios vectoriales tangentes, como en la conexión lineal, o una homografía si se trata de los espacios proyectivos tangentes, etc.

Pongámonos, para fijar ideas, en el caso más sencillo de los espacios vectoriales tangentes. Tenemos en cada punto p de M el espacio tangente $T_p(M)$ a la variedad, y llamemos $T M$ al conjunto de todos los vectores tangentes en todos los puntos de M. Por un proceso muy conocido, $T M$ puede ser dotado de estructura de variedad diferenciable. Cada uno de sus puntos, es decir, cada vector X_p tangente a M, tendrá unas coordenadas locales que se obtienen así: El punto p estará en un abierto coordenado de la variedad M, cuyo sistema de coordenadas es, por ejemplo, $(x^1, \ldots, x^n)$; en él, p tiene unas coordenadas $(p^1, \ldots, p^n)$, es decir, $p^i = x^i(p)$. En tal punto p, el sistema de coordenadas define una base

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}_p$$

del espacio tangente $T_p(M)$, y sean $(a^1, \ldots, a^n)$ las coordenadas de X_p en esa base:

$$X_p = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p a^i.$$

Diremos, entonces, que las coordenadas de X_p son

$$(p^1, \ldots, p^n, a^1, \ldots, a^n).$$

Si partimos de otro entorno coordenado de p en M, $(x'^1, \ldots, x'^n)$, donde

$$x'^i = x'^i(x^1, \ldots, x^n), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

y son $(p'^1, \ldots, p'^n, a'^1, \ldots, a'^n)$ las coordenadas de X_p en el nuevo sistema, las ecuaciones del cambio de coordenadas serán:

$$p'^i = x'^i (p^1, \ldots, p^n), \qquad a'^i = \left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right)_p \cdot a^j,$$

es decir, las nuevas coordenadas son funciones diferenciables de las antiguas.

Podemos definir una aplicación, también diferenciable, π: $T M \longrightarrow M$, en la que cada punto $X_p \in T M$ se transforma en el punto p. Es evidente que $\pi^{-1}(p) = T_p(M)$, de modo que esta aplicación π clasifica los puntos de $T M$ de forma que cada clase es el espacio tangente en un punto; espacio tangente que es isomorfo a $\mathbb{R}^n$ en el isomorfismo $X_p \longmapsto {}^t(a^1, \ldots, a^n)$ (t = transpuesta), en el que a cada punto se le hace corresponder la matriz de sus coordenadas. Ahora bien, en $T_p(M)$ (o en $\mathbb{R}^n$) el grupo fundamental de transformaciones es el grupo general lineal, $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$, o sea, el grupo de matrices cuadradas regulares de orden n. Si, por ejemplo, (c^i_j) es una tal matriz ($|c^i_j| \neq 0$), cada vector $X_p \in T_p(M)$ que suponíamos era

$$X_p = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p a^i,$$

se transforma mediante esa matriz en el

$$Y_p = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p b^i,$$

donde $b^i = c^i_j a^j$; y, recíprocamente, dados dos vectores en un mismo punto, se pasa de uno al otro mediante la actuación por la izquierda de una transformación del grupo general lineal.

Pongamos ya nombre a estos objetos. A $T M$ le llamaremos *fibrado tangente* de M; a π, la *proyección*; $\pi^{-1}(p)$, que es el espacio tangente en p, es la *fibra en el punto* p: así que el fibrado queda clasificado en fibras cada una de las cuales es isomorfa a la variedad $\mathbb{R}^n$, a la que llamaremos *fibra tipo*; finalmente, hay un grupo que opera sobre la fibra tipo mediante multiplicación por la izquierda, que es el grupo general lineal, y le llamaremos *grupo estructural*. Como la fibra tipo es un espacio vectorial y el grupo estructural el de sus automorfismos, se dice que ese fibrado tangente es un *fibrado vectorial*. Pero esto no es más que un ejemplo. Veamos otro, también sugerido por el texto de Cartan.

Ahora, en un punto p de M vamos a considerar una base $B_p = \{X_1, ..., X_n\}_p$ del espacio tangente $T_p(M)$, y formamos como antes el conjunto $B\,M$ formado por todas estas bases. Si

$$(X_i)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p a_i^j,$$

cada elemento B_p de $B\,M$ puede ser dotado, a la manera anterior, de unas coordenadas $(p^1, ..., p^n, (a^j_i))$, donde las columnas de la matriz (a^j_i) son, respectivamente, las coordenadas de cada elemento $(X_i)_p$ de la base B_p y se verifica, por tanto, $| a^j_i | \neq 0$. Hay así una biyección entre las bases en p y el grupo general lineal. Nuestro fibrado ahora, que se llamará *de las referencias lineales*, es $B\,M$; la proyección π: $B\,M \longrightarrow M$ es la aplicación que a cada base B_p en un punto p hace corresponder este punto; $\pi^{-1}(p)$ es el conjunto de todas las bases de $T_p(M)$, luego isomorfo a $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$; y, finalmente, podemos pasar de una base a otra también multiplicando por la izquierda por una matriz regular. De modo que en este caso la fibra tipo, $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$, coincide con el grupo estructural: a los fibrados en que esto ocurre se les llama *fibrados principales*. El que esbozaba Cartan es otro ejemplo de ellos: la variedad era riemanniana, el espacio tangente en cada punto era euclídeo y la base elegida en él, ortonormal; la fibra sería el conjunto de todas las bases ortonormales en dicho punto y el grupo estructural, que habrá de transformar bases ortonormales en ortonormales, es el grupo ortogonal, isomorfo a la fibra tipo.

Ya podemos pasar, sin entrar demasiado en puntualizaciones técnicas, a una exposición más general del espacio fibrado; más exactamente, en nuestro caso, al espacio fibrado diferenciable o variedad fibrada: E y M son dos variedades diferenciables y π: $E \longrightarrow M$, una aplicación diferenciable; cada entorno coordenado de M induce mediante π un entorno coordenado en E y hay una condición adicional, que eludimos, traducción de la que relacionaba los cambios de cordenadas en los ejemplos anteriores. Decimos entonces que E es un fibrado sobre M si cada $\pi^{-1}(p)$, $p \in M$, es una variedad difeomorfa a una cierta variedad diferenciable F, llamada fibra tipo, y existe un grupo de Lie G, llamado grupo estructural, que opera sobre F efectivamente por la izquierda. Si F y G coinciden, operando G sobre sí mismo por la operación del grupo, los fibrados se llaman principales.

