

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS  
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

---

# La Geodesia en la era del espacio

DISCURSO

LEIDO EN EL ACTO DE SU RECEPCION

POR EL

EXCMO. SR. D. JOSE MARIA TORROJA MENENDEZ

Y

CONTESTACION

DEL

RVDO. P. ANTONIO ROMAÑA PUJÓ, S. J.

EL DÍA 25 DE JUNIO DE 1969



M A D R I D

DOMICILIO DE LA ACADEMIA:

VALVERDE, 22.—TELEFONO 221-25-29

1 9 6 9

Depósito Legal M. 2.416-1969

---

TALL. GRÁF. VDA. DE C. BERMEJO. — J. GARCÍA MORATO, 122. — TELÉF. 233-06-19. — MADRID

# DISCURSO

DEL

EXCMO. SR. D. JOSE MARIA TORROJA MENENDEZ

TEMA

LA GEODESIA EN LA ERA DEL ESPACIO

Si este acto ha de ser siempre emotivo para cualquier nuevo Académico, en mi caso lo es en mayor medida por lo mucho que siempre ha significado para mí esta Real Academia. Mi abuelo, don Eduardo Torroja Caballé, fue Académico desde 1893 hasta 1918. Mi padre leyó su discurso de ingreso el 16 de mayo de 1920, cuando yo aún no había cumplido los cuatro años, y fue Secretario General de la Academia desde 1934 hasta su fallecimiento en 1954. Toda mi vida he oído hablar y he considerado a esta Real Academia como algo muy íntimo, muy próximo a mí. Incluso durante varios años he vivido en esta casa. Siempre he sentido una especial veneración hacia la Real Academia de Ciencias y hacia sus ilustres miembros. El Anuario de la Academia, su Revista, sus Memorias, me han resultado siempre entrañablemente familiares. Dos hermanos de mi padre figuran también en la lista de miembros de esta Corporación, Eduardo Torroja Miret, muerto prematuramente, cuando tanto se esperaba aún de él, en 1961, y Antonio, que hoy se sienta entre vosotros.

Creo que los cuatro lograron merecer vuestro afecto y vuestra consideración, y ello lo confirma mi presencia aquí en estos momentos. Habéis querido, al traerme a mí a esta Casa, conservar entre vosotros el apellido Torroja, y habéis pensado en mí por ser el mayor de la actual generación, aunque ciertamente este criterio de antigüedad puede no haberos llevado a la mejor elección para que el apellido Torroja permanezca en la Academia, y es tanto lo que la Real Academia de Ciencias significa para mí, que cuando mi querido maestro, el Prof. don Francisco Navarro Borrás me dijo que habíais pensado en traerme a esta Casa, no supe ni siquiera decir que no.

Tengo, pues, que agradeceros esta atención que habéis tenido conmigo y aseguraros que, aún sin méritos por mi parte, el apellido obliga; lo único que puedo ofreceros es una ilusión enorme por colaborar con vosotros dentro de mis fuerzas, en vuestras tareas, para procurar mantener y aumentar, si ello fuera posible, el prestigio de

esta alta Corporación. Aunque no sea más que en recuerdo de la enorme ilusión que mi padre puso siempre en cuanto se refirió a esta Real Academia.

\* \* \*

Vengo hoy a que coloquéis sobre mi pecho, inmerecidamente, la Medalla número 13 de esta Real Academia. El último que la ostentó, hasta 1950, fue el profesor don Cecilio Jiménez Rueda, catedrático que fue de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid, después de haberlo sido de la de Valencia. Yo no llegué a conocer a don Cecilio, pues se jubiló en 1928, antes de llegar yo a iniciar mis estudios en nuestra Facultad de Ciencias, donde su recuerdo aún perduraba.

Don Cecilio Jiménez Rueda fue siempre un maestro apasionado; cuando sólo contaba doce años dirigió ya una escuela de párvulos en su pueblo natal, Atarfe, y a los dieciséis siguió ejerciendo su oficio de maestro en la capital de la provincia, Granada. A los veintidós inició en la Universidad granadina sus estudios, cursando allí los dos primeros años de la Licenciatura en Ciencias Físico-Matemáticas, que habría de concluir en la Facultad de Madrid, en la que fue discípulo de mi abuelo Eduardo, y más tarde profesor de mi padre. Doctorado en 1888, fue inmediatamente nombrado profesor auxiliar de la propia Facultad, en la que continuó hasta que seis años más tarde ganó por oposición la Cátedra de Geometría en la Universidad de Valencia, donde sólo sirvió durante cuatro años, pues en 1900 volvió a la de Madrid, en la que ya continuó hasta su jubilación.

Publicó, entre otras obras, un *Tratado de las formas geométricas de primera y de segunda categoría* y unas *Lecciones de Geometría métrica*, que durante muchos años sirvieron de texto en la Facultad de Ciencias, colaborando además con frecuencia en las revistas «El Progreso Matemático» y en la «Revista de la Sociedad Matemática».

Don Cecilio puso siempre toda su ilusión en su labor docente, y así lo reconocieron los que fueron sus alumnos, a los que acogía con el afecto y el cariño del verdadero Maestro. A los noventa y dos años, tras varios de penosas dolencias, entre ellas una ceguera casi absoluta, que supo llevar con cristiana resignación, falleció en su pueblo natal.

Para ocupar en esta Real Academia la vacante dejada por Ji-

ménez Rueda fue designado uno de sus discípulos, que también le sucedió en la Cátedra de la Facultad de Ciencias de Madrid: don Pedro Pineda Gutiérrez. Permitidme que destaque ahora una enorme satisfacción que pocos Académicos han podido experimentar: el dedicar estas palabras de recuerdo a su antecesor, y que este antecesor viva y quiera Dios que por muchos años. Pues la enorme modestia de don Pedro hizo que nunca llegara a sentarse entre vosotros. Y ahora no puedo menos de pararme a pensar cómo he podido yo dar este paso y osar venir a ocupar el puesto que a él, con tantos méritos, le corresponde.

Don Pedro Pineda, andaluz también, nació en el Puerto de Santa María, ha sido otro Maestro por vocación, habiendo dedicado más de cuarenta años a la docencia.

Fue también discípulo de mi abuelo en la Universidad de Madrid, en la que terminó los estudios de Licenciatura en 1914, pasando al año siguiente a trabajar, bajo la dirección de don Julio Rey Pastor, en el Seminario y Laboratorio Matemático recién creado por la Junta para Ampliación de Estudios, que más tarde le pensionó al Politécnico de Zurich. A su regreso fue nombrado Profesor Auxiliar de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid, hasta que pasó a desempeñar la Cátedra de Geometría Descriptiva de la de Zaragoza. Y de allí volvió a Madrid a ocupar la vacante producida por la jubilación de don Cecilio Jiménez Rueda.

Numerosos artículos, notas y comunicaciones ha publicado don Pedro Pineda, especialmente en la «Revista Matemática», que no voy a enumerar por no cansar vuestra atención, limitándome a citar la Memoria «Estudio de la colineación compleja en el plano y representación real de la misma», premiada en 1924 por esta Real Academia.

Por las aulas del profesor don Pedro Pineda han pasado numerosos alumnos y todos han reconocido, sobre sus cualidades como docente, sus cualidades humanas, su bondad, su simpatía y esa ironía fina, sin malicia, que suele acompañar a sus juicios.

Tampoco tuve yo la suerte de ser alumno suyo, pero sí le he tratado, primero mientras fui Profesor Auxiliar en nuestra Facultad y luego, ya como Catedrático, y siempre he podido comprobar su amor a la Universidad. Esta Universidad tan vilipendiada hoy y tan querida por los que la vivimos, que tantos defectos tiene, pero que lanza al mundo profesores como mi abuelo don Eduardo, como

don Cecilio Jiménez Rueda y como don Pedro Pineda: hombres con una profunda formación científica y humana y a los que tanto debe la Universidad y la sociedad españolas.

Elegido Académico en 1950, fue retrasando la redacción de su discurso de ingreso, hasta que en el mes de enero de 1966 presentó su renuncia, privando a la Academia de un colaborador valiosísimo, que tan eficazmente podría haberos ayudado en vuestras tareas. Y lo más lamentable es que quien ha tenido la osadía de venir a sustituirle nunca podrá compensaros de su falta.

## I. Métodos de la Geodesia clásica

Empezaremos por recordar cómo la Geodesia clásica ataca y trata de resolver el problema del estudio de la forma y dimensiones de la Tierra.

No haremos sino pasar breve revista a estos métodos, que no constituyen el objeto de esta exposición y que por otra parte han sido ya tratados en esta Casa por personas de tanta autoridad como los Académicos don Frutos Saavedra Meneses (1862) en su discurso sobre *Progresos de la Geodesia*; don Carlos Ibáñez e Ibáñez de Ibero, Marqués de Mulhacén (1863), en su *Historia de los instrumentos de observación en Astronomía y Geodesia*, y don Joaquín M.<sup>a</sup> Barraquer (1881), en *Aplicaciones e importancia del péndulo en la investigación de la figura de la Tierra*, todos ellos en sus discursos de ingreso en la Corporación.

Como, por otra parte, en anteriores publicaciones hemos tratado ya en parte el problema, a ellas nos referimos.

La Geodesia clásica trata de llegar al conocimiento de la forma y dimensiones de la Tierra, siguiendo el camino que a continuación indicamos:

- A. Determinación de un elipsoide como figura aproximada de la Tierra.
- B. Determinación del geoide a partir del elipsoide anterior.
- C. Determinación de la posición de puntos de la superficie terrestre con relación a la superficie del geoide.



## A. DETERMINACION DEL ELIPSOIDE TERRESTRE

Mediante la utilización de observaciones astronómicas y geodésicas, así como de datos gravimétricos, se trata de determinar la forma y dimensiones de aquel elipsoide que mejor se adapte a la forma de la Tierra.

Para ello se recurre a tres métodos:

1. Método de los arcos.
2. Método de las áreas.
3. Método gravimétrico.

Pasemos brevemente revista a estos tres métodos.

### 1. *Método de los arcos.*

La primera afirmación de la esfericidad de nuestro planeta se basa en un hecho de observación astronómica: Aristóteles afirma que la Tierra es esférica, porque tal es la forma de los astros, y porque la sombra que arroja la Tierra sobre su satélite en los eclipses es circular. Pero no es suficiente afirmar que nuestro planeta es una esfera, es necesario conocer sus dimensiones. ¿Cómo determinarlas?

Si se logra conocer, por medida directa, la longitud de un arco de círculo máximo de la Tierra y el ángulo formado por los radios de sus extremos, partiendo de la relación existente en la circunferencia entre un ángulo en el centro y la longitud del arco que subtende, se podrá determinar el valor del radio terrestre.

Tal fue la idea desarrollada por Eratóstenes (250 a. J. C.), a quien se debe la primera determinación del radio terrestre. Observó Eratóstenes que en el solsticio de verano, el Sol iluminaba en Siena (la actual Asuan) los pozos hasta el fondo, lo que indicaba que el astro pasaba por el cénit en el momento de su culminación. Determinó al mismo tiempo la altura que alcanzaba el Sol en el mismo día y en el momento de su paso por el meridiano de Alejandría, que suponía era el mismo de Siena. Esta distancia cenital observada, que resultó ser la cincuentava parte de la circunferencia, era la amplitud del arco de meridiano comprendido entre Siena y Alejan-

dría. Conocía, además, la distancia entre ambos puntos, que se evaluaba en unos 5.000 estadios, luego estaba en posesión de los datos necesarios para determinar las dimensiones de nuestro planeta. Claro que su determinación resultó afectada de varios errores, pues, aun prescindiendo de los inherentes a toda clase de observaciones, ni Alejandría y Siena estaban en el mismo meridiano, ni el valor de la diferencia de sus latitudes era el que Eratóstenes supuso, ni el valor admitido para la distancia entre ambos puntos podía merecer confianza.

Algo análogo hizo Posidonio (135-51 a. J. C.) reemplazando la observación solar por la de la estrella Canopus que, mientras en Rodas aparecía en el horizonte en el instante de su paso por el meridiano, se observaba en Alejandría, situada sensiblemente en su mismo meridiano, con una altura igual a  $1/48$  de la circunferencia.

Los árabes efectuaron una nueva medida de un arco de meridiano, realizada en Mesopotamia el 830 por iniciativa del califa Al Mamún. Organizó éste dos expediciones a la llanura de Zinjar, cerca de Bagdad, saliendo una hacia el N. y otra hacia el S., con la misión de medir la distancia sobre el terreno, hasta alcanzar una diferencia de un grado de latitud, cada una de ellas.

El método seguido por Eratóstenes para determinar la longitud del radio terrestre, ha sido frecuentemente aplicado con posterioridad, repitiéndose las determinaciones, efectuadas con mayor o menor precisión y con más o menos éxito. Durante muchos siglos hubo que limitarse a pequeños arcos, cuya longitud se medía directamente sobre el terreno, a veces por procedimientos tan burdos como el utilizado por Fernel, médico francés que, en 1525, midió la distancia entre París y Amiens, contando las vueltas dadas por las ruedas de su carruaje. Pero más tarde el procedimiento fue mejorado introduciendo el uso de las triangulaciones, que tanta aplicación habían de tener en Geodesia. La primera de las operaciones de esta naturaleza para la medida del radio terrestre que merece citarse, es la efectuada por Snellius (1615), que midió un arco de  $1^\circ$  en Holanda, entre Alkmaar y Bergen op Zoom mediante una triangulación, con una base media en las proximidades de Leyden. Años más tarde el abate Picard (1670), mejora los procedimientos de observación al aplicar a los instrumentos goniométricos un anteojo provisto de un retículo formado por dos hilos en cruz, aumentando así notablemente la precisión conseguida y el alcance de la visión. Esta determinación

del radio terrestre tuvo una importancia capital en el progreso de la Ciencia, que de ninguna manera pudo sospechar Picard.

Un paso decisivo en el conocimiento de la forma de la Tierra fue el dado por Newton con su ley de la gravitación universal. Newton había concebido ya su ley de la gravitación, según la cual «las cosas pasan como si los cuerpos se atrajeran en razón directa de sus masas e inversa del cuadrado de sus distancias». Supuso que la fuerza que debía retener a la Luna en su órbita alrededor de la Tierra había de ser la misma que arrastraba a los cuerpos situados sobre la superficie terrestre en dirección al centro de la misma. Buscó una comprobación comparando la magnitud de la fuerza con la que la Tierra debe atraer a la Luna, con el valor obtenido por Galileo para la aceleración de la gravedad. Como dato para efectuar esta comparación contaba con el valor de la distancia a la Tierra de nuestro satélite, en función del radio terrestre. Pero la magnitud entonces admitida para este radio terrestre era errónea, por lo que no obtuvo la comprobación buscada. Al conocer Newton el nuevo valor deducido por Picard, repitió sus cálculos, pudiendo comprobar que, efectivamente, se verificaba lo que él había supuesto, comprobación que le permitió enunciar su ley de la gravitación universal.

La comprobación de esta ley, fundamental en el estudio de las que rigen el universo, la dio una medida del radio terrestre: la Geodesia refrendaba, pues, la ley fundamental del Universo que rige los movimientos de los astros.

Pero pronto la Astronomía pagó a la Geodesia la deuda que con ella tenía contraída: Newton demostró, partiendo de la ley de la gravitación universal, que la forma de la Tierra no podía ser la esférica hasta entonces admitida. Nuestro planeta, constituido en un principio por una masa fluida y homogénea, sometida no sólo a las atracciones gravitatorias, sino, además, a la acción de la fuerza centrífuga creada por la rotación de dicha masa, debía de haber adquirido la forma de un elipsoide de revolución achatado por los extremos de su eje de rotación. No era nueva esta idea expuesta por Newton, sino que, por el contrario, había sido ya lanzada por Huyghens como consecuencia de la interpretación del fenómeno observado por Richer (1673) en Cayena. Este astrónomo francés, enviado por la Academia de Ciencias de París para efectuar observaciones de estrellas ecuatoriales, con objeto de determinar el valor de la oblicuidad de la eclíptica, notó que el péndulo oscilaba más lentamente en Cayena que en París. Huyghens dio una explicación del

hecho considerándolo como una consecuencia de la variación de la fuerza centrífuga desarrollada por la rotación terrestre.

Por otra parte, de nuevo un hecho de observación astronómica influye en las ideas sobre la forma de la Tierra. Cassini observó el planeta Júpiter, notando su aplanamiento, lo que expuso como argumento para defender el que, por analogía, tampoco la Tierra debía ser esférica.

También los resultados de las operaciones geodésicas efectuadas en Francia, llevaron a la misma conclusión, haciendo pensar que la Tierra no era una esfera. En efecto, la Academia de París decidió extender el arco de Picard a través de toda Francia, desde Amiens hasta Perpiñán. La operación fue realizada por Dominico Cassini y, una vez terminada, se comprobó que efectivamente la longitud del arco de 1° no era constante para distintas latitudes, sino que disminuía desde el Ecuador hacia el polo Norte, es decir, que contrariamente a lo que afirmaban Newton y Huyghens, la Tierra resultaba ser un elipsoide alargado en el sentido de su eje de rotación.

Se planteó la correspondiente discusión entre los defensores de una y otra teoría, agriándose las disputas y complicándose cada vez más la solución del problema, hasta que, a propuesta de Maupertius, se pensó en buscar la solución en el único terreno en que podía encontrarse: en la confirmación por la experiencia de una u otra de las hipótesis puestas en litigio.

Se organizaron al efecto dos expediciones bajo la dirección de la Academia de Ciencias de París, con la misión de medir sendos arcos de meridiano, uno cerca del polo (Laponia) y otro cerca del ecuador (Perú), que deberían confirmar una u otra de aquellas hipótesis, dando además los valores de los parámetros que habían de definir la forma y dimensiones del elipsoide terrestre: el semieje ecuatorial ( $a$ ) y el aplanamiento  $\left( z = \frac{a-b}{a} \right)$ . Esta determinación es teóricamente sencilla. La geometría analítica nos da la relación existente entre la longitud de un arco de meridiano, el ángulo formado por las normales en sus puntos extremos, que es la diferencia de latitudes de los mismos, y los dos parámetros que definen la forma y dimensiones del elipsoide. Conocida dicha relación, basta medir la longitud de un arco de meridiano y determinar la diferencia de latitudes entre los puntos extremos del mismo, y llevando estos valores a aquella, tendremos una ecuación en la que las incógnitas serán dichos parámetros. Una nueva medida, efectuada de preferencia en una región

alejada de la primera, nos dará una segunda ecuación con las mismas incógnitas. La solución de este sistema de ecuaciones nos resolverá el problema, dándonos a conocer las dimensiones y forma del elipsoide terrestre.

Realizadas, efectivamente, las observaciones por Maupertius y Clairaut en Laponia, y en Perú por La Condamine y Bouguer con la colaboración de nuestros Jorge Juan y Antonio de Ulloa, se confirmó la predicción de Newton: la Tierra se aproximaba a un elipsoide achatado en el sentido del eje de rotación.

Este es el método de los arcos que se ha aplicado con posterioridad reiteradamente, utilizando nuevas medidas que han llevado al cálculo de nuevos elipsoides. Si los arcos medidos son más de dos, la solución por el método de mínimos cuadrados del sistema de ecuaciones obtenido, nos dará una solución, teóricamente más precisa cuanto mayor sea el número de arcos considerado.

Igualmente podrían determinarse los parámetros del elipsoide terrestre midiendo, no arcos de meridiano, sino arcos de paralelo. Pero las operaciones de esta naturaleza son más complicadas y menos precisas, por lo que, mientras abundan en la historia de la Geodesia las medidas de arco de meridiano, son pocas las efectuadas sobre arcos de paralelo.

Han sido muchas las medidas de arco efectuadas al objeto indicado: Maclear y Lacaille (1752), en Africa del Sur; Boscovich (1754), en los Estados pontificios; Tenner (1850) y Struve (1860), en Rusia; Maskelyne (1769), en Escocia; Mason y Dixon (1764), en América del Norte; Delambre y Méchain (1789), y Biot y Arago (1807), en Francia; Chaix y Rodríguez (1808), en España; Roi (1784), Colby (1840) y James (1846), en Inglaterra; Bessel (1838) y Baeyer (1851), en Prusia; Lambton (1802) y Everest (1823), en la India, etc.

Posteriormente, la cooperación internacional en estas campañas geodésicas ha hecho posible la medida de grandes arcos de meridiano, entre los que citaremos los siguientes:

El arco anglo-franco-español, de una amplitud de  $27^\circ$  y 3.000 kilómetros de longitud.

El arco ruso-escandinavo, de  $25^\circ,3$  y 2.800 kilómetros. Los dos arcos de la India, de  $21^\circ,3$  y 2.400 kilómetros y  $19^\circ,2$  y 2.100 kilómetros respectivamente.

Y, por último, mencionaremos el magno proyecto de la Unión

Geodésica Internacional de medición de un arco de meridiano que atraviesa los continentes europeo y africano, desde el Océano Glacial Artico hasta la isla de Creta, para enlazar aquí con Africa por Egipto, atravesando todo este continente terminando el El Cabo. La medición de este gran arco ha sido posible gracias a la colaboración de los Servicios Geodésicos de los Estados Unidos.

Partiendo de estas operaciones astronómico-geodésicas de medida de arcos, se han calculado varios elipsoides como representación de la figura de la Tierra, siendo los principales los de Delambre (1810), Walbeck (1819), Schmidt (1829), Everest (1830), Bessel (1841), Airy (1849), Struve (1860), James (1863), los dos de Clarke (1866 y 1880), Helmert (1907), etc. Y por último citaremos la nueva determinación de la figura de la Tierra utilizando arcos distribuidos por Europa, Asia, Africa y América: dos grandes arcos de meridiano, que son el ya citado desde Escandinavia hasta el sur de Africa, y otro desde el Canadá al sur de Chile, y otros dos arcos de paralelo, uno que atraviesa Estados Unidos de Este a Oeste, y otro a través de Europa y gran parte de Asia. Los cálculos efectuados por B. Chovitz e I. Fischer (1956) llevaron a nuevos valores del semieje y el aplanamiento terrestres.

Al aumentar el número de arcos medidos, repartidos por toda la superficie terrestre y al aumentar la precisión de las operaciones tanto astronómicas como geodésicas, parece que debiera esperarse una exactitud creciente en las dimensiones calculadas para el elipsoide terrestre, que cada vez debería adaptarse mejor a la superficie de nuestro planeta. Pero, contra toda previsión, esta esperanza no se ha visto realizada. ¿A qué puede deberse este hecho? Dos son las causas principales.

Si en el extremo de un arco de pequeña longitud se comparan sus coordenadas determinadas por observaciones astronómicas con las geodésicas deducidas del cálculo de la triangulación, se encuentran con frecuencia diferencias notables, las llamadas «desviaciones locales de la vertical», demasiado grandes para que puedan ser debidas a errores de observación, ni puedan considerarse como consecuencia del cálculo geodésico efectuado sobre un elipsoide que sólo representa a la Tierra de una manera aproximada.

La existencia de estas desviaciones locales de la vertical fue notada por Bouguer en la medida del arco del Perú, al observar en las proximidades del Chimborazo. Constituían un fenómeno que había sido ya anunciado por Newton, quien señaló que la falta de homogeneidad

de la corteza terrestre debía dar lugar a la aparición de dichas desviaciones.

Basándose en esta predicción, calculó Bouguer los valores teóricos de las desviaciones de la vertical a ambos lados del Chimborazo; pero los valores calculados resultaron superiores a los observados. Bouguer supuso que esta anomalía era debida a la existencia de cavidades en el interior de la montaña, lo que hacía que la masa real de dichas montañas fuera inferior a la aparente. Ante análogo problema se encontraron más tarde Beccaria y Zach en los Alpes; Maskelyne en Escocia; Méchain en Montjuich, y Pratt en la India (en las proximidades del Himalaya), no tardando en darse una explicación de tales fenómenos con la nueva hipótesis isostática, de tan gran interés, no sólo para el geodesta, sino también para el geólogo y para el geofísico. Los propios Pratt y Airy enviaron a la Royal Society sendas Memorias, en las que trataban de buscar la solución del problema.

Pero, aparte de la existencia de las desviaciones locales de la vertical que acabamos de indicar y de la influencia que sobre ellas pueda tener la hipótesis que se admita sobre la composición isostática, existe otra razón fundamental que impedirá llegar a obtener un elipsoide que represente a la Tierra adaptándose de una manera perfecta a su superficie. ¿Qué entendemos por superficie terrestre? Es natural que en lo anteriormente dicho no nos referimos a su superficie física, con todas sus elevaciones y depresiones. Tal superficie, ni tiene ni puede tener una representación matemática. La definición generalmente admitida es la que da Gauss de la superficie que se ha llamado geoide. Es una superficie definida por la condición de ser en todos sus puntos normal a la dirección de la plomada y que deberá pasar por un punto fijo, que será, por definición, de cota cero. Esta superficie, equipotencial en el campo gravífico terrestre, deberá coincidir con la superficie de los mares, supuesta eliminada la influencia de las mareas, de los vientos y corrientes marinas, y supuesta uniforme la densidad de las aguas. El geoide así definido es una superficie complicadísima. En las partes cubiertas por los mares coincide sensiblemente con su superficie; pero en las regiones continentales adopta formas e inflexiones sumamente variadas.

La expresión matemática de la superficie así definida podría obtenerse teóricamente, determinada como una superficie de nivel en el campo de la gravedad terrestre. Pero dicha expresión, aun admitiendo una variación uniforme de la densidad en el interior de la Tierra, es

todavía excesivamente complicada para que pueda ser de aplicación en la práctica. Los cálculos sobre tal superficie se complicarían hasta el punto de tener que renunciar a su empleo. Esto ha hecho necesario prescindir en principio del geoide, adoptando como superficie de referencia otro más asequible al cálculo matemático.

Helmert simplifica la cuestión introduciendo la superficie que llama «esferoide normal» definida limitándose a los primeros términos del desarrollo en serie del potencial de la gravedad. Pero aún resulta prácticamente inasequible al cálculo: el esferoide de Helmert es una superficie algebraica de grado 14.

Una nueva simplificación puede obtenerse introduciendo un elipsoide de revolución. Darwin y Wiechert han demostrado que puede tomarse como superficie de referencia el elipsoide de revolución que más se aproxima al geoide, con la condición de que los ejes de ambas superficies coincidan en dirección y magnitud. La diferencia máxima entre los radios vectores de ambas superficies es sólo de algunos metros. El potencial sobre este elipsoide es el llamado «potencial normal», y la gravedad sobre él es la «gravedad normal», para distinguirlos del potencial y gravedad reales.

## 2. *Método de las áreas.*

Pero, como ya hemos indicado, las normales a esta superficie de referencia no coincidirán con las normales al geoide (dirección de la plomada). En efecto, la observación astronómica permite determinar la dirección de la llamada vertical astronómica o verdadera en un vértice geodésico, vertical que es, por definición, normal a la superficie de nivel que pasa por el punto considerado y de la que puede pasarse a la normal al geoide mediante una serie de correcciones (topografía, isostasia, etc.). Suponemos adoptado un cierto elipsoide como superficie de referencia, definido por unos determinados valores de los parámetros  $a$  y  $\alpha$  y por la condición de ser su eje de revolución paralelo al de rotación de la Tierra y por ser además normal a la vertical astronómica en uno de los vértices geodésicos elegido como punto astronómico fundamental. A cada uno de los restantes vértices geodésicos se le hace corresponder un punto de este elipsoide, cuya posición queda definida por el cálculo a partir de las observaciones efectuadas en las redes geodésicas correspondientes. La normal al elipsoide en ese punto, llamada vertical geodésica, define las coor-



denadas geodésicas del vértice, que, en general, no coincidirán con las coordenadas astronómicas. El ángulo formado por ambas normales, la «desviación relativa de la vertical», dependerá evidentemente del elipsoide y del punto adoptado como punto astronómico fundamental de la red. La consideración de estas desviaciones relativas de la vertical nos va a servir para definir el elipsoide más probable, o sea, el que mejor se adapte a la forma del geoide: éste será el elipsoide que reduzca a un mínimo la suma de los cuadrados de las desviaciones relativas de la vertical. Pero estas desviaciones relativas, como ya hemos indicado, habrán de venir corregidas teniendo en cuenta la influencia que sobre la dirección de la vertical astronómica tienen las desviaciones locales definidas por la topografía del terreno en las proximidades de la estación, y, a su vez, estas desviaciones locales vienen directamente afectadas por la hipótesis admitida sobre la compensación isostásica y por la profundidad a que tenga lugar dicha compensación.

El problema tiene, pues, su dificultad. Se trata de resolver simultáneamente las siguientes cuestiones:

1.º Cuál de las dos hipótesis sobre la compensación isostásica (Pratt o Airy, o cualquier otra distinta de ellas) es la que mejor se adapta a los hechos que puedan observarse. Es de notar que las dos hipótesis de Pratt y Airy corresponden a dos casos límites, que seguramente no corresponderán con toda exactitud a la realidad. Más probable será, por ejemplo, la hipótesis de la compensación regional desarrollada por Vening-Meinez.

2.º Adoptada una hipótesis sobre la compensación isostásica, calcular la profundidad a que tiene lugar dicha compensación.

3.º Determinar, dentro de las condiciones anteriores, las dimensiones del elipsoide que mejor se adapte a la superficie terrestre.

Este problema fue resuelto por Hayford en 1909, determinando, mediante la resolución por el método de mínimos cuadrados de cinco sistemas de 765 ecuaciones con cinco incógnitas, las dimensiones de un elipsoide de referencia que fue adoptado por la Unión Geodésica como elipsoide internacional, en su Asamblea celebrada en Madrid en 1924, siendo de observar que ya en 1911 habían adoptado los astrónomos, en el Congreso Internacional de Efemérides astronómicas de París, el valor del aplanamiento del elipsoide dado por Hayford.

Este método de cálculo seguido por Hayford y preconizado por Helmert, llamado «método de las áreas», determina el elipsoide de referencia basándose en los resultados de la comparación de datos de observaciones astronómicas y operaciones geodésicas. Al igual que el de los arcos, es un nuevo método astronómico-geodésico de determinación de la forma y dimensiones del elipsoide terrestre.

Pero con él se determina, como ya hemos señalado, no el geoide, sino el elipsoide que más se le aproxima. Por otra parte, debemos observar que los datos geodésicos a que nos acabamos de referir se deducen de los datos directamente observados mediante el cálculo de la red, cálculo que ha de efectuarse sobre un cierto elipsoide. Resulta, pues, que el problema de la determinación del elipsoide terrestre va a resolverse por un procedimiento de aproximaciones sucesivas.

Aunque generalmente se admite como superficie de referencia un elipsoide de revolución, no han faltado geodestas que buscaran otras superficies menos sencillas. Así, Clarke (1858), estudió la posibilidad de representar la figura de la Tierra por una superficie de revolución cuyo meridiano no era una elipse sino otra línea más complicada. También se intentó adoptar elipsoides de tres ejes, como los propuestos por Schubert (1869) y Clarke (1866), pero con ello se complican extraordinariamente los cálculos sin obtener, en cambio, un aumento notable en la precisión, por lo que, en Geodesia matemática, se ha preferido adoptar como superficie de referencia el elipsoide de dos ejes, si bien en Gravimetría se considera uno de tres ejes.

