ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

DISCURSO

LEÍDO EN EL ACTO DE SU RECEPCIÓN

POR

D. ALFONSO PEÑA BŒUF

Y

CONTESTACION

DEL ILMO. SEÑOR

D. JOSÉ M.ª TORROJA Y MIRET

EL DÍA 6 DE JUNIO DE 1934

MADRID
C. BERMEJO, IMPRESOR
Santísima Trinidad, 7. - Teléf. 31199
1934

DISCURSO

DE

D. ALFONSO PEÑA BOEUF

SEÑORES ACADÉMICOS:

El honor recibido por el nombramiento que hizo a mi favor esta ilustre Academia hace que comparezca hoy con singular emoción.

Nunca creí alcanzar este elevado puesto y la gran extrañeza que tal acontecimiento me produjo en su día, la siento todavía al presente.

Cuando casi niño, de paso primero para el Instituto y luego para la Universidad, atravesaba la calle de Valverde, siempre miraba con veneración a este edificio, en el que ya sabía que se alojaba la más alta representación de la ciencia patria, veneración que aun fué más intensa cuando posteriormente pude tener ocasión de tratar a algunos Académicos, a los que admiré sinceramente.

No puedo comprender todavía cómo mi humildad ha llegado a escalar este estrado y no podría fácilmente expresar mi agradecimiento por una parte y a la vez mi inquietud, por llegar a hacerme acreedor, siquiera más tarde.

La vacante producida y por la que me honra el presente acto es la del excelentísimo señor don Mariano Fernández Cortés, Inspector general del Cuerpo de Ingenieros Agrónomos, Profesor de la Escuela del Cuerpo y hombre sabio, que gozó de la admiración de cuantos le conocieron.

No tuve el honor de tratarle personalmente, pero muy bien conocía y admiraba sus méritos por las ausencias, siempre muy gratas, de los que eran sus discípulos y por la lectura de sus obras, que reflejaban a la vez sencillez y profundidad.

La actividad del señor Fernández Cortés fué muy variada, pues sin abandonar el campo de actuación de su profesión, en la que sirvió en varios destinos oficiales, su preferencia fué siempre el estudio de las matemáticas y las aplicaciones a la Mecánica y a la resistencia de materiales, en las que tuvo gran brillantez, regentando esas cátedras.

En el Cuerpo de Ingenieros agrónomos era una de las figuras de mayor relieve y sus condiciones de bondad y de prestigio habían sido tan admiradas que su muerte constituyó una gran pérdida para el distinguido Cuerpo, según se exteriorizó en una velada necrológica que tuvo lugar en el Instituto de Ingenieros civiles hace pocos meses.

En el elocuente discurso pronunciado por el Ilmo. Sr. D. José María Torroja, en contestación al de ingreso del Sr. Fernández Cortés en esta Academia, se hizo un documentado análisis de la brillante labor científica de este ilustre Académico, que nos releva al presente de repetir, pero sin dejar de expresar el más admirado recuerdo.

Poseía el señor Fernández Cortés la medalla núm. 24, en la que había sustituído al ilustre Coronel Ugarte, que, a su vez, fué sucesor del General Barraquer y primeramente tuvo por poseedor al General de Estado Mayor señor Terrero.

Viendo esta sucesión de sabios nace en mí el natural temor de sentir cortada una admirable continuidad para la que no basta hacer propósitos de merecimientos, sino que se precisan además condiciones ajenas a la voluntad del individuo, que ya no son susceptibles de modificar.

Es preceptivo que para poder adquirir tan valioso nombramiento se haga un discurso sobre materia científica, y si para la mayor parte de los actuales Académicos fué fácil esa labor, por no requerir más que la presentación de alguno de sus fecundos trabajos, no ocurrió lo mismo conmigo, que, moviéndome en campos más modestos de las aplicaciones, ninguno de los por mí hechos me producía la sensación de tener la debida importancia.

El estudio que voy a leer a continuación no es de los que pudieran proporcionar satisfacción íntima, pues en las aplicaciones de la Mecánica a la Ingeniería, la mayor parte de las veces la solución matemática, elegante por su gentileza y su pureza, tiene que ir simplificada para ser de desarrollo posible, y es preciso tomar puntos de vista especiales para los distintos casos.

Elegido en esta forma el tema de las vibraciones en las estructuras, sólo aspiramos a poder determinar una solución del problema en la forma más sencilla con que en la práctica aparece, haciendo así fácilmente calculable un efecto dinámico de que casi siempre se prescinde sólo por evitar complicaciones.

LA RESONANCIA EN LAS ESTRUCTURAS

Las estructuras a que nos referimos en el presente escrito son las constructivas, formadas por un conjunto de piezas, enlazadas entre sí por los distintos grados de sustentación elástica o estática que constituyen la técnica de los elementos constructivos.

La teoría de la elasticidad de los sólidos aplicada a estos sistemas estructurales permite simplificaciones algorítmicas muy importantes, por el hecho de que la forma de las piezas, deducida de las funciones que deben desempeñar, son, en general, asimilables a sólidos dotados de directriz, sobre cuya línea se puede suponer concentrada la materia de las respectivas secciones transversales.

Son, pues, lo que podrían llamarse sistemas lineales, último grado del concepto general elástico de los sólidos en el espacio, y el problema de la determinación de las tensiones y deformaciones, producidas por causas externas o internas, en el seno del sólido, queda, por tanto, reducido al cálculo de los efectos en un punto cualquiera de la línea directriz, descompuestos en los tres efectos simples, de traslación a lo largo de la línea, deslizamiento transversal a ella y rotación alrededor del punto.

A pesar de tan notoria simplificación, el cálculo de las estructuras tiene a veces dificultades analíticas, que provienen de las sustentaciones y que, en estructuras complicadas por el número de sus piezas y la naturaleza de sus uniones, da origen a desarrollos de cálculo de difícil resolución, precisando en muchos casos estudiar la forma de hacer más asequible el proceso analítico, aun sacrificando en parte el rigor en los resultados. Para esto se requiere, sin embargo, un gran conocimiento del problema y, en ocasiones, mucha habilidad, para evitar el establecimiento de hipótesis que si bien quitan de un golpe muchas indeterminaciones, entrañan el peligro de la difícil comprobación de su posible cumplimiento. Es mucho más natural examinar las respectivas influencias de las variables que entran en el problema, simplificando éste, cuando sea preciso, por la eliminación de aquéllas cuyo orden de magnitud sea muy pequeño en relación con las otras, para conseguir de este modo la posibilidad de apreciar un límite del error cometido.