9. Conexiones en fibrados

Veamos cómo podemos definir una conexión en un fibrado principal. Tomemos, como siempre, el modelo de la conexión lineal, bien entendido que sería igualmente traducible a los demás. Esencialmente consistía en establecer un isomorfismo entre los espacios tangentes $T_p(M)$ y $T_q(M)$, en dos puntos p y q de M, a través de una curva que los una. Si $B_p = \{X_1, ..., X_n\}_p$ es una base de $T_p(M)$ y $B_q = \{Y_1, ..., Y_n\}_q$ la base trasladada paralelamente a q, ese isomorfismo hace corresponder cada $(X_i)_p$ con el vector $(Y_i)_q$, y todo vector $Z_p = (X_i)_p\, a^i$ de $T_p(M)$ se transformará por el isomorfismo en el $Z_q = (Y_i)_q\, a^i$, es decir, en el que tiene las mismas coordenadas en la base trasladada.

Si, entonces, elegimos una nueva base, $B'_p = \{X'_1, ..., X'_n\}_p$, de modo que se pasa de una a otra mediante una matriz $A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$:

$$(X'_1, ..., X'_n)_p = (X_1, ..., X_n)_p\, A,$$

al ser las columnas de A las coordenadas de cada $(X'_i)_p$ respecto de B_p, la base trasladada $B'_q = \{Y'_1, ..., Y'_n\}_q$ estará formada por vectores $(Y'_i)_q$ cuyas coordenadas en B_q son las mismas que las de (X'_i) respecto de B_p, luego

$$(Y'_1, ..., Y'_n)_q = (Y_1, ..., Y_n)_q\, A.$$

Planteemos esta situación en el fibrado principal $\pi\colon B\,M \longrightarrow M$ de las referencias lineales. Sea c una curva de M que une los puntos p y q; la traslación paralela a lo largo de c será un isomorfismo

$$\tau_c : T_p(M) \to T_q(M)$$

entre los espacios tangentes en ambos puntos. La base $B_p \in \pi^{-1}(p)$ se transforma mediante τ_c en la $B_q \in \pi^{-1}(q)$; pero toda otra base $B'_p = B_p\, A \in \pi^{-1}(p)$ se transformará, según se ha visto, en $B'_q = B_q\, A$, es decir, el isomorfismo τ_c ha de cumplir:

$$\tau_c(B_p\, A) = \tau_c(B_p)\, A,$$

donde A era un elemento del grupo $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ que opera así sobre cada fibra por multiplicación a la derecha. De este modo τ_c aparece como un isomorfismo entre las fibras $\pi^{-1}(p)$ y $\pi^{-1}(q)$.

Definir ahora el concepto de conexión en un fibrado principal de modo que esa condición se verifique es ya una cuestión técnica hoy bien conocida [11]. Sea E un fibrado principal sobre M; para cada $p \in M$, la fibra $\pi^{-1}(p)$ es una subvariedad de E que puede relacionarse mediante un difeomorfismo con la fibra tipo que es, a su vez, grupo estructural G. Este difeomorfismo permite definir una actuación por la derecha de G sobre cada $\pi^{-1}(p)$ así: si $\bar{p} \in \pi^{-1}(p)$ y en el difeomorfismo le corresponde el elemento $g \in G$, operando sobre $\bar{p}$ por la derecha mediante cada elemento h de G se obtiene el elemento $\rho_h(\bar{p}) \in \pi^{-1}(p)$, que es el correspondiente en el difeomorfismo al $g\,h \in G$. Es la generalización al fibrado principal de lo que en el de las referencias suponía multiplicar por la derecha cada base por una matriz del grupo general lineal. Observemos también que, siendo $\pi^{-1}(p)$ una subvariedad de E, el espacio tangente en uno de sus puntos $\bar{p}$ a $\pi^{-1}(p)$ será un subespacio del espacio tangente en $\bar{p}$ a E:

$$T_{\bar{p}}(\pi^{-1}(p)) \subset T_{\bar{p}}(E);$$

a ese subespacio tangente a la fibra se le llama *espacio vertical*, pues sus vectores se proyectan mediante la aplicación inducida π_* en el vector nulo de $T_p(M)$. Designaremos, entonces, por $V E$ a la distribución que a cada punto $\bar{p}$ de E asigna el espacio vertical en él:

$$(V E)_{\bar{p}} = T_{\bar{p}}(\pi^{-1}(p))$$

Sumariamente, dar una conexión sobre M equivale a elegir otra distribución

$$\{H_{\bar{p}}\}_{\bar{p} \in E}, \quad H_{\bar{p}} \subset T_{\bar{p}}(E),$$

es decir, otro subespacio del espacio tangente en cada punto $\bar{p}$ de E, sujeta a estas condiciones: 1) Cada subespacio $H_{\bar{p}}$ es complementario del espacio vertical en ese punto:

$$H_{\bar{p}} \oplus (V E)_{\bar{p}} = T_{\bar{p}}(E).$$

2) Las actuaciones por la derecha mediante los elementos de G dejan invariante la distribución:

$$\rho_{h*}(H_{\bar{p}}) = H_{\rho_h(\bar{p})}.$$

3) Esa distribución es diferenciable, en un sentido que ahora no vamos a precisar. A los espacios $H_{\bar{p}}$ se les llama *espacios horizontales* y son los que definen la conexión.

La proyección π induce ahora el isomorfismo π_* entre cada espacio horizontal $H_{\bar{p}}$ y el espacio tangente en el punto proyección, $T_p(M)$. Así, a cada vector tangente en un punto p de M podemos hacerle corresponder de modo único un vector horizontal en cada punto $\bar{p}$ de $\pi^{-1}(p)$, al que llamaremos *elevación horizontal* al fibrado del vector dado. Y un campo vectorial X sobre M se elevará así a un único campo $\bar{X}$ de vectores horizontales sobre E; querrá decir que en cada punto $\bar{p} \in \pi^{-1}(p)$ es $\bar{X}_{\bar{p}} \in H_{\bar{p}}$ y $\pi_*(\bar{X}_{\bar{p}}) = X_p$. Igualmente, una curva $c(t)$ entre dos puntos p y q de M se eleva horizontalmente al fibrado así: si $\bar{p} \in \pi^{-1}(p)$, la curva $\bar{c}(t)$ buscada es la que pasa por $\bar{p}$, verifica que $\pi(\bar{c}(t)) = c(t)$ y sus vectores tangentes $\bar{c}'(t)$ son horizontales: $\bar{c}'(t) \in H_{\bar{c}(t)}$; elegido $\bar{p}$, se demuestra que esa curva es única. También se puede comprobar, por las propiedades de la definición de conexión, que si $\bar{c}(t)$ es la curva elevada de $c(t)$ que pasa por $\bar{p}$, la $\rho_h(\bar{c}(t))$ es precisamente la elevación de $c(t)$ que pasa por $\rho_h(\bar{p})$.

