REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

No-linealidad en las ciencias de la naturaleza

DISCURSO

LEIDO EN EL ACTO DE SU RECEPCION

POR EL

EXCMO. SR. D. ALBERTO GALINDO TIXAIRE

Y

CONTESTACION

DEL

EXCMO. SR. D. CARLOS SANCHEZ DEL RIO

EL DIA 11 DE JUNIO DE 1980

MADRID
DOMICILIO DE LA ACADEMIA:
VALVERDE, 22.- TELEFONO 221-25-29
1980

Depósito Legal: M. 20.370-1980

TALLERES GRÁFICOS VDA. DE C. BERMEJO - J. GARCÍA MORATO, 122 - MADRID

DISCURSO

DEL

EXCMO. SR. D. ALBERTO GALINDO TIXAIRE

TEMA:

NO-LINEALIDAD EN LAS CIENCIAS DE LA NATURALEZA

Excmo. Sr. Presidente,
Excmos. Sres. Académicos,
Señoras, Señores:

Hay sentimientos, como gratitud y responsabilidad, cuyo uso ennoblece. Permitidme, pues, que os testimonie mi agradecimiento por haberme elegido, falto de méritos suficientes, para formar parte de esta ilustre comunidad, a la vez que os ruego de antemano benevolente amonestación si alguna vez, parco en fuerzas, aunque siempre rico en ilusión, desfallezco en el desempeño de mis funciones como académico. Es mi ánimo en esta ocasión, lo confieso, como el universo de Critilo [1], compuesto de contrarios y concertado de desconciertos.

Vengo a ocupar la vacante producida por el triste fallecimiento de mi predecesor D. José Antonio de Artigas Sanz, un zaragozano realmente insigne, a quien no tuve la honra de conocer personalmente, pero sobre cuya singular valía he oído a muchos de vosotros. Mis palabras de admiración y respeto ante su memoria y obra sonarán a apretadas para quienes hayan leído el elocuente y objetivo apunte biográfico salido de una pluma filial [2]. Bondadoso maestro, agudísimo inventor y sabio humanista, proyectó sus exquisitas dotes hacia la investigación industrial: vidrio científico, vidrio óptico, electrotecnia, alumbrado y metrología son campos con huellas indelebles de su presencia, en los que cosechó, ya desde sus años mozos, un reconocido prestigio internacional. Su acendrado sentido del deber le llevó a rechazar reiteradamente ofertas tentadoras procedentes de importantes laboratorios extranjeros, y prefirió, en cambio, lanzar la industria desde aquí, aun a sabiendas del sacrificio personal que acarreaba la empresa. Una dilatada e intensa hoja de servicios [2] atestigua este quehacer, y otra no menos larga recoge las distinciones, nacionales e internacionales, que premiaron su esfuerzo. En suma, una ingente figura de la ciencia, «feliz iniciador y promotor entusiasta de nuestras industrias científicas», según frase dedicada de D. Santiago Ramón y Cajal al testimoniarle su «admiración, gratitud y afecto» por sus descubrimientos sobre vidrios, transcendentales en Farmacología. ¿Comprendéis ahora uno de mis desconciertos?

He elegido como objeto de mi discurso algo que, más que por saber por no advertir, ha empezado a admirarme en los últimos tiempos. Se trata del fenómeno *no-lineal.* Aunque mi contribución personal a esta temática sea sólo reciente y demasiado técnica [3-16], es tal la riqueza del fenómeno y la profusión de conexiones interdisciplinarias que entraña que no he podido resistir el reclamar vuestra atención hacia él, antes de que mi admiración degenere en rutina y de aquí en tedio, «que aun el Sol (dijo Critilo) a la segunda vez ya no espanta, ni a la tercera admira».

Este será mi itinerario: i) gravitación clásica, como origen; ii) un mundo intermedio de ondas y redes, con el solitón central a una fenomenología diversificada y con la transformación espectral como técnica matemática poderosa; y finalmente iii) no-linealidad en la física de las partículas elementales y en la gravedad cuántica.

De Newton a Einstein

Si la ley de inercia es el ejemplo natural más sencillo de un problema lineal homogéneo, y la ley de caída de los graves el prototipo de un sistema inhomogéneo de ecuaciones diferenciales lineales, constituye sin duda el problema gravitacional de N cuerpos el exponente históricamente más destacado de una situación no-lineal. Los mejores matemáticos de los siglos XVIII y XIX dejaron contribuciones notables a la mecánica celeste en esa era cuantitativa. Pero el teorema de Bruns [17], en 1887, mostrando que en el problema de tres cuerpos no existen integrales primeras algebraicas (en las variables posición y momento) independientes de las diez clásicas asociables a simetrías evidentes, y los resultados (¡incorrectos!) de Poincaré [18] (1890) sobre la divergencia de los desarrollos en serie de Laplace y otros, marcaron el fin de esta era, y el nacimiento del actual período cualitativo, del enfoque geométrico global, en el que los métodos analíticos, locales, dejan paso a otros, más ricos y poderosos, de topología diferencial. Tras Poincaré, nombres como Birkhoff, Kolmogorov, Siegel, Arnold, Moser, Smale, Thom y otros pocos transforman la vieja mecánica en una fecunda teoría de los sistemas dinámicos [19], donde la combinación de argumentos locales con técnicas de análisis global, y la introducción de conceptos nuevos como genericidad, atractores extraños, estabilidad estructural, etc., no sólo permiten concluir la existencia de soluciones cuasi-periódicas en el problema de tres cuerpos, sino también dar un primer gran paso (Ruelle-Takens [20]) hacia el entendimiento de la turbulencia *intrínseca*, sin los claros defectos de la teoría de Landau-Hopf. La ausencia de atractores extraños en sistemas lineales indica el peligro en despreciar términos no-lineales; sin éstos, los fenómenos turbulentos y caóticos no cabrían en la naturaleza.

Hemos dicho que la gravedad newtoniana proporcionó un sistema dinámico no-lineal de un número finito de grados de libertad, de importancia clave para los desarrollos antes mencionados. Análogamente, la teoría einsteiniana de la gravitación ofrece el ejemplo más fundamental de sistema no-lineal con infinitos grados de libertad. Las ecuaciones de Einstein **Ein** (**g**) $= 8\pi$ **T** (tensor de Einstein = = tensor de energía-momento) forman un conjunto de 10 ecuaciones en derivadas parciales para el tensor métrico **g**. Como toda fuente de energía (en particular, el propio campo gravitatorio) afecta a la métrica, **Ein** (**g**) depende de **g** en forma no-lineal. Estamos, pues, en presencia de un intrincado sistema no-lineal, sometido además a ligaduras (identidades diferenciales de Bianchi). A pesar de su dificultad, se ha logrado demostrar [21] que la parte evolutiva (en el formalismo Dirac-ADM) de las ecuaciones de Einstein representa un flujo hamiltoniano en la variedad simpléctica $T^* \mathcal{E}$ (fibrado L^2-cotangente a la variedad $\mathcal{E}$ de métricas riemannianas C^∞ sobre una sección espacial E del espacio-tiempo, con estructura simpléctica globalmente constante), que deja estable el conjunto (genéricamente subvariedad) definido por las ligaduras. Y precisamente esta subvariedad, para las ecuaciones de Einstein en el vacío **Ein** (**g**) $= 0$ (esto es, **Ric** (**g**) $= 0$), admite una foliación en órbitas dinámicas naturalmente isomorfa al espacio de grados gravitacionales de libertad, sobre la que se tiene una estructura simpléctica inducida por la canónica de $T^* \mathcal{E}$. Los formalismos de cuantificación de Segal (o de Kostant-Souriau) quizás permitan en un futuro próximo aprovechar dicha estructura para lograr la cuantificación total (o semiclásica) del campo gravitatorio.

El sistema **Ric** (**g**) $= 0$ es cuasilineal de segundo orden. En coordenadas armónicas este sistema es estrictamente hiperbólico, y el teorema de Hughes-Kato-Marsden lleva a la existencia, unicidad y estabilidad Cauchy de solución al problema de Cauchy para datos iniciales en clases de Sobolev suficientemente altas (más de lo físicamente razonable). La extensión de estos resultados al caso general **Ein** (**g**) $= 8\pi$ **T** (**g**, ϕ) requiere, como es lógico, acoplamientos mínimos de los campos ϕ a la gravitación (con el fin de no destruir el carácter hiperbólico de las ecuaciones para **g**) y conos de propagación para las ecuaciones de esos campos que yazcan en (o sobre) los conos de la geometría. A pesar de estos avances recientes, sigue abierto el problema básico de relacionar las singularidades dinámicas que impidan la existencia de solución al problema de Cauchy para todo tiempo, con las singularidades del tipo analizado por Hawking-

Penrose (incompletitud geodésica esencial), inevitables en colapsos gravitacionales próximos a simetría esférica.

El enfoque *twistor* de Penrose [22], en el que los puntos del espacio-tiempo M plano son entidades derivadas de estructuras más fundamentales, los twistors, parece destinado a altas empresas. Si los *spinors* SU(2) son «raíces cuadradas» de los vectores de $\mathbb{R}^3$ (homomorfismo SU(2) $\longrightarrow$ SO(3)), los twistors sonlo del conjunto momento lineal-momento angular de partículas de masa nula: SU(2,2) $\longrightarrow$ $C_+^\uparrow(1,3)$ (componente conexa de la identidad en el grupo conforme del espacio de Minkowski M^c compactificado). Un twistor $z \in \mathbb{C}^4$ de norma nula, y todos los λz, $\lambda \neq 0$, determinan una misma geodésica nula (trayectoria de una partícula clásica, sin *spin*, y de masa nula); en cambio un twistor de norma distinta de cero determina el momento y la helicidad de una partícula de masa nula, con spin, no estrictamente localizada. El paso de M a su complexificado $\mathbb{C}$ M permite borrar estas diferencias. Una geodésica nula en $\mathbb{C}$ M aparece pues como un elemento (twistor proyectivo) de $\mathbb{C}^4/\mathbb{C}^* \simeq \mathbb{C}P^3$, y un punto $x \in$ M, vértice de un cono característico, como una recta en este espacio proyectivo. Si se acepta como básico el objeto twistor (razón profunda puede ser la unificación que logra el twistor del lenguaje real de la mecánica clásica y del lenguaje complejo de la física cuántica a nivel más fundamental, el de la geometría del espacio-tiempo, y que sólo es posible porque nuestro universo es 4-dimensional y de signatura (1,3)), repito, si se acepta como básico el concepto twistor, una cuantificación de la geometría que respetase esta estructura twistor «difuminaría» cada punto del espacio-tiempo y no sus rayos de luz. Es decir, el principio de indeterminación afectaría de forma esencial a la misma arena donde ocurren los sucesos físicos. Aunque el programa twistor hállase aún en fase adolescente, ha cosechado ya éxitos notables, consecuencia en última instancia del uso que propicia de funciones holomorfas. Y por ejemplo, la búsqueda de las soluciones auto-duales a **Ric (g)** = 0 en un espacio-tiempo complejo o real euclídeo (*instantones* gravitacionales) se transforma, en el lenguaje twistor, en un problema puramente algebraico de cohomología de haces. He aquí dos hechos significativos: primero, existencia de una transformación (la de Penrose en este caso) que algebriza un problema diferencial; segundo, existencia de una relación insospechada entre un problema físico no-lineal (gravitación einsteiniana) y la geometría algebraica. Más adelante encontraremos conexiones parecidas en otras áreas de la física.

De las ondas de agua a las ondas de spin

Cuando la más simple de las leyes de la naturaleza, la ley de la gravitación, conduce a ecuaciones no-lineales de difícil análisis, a nadie sorprenderá que otro tanto o más ocurra en la dinámica de sistemas complejos. De éstos, los hay estrictamente físicos, con leyes de interacción complicadas, pero conocidas en mayor o menor grado. Y a pesar de que su extrema diversidad pudiera convertir la pretensión de su estudio en propósito análogo al de una zoología de los no-primates, veremos cómo apunta un cierto fundamento racional y unificador de los mismos. Serán motivo de nuestra atención preferente.

Pero también en otras ciencias experimentales, como la química, la biología y la medicina, irrumpe con fuerza la descripción no-lineal al simplificar, en esquemas matemáticos manejables, comportamientos dinámicos enormemente enrevesados y a veces mal conocidos. Bástenos citar [23], por ejemplo: i) teoría de reacciones físico-químicas, autocatalíticas, ii) modelos de biosíntesis de proteínas, iii) dinámica de poblaciones anfitrión-parásito, iv) modelos de evolución prebiótica, v) farmacodinámica de las relaciones dosis-efecto y tiempo-efecto, vi) modelos epidemiológicos, y vii) difusión del potencial eléctrico a lo largo de los axones. Mención muy especial merecen las estructuras disipativas que pueden surgir en sistemas abiertos, no-lineales, a distancia del equilibrio superior a una crítica. La memoria que guardan de la perturbación origen, y la información que propagan, les aseguran un papel importante en cualquier discusión científica sobre el origen de la vida. La reacción orgánica de Zhabotinski-Belusov, y la distribución de pH a través de membranas artificiales, sumergidas en un medio uniforme de glucosa y urea, son muestras claras de estas estructuraciones espacio-temporales disipativas. La agregación celular en colonias, los procesos reguladores como la glicolisis, el desarrollo y la morfogénesis, son, entre otros muchos, fenómenos importantes con obvias estructuras de orden, ya espacial, ya temporal, que han recibido algunos enfoques, por supuesto simplificados, en el sentido anterior.

Mas volvamos a la física. Cierto día de agosto de 1834, el ingeniero y arquitecto naval escocés John Scott-Russell tiene un encuentro fortuito con un fenómeno bello y singular, que excita su imaginación científica y poética. Oigamos su propio relato [24]: «Estaba observando el movimiento de un bote rápidamente arrastrado por un par de caballos a lo largo de un canal estrecho cuando de repente el bote se detuvo —aunque no la masa de agua en el canal que había puesto en movimiento; ésta se acumuló alrededor de la proa en estado de violenta agitación, y luego, súbitamente, dejándolo atrás, avanzó más deprisa, en forma de una gran elevación solitaria, un montículo de agua redondeado, suave, bien definido, que siguió su marcha por el canal aparentemente sin cambio de forma ni disminución de velocidad. Lo seguí a caballo, y al darle alcance seguía desplazándose a unas ocho o nueve millas por hora, manteniendo su forma original de unos treinta pies de largo por un pie o pie y medio de alto. Su altura disminuía gradualmente, y después de perseguirlo durante una o dos millas lo perdí en las revueltas del canal».

