REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

Distribuciones de Neutrones Térmicos

DISCURSO

LEIDO EN EL ACTO DE SU RECEPCION

POR

D. FEDERICO GODED ECHEVERRÍA

Y

CONTESTACIÓN

DEL

Rvdo. P. ALBERTO DOU MAS DE XEXÁS

EL DIA 2 DE JUNIO DE 1971

MADRID
Domicilio de la Academia:
VALVERDE, 22. TELEFONO 2 21 25 29
1971

Depósito legal: M-12.950/1.971

Litoprint
Teléf.: 2.46.47.14
MADRID

DISTRIBUCIONES DE NEUTRONES TÉRMICOS

DISCURSO

LEIDO EN EL ACTO DE SU RECEPCION

POR

D. FEDERICO GODED ECHEVERRÍA

Excmo. Sr. Presidente;
Excmos. Sres. Académicos;
Señoras, Señores:

Permitidme que comience esta disertación agradeciendo a los miembros de esta docta corporación el haberme elegido para compartir con ellos sus tareas científicas.

Una vez cumplido este grato deber, dirijamos sin pausa nuestra atención a las huellas que nuestro predecesor, *Ricardo San Juan Llosá,* ha dejado en el campo de la matemática. Pero consideremos, siquiera sea en forma parcial y limitada, al hombre entero que *San Juan* fué, y antes de ello permitidme que personalmente le dedique en esta ocasión un recuerdo agradecido por haber apadrinado, con el fervor y tenacidad que ponía en todas sus cosas, mi candidatura al ingreso en esta Academia, la última vez que pudo ejercer en vida esta prerrogativa.

Ricardo San Juan, digámoslo ya desde ahora, consagró la mayor y mejor parte de su vida a la investigación en la matemática. Permaneció toda ella soltero, y ello le permitió entregar a la investigación, las horas, el cariño y las preocupaciones que un hombre casado ha de dedicar a su familia. La matemática fué para él primero su novia y esposa, y luego, con su madre, toda su familia. No le sedujeron nunca intereses económicos, ni ambiciones de poder, y su vida, frugal y sencilla, coadyuva eficazmente a liberarle de toda preocupación de esta índole. Merced a estas dos circunstancias, toda ella puede transcurrir enfocada hacia una sola meta, y hacia ella camina, en frase de *Goethe* *"sin pausa pero sin prisa, como las estrellas"*. Fué quizá el discípulo predilecto de *Rey Pastor,* el más importante de los matemáticos españoles de la edad contemporánea, y muchos de sus propios discípulos son hoy matemáticos bien conocidos en nuestro país. Nuestro compañero *Sixto Rios* en el trabajo que publicó en la revista de esta Academia dedicado a *San Juan*, y que tanto me ha ayudado a escribir estas líneas, cita una larga lista de ellos: *Salinas, Gil Azpeitia, Viñas, Rodríguez San Juan, Martinez Urgamentería, Gutiérrez, Valdivia, Rodero Carrasco, Fuentes, Martínez*

Salas, etc. Podéis ver que cumplió bien con sus deberes de catedrático, y pudo entregar la antorcha a sus seguidores con toda dignidad después de llevarla en sus brazos, nunca excesivamente fuertes, durante unas pocas decenas de años.

Ricardo San Juan, es obligado mencionarlo, nació en Valencia en 1.908, en una familia de clase media, y su madre era oriunda de estas feraces y entrañables tierras. Pero la vida lo trasladó pronto al corazón de estas otras tierras duras y anchas de Castilla; a Toledo, y en esta última ciudad, de la que su padre fué nombrado secretario del Ayuntamiento, hizo todo su bachillerato. Allí, en el Instituto de Segunda Enseñanza, la suerte le proporcionó un catedrático de talla excepcional, *Don Ventura Reyes Prósper,* a un tiempo matemático, arqueólogo, naturalista, y otras cosas más. No es aventurado suponer, que como tantas veces sucede, en esos años clave de la formación de la personalidad, *Don Ventura* sembrara en el alma de *San Juan* la vocación por la ciencia. Los efectos a largo plazo de estas relaciones entre un profesor y un alumno, casi siempre solo los sabe Dios, pero lo cierto es que *San Juan* no dudó un solo instante en la elección de su profesión, y cuando a sus dieciséis años llega a Madrid, se dirige sin titubeos a la Facultad de Ciencias. En el año 1.928, *San Juan* tenía entonces solo 20 años, ya Licenciado, comienza a frecuentar para realizar su tesis doctoral, la Biblioteca del Seminario Matemático de Sta. Teresa, y allí inicia unas amistades que le duran toda la vida con *Antonio Flores, Santaló, Balanzat* y *Sixto Rios.* Allí también conoce a las estrellas de la matemática española de esta época: *Rey Pastor, Terradas, Alvarez Ude, Plans.*

Don Julio Rey Pastor, propuso a *San Juan* como tema para su tesis doctoral la sumación de series potenciales de radio nulo, y su prolongación semianalítica. Dice textualmente *Sixto Rios* en el artículo a que antes aludí, que *puede decirse sin grave temor a ser rectificado que el resto de su vida científica, cerca de cuarenta años, fué consagrada día a día a este problema de las funciones definidas por series divergentes, enfocado desde originales puntos de vista y algunos otros problemas con él relacionados.* Fué pues fiel y constante a sus amores. Esta continuidad, esta permanencia obsesiva en sus investigaciones la confirma *Rey Pastor* al contestar a *San Juan* en su discurso de ingreso en esta Academia, cuando dice que *otras de sus producciones, lejos de indicar inconstancia o versatilidad, como es frecuente en* *muchos investigadores, confirman la incorruptible fidelidad de este enamorado de su musa de la divergencia. Es media vida consagrada a un problema central, y a los problemas adventicios relacionados con él, que se le han ido enzarzando en su camino, en ese camino recto que se trazó hace seis lustros, y de cuya elección entre infinitos y otros posibles, no me declaro inocente.* Y añade *Rey Pastor* *"Desde que se consagró al problema de Watson lo admiré; pero ya no le seguí; celebré sus éxitos, pero dejé de interesarme directamente por sus problemas; y ésto por razones estéticas. Hermosa cúpula del Análisis moderno es sin duda la teoría de las funciones cuasianalíticas; pero tal como ha sido edificada por Carleman, estará siempre afeada por ese andamiaje de cotas y recintos inseparables de la construcción, que ocultan la intrínseca armonía de sus conceptos. Después del reciente esclarecimiento sobre la imposibilidad, que no permitelhacerse grandes ilusiones, me atraerá menos aún el problema; pero de lejos seguiré admirando a este caballero del ideal, callado y solitario, que prosigue imperturbable su camino rectilíneo, dejando de lado las actividades infecundas con que otros llenan sus vidas, y desoyendo las mil incitaciones de un ambiente adverso.*

Las frases anteriores de *Rey Pastor* retratan bien a *San Juan,* verdadero Quijote de la ciencia, que a diferencia del caballero de la triste figura, no despertó jamás de su ensueño. Pero no lo dudemos, en este ensueño halló las más puras satisfacciones de su vida. Pues la Providencia le compensó de otras privaciones, reservándole el supremo placer de permitirle hollar con sus plantas tierra virgen. No importan el tamaño ni las riquezas de la isla nueva descubierta, pues para el verdadero investigador estas son cuestiones secundarias. Recordemos las frases de *Cajal* en este mismo recinto cuando leyó su discurso de ingreso en esta Academia: *Este placer inefable, al lado del cual todas las demás fruiciones de la vida se reducen a pálidas sensaciones, indemniza sobradamente al investigador de la pesada y perseverante labor analítica, precursora, como el dolor al parto, de la aparición de la nueva verdad. Tan exacto es, que para el sabio no hay nada comparable a la idea descubierta por él, que no se hallará acaso un investigador capaz de cambiar lapaternidad de una conquista científica por todo el oro de la tierra.*

A *San Juan* la Providencia no le dió familia, y al morir su madre, su edad, sus hábitos y quizá su forma de vida, le impidieron un matrimonio, que aunque tardío, le habría librado de la soledad.

Pero Dios le dió abundante cosecha de hijos espirituales, nacidos en su mente con dolor de parto en las largas veladas nocturnas, en los silencios de su hogar desprovisto de risas y llantos infantiles. La lista de sus hijos es larga y por ello la omitimos aquí, –remitimos al lector interesado al artículo ya citado de *Sixto Rios*–, pero para valorarla debidamente basta decir, que una parte muy importante de ella, fué publicada en las revistas internacionales del más alto prestigio, y varios de sus trabajos fueron citados y comentados en libros y memorias por matemáticos de la talla de *Mandelbrojt, Bang, Carleman, Aczel, Doetsch, etc.*

Pero *San Juan* no solo fué un investigador. Fué también profesor, y dedicó muchas horas de su vida a la enseñanza. La mayoría de ellas en su cátedra de la Universidad, pero fué también durante muchos años profesor en la Academia Militar de Ingenieros Aeronáuticos. Bien sabido es que estas dos actividades, la investigación y la enseñanza, se estimulan recíprocamente, y en hombres de la talla de San Juan, pudiéramos decir, en lenguaje físico, que inevitablemente ambas actividades entran en resonancia. Por eso sus años de enseñanza en la Academia Militar del Aire constituyen una etapa singular de su actividad investigadora, que ve la luz en el *Journal de Mathematique Pure et Apliquée.* A esta etapa pertenecen también sus conocidos trabajos sobre el Análisis Dimensional.