Con esto tenemos preparado ya el material para nuestro problema. Sea c una curva entre los puntos p y q de M; mediante la conexión podemos establecer una aplicación τ_c entre $\pi^{-1}(p)$ y $\pi^{-1}(q)$ del modo siguiente: a cada $\bar{p} \in \pi^{-1}(p)$ le vamos a hacer corresponder el punto $\bar{q} \in \pi^{-1}(q)$ de la elevación $\bar{c}$ de c que pasa por $\bar{p}$: si $c(0) = p$, $c(1) = q$, por ejemplo, y $\bar{c}(t)$ es la elevación tal que $\bar{c}(0) = \bar{p}$, entonces $\bar{q} = \bar{c}(1)$. Esa aplicación $\tau_c\colon \pi^{-1}(p) \longrightarrow \pi^{-1}(q)$ verifica ciertamente:

$$\tau_c(\rho_h(\bar{p})) = \rho_h(\tau_c(\bar{p})).$$

En efecto, si $\bar{p}_1 = \rho_h(\bar{p})$, la elevación horizontal de c que pasa por $\bar{p}_1$ será la curva $\bar{c}_1(t) = \rho_h(\bar{c}(t))$, como hemos dicho; $c_1(0) = \bar{p}_1$, luego

$$\tau_c(\bar{p}_1) = \bar{c}_1(1) = \rho_h(\bar{c}(1)) = \rho_h(\bar{q}) = \rho_h(\tau_c(\bar{p})).$$

El cumplimiento de lo que habíamos pedido para el caso lineal está ya claro.

Hay otra presentación de la conexión equivalente a la anterior pero definida sobre un fibrado asociado a un fibrado principal, es decir, un fibrado que se construye a partir de éste y de una nueva variedad, que va a funcionar como fibra tipo y sobre la que, por consiguiente, actuará por la izquierda el grupo estructural del fibrado principal, que lo será también del asociado. No es más que la abstracción del caso lineal, que ya habíamos también apuntado.

En este ejemplo de partida, con $\pi : B\,M \longrightarrow M$ como fibrado principal de grupo estructural $Gl\,(n, \mathbb{R})$, considerada la variedad $\mathbb{R}^n$ sobre la que actúa tal grupo, el fibrado asociado que aparece es justamente el fibrado tangente $\pi' : T\,M \longrightarrow M$. La curva c que teníamos en M entre los puntos p y q y que, en la conexión de $B\,M$ establecía un isomorfismo

$$\tau_c : \pi^{-1}(p) \to \pi^{-1}(q);$$

nos va a definir también un isomorfismo

$$\tau_c' : \pi'^{-1}(p) \to \pi'^{-1}(q),$$

entre las fibras de $T\,M$, así: Sea $Y_p \in \pi'^{-1}(p)$ y un elemento cualquiera

$$B_p = \}X_1, \ldots, X_n\{_p \in \pi^{-1}(p);$$

se tendrá, por ejemplo, $Y_p = (X_i)_p\, a^i$, es decir, las a^i son las coordenadas de Y_p en la base B_p; si

$$B_q = \tau_c(B_p) = \}X'_1, \ldots, X'_n\{_q$$

en la conexión dada, llamaremos $\tau'_c(Y_p)$ al vector tangente en q cuyas coordenadas son las mismas a^i en la base B_q: $\tau'_c(Y_p) = (X'_i)_q\, a^i$. Este isomorfismo τ'_c es, pues, el traslado paralelo en la conexión así establecida en $T\,M$. El nos permite la consideración de elevación horizontal de curvas y de la distribución que define la conexión en $T\,M$ que se propone luego para introducir en abstracto, y bastante laboriosamente, una conexión en un fibrado asociado inducida biunívocamente por la conexión del fibrado principal del que procede. Y, volviendo de nuevo al caso lineal que sirve de modelo: la comprobación de que la derivación covariante en M se corresponde con la derivación de Lie en $B\,M$, lo que una vez más nos establece una relación entre ambas operaciones.

¿Cómo se generalizaría con la técnica de los fibrados el problema de las pseudoconexiones? Ya DI COMITE las había considerado, en uno de los trabajos citados, como secciones de un fibrado vectorial asociado a un fibrado principal. Posteriormente se ha encontrado [12] una definición global de pseudoconexión sobre un fibrado principal, como un campo tensorial diferenciable S de tipo (1, 1) conmutable con las actuaciones por la derecha de los elementos del grupo estructural —$S \circ \rho_{g*} = \rho_{g*} \circ S$, para todo $g \in G$— y que deja invariantes los campos verticales —$S\,X = X$, para todo campo vertical sobre el fibrado—.

La última información que he podido allegar, por cierto, de una gran elegancia, es debida al ruso V. L. SPESIVYH [13] y de ella no he tenido acceso más que a su recensión en el *Mathematical Reviews*, no a los artículos originales ni, lo que habría sido para mí efectivo, a su traducción al inglés. Considera el fibrado $\pi : E \longrightarrow M$ y la aplicación inducida entre los vectores tangentes: $\pi_* : T\,E \longrightarrow T\,M$. Llamando $V\,E$, como antes, a la distribución vectorial vertical, es evidente que $V\,E \subset T\,E$. Por otra parte, $\pi_*^{-1}(T\,M)$ está formado por todas las clases de vectores que tienen la misma proyección. La aplicación $n : T\,E \longrightarrow \pi_*^{-1}(T\,M)$ en que a cada vector de $T\,E$ se le hace corresponder la clase a que pertenece es naturalmente supraoyectiva y, si el vector era vertical, le corresponde la clase nula, esto es, la que se proyecta en el vector cero de M. Esto hace que

$$0 \longrightarrow VE \xrightarrow{i} TE \xrightarrow{n} \pi_*^{-1}(TM) \longrightarrow 0,$$

donde i es la inyección, es una sucesión exacta corta. Pues bien, *una casi-conexión es una inversa por la derecha de n y una pseudoconexión, una inversa por la izquierda de i.*

10. FINALE

La belleza de este resultado no puede ocultar el hecho de que el lenguaje se nos va tornando cada vez más críptico. Casi inevitablemente. Se dice que ya EINSTEIN se quejaba de que, desde que los matemáticos la habían tomado con la teoría de la relatividad, ni él mismo la entendía. Y, en sus *Máximas y reflexiones*, escribe GOETHE: *Los matemáticos son como los franceses; se conversa con ellos, traducen luego las cosas habladas a su lenguaje y las transforman en algo completamente distinto*. Lo malo, y por eso digo que es inevitable, es que los matemáticos sólo vemos clara una cosa cuando llegamos a expresarla así; lo demás se queda en el mundo de las analogías o de las ambigüedades.