¿A qué se debía la admiración de Scott-Russell, supuesto experto en hidrodinámica, ante la visión de esta onda que llamó «onda solitaria» o «gran onda de traslación»? En esa época la mayoría de los especialistas en ondas aceptaban que, aun despreciando la fricción, las ondas de agua en canales rectangulares debían cambiar de forma al avanzar, pronunciando su pendiente frontal y disminuyendo la de su cola. Un argumento de Airy apoyaba la creencia: si la velocidad de propagación de ondas de gravedad infinitesimales venía dada por la fórmula de Lagrange $v = (g\,h)^{1/2}$ en función de la profundidad h de las aguas, era de esperar que, para ondas finitas, las crestas avanzasen más deprisa que los valles, y por tanto, que no existieran ondas libres de deformación en su movimiento. De aquí que Scott-Russell en su *Report on Waves* (importante documento científico que recoge sus cuidadosas observaciones sobre el particular, tales como que la velocidad de la onda solitaria depende de su amplitud, y que una onda inicial arbitraria se desintegra en una onda principal de traslación y otras residuales que le siguen rezagadas) reclamase la atención de los matemáticos, para que éstos, *a posteriori*, diesen con una demostración *a priori*. En 1877 Boussinesq, en su monumental memoria *Essai sur la théorie des eaux courantes*, presenta un tratamiento analítico de esta onda, revelando la importancia de un detalle esencial: la dispersión, que al hacer de la velocidad de fase función no constante de la longitud de onda, introduce justamente el efecto que puede contrarrestar la deformación que, según Airy, produce el carácter no-lineal. Y así es: Korteweg y de Vries [25], en 1895, presentan la ecuación precisa para explicar el fenómeno observado por Scott-Russell. Esta ecuación ($u_t - 6\,u\,u_x + u_{xxx} = 0$, en unidades y referencial inercial convenientes) conocida bajo el acrónimo KdV, incorpora el balance perfecto entre dispersión y efecto no-lineal, y entre sus soluciones tipo onda viajera (esto es, de la forma $u(x, t) = \phi(x - v\,t)$) figura la onda solitaria de Scott-Russell, y otra periódica (la onda *cnoidal*).

Cerrado con esto un debate de medio siglo, la ecuación KdV queda relegada a un largo e incomprensible olvido, reproche éste del que no escapa la propia comunidad matemática. Pues la ecuación KdV es, después de todo, la más simple de entre todas las ecuaciones en derivadas parciales no-lineales, no-clásicas [26]: tiene sólo dos variables independientes, no es de primer orden (éstas están bien estudiadas y se resuelven, por ejemplo, por el método de características), ni de segundo orden (como son todas las clásicas de física matemática), es de tercer orden en una sola de las variables, de primer orden en la otra, y no es lineal. Finalmente, su no-linealidad es la más sencilla (cuadrática) compatible con invariancia galileana. No obstante sus aspectos de inocente simplicidad, la ecuación KdV se ha revelado, en estos últimos quince años, como fuente riquísima de conceptos físicos y técnicas matemáticas capaces de revolucionar la interpretación de muchos fenómenos naturales y áreas completas del análisis no-lineal.

La cibernética fue eficiente comadrona del alumbramiento feliz, confirmando el presciente optimismo de von Neumann [27], quien escribía en 1946: «Nuestros métodos analíticos actuales no son apropiados para los importantes problemas que surgen en conexión con las ecuaciones en derivadas parciales, no-lineales, y de hecho, con cualquier tipo de problema no-lineal... nos enfrentamos con una importante dificultad conceptual que tiende a oscurecer las grandes regularidades físicas y matemáticas que existen... Los ordenadores realmente efectivos pueden, en el campo de las ecuaciones en derivadas parciales no-lineales y en otros de acceso hoy difícil o imposible, proporcionarnos las ideas heurísticas que todas las partes de las matemáticas han necesitado para un progreso genuino, ... y conducirnos por último a importantes avances analíticos». En 1955, unos meses tras la muerte de Fermi, se hacen públicos [28] los resultados sorprendentes que obtiene con Pasta y Ulam, y la colaboración especial del MANIAC I de Los Alamos: una red unidimensional de 64 masas iguales, con interacciones anarmónicas entre vecinos próximos, ¡no termaliza! La no-linealidad, contra lo esperado (la facilidad del uso indiscriminado de la «regla de oro» de Fermi para el cálculo de tiempos de relajación propiciaba la creencia del efecto termalizador de cualquier no-linealidad), no inyecta energía en modos normales cada vez más excitados. Por el contrario, la distribución inicial de energía entre modos *recurre* periódicamente, con precisión del 1-2 por 100, y este tiempo de recurrencia (período FPU, que generalmente puede ser muy inferior al de Poincaré) incluso disminuye al aumentar la constante de anarmonicidad.

Aunque casi simultúneamente Kolmogorov [29, 19] demostraba su famoso teorema (que, perfeccionado, se conoce como teorema de Kolmogorov-Arnold-Moser) sobre persistencia de toros invariantes bajo pequeñas perturbaciones de flujos hamiltonianos integrables, que implicaba, para no-linealidades muy pequeñas, la falta de termalización para casi toda configuración inicial, la recurrencia FPU cobra nuevas e inesperadas perspectivas cuando en 1965 Zabusky y Kruskal [30], en sus investigaciones numéricas sobre ondas MHD en plasmas sin colisiones, se topan con una recurrencia análoga en la KdV periódica, con dato inicial sinusoidal (versión «suavizada» del problema FPU en el límite continuo), y descubren el *solitón* (KdV). Con este nombre bautizan a las soluciones viajeras «localizadas» (específicamente en $C^{\infty}_{\downarrow}$) de KdV, en que se rompe gradualmente el dato inicial, y que mantienen su identidad (forma, amplitud y velocidad) tras colisiones mutuas. Aunque en la zona de interacción (fuertemente no-lineal) de dos o más solitones parezca que éstos pierden su individualidad, puede decirse que la mantienen de forma innata, pues emergen de la zona como si de colisiones elásticas entre partículas se tratase. Tan sólo sufren sendos desplazamientos respecto de las posiciones que ocuparían en ausencia de los otros. ¿Acaso escapó esta maravillosa propiedad de las ondas solitarias a los ojos expertos de Scott-Russell? En un informe presentado en 1838 ante la Asociación Británica para el Progreso de las Ciencias, afirmaba [31]: «Las grandes ondas primarias de traslación se atraviesan entre sí sin cambio alguno...». Aunque estas ondas posiblemente correspondan a las dos familias de ondas solitarias de la ecuación más completa de Boussinesq, viajando en sentidos opuestos, no se menciona en el informe la base experimental de tal aserto, ni aparece la observación en su informe completo de 1844. De aquí la creencia [26, 32] de que Scott-Russell no «vio» solitones KdV, apoyada también en el papel secundario que atribuyó a las ondas residuales que acompañan a la gran onda de traslación tras la desintegración de una onda inicial arbitraria y que Zabusky-Kruskal mostraron ser versiones reducidas de la onda principal.

El histórico hallazgo de estos físicos permitió, primero, entender el fenómeno FPU (e incluso estimar acertadamente el período de recurrencia) como recomposición cuasi-periódica de la configuración inicial analizada en solitones; segundo, aprender [33] que el solitón mejora la capacidad de una red para el transporte de energía y que su presencia indestructible explica la impotencia de la no-linealidad para engendrar armónicos superiores y el fallo concomitante de la ley estadística de Fourier para la conducción térmica, y tercero, despertar un extraordinario interés de matemáticos y físicos por este tipo de estructuras.

Contribuciones importantes empiezan a sucederse con gran rapidez (1967-68): Lax [34] da la primera demostración analítica de la indestructibilidad de pares solitónicos para KdV, Miura [35] presenta una remarcable transformación no-lineal, tipo Riccati, que generaliza la de Hopf-Cole y relaciona una solución de KdV con una de KdV_2 (ecuación KdV modificada, en que $u^2 u_x$ reemplaza a $u u_x$) y que, por un lado, utilizan Miura, Gardner y Kruskal [36] para demostrar que KdV y KdV_2 poseen infinitas leyes de conservación disequivalentes y polinómicas en u y sus derivadas, y por otro, lleva a estos mismos autores (más Greene [37]) a descubrir que bajo el flujo KdV no-lineal $u_t = \mathrm{K}[u] \equiv 6 u u_x - u_{xxx}$, los datos espectrales S_u del operador de Schrödinger $Q_u \equiv - d^2/d x^2 + u(x, t)$ (esto es, valores propios discretos, constantes asociadas para los estados ligados, y módulos y fases de las amplitudes de reflexión y transmisión) varían linealmente, con velocidades independientes de u. La recuperabilidad de $u(x, t)$ a través de S_u vía el método inverso de la difusión de Gel'fand, Levitan y Marchenko [38, 39], les permitirá resolver exactamente el problema de Cauchy para KdV a través de un problema lineal: 1) Dada $u(0) \equiv u(., 0)$, determínese $\mathrm{S}_{u(0)}$; 2) a continuación, mediante un flujo lineal conocido, obténgase $\mathrm{S}_{u(t)}$; y 3) aplíquese el método inverso de la difusión para deducir $u(t)$ de $\mathrm{S}_{u(t)}$. Incluso los pasos primero y último tienen que vérselas con ecuaciones lineales (la de Schrödinger y la ecuación integral de GLM, respectivamente). En opinión de muchos, quizás sea este descubrimiento de GGKM un hito decisivo en las matemáticas del siglo XX. Simultáneamente, Lax [34] expresa el método de GGKM de manera elegante y general: «Dado un flujo $u_t = K[u]$, hállense, si se puede, un par Q, M de operadores lineales en un espacio de Hilbert, dependientes de u (y a su través de t) tal que i) $Q_t = [Q, M]$, ii) $M = -M^+$. Si existe tal *par de Lax*, el flujo $u_t = K[u]$ será isoespectral para Q, y en particular, los autovalores de Q se mantendrán constantes en el tiempo. Cuando además el operador Q admita una descripción espectral asintótica (directa e inversa) a través de una teoría de difusión de forma que el movimiento de los datos espectrales bajo la familia unitaria uniparamétrica engendrada por M sea simple, la integración del flujo original $u_t = K[u]$ habráse reducido a la de este flujo simple en los datos espectrales». No sólo el flujo KdV cae en este esquema. Lax encuentra toda una colección numerable $K_j[u]$, $j = 1, 2, 3, \ldots$ de flujos isoespectrales para el operador de Schrödinger $Q_u \equiv -d^2/dx^2 + u$, que mueven linealmente los datos espectrales de Q. Al escribir KdV como sistema hamiltoniano (Gardner [40]) de dimensión infinita, con d/dx como operador simpléctico, los flujos K_j resultan ser flujos hamiltonianos, procedentes de las constantes de movimiento de KdV, conmutativos dos a dos y funcionalmente independientes. Esto hace sospechar que KdV sea *integrable* como sistema dinámico. Y Faddeev, Zakharov [41] lo demuestran en 1971, siendo precisamente los datos espectrales S_u de Q_u las variables acción-ángulo que linealizan el flujo. He aquí pues a la ecuación KdV como el primer ejemplo conocido no trivial de sistema dinámico integrable con un número infinito de grados de libertad.

La rareza de estas propiedades de la ecuación KdV (infinitas leyes de conservación, integrabilidad, solitones) relegarían su interés a mera curiosidad, de no haberse encontrado otros muchos sistemas evolutivos que las comparten; sistemas, además, que representan aproximaciones a diversos problemas físicos. La ubicuidad del solitón es ya indiscutible [42, 43, 44, 45, 46]. Los océanos, la atmósfera, las redes, los plasmas, los superconductores, los superfluidos, la astrofísica (¿es la mancha roja de Júpiter un solitón?), etc., son ambientes frecuentados por clientela solitónica, con normas de conducta tipificadas, entre las que destacan:

1) KdV.—Rige la aproximación dominante a sistemas ondulatorios conservativos, débilmente dispersivos y débilmente no-lineales. Ejemplos: ondas iónico-acústicas en plasmas fríos, ondas de gravedad en aguas poco profundas, recurrencias en redes, ondas de presión en mezclas líquido-gas, etc. Estos solitones KdV se ven perfectamente en algunas líneas de transmisión no-lineal y dispersiva. Al introducir condensadores de capacidad variable con la posición pueden fisionarse los solitones (choque contra inhomogeneidades). Con los rápidos avances en la tecnología de microcircuitos se divisa cercano el día en que sea posible realizar experimentos de solitones con equipos «de bolsillo».

2) KdV_2.—Domina el comportamiento asintótico de sistemas sometidos a oscilaciones forzadas. Ejemplos: en ondas atmosféricas largas dentro de un flujo horizontal con densidades verticalmente estratificadas, en ondas Alfven en plasmas fríos sin colisiones, etc.

3) NLS ($i\, u_t = - u_{xx} - 2\, |\, u\, |^2\, u$, Schrödinger no-lineal).—Domina la aproximación a la envolvente de un tren de ondas cuasi-monocromático, en medios débilmente no-lineales y fuertemente dispersivos. Ejemplos: ondas de gravedad en aguas profundas (los amantes del «surf» conocen bien la ruptura solitónica), turbulencia Langmuir en plasmas, vórtices hidrodinámicos, etc. Los solitones NLS son de tipo envolvente (no son ondas viajeras, y sólo la onda envolvente es solitónica en sus propiedades), y su indestructibilidad podría aumentar extraordinariamente la capacidad informativa de un haz de fibras ópticas.

4) SG ($u_{xx} - u_{tt} = \operatorname{sen} u$, «seno-Gordon»).—Aproximación dominante a sistemas esencialmente unidimensionales con una contribución V (u) periódica a la densidad de energía potencial. Aparece en contextos que posibilitan rotaciones de gran amplitud. Ejemplos: conductividad eléctrica en algunos compuestos orgánicos, movimiento de paredes de Bloch en cristales magnéticos, propagación de *fluxones* en uniones Josephson, transparencia auto-inducida. ondas de spin, etc.

Esta ecuación era muy familiar para los geómetras de principio de siglo, llegándosela a conocer como la «ecuación fundamental de la geometría diferencial». Vinculada a la descripción de superficies de curvatura constante, puede decirse que ya surgió en forma de Lax como condición de integrabilidad del sistema lineal de Gauss-Weingarten. Faltóles, sin embargo, a los matemáticos de entonces una teoría espectral directa e inversa, que las teorías cuánticas impulsarían más tarde. Por extensión, la inmersión de variedades riemannianas en otras proporciona [47] enlaces interesantes entre ecuaciones lineales y no-lineales, a través de los pares Gauss-Weingarten (lineales) y Gauss-Codazzi (no-lineales, condiciones de integrabilidad de aquéllas). El mismo Tchebychef, en 1878, utiliza la SG para resolver un curioso problema «sobre el corte de vestidos», a saber, cómo trocear un tejido para revestir con él un cuerpo cualquiera, en la forma más ajustada posible [48]. Sus fórmulas permitirían a Hilbert, años después, demostrar que las seudoesferas no pueden sumergirse en $\mathbb{R}^3$.

Los solitones de SG son ondas viajeras con derivada en C^∞. Su salto $\Delta u \equiv u(\infty) - u(-\infty)$ es 2π. Aquellas soluciones viajeras con salto -2π se llaman *antisolitones*. La ecuación SG admite estados ligados solitón-antisolitón, llamados *biones* o *respiradores* o pulsos ópticos 0π. KdV carece de biones, pero NLS los posee. Solitones, antisolitones y biones participan en colisiones conservando asintóticamente su identidad. La carga topológica $(2\pi)^{-1}\Delta u =$ = (número solitones — número antisolitones) es constante del movimiento.