Podríamos pues decir que sus únicas infidelidades a su musa de la divergencia, son debidas a las clases de Ciencia Aeronáutica. Pero ello constituye solo un episodio en la larga y fecunda trayectoria investigadora de *San Juan,* trayectoria que solo la enfermedad, y al fin la muerte, pueden detener.

Decíamos al comienzo de esta disertación que íbamos a examinar las huellas dejadas por *San Juan* en el campo de la matemática. Podríamos ahora preguntarnos ¿cuánto tiempo durarán estas huellas? Esta pregunta nos acerca a otra más trascendente cuestión. Esa inmortalidad ficticia, ese sobrevivir solo en nuestras obras, tan radicalmente insuficiente para *Unamuno* ¿puede llamársele siquiera inmortalidad aún en este sentido tan estricto y limitado? Si miramos, desde un punto de observación de suficiente altura, el devenir de los acontecimientos humanos, y en particular el de la Ciencia, una realidad cruda y despiadada se impondrá a nuestra vista. El rodar incontenible del tiempo, triturará y destruirá todos los nombres, hasta los que hoy nos parecen hitos perennes y eternos.

Si miramos hacia un punto futuro muy distante, de una era geológica todavía no bautizada, tan lejos de nosotros como el período primario, pero en la otra dirección, podemos tener la certeza de que la Ciencia de esos días nonatos, en embrión todavía en las manos del Creador, ignorará y habrá desechado prácticamente, todo lo que hasta hoy hemos edificado.

Si esto es así ¿porqué *San Juan* dedicó su vida entera a esta tarea? Quizá la única respuesta es que obedeció a esa oscura, imperiosa llamada, que tantos acentos comunes tiene con la religiosa, que lleva a algunos elegidos a la investigación. Y hagamos todos votos porque nuestro país nunca deje de producir hombres como *Ricardo San Juan Llosá*.

★

DISTRIBUCIONES DE NEUTRONES TERMICOS

I

INTRODUCCION

Vamos a examinar en el presente trabajo dos distribuciones de estos neutrones: la primera con relación a su energía y la segunda con respecto a su edad cronológica. La primera distribución también denominada de *Maxwell–Boltzman* es muy conocida, y nos limitaremos en consecuencia a comentar brevemente dos de los fenómenos que más contribuyen en la práctica a distorsionar el espectro clásico, esto es la absorción y el enfriamiento por difusión. Estos dos fenómenos tienen por otra parte en la segunda distribución aspectos equivalentes, que alteran la distribución cronológica que pudiéramos denominar *normal*. De aquí que concentremos nuestra atención en ellos.

La segunda distribución en cambio no solo es nueva, sino algo más compleja en su planteamiento, y por ello le dedicaremos una mayor atención.

*

II

DISTRIBUCIONES DE NEUTRONES TERMICOS EN FUNCION DE LA ENERGIA

La distribución de neutrones en función de la energía en un medio no absorbente y de dimensiones infinitas puede obtenerse por diversos métodos, siendo quizá el más sencillo y directo el clásico de *Chapman* y *Cowling*[1].

Para la obtención de la clásica distribución de *Maxwell-Boltzman* se supone, en este método, que existe en el medio una mezcla de dos gases –el de los neutrones y el de los núcleos–, los cuales se encuentran en equilibrio térmico.

Utilizando la mecánica estadística, y admitiendo que únicamente pueden ocurrir reacciones de dispersión se encuentra con bastante facilidad que la densidad de neutrones por cm^3 cuyas energías están comprendidas entre E y $E + dE$, es:

$$n(E)\,dE = \frac{2\pi\, n_{th}}{(\pi KT)^{3/2}}\, e^{-E/KT} \sqrt{E}\, dE$$

siendo aquí n_{th} el número total de neutrones térmicos por cm^3, K la constante de *Boltzman*, m la masa del neutrón, y T la temperatura del medio. La distribución de velocidades de los núcleos del gas viene expresada por una función completamente análoga, siendo la temperatura T la misma en ambas funciones.

Ahora bien, es evidente que en la realidad nunca pueden darse las dos hipótesis fundamentales, que permiten obtener la sencilla distribución anterior, es decir, en la realidad nunca se producirá la existencia de un medio puramente dispersivo y de tamaño infinito. Como consecuencia de ello la distrihución en energías de los neutrones térmicos, se apartará tanto más de la definida por la función anterior, cuanto más nos alejemos de las condiciones ideales supuestas.

Veamos primero como se desvía la distribución real de la teórica, al

---

1. S. Chapman y T.G. Cowling *The Mathematical Theory of* Non-uniform gases – (Cambridge University. New York, 1.952) PP. 374–377.

considerar la inevitable existencia de la absorción de neutrones. Es evidente que la población neutrónica disminuirá en aquellos intervalos de energía donde la absorción sea grande. En una gran parte de los materiales σ_a sigue la ley 1/v, y en consecuencia habrá más absorciones de neutrones en la zona de energías bajas. Y en los materiales en los cuales σ_a no sigue exactamente la simple ley expuesta, la sección eficaz de absorción crece también al disminuir la energía, si bien siguiendo leyes más complicadas. Como resultado de todo ello el máximo de la curva se desplaza hacia la derecha, y se dice que el espectro *maxwelliano* se ha endurecido.

Este efecto de la absorción suele tenerse en cuenta admitiendo que la distribución real puede aproximadamente definirla la misma función de *Maxwell–Boltzman, reemplazando la temperatura real* T del medio por una ficticia T_n a la que se suele llamar *temperatura neutrónica efectiva.* La semi-empírica fórmula de *Coveyou*[2]:

$$T_n = T_N \quad (1 + 1{,}1\ A\ k)$$

es la más utilizada, y proporciona la temperatura neutrónica T_n en función de la temperatura del moderador, su número de masa A y la constante k que refleja las propiedades dispersivas del medio.

Comprobaremos ahora que el efecto debido a la no existencia de un tamaño infinito, es de signo contrario al anterior, y produce un reblandecimiento del espectro. El tratamiento riguroso de este problema es complejo, pero puede aproximadamente evaluarse como se indica a continuación.

Comenzaremos recordando que la ecuación que expresa la conservación del número de neutrones en un cierto intervalo de energía en un medio de tamaño infinito, cuando hay fuentes de neutrones isotrópicas uniformemente distribuídas en el mismo es[3]:

$$\left[\Sigma_s(E) + \Sigma_a(E)\right]\Phi(E) = \int_0^{E_m} \Sigma_s(E')P(E' \rightarrow E)\Phi(E')dE' + S(E)$$

representando aquí E_m la energía que separa la frontera, entre la región de mo-

---

2.- R.V. Meghreblian y D.K. Holmes.(Reactor Analysis. Mc Graw Hill, 1.960), pp 135–137.

3.- J.R. Lamarsh; Introduction to Nuclear Reactor Theory. (Addison-Wesley, 1.966), página 245.

deración y la región de transición, en la cual ya los neutrones pueden ganar o perder energía en una colisión. Un valor casi universalmente aceptado hoy día para E_m es 1ev. Al producto $\Sigma_s(E')\ P(E' \rightarrow E)$ se le suele representar simplemente por $\Sigma_s\ (E' \rightarrow E)$, y se le denomina *núcleo de la ecuación.* El término $S(E)$, como siempre representa las fuentes, y debe notarse que en la ecuación anterior,, y como resultado de suponer el medio infinito no interviene la variable r.

Una vez conocido el núcleo $\Sigma_s\ (E' \rightarrow E)$, y el término fuente, el problema queda teóricamente resuelto. La dificultad consiste en que en la práctica todos los núcleos son funciones tan complicadas, que solo es posible obtener soluciones aproximadas de la ecuación anterior.

Hay un importante número de núcleos propuestos, cuya complejidad creciente, no es sino el resultado de tratar de reflejar cada vez con mayor perfección, la complejidad de la misma naturaleza, pues el núcleo de la ecuación debe tener en cuenta las vibraciones de los núcleos atómicos, sus rotaciones y traslaciones, enlaces, etc. Utilizando el relativamente simple núcleo de *M.S. Nelkin*[4] correspondiente al agua ligera, y que tiene en cuenta casi todos los mencionados efectos, se obtienen sin embargo discrepancias apreciables con el flujo *maxwelliano.* Estas discrepancias se concretan fundamentalmente en la llamada *cola del espectro,* es decir en la zona de transición entre la región térmica y la de moderación pura.

Si el medio es finito es evidente que la ecuación anterior ya no será válida.

El problema en este caso sería preciso abordarlo, por medio de la teoría del transporte, pero las dificultades se trasladan entonces a la determinación de las secciones eficaces $\Sigma_s\ (E' \rightarrow E, \Omega)$, y es por otra parte bien sabido[5] que en la zona térmica, la teoría de la difusión proporciona frecuentemente una mejor aproximación que la teoría del transporte. Utilizando este hecho

---

4.- M.S. Nelkin – "Neutron Thermalization", Proceedings of Symposio in Applied Mathematics – Vol. XI. Providence R. I. American Mathematical Society – 1.961.

5.- J. H. Ferzigen and P; F. Zweifel – The Theory of neutron slowing down in NuclearReators. (Pergamon Press, 1.966), pp. 128–129.

vamos a dar aquí una solución aproximada del problema[6] utilizando la teoría de la difusión, que permite sin embargo deducir las líneas generales del problema.

Consideremos un medio finito de forma geométrica arbitraria.