No es necesario, en la teoría de las estructuras constructivas, llegar a determinar, con absoluto rigor científico, las tensiones y deformaciones, pues de aplicar los conocimientos de la teoría matemática de la elasticidad (y de momento no hay ninguna otra que pueda sustituirla, aunque se hayan hecho tanteos en otras ramas de la ciencia), es preciso que, en su adaptación a los sólidos naturales, se parta de la determinación experimental de algunos coeficientes como son los de elasticidad, dilatación, módulo de Poisson, etc., que presentan variaciones y hasta singularidades en algunos materiales constructivos y que sólo en restringida región del fenómeno pueden apreciarse en condiciones de permanencia; pero el progreso de la técnica estriba principalmente en ir fijando los términos del problema para tener el máximo conocimiento posible de las distintas variables y fijar el error probable que se comete en la eliminación de algunas de ellas en la simplificación, para que en esta forma se pueda ir aproximando el trabajo de régimen al de máxima resistencia de los materiales.

En la teoría de las estructuras se hace siempre el estudio elástico para las cargas que la construcción debe soportar, supuestas que están colocadas en la posición de máximos efectos; pero paradas en esos puntos, aunque se trate de trenes móviles, y, salvo casos muy raros, no se aprecia el sensible aumento producido en las tensiones y en las deformaciones por virtud de la vibración, consecuencia del movimiento. Sólo en los puentes metálicos para ferrocarril se indica, en las instrucciones oficiales, la necesidad de aumentar la inercia para tener en cuenta estos efectos, pero de un modo exclusivamente experimental, mediante la aplicación de coeficientes aplicables en casos semejantes y con las naturales restricciones.

Antiguamente, cuando las obras de ingeniería y arquitectura se proyectaban con aquel excesivo margen de seguridad que imponía el desconocimiento de las propiedades físicas de los materiales y la influencia de las sobrecargas móviles, la gran inercia que se daba a las estructuras hacía que no fueran muy de tener en cuenta los efectos de vibración; pero en el transcurso del tiempo, con el considerable avance de la técnica, se ha producido, por una parte, una gran ligereza en las estructuras, y por otra, un creciente aumento en las cargas móviles, y su velocidad, que lleva como consecuencia una adopción de pesos propios comparables en orden de magnitud con los dinámicos y que permite apreciar como muy importante la impresión de energía transmitida.

De aquellos antiguos puentes hechos de piedra sillería para dar paso a locomotoras de cuarenta toneladas de peso con marcha muy moderada, a los puentes metálicos actuales, en que, para cargas y velocidades más que dobles, se ha llegado en tramos colgados a luces de 1.100 metros (Washington, N. Y.), la diferencia es colosal. En los primeros la masa de la obra ahoga en su seno las energías dinámicas, mientras que en los otros su influencia puede superar con mucho a la estática.

Las obras modernas de Ingeniería y hasta de Arquitectura se reducen constantemente hacia sus líneas estructurales; cada vez son más aéreas, y las inercias decrecen considerablemente a medida que las acciones dinámicas se desarrollan de modo más intenso.

La resolución rigurosa del problema dinámico por el planteo natural de añadir a las fuerzas solicitantes las de inercia debidas al movimiento, produce en las estructuras constructivas complicaciones de cálculo, en muchos casos difícilmente solventables, pero aun de serlo, es necesario que los resultados no tengan grave dificultad en su aplicación práctica.

Basta ver las ecuaciones trascendentes que dan la solución del problema de las vibraciones de los cuerpos elásticos, sólo de posible aplicación abordable en los casos de las cuerdas sonoras, esferas y placas planas pulsadas en un punto, problemas ya clásicos que han dado mucha gloria a sus autores, para comprender que no sería posible prácticamente hacer una aplicación a las estructuras constructivas formadas por un conjunto de piezas con las naturales variaciones de inercias, de apoyos, empotramientos, efectos de variación de volumen y otras complicaciones de difícil estimación analítica.

Prescindiendo de los puentes metálicos, en los que para apreciar los efectos dinámicos se emplean preceptivamente fórmulas empíricas deducidas de la experimentación para involucrar no sólo las acciones de vibración, sino también otras muchas causas de efectos no compensados, y en los que se llega al límite del simplismo por hacer entrar como única variable el vano o luz del puente, cuando tantas otras variables tiene el problema, en los demás casos de estructuras constructivas se prescinde totalmente de estos fenómenos dinámicos. Unicamente para los órganos principales de máquinas que tantas vibraciones tienen que sufrir, se emplean algunas otras fórmulas de origen teórico, fundamentado siempre en el mismo planteo de las variables elásticas con caracteres los más sencillos de sustentación.

En lugar de simplificar la cuestión por hipótesis de asimilación más o menos caprichosas y que pueden en la realidad física diferir notoriamente de las supuestas, es más lógico, a nuestro juicio, considerar el problema en su totalidad y hacer la simplificación en los cálculos mediante la estimación de sólo las variables fundamentales, pero sabiendo en todo caso cuál es el límite de la apreciación que por este motivo se considera.

En el estudio dinámico hay dos partes igualmente importantes: 1.º El cálculo de las tensiones y deformaciones, directamente o en relación con la carga estática, y en 2.º lugar el período de la vibración elástica.

Planteando el problema desde el punto de vista general, por el equilibrio de las fuerzas elásticas y de inercia (si se llega a resolver), las dos partes vienen íntimamente ligadas, pues en las ecuaciones trascendentes, en que tiene que venir la solución, se obtiene la ley de tensiones en función del tiempo, bastando determinar los nodos y vientres de la función trascendente. Si, por el contrario, la fórmula es experimental, sólo da generalmente los valores máximos de estas fuerzas por no ser posible medir las tensiones en el transcurso del tiempo muy pequeño de la vibración, y entonces el período de ésta queda igualmente desconocido.

Tan interesante es la segunda parte como la primera, pues la reiteración sucesiva de cargas dentro del período produce, por suma de armónicas, el efecto de resonancia, incrementando, por consecuencia, la ley de efectos elásticos internos.

Es preciso, pues, para medir o evitar la resonancia, conocer este período en las distintas formas de actuación de las cargas.