Véase, pues, a qué extremos nos ha conducido aquella primera idea tan simple de intentar trasladar a una curva, a una superficie, a una variedad, en fin, el tipo de geometría de la recta, del plano o de un espacio lineal. El eterno problema de la linealidad y de la linealización; de estudiar lo lineal, para lo que la matemática nos provee de todos los instrumentos, y de linealizar lo que no lo es para poder conocerlo siquiera aproximadamente. Puede que no otra cosa sea toda la matemática. Acaso porque vemos que así obra la naturaleza y las rectas de nuestras variedades son las líneas de mínimo esfuerzo, las geodésicas, etc. Acaso porque sea lineal nuestra estructura mental y nos haya llevado a mirar primero la Tierra como plana y como lineal después el espacio, hasta llegar incluso a la conclusión de que «decir que el espacio es curvo y cerrado como una cáscara de nuez es una frase muy sugestiva que ha embelesado a todos aquellos que encuentran las ideas tanto más admirables cuanto menos se entienden» (J. Palacios).

Lo curioso es que hasta cuando en el lenguaje coloquial se habla de lo geométrico se presupone abusivamente que se está aludiendo a las figuras lineales: dibujo geométrico, paisaje geométrico, trazado geométrico, se refieren casi siempre a rectas, cuadrículas, cubos, quizá otros poliedros. ¿Cuántas veces no habremos tropezado con frases de este tenor?: «Y Broadway, que cruza sesgado la isla de Manhattan, complica las cosas, va introduciendo novedades, anomalías en el trazado rectilíneo y perpendicular de calles. Geometría, *ma non troppo*» (J. Marías). O también: «Sus curvas suaves y graciosas *rompen con la geometría* inexorable de la meseta castellana. Frente a la infinita horizontal de la llanada y a la vertical del chopo solitario traza el camino su ruta caprichosa en pura fruición de juego» (J. Izquierdo). Lo que recuerda al campesino que a ORTEGA le mostraba la *geometría* castellana y hablaba sólo de rectas en sus distintas posiciones, pero las curvas...: «¡En Castilla, caballero, no hay curvas!»

Verdad es que la interpretación de esta respuesta trasciende ya a otro ámbito, el del comportamiento: que de siempre ha sido alabada la recta intención, una conducta rectilínea, la rectitud moral, mientras se vituperaba —no sé si todavía se sigue haciendo— el carácter sinuoso y retorcido (valdría decir, con curvatura o con torsión, respectivamente). Es posible que la matemática, reflejo en fin de cuentas de la vida, entienda del mismo modo lo que es bueno y busque por ello rectificar lo que anda torcido. Tal vez el alma humana, y por consiguiente la mente humana, tienda a lo lineal y los geómetras, con nuestra aproximación lineal primero, en el aspecto local, y nuestras conexiones después, globalizando aquel problema, no hagamos otra cosa que dar cumplimiento en nuestra pequeña parcela a lo que a un nivel más elevado y en un sentido también mucho más profundo prescribe el Libro [14]: *Que los valles se levanten y los montes y colinas desciendan, que todo lo torcido se enderece, que lo escabroso se aplane.*

Muchas gracias.

NOTAS

[1] La primera conferencia fue pronunciada por Cartan el 13 de agosto de 1924 en el Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en Toronto y se tituló: «La théorie des groupes et les recherches récentes de géometrie differentielle»; fue publicada en *L'Enseign. math.*, *24* (1925), 1-18, y en *Proc. Int. Math. Congress Toronto*, *1* (1928), 85-94. Una traducción debida al Prof. RODRÍGUEZ BACHILLER se publicó en nuestra *Rev. Mat. Hisp.-Amer.*, *2* (1927), 1-13, 30-39. La segunda conferencia, «La théorie des groupes et la géometrie», fue dictada en Berna, el 7 de mayo de 1927, en la sesión de primavera de la Société Mathématique Suisse, y publicada en *L'Enseign. math.*, *26* (1927), 200-225.

[2] El caso particular más sencillo de las funciones de una variable, cuya derivada es

$$f'(x) = \lim_{t \to 0} . \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$$

no es más que el producido por las traslaciones $\varphi_t(x) = x + t$, definidas, para cada valor de t, en la recta real.

[3] Todavía Cartan, en la segunda edición de una de sus obras, *Leçons sur la géometrie des espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, Paris (1951), conserva una frase, que se ha hecho lapidaria, al comenzar el estudio de las variedades: «La noción general de variedad es bastante difícil de definir con precisión». Tras de lo cual no tiene inconveniente en comenzar a trabajar con las variedades sin otra definición que la presentación de unos cuantos modelos («Una superficie da idea de una variedad de dos dimensiones», ...), hasta la descripción de lo que sería una variedad en abstracto. Es distinta la situación actual pero aquí vamos a prescindir, naturalmente, de su formalización.

[4] En efecto, si llamamos Z al campo $\varphi_{t*} Y$, será

$$((\varphi_{t*} Y) f)(p) = (Z f)(p) = Z_p f.$$

Como $Z_p = (\varphi_{t*} Y)_p$, este vector será el transformado por φ_{t*} del $Y_{\varphi_t^{-1}(p)}$ de modo que

$$((\varphi_{t*} Y) f)(p) = (\varphi_{t*} Y_{\varphi_t^{-1}(p)}) f = Y_{\varphi_t^{-1}(p)} (\varphi_t^{*} f) =$$

$$= (Y(\varphi_t^{*} f))(\varphi_t^{-1}(p)) = \varphi_t^{-1*} (Y(\varphi_t^{*} f))(p) = ((\varphi_t^{-1*} \circ Y \circ \varphi_t^{*})(f))(p),$$

de acuerdo con todas las transformaciones antes descritas.

[5] Puede verse una demostración con recursos análogos a los que aquí empleamos en nuestro trabajo: «Una demostración formal sobre la derivada de Lie de un campo», *Actas X Reunión Anual Mat. Españ.*, Publ. Inst. «Jorge Juan», Madrid (1972), 70-75.