Merece destacarse que ya en 1953 Seeger, Donth y Kochendörfer [49] habían hallado algunas soluciones analíticas de carácter multisolitónico para SG, que redescubren Perring y Skyrme [50] en 1962, tras ver numéricamente la indestructibilidad de las ondas viajeras de SG en procesos de colisión. Estos autores, animados por el comportamiento tipo partícula de tales soluciones de la ecuación relativísticamente invariante SG, llamaron «mesones» a los biones antedichos.

El solitón SG en uniones Josephson largas es el *fluxon*, o quantum de flujo magnético. Su estabilidad, y dócil reacción a estímulos eléctricos, tal vez le reserven un interesante futuro como bit básico en sistemas de informática.

Al incidir un pulso EM suficientemente intenso sobre un medio atómico resonante, con dos niveles no degenerados, su primera mitad excitará los átomos de la primera capa del material, y la segunda mitad del pulso inducirá su desexcitación. Con una forma adecuada del pulso, podrá conseguirse que la energía EM de desexcitación compense exactamente la perdida por absorción, recomponiendo el pulso tal como entró. Por contra, si éste es poco intenso, la emisión estimulada no devolverá toda la energía empleada en excitar, y si su intensidad es excesiva, la segunda mitad del pulso podrá aún excitar tras haber desexcitado, con lo que irá perdiendo energía, reajustando su tamaño hasta conseguir el equilibrio, esto es, la transparencia total. En esto consiste el fenómeno de transparencia autoinducida, descubierto numéricamente por McCall y Hahn [51] en 1965, y describible por la ecuación SG. Su famoso «teorema de las áreas» sobre fragmentación de un pulso inicial arbitrario en pulsos individuales de área (temporal) 2π, es decir, en solitones SG, se ha visto experimentalmente confirmado [52, 43] (en iluminación con láser ^{202}Hg de vapor ^{87}Rb, en campo magnético intenso que rompe las degeneraciones hiperfinas de la línea D_1), permitiendo el método de la transformación espectral TE (ampliación del GGKM para KdV, que luego comentaremos) su predicción cuantitativa precisa [53].

Finalmente, la ecuación SG rige presumiblemente las ondas de spin en la fase A del ^3He. Este líquido de Fermi es normal a temperaturas $T > 2.65$ mK; pero a $T = 2.65$ mK y presión de 34 atm sufre una transición de fase de segundo orden a la fase A, y de ésta, una de primer orden a la fase B a temperaturas y presiones más bajas. Siendo el ^3He un sistema de Fermi con interacción débil, es de esperar alguna forma de superconductividad. Como sus átomos tienen un spin nuclear no apareado, el mecanismo BCS sugiere acoplamiento de pares de spines en estado triplete de spin y momento angular orbital relativo $l = 1$ (la posibilidad más simple, excluido $l = 0$ por el solapamiento de núcleos que implicaría). Las fases A y B tienen propiedades magnéticas distintas. La fase A es excepcional debido a que en ella las fluctuaciones de spin «apagan» el modo $s_z = 0$, por lo que puede visualizarse como una mezcla de dos fluidos superconductores con spines respectivos $s_z = \pm 1$, y con acoplamiento mutuo muy débil de tipo dipolo-spin. En la fase B los tres modos $s_z = 0, \pm 1$ son importantes. Mientras que las ondas de spin en la fase A siguen, aproximadamente, la ecuación SG, en la fase B parece ser la SG_{2-} $(u_{xx} - u_{tt} = -(\operatorname{sen} u + 2^{-1} \operatorname{sen} 2^{-1} u))$ la ecuación dominante, lo mismo (salvo cambio $x \longleftrightarrow t$) que en la transparencia autoinducida entre niveles degenerados (SG_{2+}) [43, 45, 54].

A diferencia de la SG, las SG_n ($n \geqslant 2$) no admiten TE ni tienen infinitas leyes de conservación. Sin embargo, poseen soluciones viajeras que, sin ser solitones en sentido estricto, aparentan muchas de sus propiedades. Así, la SG_{2+} tiene un pulso solitario 4π de doble joroba, amén de otros menos interesantes ($0\,\pi$, $2\,\delta$, $4\,\pi - 2\,\delta$); este pulso $4\,\pi$ es una especie de estado ligado de dos pulsos $2\,\pi$ que al separarlos ligeramente dan origen a una estructura interna de «vaivén» en que los dos pulsos componentes intercambian posiciones periódicamente. El cálculo numérico muestra que estas soluciones «temblorosas» son estables en colisiones, y que el «temblor» puede ser contagiado a los pulsos solitarios $4\,\pi$. Un fenómeno realmente llamativo, observado numéricamente, es el «juego de pídola» en que participan pares de pulsos $2\,\pi$ iguales e inicialmente muy separados entre sí, y que describimos con lenguaje de la óptica nolineal: Al entrar el primer pulso $2\,\pi$ en el medio absorbente, pierde energía, se ensancha y aplana (conservando su área $2\,\pi$), y se va frenando (¡hasta detenerse!). Cuando llega al medio el segundo pulso $2\,\pi$, se encuentra con un medio excitado, del que extrae energía, estrechándose y elevando su altura (de nuevo con área conservada $2\,\pi$), y acelerándose, hasta que alcanza al primero. A partir de entonces, ve ya un medio desexcitado, y repite la historia del primer pulso, excitando al medio y deteniéndose más adelante; tras lo cual, aquel primero aprovecha coherentemente la energía del medio, recuperándose totalmente de su postración, e iniciando la persecución del segundo pulso. Y así sucesivamente. La observación experimental de este fenómeno será posible cuando se disponga de celdas de difusión con vapor metálico mayores que las actuales ($\sim$ 2 mm frente a los $\sim$ 15 cm que se estiman para un salto de pídola en vapor de Na). Los solitones de vaivén han sido observados en transiciones D_1 en vapor de Na [55].

Aparte de las ecuaciones señaladas (KdV, KdV_2, NLS, SG) existen otras [Hirota, Boussinesq, 3WRI (interacción resonante de 3 ondas), Kadomtsev-Petriashvili, etc.] que también exhiben, total o parcialmente, el fenómeno solitón.

Entre los sistemas discretos, ocupa un lugar destacadísimo la red de Toda [56]: una cadena de N masas iguales, interaccionando cada una con sus próximas vecinas de forma exponencial ($V(x) = a\,b^{-1} \exp(-\,b\,x) + a\,x - a\,b^{-1}$). Casos especiales son la red infinita ($N = \infty$), la red periódica ($x_{N+1} = x_1$), y la red de extremos fijos ($x_0 = -\infty$, $x_{N+1} = \infty$). Variando convenientemente los parámetros a, b pueden obtenerse la red armónica y la red de esferas duras (anarmonicidad máxima) como situaciones límite. Toda llegó a su red en 1967 motivado por la recurrencia FPU, que sugería falta de ergodicidad en redes no-lineales, y por ende la posibilidad de encontrar algún tipo de red no-lineal integrable. Resultados numéricos de Saito et al. [57] con una red exponencial de dos partículas y condiciones de contorno fijas, analizados con el método seccional de Poincaré, indicaron pronto la existencia de una nueva constante del movimiento, aparte de la energía. Hénon [58] demostró que la red de Toda periódica, con N partículas, posee N constantes del movimiento independientes, y Toda y Wadati [59] hallaron soluciones de la red infinita que representan pares de solitones en interacción. Pero se debe a Flaschka [60], en 1974, el brillante descubrimiento de acertar a expresar el sistema dinámico de Toda a través de un par de Lax. De este modo no sólo se simplificaba la discusión de la integrabilidad, sino que la versión discretizada de Case y Kac [61] de la transformación espectral permitía resolver explícitamente la evolución para todo dato inicial de la red infinita, y en particular, analizar de manera completa su fragmentación en solitones y fondo.

De Fourier a la transformación espectral

Destacábamos antes el hallazgo de GGKM como fundamental en el análisis no-lineal. Y quizás no sea exagerado parangonarlo en importancia con la transformación de Fourier (1807) (discreta o continua), que permite a los científicos reducir problemas diferenciales lineales a cuestiones algebraicas, o descomponer sistemas evolutivos lineales en superposición de modos independientes con flujos unidimensionales lineales. Frente a más de un siglo de elaboración de las técnicas de Fourier, los trece años de existencia del método ingeniado por GGKM (y las generalizaciones subsiguientes) son aún escasos para revelar toda su potencialidad, máxime si se analizan de cerca sus diferencias con el de Fourier para apreciar la mayor dificultad en su aplicación.

En 1971-72 Zakharov y Shabat [62] se las ingenian, por un lado, para llevar la ecuación NLS a un par de Lax, y Wadati [63] lo consigue para la KdV_2. A continuación, Ablowitz, Kaup, Newell y Segur [64] ofrecen un procedimiento sistemático para hallar todos aquellos flujos isoespectrales $(q, r)_t = K[q, r]$ de un operador particular $Q \equiv -i \sigma_3 d/dx - i q \sigma_+ + i r \sigma_-$ (no necesariamente autoadjunto, y que generaliza el de Zakharov-Shabat), que mueven de forma sencilla (que resulta lineal) los datos espectrales $S_{q,r}$ de Q. De esta forma se consigue una ampliación sustancial de los sistemas hamiltonianos integrables conocidos, que comprenderá todas las ecuaciones que mencionamos anteriormente y que poseen solitones en sentido estricto. Extensión distinta, pero unificadora y muy general, logran luego Wadati y Kamijo [65] tomando Q del tipo Schrödinger matricial, que finalmente, a partir de 1975, Calogero y Degasperis [66] generalizan drásticamente con técnicas wronskianas. Aparte de permitir la consideración de algunos problemas matemáticos con más de una dimensión espacial, el método de Calogero y Degasperis ha mostrado estructuras curiosas (*«boomerons»*, *«zoomerons»*, *«trappons»*) en ciertas ecuaciones, con las características sugeridas por su nombre, y que se asemejan a solitones en campos externos.

La *transformación espectral* (TE) es la esencia decantada de todas estas contribuciones. Traslada el problema de integración de un sistema evolutivo no-lineal en derivadas parciales $u_t(x, t) = K[u]$ al problema trivial de integración de un sistema evolutivo lineal diferencial ordinario $s_t(k, t) = \lambda(k)\, s(k, t)$. ¿Cómo? Asociando al problema inicial, cuando sea posible, un operador lineal Q_u, que admita una teoría de difusión directa e inversa $u \longleftrightarrow S_u$ (datos espectrales), y tal que la imagen de $u_t = K[u]$ en el espacio espectral sea lineal. Generalmente (aunque no es necesario) el flujo original es isoespectral para Q_u (componente entonces de un par de Lax), y S_u consta de una matriz de amplitudes de reflexión $R(k, t)$, $k \in \mathbb{R}$, y de un número finito de valores propios complejos aislados, con sus correspondientes matrices de normalización. Si para simplificar la exposición suponemos que los «potenciales» que intervienen en Q_u decrecen a cero, cuando $|x| \longrightarrow \infty$, más deprisa que cualquier exponencial, entonces $R(k, t)$ es restricción de una matriz meromorfa en $\mathbb{R} + i\,\mathbb{R}^+$, con un número finito de polos simples en el semiplano imaginario positivo. Las posiciones de estos polos y los residuos de R en ellos son los restantes datos que, con $R(k, t)$, completan S_u. Cuando $R(k, 0) = 0$, $\forall\, k \in \mathbb{R}$, y la ecuación cae en la clase de Wadati-Kamijo ($KdV_{1,2}$, NLS, SG, Maxwell-Bloch reducidas, etc.), $u(x, t)$ es una solución multisolitónica pura, que asintóticamente en t aparece fragmentada en los diversos solitones caracterizados por esos polos y residuos, con amplitudes, anchuras y velocidades (constantes) relacionadas entre sí. La presencia de reflexión $R(k, 0) \not\equiv 0$

da origen a un «fondo de radiación». En la clase más amplia de Calogero y Degasperis, los polos pueden dar lugar a comportamientos más ricos, con estructuras de velocidad no constante, como los «boomerons» y «trappons» mencionados. Las expresiones analíticas de las soluciones multisolitónicas, o de estas últimas, se obtienen mediante la ecuación integral de GLM (con núcleo en ese caso degenerado).

Siendo clara la analogía entre la transformación espectral y la de Fourier, resaltemos sus diferencias: i) Mientras $u \longleftrightarrow \hat{u}$ (transformada de Fourier de u) es lineal, $u \longleftrightarrow S_u$ no lo es; ii) Las funciones base $\exp(i\,k\,x)$ de Fourier no dependen de la función u a desarrollar, y su superposición es lineal; por contra, la base para la espectral depende de u, y sus elementos se superponen de forma no-lineal; iii) Aparte del continuo común $k \in \mathbb{R}$, el espectro para la TE contiene elementos complejos (que son los que dan lugar a los solitones).

Cuando se buscan soluciones infinitesimales al flujo $u_t = K[u]$, y por ende el operador de Schrödinger asociado Q_u carece de espectro ligado (la matriz potencial es demasiado pequeña), la matriz de reflexión es esencialmente la transformada de Fourier de la potencial (aproximación de Born), y las transformaciones espectral y Fourier confluyen (los efectos no-lineales son despreciables en ese límite).

El principio de superposición lineal, tan útil en la física, parece perderse en la jungla no-lineal. Sin embargo, en algunos problemas no-lineales, se saben «componer» dos o más soluciones para engendrar otra. Recordemos, por ejemplo, que la razón doble de 4 soluciones de una ecuación de Riccati es constante, y por tanto, conocidas tres de sus soluciones, de inmediato podemos algebraicamente hallar otra. Ya con Abel (1826) surge la idea de superposición no-lineal de soluciones, que Vessiot (1893) explora para ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Una sistematización del problema se debe a Jones y Ames [67], y quizás resulte curioso saber que algunos sistemas diferenciales lineales poseen un continuo de principios de superposición no-lineales. La transformación espectral brinda un método sencillo, y al mismo tiempo poderoso, para la búsqueda sistemática de tales superposiciones no-lineales. Consiste en el uso ampliado de la transformación que Bäcklund (1875) [68] obtuvo en sus investigaciones sobre seudoesferas (problema regido por la ecuación SG), y de la que Bianchi (1902) [69] logró probar un teorema de permutabilidad, que obvia el uso de cuadraturas para sacar una solución u_3 a partir de otra u_0 arbitraria, y dos u_1, u_2 obtenidas de u_0 por transformaciones Bäcklund. (Esta técnica fue utilizada por Lamb (1971) [70] para hallar expresiones analíticas de soluciones de SG con N solitones.) Dentro del esquema TE, la introducción de una Bäcklund elemental se logra [66, 71] mediante una simple modificación de los datos espectrales $S_u \xrightarrow{B} S_{u'}$, conmutativa con el flujo espectral, y que en términos de u, u' aparece como una ecuación en derivadas parciales según x, de primer orden, cuasilineal. Los nuevos datos $S_{u'}$ suponen cambios de fase en R (k, t), variación en las matrices de normalización de los niveles ligados de S_u, y posiblemente la adición de un nuevo valor propio (es decir, en la introducción de otro solitón). El carácter multiplicativo de estos cambios espectrales imprime naturaleza abeliana a tales transformaciones Bäcklund, lo que a su vez asegura la existencia de teoremas de permutabilidad (como el de Bianchi-Wahlquist-Estabrook para KdV) que generalizan al de Bianchi para SG. No en balde subyace la ecuación de Riccati en las entrañas de la transformación espectral.