Ya que, por lo dicho anteriormente, no sea abordable la aplicación del método general de los sólidos o de las membranas elásticas a las estructuras constructivas, vamos a encontrar la solución del problema determinando, para la ley de tensiones, su relación con el problema estático, y de las deformaciones y velocidades en los puntos de actuación deduciremos el período y la condición de resonancia. Obtendremos de este modo con bastante sencillez de cálculo, una solución aproximada, pero de gran generalidad, y en tal sentido bastará determinar en la vibración el tono fundamental, si bien de él se podrán deducir las demás armónicas, que en general no interesan más que en el caso de repeticiones sucesivas.

Los casos de práctica aplicación sobre las estructuras son: el de impacto de cargas en puntos determinados y el de cargas en movimiento sobre los elementos de construcción.

El primero de estos casos puede ser en el sentido longitudinal o en el transversal de las piezas, que es análogo al de acciones longitudinales o pulsaciones transversales en las cuerdas vibrantes. El segundo caso es el que produce una sobrecarga móvil.

Vibraciones longitudinales.—Cualquiera que sea la sustentación que tenga un cuerpo, de peso P, sobre el que se transmite bruscamente una energía, $\frac{1}{2}\ Q\ v^2$, que puede ser simbolizada por otro cuerpo Q, lanzado sobre el primero con velocidad v, produce en éste una ley de tensiones y deformaciones máximas que son proporcionales a las que produciría la misma carga estática y que está medido el factor de proporcionalidad por la sencilla expresión

$$f = \frac{v}{\sqrt{dg\left(1 + K\frac{P}{Q}\right)}}$$

Esta fórmula, que se deduce en la teoría de Elasticidad, por la aplicación del teorema de las fuerzas vivas, tiene un parámetro, K, que depende de la sustentación del cuerpo P, y sabido es que se determina mediante la integral

$$K = \int \left(\frac{u}{u'}\right)^2 \frac{dP}{P}$$

que tiene una representación análoga a la fuerza viva que tendría el cuerpo P por efecto de una velocidad que fuera la relación de las velocidades de los diferentes puntos a la del punto de impacto.

Tratándose de las vibraciones longitudinales, que son siempre producidas por energía transmitida a lo largo de la pieza y que pueden ser también sustituídas por una acción de impacto equivalente, de una carga Q con una velocidad v, como la deformación estática en el prisma elástico es $d = \frac{Q\,z}{E\,w}$ el parámetro K, para una longitud L de la pieza, tiene por valor

$$K = \int_0^L \left(\frac{\frac{Q\,z}{E w}}{\frac{Q L}{E w}} \right)^2 \frac{d\,P}{P} = \int_0^L \frac{z^2}{L^2} \frac{p\,d\,z}{p\,L} = \frac{1}{3}$$

Por la igualdad de las fuervas vivas se tiene la velocidad u, del punto de impacto, en la forma siguiente:

$$u' = \frac{v}{1 + K \frac{P}{Q}} = \frac{3\,v\,Q}{P + 3\,Q}$$

Tenemos, pues, conocida la velocidad u' en el instante inicial $t = o$, y además la máxima deformación longitudinal, por ser el producto de la estática $\frac{Q\,z}{E\,w}$ por el factor de amplificación, f; luego la deformación máxima vendrá dada por la fórmula

$$A = \frac{Q\,z}{E w} \cdot \frac{v}{\sqrt{\frac{Q\,z}{E\,w} g \left(1 + K \frac{P}{Q}\right)}} = v \sqrt{\frac{Q\,z}{E\,w\,g \left(1 + \frac{1}{3} \frac{P}{Q}\right)}}$$

extinguiéndose la velocidad del punto de impacto cuando la deformación sea esta última.

Para la onda vibratoria del tono fundamental podemos poner la ecuación armónica

$$y = A \operatorname{sen} m\,t$$

y como para $t = o$ la velocidad es

$$u' = \frac{d\,y}{d\,t} = \mathrm{A}\,m\,(\cos m\,t)_0 = \mathrm{A}\,m$$

tendremos:

$$m = \frac{u'}{\mathrm{A}} = \frac{3\,v\,\mathrm{Q}}{\mathrm{A}\,(\mathrm{P} + 3\,\mathrm{Q})}$$

La ley de deformaciones en el tono fundamental tendrá por representación la expresión armónica citada, con los valores de *A, m,* acabados de calcular.

El tiempo de la semionda obtenido de esa ecuación se ve inmediatamente que es $t' = \frac{\pi}{2\,m}$, porque:

$$\mathrm{A}\,m \cos m\,t' = o$$

El período de la vibración en virtud de los valores antes calculados resulta

$$\mathrm{T} = 2\,t' = \frac{\pi}{\dfrac{3\,v\,\mathrm{Q}}{\mathrm{A}\,(\mathrm{P} + 3\,\mathrm{Q})}} = \pi \sqrt{\frac{z\,(\mathrm{P} + 3\,\mathrm{Q})}{3\,\mathrm{E}\,w\,g}}$$

Esta sencilla fórmula da el tiempo de oscilación de la onda principal y permite establecer la condición para que no se produzca resonancia, pues conocido este período y la elongación de la deformación máxima, sin dificultad se puede determinar la ley de armónicas sucesivas en el movimiento vibratorio decreciente, que tiene por ley, como siempre, el producto de la armónica principal por una logarítmica.

Examinando la fórmula que hemos deducido, para tiempo de la oscilación vibratoria y deformación máxima, se ve que en una pieza recta sometida a una vibración longitudinal, el período de la vibración y las deformaciones, en los distintos puntos, van variando a lo largo de la pieza, desde cero (en el extremo sustentado) hasta el mayor valor en el extremo en que recibe el impacto, creciendo proporcionalmente a la raíz de la distancia.

En los materiales que ordinariamente se emplean en la construcción el producto del módulo de elasticidad por la sección y por la aceleración de la gravedad es muy grande en relación con el valor de los posibles pesos, y tanto el período de la vibración como la elongación resultan pequeñísimos, sin que sea de temer, por tanto, el efecto de resonancia para percusiones repetidas, pero sí podrá serlo para otras formas de transmisión de energía, calculables por las mismas expresiones.