Damos a continuación los valores obtenidos para los parámetros en algunos de los elipsoides calculados:

		<i>a</i>	1/ <i>a</i>
Comisión metro ... ..	1799	6.375.737 m	334,29
Delambre ... ..	1810	6.376.985 m	308,64
Walbeck... ..	1819	6.376.896 m	302,8
Everest ... ..	1830	6.377,276 m	300,80
Puissant... ..	1840	6.377,859 m	303,8
Bessel ... ..	1841	6.377,397 m	299,15
Struve ... ..	1860	6.378.297 m	294,73
Clarke ... ..	1866	6.378.208 m	294,98
Clarke ... ..	1878	6.378.199 m	293,15
Clarke ... ..	1880	6.378.301 m	293,47
Helmert... ..	1906	6.378,200 m	298,3
Hayford... ..	1909	6.378,388 m	297,00
Heiskanen ... ..	1929	6.378,400 m	298,2

			1/a
Jeffreys... ..	1948	6.378,099 m	297,10
Krassovsky... ..	1948	6.378,245 m	298,3
Hough ... ..	1959	6.378,270 m	297,00
Oxford ... ..	1959	6.378,201 m	297,65
Fischer... ..	1960	6.378,155 m	298,3
U. A. I. ... ..	1964	6.378,160 m	298,25

El último de los elipsoides aquí citados es el recomendado por la Unión Astronómica Internacional de acuerdo con el sistema de constantes astronómicas adoptado en la Asamblea General de dicha Unión celebrada en el mes de agosto de 1964 en Hamburgo. El valor del aplanamiento se obtuvo como resultado de las observaciones de satélites artificiales. En 1967 fue adoptado por la Unión Geodésica Internacional.

### 3. *Métodos gravimétricos.*

Además de las determinaciones del elipsoide terrestre apoyadas en los resultados de las triangulaciones y de las observaciones astronómicas para la determinación de las coordenadas geográficas, puede también llegarse al conocimiento del aplanamiento terrestre utilizando los valores de la aceleración de la gravedad suministrados por la Geodesia dinámica.

La Geodesia dinámica nos ofrece, en efecto, una serie de procedimientos para determinar el valor real de  $g$ , tanto en tierra con péndulos (determinaciones absolutas o relativas) o con diversos tipos de gravímetros, como en el mar, utilizando para ello algunos tipos de gravímetros y especialmente el aparato de Vening-Meinesz. Esta última posibilidad es de capital importancia por la gran extensión que cubren los mares y por ser la superficie de éstos, prácticamente una superficie equipotencial en el campo de la gravedad. Recientemente se han construido gravímetros que permiten determinar los valores de la aceleración de la gravedad desde aviones en vuelo.

La utilización de los valores de la aceleración de la gravedad obtenidos por observación para contribuir al conocimiento de la forma de la Tierra, es posible gracias a la fórmula obtenida por Clairaut (1743) en el supuesto de que la Tierra estuviera limitada por una superficie de nivel en el campo de la gravedad y que esa superficie

fuera además un esferoide de revolución de semiejes  $a$  y  $b$  y aplanamiento  $\alpha$ , y dotada de un movimiento de rotación de velocidad angular  $\omega$ . El valor de la aceleración de la gravedad sobre ese esferoide de nivel, la «gravedad normal», viene dada por la expresión

$$\gamma_{\varphi} = \gamma_0 (1 + \beta \operatorname{sen}^2 \varphi),$$

donde  $\varphi$  representa la latitud, y  $\gamma_0$  la gravedad en el ecuador. La constante  $\beta$  que aparece en la fórmula anterior (fórmula de Laplace) está relacionada con  $\alpha$  y  $\omega$  por la fórmula de Clairaut

$$\alpha + \beta = \frac{5}{2} \frac{\omega^2 a}{g_0}$$

Estas relaciones se verifican, cualquiera que sea la distribución de masas, en el interior del esferoide.

Determinados por observación los valores de  $\varphi$  y de  $\gamma_{\varphi}$  en una serie de puntos, y supuestos conocidos los valores de  $\omega$  y  $a$ , puede determinarse, resolviendo por mínimos cuadrados el sistema de ecuaciones obtenidas, el valor del aplanamiento terrestre  $\alpha$ . Pero, lo mismo que en las determinaciones de la vertical astronómica, es aquí necesario introducir una serie de correcciones en los valores experimentales de  $g$  a causa de la altitud, topografía, isostasia, etc., para pasar de los valores obtenidos en puntos de la superficie física de la Tierra a los valores que se habrían obtenido si las observaciones se hubieran efectuado en el geoide, que representa aquella superficie de nivel en la que sería válida la fórmula de la «gravedad normal».

La fórmula antes indicada que da el valor de la «gravedad normal», puede sustituirse por otras más precisas del tipo

$$\gamma_{\varphi} = \gamma_0 (1 + \beta \operatorname{sen}^2 \varphi + \beta_1 \operatorname{sen}^2 2\varphi + \dots)$$

obtenidas por Pizzetti, Somigliana, Cassini, etc., o mejor aún fórmulas diferenciales deducidas de ellas que permitirán determinar las correcciones a los parámetros ( $d\gamma_0$ ,  $d\beta$ ,  $d\beta_1$ ) y como consecuencia del aplanamiento  $d\alpha$ .

Así se han obtenido una serie de valores del aplanamiento, entre los que citaremos los siguientes:

Helmert (1908)...	1/298,2
Helmert (1915)...	1/296,7
Bowie (1917)...	1/297,4
Heiskanen (1928) ...	1/296,7
Heiskanen (1937) ...	1/297,4

Las más recientes determinaciones de la forma de la Tierra, se han hecho utilizando simultáneamente datos de triangulaciones y de gravimetría.

Heiskanen, utilizando datos tanto del continente europeo como de América del Norte, ha llegado a resultados muy próximos a los de Hayford.

Por otra parte, el territorio ruso está cubierto por una red de cadenas de meridiano y de paralelo en las que se han situado puntos Laplace a distancias de 70 a 100 kilómetros, y en las cuales se han determinado los valores de las desviaciones de la vertical utilizando datos gravimétricos llevados a fórmulas derivadas de la de Stokes. Utilizando datos de las triangulaciones de primer orden en Rusia (que abarcan una amplitud de 30° en latitud y 100° en longitud), Europa occidental y en los Estados Unidos, cubriendo en total una extensión de unos veinte millones de kilómetros cuadrados, ha calculado Isotoff (1948) el elipsoide que lleva el nombre de Krassowsky.

En general, los métodos astronómico-geodésicos (métodos de las áreas) permiten una buena determinación del semieje, mientras que el método gravimétrico da una mayor precisión en el cálculo del aplamamiento.

## B. DETERMINACION DEL GEOIDE

El segundo paso en el estudio de la forma de la Tierra es la determinación de la forma del geoide con relación al elipsoide previamente adoptado para representar, en primera aproximación, la figura de la Tierra.

Dos son los métodos que permiten resolver este problema.

1. Nivelación astronómica.
2. Fórmula de Stokes.

Ambos procedimientos presentan graves inconvenientes desde el punto de vista práctico, como veremos a continuación.

## 1. Nivelación astronómica.

El método es debido al geodesta alemán Helmert. Determinadas por observación astronómica las coordenadas geográficas de un vértice de una red geodésica, queda definida la dirección de la vertical astronómica en ese punto, que es la normal a la superficie de nivel que pasa por él. Supongamos, además, conocidas las coordenadas geodésicas de ese punto, calculadas sobre un determinado elipsoide de referencia (coordenadas que definen la dirección de la vertical geodésica que es la normal al elipsoide en el punto que hacemos corresponder al citado vértice geodésico). El ángulo formado por ambas verticales es lo que hemos llamado desviación de la vertical ( $\theta$ ), que es, evidentemente, igual al ángulo formado por los planos tangentes a la superficie de nivel y al elipsoide, y que, por definición, se anulará en el que hayamos adoptado como punto astronómico fundamental de la triangulación.

Conocida en un vértice cualquiera la componente de la desviación de la vertical ( $\theta_A$ ), según una dirección de acimut  $A$ , puede calcularse la diferencia de altitudes del geoide sobre el elipsoide en un punto situado en esa dirección y a la distancia  $K$ , que vendrá dada por la expresión  $K \cdot \theta_A$ . Definida, con una cierta arbitrariedad, la altitud del geoide sobre el elipsoide en el punto astronómico fundamental de la red, quedan definidas las altitudes sobre el elipsoide de referencia de los puntos del geoide.

La forma del geoide así obtenida es prácticamente independiente del elipsoide de referencia adoptado, salvo una traslación a causa de la altitud, un tanto arbitraria, adoptada en el punto astronómico fundamental. Pero el método en sí presenta una dificultad a causa del no paralelismo de las superficies de nivel en el campo de la gravedad, que hace que los resultados obtenidos no sean independientes de los itinerarios seguidos en las observaciones, y, si bien esas diferencias serán prácticamente despreciables si las zonas cubiertas son pequeñas, pueden no serlo si se cubren zonas extensas, de miles de kilómetros cuadrados. Por otra parte, es evidente que los resultados de la nivelación astronómica serán tanto más exactos cuanto más densa sea la red de puntos en los que se hayan hecho observaciones. Una distancia del orden de los 20 ó 25 kilómetros sería aconsejable en terreno no montañoso.

Observaciones de este tipo han sido efectuadas en Estados Unidos

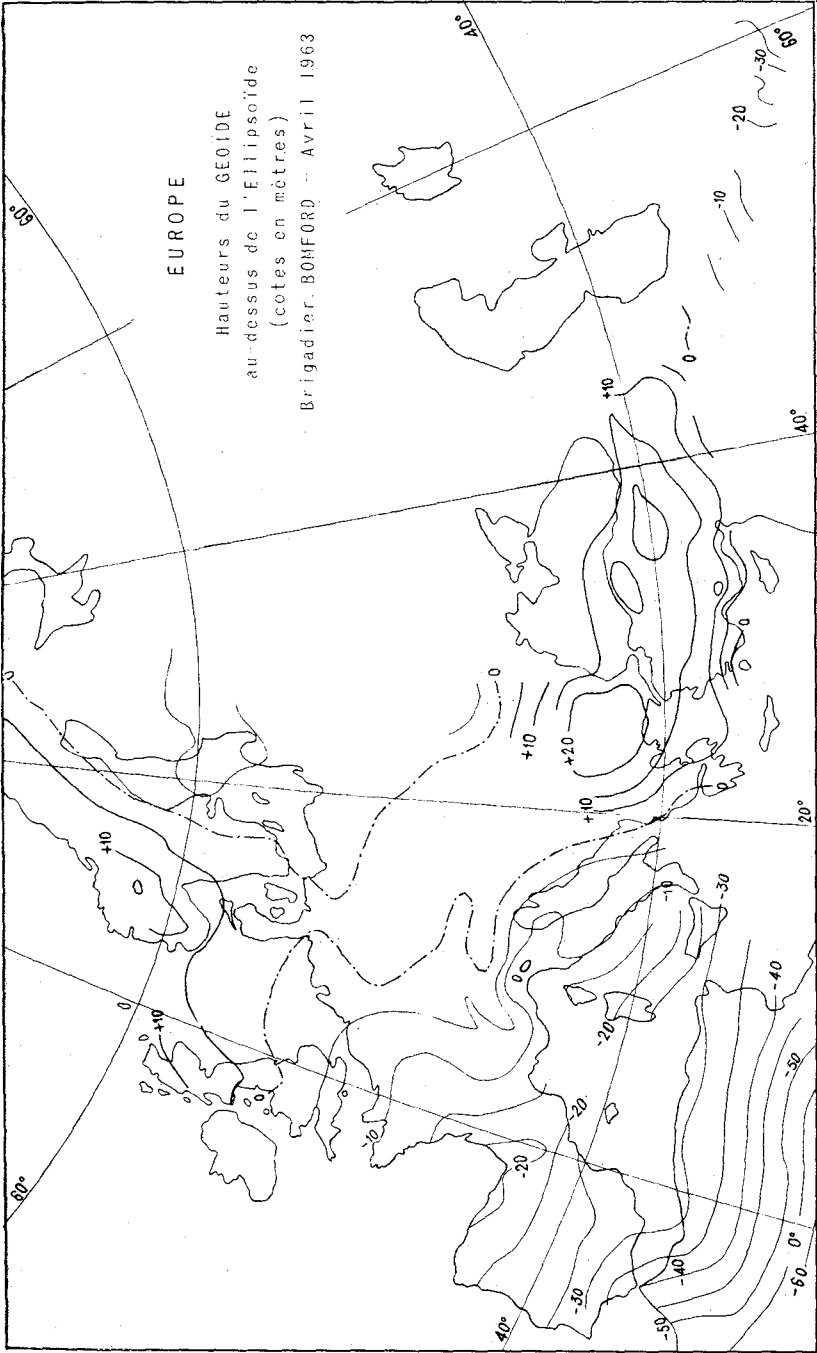


Fig. 1

por Hayford, en Suiza en las regiones de los Alpes y el Jura, en Alemania en la región del Harz, en Argentina, etc.

Efectuada la compensación de conjunto de las redes geodésicas de la Europa occidental (1950), Bomford ha obtenido (1963) un mapa con curvas de nivel del Geoide sobre el Elipsoide Internacional en Europa (fig. 1). Y algo análogo se ha hecho en la Unión Soviética y países adyacentes, si bien aquí el elipsoide de referencia ha sido el de Krassowsky.

## 2. *Fórmula de Stokes.*

Así como hemos llamado desviación relativa de la vertical al ángulo formado por las verticales astronómica y geodésica en un vértice de una red geodésica, se llama anomalía de la gravedad a la diferencia entre el valor de la aceleración de la gravedad en un punto del geoide de latitud  $\varphi$  y el correspondiente valor de la gravedad normal calculado sobre un determinado elipsoide. El valor de la gravedad en el geoide se obtendrá a partir del obtenido por observación, introduciendo las correcciones correspondientes para reducirlo al geoide.

Stokes (1849) obtuvo una expresión que da la altitud  $N$  de un punto de geoide sobre el elipsoide de referencia

$$N = \frac{1}{4\pi g R} \iint \Delta g f(\psi) ds$$

extendida la integral a toda la superficie del elipsoide. En esta expresión,  $g$  y  $R$  representan los valores medios de la gravedad y del radio de curvatura del geoide;  $\Delta g$  la anomalía de la gravedad;  $f(\psi)$  es la llamada función de Stokes.

$$f(\psi) = 1 + \operatorname{cosec} \frac{1}{2} \psi - 5 \cos \psi - 6 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \psi - 3 \cos \psi \log e [\operatorname{sen} \frac{1}{2} \psi (1 - \operatorname{sen} \frac{1}{2} \psi)],$$

siendo  $\psi$  la distancia angular del punto a que se refiere la altitud calculada  $N$  a los elementos del geoide a que corresponde la anomalía  $\Delta g$ , y  $ds$  representa el elemento de superficie. Para que pueda aplicarse la fórmula de Stokes es necesario que el elipsoide de referencia y el geoide tengan el mismo centro, y sus ejes de revolución coincidan, que el elipsoide y el geoide tengan la misma masa y volumen, y que toda la masa terrestre sea interior al geoide. Y, naturalmente, que sea conocido el valor de  $g$  en puntos distribuidos



por todo el geoide. Por otra parte, en rigor la fórmula se obtiene no para un elipsoide de referencia, sino para una esfera, pero el error que se comete al extenderla al caso de un elipsoide de revolución es del orden de  $N \cdot \alpha$ , realmente despreciable.

Pero la dificultad principal está en que la aplicación de la fórmula de Stokes supone conocido el valor de la anomalía de la gravedad, y por lo tanto, el valor real de la gravedad en toda la superficie terrestre. De aquí la necesidad de extender a toda la Tierra, incluso a las zonas cubiertas por los océanos, la determinación del valor de la aceleración de la gravedad.

La aplicación de los métodos de determinación de la gravedad en el mar y más modernamente la utilización de gravímetros desde aviones, ha aumentado considerablemente en los últimos años la información sobre valores de  $g$  en todo el mundo.

En 1934 Hirvonen aplicó por primera vez la fórmula de Stokes para determinar las ondulaciones del Geoide. Con mucha más información, Heiskanen ha podido emprender la tarea de formar un mapa del Geoide utilizando más de once mil valores de  $g$  distribuidos en ambos hemisferios, si bien con un notable predominio en el norte.

El estudio de la forma del geoide por el método gravimétrico puede completarse determinando las variaciones de su curvatura a lo largo de su superficie. Ello es, efectivamente, posible gracias a las fórmulas obtenidas por Vening-Meinesz (1928), que dan los valores de las componentes de la desviación absoluta de la vertical en el meridiano y en el primer vertical.

$$\xi = \frac{1}{4\pi g R} \int \Delta g f'(\psi) \cos A \, ds$$

$$\eta = \frac{1}{4\pi g R} \int \Delta g f''(\psi) \operatorname{sen} A \, ds,$$

donde  $f'(\psi)$  es la derivada de la función de Stokes con relación a  $\psi$ , y  $A$  el acimut del elemento  $ds$  visto desde el punto considerado.

\* \* \*

Resulta así, que tanto las altitudes de los puntos del geoide sobre el elipsoide, como las desviaciones de la vertical en los vértices geodésicos en los que se hayan efectuado observaciones astronómicas, pueden determinarse por los dos procedimientos considerados: por

nivelación astronómica y por cálculo geodésico, o utilizando las fórmulas de Stokes y Vening-Meinesz. Pero los valores así obtenidos no coincidirán en general. El primer método, astronómico-geodésico, da valores relativos que dependen de los parámetros y de la posición del elipsoide adoptado (del punto astronómico fundamental y del valor adoptado para la desviación topográfica de la vertical en él), mientras que los valores obtenidos a partir de las anomalías de la gravedad son absolutos (o casi absolutos) en el sentido de estar referidos a un elipsoide cuyo centro coincide con el de gravedad de la Tierra, y cuyo eje de revolución es paralelo al de rotación de aquélla, y sólo dependen indirectamente del elipsoide adoptado a través de la fórmula utilizada para el cálculo de la gravedad normal.

La fórmula de Stokes nos permite, por lo tanto, conocer la forma del geoide en general, es decir, en toda su extensión, fijando las posiciones de una serie de puntos con relación al centro de gravedad de la Tierra, pero la precisión de estas determinaciones depende de la densidad de determinaciones de valores de la gravedad. El efecto del campo gravitatorio en puntos alejados es menor en la determinación de las desviaciones de la vertical que en el de las ondulaciones del geoide. Según Heiskanen, con el material disponible en 1955 puede llegarse a una precisión del orden de los 5 a 10 metros en estas últimas, y de 0",5 en las componentes de la desviación de la vertical. En cambio, la nivelación astronómica nos permite conocer con mayor detalle y precisión las ondulaciones del geoide en zonas continentales y generalmente reducidas, y determinando las altitudes con relación a un elipsoide local. Ambos procedimientos pueden, pues, complementarse, encajando las determinaciones locales de la nivelación astronómica en los resultados más generales suministrados por la aplicación de la fórmula de Stokes.

Fórmulas más rigurosas que las de Stokes, y más complicadas en su aplicación, han sido obtenidas por Molodensky, a las que más adelante nos referiremos.

Nuevos mapas con curvas de nivel del geoide han sido obtenidos recientemente por Fischer, Slutsky, Shirley y Wyatt, utilizando toda la información disponible, incluida la lograda con observaciones de satélites artificiales.

### C. DETERMINACION DE LA POSICION DE PUNTOS DE LA SUPERFICIE TERRESTRE

El último paso en la determinación de la forma de la Tierra en la Geodesia clásica consiste en determinar la posición de una serie de puntos de la superficie terrestre. Y esta posición suele fijarse por tres coordenadas: longitud, latitud y altitud, pero determinando por una parte las coordenadas geográficas latitud y longitud, y por separado la altitud.

Las coordenadas geográficas, longitud y latitud, pueden obtenerse por observación astronómica (coordenadas astronómicas), o por cálculo sobre un determinado elipsoide adoptado como superficie de referencia (coordenadas geodésicas).

La precisión lograda en la determinación astronómica de una latitud es del orden de la décima y en la longitud de las tres décimas de segundo de arco. Teniendo en cuenta que sobre la superficie terrestre un arco de un segundo equivale a unos treinta metros, resulta que la determinación de la posición de un punto en la superficie terrestre mediante observaciones astronómicas, largas y delicadas, se logra con una indeterminación de varios metros.

La fijación de un punto mediante sus coordenadas geodésicas se hace mediante la observación, cálculo y compensación de una red geodésica que permite pasar posteriormente al cálculo de coordenadas.

La observación consiste en la medida de varias bases y la medida de los ángulos de una serie de triángulos, la determinación astronómica del acimut, de un lado, así como otra serie de observaciones astronómicas complementarias (longitud, latitud, acimut), en los llamados puntos Laplace. El cálculo de la triangulación y su compensación, así como el posterior cálculo de coordenadas, se hace sobre un elipsoide definido por unos valores de sus parámetros ( $a$  y  $\alpha$ ) y por las condiciones de ser su eje de revolución paralelo al de rotación de la Tierra y ser además tangente al geoide en uno de los vértices de la triangulación, elegido como punto astronómico fundamental de la red. El cálculo de coordenadas sobre el mismo elipsoide (longitud y latitud geodésicas) permitirá fijar la posición del punto con una precisión del orden de los 4 ó 5 metros. Estas coordenadas geodésicas no coincidirán en general con las coordenadas astronómicas, corregidas éstas por topografía, isostasia, etc. La diferencia es la desvia-

ción relativa de la vertical de que ya hemos hablado, que, con una acertada elección del elipsoide de referencia y de la posición del punto fundamental, no suele pasar de unos pocos segundos de arco.

Dos son, prescindiendo de la nivelación barométrica, los métodos utilizados en la determinación de altitudes: la nivelación trigonométrica o geodésica, y la nivelación geométrica o de precisión.

La nivelación trigonométrica determina las altitudes utilizando ángulos cenitales en lugar de los acimutales utilizados para el cálculo de longitudes y latitudes. Los ángulos cenitales vienen fuertemente afectados por las desviaciones topográficas de la vertical y por el efecto de la refracción astronómica, que mientras en los ángulos acimutales puede alcanzar, en las triangulaciones de primer orden, valores del orden del segundo de arco, en las distancias cenitales puede llegar al medio grado, es decir, unas mil ochocientas veces superior. Esta grave dificultad puede salvarse recurriendo a la nivelación geométrica, en la que se elimina el error de refracción al ir obteniendo diferencias de altitudes como diferencia de lecturas en dos miras, cuyas lecturas son afectadas prácticamente de la misma manera por la refracción. El método resulta, desde luego, mucho más preciso, pero es sumamente lento y en algunos casos de imposible aplicación, como en el caso de terreno montañoso. Mientras la nivelación trigonométrica sólo fija las altitudes con una precisión de varios décimetros, la nivelación geométrica puede llegar a fijarla con sólo unos centímetros de error.

Otra anomalía se deriva del hecho de que mientras las coordenadas geodésicas fijan la posición de un punto con relación al elipsoide, las altitudes se refieren al geoide.

Pero la cosa se complica cuando lo que pretendemos es conocer, no diferencias de altitud, sino el valor de la altitud de un punto, es decir, su distancia al geoide. En efecto, la propia nivelación geométrica de precisión nos llevará a valores distintos para la altitud sobre el nivel del mar de un punto determinado, si partimos de éste en dos orígenes distintos. Y el problema se complica aún más por la circunstancia de no ser paralelas las superficies equipotenciales en el campo de la gravedad, con lo que el valor de la diferencia de altitudes entre dos puntos determinados dependerá del itinerario seguido en la nivelación. Esto ha llevado a introducir los conceptos de nivelación ortométrica y nivelación dinámica.

Un punto puede así quedar definido por su distancia (en metros)

al geoide, cota ortométrica, o por la llamada cota geopotencial definida por la expresión

$$H = \frac{1}{\gamma^m} W(A).$$

donde  $W(A)$  es un valor del potencial de la gravedad en el punto considerado, determinado por la forma

$$W(A) = \sum_0^A g_i d h_i,$$

siendo  $d h_i$  los valores de las diferencias de nivel determinadas por la nivelación geométrica, y  $g_i$  los valores de la aceleración de la gravedad a lo largo del itinerario así definido, pero estos valores de  $g_i$  no pueden determinarse por observación en el interior de la Tierra. Las fórmulas de reducción de Poincaré y Prey permiten obtener estos valores a partir de las medidas en superficie.

Pero todas estas altitudes se refieren siempre al geoide, y aunque la altitud de un punto sobre el geoide puede así determinarse con una aproximación de unos cuantos centímetros, su distancia al centro de gravedad de la Tierra sólo puede ser conocida con un error que puede llegar a ser superior al centenar de metros.

#### *Método de Molodensky.*

Acabamos de ver el camino seguido en la geodesia clásica para fijar la posición de un punto de la superficie terrestre fijando su situación con relación al geoide y la del geoide con relación al elipsoide de referencia. Las coordenadas geodésicas del punto considerado se obtienen a partir de unas coordenadas astronómicas que han de corregirse por la desviación de la vertical ( $\xi, \eta$ ) y la altitud, sobre el elipsoide como suma de la altitud sobre el geoide y la cota del geoide sobre el elipsoide. En ambos casos, para efectuar los cálculos correspondientes, es necesario conocer el valor verdadero de la gravedad en el interior de la Tierra, donde no pueden efectuarse observaciones, o introducir hipótesis sobre la variación allí de la densidad. Para salvar estas dificultades, Molodensky ha propuesto una solución que simplifica el problema, si bien a costa de complicar los cálculos. Prescinde del geoide, pero introduce el «teluroide», haciendo corresponder al punto A de la superficie terres-

tre un punto B situado sobre la normal desde A al elipsoide, de forma que el potencial normal  $U$  en B sea igual al potencial real  $W$  de la gravedad en A. El lugar de los puntos B es el «teluroide». La distancia sobre la normal al elipsoide entre esta superficie y el teluroide es la «altitud normal», y la distancia, sobre la misma normal, entre el teluroide y la superficie terrestre es la «anomalía de la altitud».

La altitud normal se calcula en función de la cota geopotencial corregida en función del valor real de la gravedad y la anomalía de la altitud en función del potencial perturbador ( $T = W - U$ ) y el valor normal de la gravedad. La fórmula para el cálculo de esta anomalía en función de las anomalías de la gravedad puede en cierto modo considerarse como una generalización de la fórmula de Stokes, ciertamente más complicada que ésta. Análogamente obtiene Molodensky expresiones para el cálculo de las desviaciones de la vertical que sustituyen a las de Vening-Meinesz.

## II. Métodos astronómicos en la determinación de la forma y dimensiones de la Tierra

La Astronomía, y más concretamente la Mecánica celeste, nos facilita una serie de posibilidades de determinar la forma y dimensiones de la Tierra estudiando el movimiento de la Luna alrededor de nuestro planeta. En efecto, la Luna se mueve dentro del campo gravitatorio terrestre (perturbado por la atracción debida a la gran masa solar), y como el campo gravitatorio terrestre queda determinado por las características (masa, dimensiones y forma) de la Tierra, es evidente que el movimiento de la Luna dependerá de estas características y su observación nos permitirá efectivamente conocer la forma y las dimensiones de la Tierra.

Los geodestas desde tiempos de Clairaut (1750), suelen representar el potencial gravitatorio terrestre por la expresión

$$W = G \frac{M}{r} \left[ 1 + \frac{C - A}{2 M a^2} (1 - 3 \operatorname{sen}^2 \psi) \right] + \frac{\omega^2 a^2}{2} \cos^2 \psi \quad [1]$$

en la que  $G$  representa la constante de la gravitación,  $M$  la masa terrestre,  $a$  el radio ecuatorial de la Tierra,  $A$  y  $C$  son los momentos principales de inercia (supuesta la Tierra de revolución),  $\omega$  su velocidad de rotación y  $r, \psi$  la distancia al centro y la latitud del punto considerado.

Evidentemente, si la Tierra fuera un esfera homogénea, sería

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ C - A &= 0 \end{aligned}$$

y la expresión del potencial quedará reducida al potencial gravitatorio  $V = \frac{G M}{r}$  y desaparecería el segundo término de la expresión anterior. Pero si la Tierra no es esférica, o lo que es lo mismo,

si el aplanamiento  $\alpha$  no es cero, aquel segundo término en la expresión del potencial se mantendrá. Y como el movimiento de la Luna tiene lugar en el campo gravitatorio terrestre y este campo gravitatorio queda definido por la forma del potencial, es evidente que el movimiento de la Luna va a depender del valor del término en

$$\frac{C - A}{2 M a^2} = J_2.$$

Efectivamente, la teoría de la Luna nos demuestra la existencia de perturbaciones seculares y periódicas en el movimiento de nuestro satélite, y en las expresiones analíticas de estas perturbaciones aparece, como es natural, el coeficiente  $J_2$ .

Tissérand obtuvo, en efecto, las expresiones de las perturbaciones en longitud y latitud de la Luna:

$$\Delta \lambda = 6.540'' \frac{C - A}{M a^2} \text{sen } \Omega$$

$$\Delta \beta = -7.439'' \frac{C - A}{M a^2} \text{sen } \zeta$$

en las que  $\Omega$  representa la longitud del nodo y  $\zeta$  la longitud de la Luna. Determinados por observación los valores numéricos de estas desigualdades, puede calcularse el valor del coeficiente  $J_2$ . Por otra parte, Clairaut demostró que este coeficiente  $J_2$  está relacionado con el aplanamiento  $\alpha$  por la expresión

$$\alpha(1 + \alpha) = \frac{3}{2} J_2 \left[ 1 + 2\alpha + \frac{\omega^2 a}{2g_0} \right] + \frac{\omega^2 a}{g_0} \left( 1 - \frac{\omega^2 a}{g_0} \right)$$

( $g_0$  es la gravedad en el ecuador). El valor del aplanamiento queda así determinado, pero la precisión no es grande por la dificultad de separar en la observación las perturbaciones a que nos hemos referido de las debidas a otras causas. Mayor precisión se logra apoyándose en las perturbaciones seculares, cuyo efecto se acumula a lo largo del tiempo y que afectan principalmente a la posición del nodo y del perigeo lunares, en forma de sendos movimientos, retrógrado el primero y directo el segundo, cuyas magnitudes son proporcionales a  $J_2$ . Pero al intentar determinar el valor de  $J_2$  y como consecuencia el



de  $\alpha$ , a partir de estas perturbaciones, nos encontramos con serias dificultades al tratar de separar en los movimientos del nodo y del perigeo lunares la parte debida al Sol (que es la principal), de la debida a la forma de la Tierra. Pero además, la Luna no es esférica y no conocemos sino aproximadamente su forma, su masa y sus dimensiones. Todas estas circunstancias complican el problema, que resulta de una dificultad extrema por ser muchos los factores que intervienen y de cuya magnitud tenemos sólo una idea aproximada.

Al ir mejorando los valores de las distintas correcciones debidas a las causas que hemos citado, tiende a establecerse la coincidencia entre los valores deducidos por estos métodos con los obtenidos por otros procedimientos.

También, la observación de nuestro satélite nos permite determinar el valor del radio ecuatorial de la Tierra en función de la paralaje de la Luna.

Cuando Newton intuyó su ley de la gravitación universal, buscó la comprobación en suponer que esta gravitación que se manifiesta en la superficie terrestre era la misma fuerza que obligaba a la Luna a describir una órbita alrededor de la Tierra. Pues dando ahora por supuesto que esto es así, la tercera ley de Kepler, consecuencia inmediata de la ley de Newton, puede escribirse así:

$$\left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 R^3 = G(M + m),$$

siendo  $T$  la duración del mes sidéreo,  $R$  la distancia media Tierra-Luna, y  $m$  la masa de la Luna. Pero la constante de la gravitación universal, la misma sobre la superficie terrestre que a la distancia de la Luna, está relacionada con el valor del radio ecuatorial terrestre  $a$ , con la velocidad de rotación  $\omega$  y con los valores de la aceleración de la gravedad en el ecuador y en el polo, por la expresión

$$G = \frac{g_0 a^2}{M \left( 1 + \frac{\omega^2 a}{g_0} - \frac{g_{90} - g_0}{g_0} \right)}$$

Sustituyendo este valor de  $G$  en la expresión anterior, se llega a

$$a = \frac{g_0 \left( 1 + \frac{m}{M} \right) T^2}{4\pi^2 \left( 1 + \frac{\omega^2 a}{g_0} - \frac{g_{90} - g_0}{g_0} \right)} \left( \frac{a}{R} \right)^3$$

pero el cociente  $a/R$  que aparece como último factor es el seno de la paralaje lunar

$$\text{sen } p = \frac{a}{R}$$

Determinado por observación el valor de esta paralaje lunar quedan conocidas todas las cantidades que aparecen en el segundo miembro y por lo tanto puede así calcularse el valor de  $a$ .