El problema a resolver será encontrar en este medio el flujo $\Phi(r, E)$ en el caso en que este flujo sea estacionario. En esta hipótesis puede demostrarse fácilmente que Φ es separable.

$$\Phi\ (r, E) = \Phi\ (E) \cdot \psi\ (r)$$

En un estado transitorio $\psi\ (r)$ vendría expresado por una suma de autofunciones de la ecuación

$$(\nabla^2 + B^2)\ \psi\ (r) = 0$$

y en el estado estacionario $\psi\ (r) = \psi_1\ (r)$ será la solución de:

$$(\nabla^2 + B_1^2)\ \psi_1 = 0$$

siendo B_1^2, el menor de los autovalores de la ecuación anterior.

El número de neutrones en el intervalo de energías comprendido entre E y $E + dE$ fugados del sistema, por cm^3 y por seg, será según la teoría de la difusión

$$-D(E) \int_s \text{grad}\ \Phi(r,E)\ dE\ dS = -\ D(E) \int_v \nabla^2\ \Phi(r,E)\ dE\ dV$$

Esta expresión teniendo en cuenta la última ecuación, se reduce a

$$D\ (E)\ B_1^2\ \Phi\ (E)\ dE \int_v \psi_1\ (r)\ dV$$

Por otra parte el número total de neutrones que existen en el sistema en el mismo intervalo de energías, será

$$\int_v n\ (r, E)\ dE \cdot dV$$

Pero como

$$\Phi\ (r,E) = n\ (r, E) \cdot v(E)$$

6.- Referencia (3), p. 249.

y

$$n(r,E) = n(E) \cdot \psi_1(r)$$

resulta que la anterior integral que proporciona el número total de neutrones en el sistema puede escribirse así:

$$\int_V n(r,E)\, dE\, dV = n(E)\, dE \int_V \psi_1(r)\, dV$$

La fracción de neutrones en el intervalo de energías considerado, que por seg. se fugan del sistema por su superficie exterior, será pues el cociente de las dos expresiones halladas, es decir, será:

$$\frac{D(E) \cdot B_1^2\, \Phi(E)}{n(E)} = D(E) \cdot B_1^2\, v(E)$$

que como se ve depende de la forma y del volumen del sistema a través de B_1^2. Resulta así que la probabilidad de que un neutrón se fugue del sistema, aumenta con la energía. En efecto, en el producto $DB_1^2\, v$ aunque el coeficiente D puede disminuir con la energía, el producto $B_1^2\, v$ crece más rápidamente, y en consecuencia $D\, B_1^2\, v$ es creciente con la energía. Como consecuencia de todo ello, la fracción de neutrones fugados por intervalo de energía dE es mayor cuanto más elevada sea E. Siendo pues este fenómeno análogo al de la evaporación en un líquido caliente, ha recibido el nombre de enfriamiento por difusión.

Como se acaba de ver los neutrones más rápidos se fugan con mayor intensidad que los más lentos, y como consecuencia se produce un cierto empobrecimiento de neutrones rápidos, y el resultado final es que el espectro se reblandece.

Se ve pues que los dos efectos descritos son de signos contrarios, y tienden a compensarse mutuamente. Pero debe señalarse una diferencia importante entre ellos. El primero, es decir la absorción, es independiente del tamaño del reactor, mientras que el segundo depende como acabamos de ver del volumen del mismo, puesto que es función de B_1^2.

Y es preciso señalar, que el enfriamiento por difusión no juega un papel apreciable en la distorsión del espectro, más que en reactores de tamaño muy pequeño, es decir cuando B_1^2 es grande, y no es preciso tenerlo en cuenta en el cálculo en los reactores grandes.

*

III

DISTRIBUCION DE EDADES CRONOLOGICAS DE NEUTRONES TERMICOS

Antes de entrar en el problema, conviene resaltar que un neutrón no solo posee como variables distintivas una determinada energía, y una cierta posición en el espacio, sino que es posible asignarle otras varias, y en especial las siguientes: una cierta edad cronológica, que designaremos por la letra T, contada a partir del instante en que el neutrón entra en el medio, y un cierto recorrido que designaremos por la letra y, y efectuado éste en zig-zags por el neutrón que entra en el medio. Así, pues, un neutrón que entra en un cierto instante $t = t_0$ era el medio, en el instante $t = t_1$, tendrá una edad cronológica

$$T = \int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0$$

Si por otra parte su recorrido en zig-zags no lo ha efectuado con velocidad constante, las variables T e y serán independientes entre sí.

Podremos pues considerar en el caso más general posible la densidad neutrónica $n(r,y,E,T)\, d^3x \cdot dE\, dy\, dT$, la cual representará el número de neutrones que existen en el elemento de volumen $d^3x = dx_1\, dx_2\, dx_3$, con edades cronológicas comprendidas entre T y $T + dT$, y recorridos comprendidos entre y e $y + dy$.

Es evidente que podríamos todavía avanzar varios pasos más, en este intento de dibujar con mayor precisión la población neutrónica real, incluyendo por ejemplo el ángulo sólido dentro del cual se mueven los neutrones, como hace la teoría del transporte. Pero ello nos introduciría una gran complejidad en el proceso de cálculo, pues nos obligaría a usar la mencionada teoría del transporte en vez de la difusión, teoría esta última que por las razones ya expuestas puede usarse en este problema sin pérdida alguna de exactitud en los resultados logrados.

De la densidad supuesta $n\,(r,\ E,\ y,\ T)$ pueden deducirse las dos nuevas densidades:

$$n_1\,(r, E, T)\quad \int_{|r'-r|}^{\infty} n(r, E, y, T)\, dy$$

y

$$n_2\,(r, E, y) = \int_{\frac{|r'-r|}{(2E'm^{-1})^{1/2}}}^{\infty} n(r, E, y, T)\, dT$$

que necesitan un breve comentario en cuanto a los límites de integración. En la primera de ellas se ha supuesto que la fuente de neutrones está en el punto r'. El límite de integración de la segunda se obtiene suponiendo que los neutrones que nacen en el punto r', se trasladan hasta el punto r en línea recta, y sin efectuar ninguna colisión. Es evidente que estos neutrones son los más jóvenes que puede haber en el punto r. En ambas integrales el límite superior de integración es ∞, porque los neutrones como máximo pueden recorrer un camino de longitud infinita para llegar hasta r, o lo que es lo mismo, invertir un tiempo infinito en llegar al punto r.

La densidad neutrónica más normalmente usada $n(r, E)$ puede deducirse ahora indistintamente de n_1 ó n_2. Tendremos pues

$$n\,(r, E) = \int_{\frac{|r'-r|}{(2E'm^{-1})^{1/2}}}^{\infty} n_1\,(r, E, T)\, dT = \int_{|r'-r|}^{\infty} n_2\,(r,E,y)\, dy$$

Supongamos ahora que en vez de considerar una población neutrónica con diferentes velocidades, suponemos que estamos tratando con una población monoenergética. Entonces el problema se simplifica puesto que las variables T e y entonces dejan de ser independientes. Tendremos

$$y = v\,(E)\,T$$

y la densidad neutrónica $n\,(r, E, y, T)$ en un punto r se convierte en una función de solo una variable; bien la T o bien la y. Podremos pues escribir

$$n(r, E, y, T) = n(r, E, vT, T) = n_1\,(r, E, T)$$

y también

$$n\ (r,\ E,\ y,\ T) = n(r,\ E,\ y, y\,v^{-1}) = n_2\,(r,E,y)$$

Como anteriormente la densidad normal $n(r,\ E)$ se obtiene por medio de las integrales anteriores reemplazando n_1 y n_2 por las expresiones últimamente escritas.

El problema de encontrar las funciones n_1 y n_2 en el caso más general posible, en que existan fuentes repartidas de una manera arbitraria, en un medio de tamaño finito, y se trate de una energía cualquiera distinta de la energía media KT, de los neutrones térmicos, es sumamente complejo y difícil, y prácticamente imposible de abordar sin recurrir a computadores. Que esto es así puede verse simplemente observando que para tener en cuenta siquiera fuera de forma aproximada, la degradación de energía por colisiones elásticas sería necesario dividir el intervalo energético total en grupos, es decir utilizar una teoría de grupos, con la adicional complicación de tener en este caso, como acabamos de ver, una variable más.

Para simplificar el problema y poder obtener soluciones explícitas, vamos aquí a considerar como en el caso anterior un medio de tamaño infinito, homogéneo e isótropo y no-multiplicador. Consideraremos además solamente el grupo térmico, y una fuente plana de neutrones térmicos en $x = 0$.

En todo lo expuesto hasta ahora se ha supuesto que estábamos en un estado estacionario. Así pues, supondremos que la fuente tiene una intensidad constante y emite S neutrones/cm^2 $\times$ seg. En caso contrario, es decir si la fuente fuera de intensidad variable, es decir si se tratase de una fuente pulsante por ejemplo, la densidad neutrónica en el medio sería también función del tiempo *t*, esto es, sería

$$n = n\ (r,\ E,\ T,\ t)$$

Esta adicional complejidad tampoco será considerada aquí.

Con todas las simplificaciones expuestas, y tomando como variable independiente la edad cronológica T de los neutrones, la ecuación de la difusión en un estado estacionario nos dice que la densidad $n_1 = n_2$ que a partir de ahora designaremos por $N(r,\ y)$ debe satisfacer a la ecuación

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = D_T v \Delta N(x,y) - \Sigma_{aT} v N(x,y) + S(x,y)$$

después de eliminar el factor común dE, $d^3 r$, dT. Debe notarse que la energía E común a todos los neutrones se ha omitido en el argumento de N, por ser una constante.