La forma de trabajo de los pilotes durante el período de la hinca, los órganos de las máquinas sometidos a choques sucesivos y otras muchas aplicaciones de las piezas dinámicas tienen su inmediata interpretación en esta teoría, expuesta así de tan sencillo modo.

Para los elementos constructivos, la primera condición, además de la de resonancia, deberá ser que la deformación máxima calculada para el punto de impacto sea muy inferior a la que permita su régimen elástico, pues de lo contrario el cuerpo móvil deformará permanentemente el otro y, aumentando todavía los valores de esas variables, penetrará a su través, perforando su masa. En las aplicaciones balísticas el problema es inverso de éste: se precisa que, con masas pequeñas, llegue a producirse esta penetración, para lo que basta forzar la velocidad de percusión; y tanto más fácil será este efecto cuando el material presente módulos bajos de elasticidad, según se aprecia por las fórmulas anteriores.

Vibraciones transversales.—Con el mismo criterio que hemos aplicado para las vibraciones longitudinales se puede deducir muy sencillamente el régimen de las transversales sin necesidad de plantear la ecuación diferencial del equilibrio entre las fuerzas solicitadas y las de inercia.

Consideremos un elemento recto de una estructura, que tiene un peso P, sobre el que se hace un impacto en un punto cualquiera x, con una energía

$$\varepsilon = \frac{1}{2} Q v^2$$

El efecto elástico máximo es el mismo del estático de la carga Q, en dicho punto, multiplicado por el factor f, indicado en el problema anterior.

En este caso el elemento de estructura está unido al resto de ella por enlaces estáticos o elásticos conocidos, y los dos casos extremos son el apoyo simple o el empotramiento absoluto, pudiendo tener cualquiera de éstos o sus intermedios, según la naturaleza de esas sustentaciones. El factor f, de amplificación dinámica, tiene la misma expresión analítica de todos los casos, variando únicamente el paramento K, que oscila entre los valores $\frac{13}{35}$ y $\frac{17}{35}$ correspondientes respectivamente al apoyo libre o al empotramiento de las secciones extremas, y también el valor de las deformaciones d, con arreglo a las leyes estáticas de las piezas rectas estructurales.

Estas leyes, deducidas en la teoría de las estructuras, son:

para piezas apoyadas...... $d = \dfrac{Q x^2}{3 E I l} (l - x)^2$

para piezas empotradas.... $d = \dfrac{Q x^3}{3 E I l^3} (l - x)^3$

y en consecuencia, el factor de ampliación valdrá, en los dos casos extremos:

$$f = \frac{v}{x\,(l - x)\sqrt{\frac{g\,Q}{3\,E\,I\,l}\left(1 + K\frac{P}{Q}\right)}}$$

$$f_1 = \frac{v}{\sqrt{\frac{g\,Q\,x^3\,(l - x)^3}{3\,E\,I\,l^3}\left(1 + K\frac{P}{Q}\right)}}$$

Las máximas deformaciones dinámicas (producto de las estáticas por esos factores) serán respectivamente:

$$z = \frac{v\,Q^{\frac{1}{2}}\,x\,(l - x)}{\sqrt{3\,E\,I\,l\,g\left(1 + K\frac{P}{Q}\right)}} \qquad z_1 = \frac{v\,Q^{\frac{1}{2}}\,x^{\frac{3}{2}}\,(l - x)^{\frac{3}{2}}}{l\sqrt{3\,E\,I\,l\,g\left(1 + K\frac{P}{Q}\right)}}$$

Si la acción dinámica se produce en el centro de la pieza, basta poner este valor en las expresiones anteriores para encontrar la relación $z = 2\,z_1$.

Es decir: que en dos piezas de estructura, que tengan la misma luz e igual inercia, para impacto o pulsación en el centro, la deformación es doble en el caso de apoyo que en el empotramiento. No es absolutamente exacto este valor, porque el parámetro varía en ambas entre las cifras antes citadas, $\frac{13}{35}$ y $\frac{17}{35}$; pero como en las expresiones entra afectando a uno solo de los sumandos y dentro de la raíz del denominador, no varía sensiblemente el resultado numérico.

En los casos de sustentación elástica intermedia, varía entre 1 y 2, casi proporcionalmente al ángulo de sustentación.

La ley de variación de las deformaciones para impactos en los distintos puntos, son, pues, las parábolas

$$y = C\,x\,(l - x) \qquad\qquad y = \frac{C'}{l}\,x^{3/2}\,(l - x)^{3/2}$$

Tanto en uno como en otro caso, y en todos los intermedios, la velocidad que adquiere el punto de impacto es también sensiblemente la misma, pues que dijimos venía medida por la relación

$$u' = \frac{v}{1 + K\,\frac{P}{Q}}$$

y sólo varía en ella el valor de K entre límites muy próximos.

Para el tono fundamental de la vibración, en el punto medio, poniendo la ecuación armónica $y = Asenmt$, del mismo modo que en el problema anterior el período de la oscilación será:

$$T = \frac{\pi}{m} = \frac{\pi A}{u'}$$

Y con los valores antes deducidos, para la pieza apoyada, valdrá:

$$T = \pi \frac{v\,Q^{1/2}\,l^{3/2}}{12\sqrt{\frac{E\,I\,g}{3}}\left(1 + K\,\frac{P}{Q}\right)} : \frac{v}{1 + K\,\frac{P}{Q}} = \frac{\pi\,l^{3/2}}{4}\sqrt{\frac{Q + K\,P}{3\,E\,I\,g}}$$

En la pieza empotrada, el período será sensiblemente la mitad de este último valor, pues en el cociente $T = \frac{\pi\,A}{u'}$ es u' un valor casi constante y A vale la mitad del anterior.

Para cada pieza, la velocidad del punto de vibración es, desde luego, invariante y, por tanto, el período tiene la misma ley directa de las elongaciones; pero como hemos deducido que éstas siguen las leyes respectivas

$$y = \mathrm{C}\, x\, (l - x) \qquad\qquad y = \frac{\mathrm{C}'}{l}\, x^{3/2} (l - x)^{3/2}$$

los períodos de vibración en los diferentes puntos resultan variables con esas mismas leyes.

En consecuencia el estudio anterior permite calcular de un modo muy sencillo el régimen vibratorio de una pieza cualquiera de una estructura, sometida en uno o en varios puntos a pulsaciones o impactos.