Son varias las determinaciones de la paralaje lunar efectuadas a lo largo de los siglos. En 1753 se efectuaron observaciones en Europa con este fin, combinadas con las de Lacaille en el cabo de Buena Esperanza. En 1832 se repitieron las observaciones en El Cabo y Greenwich, y más tarde de 1906 a 1910.

Pero estas determinaciones de la paralaje lunar vienen afectadas por el efecto de la desviación de la vertical y la compensación isostática, y por el valor adoptado para el aplanamiento terrestre. La introducción de valores convenientes para estas correcciones ha permitido llegar a valores del aplanamiento que se aproximan al obtenido por Hayford. Por otra parte, las posibilidades actuales de determinación directa de la distancia de la Luna utilizando el radar, permite conocer inmediatamente el valor del semieje ecuatorial  $a$ .

Pero así como la no esfericidad de la Tierra perturba el movimiento de la Luna, la atracción de la Luna (y del Sol y los planetas) sobre el abultamiento ecuatorial de la Tierra da lugar a la aparición de los fenómenos de precesión y nutación. Y la magnitud de estos fenómenos es evidentemente función de la forma, o sea, del aplanamiento terrestre. En efecto, Poincaré ha obtenido la relación:

$$866.135 \frac{m}{1+m} + 4.870,05 = p \frac{H}{1 + \frac{2}{3} H}$$

en la que  $m$  es la masa de la Luna tomando como unidad la del Sol,  $p$  la constante de la precesión y  $H$  es el cociente

$$H = \frac{C - A}{C}$$

Partiendo del valor de  $H$  puede calcularse el valor del aplanamiento  $\alpha$ , y así lo han hecho Clairaut y D'Alembert, Poincaré, Véronnet, De Sitter, etc.

En el caso de las perturbaciones en el movimiento de la Luna, el coeficiente que se utilizaba para determinar el valor de  $\alpha$  era

$$J_2 = \frac{C - A}{M a^2}$$

mientras que a partir de la precesión, se utiliza el

$$H = \frac{C - A}{C}$$

y en este caso no es posible pasar de H al valor de  $\alpha$  sin introducir hipótesis complementarias sobre la ley de variación de densidades en el interior de la Tierra, supuesta en equilibrio hidrostático. Así obtuvo Radau para el aplanamiento terrestre el valor  $\alpha = 1/296,7$ , y recientemente Bullard, por el mismo método, ha obtenido  $\alpha = 1/297,34$ .

### III. Nuevas orientaciones de la Geodesia

Acabamos de ver cómo se trata de llegar en la Geodesia clásica al conocimiento de la forma de la Tierra, determinando: *a*) un elipsoide como figura aproximada de la Tierra; *b*) el geoide, a partir del elipsoide anterior, y *c*) la posición de los puntos de la superficie terrestre con relación al geoide. Esta última determinación de la posición de un punto de la superficie terrestre se fija determinando por una parte, las coordenadas geográficas (longitud y latitud) y por otra, su altitud.

Tanto en las observaciones como en las reducciones y utilización de las mismas se presentan una serie de situaciones equívocas sobre las que conviene insistir brevemente.

Las observaciones angulares en la Geodesia clásica se efectúan con un teodolito cuya puesta en estación queda definida por la dirección de la vertical del lugar. Pero esta vertical no es sino la tangente a la línea de fuerza del campo de la gravedad que pasa por el lugar de observación y estas líneas de fuerza son líneas alabeadas, causa del no paralelismo de las superficies de nivel, y están además perturbadas por la topografía y la isostasia en forma además prácticamente imposible de calcular.

El cálculo de una red geodésica se hace sobre un elipsoide de revolución a partir de las observaciones geodésicas de ángulos y bases que definen la red que se ha de calcular y compensar. Pero si bien estos cálculos se hacen sobre el elipsoide, las bases se miden sobre la superficie física de la Tierra y son reducidas al nivel del mar, al geoide, no al elipsoide, puesto que no se conoce la altitud de la base medida sobre el elipsoide, con lo que se introduce ya de partida un error que ha de arrastrarse en todo el cálculo posterior de la red y de las coordenadas geodésicas. En cuanto a los ángulos horizontales medidos con el teodolito, son ángulos formados por pares de planos que contienen la normal astronómica en el vértice en que

se hace la observación, recta que no es normal al geoide ni al elipsoide en que se efectúan los cálculos. Y los vértices sobre los que se dirigen las visuales no están tampoco en el geoide ni en el elipsoide. Es pues necesario, teóricamente al menos, introducir en estos ángulos observados una serie de correcciones debidas a las desviaciones topográficas e isostáticas de la vertical, a la altura del vértice estación y del vértice observado sobre el nivel del mar, a la aberración terrestre, etc. Y los valores de los elementos que definen estas correcciones sólo son conocidos aproximadamente. Pero, además, aun suponiendo que los ángulos observados fueran ángulos formados por planos normales al elipsoide, resulta que estas secciones normales no definen un triángulo en el elipsoide, puesto que los planos de dos secciones normales (directa y recíproca) entre dos puntos del elipsoide no coinciden, ya que las normales en ambos puntos del elipsoide se cruzan en el espacio. Esta dificultad se ha salvado definiendo los triángulos por las líneas geodésicas que pasan por cada par de vértices en el elipsoide, lo que exige la introducción de una nueva corrección para pasar del ángulo formado por dos secciones normales al elipsoide, al formado por las líneas geodésicas correspondientes.

Aunque teóricamente el cálculo de triángulos podría hacerse directamente sobre el elipsoide, en la práctica y buscando una mayor sencillez en los cálculos, nuevas fórmulas de reducción permiten pasar el triángulo geodésico sobre el elipsoide a un triángulo esférico (teorema de Gauss) sobre la «esfera local», y de éste a un triángulo plano (teorema de Legendre, o su generalización según la longitud de los lados).

Los errores de observación en una red geodésica obligan a efectuar observaciones superabundantes, tanto de ángulos como de bases, y a la introducción de observaciones astronómicas en los llamados puntos Laplace, que se llevarán posteriormente a la compensación de la red geodésica.

El cálculo de coordenadas que sigue al de la triangulación y a su compensación, se efectúa a partir de las observaciones de latitud, longitud y acimut en el punto astronómico fundamental de la red y de los resultados de la red calculada y compensada, utilizando desarrollos en serie más o menos complicados obtenidos partiendo de las ecuaciones de la línea geodésica sobre el elipsoide, desarrollos cuya utilización no es lícita en el caso de grandes distancias. Este inconveniente puede hoy salvarse gracias al empleo de calculadoras que utilizan,

no los desarrollos en serie, sino las propias fórmulas rigurosas, recurriendo, en caso contrario, a un proceso de iteración.

Por otra parte, es conveniente recordar que el cálculo de coordenadas se hace sobre un elipsoide cuya posición depende de la situación del que haya sido elegido como punto astronómico fundamental de la red, con lo que los sistemas geodésicos de los distintos países no quedan relacionados entre sí. La compensación de conjunto de las redes geodésicas de la Europa occidental ha permitido referir a un sistema geodésico único las posiciones de todos los vértices geodésicos de estas redes europeas. Cabe la posibilidad de enlazar estas redes por los métodos de la Geodesia clásica con las de la Unión Soviética y, a través de ellas, con las de Asia. Las redes europeas están también enlazadas con las del continente africano. Pero nunca será posible con los métodos clásicos el enlace con el sistema geodésico americano.

En el cálculo de altitudes el camino seguido en la Geodesia clásica es muy distinto. Se determina primero la posición del geoide con relación al elipsoide (nivelación astronómica o fórmula de Stokes), y luego se fija la posición de los puntos de la superficie terrestre con relación al geoide.

En la nivelación astronómica se compara la dirección de la vertical astronómica en un punto de la superficie terrestre con la normal al elipsoide en el punto que en esta superficie se ha hecho corresponder a aquél. Pero a causa de la ya citada curvatura de las líneas de fuerza en el campo de la gravedad, aquella vertical astronómica no es normal al geoide (su curvatura puede llegar a ser de varios segundos), y está además perturbada por la desigual distribución de masas en el interior, por lo que la superficie que se obtiene a partir de la nivelación astronómica no es en realidad el geoide, sino sólo una superficie próxima a él.

En cuanto a la fórmula de Stokes para calcular las distancias de los puntos del geoide al elipsoide, y las de Vening-Meinesz para el cálculo de las desviaciones de la vertical, su aplicación exige el conocimiento del valor real de la gravedad en puntos del geoide distribuidos por toda la superficie del mismo. Pero las determinaciones del valor de la aceleración de la gravedad no se hacen en puntos del geoide, sino sobre la superficie física de la Tierra, siendo, pues, necesario pasar estos valores a aquéllos mediante correcciones que exigen el conocimiento de la distribución de masas en la corteza y la

ley de distribución isostática. Estas distribuciones son sólo conocidas aproximadamente en la corteza exterior y adivinadas en las capas más profundas. Por otra parte, la fórmula de Stokes supone que toda la masa terrestre es interior al geoide, lo que realmente no ocurre, siendo necesaria la introducción de nuevas correcciones para poder suponer transportados al interior del geoide las masas que en realidad son exteriores al mismo. Este transporte de masas modifica el campo gravitatorio, y por lo tanto la forma del propio geoide, que se reemplaza por lo que se ha llamado el co-geoide, cuya posición con relación al geoide será necesario determinar. Estas correcciones son también un tanto inciertas. Pero además es evidente que no se conoce el valor de la gravedad sobre toda la superficie terrestre, lo que hace teóricamente inaplicable la fórmula de Stokes, o al menos que los valores con ella calculados no puedan ser exactos. Afortunadamente esta situación mejorará extraordinariamente gracias a las posibilidades de los nuevos métodos de determinación de la gravedad desde el aire.

El segundo paso para la fijación de la altitud de un punto de la superficie terrestre lo constituye la determinación de su cota sobre el geoide. Esta cota, podría obtenerse utilizando los ángulos cenitales obtenidos en las observaciones geodésicas, pero como ya hemos indicado, estos ángulos vienen afectados por las desviaciones de la vertical y por la refracción astronómica, pudiendo llegar el error debido a esta última causa a valores del orden del medio grado, frente a errores de 1" en los ángulos acimutales.

Por estas razones las cotas utilizadas son obtenidas por el método más preciso de nivelación geométrica. Pero a causa del ya repetidamente citado no paralelismo de las superficies equipotenciales, han de ser reducidas a «cotas ortométricas», para lo cual sería nuevamente necesario conocer los valores reales de la gravedad en el interior de la Tierra. El cálculo se efectúa utilizando valores determinados en la superficie a lo largo de los itinerarios seguidos en la nivelación. La introducción de los modernos tipos de gravímetros facilita estas determinaciones, pero quedan aún errores en el cálculo imposibles de evitar.

Si bien la situación actual en las condiciones que acabamos de resumir es aceptable desde el punto de vista de las necesidades de la cartografía, en que se trata de representar zonas más o menos extensas de la superficie terrestre, conociendo la posición relativa de los puntos de la superficie en esa zona, no lo es si lo que se pre-

tende es abarcar grandes zonas y tratar de llegar a conocer la misma posición relativa de puntos situados a grandes distancias, puesto que, los errores pueden llegar a alcanzar valores inadmisibles, y puesto que los respectivos sistemas geodésicos no están relacionados entre sí.

### LA GEODESIA TRIDIMENSIONAL

Todas las circunstancias que acabamos de señalar han preparado el camino para dejar paso a una nueva concepción de la Geodesia: la *Geodesia tridimensional* que, unida a nuevos métodos e instrumentos de observación y a las posibilidades de las modernas calculadoras, pueden cambiar por completo la orientación futura de la Geodesia, abandonando los métodos clásicos de cálculo sobre una superficie para pasar al estudio directo de todos los problemas geodésicos en un espacio cartesiano de tres dimensiones.

La idea de la Geodesia tridimensional fue expuesta por Bruns en 1878, pero su verdadero desarrollo ha sido iniciado en 1957 por el Brigadier Hotine. Consiste en fijar la posición de un punto de la superficie terrestre por sus coordenadas cartesianas en un sistema único, fijo con relación a la superficie terrestre y cuyo eje queda definido por la dirección del eje de rotación de la Tierra. Todos los cálculos pueden hacerse directamente en coordenadas cartesianas, sin necesidad de recurrir al elipsoide ni al geoide, que son innecesarios. Las observaciones acimutales y cenitales se utilizan aquí conjuntamente, y, lo que es más importante, puede irse a la unificación de las dos ramas de la Geodesia clásica, la Geodesia matemática y la Geodesia dinámica, apoyándose en las propiedades geométricas y dinámicas del movimiento de los satélites artificiales referido al centro de gravedad de la Tierra.

El sistema de ejes cartesianos debería estar centrado en el centro de gravedad de la Tierra, cuya posición, de momento, no conocemos, pero que más adelante podremos determinar observando satélites artificiales. Adoptemos, pues, un triedro trirrectangular directo con el origen de coordenadas próximo al centro de gravedad de la Tierra, el eje Z paralelo al de rotación terrestre en un cierto instante, y el eje X lo situaremos en el meridiano de Greenwich. Cada punto de la superficie topográfica de la Tierra tendrá en este sistema de ejes unas coordenadas (X, Y, Z) perfectamente determinadas en cuanto fijemos la posición del que adoptemos como origen de coordenadas. Y esto



podrá hacerse, como en la Geodesia clásica, adoptando un punto astronómico fundamental ( $V_0$ ), cuya altitud ( $H_0$ ) y coordenadas astronómicas, determinadas por observación ( $\lambda'_0, \varphi'_0$ ) y cuyas coordenadas cartesianas rectangulares ( $X_0, Y_0, Z_0$ ) definiremos, también como en la Geodesia clásica, con una cierta arbitrariedad, tratando de que al definir las, el origen de coordenadas coincida con la mayor aproximación posible con el centro de gravedad de la Tierra.

Si  $V_1$  es un nuevo vértice de la triangulación, cuya distancia al  $V_0$  suponemos conocida (a partir de una medida directa o de una base geodésica medida) y cuyo acimut  $A_{01}$  y altura  $h_{01}$  (o distancia cenital) suponemos observadas, queda perfectamente definida la posición de este segundo punto  $V_1$  y conocidas sus coordenadas rectangulares ( $X_1, Y_1, Z_1$ ). El cálculo de estas coordenadas puede hacerse directamente en el espacio sin necesidad de pasar por ninguna superficie (elipsoide, geocide) intermediaria. Como las observaciones utilizadas en Geodesia dan, efectivamente, coordenadas horizontales (acimut  $A$  y altura  $h$ ) y distancia ( $\sigma$ ), adopta Hotine un nuevo sistema de coordenadas locales (horizontales topocéntricas) con origen en el lugar de observación, eje  $\zeta$  coincidente con la vertical astronómica y el eje  $\xi$  en el meridiano. Las coordenadas del vértice  $V_1$  en este sistema local son:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \sigma_{01} \cos h_{01} \cos A_{01} \\ \eta_1 &= \sigma_{01} \cos h_{01} \operatorname{sen} A_{01} \\ \zeta_1 &= \sigma_{01} \operatorname{sen} h_{01}\end{aligned}$$

y en el sistema de coordenadas terrestres ( $X_1, Y_1, Z_1$ ).

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} \lambda' & -\operatorname{sen} \varphi' \operatorname{sen} \lambda' & \cos \varphi' \cos \lambda' \\ \cos \lambda' & -\operatorname{sen} \varphi' \operatorname{sen} \lambda' & \cos \varphi' \operatorname{sen} \lambda' \\ 0 & \cos \varphi' & \operatorname{sen} \varphi' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

Los cálculos se hacen, pues, utilizando fórmulas rigurosas, no aproximadas, como en la Geodesia clásica, y sin necesidad de todas las correcciones que se introducían entonces por desviación de la vertical (topográfica e isostásica), por altura del vértice estación y del vértice observado sobre el nivel del mar, aberración terrestre, reducción a la línea geodésica..., ni las correcciones y aproximaciones introducidas en el cálculo de triángulos y de coordenadas. Además, estas fórmulas son válidas cualquiera que sea el valor de la distancia entre los vértices.

Para el conocimiento de la forma de la Tierra es suficiente con el cálculo de estas coordenadas cartesianas, pero para otros fines (cartografía, topografía, etc.) es necesario conocer las coordenadas geodésicas (longitud  $\lambda$  y latitud  $\varphi$ ), así como la altitud ( $h$ ) de los vértices geodésicos. Para definir estas coordenadas geodésicas será ahora necesario introducir un elipsoide (el internacional por ejemplo), con relación al cual se definen las coordenadas, y en el que se adoptará como punto astronómico fundamental el vértice  $V_0$  anteriormente introducido como tal. Estas coordenadas pueden calcularse utilizando las fórmulas de transformación:

$$\begin{aligned} X &= (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ Y &= (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ Z &= [(1 - e^2) N + h] \sin \varphi, \end{aligned}$$

donde  $N$  representa el radio de curvatura del elipsoide en la dirección del primer vertical (la gran normal de la Geodesia clásica), y  $e$  la excentricidad de la elipse meridiana. Estas mismas fórmulas son las que habrán de utilizarse para calcular, a partir de la altitud  $h_0$ , de la longitud  $\lambda_0$  y latitud  $\varphi_0$ , determinadas por observación, las coordenadas cartesianas aproximadas ( $X_0, Y_0, Z_0$ ) del punto astronómico fundamental, en el que además se observará un acimut astronómico.

En cuanto a las altitudes  $h$  no vienen aquí medidas a partir del geoide, que ahora no aparece para nada. En la Geodesia clásica la cota geopotencial de un punto viene definida por la expresión monodroma

$$W = W_0 + \int_0^V g \, dh.$$

donde la integral ha de calcularse a partir del punto  $0$ , cuyo potencial es  $W_0$ , al punto  $V$ ,  $g$  representa el valor real de la gravedad y  $dh$  las cotas medidas, a lo largo del itinerario, en la dirección de las líneas de fuerza. Para poder calcular el valor de esta integral sería necesario conocer el valor de la gravedad verdadera en el interior de la Tierra, valor que nos es evidentemente desconocido. Definamos entonces la expresión

$$W = \gamma H.$$

en la que  $\gamma$  representa el valor normal de la gravedad en el punto del elipsoide de coordenadas  $(\lambda, \varphi)$ . Queda así definido un valor

$$H = \frac{W}{\gamma}$$

que adoptaremos como altitud del punto V. Si sobre la normal al elipsoide en el punto  $(\lambda, \varphi)$  tomamos, hacia el interior, una distancia igual a H, queda determinado un punto que quedará evidentemente próximo al geoide, pero no exactamente en él. El lugar de los puntos así definidos es el cuasi-geoide de Molodensky, a partir del cual se medirán las altitudes. El geoide es, por definición, una superficie normal en todos sus puntos a la dirección de la gravedad. El cuasi-geoide no es normal a la dirección de la vertical ni a la normal al elipsoide. El cuasi-geoide no es, en definitiva, más que un artificio de cálculo, cuya forma puede conocerse a partir de la fórmula de Molodensky, que ya citamos en el capítulo anterior. No es una superficie de nivel, pero sí muy próxima al geoide en las zonas cubiertas por los mares, si bien se separa de él en las zonas continentales.

Ni el elipsoide ni el geoide son, pues, necesarios en la Geodesia tridimensional. El elipsoide que más arriba hemos introducido no tiene más misión que servir de intermediario para el cálculo de las coordenadas geodésicas, cuando estas coordenadas sean necesarias. El geoide no aparece en la nueva Geodesia.

Desde el punto de vista teórico son evidentes las ventajas de la Geodesia tridimensional que utiliza fórmulas rigurosas, válidas igualmente para grandes distancias, en lugar de los desarrollos en serie utilizados en la Geodesia clásica, cuya convergencia limita su aplicación a pequeñas distancias. No son ahora necesarias todas las correcciones (a ángulos y lados) ni los artificios ni las numerosas correcciones a las que es necesario recurrir en la Geodesia clásica. La utilización de calculadoras electrónicas está, por otra parte, especialmente indicada, y es necesaria, en la nueva Geodesia tridimensional.

Pero es evidente que los datos de observación son los mismos, y los mismos errores de observación. En particular sigue en pie el inconveniente derivado de los errores de refracción, principalmente en los ángulos cenitales. Este problema de la refracción geodésica tiende a mejorar gracias a interesantes investigaciones que se llevan actualmente a cabo, mediante observaciones en luz monocromática en dos longitudes de onda distintas, o midiendo el gradiente de tem-

peratura a distintas altitudes y la velocidad del viento en el momento de la observación.

Pero la principal ventaja de la Geodesia tridimensional está en los nuevos métodos abiertos por la utilización de los satélites artificiales, como más adelante veremos, y en la posibilidad de utilización conjunta de los métodos geodésicos y gravimétricos a que antes hemos hecho referencia.

También en la compensación de redes geodésicas se siguen nuevos derroteros al utilizar la Geodesia tridimensional combinada con los nuevos conceptos y métodos de la estadística matemática.

Se puede llegar así a conocer la forma de la Tierra definida por un inmenso poliedro, cuyos vértices, que cubrirán toda la superficie terrestre, quedarán perfectamente situados por sus coordenadas cartesianas en un sistema único referido al centro de gravedad de la Tierra, quedando además determinado el campo de la gravedad en la superficie y en el exterior de la superficie terrestre.

En la Asamblea celebrada en Munich, en 1956, por la Unión Geodésica y Geofísica Internacional, se acordó observar una red geodésica y efectuar en ella los cálculos por los métodos clásicos y por los de la nueva Geodesia tridimensional, con objeto de poder comparar los resultados. La empresa fue llevada a cabo por el Overseas Survey británico en una cadena de catorce vértices formada por cinco cuadriláteros y un triángulo en el extremo. He aquí las conclusiones:

1. En el caso de grandes redes o cadenas será necesario recurrir al empleo de calculadoras electrónicas si se desean utilizar los métodos de la Geodesia tridimensional.

2. Para obtener buenos valores de altitudes sobre el geoide será necesario utilizar observaciones astronómicas, siempre que se disponga de ellas, siendo necesarias observaciones frecuentes de latitud y acimut, especialmente cuando puedan esperarse grandes desviaciones de la vertical.

3. No hay dificultad en incorporar medidas de distancias a la compensación. Probablemente se podrá disponer de frecuentes medidas de distancia en el futuro gracias a la utilización de telurómetros, y otros métodos modernos de medida de distancias.

## NUEVOS METODOS E INSTRUMENTOS DE OBSERVACION EN GEODESIA

Hasta hace pocos años la observación geodésica se reducía a la medida de ángulos con un teodolito y de bases con reglas o hilos de invar, en cuanto a triangulaciones se refiere, y a las observaciones de péndulo y más modernamente con gravímetros para determinar el valor de la aceleración de la gravedad. Pero últimamente se han desarrollado una serie de métodos e instrumentos que han abierto grandes posibilidades a la Geodesia.

En cuanto a las observaciones en las triangulaciones se refiere, aparte de una constante mejora en los teodolitos que permiten una mayor precisión y comodidad, son los nuevos métodos de medidas directas de distancias los que han revolucionado esta rama de la Geodesia, mejorando la precisión y simplificando también las operaciones de medida de bases, y permitiendo introducir el nuevo concepto de trilateraciones con redes de triángulos en los que se miden directamente los lados en lugar de los ángulos.

En 1923 inició Väisälä en Turku una serie de experiencias en las que utilizaba un metro patrón (el prototipo finlandés) para medir distancias con gran precisión mediante interferencias luminosas con luz blanca. Se trata de una experiencia delicada que le permitió primeramente contrastar los hilos invar de 24 metros para medida de bases geodésicas. Posteriormente se ha aplicado este método a la medida de bases cortas de 192, 384 y 864 metros con una precisión del orden de  $10^{-7}$ , en Alemania, Argentina, Finlandia y Holanda. Este procedimiento no es apto para medir grandes distancias (más de un kilómetro), pero sí puede servir para fijar bases cortas de contrastación.

Otra fuente de enormes posibilidades está en la medida electromagnética de distancias, en la que se basan numerosos instrumentos hoy en uso. Si desde un punto A, se envían ondas electromagnéticas que son reflejadas en otro punto B, que las devuelve a A, la medida del intervalo entre el instante de emisión y el de recepción de las señales permite determinar la distancia AB, supuesta conocida la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas. En esto está la principal dificultad del método, en el conocimiento de esta velocidad de propagación y de sus variaciones con las condiciones meteo-

rológicas. Por otra parte, es necesario tener presentes los efectos de las refracciones a que puede estar sometida la propagación dentro de la atmósfera terrestre, difíciles también de conocer.

Los primeros ensayos de este tipo se hicieron aprovechando los equipos de radar de los bombarderos utilizados en la última guerra mundial; son los sistemas *Oboe* inglés y *Shoran* americano. Así se han podido medir distancias de varios cientos de kilómetros, permitiendo enlazar América del Norte con Europa por intermedio de Groenlandia, y la isla de Creta con el norte de Africa. Modernizaciones de este sistema son los conocidos con los nombres de *Hiran* y *Shoran*.

La observación se hace desde un avión que emite señales en longitudes de onda del orden del metro, volando a una altura constante y conocida entre dos puntos  $V_1$  y  $V_2$  en la Tierra, cuya distancia se trata de determinar. Estas señales son reflejadas desde las dos estaciones en tierra y recogidas a bordo, midiendo en un oscilógrafo el tiempo empleado por la señal en recorrer el doble camino hasta cada una de las estaciones. Y de estos intervalos se pasa a los valores de las distancias entre cada una de las posiciones que ha ido ocupando el avión y cada una de las dos estaciones. Determinado el valor mínimo de la suma de esas distancias y conocida la altura del avión, puede determinarse la distancia entre las dos estaciones. La observación puede hacerse con tiempo nublado, pero es necesario que no exista ningún accidente (rocas, edificios, árboles) entre el avión y cada una de las estaciones.

La magnitud de las distancias medidas, que puede ser superior a los 500 kilómetros, introduce complicaciones en el cálculo de las trilateraciones, al no ser ya válidas las fórmulas utilizadas en la Geodesia clásica.

Un nuevo sistema, el *Decca*, que mide diferencias de fase en bajas frecuencias, ha sido utilizado principalmente en navegación y en levantamientos hidrográficos, pero su aplicación no es aconsejable en tierra a causa de las influencias perturbadoras de la topografía del terreno.

Uno de los primeros aparatos para medida directa de distancias entre dos puntos de la superficie terrestre, es el geodímetro, ideado por el sueco Bergstrand. El geodímetro, lo mismo que otros aparatos basados en el mismo principio, envía impulsos en luz monocromática, cuya frecuencia es modulada por un oscilador de cristal, que es reflejada por un espejo situado en el otro extremo del lado cuya longitud se quiere medir. El aparato mide la diferencia de fase entre la

luz enviada y la recibida, y de esta diferencia de fase puede determinarse el tiempo empleado en el recorrido, y de aquí, la distancia recorrida, siempre que se conozca un valor aproximado de la misma. Es, naturalmente, necesario que no haya ningún accidente entre los dos extremos, no siendo tampoco posible la observación en tiempo brumoso, ni de día si la distancia es de unos pocos kilómetros. Se han llegado a medir distancias de 50 kilómetros con una precisión del orden del centímetro y medio.

Se han construido varios tipos de geodímetro, y, basados en el mismo principio, otros instrumentos como el Terrámetro, el Mecómetro, el E. O. S. (Zeiss), el ruso SVV-1, etc.

Recientemente ha sido mejorado el geodímetro, utilizando como fuente luminosa un laser gaseoso, con lo que se espera aumentar notablemente su alcance.

El Telurómetro trabaja en microondas, en la gama de los 3.000 Mcs, que son recibidas y devueltas desde el otro extremo hasta la estación emisora, midiéndose el tiempo empleado por la señal en el doble recorrido por comparación de fases (emitida y recibida) en un osciloscopio. El alcance es muy superior (se han llegado a medir distancias de 100 kilómetros) y puede trabajarse a pleno día. La precisión es del orden de los 2 cm.

Con el mismo fundamento se ha construido el Electrotape, en el que la lectura es más cómoda que en el Telurómetro, el Distomat (Wild), etc.

Una variante del telurómetro es el *Aerodist*, construido para su utilización desde el aire. Análogamente, el *Shoran* puede utilizarse para determinar distancias entre puntos de la superficie situados hasta 400 kilómetros.

La introducción de las trilateraciones modifica el concepto de las redes geodésicas, pero no los métodos de cálculo de triángulos y de coordenadas, a no ser en el caso de las grandes trilateraciones observables con el *Shoran* y métodos análogos, como en los enlaces ya citados de Norte-América con Europa y Creta con Africa, así como en las grandes redes observadas en Canadá y en Australia. Es necesario recurrir a nuevas fórmulas, estando aquí especialmente indicados los métodos de la Geodesia tridimensional.

En el campo de la gravimetría ha sido muy importante el progreso logrado gracias a la utilización de los diversos tipos de gravímetros, basados principalmente en la medida de la elongación o en la torsión de un muelle, del que se ha suspendido una masa, bajo el efecto de las

variaciones de la gravedad, con lo que se ha logrado una mayor rapidez y comodidad en las observaciones.

Ello ha permitido además enlazar los distintos sistemas gravimétricos nacionales mediante gravímetros transportados en avión. En este sentido es de destacar la magnífica labor realizada por Woollard en todo el mundo.

En cuanto a las observaciones en el mar fueron iniciadas por Vening-Meinesz utilizando su aparato tripendular en submarinos en inmersión, que más recientemente pudo reemplazarse por gravímetros también sumergidos.

Esto ha permitido mejorar enormemente las perspectivas de la gravimetría, tanto en tierra como en el mar. Pero la verdadera revolución la constituye la posibilidad de utilizar determinados tipos de gravímetros en la superficie del mar y, lo que es aún más importante, a bordo de aviones en vuelo. El gravímetro *La Coste-Romberg* va montado sobre balancines, y el *Askania GSS-2* sobre una plataforma estabilizada por medio de un giróscopo. Con estos dos gravímetros se hicieron los primeros ensayos en el mar con resultados satisfactorios. Para obtener el valor de  $g$  es necesario eliminar el efecto de la componente horizontal de la aceleración del propio navío.

Su utilización desde el aire ha sido posible gracias a las investigaciones iniciadas en 1958 por el Cambridge Research Laboratory de la Fuerza Aérea Americana, utilizando en principio el gravímetro *La Coste-Romberg*, instalado sobre balancines en un avión, cuya situación se determinaba por los sistemas Doppler de navegación y mediante observaciones fotográficas desde tierra, al volar sobre los montes Tehachape, donde pudo registrarse una variación de unos cien miligals. La dificultad principal está en el conocimiento de la componente vertical de la aceleración del avión, pero se simplifica el problema si lo que buscamos no es el valor de  $g$  en un punto determinado, sino su valor medio sobre una zona del orden de los cien kilómetros cuadrados, tratando de que el valor medio de aquella componente vertical sea cero al volar el avión sobre dicha zona.

En 1962 se repitieron las pruebas utilizando los dos tipos de gravímetros, *La Coste-Romberg* y *Askania GSS-2*, montados ambos en plataformas estabilizadas giroscópicamente. Los resultados fueron comparables para ambos instrumentos. Con estas nuevas técnicas pueden obtenerse valores medios de la gravedad sobre zonas de un grado cuadrado con una precisión mejor que los diez miligals. La trascendencia de esta nueva posibilidad para el estudio de la forma



de la Tierra y de su campo gravitatorio es innegable, al hacer posible el conocimiento rápido de la gravedad sobre toda la superficie del globo.