Un enfoque cartaniano directo de las Bäcklund, potencialmente eficaz pero tedioso en la práctica, consiste en las *estructuras de prolongación* de Wahlquist y Estabrook (1975) [72]. Representando un sistema no-lineal mediante un ideal I de formas exteriores (cerrado bajo derivación exterior) en una cierta variedad M, se define como prolongación de I un ideal I′ en otra variedad M′ obtenida de M por fibración ($\pi : M' \longrightarrow M$), tal que $I' \supset \pi^* I$, $d\, I' \subset I'$. Todo difeomorfismo de variedad $\phi : M' \longrightarrow M'$ satisfasciendo $\phi^* \pi^* I \subset I'$ produce una Bäcklund en sentido de Wahlquist-Estabrook. Los sistemas diferenciales lineales que aparecen en el método TE provienen de casos particulares de familias Bäcklund uniparamétricas B_λ obtenidas con fibrados vectoriales. Bajo esta amplia perspectiva de las transformaciones Bäcklund como relaciones diferenciales entre pares de soluciones, el teorema de permutabilidad de las B_λ ha de interpretarse en sentido de correspondencias.

Aplicación destacada del conocimiento de B_λ es la construcción explícita de series infinitas de leyes de conservación bajo $u_t = K[u]$ (polinómicas si K lo es). El conocimiento de éstas importa por su información sobre la variedad de soluciones, por el control que permite ejercer sobre la integración numérica del sistema evolutivo, y para análisis de estabilidad. Acostumbrados a vincular leyes de conservación con simetrías de sistemas, quizás debiera conjeturarse que los sistemas (como $KdV_{1,2}$, SG, NLS, etc.) con esa profusión de constantes del movimiento (cargas) poseen infinidad de simetrías ocultas, y que sus manifestaciones solitónicas son consecuencia de tener que «recordar» la solución tal conjunto de cargas. Y así es, en efecto, para KdV, como ha probado Wadati [73]. Sin embargo, multitud (pero no genérica) de sistemas evolutivos lineales (y por tanto carentes de solitones, al menos interaccionantes) poseen infinitas leyes de conservación disequivalentes [5, 11], que incluso forman un conjunto completo [15, 16] en muchos casos de interés (Klein-Gordon, Dirac, Maxwell). Por tanto, no basta con la existencia de infinitas cargas para asegurar la de soluciones solitónicas. Es muy plausible que ambas circunstancias concurran sólo si el sistema dado es no-lineal e invariante bajo un grupo de Lie-Bäcklund local de transformaciones de simetría de dimensión infinita [74]. Sea como fuere, el estudio local de tal sistema, en búsqueda de sus leyes de conservación y/o simetrías infinitesimales, puede proporcionar información valiosa acerca de posibles familias Bäcklund uniparamétricas e integrabilidad TE. Su análisis sistemático revela la rareza con que las leyes de conservación aparecen, y la naturaleza singular (anunciada por Kruskal, pero nunca probada) a este respecto de $KdV_{1,2}$ dentro de amplias familias de ecuaciones de evolución no-lineales [6, 7, 10, 14]. Finalmente, una universalidad lagrangiana [12, 13] permite explotar al máximo las técnicas variacionales noetherianas [4, 8, 9] para deducir leyes de conservación a partir de simetrías de la acción.

La transformación espectral (para la que existe también una versión discreta [61]) ha sido, en resumen, un poderoso método de integración de muchos flujos no-lineales de gran relevancia física. La inclusión posterior de campos externos en el operador Q_u da cabida a otras ecuaciones (como la KdV cilíndrica, de interés en el estudio de plasmas fríos). La versión hamiltoniana integrable de sistemas solubles vía TE permite incluso elaborar una teoría muy efectiva de perturbaciones [75], que muestra cómo los solitones son entidades activas, dinámicas, reaccionantes ante fuerzas externas, y predice satisfactoriamente su comportamiento en estas circunstancias. Y como es de esparar, la transformación espectral se muestra superior a otras técnicas cuando de regularidad de soluciones al problema de Cauchy se trate. Así, por ejemplo, se ha podido probar [76] que KdV es un proceso «suavizador» (dato $u(x, 0)$ inicial C^3, C^4 a trozos, decreciente a cero para $|x| \longrightarrow \infty$ suficientemente deprisa $\Longrightarrow$ $\Longrightarrow u(x, t)$ es C^∞, $\forall\, t \neq 0$), conclusión ésta mucho más fina que la proporcionada por el método usual de regularización parabólica [77]. Pero frente a tantas excelencias, se alza todavía una barrera que limita enormemente la aplicabilidad de la TE: su extensión a problemas de interés con dos o más variables espaciales no ha sido lograda. Sólo superando este reto podrá compararse en versatilidad con la transformación de Fourier. En realidad, bastaría ampliar convenientemente el método GLM de difusión inversa a más de una dimensión espacial, ya que en principio la técnica de prolongación de estructuras puede proporcionar (cuando existan) los sistemas diferenciales lineales asociados a sistemas evolutivos no-lineales con número arbitrario de variables espaciales. Hasta el momento, las aplicaciones de la TE a situaciones realistas como sistemas Yangs-Mills, o ecuaciones de Einstein, se han reducido por necesidad a casos en que, esencialmente, hay sólo dos variables independientes [78] (Yang-Mills autoduales, o métricas estacionarias axialmente simétricas, por ejemplo). Entre las muchas misiones a cumplir por la futura transformación espectral se encuentra la explicación de fenómenos solitónicos en dos o más variables espaciales, como los *vortones* observados numéricamente con las ecuaciones hidrodinámicas de Euler [79].

No sería justo cerrar esta sección sin mencionar, aun de forma sucinta, algunos resultados matemáticos recientes en esta temática que sobresalen por su belleza geométrica. Nos referimos a la linealización explícita de KdV y Toda periódicas, a la brillante unificación lograda por Adler, vía álgebras de Lie, de los importantes resultados de Gel'fand-Dikii y de van Moerbeke, y finalmente, la sorprendente generalización de redes de Toda integrables que Kostant ha conseguido a través de asociación con diagramas de Dynkin de grupos de Lie semisimples.

La inaplicabilidad de la TE, basada en el método GLM de difusión inversa, a los problemas periódicos (por la falta de un «punto de apoyo» en que se conozca la función incógnita para todo tiempo), forzó su integración por otros derroteros, que resultaron ser los de la geometría algebraica. De las aportaciones de Dubrovin, Novikov, Its, Matveev, McKean, van Moerbeke y otros emerge la siguiente imagen [80]: «El espacio C_1^∞ de los potenciales periódicos $u(., t)$

de período 1 es una foliación de clases isoespectrales. Cada hoja es identificable a una variedad de Jacobi real de una curva hiperelíptica de género g ($\leq \infty$), igual al número de lagunas o zonas finitas prohibidas para el operador de Hill $Q_u = - d^2/d\,x^2 + u$. El conjunto de hojas de $g < \infty$ es denso en el total. Sobre cada hoja isoespectral de género g finito (toro g-dimensional), parametrizada, módulo períodos, mediante integrales de diferenciales abelianas de primera especie asociadas a la curva hiperelíptica base, los flujos KdV K_j, actúan de forma lineal conmutativa, y la inversión se expresa de forma elegante en términos de la función θ de Riemann. Por fin, los campos vectoriales $X_1, \ldots, X_g$ de los flujos $K_1, \ldots, K_g$ subtienden el fibrado tangente de esa hoja, por lo que los potenciales de tal clase isoespectral satisfacen todos ellos una misma ecuación diferencial no-lineal (de orden $2\,g + 1$)». Técnicas algebraicas análogas, con resultados muy similares, han permitido también la integración de la red periódica de Toda (Kac, van Moerbeke, Mumford). Quedan, sin embargo, problemas abiertos de gran dificultad e interés parejo, como la generalización adecuada del teorema de Riemann-Roch a curvas de género infinito, análisis cualitativo de los potenciales de una clase isoespectral determinada, etc. Destacaremos asimismo que la dimensión espacial $d = 1$ es la única capaz, en este contexto, de soportar deformaciones isoespectrales; en dimensiones superiores, el carácter genéricamente trivial de la variedad de Picard puede forzar una rigidez espectral [81].

Tanto la ecuación KdV como la red de Toda son sistemas hamiltonianos integrables, que pueden escribirse en forma de pares de Lax. Sendas ampliaciones de estos tipos de sistemas, debidas respectivamente a Gel'fand-Dikii [82] y van Moerbeke [83], presentaban semejanzas tan llamativas desde el punto de vista computacional, que sugerían una raíz común. Y en efecto, Adler [84] la ha hallado en el campo de las álgebras de Lie: la estructura simpléctica proporcionada por la construcción de Kirillov-Kostant-Souriau a través de la acción coadjunta, y los teoremas de involución [85] de naturaleza geométrica que siguen del teorema de Kostant-Symes y sus generalizaciones, proporcionan no sólo el esquema unificador, sino también un marco muy general para dotar de estructura hamiltoniana a otros muchos sistemas y analizar su integrabilidad. Mientras que el álgebra de Lie para la red de Toda con extremos fijos es la de las matrices triangulares inferiores, apareada dualmente, mediante traza ordinaria del producto, con el espacio vectorial de las matrices triangulares superiores, para sistemas KdV generalizados ese álgebra está formada por los símbolos de matrices operadores pseudo-diferenciales formales de tipo negativo, en par dual con el espacio de símbolos diferenciales a través de una traza, la clase de equivalencia de la traza matricial del coeficiente «residuo» del producto de símbolos. La naturaleza del operador M en los pares de Lax ($Q_t = [Q, M]$) asociados, como parte positiva de una potencia fraccionaria de un elemento del dual, favorece además la existencia de relaciones de Lenard, indicativas a su vez de involución simultánea con respecto a dos estructuras hamiltonianas distintas.

La eficacia de estas técnicas recientes basadas en descomposiciones de álgebras de Lie y en la estructura simpléctica sobre órbitas bajo la acción coadjunta parece ser extraordinaria, y subyace la integrabilidad de numerosos sistemas dinámicos (aparte de los citados), desde el viejo problema de la peonza de Euler-Arnold, hasta los sistemas de Calogero-Moser, pasando por la red periódica de Toda (cuya discusión en este marco requiere la consideración de álgebras de Lie de dimensión infinita, tipo Katz-Moody). Finalmente, un trabajo monumental de Kostant [86] exhibe toda una familia de redes de Toda finitas, no-periódicas, generalizadas, y explícitamente integrables, en correspondencia biunívoca con las representaciones de dimensión finita de los grupos de Lie semisimples. Son redes unidimensionales de N partículas de masas arbitrarias, con energía potencial de la forma $V = \sum^{l} r_j \exp \psi_j$, siendo las constantes $r_j > 0$, y las funciones ψ_j combinaciones lineales de las posiciones q_i de los puntos de la red, de forma que la geometría de estos vectores ψ_j, definida mediante la forma B_H dada por la relación $B_H(\psi_i, \psi_j)\,\mathbb{1} = \{\psi_j, \{\psi_j, H\}\}$ a través de los paréntesis de Poisson con la hamiltoniana H, sea la de un diagrama de Dynkin [es decir, $B_H(\psi_i, \psi_j) = Q(\alpha_i, \alpha_j)$, donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ son las raíces simples de una subálgebra de Cartan separada de un álgebra de Lie semisimple, real, separada de rango l, con forma bilineal invariante Q]. Una vez más, la geometría algebraica aflora en este análisis que Kostant promete completar en un futuro próximo con la integrabilidad explícita cuántica de estos sistemas.

Si la física clásica es rica en procesos no-lineales, la teoría cuántica es, por contra, esencialmente lineal. Su retículo proposicional es unión directa de retículos coherentes, no booleanos, en los que rige el principio de superposiciós. Al realizar estos retículos irreducibles mediante retículos de subespacios de un espacio lineal (que admitimos de Hilbert sobre $\mathbb{C}$), tal principio es el de la habitual superposición lineal de vectores estado coherentes, respetada por el flujo dinámico, lineal, de Schrödinger. Por otro lado, la evolución de observables en imagen de Heisenberg será generalmente no-lineal. Aquí tenemos, pues, un ejemplo, y muy importante, de sistemas físicos no-lineales en una cierta perspectiva (imagen de Heisenberg), pero lineales bajo otra (imagen de Schrödinger); la integración de la primera imagen no-lineal se reduce en la segunda a la de un flujo lineal, simplificable al máximo en una base que diagonalice el hamiltoniano. El cambio «observables móviles, base fija $\longleftrightarrow$ observables fijos, base móvil» puede considerarse como la transformación espectral para los sistemas cuánticos, y la generalidad de su existencia contrasta fuertemente con su rareza en el caso clásico. No en vano las ecuaciones de Heisenberg están ya dadas en forma de Lax, y el flujo cuántico es isoespectral para cualquier observable. Sería realmente interesante poseer algún control efectivo sobre el límite clásico ($\hbar \longrightarrow 0$) para reconocer los restos, en este dominio extremo, de la linealidad cuántica.

El carácter lineal de la física cuántica, con manifestaciones abrumadoras desde los fenómenos de polarización de la luz hasta las interferencias en la física de *kaones* neutros, ha sido cuestionado o modificado en ocasiones, aunque sin eco notable. Citemos, por ejemplo: i) el ambicioso (pero inconcreto) programa de de Broglie [87] para construir una teoría intrínsecamente no-lineal, causal, con comportamiento estadístico gobernado por la mecánica cuántica usual; ii) la evolución no-lineal supuesta por Bohm-Bub, y especificada por Tutch [88], que regiría al estado cuántico durante un proceso de medida, y explicaría la reducción del paquete de ondas dentro de una teoría de variables ocultas, con algoritmo policotómico, y iii) la propuesta, por Bialynicki-Birula y Mycielski [89], de una ecuación de Schrödinger con no-linealidad logarítmica ($\psi \ln |\psi|^2$), la única compatible con la separabilidad de subsistemas independientes. Este último modelo tiene unas soluciones estacionarias normalizables, los *gaussones*, que son paquetes gaussianos, con velocidad de desplazamiento constante, modulados por ondas planas de de Broglie. En campos EM externos tales gaussones se mueven aproximadamente como partículas clásicas si su tamaño es pequeño, pero cálculos numéricos (en una y dos dimensiones) muestran que no son solitones envolventes en sentido estricto. La bondad experimental de la ecuación de Schrödinger lineal relega el posible interés físico del modelo a situaciones en que multitud de otros agentes dinámicos enmascararían la hipotética presencia de esa no-linealidad logarítmica.

Frente al escaso interés despertado por estas especulativas desviaciones no-lineales de la mecánica cuántica, resalta la creciente atención prestada a las ecuaciones clásicas relativistas no-lineales desde la óptica de la teoría cuántica de campos y de la física de las partículas elementales. La existencia de soluciones localizadas y estables para muchas de esas ecuaciones sugiere, por un lado, su contemplación como posibles candidatos a partículas elementales, según el viejo sueño de Einstein, y por otro, enriquece de forma inesperada la estructura del espacio de estados cuánticos, dando lugar a sectores inalcanzables por la ingenua teoría de perturbaciones. Si a esto se añade la esperanza de que algunas de estas estructuras localizadas pudieran ser responsables del confinamiento de los *quarks* se comprenderá el esfuerzo desarrollado en el último lustro en este campo de investigación, algunos de cuyos hitos más representativos no podemos silenciar. Ascenderemos gradualmente en dificultad: SG, Yang-Mills, gravitación.