[6] Eso lo advierte ya la autora diciendo que sólo tiene sentido localmente y llamándola conexión de Lie *asociada a la base local* correspondiente. Su trabajo «Operatori intrinseci di derivazione su una varietà parallelizabile», *Rend. Acc. Naz. Lincei*, *46* (1969), 682-688, ha sido analizado por nuestro colaborador J. LEÓN en su tesis doctoral *Derivaciones y conexiones en módulos*, Publ. Fac. Ciencias, Univ. Complut. Madrid, Ser. A, n.º 230 (1975), quien propone a su vez y estudia una definición de conexión de Lie ∇ tal que, para todo par de campos X, Y, verifique que $\nabla_X Y - \nabla_Y X$ sea una derivada de Lie generalizada, es decir, que cumpla aquellas cuatro propiedades acabadas de indicar para estas derivadas y la cual queda precisada al final de este apartado.

[7] En efecto, $\theta(Y)$ es una función obtenida mediante la contracción $c(\theta \otimes Y)$. Por lo tanto:

$$X(\theta(Y)) \overset{3}{=} D_X(\theta(Y)) = D_X(c(\theta \otimes Y)) \overset{4}{=} c(D_X(\theta \otimes Y)) =$$
$$\overset{2}{=} c(D_X \theta \otimes Y + \theta \otimes D_X Y) = (D_X \theta) Y + \theta(D_X Y),$$

donde los números que figuran sobre el signo = indican la propiedad que en cada caso se utiliza.

[8] J. J. ETAYO: «Pseudoderivaciones», *Rev. Mat. Hisp.-Amer.*, *35* (1975), 82-98.

[9] El trabajo en que DI COMITE introduce por primera vez la noción de pseudoconexión es: «Pseudoconnessioni tensoriali di specie (r, s) di ordine n», *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), *79* (1968), 107-139, en el que busca justamente ampliar las conexiones tensoriales de aquel tipo de modo que se obtenga un módulo sobre las funciones. Posteriormente se centra en las pseudoconexiones lineales a partir del artículo: «Pseudoconnessioni lineari su una varietà differenciabile di classe C^∞», *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), *83* (1969), 133-152. Aquí llama pseudoconexión a un homomorfismo entre los módulos $\mathfrak{T}^1{}_0(M)$ y $\overline{\mathfrak{D}}(M)$ y demuestra que, dado un tensor $T \in \mathfrak{T}^1{}_1(M)$ y un homomorfismo B del módulo $\mathfrak{T}^1{}_0(M)$ en el de los $\mathbb{R}$-endomorfismos de $\mathfrak{T}^1{}_0(M)$ que verifique:

$$B(X)(fY) = f \cdot B(X)(Y) + T(f, X)Y,$$

existe una única pseudoconexión P tal que

$$P(X)(f) = T(f, X), \quad P(X)(Y) = B(X)(Y).$$

Finalmente establece la equivalencia entre las dos definiciones en «Pseudoconnessioni lineari su una varietà differenziabile V, considerate come sezioni di un fibrato vettoriale di base V associato ad un fibrato prinzipale P, e connessioni su P», *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), *94* (1972), 83-108. Citemos, por último, «Geodetiche rispetto ad una pseudoconnessione lineare su una varietà differenziabile», *Matematiche (Catania)*, *30* (1975), n.º 2, (1976), 320-338, porque enuncia que las casi-conexiones, a las que vamos a referirnos en la continuación, constituyen un caso particular de las pseudoconexiones: son pseudoconexiones lineales de rango n, esto es. aquellas para las que, en cada punto de M, el endomorfismo que T define en el espacio tangente es un automorfismo.

[10] Y. C. WONG: «Linear connections and quasi-connections on a differentiable manifold», *Tohoku Math. J.*, *14* (1962), 48-63; E. VAMANU: «Cvasi-conexiuni pe varietăţi diferenţiabile», *An. şt. Univ. Iaşi*, *16* (1970), 383-388. La misma autora continúa su estudio en «Quasi-connexions sur variétés différentiables. II», *An. st. Univ. Iaşi*, *18* (1972), 161-166.

[11] Puede verse, por ejemplo, en un libro que a mi modo de ver se hará un clásico en esta materia: S. KOBAYASHI, K. NOMIZU, *Foundations of differential geometry*, Intersc. Publ., New York, 1963, 1969. En él se estudia la conexión en los fibrados principales y en sus fibrados asociados y se particulariza luego al fibrado de las referencias lineales. O también en el que fue su precursor, verdaderamente una pequeña joya en mi opinión: K. NOMIZU, *Lie groups and differential geometry*, Math. Soc. Japan, 1956.

[12] Véase, por ejemplo, A. FARINOLA, M. LEUCI: «Sulle pseudoconnessioni di prima specie su un spazio fibrato differenziabile», *Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli* (4), *46* (1979), 63-74 (1980).

[13] Los dos artículos a que hacemos referencia son: «Casi-conexiones y pseudoconexiones en un fibrado diferenciable» y «Generalización del concepto de conexión en un fibrado vectorial», publicados en *Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matematika*, *1978*, n.º 10, 105-107, y *1979*, n.º 6, 74-77, respectivamente. La versión inglesa, en *Soviet Math.* (Iz. VUZ), *22* (1978), n.º 10, 84-86, y *23* (1979), n.º 6, 80-84, respectivamente.

[14] ISAÍAS, 40, 4.

DISCURSO DE CONTESTACION

DEL

EXCMO. SR. D. ENRIQUE LINES ESCARDO

Excmo. Sr. Presidente,
Excmos. Sres. Académicos,
Señoras y Señores:

He de agradecer a la Academia el que me designara para, en su nombre, daros la bienvenida y expresaros la satisfacción de la Corporación por contaros entre sus miembros. Mi agradecimiento es doble: por haberme dado ocasión de ser testigo inmediato en el solemne acto de recepción de un entrañable amigo, y por tener la oportunidad de presentarlo al público y sociedad en su gran dimensión humana y científica.