### ENLACE DE SISTEMAS GEODESICOS DE DISTINTOS CONTINENTES

Acabamos de ver cómo la posibilidad del transporte rápido de gravímetros en avión permite hoy enlazar los sistemas gravimétricos de los distintos países e incluso de distintos continentes, siendo así posible el establecimiento de un sistema gravimétrico único en todo el mundo.

El mismo problema existe con las redes geodésicas de los distintos países, que ya se han unificado en muchos casos, como por ejemplo, en las redes geodésicas europeas, como ya se indicó anteriormente, gracias a la compensación del conjunto de estas redes. Pero queda el problema del enlace de islas o de continentes separados por los mares.

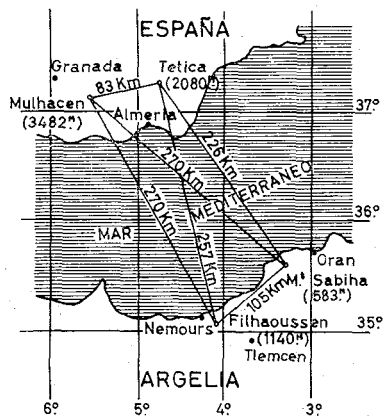


Fig. 2

La primera gran operación de enlace geodésico de continentes se efectuó en 1878, precisamente entre España y Africa, bajo la dirección por parte española, del General Ibáñez de Ibero, Marqués de Mulhacén. En aquella memorable operación se observó un cuadrilátero con sus dos diagonales, llegándose a distancias de 270 kilómetros. La observación fue posible gracias a los 3.482 metros de altitud del

Mulhacén, que permitieron salvar la curvatura terrestre y enlazar con los vértices situados en Argelia.

Cuando esto no ha sido posible, ha habido que recurrir a otros procedimientos, como en el caso del enlace de Noruega con Dinamarca en 1945. Nueve aviones sobrevolaron la zona dejando caer bengalas con paracaídas desde una altura de 2.500 metros, que fueron observadas simultáneamente con teodolitos, durante cuatro minutos, desde tres estaciones en cada uno de los sistemas geodésicos a enlazar, separados unos 150 kilómetros uno de otro. El problema a resolver es clásico en Fotogrametría aérea. Las observaciones desde cada uno de los vértices del primer sistema geodésico permiten determinar los cosenos directores de cada una de las visuales en un sistema de coordenadas unido a dicho sistema geodésico. La intersección de las tres visuales fija perfectamente la posición de la bengala en el momento de la observación. Conocida esta posición, las observaciones desde las otras tres estaciones permitirán conocer las direcciones de las visuales en estas nuevas estaciones con el mismo sistema de coordenadas antes definido. Al repetir las observaciones sobre cuatro posiciones de las bengalas, queda fijada la posición de los vértices del segundo sistema geodésico con relación al primero, y el enlace entre los dos sistemas geodésicos queda así asegurado.

Otra posibilidad de resolver el problema del enlace de dos sistemas geodésicos alejados es, como ya hemos indicado más arriba, la utilización del *Shoran* o *Hiran*.

Pero todas estas soluciones tienen un límite. En el enlace antes citado de los continentes europeo y americano fue necesario hacerlo a través de Groenlandia, pues el enlace directo no habría sido posible con los métodos utilizados. Por otra parte, es necesario evitar visuales rasantes para salvar errores grandes de refracción, lo que condiciona la altura de vuelo del avión, que en el caso del *Shoran* debe ser de 13,600 metros para enlazar sistemas situados a 800 kilómetros de distancia.

La figura 3 representa los diversos sistemas geodésicos en todo el mundo y los enlaces entre los mismos efectuados hasta 1966, utilizando los métodos que acabamos de citar.

He aquí otra solución válida para mayores distancias sugerida por el astrónomo finlandés Väisälä, a que nos hemos referido anteriormente al tratar de los métodos de medida directa de distancia: la triangulación estelar o triangulación espacial.

En el método de triangulación estelar se observa también un foco

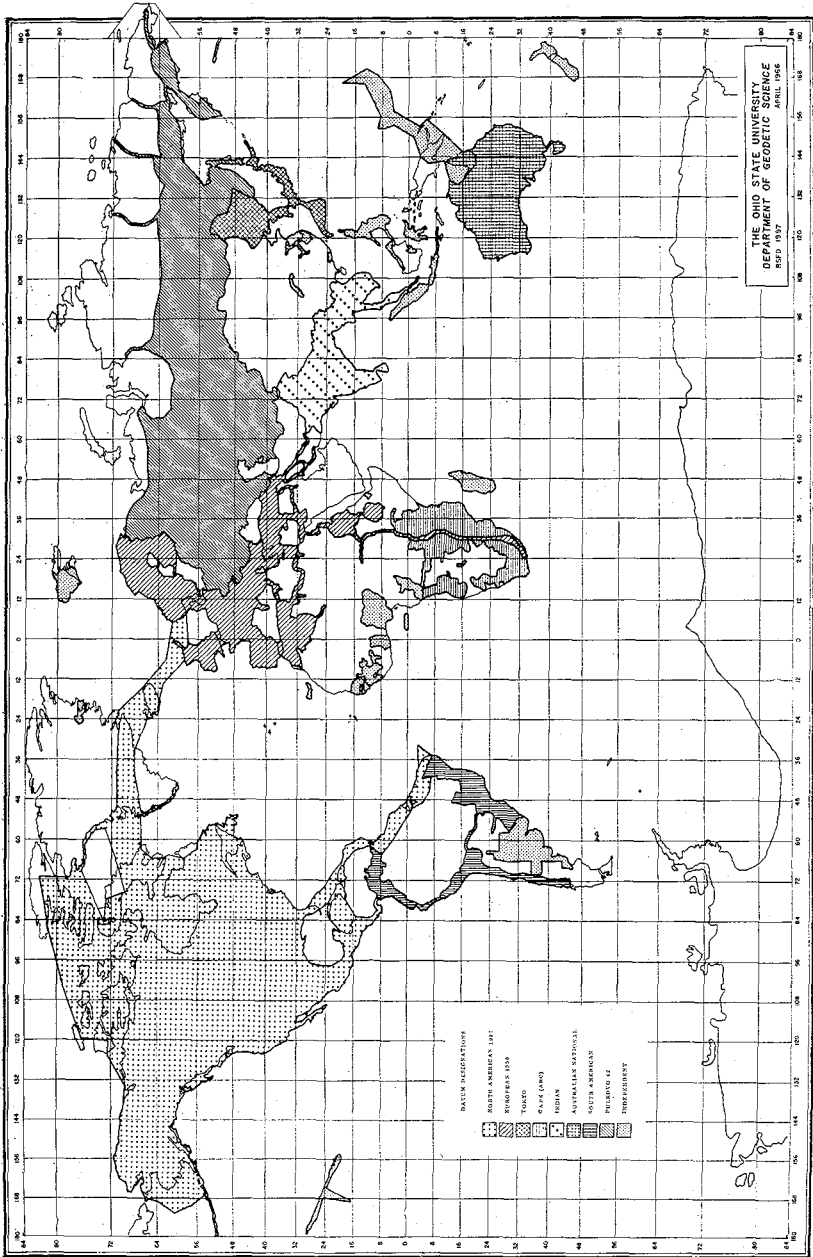


Fig. 3

luminoso en el espacio, pero para lograr mayores alturas éste se sitúa en un globo o en un cohete. Las luces observadas han de ser por destellos o estar perfectamente sincronizadas las observaciones desde tierra. Los primeros ensayos efectuados en Finlandia se hicieron con globos a 33 kilómetros de altura. Y se sustituyen las medidas de acimut y altura efectuadas con un teodolito por observaciones fotográficas, apareciendo en la placa la imagen del foco luminoso y las estrellas del fondo del cielo, lo que permite determinar las coordenadas del foco luminoso en el mismo sistema en que vienen dadas las coordenadas de las estrellas, y con ello los cosenos directores de las distintas visuales efectuadas, así como las distancias del foco observado. Las direcciones así obtenidas no vienen afectadas por las desviaciones de la vertical. Dada la mayor elevación de la visual al foco luminoso observado que la de las observaciones geodésicas normales, el efecto de la refracción es menor, pero como además la dirección determinada se refiere a las de las estrellas próximas en la placa, que están afectadas por análogos efectos de refracción, sólo influirá la refracción diferencial, quedando así extraordinariamente reducida esta causa de error que tanto ha preocupado siempre a los geodestas. Esto hace además que desaparezca el inconveniente que presentaban las observaciones de distancias cenitales en Geodesia clásica, al ser mucho más afectadas por la refracción que los acimutes. Evidentemente, este método está especialmente indicado para ser resuelto en la nueva Geodesia tridimensional.

Otra experiencia análoga se efectuó en Estados Unidos, en el proyecto «Cambridge» en 1961, sustituyendo el globo por un cohete Aerobee que fue observado desde 19 estaciones situadas en Alaska, Estados Unidos e islas Hawai. A causa de las condiciones meteorológicas y defectos en las cámaras, sólo desde cinco estaciones pudo observarse convenientemente, por lo que los resultados de la experiencia no fueron todo lo satisfactorios que se esperaba.

#### IV. Geodesia espacial

Grandes han sido los progresos de la Geodesia gracias a las nuevas posibilidades que acabamos de señalar, pero el avance realmente fabuloso, ha sido el logrado por lo que se ha llamado Geodesia espacial (la primera obra sobre este tema se llamó *Geodesia cósmica*: Berrot y Hofmann: *Kosmische Geodäsie*). Y mucho más es lo que se espera gracias a la utilización de satélites artificiales en el estudio de la forma y dimensiones de la Tierra.

En los años cincuenta se desarrollaron varios métodos astronómicos para tratar de resolver el problema de la determinación de la figura de la Tierra. Se basan en el conocimiento preciso de la posición de la Luna, determinada con relación al Sol (observación de eclipses), o a las estrellas próximas en la esfera celeste (observación de ocultaciones o fotografías de la Luna). La posición observada de la Luna, así obtenida, dependerá evidentemente de la del observador sobre la superficie terrestre, es decir, de sus coordenadas geocéntricas y de la figura de la Tierra. Pero es en absoluto independiente de la dirección de la vertical en el lugar de observación.

La posición geocéntrica del satélite en el instante de la observación puede, por otra parte, calcularse partiendo de la teoría de la Luna que adoptemos, en función de las coordenadas del observador, y de los parámetros que definen la forma de la Tierra.

El conocimiento de la diferencia entre estas dos posiciones, observada y calculada, o entre los instantes observado y calculado para el fenómeno (eclipse u ocultación), nos permitirá escribir una ecuación en que intervendrán como cantidades desconocidas esos parámetros que definen la forma de la Tierra y los que determinan la posición de la Luna, así como las coordenadas que definen la posición del observador. Un número suficiente de observaciones puede llevarnos a conocer los valores de aquellas incógnitas, lo que supone una notable contribución al problema fundamental de la Geodesia superior.

La circunstancia antes señalada, de ser este tipo de observaciones independientes de la dirección de la vertical del lugar de observación, nos permitirá conocer los valores de las desviaciones absolutas de la vertical en dichos puntos, además de su elevación sobre el geoide, haciendo así posible el llegar a definir un sistema geodésico mundial, salvando la dificultad que hasta ahora suponía la existencia de los mares entre los continentes.

### ECLIPSES Y OCULTACIONES

Supongamos, por un momento, conocido en posición y magnitud el elipsoide que mejor se adapta a la figura de la Tierra. Lo suponemos determinado en posición por la condición de coincidir su centro con el centro de gravedad de la Tierra, y su eje polar con el de rotación. Los valores adoptados para el semieje  $a$  y el aplastamiento  $\alpha$  (o la excentricidad  $e$ ) definen su forma y dimensiones. Referido a este elipsoide, un punto de la Tierra queda determinado por sus coordenadas geodésicas ( $\lambda$  y  $\varphi$ ) y su altitud ( $h$ ).

Supongamos, además, conocidas con toda la precisión que pueda desearse las coordenadas de la Luna ( $\alpha, \delta$ ), su paralaje  $\pi$  y su radio  $k$ , así como las del Sol ( $\alpha', \delta', \pi'$ ), o la estrella cuya ocultación consideramos ( $\alpha^*, \delta^*$ ).

Estos datos nos permiten calcular los instantes de principio y fin de un eclipse total de Sol, o de una ocultación de una estrella por la Luna:

$$\tau = F(\lambda, \varphi, h, \alpha, \delta, \pi, K, \alpha', \delta', \pi').$$

Pero todas estas coordenadas que intervienen en la expresión anterior no son realmente conocidas. El elipsoide real de que hemos hablado, que mejor se adapta a la totalidad del planeta, no es conocido; solamente es posible conocer un elipsoide, que podría adaptarse a una determinada región de la Tierra (continente europeo, América, etc.), y lo que, desde luego, no era posible en la época en que estos trabajos se efectuaron, era calcular las coordenadas geodésicas sobre un mismo elipsoide de dos posibles lugares de observación, si estos lugares están en continentes distintos, que no puedan enlazarse mediante una cadena de triángulos. O si uno de los lugares de observación está situado en una isla alejada del continente. En este caso era necesario introducir en el cálculo, no las coordenadas geodésicas,

sino las coordenadas astronómicas  $(\lambda + d\lambda, \varphi + d\varphi)$ , siendo  $d\lambda$  y  $d\varphi$  las componentes de la desviación absoluta de la vertical referidas al elipsoide anteriormente definido. También era necesario introducir una corrección de la altitud  $h$ , que podemos poner en la forma  $N/a$ , pues el valor absoluto de dicha altitud tampoco era conocido.

Tampoco conocemos los valores exactos de las coordenadas ecuatoriales de la Luna y del Sol, si bien las del Sol pueden calcularse con precisión suficiente. Y también pueden darse valores precisos de las coordenadas de las estrellas, cuando de ocultaciones se trate. Admitidas, pues, como conocidas con precisión suficiente las coordenadas del Sol y de la estrella, representemos por  $d\alpha$ ,  $d\delta$ ,  $dk$  y  $d\pi$  las correcciones a las coordenadas de la Luna.

Resulta así, que si se observa el principio o fin de un eclipse total o de una ocultación, los instantes de la observación no coincidirán con los calculados. Podemos admitir que la diferencia entre el instante observado y el calculado es, fundamentalmente, debida a los errores citados:

$$d\tau = f(\lambda, \varphi, h, \alpha, \delta, k, \pi, d\lambda, d\varphi, dh, d\alpha, d\delta, dk, d\pi).$$

Esta expresión puede ponerse en la forma siguiente:

$$d\tau = a d\lambda + b d\varphi + c d\alpha + d d\delta + e d\pi + f dk + g \cdot N,$$

siendo  $a, b, c, \dots, g$ , coeficientes numéricos cuyos valores pueden conocerse. La observación nos da el valor del primer miembro de esta igualdad, obteniendo así una ecuación de observación con siete incógnitas: tres ( $d\lambda, d\varphi, N$ ) características del lugar de observación; dos ( $d\alpha, d\delta$ ) de la posición de la Luna en el momento del eclipse u ocultación, y otras dos ( $d\pi, dk$ ) cuyos valores son independientes del lugar y del instante de la observación. Si disponemos de datos de  $n$  ocultaciones (o eclipses) observados en  $e$  estaciones distintas, el número total de incógnitas será  $2n + 2e + 2$ , y el número total de observaciones  $2ns$ , considerando las observaciones de principio y fin de los eclipses u ocultaciones. Por pocas que sean las ocultaciones, es fácil disponer de información suficiente para resolver el problema. Tres ocultaciones observadas en tres lugares distintos nos darán 17 incógnitas para un total de 18 observaciones, con lo que el problema tiene ya solución.

El problema puede simplificarse si, desde un lugar determinado, se observa una serie de ocultaciones en una misma noche, en cuyo caso las correcciones  $d\lambda$ ,  $d\phi$ ,  $N$ ,  $d\alpha$  y  $d\delta$  pueden considerarse constantes para todas las observaciones. O bien si los valores de estas correcciones se conocen por otro tipo de observaciones, por ejemplo observaciones meridianas, desde un observatorio permanente.

Por el contrario, una complicación extraordinaria es la debida al hecho de la forma irregular de la Luna, que hace que no tenga sentido el hablar de radio lunar  $k$ , sino que, a cada punto del limbo lunar corresponderá un valor distinto de su radio vector, o distancia al centro del satélite. Los mapas lunares de que antes se disponía no daban la precisión necesaria para conocer estos valores de  $k$ .

#### *Ocultaciones de estrellas por la Luna.*

Este método de observación de ocultaciones de estrellas ha sido utilizado por los geodestas del U. S. Army Map Service, bajo la dirección técnica del Dr. John O'Keefe.

La determinación del instante de la ocultación se hizo utilizando un anteojo reflector de 12 pulgadas de abertura, expresamente construido, que recogía la luz que impresionaba una célula fotoeléctrica, marcando así el instante de la ocultación. El método de observación limita las estrellas utilizables a las primeras magnitudes.

Supuestas conocidas las coordenadas de las estrellas ocultadas, el problema principal está en el borde lunar, que hace que la hora calculada para la ocultación pueda adelantarse o retrasarse apreciablemente, según que se produzca en un pico o en un valle lunar.

La solución adoptada por O'Keefe para salvar esta dificultad está en imponer la condición de que la ocultación sea observada por los distintos observadores, tratando de asegurar que sea producida por el mismo accidente lunar. Como precisamente no conocemos con exactitud las coordenadas geodésicas, no es posible tener la garantía de que en los puntos elegidos como lugares de observación vaya efectivamente a producirse la ocultación exactamente en el mismo accidente lunar previsto. Sobre todo, si se trata de observadores en distinto continente. Puede disminuirse el error eligiendo una zona del borde lunar sin accidentes, lisa, de forma que un error en el ángulo de posición del punto del borde en que se produzca la ocultación no tendrá la importancia que tendría tratándose de una región montañosa.



### *Observación de eclipses de Sol.*

Para determinar los instantes de los contactos en un eclipse total o anular de Sol, se han propuesto y realizado varios métodos que reseñamos a continuación:

- a) Métodos geométricos.
- b) Métodos espectrofotométricos.
- c) Métodos fotométricos.

Estudiemos por separado estas distintas soluciones.

#### a) *Métodos geométricos.*

El método que pudiéramos llamar clásico consiste en medir la longitud o el ancho del creciente en los instantes próximos a los contactos, y determinar, por extrapolación, los instantes de dichos contactos. Este procedimiento no puede dar la precisión necesaria de pocas décimas de segundo de tiempo.

Otros métodos geométricos han sido propuestos: Atkinson propuso el registro cinematográfico del eclipse desde fuera de la zona de totalidad. Se observará un movimiento de giro del creciente con velocidad variable, que será máxima en el momento de la máxima fase. El método se ensayó con ocasión del eclipse de 1.º de noviembre de 1948.

Kukkamäki ha utilizado otro método geométrico, observando así el eclipse de 20 de mayo de 1947 desde Brasil y Costa de Oro. Mediante una cámara cinematográfica se obtienen 24 fotografías por segundo del creciente solar durante treinta segundos en cada contacto. En la misma película registra las señales horarias y los segundos de un cronómetro.

Mide mediante un microscopio las coordenadas de los extremos del creciente, y de estas medidas deduce la dirección y la distancia del eje del cono de sombra con relación al lugar de observación. La comparación de estos valores con los obtenidos con el cálculo a partir de valores aproximados de las coordenadas del lugar de observación, le permite obtener las correcciones a introducir en estas coordenadas.

b) *Métodos espectrofotométricos.*

Lindblad propone el estudio de las rápidas variaciones del espectro relámpago en las inmediaciones de los contactos interiores. Se observó así el eclipse de 1945, utilizando una cámara de cine de 25 centímetros de distancia focal, a la que adaptó un prisma de poder dispersivo de 200 Å por milímetro.

c) *Métodos fotométricos.*

Banachiewicz propuso determinar los instantes de los contactos registrando cinematográficamente los de desaparición de la luz de la fotosfera al ser ocultada por una serie de accidentes distribuidos por todo el borde lunar. Así se observó el eclipse de 19 de junio de 1936, situando tres expediciones en Grecia, Siberia y Japón, provistas de cámaras de 1,20 metros de focal. Estas determinaciones vienen naturalmente muy afectadas por el inexacto conocimiento del borde lunar.

La intensidad luminosa total del creciente solar presenta una variación brusca en los instantes de los contactos interiores, lo que permitirá determinar con precisión dichos instantes. El registro de esta intensidad luminosa puede hacerse cinematográficamente o mediante una célula fotoeléctrica.

Heyden, en los eclipses de 1952 y 1954, obtuvo un registro utilizando una célula fotoeléctrica.

La Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid ensayó un nuevo método fotométrico sobre una película moviéndose con un movimiento uniforme, en la que se registraban señales de tiempo y un registro fotométrico del creciente solar, utilizando para ello dos métodos distintos en la misma película, que se llamaron focal y afocal. Se observaron con el primer método los eclipses de 1952 desde los antiguos territorios de la Guinea española, y el de 1954 desde Sydkoster (Suecia), en el que se ensayó además el método afocal. Los resultados fueron muy prometedores.

La primera campaña de observaciones de eclipses de Sol con este fin, fue organizada por Banachiewicz, el 19 de junio de 1936, enviando tres expediciones al Japón, Siberia y Grecia.

El eclipse de 9 de julio de 1945 fue observado por dos expediciones, finlandesa y sueca, siguiendo los métodos de Banachiewicz y Lindblad.

El 20 de mayo de 1947 tuvo lugar un eclipse sumamente favorable para este tipo de observación, por ser visible desde América del Sur y África. Nuevamente los astrónomos escandinavos llevaron la exclusiva de este tipo de observación.

La primera contribución de astrónomos no escandinavos a este tipo de observaciones, tuvo lugar con ocasión del eclipse anular de 8 de mayo de 1948. La National Geographycal Society, de Washington, envió expediciones a Birmania, Thailandia, China, Corea, Japón e islas Aleutianas, provistas de instrumentos análogos a los utilizados en ocasiones anteriores por los geodestas finlandeses.

En el mismo año, el 1.º de noviembre, tuvo lugar un nuevo eclipse total, que fue observado desde fuera de la zona de totalidad, siguiendo el método de Atkinson.

El eclipse de 25 de febrero de 1952 fue observado, con estos fines geodésicos, por dos expediciones, bajo la dirección del mismo Atkinson, estacionadas en el Sudán, en los límites Norte y Sur de la zona de totalidad, siguiendo su método ya citado.

El Aeronautical Chart and Information Center (U. S. Air Force) envió seis expediciones al África, organizadas bajo la dirección del padre Heyden. Se situaron a lo largo de la línea de centralidad desde Libreville hasta Arabia, registrando mediante una célula fotoeléctrica las variaciones de la intensidad luminosa total del creciente solar.

Por último, la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid envió una expedición a Cogo (Guinea española), que ensayó por primera vez el método fotométrico afocal con registro cinematográfico, antes citado.

El mayor esfuerzo realizado dentro de este campo de investigación lo fue con ocasión del último eclipse de 30 de junio de 1954, principalmente por parte de los Estados Unidos. Se enviaron un total de 36 expediciones, distribuidas a lo largo de la línea de centralidad en los 20 emplazamientos que se indican en el adjunto gráfico, tomado del informe presentado por el profesor Asplund a la Asamblea de Roma de la U. G. G. I., celebrada en septiembre de 1954. Los organismos que intervinieron en la organización de estas expediciones fueron: Finnish Geodetic Institute, Observatorios de Stokholm, Lund y Uppsala, Rikets Allmänna Kartverk (Stokholm), Royal Institute of Technology (Stokholm), Aeronautical Chart and Information Center, Ohio State University y Universidad de Madrid.

## *ENLACE DE CONTINENTES ALEJADOS*

Supuestas conocidas las dimensiones de la Tierra, la distancia de la Luna y la posición del Sol o de las estrellas ocultadas, según se trate de un eclipse o de una ocultación, pueden calcularse las circunstancias del fenómeno en cuestión. Determinado por observación el intervalo entre los instantes en que ha tenido lugar la ocultación de una estrella o el principio o fin de un eclipse en dos lugares alejados de la superficie terrestre, puede llegarse a conocer la distancia entre ellos, determinación que será, en absoluto, independiente de la dirección de la vertical.

Este era uno de los resultados buscados por el Army Map Service en las observaciones de ocultaciones de estrellas, con objeto de fijar la posición de las Azores en el Atlántico y de la isla Palau en el Pacífico. Análogamente se buscó el enlace de América con Europa en las campañas organizadas para la observación de los eclipses de Sol de 1947 y 1954.

Estos métodos de determinación de la forma y dimensiones de la Tierra, han perdido ya su interés frente a los nuevos métodos de observación de satélites artificiales a que nos referiremos a continuación. Son fenómenos poco frecuentes y observables sólo en zonas muy reducidas, que requieren la organización de costosas expediciones, con el peligro de encontrar un tiempo desfavorable para su observación, perdiéndose todo el esfuerzo realizado, como efectivamente ha ocurrido con demasiada frecuencia.

## *METODO DE MARKOWITZ*

Los dos métodos que hemos estudiado, observación de eclipses de Sol y de ocultaciones de estrellas por la Luna, nos permiten fijar la posición del observador partiendo de la variación de la posición topocéntrica de la Luna en la esfera celeste, con relación a su posición geocéntrica. La ventaja de ambos métodos está, como ya hemos señalado, en que aquella posición topocéntrica se determina prescindiendo en absoluto de la dirección de la vertical en el lugar de observación, puesto que aparece referida a la posición del Sol, en el primer caso, y a la de la estrella ocultada en el segundo.

Una circunstancia muy importante es la posible frecuencia de las observaciones de cada género. Los eclipses de Sol son fenómenos muy poco frecuentes, y la línea de totalidad cubre una zona muy estrecha de la superficie terrestre. Las ocultaciones de estrellas por la Luna se presentan con mucha mayor frecuencia, pero la técnica utilizada en las observaciones reduce mucho el número de las utilizables con estos fines. Y más aún si se mantiene la condición impuesta por O'Keefe para disminuir el efecto del borde lunar.

Un método que, con precisión suficiente, permitiera fijar la posición de la Luna con relación a las estrellas circundantes, en la forma que se fija la posición de un cometa o un asteroide, presentaría la enorme ventaja de poder efectuar las observaciones en cualquier posición de la Luna con relación al horizonte y de poderlas repetir a lo largo del tiempo. Tal es el método de Markowitz, utilizando la cámara lunar por él ideada.

La cámara lunar de Markowitz, adaptable a un anteojito cualquiera (se ha construido para ser adaptada a los anteojos de la carta del cielo), permite obtener una fotografía de la Luna y de las estrellas circundantes. Delante de la placa fotográfica, y en su centro, lleva un pequeño filtro circular oscuro, constituido por una lámina plano-paralela con un coeficiente de transmisión de  $1/1.000$ . Sobre este filtro se forma la imagen de la Luna, reduciéndose así su intensidad, de forma que no vea la placa, eliminando las imágenes de las estrellas próximas. Pero para que sea posible la fotografía de estas estrellas y la de la Luna, disminuido su brillo mediante el filtro, es necesario obtener las fotografías con exposición, y en el tiempo que dure esta exposición se desplaza la Luna con relación a las estrellas. Este movimiento es corregido dando un pequeño giro al filtro alrededor de un eje contenido en su plano y paralelo al de la placa, y orientable en cada fotografía según la dirección del movimiento de la Luna.

Esta cámara permite así obtener una fotografía de la Luna y de las estrellas próximas en la esfera celeste. Las medidas sobre las placas así obtenidas nos llevan a conocer la posición de la Luna en el momento de la observación, referida a la de las citadas estrellas. El instante de la observación será aquel en que el plano del filtro es paralelo al de la placa, y queda automáticamente registrado por la misma cámara en un cronógrafo.

Las efemérides lunares nos permiten conocer la posición geocéntrica de la Luna en el momento de la observación. Esta posición

no coincidirá, naturalmente, con la posición (topocéntrica) obtenida en las placas, siendo la diferencia entre ambas función de las coordenadas geocéntricas del lugar de observación y de las constantes de la Luna. Cada observación nos da dos ecuaciones cuyos segundos miembros, conocidos, son las diferencias entre la ascensión recta y la declinación observadas y las calculadas. La repetición de las observaciones obteniendo fotografías de la Luna en diferentes posiciones con relación al horizonte del observador, y en diferentes puntos de su órbita, permite llegar a determinar los valores de las incógnitas que intervienen en el problema.

### LA GEODESIA POR SATELITES

Hemos hablado de la triangulación estelar como uno de los métodos más prometedores para resolver el problema del enlace de continentes, observando un punto luminoso desde estaciones situadas en los dos sistemas geodésicos a enlazar. El foco luminoso se sitúa en un avión o en un globo, o en un cohete, y mientras mayor sea la altura a que se lo sitúe mayor podrá ser la distancia de los sistemas geodésicos que se desee enlazar. Es evidente la ventaja que supondrá el que la observación se efectúe, no sobre un avión o un globo, sino sobre un satélite artificial a mucha mayor altura, lo que permitirá enlaces a distancias muy superiores.

También hemos visto cómo el movimiento de la Luna en el campo gravitatorio terrestre podría aportar nuevos métodos a la resolución del problema que nos ocupa. Pero también los satélites artificiales se mueven bajo la acción del campo gravitatorio terrestre, por lo que aquellos métodos tendrán de nuevo aplicación al referirnos a las perturbaciones en el movimiento de los satélites artificiales debidas a la no esfericidad de la Tierra.

Aparecen así los métodos geométrico y dinámico de la nueva Geodesia por satélites que tantos resultados han dado ya, y de la que tanto se espera aún.

#### *Método geométrico. Triangulación espacial*

Todo lo dicho al hablar anteriormente de la triangulación espacial puede repetirse aquí, con la única diferencia de que el foco luminoso observado no está ahora en un globo ni en un cohete, sino que lo que se observa es un satélite artificial. Si la distancia del satélite es

del orden de los 1.500 kilómetros, como el «Echo 1», podrán enlazarse estaciones situadas a 1.500 o 2.000 kilómetros. Como allí, las observaciones han de ser simultáneas, lo que representa una primera dificultad. En efecto, la velocidad de estos satélites es del orden de los ocho kilómetros por segundo, lo que exige una precisión de la milésima de segundo en la sincronización de las observaciones, a no ser que esta sincronización se asegure fotografiando satélites que, como los «Anna» y «Geos», emiten luces a destellos. Por el contrario, los «Echo», que no son sino grandes globos visibles por la luz que reflejan del Sol, dejarán un trazo en las placas fotográficas sobre el que puede fijarse la posición del satélite en un instante determinado gracias a un obturador que gira ante el objetivo o ante la placa, produciendo así en ella destellos correspondientes a instantes fijados por el propio obturador. Naturalmente, en ambos casos la exposición de la placa fotográfica ha de prolongarse convenientemente para que sobre la misma aparezcan las estrellas que habrán de utilizarse para calcular los cosenos directores de la dirección del satélite en el momento de la observación.

$$\lambda = \cos \delta \cos (\theta - \alpha)$$

$$\mu = \cos \delta \operatorname{sen} (\theta - \alpha)$$

$$\nu = \operatorname{sen} \delta.$$

Las coordenadas  $(\alpha, \delta)$  del satélite se determinan a partir de las medidas en la placa y de las coordenadas de las estrellas medidas; la hora sidérea  $(\theta)$ , a partir de la hora de la observación en tiempo universal. Con ello los cosenos directores obtenidos quedan todos referidos a un sistema de coordenadas definido por el catálogo de estrellas utilizado, referido a un ecuador medio y un equinoccio determinados. De estas coordenadas puede pasarse a los cosenos directores  $(\lambda, \mu, \nu)$  en un sistema de ejes unido a la Tierra (introduciendo las correcciones por precesión, nutación, aberración y movimientos del polo), cuya posición queda definida por el sistema geodésico utilizado como referencia. Al no conocerse la posición de este sistema geodésico con relación al centro de gravedad de la Tierra, queda una imprecisión al fijar el sistema de coordenadas, del que podría pasarse al sistema de coordenadas geocéntricas por una simple traslación.