La ecuación SG cuántica, con masa $((\Box + m_0^2)\, u + \lambda\, \varepsilon : \mathrm{sen}\, \varepsilon u : = 0$, en unidades convenientes) ha sido un verdadero laboratorio para los constructivistas [90]. Quizás sea el único ejemplo conocido de un modelo de campos relativista no trivial con desarrollo perturbativo (en λ) convergente (cuando $\alpha \equiv \varepsilon^2/4\pi < 1$, $m_0 > 0$, $|\lambda|$ suficientemente pequeño). Su renormalización ultravioleta es casi trivial para $\alpha < 1$, problemática si $1 < \alpha < 2$ e imposible para $\alpha \geqslant 2$. La teoría es super-renormalizable cuando $\alpha = 1$, pero con matriz S trivial. En el caso de masa $m_0 = 0$, las divergencias de infrarrojo invalidan el desarrollo perturbativo, y los solitones SG clásicos dan lugar, para $\alpha < 4/\pi^2$, a un conjunto numerable de sectores de superselección solitónicos caracterizados por una carga topológica entera. En el sector normal de carga nula, hay un isomorfismo (de Coleman [91]) entre SG de $\alpha < 1$ y el modelo fermiónico masivo de Thirring-Schwinger (campo de Dirac, en dimensión $1 + 1$, con autoacoplo $\pi (\alpha^{-1} - 1) (\bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi) (\bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi)$ y masa λ). Bajo esta fascinante dualidad, el quantum bosónico de SG aparece como un par ligado fermión-antifermión, mientras que su extrapolación formal al resto de sectores asocia el solitón SG (estado ligado coherente de bosones) con el fermión elemental del modelo de Thirring-Schwinger. Siendo SG clásica un sistema hamiltoniano integrable, su descomposición en modos normales desacoplados parecería conducir a una cuantificación inmediata. Sin embargo, la no-linealidad de la transformación canónica que vincula $u(x, t)$ y su momento canónico conjugado $u_t (x, t)$ con las variables acción-ángulo introduce ambigüedades en la ordenación de productos de operadores, difíciles de resolver. Un primer avance importante en la metodología cuantitativa se debe a Dashen-Hasslacher-Neveu [92], cuya generalización de la aproximación WBK a sistemas con número arbitrario de grados de libertad ha permitido calcular la corrección semiclásica a la masa del solitón SG, y ver que el bión cuántico tiene un espectro finito y discreto de masas. Curiosamente la dualidad de Coleman mencionada permite probar que este espectro, calculado en la aproximación DHN, coincide con el exacto [93]. El «laboratorio» SG se muestra, respecto del método DHN, análogo al átomo de hidrógeno bajo WBK. Quizás en el futuro la consideración de las infinitas leyes de conservación bajo SG permitan también su cuantificación explícita, del mismo modo que la del vector de Lenz facilitó a Pauli el cálculo del espectro del hidrógeno. Añadamos, en fin, que la observabilidad de estos aspectos cuánticos de SG en fenómenos de transparencia autoinducida o en las ondas de spin en la fase A del ^{3}He parece lejana [43, 45]. En los primeros el espectro de masas biónicas es demasiado apretado, cuasi-continuo (la masa de los solitones es unos seis órdenes de magnitud mayor que la de los quanta bosónicos y su estructura por ende clásica); en las segundas se invierte la relación y desaparecen los biones cuánticos, pero esta ausencia sólo sería detectable de forma fácil a frecuencias tan bajas que las ondas de spin no serían ya disociables de las orbitales, invalidando el uso de la ecuación SG para la descripción de estos fenómenos físicos.

Los campos Yang-Mills no abelianos, con el mecanismo de Higgs para ruptura de la simetría «*gauge*» local evitando los bosones Goldstone y generando masa, ocupan el centro de interés de las investigaciones actuales en teoría de campos. Su renormalizabilidad ('t Hooft 1971 [94]) abrió las puertas de una fenomenología cuantitativa. El modelo $SU(2) \times U(1)$ unificado electrodébil de Salam-Weinberg es el ejemplo sobresaliente que ha convencido del enorme interés físico de estos esquemas. Aparte del ambicioso programa de unificación de las interacciones electrodébiles con las fuertes (y eventualmente con las gravitatorias), el confinamiento de los *quarks* es todavía la cuestión crucial que los físicos, con modelos como la cromodinámica cuántica (basada en las interacciones entre quarks vía *gluones*, con grupo SU(3)) u otros, deben explicar. Este confinamiento es un problema de infrarrojo y las teorías Yang-Mills son muy singulares en esta región, en contraste con su creciente simplicidad a cortas distancias (libertad asintótica). Fallando pues las técnicas perturbativas para controlar cuantitativamente los procesos confinadores, se hace inevitable el análisis no-perturbativo. Y es aquí cuando las soluciones clásicas, a través de sus contribuciones a las amplitudes cuánticas vía integración Feynman sobre caminos, pueden desempeñar un papel privilegiado, máxime aquellas que señalen sectores nuevos en el espacio de estados cuánticos [95]. La obstrucción del argumento de Derrick-Coleman a la existencia de soluciones estáticas localizadas (energía finita) en modelos como Klein-Gordon no-lineal para dimensión espacio-temporal $d + 1$, $d \geqslant 2$, desaparece para $d \leqslant 4$ con la adición de campos Yang-Mills, minimalmente acoplados a los campos Higgs, y emerge una posible familia de sectores clásicos, topológicamente estables, coordinable con el grupo de homotopía π_{d-1} (C) del espacio de ceros (supuesto simplemente conexo) del potencial de Higgs [96]. Así, para nuestro espacio-tiempo y grupo de gauge SU(2), 't Hooft y Polyakov [97] en 1974 descubren su famosa solución estática *erizo* o monopolo magnético, en el sector ± 1 de $\pi_2 (S^2) \simeq \mathbb{Z}$, que Julia-Zee [98] generalizan luego para dotarla de carga eléctrica, convirtiéndola en *dión*. La masa excesivamente alta de estos objetos ($\sim$ TeV en situaciones realistas), y el fracaso continuado en hallar soluciones tipo multi-monopolo (excepción hecha de algunos casos límite, en que una transformación Bäcklund permite generarlas, pero con energía infinita), desvió la atención a otro área, a saber, los campos Yang-Mills euclídeos. En ausencia de otros, poseen estos campos en $\mathbb{R}^4$ un tipo particular de soluciones de acción finita, llamadas multiinstantones, que son autoduales, y en consecuencia de energía nula, y transportan carga topológica cardinalizable por π_3 (G) ($\simeq \mathbb{Z}$ si el grupo de gauge G es compacto simple) [99]. La primera solución de esta extraordinaria familia fue hallada por Belavin-Polyakov-Tyupkin [100] en 1975 para G = SU(2), y pronto Witten y 't Hooft presentaron soluciones exactas multi-instantónicas. La solución general para un número o carga instantónico dado $k \in \mathbb{Z}$ se debe a Atiyah et al. [101], que formulan el problema, en el marco de fibrados principales (de 2ª clase de Chern k) sobre S^4 con grupo estructural compacto simple G, como búsqueda de las clases de equivalencia de G-conexiones autoduales (espacio de módulos). Utilizando la fibración $\mathbb{C} P^3 \longrightarrow S^4$ del formalismo twistor de Penrose, puede elevarse esta cuestión a fibrados vectoriales holomorfos sobre $\mathbb{C} P^3$. Pero $\mathbb{C} P^3$ es una variedad algebraica compleja, y un teorema básico de Serre asegura entonces la naturaleza algebraica de tales fibrados holomorfos. En suma, otro ejemplo a añadir de cómo la resolución de un intrincado sistema no-lineal de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden (ecuaciones Yang-Mills euclídeas no-abelianas) queda reducida, con técnicas de geometría algebraica, a la de un mero problema algebraico, tras la imposición de auto-dualidad. La belleza indudable de estas construcciones matemáticas serviría de poco a los físicos de no ser porque los instantones, como soluciones clásicas de energía cero en un universo con tiempo imaginario, indican que el sector vacío de Yang-Mills cuánticos en el espacio-tiempo ordinario posee un conjunto infinito ($\simeq \mathbb{Z}$) de estados vacío con diferentes cargas topológicas, entre los que fluyen los instantones, interpretados como fluctuaciones localizadas, por efecto túnel. Esta complejidad inesperada del vacío Yang-Mills produce nueva física, aún no comprendida del todo. Por una parte, la supresión drástica del intercambio de instantones que la presencia de fermiones sin masa produce, permite vincular los instantones con mecanismos de generación de masa de los quarks, y así empezar a entender la ruptura de simetría quiral. Por otra parte, la influencia desordenadora de un gas denso de instantones podría quizás provocar una transición desde una fase sin masas, no confinadora, a otra con masas, confinadora. Esta esperanza parece, sin embargo, actualmente descartada: cálculos de Meuller [102] indican que los instantones no confinan los quarks. Otras soluciones euclídeas, los *merones*, halladas por de Alfaro-Fubini-Furlan [103], vienen a sustituir a los instantones como posibles agentes del confinamiento. Con carga topológica $\pm 1/2$, estas soluciones, de acción total infinita, son singulares, no auto-duales, y pueden interpretarse como monopolos puntuales de corta vida. Su naturaleza singular, y el desconocimiento de soluciones multimerónicas generales, restan atractivo a estos objetos, que Callen-Dashen-Gross [104] proponen como posibles responsables del confinamiento en una fase en que los instantones se disocian en pares merón-antimerón, originando un plasma confinador. En cualquier caso, es evidente que estas soluciones clásicas, u otras aún no encontradas, ensanchan los horizontes de la especulación teórica y pueden conducir a áreas físicas cualitativamente nuevas.

Y para terminar, volvamos la vista a la gravitación einsteiniana. Teoría gauge por excelencia, con estructura grupal GL $(4, \mathbb{R})$ implementada sobre la variedad base misma, y conexión vinculada a su métrica, continúa resistiendo los embates cuantificadores que iniciara esencialmente Feymann [105] en 1962. Aunque la mayoría de los físicos en esa época consideraban el fenómeno gravitacional como una anomalía de la Naturaleza, la creencia de unos pocos en la unidad de la física impulsó el programa de la gravedad cuántica y sus resultados (Feymann, de Witt [106], Faddeev-Popov [107]) fueron de ayuda inestimable para 't Hooft en su demostración de la renormalizabilidad de las teorías Yang-Mills. Los actuales modelos [108] de gran unificación sugieren iguales constantes de acoplamiento fuerte, EM y débil a energías $\sim 10^{15}$ GeV, no muy distantes de la masa de Planck $m_P \sim 10^{19}$ GeV$/c^2$, umbral indicador de la importancia de los efectos cuánticos en la gravitación. Cerrar los ojos a una posible gravedad cuántica podría, por tanto, mutilar de antemano el éxito de cualquier tentativa de unificación real de todas las interacciones fundamentales, que convirtiera en realidad la idea acariciada por Einstein en la última fase de su vida (aunque no en la manera que él imaginó). Desgraciadamente, las dificultades que entraña la cuantificación de la geometría son muchas y de nuevo cariz. Técnicamente, la gravitación parece irrenormalizable. (Los modelos de supergravedad, teorías gauge basadas en una graduación grassmanniana del álgebra de Poincaré, dulcifican el problema pero no lo resuelven [109].) Y aunque alguna milagrosa cancelación de divergencias redujese a número finito las cantidades indeterminadas en los cálculos perturbativos en torno a una cierta geometría de fondo, es evidente que tales desarrollos tendrían sólo validez limitada (por ejemplo, objetos tales como los agujeros negros no son representables vía perturbaciones de una geometría plana). Parece preciso, por tanto, considerar simultáneamente todas las soluciones clásicas de fondo y sus fluctuaciones cuánticas. Estas últimas no tienen por qué preservar necesariamente la topología, pues la acción de Einstein (a diferencia de la de los campos Yang-Mills) no presenta barrera al cambio topológico (nuestro espacio-tiempo, en regiones del orden de la longitud de Planck, puede tener la estructura «espumosa» sugerida por Wheeler). La esperanza para Hawking [110], pionero de este enfoque, es que las soluciones clásicas a las ecuaciones de Einstein, con todas las topologías posibles, sean densas en el espacio de todas las métricas, y que su consideración, más las correcciones de un solo ciclo a las mismas, sean suficientes para representar las integrales sobre caminos que den las amplitudes de transición. He aquí, de nuevo, la importancia cuántica que tienen las soluciones clásicas de un problema fundamental, cuya riemannización, por último, no sólo proporciona instantones gravitacionales [111], presuntos enriquecedores de la estructura del vacío, sino que permite también reanalizar cuestiones de termodinámica gravitacional (como la entropía intrínseca de los agujeros negros), justificando así, en el marco de una teoría totalmente cuántica, resultados semiclásicos anteriores.

Conclusión

Supliendo con vuestra imaginación la aridez de mi prosa, no dudo de que ya os habréis compuesto una idea del variopinto panorama de los fenómenos no-lineales. Su carácter aglutinador de disciplinas diversas les asegura un futuro brillante, en el que todas las ciencias desde la matemática pura hasta la tecnología avanzada, codo con codo, fecundándose mutuamente, irán desvelando la maravillosa riqueza de estos procesos y sus principios unificadores.

He dicho.

REFERENCIAS

NOTA.—Al final incluimos, con la notación (Nn), una relación de libros consultados, que por ser actas de congresos, notas de conferencias, etc., conviene aislar para referir a ellos en la forma abreviada «**Nn**, pág. (año)».

[1] GRACIÁN, B., *El criticón*, Zaragoza (1651) (Espasa-Calpe, Madrid, 5.ª edición para la Colección Austral (1957)).

[2] DE ARTIGAS CASTRO, M. C., *Resumen biográfico y bibliografía de D. José Antonio de Artigas Sanz*, Raycar, Madrid (1977).

[3] GALINDO, A., *A remarkable invariance of classical Dirac lagrangians*. «Lett. Nuovo Cim.», **20**, 210 (1977).

[4] — — y MARTÍNEZ-ALONSO, L., *Kernels and ranges in the variational formalism*. «Lett. Math. Phys.», **2**, 385 (1978).

[5] ABELLANAS, L. y GALINDO, A., *A generalized variational algebra and conserved densities for linear evolution equations*. «Lett. Math. Phys.», **2**, 399 (1978).

[6] — — y GALINDO, A., *Conserved densities for non-linear evolution equations. I. Even order case*. «J. Math. Phys.», **20**, 239 (1979); **21**, a aparecer (1980).

[7] GALINDO, A., *An algorithm to construct evolution equations with a given set of conserved densities*. «J. Math. Phys.», **20**, 1256 (1979).

[8] — — *On the variational equation* $\delta f/\delta u = a$. «Anales de Física», **75**, 81 (1979).