Si las edades cronológicas T de todos los neutrones así como sus recorridos y, se miden desde el momento en que entran en el medio, y el orígen de tiempos es el mismo para todos los neutrones, entonces es

$$dt = dT$$
$$y = vT$$

siendo $v = 2200$ m/seg. para una temperatura ambiente de 20^0 C. En estas condiciones la ecuación anterior se reduce a

$$v \frac{\partial N}{\partial y} = D_T v \Delta N - \Sigma_{aT} vN + S(x,y)$$

en la cual debe notarse que el término manantial o fuente $S(x,y)$ no depende del tiempo t, como debe ser en un estado estacionario como el supuesto.

Si suponemos que $S(x,y)$ es nula en todos los puntos excepto en el plano manantial, podemos suponer $S = 0$ introduciendo en cambio como es natural una cierta condición de contorno en la fuente. En estas condiciones la ecuación anterior se reduce simplemente a

$$N_y(x,y) = D N_{xx}(x,y) - \Sigma_a N(x,y)$$

en la cual el factor común v ha sido eliminado.

*

IV

CONDICIONES DE CONTORNO

Las condiciones de contorno deben estudiarse con todo detenimiento, pues en seguida veremos, que las condiciones correctas no coinciden con las que intuitivamente parece que deberían establecerse.

En efecto, un neutrón que entre en el medio en el plano $x = 0$ y con una velocidad v se mueva paralelamente al eje x no debería jamás poder ocupar la región $y = x$. En efecto, aún en la hipótesis de que toda su trayectoria la realizara en línea recta, y sin colisiones, cuando tuviera una edad T habría penetrado a lo sumo a una distancia $y = v\,T$ en el medio, es decir, se encontraría a lo sumo a una distancia y del plano manantial. De este razonamiento se deduce que deberíamos establecer la condición de contorno

$$N\,(x,\,y) = 0 \qquad (y \leqslant x)$$

Pero la ecuación de la difusión no describe exactamente el proceso físico del desplazamiento o difusión de los neutrones. Es una ecuación de tipo aleatorio, y por ello en numerosos problemas con fuentes pulsantes, la solución correcta proporciona densidades neutrónicas que se hacen nulas solo en el infinito en el instante $t = 0$, es decir, proporciona densidades finitas a distancias en las cuales los neutrones no han tenido tiempo aún de llegar desde su salida de la fuente, en el mencionado instante $t = 0$.

Así pues, también en nuestro caso, la condición anterior debe sustituirse por la siguiente

$$N\,(x,\,0) = 0$$

mucho más manejable y conveniente bajo el punto de vista estrictamente matemático, pues siendo parabólica la ecuación de la difusión la condición de contorno anterior complicaría en gran medida el problema.[7]

Las otras dos condiciones de contorno que la situación física exige son indudablemente

$$\lim_{x \to \infty} N\,(x,\,y) = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} N\,(x,\,y) = 0$$

En cambio desconocemos en absoluto el valor de la función $N(x,y)$ en el cuarto lado del contorno, es decir en $x = 0$. Pero este hecho es compensado por la condición que ahora vamos a exponer.

7.- P.M. Morse y H. Feshbach – Méthods of theoretical Phisics, tomo I (Mc Graw Hill, año 1.953) pp. 692–706.

La densidad total n_β (y) que expresa el número de neutrones existentes por cm^3 que han realizado en el medio el mismo recorrido y, será evidentemente

$$n_\beta (y) = \int_0^\infty N(x,y)\, dx$$

Pero como es bien sabido[8] la distancia media recorrida por los neutrones desde que entran en el medio hasta que son absorbidos es $\lambda_a = \Sigma_a^{-1}$. Podremos, pues, escribir

$$\lambda_a = \frac{\int_0^\infty y\, n_\beta (y)\, dy}{\int_0^\infty n_\beta (y)\, dy}$$

lo que presupone para N (x,y) la siguiente condición

$$\lambda_a = \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty y\, N(x,y)\, dx\, dy}{\int_0^\infty \int_0^\infty N(x,y)\, dx\, dy}$$

Pasemos ahora a estudiar la denominada condición en la fuente. Para ello llamemos $n_\alpha(x)$ a la densidad neutrónica usual, es decir al número de neutrones que existen en el medio a la profundiad o distancia x del plano - manantial. Esta será evidentemente

$$n_\alpha (x) = \int_0^\infty (N(x,y)\, dy$$

Si integramos ahora la ecuación de la difusión en elcaso particular considerado con respecto a y tendremos

$$\int_0^\infty \frac{\partial N}{\partial y}\, dy = D \int_0^\infty \frac{\partial^2 N}{\partial x^2}\, dy - \Sigma_a \int_0^\infty N(x,y)\, dy$$

Teniendo en cuenta las condiciones de contorno antes expuestas el primer miembro se anula. Si además la función N(x,y) satisface las condiciones necesarias[9] para que se verifique que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^\infty N(x,y)\, dy = \int_0^\infty \frac{\partial^2 N(x,y)}{\partial x^2}\, dy$$

8.- Ref. 3 – pág. 22.

9.- R.V. Churchill *Operational Mathematichs* –(Mc Graw Hill, 1.958). pp. 33 y 34.

entonces la última ecuación teniendo en cuenta la definición anterior de la densidad neutrónica n_1 (x) se reduce a

$$D \frac{d^2 n_\alpha(x)}{dx^2} - \Sigma_a n_\alpha(x) = 0$$

Y de aquí se deduce la conocida solución

$$n_\alpha(x) = A e^{-x/L}$$

La constante A se deduce de la condición en la fuente[10] y en nuestro caso resulta

$$A = n_\alpha(0) = \frac{SL}{2Dv}$$

De la definición de n_α se deduce que la condición en la fuente será en nuestro caso

$$\int_0^\infty N(o,y)\, dy = n_\alpha(0) = \frac{SL}{2Dv}$$

*

V

OBTENCION DE LA SOLUCION

Integrando ahora la misma solución con respecto a x entre los límites $x = 0$ y $x = \infty$ resulta

$$\int_0^\infty \frac{\partial N}{\partial y}\, dx = D \int_0^\infty \frac{\partial^2 N}{\partial x^2}\, dx - \Sigma_a \int_0^\infty N(x,y)\, dx$$

Por consiguiente, si N (x,y) es tal que

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^\infty N(x,y)\, dx = \int_0^\infty \frac{\partial N}{\partial y}\, dx$$

la ecuación anterior se reduce a:

$$\frac{\partial n_\beta(y)}{\partial y} = - D N_x(o,y) - \Sigma_a n_\beta(y)$$

10.- Reference 3 – p. 140.

teniendo en cuenta la definición de n_β (y) anteriormente expuesta y la condición de contorno que nos dice que la densidad neutrónica debe ser nula para $x = \infty$. De aquí se deduce que si N (x,y) es tal que

$$N_x\ (o,y) = 0$$

la condición referente al recorrido medio de los neutrones se verá automáticamente satisfecha. En efecto, en esta hipótesis la integración de la ecuación proporciona la solución

$$n_\beta\ (y) = K\ e^{-\Sigma_a y}$$

la cual como es fácil comprobar satisface la susodicha condición referente al recorrido medio de los neutrones, cualquiera que sea el valor de la constante de integración K.

En cuanto al problema de la determinación de la constante K, puede verse fácilmente que puede resolverse haciendo uso de la igualdad

$$N = \int_0^\infty n_\alpha\ (x)\ dx = \int_0^\infty n_\beta\ (y)\ dy$$

que expresa que el número total N de neutrones en el sistema, es constante y puede ser deducido bien en función de $n_\alpha (x)$, bien en función de $n_\beta (y)$.

Así reemplazado aquí las expresiones de $n_\alpha (x)$ y de la constante A antes encontrada, resulta

$$\int_0^\infty n_\beta\ (y)\ dy = \frac{K}{\Sigma_a} = \frac{S\ L^2}{2\ Dv}$$

Y en consecuencia la densidad total $n_\beta (y)$ será:

$$n_\beta\ (y)\ dy = \frac{S}{\Sigma_a}\ e^{-\Sigma_a y}$$

Una vez hallada n_β (y) pasemos ahora a encontrar la densidad N(x,y). Para ello bastará aplicar la transformada *Laplace* a los dos miembros de la ecuación. El resultado teniendo en cuenta la condición de contorno N(x,0)= = 0 es

$$(s + \Sigma_a)\ n\ (x,s) = D\ n''\ (x,s)$$

y que en consecuencia solamente la función φ_1 satisface la susodicha condición adicional.

En consecuencia la solución que satisface todas las condiciones del problema es:

$$N\left(x, \frac{y}{D}\right) = e^{-\frac{\Sigma_a y}{D}} L^{-1}\left\{A(s)\, e^{-s^{1/2} x}\right\} = e^{-\Sigma_a y} L^{-1}\left\{s^{-1/2} e^{-s^{1/2} x}\right\} =$$

$$= \frac{y^{1/2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4y} - \frac{\Sigma_a y}{D}}$$

y finalmente,

$$N(x,y) = C \frac{y^{-1/2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4Dy} - \Sigma_a y}$$

en la cual se ha introducido la nueva constante C, que se determinará por la condición en el manantial anteriormente hallada, de la cual se deduce:

$$C = \frac{S}{2v\sqrt{D\pi}}$$

Una vez encontrada la solución es conveniente comprobar algunos de los resultados del cálculo usando un modelo bastante simple.