Para este tipo de observaciones se han construido una serie de cámaras, desde las grandes Baker-Nunn del Smithsonian Astrophysical Observatory (una de ellas ha sido instalada en San Fernando,

Cádiz), hasta las pequeñas cámaras balísticas Wild B. C. 4; P. C. 1000; I. G. N., etc. Con objeto de asegurar la simultaneidad de las observaciones, es necesario que las cámaras vayan acompañadas de equipos de tiempo de gran precisión, que permitan asegurar la milésima de segundo de tiempo. Si las observaciones no fueran simultáneas, podrían obtenerse observaciones ficticias sincronizadas interpolando entre series de observaciones a lo largo de intervalos de tiempo coincidentes en su totalidad, o al menos en parte.

En este procedimiento lo que se hace, en definitiva, es fijar la posición del satélite en un instante por la intersección de las dos visuales dirigidas desde dos estaciones de un determinado sistema geodésico. La posición del satélite queda así definida con relación a ese mismo sistema. Dos observaciones desde una misma estación de otro sistema geodésico, sobre dos posiciones ya conocidas del satélite, permiten fijar la posición de esta última estación con relación al primer sistema considerado. El mismo problema quedará resuelto si fijamos la posición del satélite por sus distancias a tres estaciones del primer sistema geodésico. Determinadas luego las distancias de una nueva estación a tres posiciones del satélite, queda igualmente fijada la posición de la estación con relación al primer sistema geodésico. Varios métodos de medida de distancias se han utilizado con éxito, basados unos en el efecto Doppler (se determina la mínima distancia del satélite al pasar sobre la estación), en las técnicas del Radar (satélite «Secor», del U. S. Army), y más modernamente en la utilización de rayos «Laser» lanzados desde tierra y reflejados por el satélite. La fotografía del satélite iluminado por la luz laser sobre el fondo de estrellas permite determinar la dirección de aquél en el espacio, además de su distancia. La técnica del Laser permite, pues, fijar la posición del satélite en el espacio al conocer su dirección y su distancia. Por otra parte, éste parece ser hoy por hoy el método de observación más prometedor en cuanto a precisión se refiere, pues permite conocer la distancia con un error, independiente de dicha distancia, del orden de uno o dos metros, que se espera disminuir a 10 ó 20 cms. utilizando luces de diferentes colores. El seguimiento automático permite además efectuar observaciones de día o de noche. El problema actual está en la necesidad de un mejor conocimiento del potencial terrestre que haga posible una mejor representación de la órbita del satélite.



### *Método orbital*

En el método anterior, triangulación espacial, empezábamos por fijar la posición del satélite en un sistema geodésico determinado, y luego, pasando de las posiciones ya conocidas del satélite, se fijaba la posición en el mismo sistema geodésico, de una nueva estación.

El método orbital resuelve el mismo problema en el caso de observarse un satélite cuya órbita se conozca con suficiente garantía. A partir de esta órbita puede calcularse la posición del satélite en un instante determinado, y observando dos posiciones del satélite (o tres, si las que se miden son distancias) desde un mismo punto de la superficie terrestre, queda determinada la posición de ese punto de observación. Pero, y esta es la gran ventaja sobre el método anterior de triangulación espacial, las posiciones calculadas para el satélite, partiendo de los elementos de la órbita son geocéntricas, puesto que el movimiento del satélite está efectivamente referido al centro de gravedad de la Tierra. El inconveniente de este método está en la dificultad de conocer con precisión las posiciones del satélite en su órbita a causa principalmente de la resistencia atmosférica y de las anomalías en el campo gravitatorio terrestre.

Son evidentes las ventajas de efectuar más observaciones que las estrictamente necesarias que permitan una compensación que puede incluso ampliarse a rectificar los elementos de la órbita del satélite utilizados para el cálculo de sus posiciones. En efecto, las posiciones observadas en las diferentes estaciones pueden compararse con las posiciones calculadas a partir de unos determinados elementos de la órbita y de unos determinados valores para las coordenadas de las estaciones de observación. De las diferencias obtenidas entre las posiciones observadas y las calculadas para el satélite pueden obtenerse correcciones a los elementos de la órbita del satélite y a los valores adoptados para las coordenadas de las estaciones.

#### *Triangulación por satélites.*

Cualquiera de los dos procedimientos indicados hasta aquí nos permite conocer las posiciones de una serie de estaciones terrestres en un sistema de coordenadas único. Pueden calcularse las coordenadas geodésicas ( $\lambda, \varphi, h$ ) o bien, y esto es lo que suele hacerse, las coordenadas cartesianas rectangulares ( $X, Y, Z$ ).

No hay ningún inconveniente en extender estas observaciones a estaciones que cubran todo un continente o todo el globo, con lo cual quedarán perfectamente situados los vértices de un inmenso poliedro, con lados del orden de los mil o más kilómetros, que cubrirá todo ese continente o toda la superficie terrestre. Si entre los vértices de este poliedro hay alguno o algunos, cuyas coordenadas geocéntricas han podido determinarse (por el método orbital), quedan igualmente definidas las coordenadas geocéntricas de todos los demás vértices de esa triangulación, cuyos lados y ángulos pueden calcularse sin dificultad.

Actualmente la precisión lograda utilizando observaciones fotográficas es del orden de  $3 \times 10^{-6}$ . La aplicación en gran escala de las observaciones con Laser permitirá elevar esta precisión hasta  $10^{-6}$  y aún mejorarla. La precisión ya lograda en estas triangulaciones por satélites es dos o tres veces mejor que la que se alcanza en las redes geodésicas observadas por los métodos de la Geodesia clásica, que está comprendida entre  $5 \times 10^{-6}$  y  $10 \times 10^{-6}$ , por lo que en un futuro próximo las grandes redes geodésicas de precisión, sobre las que habrán de encajarse los demás trabajos geodésicos, serán obtenidas por la observación de satélites artificiales.

Han sido varios los satélites lanzados con este fin primordial por los Estados Unidos, tanto satélites activos (que emiten luces o destellos), como el «Anna» y los «Geos», como satélites pasivos (grandes globos visibles por la luz que reflejan del Sol), como los «Echo» y el «Pageos». Con ellos se han observado, y se están observando, grandes redes geodésicas.

La primera gran red de triángulos que abarca toda la superficie terrestre es la definida por las doce estaciones en que se instalaron las cámaras Baker-Nunn del Smithsonian Astrophysical Observatory (SAO), que reproducimos en la figura 4, en la que están señalados los números de observaciones simultáneas conseguidas entre cada par de estaciones. Esta red de grandes triángulos rodea toda la superficie terrestre, pero evidentemente no la cubre. La posición de las doce estaciones fue fijada con errores comprendidos entre los 10 y los 20 metros. Se utilizaron conjuntamente los dos métodos indicados (triangulación espacial y método orbital), salvo en el caso de las dos estaciones en Africa del Sur y Australia que, por no disponerse de observaciones simultáneas, hubieron de fijarse solamente por el método orbital. En esta determinación se utilizaron también las observaciones

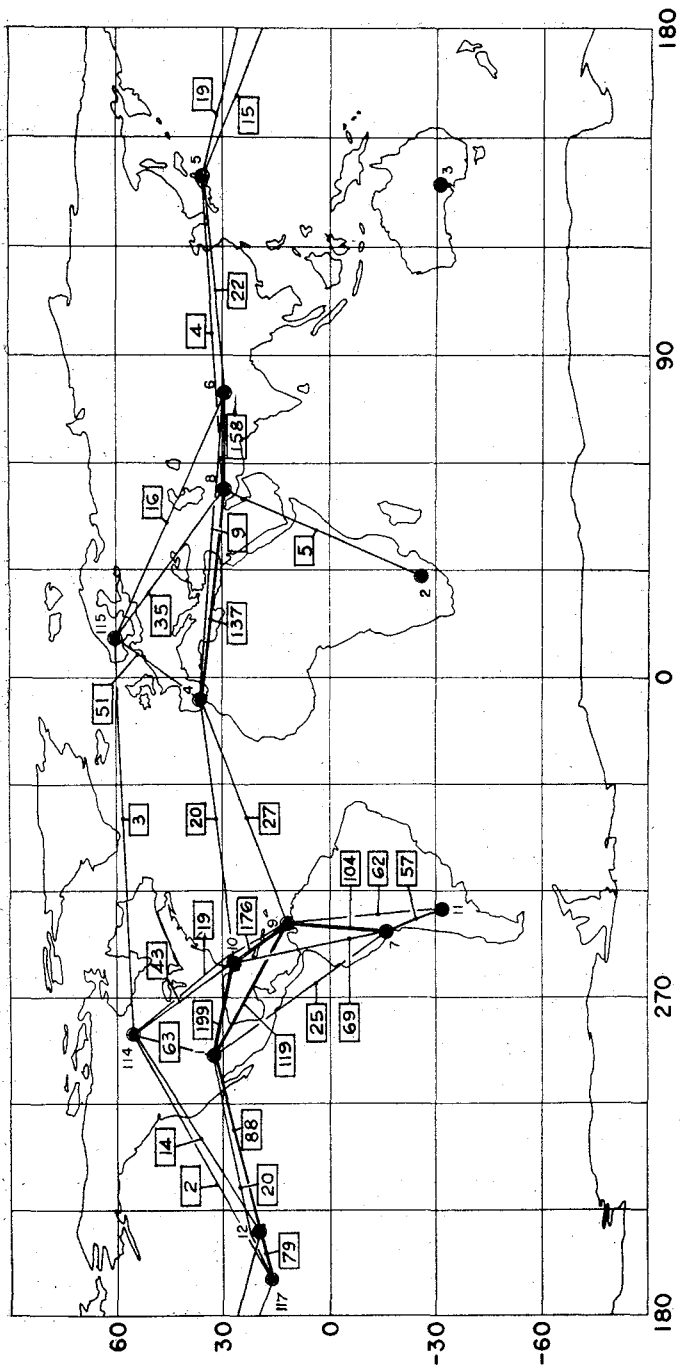


Fig. 4

efectuadas desde las tres estaciones instaladas en Goldstone (California), Johannesburgo (Africa del Sur) y Woomera (Australia), para el seguimiento de vehículos lanzados para el estudio del Sol o planetas, las llamadas pruebas profundas, aprovechando las determinaciones de la velocidad de alejamiento de estos vehículos utilizando el efecto Doppler. A las doce estaciones iniciales: Organ Pass (Nuevo Méjico, USA), Olifantsfontein (Africa del Sur), Woomera (Australia), San Fernando (España), Tokio (Japón), Naini Tal (India), Arequipa (Perú), Shiraz (Irán), Curaçao (Antillas Holandesas), Júpiter (Florida, USA), Villa Dolores (Argentina), y Maui (Hawai), se añadieron posteriormente otras tres cámaras Baker-Nunn, situadas en Oslo (Noruega), Cold Lake (Canadá) y en la isla de Johnston. El programa del S. A. O. ha sido realmente mucho más ambicioso, habiéndose abarcado no sólo los métodos geométricos hasta aquí indicados, sino también el método dinámico a que más adelante nos referiremos, que han permitido llegar a la definición de lo que se ha llamado la «Tierra Standard».

El U. S. Coast and Geodetic Survey ha observado otra red de 23 estaciones en Norteamérica, con enlaces en las Bermudas y Europa, observando los satélites «Echo I» y «Echo II» con cámaras balísticas BC-4, y está acumulando observaciones con objeto de definir una gran red que cubrirá toda la Tierra, esperándose una precisión del orden de  $10^{-6}$  en las coordenadas de sus 36 vértices, separados unos 4.000 kilómetros uno de otro. Las observaciones se hacen sobre el satélite «Pageos», lanzado el 24 de junio de 1966 en una órbita casi circular (la excentricidad es de 0,0025) y casi polar (inclinación de  $87^\circ$ ) y a una altura comprendida entre los 4.200 y 4.250 kilómetros, cuya órbita es fuertemente perturbada por la presión de radiación solar. Este magno proyecto, del «National Geodetic Satellite Program», se realiza bajo la dirección de la NASA y en él colaboran, además del U. S. Coast and Geodetic Survey, el Goddar Space Flight Center (de la NASA), la Fuerza Aérea, el Army Map Service y el Smithsonian Astrophysical Observatory.

En 1965, la Asociación Internacional de Geodesia acordó crear dos Subcomisiones para coordinar los trabajos de Geodesia por satélites, una para los países de Europa occidental, y otra para los del Este. La Subcomisión de Europa occidental inició sus trabajos de observación el 1.º de agosto de 1966, utilizando los satélites «Echo I», «Echo II» y posteriormente el «Pageos», con la colaboración de quince

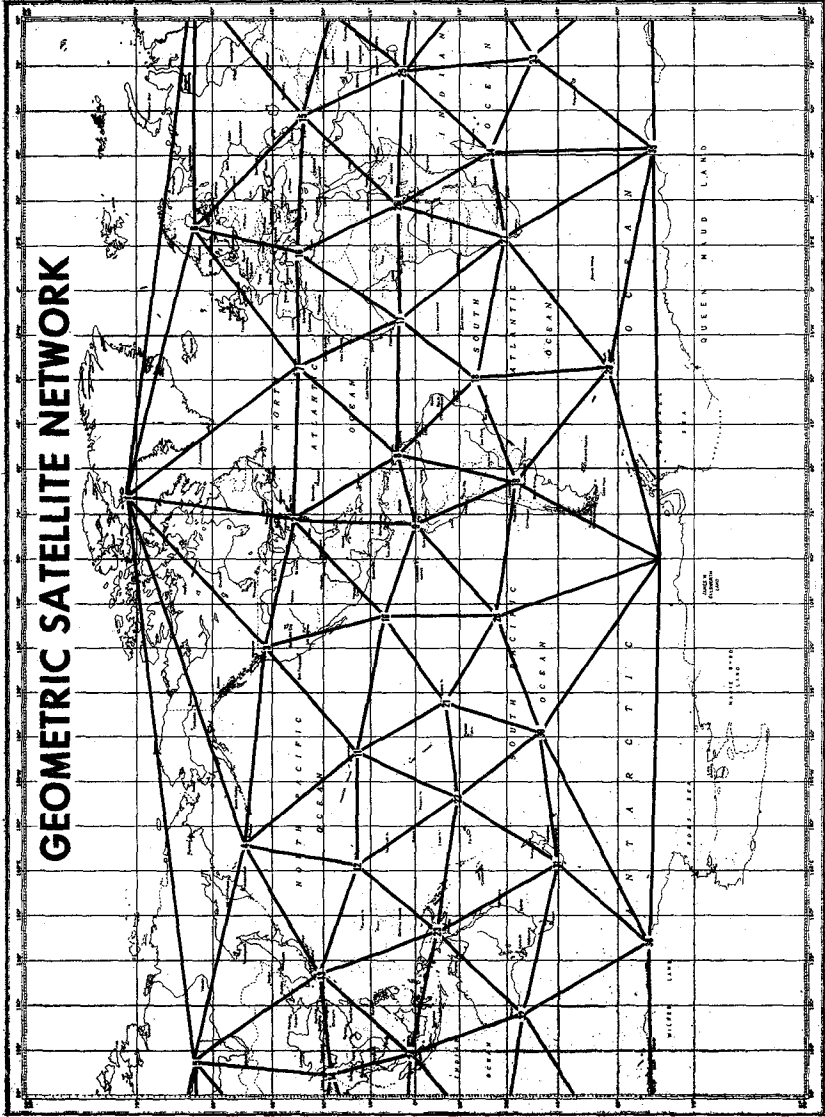


Fig. 5

países. España participa con la estación de San Fernando, mantenida por el Smithsonian Astrophysical Observatory, y otra estación en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid.

Son también interesantes los trabajos geodésicos efectuados por Francia. El Instituto Geográfico Nacional francés ha realizado en 1964 un enlace de Francia con Africa mediante observaciones del satélite «Echo I», utilizando cámaras balísticas proyectadas y construidas por ellos mismos. En el pasado mes de diciembre se inició una nueva operación en la que se enlazaron estaciones en Europa con otras situadas en el continente africano. En España se instaló una estación Laser francesa en San Fernando, e intervino además la estación de la Facultad de Ciencias de Madrid, y otra que se instaló en el Observatorio Astronómico del Teide en la isla de Tenerife (\*).

El equipo de Laser que se utiliza en estas observaciones fue experimentado en enero de 1965 con observaciones sobre el «Explorer XXII». Actualmente se han instalado equipos de este tipo en el Observatorio de Alta Provenza, en Colomb Béchar (Argelia) y en Stéphanion (Grecia), a los que acompañan otros equipos con receptores Doppler.

El Observatorio de Meudon (París) mantiene desde hace años un servicio permanente de observación de satélites artificiales y ha proyectado y construido recientemente una cámara fotográfica, la «Antares», que se ha instalado en el Observatorio de Niza.

Pero la principal contribución de Francia a la Geodesia por satélites ha sido el lanzamiento de tres satélites geodésicos: el Diapasón (17 de febrero de 1966) y los Diadema 1 y 2 (8 y 15 de febrero de 1967), que llevan a bordo osciladores de cuarzo cuya estabilidad para grandes períodos de tiempo es del orden de  $10^{-10}$ , y una serie de más de 144 reflectores de sección exagonal de 16 mm. de lado para la observación con laser.

También la Unión Soviética ha prestado especial atención a la geodesia por satélites, si bien nunca lanzó ningún satélite con este fin, habiéndose limitado a observar los satélites americanos.

En abril y mayo de 1961 inició su primera campaña con observa-

---

(\*) Todos estos trabajos de Geodesia por satélites, efectuados en la Cátedra de Astronomía de la Facultad de Ciencias de Madrid, son posibles gracias a la ayuda económica concedida por el Ministerio de Educación y Ciencia, el Fondo Nacional de Ayuda a la Investigación y la Comisión Nacional de Investigación del Espacio.

ciones desde Pulkova, Nicolaev, Tashkent y Kharkov, cuyos observatorios fueron provistos de cámaras fotográficas NAFA que permiten una precisión de 4" en las posiciones de los satélites fotografiados, y de 0<sup>s</sup>.003 en el tiempo.

Una segunda campaña de observación se efectuó en los meses de mayo y junio de 1963, interviniendo numerosas estaciones distribuidas por todo el territorio de la URSS, y los países del Este europeo (Alemania, Polonia, Rumanía y Checoslovaquia), cubriendo en total una extensión de más de 10.000 kilómetros, que observaron el satélite americano «Echo I». En posteriores campañas han intervenido observatorios en Bulgaria, Hungría, Suecia, Italia, Egipto y República del Malí, y en Cuba.

Las cámaras NAFA sólo pueden fotografiar satélites hasta la magnitud 3,5, por lo que algunas de las estaciones soviéticas han sido posteriormente equipadas con una nueva cámara Abele-Lapushka, que permiten una mayor precisión en la posición de los satélites (uno a dos segundos de arco), manteniendo la precisión en el tiempo de 0<sup>s</sup>.003.

### *Método dinámico*

En el capítulo II, nos hemos referido al movimiento de la Luna en el campo gravitatorio terrestre y hemos visto la información que el estudio de ese movimiento puede darnos para el conocimiento de la forma y dimensiones de la Tierra. Todo lo que allí dijimos podemos repetirlo ahora, sustituyendo la Luna, nuestro satélite natural, por un satélite artificial. Pero, naturalmente, hay una serie de circunstancias que difieren notablemente de un caso a otro.

Al circular los satélites artificiales a distancias de la Tierra mucho menores que la Luna, permiten lograr una precisión mucho mayor en la determinación de la posición del observador en la superficie terrestre: si la distancia del satélite es, por ejemplo, la milésima parte que la distancia de la Luna, la precisión, en la posición del observador, podrá ser mil veces mayor. En cuanto a las perturbaciones introducidas en el movimiento, son inversamente proporcionales al cubo de la distancia. Pero a su vez esta observación de satélites artificiales tiene una contrapartida; son mucho menos luminosos que la Luna, y por tanto, más difíciles de observar. Además, su movimiento es mucho más rápido, lo que exige una mayor precisión en la deter-

minación del instante de la observación. Pero esta misma circunstancia de ser más rápido su movimiento, nos permite acumular más observaciones en un determinado período de tiempo, con la evidente ventaja que ello supone al tratar de determinar por observación las perturbaciones en dicho movimiento.

Otra notable ventaja de la utilización de satélites artificiales con estos fines está en el conocimiento de su masa. En cambio, si su distancia no es muy grande, moviéndose dentro de la atmósfera terrestre, aparecen nuevas perturbaciones debido a la resistencia que ésta opone, lo que introduce una nueva complicación en el problema.

Otra diferencia entre el caso que nos ocupa y el de la Luna, está en que los satélites artificiales no provocan el fenómeno de la precesión ni la nutación: la poca masa de los satélites no llega a perturbar el movimiento de rotación de la Tierra.

En el caso de la retrogradación de los nodos de la órbita, aparece como factor el cociente del radio ecuatorial de la Tierra al semieje de la órbita del satélite. En el caso de la Luna este cociente es  $1/60$ , mientras que en el caso de un satélite artificial es muy próximo a la unidad. Esto hace que las determinaciones efectuadas a partir de las observaciones de la Luna den mucha menos precisión que las obtenidas a partir de observaciones de satélites artificiales.

Los primeros resultados en el estudio de la forma de la Tierra fueron los logrados a partir de las observaciones del Vanguard I, que dieron como valor del aplanamiento  $\alpha = 1/298,3$  en lugar del valor  $1/297$  adoptado hasta entonces. Estas observaciones permitieron además a O'Keefe demostrar que no hay simetría entre ambos hemisferios, confirmándose así lo que Cristóbal Colón había intuido, que la Tierra debía de tener forma de pera, en la crónica de su tercer viaje, cuando dice: «Yo siempre lei que el mundo, tierra é agua era esférico é las autoridades y esperiencias que Tolomeo y todos los otros escribieron de este sitio, daban é amostraban para ello así por eclipses de la luna y otras demostraciones que hacen de Oriente fasta Occidente, como de la elevacion del polo de Septentrion en Austro. Agora ví tanta disformidad, como ya dije, y por esto me puse á tener esto del mundo, y fallé que no era redondo en la forma que escriben; salvo que es de la forma de una pera que sea toda muy redonda, salvo allí donde tiene el pezon que allí tiene mas alto.»

Estas conclusiones fueron posteriormente confirmadas por los Vanguard II y III. El polo norte queda unos cincuenta metros por



encima, y el polo sur cincuenta metros por debajo del nivel medio de los mares. Fuera de los casquetes polares, el nivel medio debe quedar unos veinticinco metros más bajo en el hemisferio norte y más alto en el sur. Por otra parte, el ecuador resultó no ser circular, siendo el diámetro mayor, que pasa por Brasil, unos cuatrocientos metros más largo que el ortogonal a él. Estas mismas observaciones permitieron afirmar, lo que posteriormente ha sido confirmado, que el interior de la Tierra no cumple las condiciones del equilibrio hidrostático, sino que su interior es más rígido de lo esperado. Las irregularidades en el campo gravitatorio terrestre introducen perturbaciones en el movimiento de un satélite artificial al pasar sobre zonas en las que existen importantes anomalías de la gravedad, perturbaciones que se van repitiendo periódicamente al pasar de nuevo el satélite sobre ellas. El estudio de estas perturbaciones periódicas, principalmente a base de observaciones radioeléctricas, permite determinar esas variaciones locales en el potencial gravitatorio terrestre y en la correspondiente distribución de masas.

Por otra parte, al estudiar los métodos de determinación de la forma de la Tierra apoyándonos en el estudio del movimiento de la Luna, utilizábamos una expresión del potencial gravitatorio [1], que es sólo aproximada, si bien la aproximación era allí suficiente al considerar solamente la influencia del aplanamiento terrestre  $\alpha$ , o del término  $J_2$ . Pero en el caso de los satélites artificiales puede lograrse una mayor precisión adoptando una expresión más aproximada, pero también más complicada, para representar el potencial gravitatorio utilizando un desarrollo en serie en funciones armónicas de la forma

$$v = \frac{CM}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n J_n P_n(\cos \varphi) - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left( \frac{a}{r} \right)^n (J_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \varphi) \right] \quad [2]$$

en cuya expresión los términos en que aparecen los coeficientes  $J_n$  son los llamados armónicos zonales, que no dependen de la longitud, y los términos en  $J_{nm}$  y  $K_{nm}$  son los armónicos tesorales. Las funciones  $P_n$  y  $P_{nm}$  son los polinomios de Legendre y las funciones asociadas de Legendre

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

$$P_{nm}(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x).$$

El cociente  $\frac{a}{r}$ , del radio ecuatorial de la Tierra a la distancia  $r$  del satélite, es siempre menor que la unidad, pero es mucho menor que en el caso de satélites artificiales en el de nuestro satélite natural, por lo que en el estudio del movimiento de la Luna es suficiente con considerar el primer término  $J_2$ , que es precisamente el mismo coeficiente que consideramos al estudiar los métodos de determinación del aplastamiento  $\alpha$  en función de las perturbaciones en el movimiento de aquélla. En el caso del movimiento de satélites artificiales, a distancias del orden de los mil kilómetros, habrá que considerar los armónicos de orden superior.

Repetiendo lo dicho al hablar del movimiento de la Luna, si la Tierra fuera una esfera homogénea el potencial se reduciría a

$$V_0 = \frac{GM}{r}$$

en cuyo caso todos los coeficientes  $J_n$ ,  $J_{nm}$  y  $K_{nm}$  serían cero. El movimiento sería kepleriano. Pero como la hipótesis anterior no es exacta, el potencial gravitatorio es

$$V = \frac{GM}{r} + R, \quad [3]$$

siendo

$$R = -\frac{GM}{r} \left[ \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n J_n P_n(\cos \varphi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a}{r}\right)^n (J_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \sin m\lambda) P_{n,m}(\cos \varphi) \right] \quad [4]$$

el potencial perturbador. A este potencial perturbador de origen gravitatorio habrá que añadir otros términos debidos a la resistencia de la atmósfera, presión de radiación solar y las acciones gravitatorias de los demás astros (Luna, Sol, etc.). La existencia de este potencial perturbador hace que el movimiento de un satélite artificial en el campo de la gravedad no sea kepleriano, sino que, por el contrario, estará sometido a perturbaciones, cuyas expresiones analíticas dependerán evidentemente de la forma de dicho potencial perturbador. Este movimiento queda determinado por las perturbaciones en los seis elementos de la órbita definidos por las ecuaciones de Lagrange, clásicas en Mecánica celeste:

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{2}{n\bar{a}} \frac{\partial R}{\partial M}$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{1-e^2}{n\bar{a}^2 e} \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \omega}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\cos i}{n\bar{a}^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{n\bar{a}^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{n\bar{a}^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\cos i}{n\bar{a}^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{n\bar{a}^3 e} \frac{\partial R}{\partial e}$$

$$\frac{dM}{dt} = \frac{1-e^2}{n\bar{a}^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{n\bar{a}} \frac{\partial R}{\partial a}$$

Sustituyendo en las ecuaciones anteriores R por su expresión en función de los elementos de la órbita e integrando, se llega, tras una serie de operaciones de cálculo, a las expresiones siguientes, que dan los valores de las variaciones de los elementos de la órbita a lo largo de una revolución del satélite:

$$\Delta \bar{a} = 0$$

$$\Delta e = -\frac{1-e^2}{e} \text{ tang } i \Delta i$$

$$\Delta i = 3\pi e \left( \frac{a}{\bar{a}(1-e^2)} \right)^3 \left( 1 - \frac{5}{4} \text{ sen}^2 i \right) \cos i \cos \omega \cdot J_3 +$$

$$+ \frac{45}{16} \pi e \left( \frac{a}{\bar{a}(1-e^2)} \right)^4 \left( 1 - \frac{7}{6} \text{ sen}^2 i \right) \text{ sen } 2i \text{ sen } 2\omega \cdot e J_4 \dots$$

$$\Delta \Omega = 3\pi \left( \frac{a}{\bar{a}(1-e^2)} \right)^2 \cos i \cdot J_2 +$$

$$+ 3\pi \left( \frac{a}{\bar{a}(1-e^2)} \right)^3 \left( 1 - \frac{15}{4} \text{ sen}^2 i \right) \text{ cotg } i \text{ sen } \omega \cdot e \cdot J_3 \cdot +$$

$$+ \frac{15}{2} \pi \left( \frac{a}{\bar{a}(1-e^2)} \right)^4 \left( 1 - \frac{7}{4} \text{ sen}^2 i \right) \cos i \cdot J_4 \dots$$

$$\Delta \omega = 6\pi \left( \frac{a}{\bar{a}(1-e^2)} \right)^2 \left( 1 - \frac{5}{4} \text{ sen}^2 i \right) \cdot J_2 +$$

$$+ 3\pi \left( \frac{a}{\bar{a}(1-e^2)} \right)^3 \left( 1 - \frac{5}{4} \text{ sen}^2 i \right) \text{ sen } i \text{ sen } \omega \cdot e \cdot J_3 -$$

$$\begin{aligned}
& -15\pi \left( \frac{a}{\bar{a}(1-e^2)} \right)^4 \left( 1 - \frac{31}{8} \text{sen}^2 i + \frac{49}{16} \text{sen}^4 i \right) + \\
& + \left( \frac{3}{8} - \frac{7}{16} \text{sen}^2 i \right) \text{sen}^2 i \cos^2 \omega J_4 \dots
\end{aligned}$$

Estas expresiones (en las que el semieje de la órbita viene representado por  $\bar{a}$  para distinguirlo del radio ecuatorial de la Tierra) se han obtenido tomando solamente los armónicos zonales  $J_2, J_3, \dots$  en el desarrollo en serie del potencial, habiéndose despreciado los términos de orden superior en  $e^2 J_2$  y  $e^2 J_4$ , así como los términos que contienen los productos  $J_2^2, J_2 J_3, J_2 J_4$ , algunos de los cuales deben ser realmente incluidos a costa de una mayor complicación en las expresiones. Al hacer la integración a lo largo de una revolución se han eliminado los términos de corto período, quedando solamente los términos seculares, cuyo efecto se acumula con el tiempo, y los de largo período. Por el contrario, no se han tomado en consideración los armónicos tesorales (que dependen de la longitud  $\lambda$ ), que dan lugar a perturbaciones de corto período difíciles de poner de manifiesto en las observaciones, y a las que más adelante nos referiremos.

Determinando por observación los valores de las variaciones de los elementos ( $\Delta e, \Delta i, \Delta \Omega, \Delta \omega$ ) para distintos satélites, se llega a una serie de expresiones de la forma

$$\begin{aligned}
\Delta &= m_2 J_2 + m_3 J_3 + \dots + m_{22} J_2^2 + m_{23} J_2 J_3 + \dots \\
\Delta' &= n_2 J_2 + n_3 J_3 + \dots + n_{22} J_2^2 + n_{23} J_2 J_3 + \dots
\end{aligned}$$

que podrán resolverse por mínimos cuadrados con relación a las incógnitas  $J_2, J_3, J_4, \dots$ , siempre que se disponga de suficiente número de ecuaciones. Con objeto de lograr una mayor precisión, las observaciones deberán además corresponder a satélites con órbitas diferentes, principalmente en cuanto a la inclinación se refiere. Esta necesidad viene reforzada por la circunstancia de que los valores numéricos de los distintos armónicos no disminuyen tan rápidamente como en un principio se pensaba.