[9] ABELLANAS, L., GALINDO, A. y MARTÍNEZ-ALONSO, L., *On a paper by J. Rosen*. «Lett. Math. Phys.», **3**, 451 (1979).

[10] — — y GALINDO, A., *Conserved densities for non-linear evolution equations. II. Odd order case* (a aparecer en «J. Math. Phys.», **21** (1980).

[11] — — y GALINDO, A., *Conserved densities for linear evolution systems* (a aparecer en «Comm. Math. Phys.» (1980)).

[12] GALINDO, A., *Sobre la existencia de lagrangianos generalizados* (a aparecer en Report JEN).

[13] ABELLANAS, L. y GALINDO, A., *Hacia una universalidad lagrangiana* (a aparecer en Report JEN).

[14] — — y GALINDO, A., *Ecuaciones de evolución de 5.º orden con leyes de conservación en derivadas altas* (a aparecer en Report JEN).

[15] GALINDO, A. y GARCÍA-ALCAINE, G., *Leyes de conservación para las ecuaciones de Klein-Gordon, Dirac y Maxwell* (a aparecer en Report JEN).

[16] — — y GARCÍA-ALCAINE, G., *Conserved densities for linear and non-linear evolution equations* (a aparecer en Report JEN)

[17] BRUNS, H., «Acta Math.», **11**, 25 (1887).
[18] POINCARÉ, H., «Acta Math.», **13**, 1 (1890); *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste 1, 2, 3*, Gauthier-Villars, Paris (1892). Para una interesante discusión sobre este momento histórico, puede consultarse MOSER, J., *Stable and random motions in dynamical systems*, Princeton Univ. Press, Princeton (1973).
[19] ABRAHAM, R. y MARSDEN, J., *Foundations of mechanics*, 2.ª edición, Benjamin, New York (1978).
[20] RUELLE, D. y TAKENS, F., «Comm. Math. Phys.», **20**, 167 (1971); «Amer. J. Math.», **98**, 619 (1976); «Phys. Lett.», **72A**, 81 (1979); **N1**, 489 (1980). Como apoyo experimental: GOLLUB, J. P. y SWINNEY, H. L., «Phys. Rev. Lett.», **35**, 927 (1975); AHLERS, G. y BEHRINGER, R. P., «Phys. Rev. Lett.», **40**, 712 (1978), y el interesante artículo de BERGÉ, P. y POMEAU, I. en «La Recherche», **11**, 422 (1980).
[21] FISCHER, A. E. y MARSDEN, J. E., **N2**, 138 (1979).
[22] PENROSE, R., «J. Math. Phys.», **8**, 345 (1967); «Phys. Rep.», **6C**, 242 (1972) (con MCCALLUM, M. A. H.); **N3**, 268 (1975); «Rep. Math. Phys.», **12**, 65 (1977); **N4**, 55 (1979). Ver también: HUGHSTON, L. P., *Twistors and particles*, Springer-Verlag, Berlin (1979) y artículos de WARD, R. S., HARTSHORNE, R., etc. en **N4**, para aplicaciones de la técnica twistor.
[23] NICOLIS, G., **N5**, 210 (1973); PIMBLEY, G. H., ibid., 231; THOMPSON, C. J., ibid., 308; DIETZ, K., **N6**, 1 (1976); ANDERSON, R. M., ibid., 16; RICHTER, O. y BETZ, R., ibid., 180; FELDMANN, U. y SCHNEIDER, B., ibid., 243; KERNEVEZ, J. P. et al., **N7**, 327 (1977); FIFE, P. C., ibid., 355; LECAR, H., ibid., 369; SCOTT, A. C., **N8**, 80 (1976).
[24] SCOTT-RUSSELL, J., *Report on waves*. Rep. 14th Meeting of the British Assoc. for the Advancement of Science, John Murray, London (1844).
[25] KORTEWEG, D. J. y DE VRIES, G., «Philos. Mag.», **39**, 422 (1895).
[26] KRUSKAL, M. D., **N9**, 310 (1975); **N10**, 1 (1978).
[27] VON NEUMANN, J., *Collected works*, vol. **5**, p. 1-32, Ed. A. Taub, Macmillan, New York (1963).
[28] FERMI, E., PASTA, J. R. y ULAM, S. M., *Studies of nonlinear problems. I.* Los Alamos Sci. Lab. Rep. LA-1940 (1955). Reimpreso en **N11**, 143 (1974).
[29] KOLMOGOROV, A. N., «Dokl. Akad. Nauk. SSSR», **98**, 527 (1954).
[30] ZABUSKY, N. J. y KRUSKAL, M. D., «Phys. Rev. Lett.», **15**, 240 (1965).
[31] ROBINSON, J. y SCOTT-RUSSELL, J., *Report of the Committee on waves*. Rep. 7th Meeting of the British Assoc. for the Advancement of Science, John Murray, London (1838).

[32] MIURA, R. M., «SIAM Review», **18**, 412 (1976); **N12**, 1 (1978).

[33] JACKSON, E. A., «The Rocky Mountain J. of Math.», **8**, 127 (1978).

[34] LAX, P. D., «Comm. Pure Appl. Math.», **21**, 467 (1968).

[35] MIURA, R. M., «J. Math. Phys.», **9**, 1202 (1968).

[36] — — GARDNER, C. S. y KRUSKAL, M. D., «J. Math. Phys.», **9**, 1204 (1968).

[37] GARDNER, C. S., GREENE, J. M., KRUSKAL, M. D. y MIURA, R. M., «Phys. Rev. Lett.», **19**, 1095 (1967); «Comm. Pure Appl. Math.», **27**, 97 (1974).

[38] GEL'FAND, I. M. y LEVITAN, B. M., «Amer. Math. Soc. Transl.», **1**, 253 (1955).

[39] AGRANOVICH, Z. S. y MARCHENKO, V. A., *The inverse problem of scattering theory*. Gordon and Breach, New York (1963).

[40] GARDNER, C. S., «J. Math. Phys.», **12**, 1548 (1971).

[41] ZAKHAROV, V. S. y FADDEEV, L. D., «Funk. Anal. Priloz.», **5**, 18 (1971).

[42] SCOTT, A. C., CHU, F. Y. F. y MCLAUGHLIN, D. W., «Proc. IEEE», **61**, 1443 (1973).

[43] BULLOUGH, R. K., **N13**, 381 (1977); **N14**, 99 (1978).

[44] Artículos de YUEN, H. C., LAKE, B. M., LONNGREN, K. E., IKEZI, H., PARMENTIER, R. D., BATTEH, J. H., POWELL, J. D., DEEM, G. S. y ZABUSKY, N. J., en **N12** (1978).

[45] BULLOUGH, R. K. y CAUDREY, P. J., **N10**, 180 (1978).

[46] Artículos de SEGUR, H., BULLOUGH, R. K., CAUDREY, P. J., KAUP, D. J., LAKE, B. M. et al., PARMENTIER, R. D., COSTABILE, G., STEWART, R. W., CORONES, J., FLASCHKA, H., MCLAUGHLIN, D. W., MORALES, G. J., LEE, Y. C. y MAXON, S., en «The Rocky Mountain J. of Math.», vol. 8 (1978); MONTES, C., **N15**, 205 (1979).

[47] LUND, F., **N14**, 143 (1978).

[48] LIBCHABER, A. y TOULOUSE, G., «La Recherche», **7**, 1027 (1976); SPIVAK, M., *Differential geometry*, vol. III, Publish or Perish, Berkeley (1975).

[49] SEEGER, A., DONTH, H. y KOCHENDÖRFER, A., «Z. Phys.», **134**, 173 (1953).

[50] PERRING, J. K. y SKYRME, T. H. R., «Nucl. Phys.», **31**, 550 (1962). Para un enfoque más amplio de las ecuaciones relativistas no-lineales como modelos clásicos de partículas, véase SOLER, M., «Phys. Rev.», **D1**, 2766 (1970), **D8**, 3424 (1973), así como RAÑADA, A. F., *On some classical models of extended particles*, a aparecer en las «Actas del Coloquio Internacional sobre Física Matemática» de Istanbul-Trabzon, que recoge la contribución de su grupo a esta temática.

[51] McCall, S. L. y Hahn, E. L., «Bull. Amer. Phys. Soc.», **10**, 1189 (1965); «Phys. Rev. Lett.», **18**, 908 (1967); «Phys. Rev.», **183**, 457 (1969).
[52] Slusher, R. E. y Gibbs, H. M., «Phys. Rev.», **A5**, 1634 (1972); **A6**, 1255 (1972).
[53] Kaup, D. J., «The Rocky Mountain J. of Math.», **8**, 71 (1978).
[54] Bullough, R. K. y Caudrey, P. J., «The Rocky Mountain J. of Math.», **8**, 53 (1978).
[55] — — et al., «Optics Comm.», **18**, 200 (1976).
[56] Toda, M., «J. Phys. Soc. Japan», **22**, 431 (1967); «Phys. Rep.», **18C**, 1 (1975).
[57] Saito, N. et al., Report of meetings at RIMS, Kyoto Univ. (1971).
[58] Hénon, M., «Phys. Rev.», **B9**, 1421 (1974).
[59] Toda, M. y Wadati, M., «J. Phys. Soc. Japan», **34**, 18 (1973).
[60] Flaschka, H., «Phys. Rev.», **B9**, 1924 (1974); «Prog. Theor. Phys.», **51**, 703 (1974); **N9**, 441 (1975).
[61] Case, K. M. y Kac, M., «J. Math. Phys.», **14**, 594 (1973). Ver también Levi, D., **N15**, 91 (1979).
[62] Zakharov, V. E. y Shabat, A. B., «Soviet Phys. JETP», **34**, 62 (1972); «Funk. Anal. Priloz.», **8**, 43 (1974).
[63] Wadati, M., «J. Phys. Soc. Japan», **32**, 1403 (1972).
[64] Ablowitz, M. J., Kaup, D. J., Newell, A. C. y Segur, H., «Phys. Rev. Lett.», **30**, 1262 (1973); **31**, 125 (1973); «Studies in Appl. Math.», **53**, 249 (1974).
[65] Wadati, M. y Kamijo, T., «Prog. Theor. Phys.», **52**, 397 (1974). Ver Martínez-Alonso, L., *Schrödinger spectral problems with energy-dependent potentials as sources of nonlinear Hamiltonian evolution equations* (Preprint UCM 1980), para una interesante generalización, que incluye la de Jaulent-Miodek.
[66] Calogero, F., «Lett. Nuovo Cim.», **14**, 443 (1975); **N16**, 235 (1978); Calogero, F. y Degasperis, A., «Nuovo Cim.», **32B**, 201 (1976); **39B**, 1 (1977); Degasperis, A., **N15**, 35 (1979).
[67] Jones, S. E. y Ames, W. F., «J. Math. Ann. Appl.», **17**, 484 (1967); Ames, W. F., **N17**, 99 (1976).
[68] Bäcklund, A. V., «Lund. Univ. Arssk.», **10** (1875); **19** (1883). Ver Lamb, G. L., **N8**, 69 (1976) para el desarrollo histórico de esta transformación.
[69] Bianchi, L., *Lezioni di geometria differenziale*, vol. II, Pisa (1902).
[70] Lamb, G. L., «Rev. Mod. Phys.», **43**, 99 (1971).
[71] Newell, A. C., **N8**, 227 (1976); Chen, H., ibid., 241; Flaschka, H. y McLaughlin, D. W., ibid., 253.
[72] Wahlquist, H. D. y Estabrook, F. B., «J. Math. Phys.», **16**, 1 (1975); **17**, 1293 (1977); **N10**, 64 (1978). Artículos

de estos autores, y de Corones, J. P. y Testa, F. J., en **N8** (1976); Morris, H. C., «J. Math. Phys.», **17**, 1867, 1870 (1976); **18**, 285, 530, 533 (1977); **19**, 85 (1979); **21**, 327 (1980); Hermann, R., *Toda lattices, cosymplectic manifolds, Bäcklund transformations and kinks*, «Math. Sci. Press», Brookline (1977); **N12**, 33 (1978).

[73] Wadati, M., **N10**, 33 (1978).

[74] Guil, F., *Métodos variacionales y de invariancia aplicados al estudio de las densidades conservadas en problemas físicos no-lineales*. Tesis doctoral, UCM, Madrid (1979).

[75] Kaup, D. J., **N7**, 97 (1977); Newell, A. C., **N10**, 127 (1978); «The Rocky Mountain J. of Math.», **8**, 25 (1978); McLaughlin, D. W. y Scott, A. C., **N10**, 225 (1978); **N12**, 201 (1978).

[76] Cohen, A., «Arch. Rational Mech. Anal.», **71**, 143 (1979).

[77] Temam, R., «J. Math. Pures Appl.», **48**, 159 (1969); Saut, J. C. y Temam, R., «Israel J. Math.», **24**, 78 (1976). Ver también Bona, J. y Smith, R. S., «Phil. Trans. Roy. Soc. London», **A278**, 555 (1975).

[78] Belavin, A. A. y Zakharov, V. E., **N16**, 229 (1978); Belinsky, V. y Zakharov, V. E., **N18**, 161 (1980).

[79] Deem, G. S. y Zabusky, N. J., **N12**, 277 (1978).

[80] Dubrovin, B., Matveev, V. y Novikov, S., «Russ. Math. Surveys», **31**, 59 (1976); McKean, H. P., **N19**, 83 (1979).

[81] Mumford, D., *On isospectral deformations of Laplace-like difference operators* (a aparecer). Ver van Moerbeke, P., **N19**, 313 (1979).

[82] Gel'fand, I. M. y Dikii, L. A., «Funk. Anal. Priloz.», **10**, n.º 4, 13 (1976); **11**, n.º 2, 11 (1977), y **12**, n.º 2, 8 (1978).

[83] van Moerbeke, P., «Invent. Math.», **37**, 45 (1976); McKean, H. P., **N19**, 83 (1979).

[84] Adler, M., «Invent. Math.», **50**, 219 (1979); **N19**, 1 (1979).

[85] Ratiu, T., **N20**, 219 (1980).

[86] Kostant, B., «Adv. in Math.», **34**, 195 (1979).

[87] de Broglie, L., *Nonlinear wave mechanics*, Elsevier, Amsterdam (1960).

[88] Ver Belinfante, F. J., *A survey of hidden-variables theories*, Pergamon Press, Oxford (1973), para bibliografía y discusión detalladas.

[89] Bialynicki-Birula, I. y Mycielski, J., «Ann. Phys.», **100**, 62 (1976); Oficjalski, J., «Acta Phys. Polon.», **B9**, 759 (1978).

[90] Fröhlich, J., **N21**, 371 (1976).

[91] Coleman, S., «Phys. Rev.», **D11**, 2088 (1975); **N22**, 297 (1977).

[92] Dashen, R. F., Hasslacher, B. y Neveu, A., «Phys. Rev.», **D10**, 4114, 4130 (1974); **D11**, 3424 (1975); Neveu, A.,

N7, 1 (1977); HASSLACHER, B. y NEVEU, A., «The Rocky Mountain J. of Math.», **8**, 341 (1978).

[93] LUTHER, A., «Phys. Rev.», **B14**, 2153 (1976).

[94] 'T HOOFT, G., «Nucl. Phys.», **B35**, 167 (1971).