Este modelo se obtiene suponiendo un nuevo espacio, en el cual todas las trayectorias de los neutrones en vez de ser en zig–zags, fueran líneas rectas perpendiculares al plano manantial, conservándose sin embargo las magnitudes reales de los recorridos. En este nuevo espacio $\Phi_\beta(y) = n_\beta(y) \cdot v$ sería el número de neutrones que habrán atravesado un área de 1 cm^2 situado en un plano paralelo al plano fuente, y en consecuencia Φ_β (0) será el número de neutrones que entran en el sistema por el plano fuente por cm^2 y por seg. el cual es en virtud de la simetría del sistema S/2. Podríamos escribir:

$$n_\beta(0)\, v = \frac{S}{2}$$

Pero si en la ecuación que nos daba n_β hacemos $y = 0$ encontramos precisamente este valor. Se ve por de pronto que ésto explica el hecho a primera vista algo chocante de que n_β (0) sea el mismo en todos los medios, ya que no depende ni del coeficiente de difusión ni de la sección de absorción Σ_a.

Pero del modelo supuesto pueden obtenerse todavía otras consecuensiendo aquí n(x,s) la transformada *Laplace* de N(x,y). La solución general de esta última ecuación puede escribirse directamente y es

$$n(x,s) = C_1(s)\, e^{-x\left(\frac{s+\Sigma_a}{D}\right)^{1/2}} + C_2(s)\, e^{x\left(\frac{s+\Sigma_a}{D}\right)^{1/2}}$$

Observemos ahora que la condición de contorno de la función $\lim_{x\to\infty} N(x,y) = 0$ implica para la transformada la condición

$$\lim_{x\to\infty} n(x,s) = 0$$

Y ello obliga a suponer que la constante $C_2(s)$ debe ser cero. Reemplazando ahora la variable s por $Ds - \Sigma_a$ en virtud de una conocida[11] propiedad de la transformada *Laplace*, podremos escribir directamente

$$N\left(x \cdot \frac{y}{D}\right) = e^{\frac{-\Sigma_a y}{D}}\, L^{-1}\left\{ n(x, Ds - \Sigma_a) \right\} = e^{-\frac{\Sigma_a y}{D}}\, L^{-1}\left\{ A(s)\, e^{-s^{1/2}x} \right\}$$

siendo

$$A(s) = C_1(Ds - \Sigma_a)$$

El problema pues queda reducido a encontrar A(S) de forma que se satisfagan las restantes condiciones del problema, y en particular la condición que expresa que la derivada parcial con respecto a x de la densidad neutrónica debe anularse para y = 0, cualquiera que sea y.

Para ello observemos primeramente que existe un sistema infinito de funciones φ_i cuyas transformadas *Laplace* son de la forma

$$s^{-n/2}\, e^{-s^{1/2}x} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Todas estas funciones φ_i multiplicadas por $e^{-\Sigma_a y}$ verifican todas las condiciones de contorno del problema. Bastará, pues, para hallar la solución buscada seleccionar de entre las φ_i aquella que verifique la repetida condición adicional referente a la anulación de la derivada parcial $\frac{\partial N}{\partial x}$ para x = 0.

Pero es fácil comprobar que las φ_i están relacionadas por la ecuación

$$\varphi_{i-1} = -\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}$$

11.- Referencia 9.

cias. Para ello comenzaremos estudiando el balance de neutrones en un elemento de base de 1 cm^2 paralelo al plano manantial y de altura dy. El número de neutrones que entrarían en este elemento al través de la cara situada a la distancia y del repetido plano manantial será:

$$\Phi_\beta (y) = n_\beta(y) \cdot v$$

El número de neutrones que saldrían del mismo elemento al través de la cara situada a la distancia $y + dy$, será:

$$\Phi_\beta (y + dy) \sim v \left[n_\beta(y) + \frac{\partial n_\beta(y)}{\partial y} dy \right]$$

La pérdida neta de neutrones será pues la diferencia o sea:

$$v \frac{\partial n_\beta (y)}{\partial y} dy$$

Como en el modelo de espacio supuesto no pueden existir fugas de neutrones, esta pérdida debe estar exactamente compensada por las absorciones en el mismo elemento, las cuales son:

$$\Sigma_a \Phi_\beta (y) dy$$

Por consiguiente el balance de neutrones, será:

$$\frac{\partial n_\beta(y)}{\partial y} = - \Sigma_a n_\beta(y)$$

es decir, se llega así a la misma ecuación encontrada anteriormente en la hipótesis de que $\frac{\partial N}{\partial x}$ fuera nula para $y = 0$. Esta serie de razonamientos confirma lo acertado de haber supuesto la anulación de la susodicha derivada parcial.

Antes de pasar a las posibles aplicaciones de la distribución de edades cronológicas encontrada, vamos a comprobar que puede llegarse a la misma por un camino completamente diferente, el cual proporciona al mismo tiempo una mejor perspectiva del fenómeno.

En efecto si en el mismo medio y en el plano $x = 0$ y en el instante $t = 0$ aparecen en un intervalo de tiempo infinitamente pequeño dt q neutrones por cm^2 como es bien sabido[12] utilizando la ecuación de la di-

12.- Referencia 2 – pág. 279.

fusión se encuentra que estos neutrones se propagan por el medio de acuerdo con la siguiente ley:

$$N\,(x,t) = \frac{q}{2\,v\sqrt{\pi D}}\,(vt)^{-1/2}\,e^{-\frac{x^2}{4\,vt} - \Sigma_a vt}$$

Pero si la emisión de neutrones cesa como se supone dt segundos después del instante inicial, es evidente que la edad cronológica de estos neutrones es t. Por consiguiente, en este caso particular $t = T$, y $N(x,t) = N(x,T)$. Supongamos ahora que transcurrida una longitud de tiempo arbitraria una ráfaga de neutrones de la misma intensidad q entra en el medio en el intervalo dt. Evidentemente esta segunda entrada de neutrones producirá en el plano situado a la distancia x la misma cantidad de neutrones de edad cronológica T, es decir, $N\,(x,T)$. por consiguiente, si suponemos que en el plano fuente, o sea en $x = 0$ se produce una emisión de neutrones de intensidad q cada dt segundos, el número total de neutrones con edad cronológica T que habrá en el plano x será:

$$N(x,T) = \frac{1}{2v\sqrt{\pi D}}\,(vT)^{-1/2}\,e^{-\frac{x^2}{4\,D\,vT}\;\Sigma_a vT}\int_t^{t+1} q\,dt =$$

$$= \frac{S}{2v\sqrt{\pi D}}\,y^{-1/2}\,e^{-\frac{x^2}{4Dy} - \Sigma_a y}$$

$$S = \int_t^{t+1} q\,dt$$

y se vuelve a encontrar así la misma solución anteriormente encontrada, partiendo de la conocida solución de la ecuación de la difusión dependiente del tiempo.

*

VI

APLICACIONES DE LA DISTRIBUCION DE EDADES CRONOLOGICAS

Comenzaremos observando que para todos los cálculos de tipo práctico en un reactor nuclear, no se necesita conocer más que la vida media de los neutrones térmicos en el mismo, es decir, λ_a/v. Pero es evidente que una descripción más completa de la población neutrónica térmica debería incluir las dos distribuciones de estos neutrones aquí resumidas. Es también evidente que la vida media puede deducirse siempre de la distribución de edades cronológicas.

Pero la obtención de la distribución de las edades cronológicas en un reactor nuclear, es decir en un medio multiplicador de tamaño finito, es un problema mucho más complejo que el aquí expuesto, por dos razones fundamentales; a) porque las condiciones de contorno son necesariamente más complejas; b) porque no se puede prescindir del término manantial o fuente en la ecuación de la difusión y sustituirlo por una condición en la fuente, ya que aquí habrá producción de neutrones en todos los puntos del medio, si suponemos que éste es homogéneo.

No obstante su complejidad el problema es abordable, y será con toda certeza resuelto en un porvenir próximo, al menos en los reactores homogéneos de forma geométrica sencilla.

Pasemos ahora a otras aplicaciones más sencillas de la solución encontrada. Por ejemplo la solución de la fuente puntual en un medio infinito no multiplicador puede deducirse casi directamente de la solución encontrada. Ello es debido al hecho de que el presente problema es completamente equivalente bajo el punto de vista matemático al problema de la moderación según la teoría de *Fermi*. Es posible por tanto escribir[13] :

$$N_{pt} = - \frac{1}{2\pi x} \cdot \frac{d N_{p\ell}}{dx}$$

siendo aquí N_{pt} y $N_{p\ell}$ las densidades neutrónicas correspondientes a los pro-

13.- Referencia 3 p. 195.

blemas de la fuente puntual y plana respectivamente. Reemplazando en vez de $N_{P\ell}$ la solución ya encontrada se deduce de aquí:

$$N_{Pt} = N(r,y) = \frac{S}{v\,(4\,\pi\,Dy)^{3/2}}\, e^{-\frac{r^2}{4Dy} - \Sigma_a y}$$

Esta solución satisface como es fácil comprobar a la condición que expresa que el recorrido medio de los neutrones en el medio debe ser λ_a. En efecto, un cálculo elemental, que aquí omitimos, prueba que en este caso: $n_\beta(y)$, es:

$$n_\beta(y) = \int_0^\infty 4\,\pi\, r^2 N(r,y)\, dr = \frac{S}{v}\, e^{-\Sigma_a y}$$

y como consecuencia de ello la solución encontrada para el problema de la fuente puntual satisface la mencionada condición.