Utilizando las distintas ecuaciones antes indicadas, se ha llegado a determinar el valor de los distintos armónicos zonales. A continuación reproducimos los valores obtenidos por Kozai en 1965:

$$\begin{aligned}
J_2 &= 1082.645 \times 10^{-6}, \\
&\pm 6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_3 &= - 2.546 \times 10^{-6}, \\
&\quad \pm 20 \\
J_4 &= - 1.649 \times 10^{-6}, \\
&\quad \pm 16 \\
J_5 &= - 0.210 \times 10^{-6}, \\
&\quad \pm 25 \\
J_6 &= 0.646 \times 10^{-6}, \\
&\quad \pm 30 \\
J_7 &= - 0.333 \times 10^{-6}, \\
&\quad \pm 39 \\
J_8 &= - 0.270 \times 10^{-6}, \\
&\quad \pm 50 \\
J_9 &= - 0.053 \times 10^{-6}, \\
&\quad \pm 60 \\
J_{10} &= - 0.054 \times 10^{-6}, \\
&\quad \pm 50 \\
J_{11} &= 0.302 \times 10^{-6}, \\
&\quad \pm 35 \\
J_{12} &= - 0.357 \times 10^{-6}, \\
&\quad \pm 47 \\
J_{13} &= - 0.114 \times 10^{-6}, \\
&\quad \pm 84 \\
J_{14} &= 0.179 \times 10^{-6}, \\
&\quad \pm 63
\end{aligned}$$

Pasemos ahora a considerar los armónicos tesorales, que por tratarse de términos que son función de la longitud, dan lugar a perturbaciones de corto período (un día como máximo), salvo en el caso de perturbaciones resonantes que aparecen en los satélites cuyos períodos son múltiplo del de rotación de la Tierra, como los satélites de comunicaciones «Syncom 2 y 3» y «Early Bird», en los que al integrar las ecuaciones del movimiento aparecen divisores muy pequeños, que dan lugar a perturbaciones de largo período. Salvo este caso particular, no es fácil detectar el efecto de los armónicos tesorales en la forma en que se ha hecho con los zonales. Las observaciones fotográficas pueden dar precisión suficiente, pero no quedan bien distribuidas a lo largo del período a causa de la variación de las condiciones de visibilidad del satélite. Por el contrario, las observaciones por métodos electrónicos, si bien pueden distribuirse convenientemente a lo largo del día, su precisión es menor. Las observaciones con Laser pueden ayudar a resolver el problema, pero hasta hoy ha sido necesario recurrir a darle otro enfoque distinto.

Fijemos un sistema de coordenadas cartesianas ecuatoriales, y sean X, Y, Z las de un satélite artificial moviéndose bajo la acción del potencial V, en el que el potencial perturbador es el [4]. Es evidente que la posición del satélite en un instante determinado quedará fijada por el valor en ese instante del potencial perturbador R, y sus coordenadas podrán ponerse en la forma:

$$\begin{cases} X = X(t, \bar{a}_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, T_0, J_n, J_{nm}, K_{nm}) \\ Y = Y(t, \bar{a}_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, T_0, J_n, J_{nm}, K_{nm}) \\ Z = Z(t, \bar{a}_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, T_0, J_n, J_{nm}, K_{nm}) \end{cases} \quad [5]$$

donde  $\bar{a}_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, T_0$  son los elementos de la órbita osculatriz del satélite en un instante  $t_0$ , y  $J_n, J_{nm}, K_{nm}$  los coeficientes de los distintos armónicos zonales y tesorales.

Desde un punto de la superficie terrestre, cuyas coordenadas en el mismo sistema antes definido llamaremos  $x, y, z$ , suponemos determinadas por observación (generalmente fotográfica) las coordenadas  $\alpha, \delta$  y (mediante el radar o laser) su distancia  $\Delta$ . Evidentemente podremos escribir

$$\begin{aligned} X - x &= \Delta \cos \delta \cos \alpha \\ Y - y &= \Delta \cos \delta \sin \alpha \\ Z - z &= \Delta \sin \delta \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \text{tang } \alpha &= \frac{Y - y}{X - x} \\ \text{tang } \delta &= \frac{Z - z}{\sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2}} \\ \Delta &= \sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2} \end{aligned}$$

e introduciendo en éstas las [5], podemos escribir

$$\begin{aligned} \alpha &= F_1(x, y, z, t, \bar{a}_0, e_0, \omega_0, \Omega_0, \omega_0, T_0, J_n, J_{nm}, K_{nm}) \\ \delta &= F_2(x, y, z, t, \bar{a}_0, e_0, \omega_0, \Omega_0, \omega_0, T_0, J_n, J_{nm}, K_{nm}) \\ \Delta &= F_3(x, y, z, t, \bar{a}_0, e_0, \omega_0, \Omega_0, \omega_0, T_0, J_n, J_{nm}, K_{nm}) \end{aligned}$$

expresiones en las que conocemos los primeros miembros, dados por la observación del satélite. Acumulando gran número de observa-

ciones desde distintas estaciones, puede obtenerse un sistema de ecuaciones de observación que, resuelto por el método de mínimos cuadrados, permitirá determinar las coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$  de las estaciones de observación, los elementos osculadores ( $\bar{a}_0$ ,  $e_0$ ,  $i_0$ ,  $\Omega_0$ ,  $\omega_0$ ,  $T_0$ ) de cada uno de los satélites observados, y los valores numéricos de los coeficientes  $J_{nm}$  y  $K_{nm}$ .

Son evidentes las dificultades que presenta este método, tanto en cuanto a la teoría se refiere como a la resolución del sistema de ecuaciones, en la que con un número finito de ecuaciones habría que determinar un número infinito de incógnitas  $J_{nm}$ ,  $K_{nm}$ , ..., lo que obliga a desprestigiar en la práctica de los coeficientes  $J_{nm}$  y  $K_{nm}$  a partir de un cierto orden.

Aparte de los diferentes armónicos, es necesario determinar el valor del coeficiente  $GM$  que aparece, como factor, en la expresión del potencial, lo que nos permitirá conocer la escala de longitudes, necesaria en particular para el cálculo de las coordenadas de las estaciones de observación. Esto puede hacerse apoyándose en la tercera ley de Kepler:

$$\frac{4\pi^2 \bar{a}^3}{T^2} = GM \left( 1 + \frac{m}{M} \right)$$

utilizando ya sea la Luna, ya un satélite artificial. El período  $T$  puede determinarse por observación y la distancia  $\bar{a}$  conocerse por observaciones con laser en el caso de un satélite artificial, o con laser o radar en el caso de la Luna. La masa  $\frac{m}{M}$  es despreciable en el caso de un satélite artificial, o puede determinarse, en el caso de la Luna, a través de la desigualdad mensual en su movimiento. Si bien la precisión en esta determinación no era grande hasta hace poco, hoy se conoce mejor gracias al estudio de las variaciones de la velocidad radial del «Mariner 2», y se mejorará cuando se disponga de un mayor volumen de distancias de satélites, determinadas con observaciones laser.

El valor recomendado por la Unión Astronómica Internacional en 1964 es:

$$GM = 398603,2 \times 10^9 \text{ m}^3 \text{ seg}^{-2},$$

que corresponde a un valor para el semieje del elipsoide terrestre:

$$a = 6.378\,165 \text{ metros}$$

y un aplanamiento

$$\alpha = 1/298,25$$

y

$$J_2 = 0.0010827$$

El problema de la determinación de los diferentes armónicos tesorales, junto a la de las coordenadas de las estaciones utilizadas en las observaciones, ha sido resuelto en la forma que acabamos de indicar utilizando las observaciones efectuadas con las cámaras Baker Nunn del S. A. O. La resolución del problema con toda la información disponible habría llevado a resolver un sistema de tres mil incógnitas, por lo que hubo que recurrir a un método de iteraciones sucesivas.

Se utilizaron en efecto cuarenta mil observaciones de precisión (una milésima de segundo en el tiempo y dos segundos de arco en las coordenadas de los satélites observados) correspondientes a trece satélites distintos observados desde las doce cámaras distribuidas por todo el mundo, que dan lugar a un sistema de ochenta mil ecuaciones de observación para deducir los valores de las 36 coordenadas de las estaciones de observación y otras 64 incógnitas constituidas por los armónicos tesorales hasta el octavo orden. Se tomaron como datos los valores de los armónicos zonales hasta el orden catorce, calculados por Kozai.

Se determinaron así los valores obtenidos para los diferentes armónicos tesorales:

$n$	$m$	$J_{nm} \times 10^6$	$K_{nm} \times 10^6$	$n$	$m$	$J_{nm} \times 10^6$	$K_{nm} \times 10^6$
2	2	2.379	-1.351	5	5	0.156	-0.592
3	1	1.936	0.266	6	1	-0.047	-0.027
3	2	0.734	-0.538	6	2	0.069	-0.366
3	3	0.561	1.620	6	3	-0.054	0.031
4	1	-0.572	-0.469	6	4	-0.044	0.518
4	2	0.330	0.661	6	5	-0.313	0.458
4	3	0.851	-0.190	6	6	-0.040	-0.155
4	4	-0.053	0.230	7	1	0.197	0.156
5	1	-0.079	-0.103	7	2	0.364	0.163
5	2	0.631	-0.232	7	3	0.250	0.018
5	3	-0.520	0.007	7	4	-0.152	-0.102
5	4	-0.265	0.064	7	5	0.076	0.054



$n$	$m$	$J_{nm} \times 10^6$	$K_{nm} \times 10^6$	$n$	$m$	$J_{nm} \times 10^6$	$K_{nm} \times 10^6$
7	6	-0.209	0.063	10	2	-0.105	-0.042
7	7	0.055	0.096	10	3	-0.065	0.030
8	1	-0.075	0.065	10	4	-0.074	-0.111
8	2	0.026	0.039	11	1	-0.053	0.015
8	3	-0.037	0.004	12	1	-0.163	-0.071
8	4	-0.212	-0.012	12	2	-0.103	-0.0051
8	5	-0.053	0.118	13	12	-0.058	0.048
8	6	-0.017	0.318	13	13	-0.075	0.010
8	7	-0.0087	0.031	14	1	-0.015	0.0053
8	8	-0.248	0.102	15	12	-0.062	0.058
9	1	0.117	0.012	15	13	-0.063	-0.066
9	2	-0.0049	0.035	15	14	0.0083	-0.0201
10	1	0.105	-0.126				

El cuadro siguiente da las coordenadas de las estaciones en que se emplazaron las doce cámaras Baker Nunn, más otras tres nuevas estaciones situadas en Cold Lake, Harvestua e Islas Johnston, lo que obligó a ampliar la matriz hasta 109 incógnitas.

ESTACION	$x$ kms.	$y$ kms.	$z$ kms.
1. Organ Pass...	-1.535,761	-5.167,003	3.401,046
2. Olifantsfontein ...	5.056,134	2.716,489	-2.775,820
3. Woomera...	-3.983,756	3.743,107	-3.275,598
4. San Fernando...	5.105,601	-555,233	3.769,680
5. Tokyo...	-3.946,703	3.366,291	3.698,849
6. Naini Tal...	1.018,207	5.471,109	3.109,619
7. Arequipa ...	1.942,772	-5.804,087	-1.796,964
8. Shiraz ...	3.376,887	4.403,992	3.136,259
9. Curaçao ...	2.251,824	-5.816,924	1.327,166
10. Júpiter...	976,284	-5.601,398	2.880,247
11. Villa Dolores...	2.280,579	-4.914,577	-3.355,462
12. Maui...	-5.466,064	-2.404,279	2.242,174
14. Cold Lake ...	-1.264,841	-3.466,898	5.185,483
15. Harvestua ...	3.121,280	592,629	5.512,704
17. Johnston Island ...	-6.007,415	-1.111,875	1.825,729

Dado que todas estas estaciones están ligadas a sus respectivos sistemas geodésicos, podrán calcularse, a partir de sus coordenadas, las coordenadas cartesianas geocéntricas de cualquier otro vértice

incluido en cualquiera de dichos sistemas geodésicos, con una precisión del orden de los 15 metros.

*La forma del geoide.*

Lo anteriormente expuesto nos ha llevado por una parte a conocer las coordenadas cartesianas geocéntricas de una serie de puntos en la superficie terrestre, y por otra a conocer igualmente los valores de los coeficientes del desarrollo en serie del potencial gravitatorio definido por la expresión [2], pero este último conocimiento nos lleva inmediatamente al de la forma de la Tierra, a lo que los geodestas del Smithsonian Astrophysical Observatory han llamado la «Tierra Standard».

En efecto, la forma de la Tierra viene definida por el Geoide, que no es sino una superficie equipotencial en el campo de la gravedad, que coincide con la superficie de los mares supuesta en reposo, es decir, eliminadas las variaciones producidas por las mareas, vientos, corrientes de superficie o en profundidad, etc. Y el potencial de la gravedad no es sino el potencial gravitatorio  $V$  [2] aumentado en el potencial  $V_1$ , debido a la fuerza centrífuga en el movimiento de rotación de la Tierra de velocidad angular  $\omega$ :

$$V_1 = \frac{\omega^2 r^2}{2} \cos^2 \varphi.$$

El potencial de la gravedad es, pues,

$$W = V + V_1$$

y el geoide queda representado por la ecuación

$$W = \frac{GM}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n J_n P_n(\cos \varphi) - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left( \frac{a}{r} \right)^n (J_{nm} \cos m \lambda + K_{nm} \operatorname{sen} m \lambda) P_{nm}(\cos \varphi) \right] + \frac{\omega^2 r^2}{2} \cos^2 \varphi = \text{const.} \quad [6]$$

Como hemos calculado ya los valores de los diferentes armónicos que aparecen en el desarrollo en serie del potencial gravitatorio

rio V, queda perfectamente conocida la forma de las superficies equipotenciales, y en particular la del geoide.

El primer término de la ecuación del geoide  $\frac{GM}{r}$  corresponde a una esfera; los demás términos hacen separarse al geoide de esta forma sencilla, complicándola más y más. La figura 6 representa las

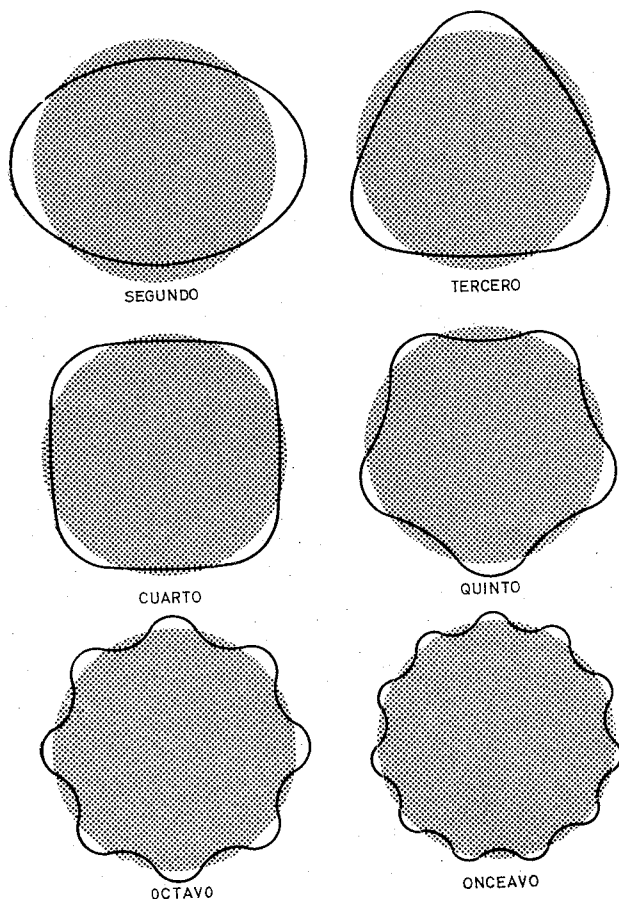


Fig. 6

deformaciones que tendría el geoide como consecuencia del efecto de cada uno de los armónicos zonales de los primeros órdenes. Debe notarse que el efecto de los armónicos de orden par mantiene la simetría del geoide con relación al ecuador, pero no así los de orden impar. Al considerar solamente el efecto de los armónicos zonales,

el geoide se mantendría como una superficie de revolución alrededor del eje terrestre, pero esta simetría se perderá en cuanto se considere el efecto de los armónicos tesorales, que son función de la longitud. El efecto de todos estos armónicos se suma para dar lugar a la forma real del geoide.

El armónico de tercer orden es responsable de la tan comentada «forma de pera» de la Tierra, que fue ya confirmada por O'Keefe al estudiar las observaciones del «Vanguard I» (en 1958) a que antes nos hemos referido.

Al sumar los efectos debidos a los diferentes armónicos, la forma resultante es, naturalmente, muy complicada, por lo que resulta aconsejable representar el geoide por un mapa en que vengan dibujadas las curvas de nivel con relación a una superficie de referencia determinada, que puede ser un elipsoide.

Si en la ecuación del geoide [6] limitamos el desarrollo a los primeros armónicos zonales, por ejemplo hasta el cuarto orden, obtendremos una expresión

$$U = \frac{GM}{r} \left[ 1 - \left[ \left( \frac{a}{r} \right)^2 J_2 P_2 + \left( \frac{a}{r} \right)^3 J_3 P_3 + \left( \frac{a}{r} \right)^4 J_4 P_4 + \frac{\omega^2 r^2}{2GM} \cos^2 \varphi \right] \right] = \text{Cte}$$

que nos define lo que llamaremos por extensión el «esferoide normal», cuyo volumen es igual al del geoide y que al quedar definido por las mismas constantes ( $J_2$ ,  $J_3$ ,  $J_4$ ) que el geoide puede considerarse como una representación muy aproximada de dicho geoide. Este «esferoide normal» se ha obtenido despreciando los términos en la segunda potencia del aplanamiento. Si representamos por  $T$  la suma de los términos despreciados al formar la expresión anterior, será

$$T = W - U,$$

que representa la diferencia entre el potencial del geoide y el del esferoide, diferencia que puede considerarse como un potencial perturbador, debido a las masas perturbadoras existentes entre el esferoide (o elipsoide) y el geoide. Si representamos por  $N$  la distancia entre ambas superficies, puede escribirse

$$T = \int_0^N g \, dN.$$

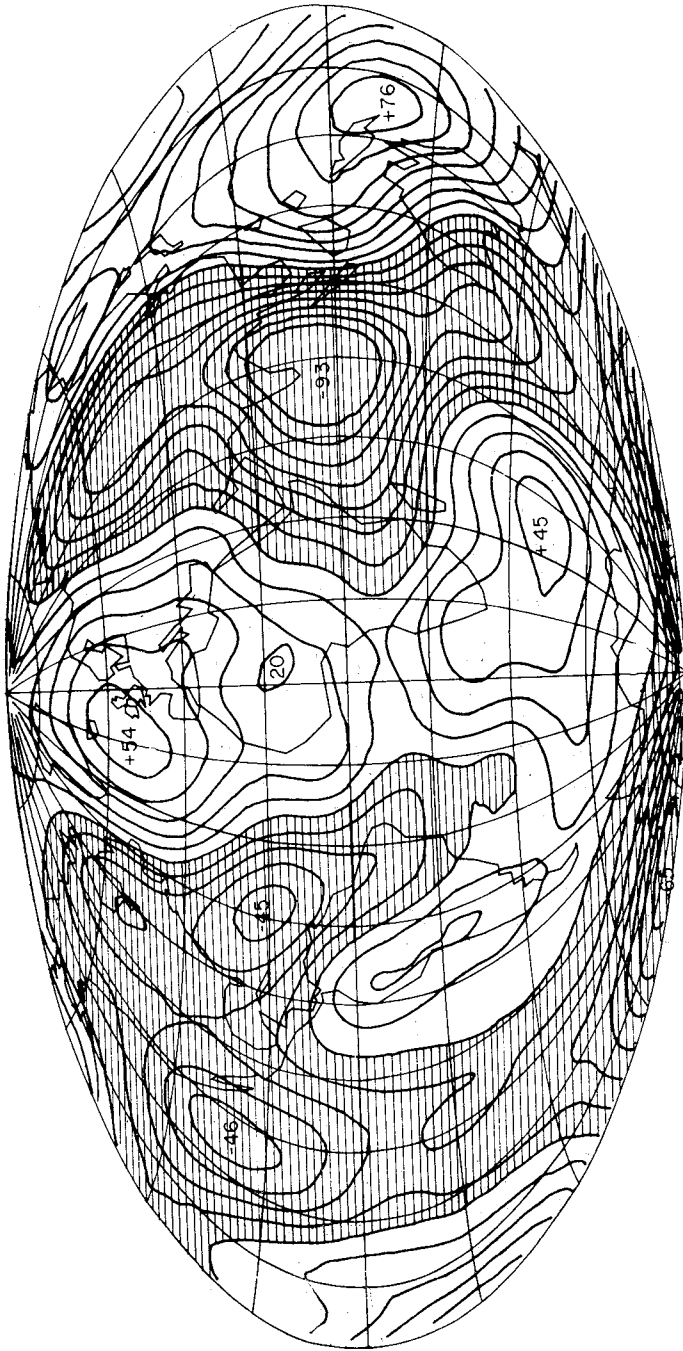


Fig. 7

Y si suponemos, lo cual es lícito con una buena aproximación, que la gravedad  $g$  es constante entre el elipsoide y el geoide, obtenemos la fórmula de Bruns

$$T = g N,$$

y reemplazando  $g$  por la gravedad normal  $\gamma$  en el elipsoide, queda por último

$$N = \frac{T}{\gamma} = \frac{W - U}{\gamma}$$

Esta expresión nos permite determinar con una precisión del orden de los diez metros las altitudes o cotas de los puntos del geoide sobre el elipsoide definido por  $J_2$  en función de los armónicos zonales de orden superior al cuarto y los armónicos tesaerales, cuyos valores se determinaron anteriormente.

Así se ha obtenido el mapa que reproducimos en la figura 7, que representa el geoide con curvas de nivel de 10 metros correspondientes a la «Tierra Standard» del Smithsonian Astrophysical Observatory.

Recientemente, Veis («Bull. Geod.», 89) ha mejorado los resultados antes citados, incluyendo nuevos datos de observaciones de satélites artificiales y de pruebas lunares obtenidas después de 1966. Los parámetros obtenidos para el elipsoide de referencia son:

$$a = 6.378.142 \pm 6,0 \text{ metros}$$

$$1/\alpha = 298.255 \pm 0.005$$

Los nuevos valores de los armónicos zonales obtenidos por Kozai en 1967 son los siguientes:

$J_2 = 1082.639 \times 10^{-6}$	$J_3 = -2.565 \times 10^{-6}$
$J_4 = -1.608$	$J_5 = -0.174$
$J_6 = 0.542$	$J_7 = -0.419$
$J_8 = -0.128$	$J_9 = -0.022$
$J_{10} = 0.338$	$J_{11} = 0.176$
$J_{12} = 0.053$	$J_{13} = -0.146$
$J_{14} = -0.174$	$J_{15} = -0.065$
$J_{16} = 0.449$	$J_{17} = -0.052$
$J_{18} = -0.324$	$J_{19} = -0.075$
$J_{20} = 0.334$	

Los armónicos tesorales han sido también recalculados por Köhlein en 1967. He aquí sus resultados:

$n$	$m$	$J_{nm} \times 10^6$	$K_{nm}$	$n$	$m$	$J_{nm} \times 10^6$	$K_{nm}$
2	2	2.38	-1.35	9	8	0.13	0.00
3	1	1.71	0.23	9	9	0.08	0.04
3	2	0.84	-0.51	10	1	0.10	-0.07
3	3	0.66	1.43	10	2	-0.08	-0.06
4	1	-0.47	-0.39	10	3	-0.08	-0.05
4	2	0.35	0.48	10	4	-0.06	-0.08
4	3	0.92	-0.24	10	5	0.02	-0.02
4	4	0.04	0.30	10	6	-0.04	-0.01
5	1	-0.06	-0.05	10	7	0.04	-0.05
5	2	0.53	-0.21	10	8	0.04	-0.05
5	3	-0.40	0.07	10	9	0.05	-0.04
5	4	-0.20	0.02	10	10	0.03	-0.02
5	5	0.18	-0.56	11	1	-0.03	0.02
6	1	-0.08	0.01	11	2	0.05	-0.05
6	2	0.01	-0.27	11	3	0.01	-0.08
6	3	-0.04	0.03	11	4	-0.03	0.00
6	4	-0.08	-0.48	11	5	0.03	0.02
6	5	-0.26	-0.46	11	6	-0.03	-0.02
6	6	-0.02	-0.16	11	7	0.03	-0.03
7	1	0.17	0.11	11	8	0.04	-0.02
7	2	0.32	0.16	11	9	0.03	0.01
7	3	0.18	0.00	11	10	-0.03	-0.01
7	4	-0.16	-0.04	11	11	0.10	0.06
7	5	0.07	-0.01	12	1	-0.09	-0.07
7	6	-0.23	0.10	12	2	-0.06	0.02
7	7	0.07	0.06	12	3	0.03	0.02
8	1	-0.01	-0.01	12	4	-0.05	0.01
8	2	0.04	0.04	12	5	0.02	0.01
8	3	-0.03	0.00	12	6	-0.01	0.01
8	4	-0.17	-0.02	12	7	-0.04	-0.02
8	5	-0.09	0.09	12	8	0.00	0.01
8	6	-0.01	0.30	12	9	-0.01	0.02
8	7	0.02	0.04	12	10	-0.01	0.00
8	8	-0.18	0.03	12	11	-0.05	-0.02
9	1	0.11	0.00	12	12	-0.01	-0.01
9	2	0.03	0.05	13	1	0.00	0.04
9	3	-0.03	-0.01	13	2	-0.03	0.01
9	4	0.07	0.02	13	3	0.00	0.03
9	5	-0.04	0.04	13	4	-0.01	-0.02
9	6	0.04	0.01	13	5	0.03	-0.02
9	7	0.04	-0.02	13	6	-0.03	0.05

$n$	$m$	$J_{nm} \times 10^6$	$K_{nm}$	$n$	$m$	$J_{nm} \times 10^6$	$K_{nm}$
13	7	-0.02	0.00	14	12	0.05	-0.03
13	8	-0.02	-0.01	14	13	0.01	0.04
13	9	0.02	0.05	14	14	-0.04	0.02
13	10	0.04	-0.02	15	1	0.01	-0.01
13	11	-0.02	0.01	15	2	-0.02	-0.03
13	12	-0.02	0.06	15	3	0.02	0.03
13	13	-0.07	0.00	15	4	0.00	0.01
14	1	-0.01	0.02	15	5	0.03	-0.02
14	2	-0.01	-0.04	15	6	0.03	-0.05
14	3	0.06	-0.03	15	7	0.03	0.04
14	4	0.00	0.00	15	8	-0.06	0.00
14	5	0.05	-0.03	15	9	0.00	0.04
14	6	0.01	-0.03	15	10	0.02	0.01
14	7	0.03	0.02	15	11	0.01	0.01
14	8	-0.03	-0.03	15	12	-0.07	0.05
14	9	0.03	0.07	15	13	-0.05	-0.03
14	10	0.04	0.01	15	14	0.01	-0.03
14	11	0.04	0.01	15	15	-0.02	-0.01

También reproducimos (fig. 8) el nuevo mapa con las curvas de nivel del geoida obtenido por Veis.

\* \* \*

Las esperanzas que los geodestas pusieron en la observación de satélites artificiales no se han visto, pues, defraudadas. Y mucho es lo que aún se espera de estos nuevos métodos de la Geodesia Espacial.



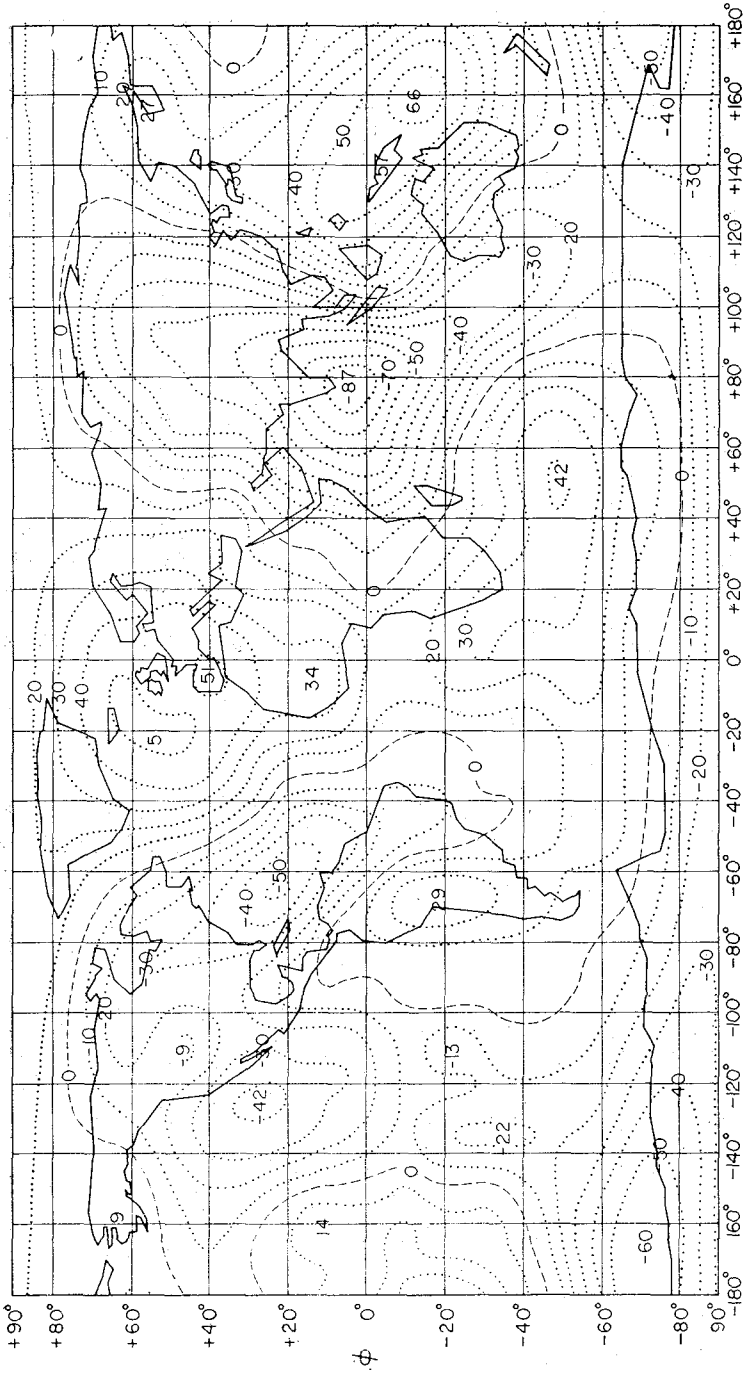


Fig. 8

# DISCURSO DE CONTESTACION

DEL

RVDO. P. ANTONIO ROMAÑA PUJÓ, S. J.

No es fácil tarea para mí contestar al magnífico discurso que acabáis de escuchar, y no solamente por las especiales circunstancias que concurren en la persona del profesor Torroja, en quien no podemos menos de ver la concreción y como encarnación de toda una estirpe de científicos insignes y académicos eminentes, sino porque entre nosotros mismos se sienta quien con muchos más títulos que yo debería pronunciar estas palabras de cordial bienvenida, el ilustre tío del recipiendario y mi inolvidable maestro de Geometría de la Posición y Geometría Descriptiva, don Antonio Torroja Miret. Y al cotejar lo que yo voy a poderos decir, con lo que sin duda hubiérais escuchado de sus labios, francamente no puedo desechar el temor de que os sintáis defraudados. En fin, pensaré que como en aquellos ya lejanos días de 1925 a 1927, mi antiguo profesor «me ha sacado a la pizarra» y voy a tener que exponer yo con la imperfección del discípulo lo que él os habría explicado con la nitidez del maestro... Por lo demás reconozco paladinamente que, no obstante este temor que acabo de confesaros, no puede ser más grato para mí el deber que se me ha impuesto, y agradezco de corazón a la Academia su encargo de representarla en estos momentos: mi vida científica ha estado tan unida desde hace tantos años con la del profesor Torroja, que me colma de satisfacción el que se haya asociado mi nombre al suyo en este acto solemne. Fuera de que nuestras continuas relaciones y colaboración evitan se me pasen por alto méritos y actuaciones suyas, que, dada su modestia y la poca importancia que él concede a sus propios éxitos, fácilmente podrían escapar a quien hubiese convivido con él menos íntimamente.