Para distintos puntos pulsados las deformaciones y los períodos tienen las mismas leyes analíticas decrecientes, en forma parabólica desde el centro a las sustentaciones, cualquiera que sea la naturaleza de éstas.

En la resonancia que siempre se producirá para distintos puntos pulsados, se puede calcular con arreglo a este método el tiempo que tardaría en llegar esa resonancia a producir una elongación que superara al régimen elástico, por repeticiones sucesivas de las causas.

El efecto de los temblores de tierra sobre las estructuras es en esencia este mismo problema, que se resuelve de igual modo, aunque con inversión en los datos y en las incógnitas, pues en este caso se partirá de la elongación y el período, para deducir la inercia y la sección.

Vibraciones por cargas móviles.—La vibración producida en una estructura, por la actuación de una carga en movimiento, es una de las más interesantes cuestiones de la elasticidad aplicada a la construcción. El primitivo estudio, debido a Boussinesq, tiene complicaciones de cálculo difícilmente aplicables en los casos corrientes en que se precisa determinaciones numéricas explícitas, y aunque posteriormente varios matemáticos e ingenieros han considerado el problema, en ningún caso se ha determinado una solución que pueda considerarse como general para las estructuras. El estudio más completo es el ya clásico de Clebsch y las adiciones de Stockes para el tren móvil sobre una viga apoyada en los extremos, pero solamente aplicable a este caso, sin considerar coacción en las partes terminales.

Tomando como base aquel método ingenioso de resolución podemos hallar el período de vibración en función de todas las variables y, además, generalizarle para inmovilidad de secciones extremas por empotramiento, que permite entre ambos casos determinar los grados intermedios de coacción en una estructura cualquiera.

Siguiendo a Clebsch, el momento dinámico de flexión en una sección del tramo sometido a la carga móvil, puede considerarse como suma de tres elementos: el estático por la carga quieta; el debido a la inercia de esta carga y el de la vibración por la inercia del tramo.

En las conferencias que dimos el presente año en la Escuela de Ingenieros de Caminos se hizo el desarrollo del problema de Clebsch y la expresión encontrada para momento total dinámico, en un punto cualquiera, x', del tramo cuando la carga, Q, pasa por x, resulta expresado por el valor

$$M_{\text{din.}} = Q\, x' \left(1 - \frac{x}{l}\right) + \frac{p\, l}{2}\, x' \left(1 - \frac{x'}{l}\right) +$$

$$+ \frac{Q\, v^2}{g}\, x' \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left[\frac{2\, Q}{3\, E\, I\, l}\, (6\, l\, x - 6\, x^2 - l^2) - \frac{p}{2\, E\, I}\, (x^2 - l\, x)\right] +$$

$$+ \frac{v^2\, p\, Q}{6\, E\, I\, l g}\, x' (l - x) (2\, l\, x - x^2 - x'^2)$$

Es evidente que si fijamos una sección cualquiera, x', hallando los máximos de esa función, para variaciones x de la carga, obtendremos por diferencia de abscisas el trozo en que se ha producido la onda principal de la vibración. Y, por consecuencia, al ser uniforme el movimiento de la carga, el período será el cociente entre esa diferencia de abscisas y la velocidad.

Derivando la expresión anterior, respecto a la variable x, e igualando a cero, tenemos:

$$-\frac{x'}{l}-\frac{v^2 x'}{g\,l}\left[\frac{2\,Q}{3\,E\,I\,l}\left(6\,l\,x-6\,x^2-l^2\right)-\frac{p}{2\,E\,I}\left(x^2-l\,x\right)\right]+$$

$$+\frac{v^2}{g}\left(x'-\frac{x\,x'}{l}\right)\left[\frac{4\,Q}{E\,I\,l}\left(l-2\,x\right)-\frac{p}{E\,I\,l}\left(2\,x-l\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{v^2 p}{6\,E\,I\,g\,l}\,x'\left(2\,l\,x-x^2-x'^2\right)+\frac{v^2 p\,x'}{3\,E\,I\,g\,l}\left(l^2-2\,l\,x-x^2\right)=0\right.$$

que, después de simplificar, resulta

$$12\,v^2\left(6\,Q+p\,l\right)x^2-6\,v^2\,l\left(16\,Q+3\,p\,l\right)x-6\,E\,I\,g\,l+28\,Q\,v^2\,l^2+$$

$$+p\,v^2\,l\left(5\,l^2+x'^2\right)=0$$

La diferencia de las raíces de esta ecuación, dividida por la velocidad, da el período

$$T=\frac{\sqrt{8\,Q\,v^2\,l^2\left(12\,Q+7\,p\,l\right)+7\,p^2\,l^4\,v^2+\left(6\,Q+p\,l\right)\left(24\,E\,I\,g-4\,p\,v^2\,x'^2\right)\,l}}{\sqrt{3}\;v^2\left(6\,Q+p\,l\right)}$$

Esta fórmula, en la que entran todas las variables directas del problema, permite hallar de un modo sencillo el período y ver la influencia de los distintos elementos.

Se aprecia en primer lugar que el período de la vibración es variable en los distintos puntos y la ley de variación es una elipse que tiene por eje la luz del tramo; pero las variaciones son sumamente pequeñas, toda vez que el término de la velocidad es reducidísimo en comparación con el de la inercia.

Si el peso propio del tramo fuera muy pequeño y también su inercia, la fórmula anterior daría el sencillísimo valor

$$T = \frac{\sqrt{96\, Q^2 v^2 l^2}}{6\, v^2 Q \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{l}{v}$$

y, como $\frac{l}{v}$ es el tiempo que tarda la carga en recorrer el tramo, el período es sensiblemente el mismo que ese tiempo de recorrido.

Mediante esta sencilla fórmula se determina el período en los sistemas flexibles y en los casos de puentes colgados con muy pequeña rigidez. Se observa en ella que el tiempo de la vibración es independiente de la carga, resultado que también obtuvo Stockes por otro método distinto, y además, que la onda vibratoria tiene igual período en todos los puntos.

Cuando, por el contrario, el tramo de estructura sea muy rígido y su peso propio tenga gran valor respecto a la carga móvil, al suponer despreciable esta última, resulta:

$$T = \frac{\sqrt{7 p^2 l^4 v^2 + p\, l^2 (24\, E I g - 4 p\, v^2 x'^2)}}{p\, l\, v^2 \sqrt{3}}$$

expresión variable con la abscisa, según ley elíptica, como en el caso general, pero con variaciones muy poco perceptibles.