*

VII

OBTENCION DE LAS DENSIDADES $N(x,y)$ y $n_\beta(y)$ EN AGUA LIGERA Y PESADA

Utilizando las fórmulas expuestas puede deducirse fácilmente la tabla siguiente, cuya lectura omitimos:

	D(cm)	$\Sigma_a(cm^{-1})$	L(cm)	$n_\alpha(0)(cm^{-3}$	$n_\beta(0)\ cm^{-3})$	$C\ (cm^{-7/2})$
H_2O	0,16	$1{,}97\times10^{-2}$	2,85	$4{,}05\times10^{-5}$	$2{,}27\times10^{-6}$	3.2×10^{-6}
D_2O	0,87	$2{,}9\times10^{-5}$	$1{,}7\times10^{2}$	$4{,}44\times10^{-6}$	$2{,}27\times10^{-6}$	$1{,}37\times10^{-6}$
BeO	0,47	$6{,}0\times10^{-4}$	28	$1{,}35\times10^{-4}$	$2{,}27\times10^{-6}$	$1{,}87\times10^{-6}$
Grafito	0,84	$2{,}4\times10^{-4}$	59	$1{,}6\times10^{-4}$	$2{,}27\times10^{-6}$	$1{,}39\times10^{-6}$

en la cual la intensidad de la fuente S se ha supuesto igual a 1 neutrón/cm² × × seg. y los valores de Σ_a y D han sido tomado de *Reactor Phisics Constants* de la U.S. Atomic Enegy Report ANL–5880.

Debe notarse que como se ve en el cuadro anterior en todos los casos $n_\beta(0)$ es menor que $n_\alpha(0)$ aunque en el caso del agua pesada ambos valores son del mismo orden de magnitud.

La distribución espacial de los neutrones con la misma edad cronológica es la curva de *Gauss*. Por otra parte la distribución de edades cronológicas, de los neutrones que han penetrado la misma distancia en un medio dado, presenta como es de esperar un único máximo. La posición de este máximo se encuentra fácilmente y resulta estar en el punto:

$$y = -\frac{1}{4\,\Sigma_a} + \sqrt{\frac{1}{16\,\Sigma_a^2} + \frac{x^2}{4\,D\,\Sigma_a}}$$

el cual, como se ve, crece con x.

Finalmente la densidad total de neutrones con la misma edad cronológica es como vemos una curva exponencial, y siendo el exponente proporcional a $-\Sigma_a$, ello indica que como intuitivamente cabía esperar esta densidad disminuye tanto más rápidamente cuanto más absorbente sea el medio.

Para terminar conviene poner de manifiesto que la distribución de edades en un medio de tamaño infinito, difiere de la distribución correspondiente a un medio de tamaño infinito, lo mismo que sucedía con la distribución de energías. Si representamos la distribución de neutrones en un cierto punto del medio en función de su edad, tendremos también en el caso de tamaño finito un cierto máximo, que estará desplazado hacia la izquierda con respecto al caso de tamaño infinito. Es decir, podremos también aquí hablar de un reblandecimiento del espectro, reblandecimiento que aumentará con el tamaño.

Vemos, pues, que existen varias y pronunciadas similaridades existentes entre ambas distribuciones, y el papel fundamental que en ambas juega el tamaño del sistema, sea éste multiplicador o no.

He dicho.

*

DISCURSO DE CONTESTACION

del

RVDO. P. ALBERTO DOU MAS DE XEXÁS

★

Excmos. Sres. Académicos;
Señoras, Señores:

Al contestar a vuestro discurso en nombre de la Academia, cúmpleme ante todo daros una cordial bienvenida y expresar la satisfacción de esta Corporación por contaros entre sus miembros.

Siguiendo una laudable costumbre tengo que exponer el *curriculum vitae* del recipiendario con el fin de presentarlo al público y a la sociedad.

Federico Goded Echeverría nació en Madrid el año 1.917 y terminó los estudios de la carrera de Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos el año 1.944. Recibió las enseñanzas de extraordinarios maestros como *Eduardo Torroja Miret, Alfonso Peña Boeuf, Ramón Iribarren Cabanilles y Clemente Sáenz García,* por citar sólo los que han pertenecido o pertenecen todavía a esta Corporación.

Su primer trabajo científico, recién terminada la carrera y mientras trabaja como ingeniero en la construcción, se basa en una experimentación llevada a cabo durante tres años en un modesto laboratorio de materiales. Logra obtener partiendo de hipótesis teóricas una familia uniparamétrica de ecuaciones de granulometría, que incluyen para un valor del parámetro las del profesor suizo *Bolomey,* que eran internacionalmente empleadas especialmente en la construcción de grandes presas y que habían sido elaboradas empíricamente. Estos resultados, después de haber sido dados a conocer en la Revista de Obras Públicas, fueron publicados en una extensa monografía por el actual Instituto Torroja, bajo el título *El problema de la Granulometría en las Presas* (Madrid, 1.948). La teoría fué internacionalmente aceptada, difundida y publicada, siendo frecuentemente citada y expuesta en largas reseñas en diversos países, incluyendo Suiza e Italia. Le valió también a su autor un Premio Extraordinario que le fué otorgado por la Junta de Gobierno del Patronato *Juan de la Cierva.*

Sin duda animado por el reciente éxito, pero más porque siente el llamamiento a la investigación., *Goded* empieza una segunda etapa en su carrera científica. Se siente atraído por el estudio de la Mecánica de los medios contínuos, pasa un año largo en Suiza y de vuelta a España publica una serie de trabajos sobre Elasticidad lineal, dos de los cuales son galardonados con los premios *Juan de la Cierva y Alfonso X el Sabio* (1.950) del C.S.I.C. También estos trabajos pasan las fronteras y el profesor *J. Talobre,* en su ya clásico texto *La Mécanique des Roches,* cita y comenta algunas de las soluciones halladas por el recipiendario. También a esta época pertenece su primer libro, *La teoría de la elasticidad lineal y sus funciones de tensión.* Desgraciadamente es imposible hacer aquí un análisis del rico contenido de este texto, que pone ya de manifiesto la inmensa labor, los amplios conocimientos y la penetrante intuición de su autor.

Nuestro nuevo compañero da un segundo y definitivo viraje en su vida científica, motivado por un cambio profesional, y se convierte nuevamente en estudiante de una de las disciplinas más fascinantes y humanísticas de nuestro tiempo, la ingeniería nuclear. Ingresa en la *International School of Nuclear Science and Engineering* de Argonne en los Estados Unidos, donde por cierto se encuentra con que algunos de sus trabajos de investigación eran ya conocidos. Continúa su especialización en laboratorios e instalaciones de la *General Electric* estadounidense.

De regreso a España, con ánimo incansable, escribe sucesivamente dos artículos sobre la *Función de tensión de la deformación radial* y la *Simetría esférica en la teoría de la elasticidad* que son publicados ambos en el prestigioso *Journal of Applied Mechanics.* Y simultáneamente escribe su segundo libro *Teoría de Reactores y Elementos de Ingeniería Nuclear,* que publica la *Junta de Energía Nuclear* en 1.958.

El Director de la Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, *D. Luis Martín de Vidales,* le ofrece dar un curso en la Escuela sobre técnicas nucleares. Al terminarlo, el mismo Director crea una cátedra de esta especialidad en la Escuela, que previo concurso, es adjudicada unánimemente por el Claustro a *Goded.*

Es notable y curioso que casi simultáneamente le es ofrecida otra cátedra de *Ingeniería Nuclear* por la Universidad de Notre Dame de Estados Unidos. No acepta por no expatriarse, pero la oferta habla muy alto de la impresión que nuestro nuevo compañero dejó en los ambientes norteamericanos en los que desarrolló su actividad científica y social.

En esta misma época empieza su libro, el tercero, de *Mecánica Cuántica* que publica en 1.965, el mismo año que sale muy aumentada la segunda edición de su *Teoría de reactores y Elementos de Ingeniería nuclear.*

La obligación que se impone el recipiendario de estar al día tanto en la investigación teórica como en algunas de las aplicaciones le condiciona a tener que pasar largas temporadas de especialización en Centros extranjeros, lo que realiza sucesivamente en Francia (Alsthom), Estados Unidos (Atomic Power Equipment Division, GE), adonde asiste como Jefe de un grupo de seis técnicos españoles), Inglaterra (Harwell, adonde asiste a un largo cursillo sobre radioisótopos), otra vez Francia (Chinon) y últimamente otra vez en Inglaterra *(Operation School de Calder-Hall).*

El trabajo de investigación del nuevo miembro se centra ahora en temas de mecánica cuántica. Encuentra ciertas transformaciones de la ecuación de *Schrödinger* que pueden aplicarse en muy diversos campos: construcción de interesantes potenciales en mecánica cuántica, estudio de las rotaciones de grupos de radicales libres, un conocimiento más profundo de problemas de mecánica clásica relacionados con la navegación y exploración del espacio estelar, y otros. Esta investigación cristaliza en el artículo *Transformations of the Schrödinger equation with discrete energy spectrum* que se publica en *Il Nuovo Cimento* en 1.962.

El artículo despierta amplia resonancia y el autor tiene que enviar separatas a numerosos profesores de Estados Unidos, Japón, Francia, Inglaterra, Hungría, Canadá, Alemania, etc.

Con objeto de estudiar más profundamente las consecuencias de los resultados obtenidos solicita en colaboración con el Dr. *Ramón Ortíz Fornaguera,* Jefe de Física Teórica de la Junta de Energía Nuclear, una Ayuda March, que les es concedida por la Fundación.

Para no alargarme demasiado voy a limitarme ya a mencionar la reciente publicación del segundo volumen de la *Teoría de reactores y Elementos de Energía nuclear* de nuestro nuevo compañero, en colaboración con el Dr. *Francisco Oltra,* y a remitirme al índice de sus publicaciones para los restantes trabajos.