José Javier Etayo Miqueo nació en Pamplona en el seno de una familia de pura raigambre navarra. Su madre de la Montaña y su padre de la tierra de Estella, compendian y definen la unidad de un pueblo de rancias virtudes, a la vera de un camino de historia y cultura maravillosas. Pertenecían sus padres a aquella generación, nunca bastante elogiada, que, quizá por primera vez, supo ver en los bienes del saber la mejor herencia con que podían dotar a sus hijos, y a ello dedicaron todo su esfuerzo. Su padre lector infatigable y siempre interesado en lo que significara conocimiento, supo crear el ambiente adecuado para el estudio, respetando siempre la libertad de elección de sus hijos. Rindo homenaje sincero a esa familia, que extiendo a las que con análogas inquietudes encontramos en nuestros pueblos y que nos obligan a creer en el futuro.

Conocí a Etayo a finales del año 1946, cuando recién nombrado Catedrático de Análisis matemático, daba mis primeras lecciones en el viejo edificio de la Universidad de Zaragoza en la plaza de Paraíso. No era muy numeroso el grupo de alumnos, pero sí muy grande la ilusión e interés con que asistían a aquella querida Facultad, siempre de gran prestigio. Allí acudía Javier Etayo, y allí terminó su licenciatura con Premio extraordinario en 1950. El nos ha narrado cómo vino a Madrid y se incorporó a la Universidad formándose y principiando su carrera de profesor. Entre el 52 y el 61 es Ayudante, Adjunto y Profesor encargado. Se doctora en 1959 con Premio extraordinario. Por oposición llega a la Cátedra de Geometría 1.º y Geometría 5.º de la Universidad de Zaragoza en 1961, y en 1963 pasa a la de Madrid como Catedrático de Geometría 5.º. En esta cátedra continúa su docencia con lealtad a su vocación, entrega a sus discípulos y estudio creador.

No bien llegado a la cátedra de Madrid, y ya es requerido el concurso del profesor Etayo en cargos y comisiones, en los que de forma continuada se le reitera la confianza. A continuación doy noticia de los más importantes: Jefe del Departamento de Matemáticas de la Escuela de Formación del Profesorado de Grado Medio (1965-69); Miembro de la Comisión promotora de la Universidad Autónoma de Madrid (1968); Vicedecano de la Facultad de Ciencias de la Universidad Complutense de Madrid (1971-75); Académico correspondiente de la Sección de Exactas de la Academia de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales de Zaragoza (desde 1963); Secretario del Patronato «Alfonso el Sabio» del C. S. I. C. (1963-76); Secretario y Vicepresidente de la Real Sociedad Matemática Española (1960-76); Consejero de Número del C. S. I. C. (desde 1969); Consejero Nacional de Educación (1974-76); Presidente de la Real Sociedad Matemática Española (1976-82); Vicedirector del Instituto «Jorge Juan» de Matemáticas del C. S. I. C. (desde 1964) y Miembro del Comité español de la Unión Internacional de Matemáticos (desde 1979).

Al releer esta lista, cuando escribo esta semblanza, me admira el espíritu de servicio ejemplar que muestra el profesor Etayo al aceptar estos cargos, pero no es menor mi admiración ante la unanimidad de las distintas instituciones al requerir su colaboración.

Con frecuencia sucede que no conocemos a las personas con las que habitualmente nos relacionamos; parece como si la realidad de la persona, con su evidencia, extinguiera cualquier interés en valorarla. Sólo cuando se reflexiona ante un *curriculum vitae* surgen las sorpresas.

Ciertamente que en Etayo se reconoce una cualidad, que no sé bien cómo calificarla, pero en la cual encuentro una gran dosis de cordialidad. Todos sabemos de personas cuya presencia en reuniones o ambientes, crea un clima de tensión o inquietud, y de otras que son deseadas por su acción de moderación inteligente. Una de éstas es Etayo, pues, además de su claridad de juicio, su presencia es afectuosa.

Una faceta del nuevo Académico es su preocupación por la renovación de la enseñanza de la Matemática a nivel de bachillerato. Seguramente en una prospección sobre su personalidad, en ambientes no especializados, se le reconocería por la popularidad de los textos que ha dirigido, y por la autoridad en los seminarios para profesores de Enseñanza Media. Más de 12 textos de carácter didáctico ocuparían amplio espacio en una biblioteca de esta especialidad, y otras 25 publicaciones del mismo campo de interés son razón de una fama bien merecida.

Reflexionando sobre estos datos me doy cuenta de un aspecto del trato con Etayo que siempre me ha cautivado, y que especialmente he percibido en esas conversaciones «paso a paso» que tan difíciles son en el nerviosismo de la gran ciudad. Cuando le exponía una interpretación sensible y próxima de algún proceso matemático de complicación críptica, siempre me ha gratificado con su aprobación. Alguna vez le he protestado por su benevolencia. «Tal vez sea deformación profesional», me ha dicho. Sin embargo, yo pienso que no es deformación sino formación de un maestro, que ha enseñado Geometría a miles de jóvenes españoles.

El matemático Etayo es un geómetra, y aunque parezca ingenua esta afirmación, tal vez no lo sea tanto en un momento de la cultura matemática, en el que el hecho geométrico busca su identidad. Sus trabajos de investigación, desde un principio, a través del instrumento algebraico o analítico, se han guiado por un pensamiento geométrico subyacente.

Al llegar a Madrid en 1952, el profesor Etayo se incorpora al equipo formado en torno del profesor Abellanas, al que pertenecieron profesores hoy bien conocidos como Fernández Biarge, Sancho Guimerá, Arregui, Viviente y otros que trabajaban sobre temas de Geometría algebraica.

Etayo se ocupa entonecs de un problema que, de una forma u otra, ha sido una constante en su producción: la teoría de derivaciones y diferenciales. El estudio de los sistemas de diferenciales sobre una variedad algebraica le lleva a buscar caracterizaciones de la irregularidad y de los plurigéneros y a definir una equivalencia de divisores, que llama algebraica, y que aparece como la proyección sobre un subcuerpo de la equivalencia lineal en un cuerpo.

La última parte de sus resultados, que ya habían sido iniciados en su tesis doctoral y trabajos posteriores, forma el contenido de una comunicación, *The concept of algebraic equivalence of divisors of a field,* que presenta en el Congreso Internacional del Matemáticos celebrado en Estocolmo en 1962.

Para entonces ya ha obtenido la Cátedra de Geometría diferencial en Zaragoza y poco a poco va desplazando su interés desde la Geometría algebraica a la diferencial. No era infrecuente que, dado el escaso número de cátedras convocadas a oposición, el acceso a una de ellas de programas no coincidentes con la temática de un investigador, le obligara a desviar su dirección en la línea de trabajo.