* * *

Pues que hemos encontrado una fórmula general, en función de las distintas variables que entran en el problema, resulta interesante, aunque sea una digresión, comparar los resultados en dos tipos de estructuras distintas, como son las metálicas y las de hormigón armado.

Los dos elementos a que afecta la naturaleza de la estructura son: el peso propio p, y el factor de rigidez EI.

El primero es siempre mucho mayor en las estructuras de hormigón armado que en las metálicas, pero no así el factor de rigidez, porque para trabajos internos corrientes en estos materiales la relación de coeficientes de elasticidad suele ser un número inverso del de relación de momentos de inercia, quedando por tanto el producto constante en los límites en que se trabajan las estructuras actuales.

Los efectos de inercia de la masa en los puentes de hormigón armado son mayores que en los metálicos, conforme se refleja en la expresión de momentos dinámicos citados antes; pero el período varía únicamente de modo inverso a la raíz cuadrada del peso.

A medida que se va haciendo más ligera la estructura el tono fundamental de la vibración se hace más grave, aumentando, en consecuencia, la posibilidad de resonancia.

* * *

En los párrafos anteriores, dedicados a las vibraciones por carga dinámica que circula sobre la estructura, se han deducido los resultados a que conduce la aplicación de la teoría al caso de una pieza con sustentación isostática de apoyo simple, que es el más sencillo, y al que únicamente hacía referencia el estudio clásico de Phillips y Clebsch, pero como nuestro deseo al presente es generalizar el conocimiento para todas las estructuras en las que las piezas solidarizadas unas a otras forman distintos grados de deformabilidad, poco adelantaríamos si sólo tuviéramos conocido uno de los términos extremos.

Es necesario determinar también el otro límite, pues una vez conocidos ambos, la teoría estática de las estructuras, por medio de los coeficientes hiperestáticos, permite deducir la fracción intercalar entre esos límites, para completar así el problema.

De un modo análogo al de sustentación simple podemos hacer la estimación de los tres momentos que dan el total dinámico.

El primer momento, que es el estático en pieza empotrada, tiene el valor perfectamente conocido

$$a) \qquad M_1 = \frac{Q\,(l - x)^2}{l^3}\left[(2\,x + l)\,x' - l\,x\right] + \frac{p\,x'}{2}\,(l - x') - \frac{p\,l^2}{12}$$

La elástica que toma la directriz por la citada carga Q, y la propia p, unitaria, sabemos que es

$$y = \frac{Q\,x\,x'^2\,(l - x)^2}{2\,l^2\,\mathrm{E\,I}} - \frac{Q\,(l - x)^2\,(2\,x + l)}{6\,l^3\,\mathrm{E\,I}}\,x'^3 + \frac{p}{24\,\mathrm{E\,I}}\,x^2\,(l - x)^2$$

Las derivadas de esta función, para el punto $x = x'$, son

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{Q}{l^3\,\mathrm{E\,I}}\,x^2\,(l - x)^2\,(l - 2\,x) + \frac{p}{12\,\mathrm{E\,I}}\,x\,(l - x)\,(l - 2\,x)$$

$$\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = \frac{Q}{l^3\,\mathrm{E\,I}}\,(-\,10\,x^4 + 20\,l\,x^3 - 12\,l^2\,x^2 + 2\,l^3\,x) +$$

$$+ \frac{p}{12\,\mathrm{E\,I}}\,(6\,x^2 - 6\,l\,x + l^2)$$

y el segundo momento, que mide la influencia de las fuerzas de inercia de la carga sobre el tramo de estructura, será:

b) $$M_2 = \frac{(l-x)^2}{l^3}\left[(2x+l)x' - lx\right]\left(-\frac{Q}{g}v^2\frac{d^2y}{dx^2}\right) =$$

$$= -\frac{Q v^2}{g} \cdot \frac{(l-x)^2}{l^3}\left[(2x+l)x' - lx\right]\left[\frac{Q}{l^3 EI}(-10x^4 +\right.$$

$$\left. + 20lx^3 - 12l^2x^2 + 2l^3x) + \frac{p}{12EI}(6x^2 - 6lx + l^2)\right]$$

El tercer momento, que corresponde a la inercia de la estructura, vendrá determinado por la integral de los momentos debidos a las siguientes fuerzas elementales de inercia:

$$idz = -\frac{p}{g}dz\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{p}{g}dz\,v^2\frac{d^2y}{dx^2}$$

Por la ecuación de la deformación, que antes establecimos, el valor de esas fuerzas, en el trozo comprendido entre el extremo izquierdo y la posición x de la carga, será:

$$idz = -\frac{v^2 p\,dz}{g} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} =$$

$$= -\frac{v^2 p dz}{g} \cdot \frac{d^2}{dx^2}\left[-\frac{Q}{6l^3 EI}\left[(l-x)^2(2x+l)x'^3 - 3lx(l-x)^2x'^2\right]\right] =$$

$$= -\frac{v^2 p\,dx'}{g} \cdot \frac{Q x'^2}{3EI\,l^3}\left[(l+x)x' - 3(3lx - 2l^2)\right]$$

En el otro trozo, desde $x' = x$ hasta $x = l$ bastará cambiar x en $x_1 = l - x$ para tener esas fuerzas, resultando así

$$i_1 dz_1 = -\frac{v^2 p\,dx_1'}{g} \cdot \frac{Q x_1'^2}{3EI\,l^3}\left[(2l - x)x_1' - 3(l^2 - 3lx)\right]$$

El momento producido en un tramo recto, empotrado en los dos extremos por una fuerza P, que actúa en la abscisa α, sabemos que es para el primer trozo

$$M_o^{\alpha} = \frac{P(l-\alpha)}{l^3}(l\alpha - 2\alpha^2 + l^2)x - \frac{P\alpha(l-\alpha)^2}{l^2} =$$

$$= \frac{P(l-\alpha)^2}{l^3}\left[(l + 2\alpha)x - l\alpha\right]$$

y para el segundo trozo, si se cambia x en $l - x$ (con objeto de hacer luego más fácil la integración), valdrá

$$M_{\alpha}^{l} = \frac{P(l - x_1')^2}{l^3}\left[(l + 2x_1')x - lx_1'\right] - P(l - x - x'_1)$$