No puede menos de causar asombro la amplitud de la labor realizada por *Goded;* la extraordinaria riqueza de conocimientos no concentrados alrededor de un solo tema ni siquiera alrededor de una sola disciplina, y por otra parte sin que ello signifique dispersión disipativa de energías; y finalmente la profundidad e interés de sus resultados, que, a pesar del limitado nivel científico en que se mueve España, le han permitido tener cabida y hacerse oir en el ámbito internacional.

*

* *

Siguiendo la misma laudable costumbre, a la que me he referido al comienzo de mis palabras, paso a comentar brevemente el contenido del discurso del recipiendario.

El fundamento matemático del mismo está demostrado en el artículo *Thermal Neutrons –Distribution of life Times* que nuestro compañero ha enviado a *Il Nuovo Cimento* y cuya publicación aparecerá en breve. Se considera el problema de hallar la distribución por edades cronológicas de los neutrones que entran en un medio infinito. Es el mismo problema que el de encontrar como se distribuye la población de un país según las edades de sus habitantes y que se resuelve mediante un censo; solo que aquí, la solución que da la distribución de una población de neutrones según los tiempos de su permanencia en el medio, la halla *Goded* a priori por métodos matemáticos.

Para el que os habla, profano en la ciencia de los neutrones, la reacción primaria que le ha producido el estudio del discurso es de sorpresa. A pesar de haber sido ya múltiples veces experimentada por la misma causa, no por ello deja de producir nuevamente sorpresa y admiración. Me refiero al hecho de que la ecuación que sirve de base al estudio de *Goded* y que gobierna la propagación de neutrones es la misma ecuación parabólica típica, en forma canónica, que rige otros innumerables procesos físicos. El más conocido e importante entre ellos es el de la conducción de calor en una barra, hasta tal punto que la ecuación es generalmente conocida por el nombre de ecuación del calor.

La primera memoria extensa y profunda sobre esta ecuación la publicó *J.B.J. Fourier* (1.768–1.830) con el título *Théorie analytique de la Chaleur*

(1.822). La importancia histórica de esta publicación es grande, no sólo porque se resuelven varios problemas relativos a la ecuación, sino mucho más por el método empleado, ahora llamado de *series de Fourier*, que provocó una revolución en los fundamentos de la matemática al exigir un nuevo concepto de función y creó de repente una extensa e importante rama del Análisis matemático, a saber el Análisis armónico.

Son muy numerosos los grandes matemáticos que después de *Fourier* han dedicado largas monografías y comunicaciones a la ecuación del calor. La ecuación sigue teniendo plena vigencia, y en nuestro siglo las publicaciones matemáticas sobre la ecuación de *Fourier* son naturalmente más frecuentes que nunca. Los nuevos teoremas recientemente demostrados son más profundos, y también más interesantes en cuanto responden a una realidad que ha sido más difícilmente formalizable o traducible en modelos matemáticos.

Algunos de los resultados puestos actualmente de relieve, no por ser más fáciles de interpretar resultan menos elocuentes. Así, por ejemplo, las funciones $N(x,y)$ que dan la densidad de la distribución de neutrones son indefinidamente diferenciales, o sea extraordinariamente regulares. No deja de ser sorprendente que la manida frase *los procesos térmicos son irreversibles*, sea formalmente equivalente a la moderna proposición *la propagación de los neutrones es irreversible.* Sabíamos que una predeterminada distribución contínua de temperaturas en una barra carente de manantiales de calor no puede ser, salvo distribuciones extraordinariamente excepcionales, el resultado de una pretérita evolución de una conducción de calor en la misma barra; ahora resulta que lo mismo sucede con una distribución de neutrones, cuya densidad varíe con continuidad.

Otros resultados matemáticos resultan más difíciles de interpretar. Parecía extraño que el calor se propagase por conducción instantáneamente. Todavía parece más increíble que los neutrones se propaguen instantáneamente o sea con velocidad infinita. Ambos resultados me parecen absurdos físicamente, y no podrán ser nunca demostrados experimentalmente, pero no obstante hay que conceder que tampoco contradicen la experiencia, por lo menos teniendo en cuenta la actual sensibilidad de los aparatos de medida empleados en los fenómenos pernitentes.

Todavía es más sorprendente la situación puesta de manifiesto por

J. Hadamard (1.917). Hemos mencionado antes la posibilidad, para distribuciones extraordinariamente excepcionales, de que una distribución, bien de temperaturas bien de neutrones, sea prolongable hacia el pasado, es decir que exista una solución de la ecuación de *Fourier*, que además resulta que ha de ser única, que permita deducir matemáticamente la distribución en un tiempo pasado. Pues, tal solución matemática, en estos casos excepcionales en que existe y es única, a menos que se introduzcan nuevas hipótesis, carece absolutamente de todo valor físico.

Todavía es mucho más sorprendente el siguiente resultado de *A.N. Tijonov* (1.935). La ecuación de *Fourier* homogénea, o sea sin manantiales en el medio físico, admite soluciones, tanto hacia el futuro como hacia el pasado infinitos, que son indefinidamente diferenciables, y que son idénticamente nulas en el momento inicial. Es decir, que del estudio de la ecuación que rige la conducción de calor y la propagación de neutrones se sigue la posibilidad de que surja de la nada una distrihbución de temperaturas o neutrones. Sólo es necesario que hacia el infinito del medio físico contínuo las temperaturas o la densidad de los neutrones crezcan en valor absoluto con suficiente rapidez.

Citemos un último resultado, debido a *D.V. Widder* (1.944), que quizá sea el más profundo de los obtenidos recientemente relativos a la ecuación de *Fourier*. Por hipótesis, considera exclusivamente las soluciones que no toman nunca en el futuro valores negativos y establece que, entonces, toda solución puede considerarse como originada a partir de un estado inicial con suficiente generalidad. Nada más razonable que la hipótesis de partida en las dos interpretaciones que nos ocupan, a saber que no se consideran conducciones de calor que supongan temperaturas absolutas negativas, ni se consideran distribuciones neutrónicas que alcancen densidades negativas. Y nada más cargado de valor físico que la conclusión del teorema, a saber, que entonces la distribución de temperaturas o de neutrones en el tiempo puede considerarse como necesariamente originada, y ello de manera única, a partir de una distribución inicial de temperaturas o de densidades de neutrones respectivamente.

*

La aparente y quizá real inutilidad de algunos de los resultados matemáticos que acaban de ser expuestos, así como la personalidad científica, técnica y humana del recipiendario, me llevan a comentar, aunque sólo sea en grandes rasgos, las relaciones entre la matemática, las ciencias positivas y el desarrollo económico.

En los últimos decenios se ha hecho patente hasta ser un lugar común una cierta identificación entre el progreso científico y el desarrollo económico. De año en año se hace más claro y universal que la ciencia y la técnica están a la base de cualquier mejora del bienestar material y del nivel de vida que haya de afectar a cualquier grupo social que sea algo numeroso.

Pero muy recientemente, y en particular por lo que se refiere a las matemáticas, empiezan a oirse autorizadas voces discordantes. Se consideraba que la satisfacción de la curiosidad intelectural era la más noble y profunda justificación de la labor del sabio. Pero el *sabio*, como se entendía todavía por las generaciones que nos han precedido inmediatamente, ha desaparecido, y en su lugar ha surgido el científico o el investigador, que hoy designan primariamente una profesión. Por consiguiente, se exige del investigador que no pierda nunca de vista el bien y el progreso de la sociedad. Estas consideraciones entran especialmente en juego cuando se discute la inversión de fondos públicos para el fomento de la ciencia, de la técnica y, en último término, del desarrollo económico.

En el caso de las matemáticas, paréceme que su situación empeora cuando se intenta glorificarlas por encima de todas las demás ciencias y para ello se las purifica rompiendo, a veces casi con fanatismo, cualquier posible relación con el mundo que nos rodea.

Recientemente el Dr. W.D. Mc Elroy, Director de la National Science Foundation de los Estados Unidos ha dado a conocer un comunicado sobre la propuesta de la Administración al Congreso para el presupuesto de la *NSF* para el año 1.972. En esta propuesta se prevé un aumento de un 19 por ciento para la parte del presupuesto destinado a las matemáticas. Pero se encuentra también la afirmación de que la más apremiante necesidad ahora es la *aplicación de lo que ya sabemos.*

Quizá haya que denunciar que, en algunos de los países técnicamente más desarrollados, empiece a haber de hecho una creciente alienación de algunos matemáticos, la cual alcanza proporciones suficientes, para que constituya, sino una tara social, quizá sí un lujo superfluo.

Me parece que hay un fundamento objetivo para tales apreciaciones negativas de ciertos aspectos del proceso matemático; como estimo que lo hay también para una acusación de antihumanismo en el desarrollo de la investigación científica y tecnológica en general. Ahora bien, me parece importante señalar que el mayor peligro para nuestra patria, hoy día como en los últimos cuatro siglos, no está en una deshumanización de la investigación científica o tecnológica, sino en la carencia o retraso de tal investigación.-

Por lo que se refiere a la comunidad internacional de matemáticos, creo que sólo un pequeño porcentaje puede ser tildado de alienados, y por cierto en un sentido que no resulta fácil de precisar. La casi totalidad consideran, me parece, que las matemáticas buenas han de ser interesantes, y ello se consigue principal y casi exclusivamente por su conexión con una posible contribución al progreso humano. Me basta citar dos nombres, que con su enorme autoridad avalan este punto de vista: *Salomon Bochner* de la Universidad de Princeton en su libro *The Role of Mathematics in the Rise of Science* (1.966), y *Richard Courant,* creador del Instituto que ahora lleva su nombre, de la New York University, en *What is Mathematics?* Este último, en colaboración con *H. Robbins,* se expresa así en la Introducción:

"La renovada solidez interna, y sobre todo la simplificación enorme alcanzada sobre la base de una comprensión más clara, hacen posible hoy poder dominar la teoría matemática sin perder de vista las aplicaciones. Establecer de nuevo una unión orgánica entre ciencia pura y aplicada, y un equilibrio estable entre la generalidad abstracta y la individualidad concreta puede ser muy bien la tarea universal de la matemática en el futuro inmediato.