[95] JACKIW, R., «Rev. Mod. Phys.», **49**, 681 (1977).

[96] GODDARD, P. y OLIVE, D., «Rep. Prog. Phys.», **41**, 1357 (1978).

[97] 'T HOOFT, G., «Nucl. Phys.», **B79**, 276 (1974); POLYAKOV, A. M., «JETP Lett.», **20**, 194 (1974).

[98] JULIA, B. y ZEE, A., «Phys. Rev.», **D11**, 2227 (1975).

[99] Ver, por ejemplo, ACTOR, A., «Rev. Mod. Phys.», **51**, 461 (1979), y su abundante bibliografía sobre el tema.

[100] BELAVIN, A. A., POLYAKOV, A. M., SCHWARZ, A. S. y TYUPKIN, YU. S., «Phys. Lett.», **B59**, 85 (1975).

[101] ATIYAH, M. F., HITCHIN, N. J. y SINGER, I. M., «Proc. Natl. Acad. Sci. USA», **74**, 2662 (1977); ATIYAH, M. F. y WARD, R. S., «Comm. Math. Phys.», **55**, 117 (1977); ATIYAH, M. F., HITCHIN, N. J., DRINFELD, V. G. y MANIN, YU. I., «Phys. Lett.», **A65**, 185 (1978); ATIYAH, M. F., N**16**, 216 (1978); WARD, R. S., **N4**, 12 (1979); HARTSHORNE, R., «Comm. Math. Phys.», **59**, 1 (1978); **N4**, 35 (1978); RAWNSLEY, J. H., **N19**, 295 (1979).

[102] MEULLER, A. H., «Phys. Rev.», **D17**, 1605 (1978).

[103] DE ALFARO, V., FUBINI, S. y FURLAN, G., «Phys. Lett.», **B65**, 163 (1976); **B72**, 203 (1977); **B73**, 463 (1978).

[104] CALLEN, C., DASHEN, R. y GROSS, J., «Phys. Lett.», **B66**, 375 (1977); «Phys. Rev.», **D17**, 2717 (1978).

[105] FEYNMANN, R. P., «Acta Phys. Polon.», **24**, 697 (1963).

[106] DE WITT, B. S., «Phys. Rev.», **162**, 1195, 1239 (1967); **N2**, 680 (1979); **N23**, 275 (1979).

[107] FADDEEV, L. D. y POPOV, V. N., «Phys. Lett.», **25B**, 29 (1967).

[108] Ver, por ejemplo, ILIOPOULOS, J., **N24**, 89 (1979).

[109] Ver, por ejemplo, ZUMINO, B., **N23**, 405 (1979); **N24**, 114 (1979); DESER, S., **N3**, 136 (1975); **N23**, 461 (1979); **N20**, 49 (1980); VAN NIEUWENHUIZEN, P., **N23**, 519 (1979).

[110] HAWKING, S. W., **N2**, 746 (1979); **N23**, 145 (1979). Ver también PATTON, G. M. y WHEELER, J. A., **N3**, 538 (1975); HAWKING, S. W., «Comm. Mat. Phys.», **43**, 199 (1975); **N3**, 219 (1975).

[111] GIBBONS, G. W., **N25**, 282 (1980).

* * *

(N1) *Approximation methods for Navier-Stokes problems*, Ed. R. Rautmann, Springer-Verlag, Berlin (1980).

(N2) *General relativity*, Ed. S. W. Hawking, W. Israel, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1979).

(N3) *Quantum gravity*, Ed. C. J. Isham et al., Clarendon Press, Oxford (1975).
(N4) *Complex manifold techniques in theoretical physics*, Ed. D. E. Lerner, P. D. Sommers, Pitman Publ., London (1979).
(N5) *Nonlinear problems in the physical sciences and biology*, Ed. I. Stakgold et al., Springer-Verlag, Berlin (1973).
(N6) *Mathematical models in medicine*, Ed. J. Berger et al., Springer-Verlag, Berlin (1976).
(N7) *The significance of nonlinearity in the natural sciences*, Ed. A. Perlmutter, L. F. Scott, Plenum Press, New York (1977).
(N8) *Bäcklund transformations*, Ed. R. M. Miura, Springer-Verlag, Berlin (1976).
(N9) *Dynamical systems, theory and applications*, Ed. J. Moser, Springer-Verlag, Berlin (1975).
(N10) *Nonlinear evolution equations solvable by the spectral transform*, Ed. F. Calogero, Pitman Publ., London (1978).
(N11) *Nonlinear wave motion*, Ed. A. C. Newell, Amer. Math. Soc., Providence (1974).
(N12) *Solitons in action*, Ed. K. Lonngren, A. Scott, Academic Press, New York (1978).
(N13) *Interaction of radiation with condensed matter*, vol. I, IAEA, Vienna (1977).
(N14) *Nonlinear equations in physics and mathematics*, Ed. A. O. Barut, Reidel Publ., Dordrecht (1978).
(N15) *Nonlinear problems in theoretical physics*, Ed. A. F. Rañada, Springer-Verlag, Berlin (1979).
(N16) *Mathematical problems in theoretical physics*, Ed. Dell'Antonio et al., Springer-Verlag, Berlin (1978).
(N17) *Mathematical physics and physical mathematics*, Ed. K. Maurin, R. Raczka, Reidel Publ., Dordrecht (1976).
(N18) *Sources of gravitational radiation*, Ed. L. Smarr, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1979).
(N19) *Global analysis*, Ed. M. Grmela, J. E. Marsden, Springer-Verlag, Berlin (1979).
(N20) *Geometrical methods in mathematical physics*, Ed. G. Kaiser, J. E. Marsden, Springer-Verlag, Berlin (1980).
(N21) *Renormalization theory*, Ed. G. Velo, A. S. Wightman, Reidel Publ., Dordrecht (1976).
(N22) *New phenomena in subnuclear physics. A*, Plenum Press, New York (1977).
(N23) *Recent developments in gravitation*, Ed. M. Lévy, S. Deser, Plenum Press, New York (1979).
(N24) *Einstein symposion Berlin*, Ed. H. Nelkowski et al., Springer-Verlag, Berlin (1979).
(N25) *Mathematical problems in theoretical physics*, Ed. K. Osterwalder, Springer-Verlag, Berlin (1980).

DISCURSO DE CONTESTACION

DEL

EXCMO. SR. D. CARLOS SANCHEZ DEL RIO

Excmo. Sr. Presidente,
Excmos. Sres. Académicos,
Señoras y Señores:

Séame permitido antes de nada expresar mi agradecimiento al Presidente de la Academia por haberme designado para contestar al discurso del Prof. Galindo que acabamos de escuchar. Mi larga vinculación con el recipiendario justifica mi satisfacción por haber sido elegido para tan honrosa tarea.

Alberto Galindo realizó sus estudios de bachillerato en Sena y Huesca, obteniendo premio extraordinario en la reválida. Pasó a continuación a la Universidad de Zaragoza para cursar la carrera de matemáticas. Fue alumno brillante y galardonado, siendo estudiante, con el premio Casañal de la Facultad de Ciencias de aquella Universidad por sus trabajos sobre geometría proyectiva y algebraica. Terminó sus estudios de licenciatura en 1957 con premio extraordinario en la reválida y premio nacional de ciencias fin de carrera. Fue entonces cuando tuve yo mi primer contacto con el nuevo académico.

Era entonces rector de la Universidad de Zaragoza Juan Cabrera, quien me habló con entusiasmo de la capacidad de Galindo y de su interés por la física matemática. Tenía Cabrera la preocupación de no poder ofrecer en Zaragoza a Galindo las facilidades que necesitaba para desarrollar su vocación y me preguntó si yo en Madrid podía hacerlo. Acepté encantado porque la propuesta no podía llegar en momento más oportuno. Además de mi cátedra en la Universidad ocupaba yo un puesto en la Junta de Energía Nuclear que me permitía disponer de medios suficientes para iniciar una empresa con la que soñaba hace tiempo: promover con amplitud el cultivo de la Física Teórica en España. No habían faltado, anteriormente, cultísimos eruditos de esta rama de la Ciencia como los académicos Echegaray, Plans y Terradas; pero ninguno había dejado escuela y eran muy pocos los físicos teóricos autodidactas que con mérito indudable se mantenían al corriente de las nuevas teorías.

Conseguí una beca para Galindo y tuve poco después frente a mí a un joven que hablaba con fuerte acento aragonés y cuya inteligencia pude percibir desde mi primera entrevista. Junto con él vino Pedro Pascual, a quien había yo conocido en Barcelona en un viaje que hice con motivo de una tesis doctoral. También se incorporó al grupo Luis Garrido, que regresaba a España después de haber estudiado en los Estados Unidos. Garrido y Pascual son hoy catedráticos de la Universidad de Barcelona.

Les indiqué lo que tenían que aprender —mecánica cuántica y teoría cuántica de campos fundamentalmente— y les proporcioné libros, revistas y tranquilidad. En los años siguientes incorporé al grupo nuevos jóvenes entusiastas, entre ellos a Angel Morales y Rafael Núñez-Lagos, actualmente catedráticos de la Universidad de Zaragoza. Y les dejé trabajar con muy poca interferencia por mi parte. Tuve total confianza en ellos desde el principio y no me equivoqué, como lo muestra el desarrollo posterior de la Física Teórica entre nosotros. No me faltaron disgustos, sin embargo. Algunas personas prominentes de la Junta de Energía Nuclear consideraban inútil el cultivo de la física teórica fundamental porque no iba a producir resultados prácticos inmediatos. Se me llegó a acusar de mantener un grupo de «mamíferos de lujo» (*sic*) con cargo al erario público. Se repitió una vez más la incomprensión del futuro que parece ser una característica recurrente de la historia de España. Predominan con frecuencia los intereses prácticos inmediatos sobre las actividades cuyos frutos sólo se verán después de algunas generaciones. Y el resultado de tal inmediatismo es quedarnos sin resultados válidos ni para hoy ni para mañana. De todas formas, es justo reconocer que las críticas no pasaron de ejercicios verbales y que no tuve dificultades importantes para continuar el programa de promoción de la Física Teórica.

En 1960 tenía Galindo terminada su tesis doctoral. La memoria se titulaba «Análisis general de la dispersión» y por su carácter matemático tuvimos especial interés en que figurasen matemáticos en el tribunal que había de juzgarla. Y esto me da pie para contar una anécdota. Pocos días antes de su lectura fui despertado violentamente por una llamada telefónica pasadas las tres de la madrugada. Era de nuestro compañero Ricardo San Juan, eminente matemático nocturno y miembro del tribunal, que quería comentar conmigo algunos detalles de la memoria que acababa de leer y que le había causado gran impresión. Tentado estuve de responderle que le llamaría a las ocho, cuando él dormía, para analizar sus comentarios.

Obtenido el máximo grado académico era el momento de iniciar la formación postdoctoral en el extranjero. Pregunté a Galindo dónde quería ir y me respondió sin dudarlo que al Japón para trabajar en un grupo cuya temática le interesaba mucho en aquel momento. Me pareció extravagante el deseo porque no es frecuente que nuestros jóvenes estudiosos sean pensionados a países exóticos. No obstante, se realizaron las oportunas gestiones y fue admitido en el grupo con el que deseaba colaborar, pero hubo de renunciar porque nuestros colegas nipones se permitieron advertirnos, con cortesía oriental, que tanto los seminarios como las discusiones y los documentos de trabajo se hacían en japonés. Nuestro joven doctor tuvo que conformarse con su segunda elección y marchó al Instituto Courant de Ciencias Matemáticas de la Universidad de Nueva York, donde pasó el curso 1961-62. Aprovechó el tiempo.

En otoño del 1962 fue a Ginebra como investigador asociado en la División Teórica del Centro Europeo de Investigaciones Nucleares (CERN), organismo del que entonces España era país miembro. Permaneció allí hasta fines de 1964, aunque durante este período pasó algunas cortas temporadas en Madrid por diversos motivos. Uno de ellos merece ser contado.

Se habían convocado dos cátedras de Física Matemática en las Universidades de Zaragoza y Valencia. Pedro Pascual firmó inmediatamente la oposición y parecía lógico que Alberto Galindo también lo hiciera. Pero no se decidía. No por temor a la oposición sino porque se encontraba bien investigando con tranquilidad, dando seminarios en varios lugares y asistiendo a muchos congresos. Me pareció un error su indecisión porque siempre he entendido que la investigación como profesión sólo se justifica en el caso de investigadores en ciencia aplicada ; el investigador en ciencia fundamental debe vincularse con la docencia tanto para proyectar sus conocimientos como para tener una tarea concreta en los períodos menos creativos que tarde o temprano llegan necesariamente. Gracias a la intervención de Armando Durán pudimos persuadir a Galindo de que opositase. Los dos candidatos obtuvieron sendas cátedras.

En 1967 volvió Galindo a opositar ; esta vez a la cátedra de Física

Teórica de Madrid que ocupa actualmente. También esa oposición tiene su historia. Galindo se destacó a lo largo de la oposición pero el tribunal no encontró motivo para elegir un segundo entre los otros. De acuerdo con el reglamento se prolongó el sexto ejercicio con problemas cada vez más difíciles para terminar dejando vacante la segunda cátedra. Hoy los dos candidatos rechazados en aquella ocasión son prestigiosos catedráticos, pero aquella oposición es un buen argumento a favor de los enemigos de nuestro sistema de selección del profesorado universitario.

Antes y después de los acontecimientos que acabo de narrar, Alberto Galindo ha seguido una trayectoria vital dedicada exclusivamente a la investigación y a la docencia. La trayectoria, sin embargo, no ha sido recta sino ondulante, oscilando siempre entre la matemática y la física. Esto se percibe claramente si se analizan sus trabajos de investigación. En una primera época —hasta 1962— sus publicaciones de física matemática se ciñen más al aspecto matemático de los problemas que ataca. Después y hasta principios de la década de los años setenta lleva a cabo trabajos teóricos más centrados en cálculos comparables con la experiencia en el dominio de las partículas elementales. En los últimos años ha vuelto a su primitiva vocación abordando problemas de física más generales y aplicando a ellos la poderosa herramienta matemática que domina.

Muchos de sus resultados aparecen citados y a veces ampliamente recogidos y comentados en libros de gran categoría internacional, como la monografía *Pertubation of Spectra in Hilbert Space*, por K. O. Friedrichs, o la colección *Methods of Modern Mathematical Physics*, por M. Reed y B. Simon. Y algunos de sus teoremas más recientes en análisis no-lineal están siendo utilizados por otros investigadores extranjeros tanto en matemáticas puras como aplicadas. Es nuestro nuevo académico autor también de varios libros. El más importante hasta ahora es la monumental *Mecánica Cuántica* escrita en colaboración con Pedro Pascual y publicada en 1978. Fue un trabajo de varios años que pasará a la historia como uno de los libros clave de la bibliografía científica española.

El creciente prestigio científico de Alberto Galindo ha sido ampliamente reconocido tanto en España como en el extranjero. Bastan unos pocos ejemplos para dar fe de ello. En 1966 fue nombrado académico numerario de la Academia de Ciencias de Zaragoza. Es desde 1969 académico corresponsal de esta Real Academia. En 1977 se le otorgó el Premio Nacional de Investigación en Física. Forma parte del círculo de censores de varias revistas internacionales de Matemáticas y Física Matemática. Ha sido invitado a participar en numerosas reuniones internacionales y a pasar temporadas como profesor en el CERN de Ginebra, en el IHES de París y en un Instituto del CNRS de Marsella. Este mismo año está invitado como profesor en la Universidad de Dijon.