Cambia así Etayo su temática de investigación, tras una etapa intermedia en la que sigue buscando los aspectos algebraicos que aparecen en los conceptos de tipo diferencial y en la construcción de técnicas que puedan ser utilizadas en ambas teorías. Lo cierto es que, sin prescindir del todo de la componente algebraica, sus investigaciones derivan por su propia dinámica al estudio, cada vez más acentuado, de las conexiones y derivaciones en general.

En la *Revista Matemática Hispano-Americana* y en las Actas de los congresos matemáticos, que anualmente se celebran, ha sido expuesta la mayor parte de la labor realizada en todos estos campos. Del último de ellos, dentro de la Geometría diferencial, ningún resumen mejor para conocer el tipo de temas por los que se ha interesado y algunos de los resultados obtenidos, en especial en el problema de las pseudoderivaciones, que el discurso que acabamos de oir.

Las últimas direcciones de sus trabajos, no incluídas en él, apuntan a problemas de elevación de derivaciones a un fibrado. En el caso del fibrado tangente ha llegado a poder definir de modo unívoco las elevaciones completas en los casos más interesantes. Dos artículos en prensa recogen está línea de sus investigaciones más recientes. El primero *On a complete lifting of derivations* aparecerá en breve en la revista japonesa *Tensor*; y el otro *Derivations in the tangent bundle* en un próximo volumen de *Lecture Notes,* que contendrá las comunicaciones del último Simposium Internacional de Geometría diferencial celebrado el pasado octubre en Peñíscola.

El profesor Etayo tiene 27 publicaciones sobre trabajos de investigación, ha dirigido diversas tesis doctorales, y por otra parte ha contribuído activamente en los trabajos sobre «Terminología científica» que realiza nuestra Academia.

* * *

Cumplo también gustoso la segunda parte de mi misión en este acto, que conforme a la costumbre es glosar el discurso del recipiendario.

La lectura estudiosa de la que el autor llama «Pequeña historia de las conexiones geométricas», ha sido para mí motivo de gran placer al poder contemplar la panorámica de una de las teorías básicas del pensamiento geométrico moderno. Pero, seguramente, uno de los más sinceros elogios que puedo hacer de su lectura es que despierta la atención hacia un tema central y sugestivo, en el que convergen las ideas claves del método diferencial, la presencia de un nuevo espacio físico y la realidad de un hecho geométrico cuya definición se busca. Sabido es que el mérito de un ensayo no reside en lo que está escrito, sino en lo que sugiere al lector. Reflexiones sobre estas sugerencias será lo que me permitiré exponer a vuestra consideración.

La palabra conexión, nexo o enlace entre dos entidades, tiene en Geometría diferencial un sentido preciso, que no es el resultado de una bella arbitrariedad, sino exigido para su adecuación al estudio de las propiedades intrínsecas de las variedades.

Con la célebre memoria de Riemann en la que se define localmente la longitud mediante una forma diferencial, inicia una andadura la Geometría en la que se libera de la universalidad del grupo fundamental. Beltrami y Christoffel continúan en esta dirección, y el profesor Ricci, de la Universidad de Padua, vertebra todos estos resultados y, con un sentido geométrico admirable, se preocupa de investigar las propiedades y las leyes físicas que son invariantes respecto de un cambio de coordenadas. En 1901, Ricci y su famoso discípulo Levi-Cività publican la memoria fundamental sobre los métodos del nuevo Cálculo diferencial absoluto. Posteriormente se le dio el nombre de Análisis tensorial, según la pauta de Einstein, que introdujo notables simplificaciones en la notación.

En el contexto de los descubrimientos del Cálculo diferencial absoluto, está presente la realidad del pensamiento físico, que se podría considerar realizada en la figura del citado Levi-Cività. No es completa una interpretación de este momento matemático sin el contraste con el físico. En la historia de la Matemática en las primeras décadas de este siglo se detecta, en esta teoría, un período en el que el pensamiento matemático está en resonancia con el físico, lo que se traduce en un período de creatividad. La exposición de la teoría de la relatividad restringida, que se refiere a propiedades de variedades del espacio pseudo-euclídeo «espacio-tiempo», se consigue de una forma más ágil con la notación vectorial y tensorial; pero para la exposición de la teoría de la relatividad general, que se refiere a propiedades de variedades pseudo-riemannianas, es indispensable un cálculo especial de tensores sobre tales variedades. Afortunadamente este cálculo ya había sido descubierto, pero no había atraído la atención de los físicos.

En los trabajos de Einstein sobre relatividad restringida, prescinde de las fuerzas de gravedad, y no son necesarios los métodos del Análisis tensorial. El espacio y el tiempo se asocian para dar lugar al espacio de Minkowski, en el que globaliza una imagen cuatridimensional del Universo, cuya geometría está determinada por las transformaciones de Lorentz. Cuando Einstein toma en consideración las fuerzas de gravedad y busca una estructura geométrica del «espacio-tiempo», en la que los objetos se muevan automáticamente siguiendo las mismas líneas que las que resultan de la acción de la gravedad, percibe la necesidad de una definición local del espacio y de un tipo de cálculo adecuado. Einstein encuentra en Grossmann un colaborador en las técnicas del nuevo cálculo, y en 1914 publican la primera formalización de la teoría de la relatividad generalizada.

La importancia de los trabajos de Einstein, crearon un clima de interés por el Análisis tensorial y la Geometría riemanniana, que fue acompañado con la publicación de monografías y textos notables. Con gusto recuerdo el excelente tratado sobre *Cálculo diferencial absoluto* aparecido el año 1924, cuyo autor fuera el Académico y gran profesor José M.ª Plans y Freyre. La claridad del texto es ejemplar y, como a través de él fue mi primer conocimiento de este cálculo, tengo un recuerdo agradecido del mismo.

Cuatro años más tarde se publicaron las lecciones sobre *Geometría de los espacios de Riemann,* del famoso Elie Cartan. Obra genial de tal riqueza de ideas, que sin duda se encuentran en ella los gérmenes de todos los desarrollos posteriores de la teoría. El estilo magistral de Cartan se revivía con admiración por todos los que fueron discípulos suyos, y a la memoria me viene el siempre recordado Germán Ancochea al que distinguió con particular afecto.

El profesor Etayo inicia la presentación del problema de la conexión geométrica recogiendo el pensamiento de Cartan expuesto en la obra citada, y nos guía después, orillando las formalizaciones que durante muchos años han sido el lenguaje propio de esta teoría, llegando hasta las últimas generalizaciones del concepto.