Conocí a José M.<sup>a</sup> Torroja poco después del fin de nuestra guerra, en el verano de 1940. Estaba entonces terminando su tesis doctoral bajo la dirección del que había sido director interino del Observatorio del Ebro durante los últimos meses de la contienda, y fue poco después compañero de no pocos de vosotros en esta Academia, el P. Enrique de Rafael. ¿Fue él quien inició a José M.<sup>a</sup> en

su dedicación a la Astronomía y a la Geodesia? En todo caso, él fue quien le sugirió como tema de investigación el estudio desde un punto de vista enteramente general del problema de la repetición de los eclipses, buscando explicación científica de algunos de los periodos conocidos como fruto de la observación, hallando otro nuevo y más amplio por vía puramente deductiva, y analizando la variación de las circunstancias que en los eclipses concurren a lo largo de sus series, con la mira ya puesta desde entonces en su utilización para fines diversos de los estrictamente astronómicos. Dadas las íntimas relaciones del Observatorio del Ebro con el padrino, y desde entonces con el doctorando, su tesis se publicó en 1941 con el número 8, en la serie de Memorias del Observatorio; antes había sido precedida por dos trabajos sobre la *Generalización del concepto del Saros*, el primero, y sobre la *Influencia de las revoluciones anomalísticas del Sol y de la Luna en la determinación de periodos de repetición de los eclipses*, el segundo, que aparecieron en *Las Ciencias* y en la *Revista* de esta Real Academia en 1939 y 1940, respectivamente. No es menester puntualizar que la tesis obtuvo la máxima calificación; y fruto de ella fue que Torroja comenzó a frecuentar nuestro Observatorio, haciendo prácticas con nuestra modesta ecuatorial, que él puso en estación cuando la montamos de nuevo al reconstruir el pabellón heliofísico después de la guerra. Por este tiempo también, es decir, en el curso 1940-41, comenzó a desempeñar como encargado de curso la Cátedra de Astronomía y Geodesia de la Facultad de Ciencias de Madrid, que ganó luego, tras brillantes oposiciones, en 1945. Ciertamente que ya desde entonces fue inclinándose cada vez más a las aplicaciones geodésicas de la Astronomía, a lo que contribuyó sin duda el que, una vez ingresado en el Instituto Geográfico en 1942, fuese destinado a la Brigada Geodésica de primer orden, y en ella permaneciese hasta fines de 1952. Pero esto no obstante, no dejó de interesarse por otros problemas astronómicos y astrofísicos, y es para mí un deber de gratitud recordar su colaboración eficaz en varias de las líneas de trabajo de nuestro Observatorio. El P. Rodés se había hecho el paladín de la idea lanzada por primera vez a principios de siglo por los astrónomos de Greenwich, esposos Maunder, de la posible influencia de la Tierra en la formación y desarrollo de las manchas solares; incluso por su intervención, había adoptado en 1935 la Comisión de Capas del Sol de la Unión Astronómica Internacional, la resolución de que en adelante las observaciones de manchas solares se publicasen en el

*Quartely Bulletin of Solar Activity* de Zurich, en forma tal que fuese posible estudiar este discutido influjo. En el Ebro creímos deber recoger su herencia a su fallecimiento y abordar bajo un aspecto enteramente universal el estudio que él había llevado a cabo con solos nuestros datos. En la labor verdaderamente exhaustiva a base de todos los datos publicados hasta entonces por todos los observatorios solares del mundo sobre todas las manifestaciones de la actividad solar susceptibles de que en ellas se manifestase dicho influjo, fue para nosotros preciosa la colaboración de José M.<sup>a</sup> Torroja, con el que publicamos dos trabajos, el primero, el llamado *efecto-tierra* en la actividad solar, en «Revista de Geofísica» (1945), y el segundo, *El predominio de las manchas solares al este del meridiano central y la inclinación de sus ejes hacia el Oeste*, en «Urania» (1948). Ambos fueron tomados en consideración en «Zeitschrift für Astrophysik», y en el «Boletín Central de los Institutos Astronómicos de Checoslovaquia», y si bien Bruzeck no admitió nuestras conclusiones, en cambio, Unsöld les dio beligerancia y las incluyó en su monumental tratado *Physik der Sternatmosphären*. Una línea de investigación quedaba iniciada, y en ella trabajaron últimamente el profesor Torroja y el actual Vicedirector del Observatorio del Ebro, P. José Oriol Cardús; y si quedó interrumpida, he de reconocer que fue exclusivamente por culpa del que os está hablando, que ya entonces comenzaba a padecer la distorsión de múltiples ocupaciones, y que llevado de su obsesión de no querer publicar nada que no hubiese comprobado personalmente, dejó dormir largos años sobre su mesa de trabajo las cuartillas preparadas por sus dos colaboradores y no osó luego darlas a la imprenta al advertir que, entre tanto, las investigaciones sobre la materia habían ya tomado otra dirección. Que me perdonen ambos si con esto corté unas iniciativas: en todo caso, sospecho que el resultado ha sido beneficioso, pues en vez de cooperar en líneas de trabajo ajenas, emprendió cada uno de ellos directrices propias, en que su acción se ha manifestado realmente fecunda. La de Torroja ya os la he mencionado antes; pero de nuevo, antes de entrar en su consideración, menester es enumerar otros trabajos suyos en el campo astronómico propiamente tal. En 1946 me propuso aquel hombre extraordinario, con el que tan grande deuda tiene contraída la investigación española, don José M.<sup>a</sup> Albarreda, la constitución en el seno del Consejo Superior de Investigaciones Científicas de una especie de Departamento de Astronomía, que después de varios tanteos cristalizó en la UNACA, Unión Nacional de Astronomía y Ciencias Afines. Pues bien, la primera persona.

en quien se pensó para llevar adelante la empresa fue nuestro recipiendario, no sólo por su competencia en la materia, sino por sus extraordinarias dotes de organizador, heredadas, me atrevería a decir, de su padre don José M.<sup>a</sup>, el Secretario Perpetuo de esta Academia, y no menos perpetuo de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias, con la que en momentos tan difíciles como el verano de 1938 organizó aquel maravilloso Congreso de Santander, caso único de una asamblea científica, quizás la más concurrida de su historia, en un país en plena guerra intestina. Con José M.<sup>a</sup> Torroja comenzamos en 1947 la publicación, en su segunda época, de la revista «Urania», órgano hasta entonces de la Sociedad Astronómica de España y América, y desde entonces de dicha Sociedad, y a la par de la UNACA; de ella han aparecido ya más de 20 volúmenes y, no obstante múltiples dificultades de orden científico o económico, se ha conseguido que con mayor o menor puntualidad se fuese siempre publicando sin perder en calidad ni en extensión. Casi al mismo tiempo que la publicación de la revista, emprendió Torroja, a la sombra de la UNACA, la organización del Seminario de Astronomía y Geodesia de la Universidad de Madrid, que tanto prestigio y desarrollo ha alcanzado después. Su creación no pudo ser más oportuna. Muchos de vosotros recordaréis aquellos años de 1946-47-48, en que la ONU nos había condenado al ostracismo y se había puesto de moda arrojar a España de todos los organismos internacionales. La Unión Astronómica Internacional (UAI) había convocado una reunión reducida en Copenhague para tratar de su reorganización una vez acabada la guerra, y la Comisión Nacional de Astronomía me había designado para acompañar a la misma al Subdirector del Observatorio de Madrid, doctor Gullón, nombrado delegado principal; pero no obstante todos nuestros esfuerzos, no hubo manera de conseguir a tiempo el visado de Dinamarca: al fin lo concedió tan tarde, que ya no daba tiempo de llegar ni a la sesión de clausura. La misión oficial ya no tenía objeto; pero ello no obstante, el entonces Director General de Relaciones Culturales, Marqués de Auñón, opinó que el viaje no debía omitirse, aunque modificando su carácter e itinerario, y así se me encargó visitar en el Observatorio de Leiden (Países Bajos) a su Director, el profesor Oort, Secretario General de la UAI, a fin de asegurar la situación de España en la misma. El problema era delicado, pues además de los motivos políticos, podían alegar para echarnos la formidable excusa de que debíamos más de diez anualidades, cuando bastaba la deuda de sólo tres para poder ser dados de baja reglamentariamente. Por for-

tuna, el profesor Oort y el astrónomo belga doctor Delporte, que se encontraba fortuitamente en Leiden, habían sido grandes amigos del difunto P. Rodés; y ésta fue nuestra carta de triunfo; el recuerdo de su amistad les hizo buscar manera de conjurar el peligro; y como entonces había quedado fuera de servicio el Rechen-Institut de Alemania, en que periódicamente se calculaban las efemérides indispensables a todos los observatorios del mundo para la observación de los pequeños planetas, y era ya apremiante la necesidad de disponer cuanto antes de las del año siguiente, que estaban por calcular, sugirieron se ofreciese España a calcularlas, con lo que toda veleidad de expulsión se conjuraría, ya que, si a tal extremo se llegaba, otros tendrían que asumir la tarea y esto, sin organización y medios adecuados, suponía un trabajo ímprobo que todos rehuían. El plan podía parecer por lo menos temerario, pues no se contaba con personal ni medios de cálculo adecuados; pero no era posible detenerse en vacilaciones, y además una especie de instinto nos aseguraba que no faltaría la persona que salvase la situación... y no nos equivocamos: todos los astrónomos y observatorios españoles coadyuvaron denodadamente en la medida de sus fuerzas; pero quien asumió la carga principal y continuó luego llevándola por sí solo durante varios años con su Seminario de Astronomía y Geodesia, fue José M.<sup>a</sup> Torroja, que siguió colaborando en la Comisión Internacional de Pequeños Planetas durante casi un decenio, hasta que la introducción de los métodos de cálculo electrónico en Estados Unidos y Rusia hizo ya innecesaria la colaboración española. Por lo demás, no se limitó entonces, y en los años siguientes al mero trabajo de calcular las efemérides de un número respetable de asteroides; no habría pasado esta labor de un servicio, incapaz de satisfacer el carácter investigador de Torroja. Ya desde los primeros años de su participación en esta empresa, unas veces solo y otras en colaboración con diversos astrónomos (Carrasco, Vélez, Pensado, y González Aboín entre otros), comenzó a corregir y rectificar las órbitas de varios asteroides y aún a calcular para algunos órbitas enteramente nuevas, como las de los pequeños planetas Radcliffe y Yugoslavia y la del asteroide número 1557 (1942 AD). Y si se atiende a la labor desarrollada por otros bajo su dirección en el Seminario de Astronomía, son numerosas las que hizo rectificar o calcular de nuevo, y ello no sólo de asteroides, sino también de estrellas dobles, visuales o fotométricas, a las que dedicó asimismo su atención a partir de 1950, lo mismo que a problemas estadísticos relacionados con

la distribución y características de sus elementos. En 1952 entró a formar parte del cuerpo de Astrónomos del Observatorio de Madrid, y muy en consecuencia con sus actividades en el Seminario de Astronomía y Geodesia estuvo encargado durante trece años del servicio sistemático de observación fotográfica de pequeños planetas y ocasionalmente de algunos cometas, como el Mrkos Honda y el Pons Brooks, en 1953, el 1956h y el Alcock en 1963. Nombrado Decano de la Facultad de Ciencias de Madrid, y cada vez más absorbido por sus funciones docentes y de gobierno, tuvo que dejar su labor en el Observatorio en 1967. Durante su permanencia en el mismo, dos veces publicó reglamentariamente en su *Anuario* amplios estudios, el primero sobre *La Astronomía en el problema de la determinación de la forma y dimensiones de la Tierra*, en 1959, y el segundo en 1966, sobre *Los satélites artificiales y la Astronomía*, dos *mises au point* magníficas, desarrolladas con gran competencia, que nos introducen naturalmente en lo que constituye la faceta principal de la actividad científica de Torroja, las aplicaciones geodésicas de la Astronomía.

Como ya hemos indicado antes, la vocación al estudio y mejora de los métodos geodésicos se reveló en Torroja desde sus primeros trabajos. A ello consagró principalmente su estancia en Estados Unidos como pensionado de la Junta de Relaciones Culturales en 1947: tanto en las Universidades de Yale y Cincinnati, como en Washington, en el Observatorio de Georgetown, y sobre todo en el Coast and Geodetic Survey se especializó en cuestiones de Mecánica Celeste relacionadas con la Geodesia; el Director del Observatorio de Georgetown, P. Hayden, era precisamente el encargado de organizar y coordinar en Estados Unidos la observación de eclipses con finalidad geodésica. Con tales antecedentes no es de maravillar que, una vez nombrado Vocal de las Comisiones Nacionales de Astronomía y de Geodesia y Geofísica en 1948 y del Consejo Superior Geográfico en 1951, al aproximarse el eclipse total de Sol de 25 de febrero de 1952, que iba a ser observable desde un territorio entonces español, la Guinea Ecuatorial, promoviese con todo empeño el envío de una expedición que hiciese que España volviese a participar en esta clase de observaciones, de las que se hallaba por desgracia ausente desde 1914... La Comisión Nacional de Astronomía procuró con todo celo organizar la expedición; pero por una serie de trabas burocráticas y sobre todo económicas, no pudo salir airosa en su empeño... Entonces se produjo el fenómeno que llamaríamos «típicamente español»: el Observatorio de San Fer-



nando, por un lado, y por otro el Observatorio del Ebro y la UNACA, bajo la égida del Consejo Superior de Investigaciones Científicas, decidieron observar el eclipse, aunque fuese con medios exiguos; y gracias a ello otros organismos se decidieron a prestar también su ayuda, con lo que al fin la expedición pudo llevarse a cabo casi tal como se había concebido inicialmente, tomando también parte en ella el Observatorio de Madrid. Más aún, aprovechando la oportunidad, el Servicio de Magnetismo del Instituto Geográfico y Catastral decidió proceder a un levantamiento preliminar del mapa magnético en proyecto de la Guinea Continental y la isla de Fernando Poo. Dos personas, sobre todo, aseguraron el éxito de la empresa: la primera en Guinea, el Vicedirector del Observatorio del Ebro, P. J. O. Cardús, que en compañía del eficiente Jefe del Servicio Meteorológico de Bata, Rafael Capuz, y luego del incomparable conocedor de aquellos territorios, el comandante García Cogollor, del Servicio Geográfico del Ejército, recorrió toda la colonia para buscar el emplazamiento adecuado para la observación del eclipse, y una vez elegido, determinaron sus coordenadas y se ocuparon de los trabajos preliminares indispensables para la instalación del utillaje científico de la expedición; la otra, en la Península, fue nuestro recipiendario, quien de tal manera se volcó en la preparación inmediata y superación de todas las dificultades, que el Almirante don Wenceslao Benítez, Director de San Fernando, no se cansaba de ponderar la eficacia de su intervención. Con la decidida y espléndida ayuda de la entonces Dirección General de Marruecos y Colonias y del Gobierno General y autoridades todas de Guinea, los distintos trabajos programados pudieron desarrollarse en su totalidad, y si bien el tiempo, como tantas veces ocurre en estos casos, impidió que de algunos se sacase todo el fruto que se deseaba, fue con todo lo suficientemente bueno para que tuviese pleno éxito el que constituía la aportación más original de la expedición española, la determinación de la hora precisa de los contactos interiores por el método que Torroja denominó «afocal», ideado y puesto por primera vez en práctica por él en colaboración con Vicente Bongera, utilizando una cámara fotográfica apropiada, construida expresamente para el caso en los talleres de la Facultad de Ciencias de Madrid.

Yo me atrevería a decir que esta observación «imprimió carácter» en la evolución ulterior de la actividad científica de Torroja. Designado para formar parte de la delegación española que acudió en septiembre del mismo año a la Asamblea de Roma, de la Unión Astronómica Internacional, comenzó a intervenir activamente en los tra-

bajos de la Comisión de Eclipses, de la que fue hecho miembro, y su procedimiento interesó tanto, que varios observatorios decidieron emplearlo en eclipses ulteriores, como de hecho ocurrió con ocasión del de 30 de junio de 1954; Torroja lo observó desde Sydkoster, en Suecia, valiéndose de un nuevo aparato, perfeccionamiento del anterior, y fue un éxito no pequeño el que la precisión lograda por él en la determinación del tiempo fuese la mejor de todas, incluyendo las determinaciones hechas por procedimientos mucho más costosos por las Fuerzas Aéreas Americanas y el Instituto Geográfico Sueco. El interés del método y observaciones de Torroja para la entonces incipiente Geodesia espacial quedó bien patentizado por la atención que inmediatamente les prestó la Asociación Geodésica Internacional, que les dio amplia cabida en el número 39 del *Bulletin Géodésique*, y lo mismo ocurrió con el primer tratado de Geodesia espacial que vio la luz, el titulado *Kosmische Geodäsie*, de Berroth-Hofmann, el cual les dedica dos páginas completas y reproduce tres de las figuras de las publicaciones de Torroja. Y aunque sea anticipar un poco, otro tanto sucede con la obra más reciente de Ivan I. Müller, *Introduction to Satellite Geodesy*.

El Año Geofísico trajo consigo la puesta en órbita de los primeros satélites artificiales y con ellos perdía interés la observación de los eclipses de Sol con fines geodésicos, que siempre exigía expediciones costosas y no pocas veces condenados al fracaso por el mal tiempo; los satélites iban a proporcionar medios de observación mucho más frecuentes, seguros y aún económicos. Atento siempre a las más recientes tendencias de la Ciencia, también Torroja se orientó hacia el nuevo camino; pero no por eso olvidó que los eclipses totales de Sol, seguían teniendo interés astronómico y astrofísico, y así organizó la observación del 2 de octubre de 1959, desde El Aaiún, en el Sahara; juzgaba y con razón que, al ser el eclipse observable desde un territorio español, era una cuestión de honor que no faltase una expedición española, cuando tantas extranjeras iban a instalarse en las Canarias. El hecho de haber preferido el Sahara a las islas fue fruto de un detenido estudio climatológico, emprendido con varios años de anticipación, y que Torroja publicó en 1956 como publicación número 1 de una serie que entonces se inició con el título de *Publicaciones de la Comisión Nacional de Astronomía* y que por desgracia sólo llegó a comprender dos títulos, el mencionado y el publicado también por Torroja cinco años más tarde con el título *Resultado de las observaciones del paso de Mercurio por delante del disco solar del 7 de*

*noviembre de 1960, efectuadas en los observatorios españoles; y séanos permitido añadir, como claro indicio de la sincera voluntad de colaboración con la Comisión Nacional de nuestro recipiendario, que en ambos casos, no solamente fue el autor del trabajo, sino que logró que por medio de la UNACA los ofrendase el Consejo Superior de Investigaciones Científicas a dicha Comisión, que carecía de fondos para sufragarlos. El eclipse se observó esta vez con fines eminentemente astrofísicos y sus resultados los publicaron en colaboración Torroja, Jiménez-Landi y Solís en los números 47 y 48 de la serie de *Publicaciones del Seminario de Astronomía y Geodesia*.*

Por esta misma época andaba ya de lleno entregado Torroja a otra de sus grandes empresas, la creación del Observatorio del Teide. Cuando en 1956, con ocasión de la celebración en Barcelona de la Asamblea del Año Geofísico Internacional, manifestó el profesor Danjon, Director del Observatorio de París y entonces Presidente de la UAI, que le parecía inconcebible que España no aprovechase el cielo del Teide para la erección de un gran observatorio, que por su baja latitud y su gran altura, sería uno de los puntos de observación preferidos de todos los astrónomos europeos; no hacía sino repetir una vez más lo que habían afirmado, entre otros, astrónomos tan eminentes como Piazzzi Smyth en 1857; Simony, en 1880; Ångstrom, en 1895 y 1896 y Müller, Ekron y Mascart en 1910; este último quedó tan prendado de las condiciones de Tenerife, que propuso la creación de un observatorio internacional en Guajara, y con este motivo se inició entre nuestro Gobierno, por una parte, y los de Alemania y Francia por otra, una correspondencia a la que puso fin la primera guerra europea. La excelencia del emplazamiento llamó también la atención de nuestro nuevo compañero cuando se trasladó a Guinea en 1952, y alentado por la actitud de Danjon, que llegó a ofrecer la ayuda de la Unión Astronómica Internacional, inició las gestiones preparatorias, tanto dentro como fuera de España, y ante todo los trabajos de prospección indispensables para estudiar las condiciones que realmente reunía Tenerife para los diversos tipos de observaciones astronómicas. Fruto de sus esfuerzos fue el viaje a la isla del profesor Redmann, Presidente de la Comisión de Observatorios de la UAI, el cual, en junio de 1958, tras un detenido estudio preliminar sobre el terreno, emitió un informe enteramente favorable y trazó todo un programa de observaciones previas para la fijación de un plan definitivo de trabajo y elección de los instrumentos necesarios para el mismo. De resultas de ello, en 1959 se creó por orden ministerial el Observatorio

Astronómico del Teide y se nombró a José M.<sup>a</sup> Torroja su primer Director. Quizás algunos se maravillasen de tal nombramiento, tratándose de un Catedrático con residencia en Madrid; fuera de que el interesado manifestó paladinamente que él aceptaba el cargo sólo mientras durase el período de instalación y hasta que pudiese entregarlo, ya enteramente a punto, a un director residente, bueno será recordar que ésta es la práctica habitual de los grandes observatorios extranjeros: cifiéndonos al país vecino, el gran observatorio del Instituto de Astrofísica de París está en Provenza, y los del Instituto de Física del Globo, en Chambon-la-Forêt y en Garchy, a cientos de kilómetros de París, en donde residen sus directores..., lo que no impide que funcionen a la perfección, aunque ello suponga, naturalmente, para quienes están a su frente la molestia de frecuentes desplazamientos. Torroja se entregó a una nueva tarea con todo entusiasmo (y tal desinterés —añadiré— que no pocos de los gastos ocasionados por ella gravaron, y siguen gravando, su propia economía), y previa la adquisición de algunos pequeños instrumentos necesarios para el programa preliminar y el entrenamiento del personal, comenzaron las observaciones de prospección en Izaña en enero de 1962, y se continuaron ininterrumpidamente, empalmándolas con los primeros trabajos del programa definitivo que los instrumentos de que se disponía permitían emprender. Y éste es a mi juicio el mayor mérito de Torroja en lo del Teide: dada la modestia de nuestra economía y las normas adoptadas en las inversiones para investigación a base de su rentabilidad, pronto comenzaron a surgir dificultades para la adquisición de los grandes telescopios necesarios para el programa de fotometría y espectroscopía estelar y nebular que, de llegarse a convertir en realidad, habría de conferir a nuestra patria un puesto preeminente en un campo de investigación al que ni siquiera se ha podido asomar hasta ahora; varias veces se creyó tocar ya la meta y otras tantas se dilató la concesión de los créditos... Otro se habría desanimado, tanto más cuanto que a Torroja se le iba haciendo cada vez más difícil la asistencia a las Asambleas de la UAI, donde, en vista de las perpetuas dilaciones, ya muchos no querían creer en la sinceridad de los planes anunciados en 1958 y 1961, en Moscú y en Berkeley. Torroja no se desalentó: una vez encendida la llama, había que evitar que el fuego sagrado se extinguiese, y para ello dar comienzo en el Teide cuanto antes a observaciones sistemáticas de verdadero valor científico, aunque por falta de medios hubiere que dejar para más tarde la consecución del ideal prefijado. La fotometría y espectroscopía estelar y nebular pro-

piamente dichas quedarían para más adelante ; pero condición indispensable para las mismas es el exacto conocimiento de lo que puede ser causa de error o perturbación en su estudio, la luminiscencia del cielo nocturno y la luz zodiacal (aun prescindiendo de la importancia intrínseca de tales observaciones, que acababa de ser puesta de manifiesto por el Año Geofísico). El doctor Dommanget, astrónomo de Uccle (Bélgica), que acababa de ser enviado a Africa del Sur para la elección de un posible emplazamiento para un observatorio europeo, de visita en el Teide, aconsejó en el mismo sentido. Y otro tanto hizo el astrónomo de Burdeos, Mr. Dumont, que tanto se prendó del lugar, que se ofreció a trasladar inmediatamente allí uno de los telescopios de dicho observatorio, especialmente concebido para el estudio de la luz zodiacal. Al diferirse los ingresos esperados y no haber las aportaciones del Ministerio de Educación Nacional y del C. S. I. C., no dudó Torroja en acudir al mecenazgo de la Comisión Asesora de Investigación Científica y Técnica y de la Comisión Nacional de Investigación del Espacio. Y el resultado no ha podido ser más halagüeño ; gracias a tales ayudas y otras de dentro y fuera de España, como por ejemplo del Instituto de Astrofísica de París, se está convirtiendo hoy el Teide en uno de los centros más adecuados para el estudio de los dos fenómenos dichos, y en breve promete serlo también para la investigación de la actividad solar y la naturaleza física del Sol. Aunque sólo sea de paso, imposible silenciar en este punto los nombres de los dos principales colaboradores de Torroja : Francisco Sánchez Martínez, por lo que a la luz zodiacal y luminiscencia del cielo se refiere, y el P. Juan Casanovas, antiguo Jefe de la Sección Solar del Observatorio del Ebro, que de esta manera ha estado una vez más asociado a las empresas del profesor Torroja en bien del prestigio científico de España. Una vez puesto en marcha el mecanismo, es ya función del tiempo que su eficacia se vaya afianzando. Ya hemos citado la colaboración, bien fecunda por cierto, con el Observatorio de Burdeos en el estudio de la luz zodiacal ; las observaciones de luminiscencia del cielo nocturno se hacen en íntima conexión con el Instituto de Astrofísica de París y por ellas ha manifestado ya interés el Max-Planck-Institut de Lindau, que lleva a cabo por otro método observaciones análogas en la estación del Veleta, del Observatorio de Cartuja ; el Imperial College de Londres ha realizado ya tanteos preliminares de la posibilidad de practicar sistemáticamente desde el Teide observaciones de infrarrojo y está examinando su enlace con las instalaciones existentes y programas que allí se desarrollan... Por fin se ven en el

campo de la Astronomía dominios que van a ser decisivamente cultivados desde un centro español, y nuestro país va a contar con un observatorio verdaderamente universitario, como lo son la mayoría de los observatorios más progresivos del mundo, abierto a todos los astrónomos nacionales y extranjeros que quieran llevar a cabo en él sus investigaciones, sin más requisito que la garantía de su solvencia científica... Ciertamente que cuanto allí existe es todavía modesto, pero profundamente vivo, y promesa, por lo mismo, de un mañana pletórico de realidades que vindique a la Astronomía española de tantos años de forzosa esterilidad a que se ha visto condenada por falta sobre todo de medios.

Naturalmente, dada la orientación científica de nuestro recipiendario, no podían faltar en el Teide y en la Cátedra de Astronomía y Geodesia de la Universidad de Madrid las instalaciones necesarias para asegurar la participación de nuestra patria en los programas europeos de Geodesia por satélites, y más concretamente en el proyecto francés de estudio del enlace de Europa con Africa mediante observaciones del satélite «Pageos». En efecto, basta fijarse en que sus primeros trabajos de fundación del Observatorio del Teide coincidieron prácticamente con los primeros desarrollos de esta nueva modalidad de la Geodesia espacial. Y, lógicamente, al contar con un punto de observación privilegiado como Izaña y disponer asimismo del apoyo del Seminario de Astronomía y Geodesia de la Universidad de Madrid para todas las funciones de planeamiento y cálculo, se resolvió Torroja a procurarse asociar desde el primer momento a los cultivadores de estos nuevos métodos que iban a revolucionar aún más el campo de la Geodesia, como anteriormente había colaborado eficazmente en los basados en la observación de eclipses. Y así, una vez obtenida amplia información sobre los nuevos procedimientos y las investigaciones que con ellos se emprendían, en noviembre de 1964 inició una serie de gestiones cerca de la Dirección del INTA y del Estado Mayor de la Armada, encaminadas las primeras a la adquisición de cámaras balísticas que podrían ser un día necesarias en futuras bases de lanzamiento de cohetes, y entre tanto podrían ser utilizadas para observación de satélites artificiales con fines geodésicos, y las segundas a recabar el préstamo, con el objeto de emplearlo para este último fin, mientras no se pudiese disponer de las cámaras dichas, de uno de los tres cineteodolitos emplazados en el polígono de tiro «González Hontoria», de Cádiz, que tan buenos servicios habían prestado cuando la observación del eclipse de Sol en Guinea. Por diversas razones no le fue posible a la

Marina acceder a esta petición; pero afortunadamente el Observatorio de París cedió en préstamo en enero de 1966 un teodolito Astro-1, construido expresamente para este tipo de observaciones. Un cronógrafo Omega adquirido mediante una subvención del C. S. I. C. completó el equipo, y permitió iniciar las observaciones visuales en Madrid. Entre tanto y con el fin de conseguir una plena colaboración de España en las campañas internacionales que se estaban preparando, redactó Torroja en 1965 un documento informe en que proponía las bases del trabajo que se podría realizar en estos dominios y expresamente hacía resaltar la gran importancia de asegurar la participación en el mismo del Observatorio de Marina de San Fernando y del Instituto Geográfico y Catastral. Y agregaba que también era preciso planear la instalación en España, además de la estación de la SAO de San Fernando y como complemento de la misma, de un observatorio permanente de satélites artificiales con vistas a la colaboración en los estudios del método dinámico de la Geodesia espacial para una nueva y más perfecta determinación de la forma de la Tierra. No se precisaba en dicho informe en qué lugar convendría instalar dicho observatorio; pero en vista de que otros organismos o no mostraban interés, o carecían de medios para ello, logró que la Facultad de Ciencias de Madrid decidiese hacerse cargo de tales observaciones, ocupándose de la formación del personal necesario y logrando los créditos oportunos para adquirir el material que, junto con las cámaras balísticas IGN proporcionadas por la CONIE, había de constituir el centro adecuado, confiándose, como era natural, a la Cátedra de Astronomía y Geodesia. Para poder seguir de cerca el desarrollo de tales estudios y garantizar así la alta calidad de la cooperación española desde el primer momento, tuvo especial cuidado en asistir a todas las reuniones internacionales consagradas a esta materia, y así tomó parte en los simposios de París de 1964, de Atenas de 1965, de Copenhague en 1966, de Venecia en 1967 y últimamente en el celebrado de nuevo en París en marzo del año en curso. Y bien patente está que su asiduidad no ha sido inútil. Gracias a sus gestiones personales cerca del Jefe de la Oficina de Estudios de Geodesia del Instituto Geográfico francés, consiguió que en la operación proyectada de estudio del enlace de Europa con África por satélites se decidiese incluir las islas Canarias, con lo que éstas iban a quedar conectadas con el sistema geodésico europeo. El beneficio de la operación era evidente para nuestra Patria y en ella ha colaborado España con tres estaciones: la principal de San Fernando, operada por el personal de dicho

observatorio junto con el del Smithsonian Astrophysical Observatory y el del Instituto Geográfico Francés, y dotada de una de las grandes cámaras Baker-Nunn y otra balística IGN; y las dos instaladas por nuestro recipiendario con las cámaras balísticas de la CONIE en la Facultad de Ciencias de Madrid y en el Teide; las coordenadas geodésicas de estas dos últimas habían sido previamente determinadas para su enlace con el sistema geodésico español por el Instituto Geográfico y Catastral. La envergadura de estas operaciones y en particular la del programa europeo es tal, que en ellas intervienen, además de las españolas, otras 22 estaciones, tres dependientes de Institutos Geográficos o Geodésicos, cinco emplazadas en observatorios, diez en Universidades y cuatro creadas por organismos diversos, como Academias de Ciencias o Comisiones Nacionales de Investigación Espacial. En cuanto a su carácter de investigación altamente especializada, basta advertir que el Instituto Geográfico Francés ha juzgado necesario para su realización crear en su seno un Grupo especial de Estudios de Geodesia, y en Estados Unidos el Army Map Service, las Fuerzas Aéreas y el Coast and Geodetic Survey han preferido confiar su dirección al Central Bureau for Satellite Geodesy, situado en el Observatorio Astrofísico de la Smithsonian Institution, que centraliza los trabajos espaciales a escala mundial. La operación por lo demás es fruto de un acuerdo del COSPAR, Comité Científico especial del ICSU, consagrado a las investigaciones espaciales.