Sustituyendo en lugar de P las fuerzas de inercia, idz, antes calculadas, y siendo x'' una abscisa variable anterior a la x' en que se va a medir el momento, tendremos para valor total de éste en dicho punto:

$$c) \qquad M_3 = -\frac{v^2 p}{g}\cdot\frac{Q}{3EIl^3}\int_o^{x'} x''^2\left[(x+l)x'' - \right.$$

$$\left. - 3(3lx - 2l^2)\right]\frac{(l - x'')^2}{l^3}\left[(l + 2x'')x - lx''\right]dx'' -$$

$$-\frac{v^2 p}{g}\cdot\frac{Q}{3EIl^3}\int_o^{l-x'} x_1''^2\left[(2l - x)x_1'' - \right.$$

$$\left. - 3(l^2 - 3lx)\right]\left\{\frac{(l - x_1'')^2}{l^3}\left[(l + 2x_1'')x - lx_1''\right] - (l - x - x_1'')\right\}dx_1''$$

Este momento es el tercero de los que formaban el total dinámico.

Como lo interesante es la relación de su valor al del que se producía cuando la sustentación era isostática, no es necesario establecer su ley de variación, sino solamente su valor relativo. Podemos, en consecuencia, hacer la integración para el punto medio

$$x = x' = \frac{l}{2}$$

y de este modo resultan esas integrales con los siguientes valores:

c)

$$M_3 = -\frac{v^2 p\, Q}{3\, E\, I\, g\, l^6} \cdot \frac{43\, l^9}{80\ 32} -$$

$$-\frac{v^2 p\, Q}{3\, E\, I\, g\, l^6}\left(\frac{61}{384} - \frac{35}{256} - \frac{3}{640} - \frac{1}{24.04}\right) l^9 +$$

$$+\frac{v^2 p\, Q}{3\, E\, I\, g\, l^3}\int_0^{\frac{l}{2}} \left[x_1''^3 (2\, l - x) - 3\, x_1''^2 (l^2 - 3\, l\, x)\right]\left[(l \quad x) - x_1''\right] dx_1'' =$$

$$= -\frac{v^2 p\, Q}{3\, E\, I\, g\, l^6}\left(\frac{43\, l^9}{2560} + \frac{43\, l^9}{2560} - \frac{3\, l^9}{1280}\right) = -\frac{v^2 p\, Q\, l^3}{96\, E\, I\, g}$$

La suma de los tres momentos *a)* *b)* *c)* es el total dinámico, y siendo estimado el último para el valor central $x = \frac{l}{2}$, poniendo esta misma abscisa en los otros dos, tenemos los valores sencillísimos

$$M_1 = \left(Q - \frac{p\, l}{3}\right)\frac{l}{8}$$

$$M_2 = \frac{Q\, l^2\, v^2}{64\, E\, I\, g}\left(Q + \frac{p\, l}{3}\right)$$

Por tanto, el momento central dinámico de la estructura vale

$$M_{\text{din.}} = M_1 + M_2 + M_3 = \left(Q - \frac{p\, l}{3}\right)\left(\frac{l}{8} + \frac{Q\, v^2\, l^2}{64\, E\, I\, g}\right)$$

La relación de este momento al estático será:

$$\frac{M_{\text{din.}}}{M_{\text{est.}}} = 1 + \frac{Q\,v^2\,l}{8\,E\,I\,g}$$

Esta sencilla fórmula nos da el aumento, $\frac{Q\,v^2\,l}{8\,E\,I\,g}$, que sufre el momento estático por efecto de la carga en movimiento, para un tramo empotrado en sus dos secciones terminales; valor algo rítmico, más sencillo todavía que el aumento correspondiente a un tramo de simple sustentación, pues recordaremos que el encontrado por nosotros para ese caso era

$$\frac{M_{\text{din.}}}{M_{\text{est.}}} = 1 - \frac{8\,Q + 5\,p\,l}{6\,Q + 3\,p\,l} \cdot \frac{Q v^2\,l}{4 E I g}$$

Si se comparan estos aumentos producidos en los momentos por el régimen dinámico en los dos casos límites, de simple apoyo y de empotramiento absoluto, se aprecia que vienen medidos en ambos por la mitad de la fuerza viva $\left(\frac{1}{2}\,\frac{Q}{g}\,v^2\right)$, multiplicada por la inversa del factor de esbeltez mecánica unitaria $\frac{EI}{l}$ y afectado ese producto de un factor, $\frac{1}{2}$ en el caso de empotramiento y del coeficiente $\frac{8\,Q + 5\,p\,l}{6\,Q + 3\,p\,l}$ en el de apoyo simple.

En virtud de este resultado deducido por el estudio anterior, se puede determinar el factor correspondiente a cualquier grado de sustentación hiperestática, pues las rotaciones relativas según la flexibilidad de los apoyos permite determinar el coeficiente intermedio.

Queda únicamente por determinar el período de vibración en este último caso. No es necesario, para este objeto, hacer nuevo cálculo de diferencia de abscisas entre dos máximos, conforme hicimos en la pieza isostática, sino deducir del período encontrado para ella, el correspondiente a la hiperestática, por consecuencia del siguiente razonamiento: las deformaciones de las dos piezas son conocidas por ser proporcionales a los momentos deducidos para ellas, y como se puede suponer que la onda de vibración se produjo por una pulsación transversal capaz de dar la misma elongación, los períodos estarán entre sí en la relación de esas deformaciones, que es la misma relación de los momentos totales dinámicos encontrados anteriormente.

* * *

Con sólo el empleo de expresiones perfectamente conocidas en la teoría de las estructuras hemos podido determinar el problema vibratorio de un modo elemental y sin necesidad de aplicar las ecuaciones en derivadas parciales de planteo general, que en los casos estudiados de aplicación práctica tendrían complicaciones casi inabordables en la determinación de sus constantes.

En la época presente, en que por el mayor conocimiento de los materiales empleados, se aligera la masa dentro de las mayores posibilidades, el estudio vibratorio adquiere una trascendental importancia que permitirá reducir el margen de seguridad en que se desenvuelven los cálculos de las construcciones.

CONTESTACIÓN

DEL ILMO. SEÑOR

D. JOSÉ MARÍA TORROJA Y MIRET

SEÑORES ACADÉMICOS:

SEÑORAS Y SEÑORES:

Caso es, por fortuna, poco frecuente en los Anales de una Academia el que hoy registran los de la nuestra.