"No es éste el lugar para un análisis filosófico o psicológico detallado de la matemática. Unicamente podemos destacar algunos puntos. Parece existir un grave peligro en el excesivo predominio del carácter axiomático—deductivo de las matemáticas. Ciertamente, el elemento de invención constructivo, de intuición directora, escapa a una simple formulación filosófica; sin embargo, continúa siendo el núcleo de todo resultado matemático, aún en los campos más abstractos. Si la forma deductiva cristalizada es la meta, la intuición y la construcción son, cuando menos, las fuerzas directrices.

Una amenaza seria para la verdadera vida de la ciencia aparece contenida en la afirmación de que la matemática no es más que un sistema de conclusiones derivadas de definiciones y postulados que deben ser compatibles, pero que, por lo demás, pueden ser creación de la libre voluntad del matemático. Si esta descripción fuera exacta, las matemáticas no podrían interesar a ninguna persona inteligente. Sería un juego con definiciones, reglas y silogismos, sin meta ni motivo alguno. La noción de que el intelecto puede crear sistemas de postulados plenos de significado de modo arbitrario es una verdad "a medias" decepcionante. Unicamente bajo una disciplina de responsabilidad frente a un todo orgánico, guiada sólo por necesidades intrínsecas, puede la mente libre obtener resultados de valor científico". Traducción de *L. Bravo.*- Aguilar).

En cuanto a España se puede afirmar que no hay matemáticos profesionales alienados. La primera razón, y desgraciadamente decisiva, es que para esas puras especulaciones alejadas de toda realidad se necesita un nivel científico, que en nuestra patria no se ha alcanzado todavía. Nuestros investigadores matemáticos o se mueven dentro del ámbito de la matemática clásica, o están incorporados en las líneas de corriente más importantes y seguras del desarrollo matemático actual. No hay ninguna escuela ni grupo que tenga categoría suficiente para que, aunque quisiera, pudiera dedicarse a crear matemática por lujo o por capricho.

Diríamos que hay más. Aún previendo o suponiendo un floreciente desarrollo de la investigación matemática en España, nuestro carácter lleva consigo que el peligro de una matemática inútil sea mínimo. En confirmación, nos basta apelar a las cualidades de sobriedad y de realismo, tan certeramente expuestas por *R. Menéndez Pidal* en su *Introducción* a la *Historia de España.* También el misoneísmo español, descrito en estas mismas páginas, sigue apreciablemente vigente, aunque naturalmente en niveles más sutiles.

Aunque la ontología de los entes matemáticos sea distinta de la de las ciencias positivas, que se ocupan del mundo exterior o exteriorizado, no cabe duda de que las matemáticas son por lo menos el instrumento de todas las ciencias naturales. La relación entre las matemáticas y las demás ciencias es muy estrecha. La dependencia del progreso científico respecto del progreso de las matemáticas es casi total. Desgraciadamente, la conexión no es bien comprendida más que por los iniciados en las matemáticas, pues se efectúa mucho más por razón del método que por razón de contenido o de operaciones.

Así puede explicarse, por ejemplo que en los organismos colectivos supremos del Consejo Nacional de Educación y del Comité Ejecutivo del C.S.I.C., aunque resulta difícil saber su composición, creo que no figura ningún matemático. También, otro ejemplo, de las setecientas becas dotadas este año por el Patronato de Igualdad de Oportunidades, sólo veinte han sido destinadas a los matemáticos. También creo que en parte los mismos matemáticos somos responsables de este estado de cosas.

Una deficiente enseñanza de las matemáticas en cualquier nivel no implica sólo una posible pérdida de vocaciones matemáticas, sino, lo que es mucho más grave, implica una pérdida de rendimiento científico o técnico, cualquiera que sea la futura profesión del alumno. Una buena enseñanza de las matemáticas no es un lujo que un país más bien pobre no puede promover, sino que en realidad, precisamente porque es pobre, no puede menos de hacer todo lo posible para que la educación matemática alcance el mayor nivel posible.

La presencia del nuevo compañero, matemático, técnico y humano, me ha sugerido estas consideraciones, pronunciadas como contribución en orden a lograr para todos una vida más cómoda y más digna.

Deseo finalmente dar de nuevo a *Federico Goded* la bienvenida a esta Corporación, que se honra desde hoy de contarle entre sus miembros.

*

PUBLICACIONES DEL PROFESOR GODED

*

Trabajos científicos.

Artículos.

1.- "Hormigones Permeables. Aplicaciones". *Revista de Obras Públicas.* Agosto-Septiembre de 1.947.

2.- "Aportaciones al cálculo de blindajes y armaduras circulares en galerías forzadas" *Revista de Obras Públicas.* Diciembre de 1.948.

3.- "Quelques aspects de la granulation des betons". *Bulletin Technique de la Suisse Romande.* Septiembre de 1.949.

4.- "La Granulometría de Calcestruzzi." *L'Acqua.* Julio-Septiembre de 1.949.

5.- "Dosificación de Hormigones. Nuevas Orientaciones. *Revista de Obras Públicas.* Noviembre de 1.949.

6.- "Soluciones de unos problemas de elasticidad. *Revista de Obras Públicas.* Junio de 1.950.

7.- "Nuevas aplicaciones de la teoría de las superficies". *Revista de obras Públicas.* Mayo-Junio y Julio de 1.951.

8.- "Cilindros excéntricos y arcos biarticulados. *Revista de Ciencia Aplicada y Revista de Obras Públicas.* Julio-Agosto de 1.951.

9.- "Investigaciones sobre elasticidad bidimensional." Revista de Ciencia Aplicada. 20 de Mayo-Junio de 1.951.

10.- "Investigaciones sobre elasticidad bidimensional. El método Inverso". *Revista de Obras Públicas.* Diciembre de 1.951.

11.- "Aplicaciones especiales del método de las transformaciones." *Revista de Obras Públicas.* Mayo, Junio y Julio 1.952 y Febrero de 1.953.

12.- "El Método de las Transformaciones". *Revista de Ciencia Aplicada*. 25, 26, Marzo, Abril de 1.952 y Mayo, Junio de 1.952.

13.- "Generalización del método de las transformaciones. Algunos aspectos del problema". *Revista de Obras Públicas.* Marzo de 1.954.

14.- "Contribución al cálculo de presas de contrafuertes de espesor variable". *Revista de Obras Públicas.* Mayo-Junio de 1.955.

15.- "Utilización de la energía térmica del mar". *Arbor,* Julio-Agosto de 1.955.

16.- "Centrales Nucleares de Producción de Energía Eléctrica". *Revista de Obras Públicas.* Enero de 1.956.

17.- "Reactores de potencia; estado actual y tendencias previsibles". *Revista de Obras Públicas.* Diciembre de 1.956 y Enero-Febrero de 1.957.

18.- "Aspectos fundamentales de la dinámica de los reactores termales. Energía Nuclear, Números 1 y 2, 1.957 y número 5, 1.958.

19.- "Spherical Symetry in the theory of elasticity. *Journal of Applied Mechanics.* March 1.958.

20.- "Ecuaciones diferenciales de segundo orden. Relaciones funcionales entre sus soluciones". *Revista Obras Públicas.* Agosto de 1.959.

21.- "The Stress function of radial strain. *Journal of applied Mechanics.* September de 1.959.

22.- "Transformation of the Schroedinger equation with discrete energy spectrum". *Il Nuovo Cimento,* 16 diciembre de 1.962.

23.- "La energía nuclear y la desalinización del agua del mar." (En colaboración con D. Carmelo Chueca Goytia). *Revista de Obras Públicas.* Noviembre de 1.963.

24.- "La desalación del agua de mar y salobres." *Dyna núm. 10.* Octubre de 1.969.

•

Monografías.

1.- "El problema de la granulometría en las presas". *Instituto Técnico de la Construcción,* núm. 65.

2.- "Resolución de un problema de elasticidad". *Instituto Técnico de la Construcción,* núm. 88.

3.- "Estudio sobre la docilidad". *Instituto Técnico de la Construcción,* núm. 95.

4.- "Vigas y Arcos de contornos circulares con cargas uniformes". *Instituto Técnico de la Construcción,* núm. 107.

5.- "Cilindros excéntricos y arcos biarticulados". *(Premio Juan de la Cierva,* 1950).

6.- "Investigaciones sobre elasticidad bidimensional. *(Premio Alfonso X El Sabio, 1.950).*

•

Libros.

1.- "Teoría de la elasticidad lineal y sus funciones de tensión". (Distribuída por *Dossat,* 1.959).

2.- "Mecánica Cuántica". (Editado por el Gabinete de Aplicaciones Nucleares a las Obras Públicas y distribuído por *Dossat,* 1.965).

3.- "Teoría de reactores y elementos de energía nuclear, tomo I. (Editado por la *JEN).* Primera edición, 1.958 y segunda edición, 1.965.

4.- "Teoría de reactores y elementos de energía nuclear", tomo II. *(Editado por la JEN).* Diciembre de 1.970.

•