Me haría interminable si quisiera continuar enumerando los méritos de nuestro nuevo compañero, tanto en el trabajo científico directo como en la organización del mismo. Para no abusar de vuestra paciencia, menester será abreviar y contentarme con poco más que una simple enumeración. En 1955 sucede a su padre en el cargo de Secretario de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias. Su empuje y dinamismo se dejó notar desde el Congreso jubilar de Madrid de 1958. Su más fecunda innovación consistió en la sustitución de las clásicas sesiones de las Secciones, que con el tiempo habían ido perdiendo importancia y aun razón de ser como resultado de la creación de nuevas Asociaciones científicas que cultivaban cada una de las distintas ramas de la Ciencia, por los Coloquios sobre materias que pudiesen interesar a científicos y técnicos de distintas disciplinas, encaminados a conseguir que se pusiesen en contacto cultivadores de campos muy diversos e incluso se llegase en algunos casos a una fecunda colaboración. Y de hecho fue tal el éxito de los Coloquios, que hasta fuera de los Congresos son no pocos los organizados, ya



por la Asociación sola, ya conjuntamente con otros organismos, como por ejemplo, el Comité Nacional del Consejo Internacional de Uniones Científicas, del que Torroja es Secretario a partir de 1965, o el Comité Nacional de la Unión Internacional de Radio Científica, al que pertenece desde 1954. Entre los de mayor éxito cabe citar los tres coloquios de Geografía de Madrid, Zaragoza y Salamanca, el de Metrología y el de Ingeniería antisísmica de Madrid, en el que intervinieron representantes de varios Ministerios y se logró que extensos sectores de las clases dirigentes se interesasen por un problema que hasta entonces apenas había rebasado la Subcomisión de Sismología de la Comisión Nacional de Geodesia y Geofísica; los dedicados a las materias del Proyecto Internacional del Manto Superior y a preparar la participación española en la Asamblea de Munich de la URSI, y el celebrado hace pocos días sobre Toponimia cartográfica. Y no sólo se preocupa de ésta, que podríamos llamar iniciación en la investigación y alta vulgarización, sino que para fomentar la difusión de la cultura en zonas más extensas, hace instituir por la Asociación para el Progreso de las Ciencias el premio Feijoo, para los mejores publicistas científicos en la prensa diaria. Ni menor es su interés por la mejora de los estudios de Ciencias en nuestra patria y en particular de las de Astronomía y las que se ha dado en llamar sus Ciencias Afines, Geodesia, Geofísica, etc. Una y otra vez redacta planes para la creación de un Comité Nacional de coordinación en la enseñanza de las Ciencias, para la de un Centro Universitario de Astronomía, para la de una Escuela de Ciencias Geográficas, o por lo menos unos cursillos para postgraduados sobre estas disciplinas en la Facultad de Ciencias, que hagan que España deje de ser uno de los pocos países desarrollados en que apenas se presta atención a estas materias, de tanta importancia hoy día (piénsese tan sólo en el Año Geofísico Internacional), y en que tanto se descuida la preparación de quienes luego las tienen que cultivar necesariamente. Y siempre, nota característica de todas sus propuestas, cuantas organizaciones planea las concibe de carácter abierto a todos, interuniversitario, interprofesional, internacional incluso, sin exclusivismos ni restricciones que puedan ser cortapisa de iniciativas fecundas y condenar al país a una limitación en la utilización de sus recursos y energías, que si es perjudicial en todos los campos, evidentemente lo es más en el de la enseñanza superior y la investigación, en que tan necesitada está nuestra patria de aliento y desarrollo.

En varios puntos de cuanto antecede he ido citando algunos de los

cargos desempeñados por nuestro nuevo compañero, índice todos ellos de su incansable actividad. Muchos los he tenido que pasar por alto: así, desde 1959 es Vocal del Pleno del Consejo Superior de Investigaciones Científicas; desde 1964, Catedrático de Astronomía de la Escuela de Topografía; en la Unión Astronómica Internacional, además de ser miembro de la Comisión de Eclipses, lo es asimismo de la de Cometas y Pequeños Planetas; ha representado a España en las Asambleas de la Unión Internacional de Geodesia y Geofísica de Bruselas (1951), y Roma (1954), y en las de la Unión Astronómica Internacional de Roma (1952), Dublín (1955), Moscú (1958), Berkeley (1961), Hamburgo (1964) y Praga (1967); es Comendador de la Orden de Instrução Pública de Portugal, etc., etc. En fin, para no alargarme más, pues menester es dejar algún espacio para cumplir con lo que es asimismo obligado en estos discursos de contestación, a saber, glosar, siquiera sea brevemente, el discurso del nuevo Académico, y asimismo para no prolongar más el suplicio que para su modestia, que me es bien conocida, ha de haber constituido soportar cuanto el deber de exponer las cosas como son y mi afecto me han dictado, trataré de condensar en una sola frase la consecuencia que a mi juicio fluye de cuanto llevo dicho: no dudo que José M.<sup>a</sup> Torroja será digno heredero y continuador en nuestra Academia del eximio prestigio y fecunda labor de los miembros de su familia que en ella le han precedido.

\* \* \*

Aunque especialmente dedicado a la Geodesia espacial y en particular por satélites, es evidente que el discurso que acabamos de oír constituye un magnífico resumen de toda la Geodesia, su origen, sus objetivos, su desarrollo histórico. Y con razón, pues para poder apreciar debidamente lo que las modernas técnicas geodésicas significan, preciso era recordar las dificultades que cada progreso en estas materias ha exigido vencer con gran esfuerzo y más aún darse cuenta de las limitaciones, durante siglos insuperables, con que era ineludible contar y que se podía a lo más tratar de sortear, pero sin esperanza alguna de eliminarlas totalmente; de aquí que los resultados no pudiesen tener sino valor relativo y los sistemas geodésicos mejor definidos no gozasen en ningún caso de carácter universal. No me entretendré en resumir y comentar por menos el discurso; la exposición condensada que de su contenido acaba de hacernos el recipiendario constituye su mejor compendio. Creo preferiréis trate de complemen-

tarlo, y supuesto que el profesor Torroja nos ha expuesto magistralmente los logros conseguidos hasta ahora mediante la utilización de los satélites con fines geodésicos, permitidme os presente yo una breve sinopsis de algunos que se espera alcanzar en el futuro e incluso en breve plazo.

Y al llegar a este punto os confieso que he tenido que superar una tentación. Al describir el profesor Torroja los objetivos que se han ido cubriendo en el campo de la Geodesia espacial con ayuda de satélites, y ocuparse más especialmente de las realizaciones de la Geodesia dinámica, ha hecho referencia a las perturbaciones producidas en sus trayectorias por algunas causas ajenas al dominio de la Geodesia clásica, tales como la resistencia de la atmósfera, incluso a centenares y aún millares de kilómetros de la superficie terrestre y la presión producida por el viento solar y radiaciones de origen cósmico. Hace sólo tres lustros habíamos juzgado estas posibles perturbaciones totalmente imaginarias; hoy sabemos que no lo son, y nada más natural que preocuparse de su influencia en la dinámica de los satélites cuando sabemos que hay fuertes indicios de que incluso la velocidad de rotación de nuestro planeta se puede ver afectada por las oleadas de partículas procedentes del Sol que provocan las tempestades magnéticas. Sin ir más lejos, en el symposio celebrado en la Asamblea de Berkeley de la Asociación Internacional de Geomagnetismo y Aeronomía sobre los acontecimientos más notables del año llamado de cooperación geofísica, expuso el profesor Danjon, entonces Director del Observatorio de París, que la velocidad de rotación de la Tierra parecía haberse visto afectada en una fracción de segundo, ciertamente mínima, pero apreciable, de resultados de algunas de las tempestades magnéticas. La alteración sería realmente insignificante, pero dado el número medio de tales tempestades en cada ciclo solar y que las estudiadas en Berkeley no eran precisamente las más intensas registradas hasta la fecha, no es absurdo presumir la posibilidad de la acumulación secular de tales efectos; y en todo caso, queda legitimado el recurso al estudio de su influjo en las órbitas de los satélites artificiales sólo con que se pongan en parangón su masa y movimientos con los de la Tierra. Ahora bien, estos tipos de perturbaciones no podrán menos de parecer una invitación a considerar aplicaciones geofísicas de los satélites artificiales en dominios distintos de la Geodesia, máxime que en el Observatorio del Ebro observamos regularmente varios de los satélites denominados ionosféricos y, aunque menos directamente, también en cierto modo los consagrados al estudio

de la magnetosfera, dado que el estado y tipo de turbulencia de la misma se manifiesta por las llamadas micropulsaciones magnéticas y electrotelúricas de diversos tipos y períodos, a cuyo estudio también estamos consagrados, compartiéndolo en nuestra patria con el Observatorio Geofísico de Toledo. Pero irse por estos derroteros podría parecer como una deserción y abandono del tema elegido por el nuevo Académico ; por esto, aunque el campo sea más limitado, hemos creído más oportuno mantenernos en el de las aplicaciones derivadas de las técnicas directamente geodésicas, empleadas en los satélites, de que se pueden beneficiar las restantes ramas de la Ciencia de la Tierra, tales como la Geofísica de la Tierra sólida y la Geología, la Oceanografía, la Glaciología, e incluso la Sismología y la misma Ciencia espacial. Nos servirán de guía para ello los más recientes informes presentados por la Organización Europea de Investigaciones Espaciales (ESRO), y mejor aún por el Grupo Consultivo de Satélites Geodésicos de la NASA, en el cual se presta especial atención a las realizaciones futuras.

Antes con todo de entrar en materia, permitidme una observación a la primera parte de la exposición del profesor Torroja, en la que con tanta claridad nos ha trazado los primeros pasos de tanteo de la ciencia geodésica hasta mediados del siglo XIX. Creo es un deber de justicia subsanar la omisión en que incurren la mayoría, por no decir la casi totalidad, de los tratados de Geodesia. Al hacer la enumeración de los arcos de meridiano medidos en los siglos XVII y XVIII, preciso es recordar el que midieron en 1702 en las cercanías de Pekín los misioneros jesuítas PP. Regis y Thomas. Fue el que sirvió de base para la gran obra de triangulación y cartografía del Celeste Imperio, que llevaron a cabo a principios del siglo XVIII, y que Wegener califica como «uno de los principales mojones en la historia de la Cartografía», y el Barón von Richthofen «monumento científico del siglo XVIII, obra colosal —cito sus palabras— con que se cerró aquel brillante período de la historia de las Misiones Católicas en China». En medio de fatigas y peligros legendarios, en comarcas hasta entonces cerradas a todo extranjero, los misioneros jesuítas fueron determinando las coordenadas geográficas y haciendo el levantamiento cartográfico de aquellas regiones en toda la extensión del Asia Central. El P. de Ursis determinó la longitud de Pekín ; el español, P. Pantoja, las latitudes entre Pekín y Cantón ; los PP. Grüber y Dorville llegaron en sus trabajos hasta Lhasa, en el Tíbet, y de allí por el Himalaya bajaron hasta Agra, en la India ; el P. Souciet determinó por sí solo las coor-

denadas de 218 poblaciones y puntos prominentes de la India, la China y el Tíbet; el P. Gaubil, de 111; el P. Noel, de 89; y así otros hasta llegarse a obtener las de 1.284 puntos. Como dice el mismo Wegener, en 1718 ninguna gran potencia europea podía presumir de un mapa comparable al del Imperio de China. Y aunque menos importantes, dignos son también de memoria los trabajos geodésicos y cartográficos del P. Neret, en Siria; del P. Sicart, en el Norte de Egipto; del F. Mayer, en Rusia, y del P. Fritz en California, Sonora, Ecuador y el Amazonas: de sus trabajos afirma La Condamine que eran piezas de extraordinario valor y prueba de los conocimientos y precisión científica de su autor. El arco del meridiano medido por el P. Boscovich en 1775 en los Estados de la Iglesia, éste sí es generalmente conocido. En cambio, ha quedado también ignorada por muchos la continuación en el siglo XIX de los trabajos geodésicos y cartográficos de los misioneros de China por el P. Chevalier en el Observatorio de Zi-ka-wei, cerca de Shanghai, y los de los PP. Colin y Roblet en Madagascar. Y para terminar esta digresión, citaré algo que nos afecta más de cerca: el monumental Atlas de Filipinas, hecho por los Padres del Observatorio de Manila en el último cuarto del siglo pasado, con 30 mapas de 1.725 islas que cubren una extensión de 118.542 kilómetros cuadrados, y otro millar de islitas sin superficie medida, obra tan notable que al apoderarse de Filipinas los norteamericanos en 1898, se apresuró a tomarla bajo su protección el superintendente del Coast and Geodetic Survey y a facilitarles a los Padres los medios de terminarla. Y triste es decir que durante la dominación española rara vez pudieron obtener ni para estos trabajos ni para los de la red de previsión de baguíos y ciclones, tan perfecta que también la incorporó a la suya el Weather Bureau, otra cosa que alguna que otra ayuda simbólica...

Es claro que el gran impacto del empleo de los satélites artificiales en la Geodesia ha consistido sobre todo en independizarla de las determinaciones locales de la vertical y en haber hecho posible la constitución de un sistema de referencia mundial unificado y la definición también, a escala mundial, de las características del campo gravitatorio terrestre. En concreto, esto se ha conseguido o se está en vías de conseguirlo mediante el establecimiento de un cierto número de puntos de control esparcidos por todo el globo, localizados con una precisión de  $\pm 10$  metros en un sistema de coordenadas cartesianas con el origen en el centro de gravedad de la Tierra y asimismo mediante la determinación de los coeficientes requeridos en el análisis armónico esférico para poder utilizar en la descripción del campo gravitatorio

terrestre hasta los términos de 15° orden. Ambos objetivos están en vías de realización y el discurso de nuestro nuevo compañero os ha hecho ver hasta dónde se había llegado ya, y la fundada confianza de verlos completados en plazo relativamente breve. Ahora bien, precisamente por esta circunstancia parece ya llegado el momento de formularse una doble pregunta: ante todo, ¿de qué manera será posible utilizar al máximo en el futuro, no sólo en las aplicaciones y perfeccionamientos directamente geodésicos, sino, sobre todo, en las otras ramas de la Ciencia de la Tierra, la enorme capacidad de medidas de precisión que ha sido menester desarrollar para la realización del programa que se está completando? ; y luego, ¿qué mejoras en esta capacidad de precisión de los métodos actuales e incluso qué nuevos métodos convendrá todavía seguir desarrollando para satisfacer las exigencias científicas del porvenir inmediato?

Para contestar adecuadamente ambas preguntas, lo primero es ver cuáles son los parámetros que las técnicas actuales de la Geodesia por satélites nos permiten determinar, para, una vez conocidos, preguntarse qué tipo de investigaciones en los distintos campos de la Geofísica se hacen asequibles gracias a ellos. Comenzando, pues, por la enumeración de los primeros, los geodestas de la NASA consideran que los más significativos son los cuatro siguientes: 1.º, posibilidad de localizar con precisión, tanto relativa como geocéntricamente, puntos muy separados de la Tierra, mediante la observación de satélites desde el suelo ; 2.º, posibilidad de conocer asimismo con precisión, tanto la parte constante como la variable con el tiempo, de las fuerzas gravitatorias y de superficie que actúan sobre los satélites, por medio del análisis minucioso de las perturbaciones de sus órbitas y asimismo por medio de gravímetros instalados a bordo de ellos ; 3.º, posibilidad de localizar con precisión geocéntricamente los artefactos en vuelo, satélites, cohetes, globos o aviones ; y 4.º, finalmente, posibilidad de obtener de modo rápido y continuo, por medio de altímetros colocados en los satélites, datos sobre la forma geométrica de los océanos y de la tierra firme y sus variaciones con el tiempo, sobre todo en el sentido de la vertical. Naturalmente, el grado de precisión con que se pueden realizar hoy por hoy todas estas determinaciones, no es el mismo en todas ellas ; pero dejando para más tarde el volver sobre este punto, veamos qué series de problemas se pueden atacar, desde luego, a base de su conocimiento en las diversas ramas de las Ciencias de la Tierra, Geología, Glaciología, Oceanografía, Sismología, etc.

Por lo que toca a la Geología y a la Geofísica de la parte sólida

de la Tierra, he aquí algunos de los problemas directamente abordables con los datos que hemos mencionado: información a escala mundial sobre la ubicación anómala de masas y asimismo sobre las condiciones de contorno de las estimaciones geológicas en el interior de la Tierra, con su posible influencia en la marcha de la rotación de nuestro planeta y en la estabilidad de su eje de giro; medida de la deriva de los continentes y de deslizamientos del fondo de los océanos, lo mismo que de corrimientos de masas a lo largo de zonas de fractura; determinación de movimientos verticales de masas en la corteza y de cambios de forma de la misma a escala mundial por erosión y sedimentación; localización exacta una y otra vez de los sitios en que se llevan a cabo y se reiteran medidas geofísicas, y asimismo localización exacta de los artefactos en vuelo desde los que tales medidas se realizan. He aquí asimismo alguno de los problemas del campo de la Oceanografía y la Glaciología. En lo que respecta a la primera, posibilidad de controlar los mapas batimétricos del fondo del océano, de fijar exactamente la posición de los barcos destinados a medidas hidrográficas y geofísicas, de colocar una y otra vez con toda precisión objetos o aparatos sobre puntos determinados del fondo del mar, lo mismo que de controlar con gran exactitud la situación de las boyas con instrumentos, en fin de conocer las variaciones con el tiempo de la forma geométrica de la superficie de los mares, de resultas, por ejemplo, de las distintas corrientes y comprobar así sus discrepancias del geoido. En cuanto a la Glaciología, conocimiento del crecimiento y disminución de los glaciares y en particular de la acumulación y ablación del hielo y la nieve con las diversas estaciones, estudio del desplazamiento de los icebergs y grandes masas de hielo en los océanos, y no menos de los movimientos en pequeña escala y de las tensiones y esfuerzos superficiales de las masas heladas en orden al estudio de la reología de los hielos. También la Meteorología y Aeronomía se pueden beneficiar para conocer las variaciones de la resistencia de la atmósfera y de la presión de radiación a grandes alturas, no menos que los desplazamientos estacionales de masas atmosféricas. En fin, por no alargar indefinidamente, por lo que se refiere a la investigación del espacio, las técnicas de la Geodesia espacial por satélites pueden permitir una mejor ubicación de las estaciones de seguimiento en un sistema geocéntrico común y su más útil distribución sobre la superficie del globo, manera de calibrar de modo más exacto que hasta ahora los sistemas de seguimiento; mucha mayor perfección en

los métodos de análisis de órbitas, y consiguientemente, una precisión también mayor en la predicción de las mismas.

No es difícil ver que la serie de problemas de las diversas Ciencias de la Tierra que acabamos de enumerar como abordables, hoy mucho mejor que antes, gracias a las técnicas desarrolladas para la Geodesia espacial por satélites, se pueden clasificar en tres grupos: 1.º Los que se pueden atacar con los medios tecnológicos y el grado de precisión que hoy día se alcanza; tal es, v. gr., el estudio de las variaciones verticales y horizontales de la cubierta de hielo, por ejemplo, en la Antártida y Groenlandia, y de los movimientos de icebergs en el Océano Artico; tal es también la localización de buques en el mar y de puntos remotos en distintos continentes, con tal que sea suficiente una precisión del orden de  $\pm 25$  o por lo menos de  $\pm 100$  metros. El segundo grupo lo constituyen los fenómenos cuya resolución exige un aumento en la precisión con que las estaciones de seguimiento de satélites o de observación de los fenómenos han de ser ubicadas con auxilio de las actuales técnicas de la Geodesia por satélites, o bien una considerable mejora en la exactitud con que un satélite ha de poder ser localizado en el espacio en un momento dado, en este grupo han de clasificarse los problemas que requieran medidas geométricas de los efectos de las mareas terrestres o de movimientos tanto verticales como horizontales en zonas de fractura, debidas a terremotos o de desplazamientos horizontales de grandes masas de tierra y de efectos asociados con la mecánica de los hielos, e igualmente los que se basan en el conocimiento de las perturbaciones menores de corto período de las órbitas de los satélites.

Finalmente, en el tercer grupo hay que situar los problemas para cuya resolución hacen falta instrumentos que hoy por hoy todavía no se fabrican, por ejemplo, los relativos a la variación de la forma geométrica de los océanos, a medidas de acumulación de hielo y nieves, o de la erosión y sedimentación sobre la tierra sólida, todos los cuales suponen altímetros emplazados en los satélites, capaces de un grado de precisión aún inasequible de momento.

A primera vista, después de esta distribución en grupos de los distintos problemas, podría parecer que habíamos pecado de optimistas o ilusos al hablar de las posibilidades que los métodos de la Geodesia por satélites abrían a la Ciencia de la Tierra y que de hecho es muy poco lo que actualmente puede esperarse de ellos. Para que se vea que no es así y que los plazos de espera no son desmesurados, es interesante advertir que en los informes a que nos hemos referido al prin-



cipio de esta segunda parte de nuestra disertación, se da como seguro que, supuesto el estado actual de la tecnología geodésica y el ritmo a que se desarrolla, hacia 1975 será posible alcanzar los grados de precisión siguientes: la ubicación de las estaciones de seguimiento se podrá fijar con un margen de error de  $\pm 1$  metro; las medidas altimétricas se podrán realizar con una precisión de  $\pm 2$  metros desde una altura media entre 15 y 25 kilómetros; la posición horizontal de puntos del suelo se podrá fijar fotográficamente con imprecisión de sólo  $\pm 20$  metros; y la localización de un satélite o cohete, etc., en el espacio en un instante dado, con un error de sólo  $\pm 10$  metros; finalmente, la amplitud de las fuerzas perturbadoras de los satélites de período corto, de un día o menos, se podrá dar con un grado de precisión de  $\pm 4$  decímetros, y de las de período largo (quince días o más), con  $\pm 3$  metros. Algunos de estos grados de precisión son enteramente satisfactorios y llenan las exigencias que hoy día se juzga necesaria para ciertas medidas, por ejemplo, los relativos a la localización de las estaciones de seguimiento, de los artefactos voladores en el espacio o de los barcos en el mar, y asimismo los que atañen a los movimientos de hielo, icebergs y boyas; pero otros distan todavía mucho del límite a que se ha de tender si se quiere hacer obra verdaderamente constructiva. Así, para poder conocer con seguridad las modificaciones de la forma geométrica de los océanos por obra de las corrientes marinas, el desideratum es que los altímetros situados en los satélites puedan llegar a una precisión comprendida entre  $\pm 1$  cm. y 1 dm.; y para la determinación de las modificaciones del relieve terrestre por la elevación de los bloques continentales o por la sedimentación y erosión, a una precisión de  $\pm 0,001$  metros, en el primer caso, y entre  $\pm 1$  centímetro y 1 metro en el segundo; en cambio, para apreciar los movimientos verticales y horizontales debidos a terremotos, basta una precisión de medida entre 1 dm. y 1 metro. Claro que, aun con menor precisión, ciertas medidas no carecen de sentido, pues si se trata de fenómenos, como la elevación lenta de los continentes, de amplitud media comprendida entre 0,1 mm. y un cm. por año, distanciando las medidas o repitiéndolas durante un número suficientemente largo de años, es posible llegar a conseguir resultados significativos. Así en el caso de la deriva de los continentes o de los desplazamientos lentos de islas, que se calculan del orden de 1 a 5 cm. por año, bastará poder apreciar cambios entre 1 dm. y 1 metro en un lapso de tiempo de diez años con estaciones de observación distantes entre sí de 5.000 a 10.000 kilómetros.

En vista de todo ello y para aprovechar desde ahora los adelantos técnicos conseguidos, el Grupo Consultivo de Satélites Geodésicos de la NASA ha creído deber formular las siguientes recomendaciones para el futuro inmediato. Ante todo es de desear que se realicen análisis detallados de las perturbaciones de las órbitas de los satélites con estos tres objetivos: *a)* definir con más precisión la parte constante del campo gravitatorio de la Tierra; *b)* examinar con mayor rigor las componentes variables del mismo; y, consiguientemente, *c)* llegar a una mejor definición de los efectos de corto período debidos a la resistencia atmosférica y presión solar. En segundo lugar recomiendan que tan pronto como se pueda se ponga en marcha el programa de medida de los movimientos de hielos de la Antártida, porque por una parte requiere acumulación de datos durante muchos años, y por otra es perfectamente asequible con los medios actuales. Por supuesto, que es menester procurar con todo empeño el desarrollo y perfeccionamiento de los sistemas de seguimiento electrónicos o por laser y que no menos se considere como un objetivo primario llegar pronto a la construcción de altímetros a base de radar o laser capaces de una precisión de  $\pm 1$  ó  $2$  metros. Conviene que en cada una de las áreas de las distintas aplicaciones se inicien programas detallados de estudio que permitan definir las exigencias de cada caso y que más concretamente se acometa un programa encaminado a definir los problemas que puedan presentarse al intentar obtener precisiones del orden de  $10$  a  $1$  cm. en la localización y altimetría de una estación. Muy interesante es la recomendación de que se dé principio a programas complementarios en el suelo en áreas escogidas para comprobar la conexión de las aplicaciones propuestas de la geodesia por satélites y de los resultados obtenidos por otros medios tecnológicos; esto es de suma importancia, pues sólo mediante estas comparaciones será posible mejorar sistemas y técnicas para conseguir una completa conexión de las medidas; y de hecho lo oportuno de que así se haga puede deducirse de que ya de esta manera se ha conseguido establecer la precisión de los distintos procedimientos de seguimiento de satélites, y mediante nuevos desarrollos se ha logrado aumentarla considerablemente. Insisten por último los técnicos de la NASA en que se ponga todo empeño en mantener por lo menos al nivel actual las redes de seguimiento de satélites con las cámaras Baker-Nunn de la SAO, o por el efecto Doppler de la TRANET, pues ello es indispensable para que se mantenga una distribución adecuada de observaciones a fin de determinar los efectos de las pequeñas perturbaciones de las órbitas.

Sería sin duda de gran interés poder añadir ahora un comentario detallado de cada uno de los objetivos perseguidos con el empleo de los satélites geodésicos en los distintos campos antes enumerados de las Ciencias de la Tierra; hacer notar, por ejemplo, que la investigación de la distribución anómala de las masas en el interior de la Tierra mediante las perturbaciones de las órbitas de los satélites es una guía preciosa para el planeamiento de investigaciones geofísicas de superficie o de prospecciones en profundidad, sobre todo en áreas oceánicas en que no se puede contar con indicaciones geológicas que sirvan de orientación, y los trabajos de exploración serían prohibitivos; de hecho, este el caso de las Islas Salomón en que, a base de los resultados gravimétricos deducidos de los satélites, se ha emprendido una extensa investigación geofísica multidisciplinar, para poner en claro si las masas anómalas perturbadoras se han de referir al núcleo o son simplemente la suma de una serie de anomalías menores en la distribución de masas más bien superficiales, situadas en el manto superior o en la corteza. O por referirnos todavía a otro caso, poner de manifiesto la utilidad de los satélites geodésicos para el estudio de los movimientos del terreno en las zonas sísmicas de fractura; éstos pueden ser de dos tipos: o deslizamientos lentos del orden de unos pocos centímetros por año, o movimientos bruscos asociados con terremotos, que pueden llegar a ser de varios metros en pocos minutos; en uno y otro caso, el papel de los satélites puede ser precioso, pues todos estos movimientos sólo son conocidos respecto de puntos de referencia relativos, sin que los métodos hasta ahora en uso puedan dar evidencia concreta alguna de su valor absoluto; pues bien, al permitir los satélites determinar movimientos absolutos en una zona de fractura o, mejor aún, a escala mundial, es claro su profundo impacto en nuestros conocimientos de la Geodinámica. Y no menor puede ser su utilidad para conocer a escala mundial los movimientos producidos por los terremotos en zonas de muy difícil acceso, como algunas regiones de los Andes y el Himalaya; la combinación de los datos altimétricos y fotográficos proporcionados por los satélites geodésicos puede ser decisiva para su estudio. Pero como veis, si de esta manera nos fuésemos extendiendo a propósito de cada fenómeno investigable, nos haríamos interminables y excederíamos los límites de este tipo de disertación. Permítasenos, pues, recapitular brevemente cuanto llevamos expuesto, diciendo que es evidente que en un futuro próximo las técnicas de los satélites geodésicos van a permitir notables avances en todas las áreas de la Geofísica y la Geodesia y aun

de las mismas ciencias espaciales, y que por tanto es lógico presumir que se multipliquen sus bases de seguimiento y se perfeccionen sus métodos de observación con la mira puesta tanto en observaciones y servicios propiamente geodésicos, como en investigaciones de los más diversos tipos.

\* \* \*

El 4 de octubre de 1957 ponía en órbita la URSS el primer satélite artificial; era un fuerte golpe para el amor propio de los países más adelantados de Occidente y en particular para los Estados Unidos, donde la idea de los satélites artificiales había comenzado a fraguarse. Afortunadamente el esfuerzo de varios observatorios y astrónomos europeos y americanos hacía que, no obstante carecer de toda clase de datos técnicos sobre su lanzamiento y misiones, no sólo lograsen localizar rápidamente al «Sputnik», sino que a las pocas horas pudiesen ya comenzar a dar resultados precisos de sus observaciones, incluso más abundantes que los que luego fueron suministrando los mismos soviéticos. El honor de Occidente quedaba salvo y ello sin necesidad de aguardar a la puesta en órbita del «Vanguard» y a las incidencias de la carrera espacial, que está hoy culminando con los Apolos, los Mariner y los Venera.

Por nuestra modesta economía no ha podido soñar nuestra Patria con la puesta en órbita de grandes y numerosos satélites, al menos por ahora; pero también en este campo de la investigación espacial nuestro honor científico está quedando a salvo, no sólo por méritos de quienes con tanto y tan feliz ahinco se están esforzando por aclimatar entre nosotros las técnicas espaciales propiamente dichas, sino también por el celo y la perseverancia de quienes desde los primeros momentos se han preocupado por asegurar desde el suelo la observación sistemática de satélites ionosféricos, geodésicos y meteorológicos, no menos que la interpretación y explotación de sus datos. Y esto porque todo cuanto en estos dominios se ha ido y se va realizando, aunque modesto, lleva el sello de la autenticidad científica, que es lo que de veras cuenta en la vía del progreso.

Señores Académicos: Entre aquéllos, a quienes los investigadores españoles debemos especial gratitud por sus afanes en este sentido y en general por su interés para asegurar que nuestra Patria no quede nunca ausente de ninguno de los campos de investigación propios de su especialidad, ocupa un claro lugar el nuevo compañero al que

dentro de breves momentos vamos a dar el abrazo de bienvenida. Al hacerlo, podemos estar seguros de que realizamos una obra ciertamente de justicia, pero sumamente beneficiosa a la par para la ciencia española y en particular para nosotros mismos, que nos beneficiaremos de sus aportaciones y su prestigio. La carrera de la investigación científica no es fácil de recorrer, y menos cuando no se abunda en medios adecuados ; pero no en vano se ha dicho reiteradas veces, que la pieza más importante del mejor de los telescopios es el astrónomo que está detrás del ocular ; no dudéis que en este caso esta pieza no falta.

He dicho.