La historia de la conexión, es la historia de la derivación o de las derivaciones adecuadas a este cálculo tensorial, protagonizada por los clásicos Lie, Christoffel, Ricci, Cartan y continuada por los investigadores de hoy, entre los que se cuenta nuestro nuevo Académico. En su aspecto geométrico es la historia de la traslación paralela, que genialmente descubriera Levi-Cività en 1917 como primera innovación en el Análisis tensorial a instancias de la teoría de la relatividad. En esencia los problemas de derivación y de traslación paralela son equivalentes.

En la teoría de la conexión geométrica, se describe cómo partiendo de una situación espacial se puede pasar a otra próxima, para «paso a paso» conseguir la exploración de las entidades geométricas. Prescindiendo de las precisiones propias de un curso, el profesor Etayo razona sobre la geometría de una variedad diferenciable, y como es local la definición de los espacios que Cartan llama «no homogéneos», en el estudio de la conexión la proximidad ha de considerarse en sentido infinitesimal. Con un lenguaje informal se podría decir que se trata de estudiar el paso de un punto a otro infinitamente próximo.

El estudio del nexo entre una situación y la próxima requiere tres elementos: una referencia en la situación de partida, otra en la de llegada, y lo que realmente es el paso, que estará determinado por la expresión analítica que fije la situación y postura de la referencia de llegada respecto a la de partida. Situando en la historia del pensamiento científico el problema, observamos que tiene la misma raíz que el que dio origen al Cálculo infinitesimal, del que en alguna forma conserva el lenguaje evocador cuando habla de los «puntos infinitamente próximos» y de los «desplazamientos infinitesimales», que seguramente escandalizarán a algunos oídos rigurosos.

Para fijar unos parámetros mentales en esta reflexión, consideremos a la manera newtoniana el movimiento de un punto. Si se fija el tiempo, la situación estática del punto geométrico no suministra ninguna información sobre el movimiento. Por el contrario, al admitir que el movimiento no cambia sensiblemente en los instates próxios al inicial, de esta supuesta uniformidad, resulta la noción de velocidad local. Si se asocia a la posición del punto esta velocidad, se consigue una información suficiente sobre el movimiento, para valores del tiempo próximos al inicial.

Frente a esta concepción dinámica de la derivada, de acuerdo con el pensamiento físico de Newton, se presenta la noción estática de Leibniz, según la cual la derivada es cociente de magnitudes infinitesimales, según el esquema monádico de su pensamiento.

He vuelto a estas raíces de la noción de derivada, porque ambas concepciones: la estática o geométrica y la dinámica o física, están presentes en la definición de la derivada covariante, que contiene todo el mensaje que conecta una situación con la infinitamente próxima. Así como la simple derivada del Cálculo de la segunda mitad del siglo XVII contiene toda la información que conecta un punto con el infinitamente próximo, la complicada derivada covariante de un tensor contiene igualmente toda la información que lo conecta con otro infinitamente próximo sobre la variedad diferenciable.

Los tres elementos que hemos mencionado presentes en una conexión, se pueden precisar ahora de la siguiente forma: las referencias en las situaciones de partida y de llegada son las que corresponden a las variedades lineales tangentes en dichos puntos infinitamente próximos, determinadas por un proceso de linealización local estático de la variedad, y el nexo entre estas dos referencias se consigue con la derivada covariante determinada por un proceso de linealización dinámico.

Es evidente que el simple esquema de la velocidad de un punto móvil está muy alejado de la complejidad de la derivada covariante, cuya definición analítica ha de ser invariante respecto de los cambios de coordenadas, por lo que su realización ha de estar «hecha a la medida». Afortunadamente en este caso es posible aislar, con facilidad, el efecto de la curvilinealidad de las coordenadas e introducir un término corrector, que está dado por el símbolo de Christoffel de segundo orden. En consecuencia la derivada covariante da una medida real del cambio experimentado por el tensor.

Después de estas consideraciones, tal vez se pudiera argüir que una conexión no es la derivada covariante u otra derivada con propiedades suficientes. Puede ser cierto, pero ocurre a veces que el instrumento analítico configura de tal manera una noción matemática, que sin escándalo se pueden identificar.

No me puedo extender más en la glosa de este sugestivo discurso, pero agregaré algunos comentarios referentes a la parte más actual del mismo, en la que Etayo se ocupa de las derivaciones. En ella se rompe con los métodos constructivos a la manera de Lie o en el sentido covariante, y se sigue el método axiomático para presentar los operadores derivación. El matemático, en su taller de ideas, sintetiza un nuevo concepto cuyo comportamiento operativo ha de ser análogo al de la derivación, al menos en sus características esenciales. Una derivada general es una aplicación del conjunto de tensores definidos sobre una variedad en sí mismo, de forma que se conserve el tipo de los tensores y cumpla las condiciones de linealidad, regla del producto y conmutatividad respecto de la contracción. Al restringir la generalidad de estos operadores, imponiendo nuevas condiciones, se obtienen las derivadas tradicionales y, al extenderla, otras cuyo significado está, más o menos, alejado del primitivo. Así aparecen las pseudo-derivaciones y las casi-derivaciones, cuyas buenas propiedades serán las que decidan la oportunidad de su definición y el alcance de sus aplicaciones.

Los temas que se ofrecen para la reflexión son múltiples, y lo expuesto es sólo una parte de lo que la lectura de la «Pequeña historia» sugiere. De todas formas desearía hacer algunas observaciones referentes a la idea de linealidad. Efectivamente el método de linealización, el método de la aproximación por entidades lineales, se aplica en áreas extensas del panorama matemático. Sin saber lo que significa «sentido lineal de la percepción» o «mentalidad lineal», reconocemos que las imágenes de los objetos nos llegan según rectas y que cuando carecemos de información nuestro pronóstico es lineal, lo cual nos induce a pensar que existe un sano sentido de linealidad en el hombre. Pero me voy a permitir matizar una cita, una buena cita, incluida en el discurso. Yo diría: Lineal si, *ma non troppo*. Lineal paso a paso y a escala próxima como muestra la derivación; y no olvidemos que los grandes teoremas de la Matemática no son lineales. La belleza de una proposición matemática tiene siempre una componente de sorpresa según el módulo del barroco, y lo lineal no tiene sorpresas.

Termino reiterando la bienvenida al profesor Etayo al ingresar en la Academia y agradeciéndole de nuevo su magnífica lección, que también es la historia de cómo paso a paso y sin aspavientos, se pueden ir llenando los valles y restableciendo la geometría, con la verdadera Sabiduría, que es fiel a su nombre y discreta en revelarse.

He dicho.