Pero sin duda no son estas distinciones las que más le satisfacen. Conociendo a Alberto Galindo como yo lo conozco creo poder afirmar que lo que más le importa es el respeto de los muchos físicos españoles que lo consideran su maestro y la admiración y amistad de quienes hemos seguido su trayectoria científica y humana.

* * *

Acabamos de escuchar un discurso magistral sobre los fenómenos no lineales en la naturaleza. Un discurso denso porque nada falta ni nada sobra. Ha sido como un cuadro en el que no se deben modificar ni el dibujo ni el color. Sería temeridad por mi parte tratar de hacerlo. Pero los cuadros requieren marco para que resalten y esto es lo que quiero ya hacer ahora: enmarcar el discurso. Y como los marcos tienen cuatro listones así voy yo a recordar cuatro pensamientos que me parecen útiles: las fronteras de la física, la reducción de los fenómenos físicos, la explicación teórica de la naturaleza y la relación entre la matemática y la física. Mucho para el poco tiempo disponible. Me limitaré a unas pinceladas que ciertamente no proceden en el caso de un marco. Pero es que en realidad no voy a construir un marco sino a diseñar un proyecto de marco.

Hasta este siglo aproximadamente la física parecía tener una sola frontera. El objetivo de las investigaciones físicas durante tres siglos (desde **1600** hasta **1900**) fue el descubrimiento y sistematización de las leyes básicas que rigen el comportamiento de la naturaleza. Este programa llevado a cabo con notable éxito se basaba en una idealización de la propia naturaleza. Por eso la física se ocupaba de objetos y situaciones ideales como puntos materiales, ausencia de fricción, fluidos perfectos, procesos reversibles, fenómenos frecuentemente lineales, etc. Cierto es que estas situaciones ideales podían considerarse a menudo como límites extrapolados de los fenómenos reales. Por eso cuando a finales del pasado siglo se creyó que el programa estaba cumplido y que todos los fenómenos naturales eran explicables a partir de las leyes de la mecánica clásica y del electromagnetismo algunos optimistas dieron la física por cerrada; la aplicación de los principios se consideraba un problema complicado pero trivial.

Pronto se vio que el optimismo era prematuro; los nuevos experimentos se mostraron incompatibles con las ideas clásicas y fue preciso incorporar a la física dos nuevas teorías: la relatividad y la mecánica cuántica. Con estas herramientas es posible explicar en principio la química que ha dejado de ser disciplina conceptualmente distinta de la física aunque mantiene y mantendrá individualidad propia por su metodología específica. Las dificultades a nivel subatómico subsisten sin embargo.

Por otra parte la ilusión de deducir los fenómenos reales por una aplicación trivial de los principios también se ha revelado quimérica. Baste un ejemplo sencillo: la física del plasma. Un plasma no es otra cosa que un conjunto de electrones e iones positivos cuyo movimiento en campos electromagnéticos viene regido por las leyes conocidas de la física clásica, esencialmente. Pues bien, las sencillas leyes elementales dan lugar a fenómenos colectivos de una complejidad diabólica. Después de treinta años de esfuerzo sostenido todavía no es posible predecir el comportamiento de un plasma en unas condiciones definidas.

Como resultado de las investigaciones de los últimos cien años podemos considerar ahora, al final del siglo XX, que la física se nos presenta como una disciplina con dos fronteras. Una, bien definida y en cierto sentido tradicional. Es la frontera de las leyes fundamentales. Los descubrimientos de los últimos treinta o cuarenta años en el dominio de las partículas subnucleares (impropiamente llamadas partículas elementales) nos han llevado a la idea de que todas las interacciones del Universo son de cuatro clases: gravitatoria, débil, electromagnética y fuerte. Las conocemos con diverso grado de certidumbre. En todo caso desearíamos que las cuatro fueran aspectos diversos de una sola interacción fundamental. Hace un par de años se ha desarrollado una teoría —probablemente no definitiva aunque ciertamente en la dirección correcta— que funde la interacción débil con el electromagnetismo. Pero la interacción fuerte (responsable de las fuerzas nucleares) sigue siendo un misterio y las teorías gravitatorias caminan por rutas tan diferentes que no es posible esperar su unificación con las otras interacciones en las próximas décadas.

La segunda frontera de la física es la de los fenómenos reales en toda su rica complejidad. Es una frontera multifacética. Es la nueva hidrodinámica físico-química, es la física de los sólidos con sus imperfecciones de todas clases (dislocaciones, vacantes intersticiales, etcétera), la físico-química de las macromoléculas y tantas otras disciplinas cada vez mejor definidas. En último término tropezamos con la biología cuya base físico-química ya se empieza a conocer. Otra cara de la frontera la encontramos en la meteorología, la alta atmósfera, la geofísica y aun la misma geología y sobre todo en la astrofísica y su significación para comprender la evolución del Universo. En esta última rama de la física se funden todos nuestros conocimientos clásicos, cuánticos y relativistas.

Pues bien, en todas las fronteras de la física actual nos encontramos con fenómenos no lineales cuyo tratamiento matemático ya es parcialmente posible como nos ha sido expuesto. Algunos, entre los cuales me encuentro, desearíamos que la no linealidad fuese solo un fruto aparente de la complejidad y que no apareciese en los principios fundamentales. Pero no es seguro que se cumpla este deseo basado en una convicción metafísica que supone que las leyes de la naturaleza son simples y que descubriremos su simplicidad si acertamos a relacionar los elementos adecuados.

Y este razonamiento me trae al segundo de los listones del marco que prometí esbozar. ¿Cuáles son estos elementos adecuados? No sabemos cuales pero los tenemos clasificados en dos grandes familias más o menos definidas. Ya en la física clásica llegamos a la conclusión de que todos los objetos que observamos pueden reducirse idealmente a dos: partículas y campos. Las partículas son entes puntuales que pueden ser aproximadamente representativos de objetos reales (por ejemplo de un cuerpo de dimensiones pequeñas frente a las del sistema que se estudia) o conceptos de razón (como el centro de masas de un proyectil cuya trayectoria se predice teóricamente). Los campos son entidades extensas que se caracterizan por el valor de alguna variable (escalar, vectorial, tensorial, etc.) en cada punto del espacio y en cada momento. Las olas del mar y las ondas sonoras son ejemplos de campos en el sentido físico. Ambas clases de objetos son irreducibles a un concepto más fundamental por lo menos a nivel de la experiencia sensible ordinaria. Y como quiera que nuestro lenguaje proviene de la experiencia ordinaria, nuestra descripción de la naturaleza debe basarse en los dos conceptos antedichos si no queremos caer en manifestaciones esotéricas.

En el mundo microscópico (y con ello quiero indicar átomos, núcleos y partículas elementales) la distinción entre partículas y campos es mucho menos clara. Parece que los entes fundamentales de la naturaleza se nos aparecen unas veces como partículas y otras como campos. Además ciertas clases de partículas se nos manifiestan colectivamente como campos clásicos y algunos campos presentan propiedades que se expresan mejor en un lenguaje de partículas reales o ficticias. Lo que sí es cierto es que encontramos siempre una dualidad en la naturaleza; podemos llamarla partícula-campo o fermión-bosón, pero no hay duda de que en el mundo natural existen dos clases de objetos irreductibles. Tal vez con una sola clase de entes no fuera posible la extraordinaria riqueza y variedad de los fenómenos naturales entre los que nos debemos incluir nosotros mismos.

En cualquier caso la descripción matemática de los fenómenos naturales se fundamenta en ecuaciones diferenciales (o integrales o integro-diferenciales) que se satisfacen por variables o bien medibles o bien relacionadas con magnitudes observables. ¿Por qué habrían de ser estas ecuaciones lineales? Desde una postura exclusivamente positivista no hay ninguna razón. Pero la filosofía positiva supone una simplificación epistemológica cada día menos aceptable. No es fácil definir en qué consiste el conocimiento científico pero ciertamente es algo más que una lista de observaciones debidamente clasificadas. Por eso, séanos permitido acariciar la idea de que las ecuaciones diferenciales que expresan los principios fundamentales de la física sean lineales y si no lo son que nos muestren simetría y sencillez, es decir belleza; los hombres no podremos nunca resignarnos a que la naturaleza no sea bella. Y belleza significa sencillez de principio, por lo menos a nuestros ojos.

Y aquí llego al tercer tema que quería tratar. ¿Pueden describirse los fenómenos de la naturaleza de modo sencillo? Está claro que no. Por mucho esfuerzo de abstracción que hagamos, las cosas complejas serán siempre complicadas. Pero como de algún modo debemos —o queremos— comprenderlas es menester que recurramos a métodos operativos prácticos. Con esta finalidad, en el estudio de la naturaleza, hemos llegado los físicos a distinguir dos tipos de estructuras teoréticas válidas: teorías y modelos. Consideramos teorías aquellas relaciones matemáticas entre observables o magnitudes relacionadas con observables que se pueden establecer sobre entidades primarias que a nuestro entender no pueden ser reducidas a objetos más fundamentales. Estas teorías pueden ser limitadas (como la mecánica clásica que solo es válida a velocidades reducidas), pero sus predicciones deben ser exactas dentro de su dominio de aplicabilidad. Los modelos, por el contrario, son constructos teoréticos mucho más modestos. Un modelo solo pretende ser una estructura teórica válida para la explicación de algún o algunos aspectos del comportamiento de una entidad natural no primaria. Así existen varios modelos del núcleo atómico (el modelo de la gota líquida, el modelo estratiforme, el modelo colectivo, etc.), lógicamente incoherentes pero que explican facetas diversas de los fenómenos que observamos. Y lo mismo sucede con objetos más complejos como los fluidos reales o los sólidos imperfectos.

El empleo de modelos sin mala conciencia intelectual se basa en una creencia no probada pero que tenemos por probable. Suponemos, con mayor o menor fundamento, que los modelos aparentemente contradictorios (pero que nosotros solo llamamos complementarios) que aplicamos a idénticos objetos serán en su día consecuencias parciales y aproximadas de una teoría. De este modo no nos repugna la utilización de modelos con escasa fundamentación. Y me estoy refiriendo a la física que es después de todo una ciencia que se ocupa de fenómenos relativamente simples. En las ciencias realmente complicadas como la biología el uso de modelos está mucho más extendido que entre nosotros por vital necesidad. Pero no sé si sus utilizadores son tan escrupulosos como nosotros o si viven felices sin preocuparse por la justificación epistemológica futura de sus modelos. Supongo que antes de aventurar un juicio deberíamos profundizar en lo que cada cual, de acuerdo con nuestra educación e idiosincrasia, entendemos por explicación de lo que vemos.

He traído a colación esta disquisición entre teorías y modelos porque puedo citar un caso en que la teoría es lineal y el modelo no lo es. En el estudio teórico de los átomos de muchos electrones es posible escribir un sistema de ecuaciones integrodiferenciales a las cuales satisfacen los orbitales de cada electrón en la hipótesis de que la función de onda del átomo pueda representarse adecuadamente como un producto antisimetrizado de funciones individuales. Como la resolución del sistema de ecuaciones es muy difícil —a pesar de ser solo una aproximación al átomo real— y solo puede realizarse numéricamente, se han construido modelos simplificados entre los que destaca el de Thomas-Fermi. Es un modelo estadístico que conduce a una ecuación diferencial no lineal. He aquí una situación física que, por lo que sabemos, se rige por un sistema de ecuaciones lineales pero que en su representación modélica simplificada aparenta ser un problema no lineal. Tal vez se trate de un ejemplo casual, pero pudiera ocurrir que esta transición lineal estricto a no lineal aproximado fuese la regla y no la excepción.

Y como cuarto tema o listón del marco querría hacer algunas observaciones sobre la representación matemática (lineal o no lineal) de las leyes físicas. Aceptamos comunmente que el lenguaje matemático es un auxiliar imprescindible para expresar de modo conciso la realidad física. De hecho la historia de los últimos siglos muestra que esta manera de estudiar la naturaleza es correcta. Pero hay un problema epistemológico crucial. ¿Es la matemática una construcción lógica absoluta o es ella misma una consecuencia de la observación? En la segunda mitad del siglo pasado y primeros años del actual los matemáticos creyeron en una fundamentación axiomático-lógica de su disciplina que la hacía independiente de la naturaleza. Posteriormente esta postura resulta menos mantenible y es más que probable que Johan von Neumann (citado por nuestro recipiendario) tuviera razón al escribir que necesitamos la observación, siquiera de cálculos numéricos, para «proporcionarnos las ideas heurísticas que todas las partes de las matemáticas han necesitado para un progreso genuino». La matemática es una gran abstracción, la más rigurosa y difícil. Pero se abstrae de lo concreto y de lo que nos rodea. La abstracción intelectual al margen de nuestro entorno puede ser tan irreal como la alimentación sintética o los lenguajes artificiales que algunos inventan. Me inclino a pensar que nuestra alimentación, nuestro lenguaje y nuestro pensamiento abstracto vienen condicionados por nuestras vivencias biológicas y sociológigcas que a su vez sintetizan una historia. Somos mucho menos independientes de nuestras circunstancias de lo que imaginamos por introspección.

Estas consideraciones tienen estrecha relación con el discurso que he tratado de enmarcar. En primer lugar las ecuaciones no lineales con que nos encontramos en la física moderna nos han sido impuestas por la naturaleza. En segundo lugar el cálculo numérico, mediante computadores, de dichas ecuaciones nos indica el camino a seguir para profundizar en los fenómenos que representan; la posibilidad de visualizar la evolución temporal de las soluciones de ecuaciones diferenciales no lineales en películas preparadas por ordenador es una ayuda inestimable que nuestros predecesores no tuvieron. Y finalmente, y como consecuencia de estos nuevos procedimientos, está emergiendo la teoría de las transformaciones espectrales que promete ser en el campo de las ecuaciones diferenciales no lineales lo que la transformación de Fourier (también producto de la física) fue en el dominio de las ecuaciones lineales.

Para terminar debería presentar algunas excusas. La primera por haber hablado con excesiva brevedad y tal vez poco conocimiento de temas que sin duda requieren un tratamiento más profundo. Además me he dejado llevar de conceptos o prejuicios metafísicos a pesar de que los físicos fuimos desde jóvenes severamente amonestados contra esta tentación. Pero creo que se trataba de una amonestación poco fundada. En realidad, cuantos nos dedicamos al estudio de la naturaleza creemos que es comprensible y que sus normas son simples y bellas y en otras muchas cuestiones que no se basan en experimentos de laboratorio. Son los elementos metafísicos que anteceden a la ciencia natural.

Por eso y en línea con lo que llevo dicho, me complace afirmar que mi afecto y admiración por Alberto Galindo no son físicos sino metafísicos. Y en este espíritu quiero darle la bienvenida a esta Academia donde su talento y su capacidad contribuirá sin duda a nuestras tareas. Tareas tal vez escondidas pero muy útiles porque trabajamos despacio pero con la vista en el futuro.