Porque aún no ha transcurrido un año desde el día en que ocupaba yo este mismo sitio para dar, en su nombre, la bienvenida al ilustre ingeniero agrónomo que tomaba posesión de la Medalla número 24 y el hueco que en nuestras filas se llenaba entonces reapareció bien pronto, poniéndonos en trance de considerar ahora como perdido para siempre el compañero que como recién ganado acabábamos de festejar.

La circunstancia apuntada me releva de hacer hoy el elogio de D. Mariano Fernández Cortés. El que con toda efusión leí el día 29 de junio del pasado año habría de repetir hoy, añadiendo sólo el recuerdo de las contadas sesiones a que el precario estado de su salud le permitió asistir y en las que afirmó la admiración y estima que por su saber y su bondad había conquistado antes de sentarse entre nosotros. ¡Descanse en paz!

* * *

Al recibir de nuestro venerado Presidente el encargo de llevar la voz de la Academia en este acto, pensé que tan alto honor podía ser debido a dos circunstancias. Por una parte, al hecho de ser yo, después de él, el más antiguo en ella, de los Ingenieros de

Caminos. Y, por otra, a la satisfacción profunda que había de producirme el dar la bienvenida a quien conmigo se sentó en los banco de la Escuela gloriosa en que los tres seguimos nuestros estudios.

No he de descubriros a Alfonso Peña. Si alguno de vosotros hubiera menester de ello, el discurso que acabáis de oírle, le habría convencido de que el nuevo académico es un ingeniero eminente, que a la vez domina la teoría y la práctica de su profesión, que es también la mía.

Pero antes de referirme, con la debida brevedad, a este su último trabajo, quiero—y ello es en mí viejo achaque—acompañar al estudio del académico novel, el del *hombre* que lo ha formado.

Nació en 1888, y veinte años más tarde ingresó con brillante puntuación en la Escuela de Ingenieros de Caminos. Coincidió este momento decisivo de su vida, que es en otros el final de la penosa ascensión por las escarpadas laderas de la meseta, en cuya dilatada extensión se desarrollan, con dificultad menor, los estudios profesionales, con la pérdida de su padre, tras larga y cruel enfermedad, que hubo agotado los recursos económicos de su familia, en la que era el único varón.

El instante que para otros ofrece perspectivas risueñas de tranquilidad y de confianza, se presentó a él con nubarrones densos que amenazaban arrebatar de sus manos el triunfo recién ganado. Los que hemos recibido de la Providencia el don inapreciable de una posición desahogada durante nuestros años escolares, no podremos quizá comprender en toda su extensión el mérito de quien no la tuvo. *Vivere, ... deinde philosophare...*

El que a la vez ha de filosofar y ganar para vivir es el que puede en verdad envanecerse de su doble triunfo. Y éste fué el caso de Alfonso Peña.

A los veinte años, el resorte de la vida tiene una tensión formidable y a veces arremete por caminos que nada tienen de fáciles; por ejemplo, el de tomar la contrata de pintura y empapelado de las casas que en Madrid poseía la Duquesa de Sevillano; y no para llevar en ella la *alta dirección,* sino para realizarla personalmente, llenando de engrudo y colores la honrada blusa del obrero.

En aquellos tiempos, el jornal que por estos menesteres podía pretenderse no era suficiente, ni con mucho, para mantener a una familia, cuando había de simultarse con largas vigilias de estudio y asistencia a las clases, que ocupa normalmente todas las horas del día... y alguna de la noche. Nuestro héroe, porque así ha de llamarse hoy con justicia, hubo de dejar la blusa por el magisterio de preparación y repaso de asignaturas, más entonado, pero de no mucho mejor rendimiento.

Y aún hubo de prestar el servicio militar, porque en su caso la redención a metálico era una utopía.

Paso a paso, sin perder un solo año, y con buen número de promoción, iba Peña avanzando a través de los cinco años de la Escuela. Y aún tenía a veces arrestos para redactar algunos interesantes estudios de Mecánica, uno de los cuales, sobre "placas planas" se publicó en la *Revista de Obras Públicas* cuando era alumno de cuarto año.

Llegó por fin, en 1913, el momento de obtener el honroso título profesional que había de abrirle las puertas, si no de la abundancia, por lo menos del vivir decoroso.

Pero he aquí que la congestión que en aquel momento—como en tantos otros—sufrían las escalas de nuestro Cuerpo, le aseguraba buen número de años de espera antes de poder entrar al servicio del Estado.

Después de las luchas por el ingreso en la Escuela primero, y luego por la aprobación de los cinco años de carrera, un nuevo obstáculo aparecía, no menos amenazador que los anteriores. Había que seguir en la brecha y conquistar el pan de cada día, que no siempre se presentaba fácil. Peña no dejó de dar clases particulares a cuantos alumnos podía encontrar, sin reparar demasiado en su heterogeneidad, que aumentaba el trabajo.

El título recién conquistado le permitió, además, presentar proyectos a cuantos Concursos se anunciaban. Por fin, en 1915, el éxito comenzó a presentarse en el terreno definitivo en forma de adjudicación del proyecto y contrucción del Puente de la Presa, encargado por la Diputación de Navarra. Este puente fué de hormigón armado en arco y el primero que en España se construía con arreglo a los métodos que por entonces estaba publicando el que fué maestro de Peña y mío, y Numerario de esta Corporación, D. Juan Manuel de Zafra y Esteban.

Al llegar a este punto me permitiréis dedique un recuerdo emociado a este ingeniero eminente, de quien tuve la honra de ser el primer discípulo, en el orden cronológico, naturalmente, en un cursillo privado sobre hormigón armado que tras largas y no fáciles gestiones conseguí explicase en el curso de 1908-09 a la promoción con cuyo número uno me honraba y que fué germen de los que, con intensidad creciente y ya dentro del plan oficial de estudios de la Escuela, han venido dándose desde entonces, siendo completados en el curso actual con una serie de conferencias explicadas por varios ingenieros y arquitectos especialistas, que ha venido a constituir un pequeño Congreso de la materia.

Al contemplar el desarrollo espléndido que en cátedras y construcciones ha alcanzado el moderno material, es de justicia dedicar un recuerdo al que, venciendo dificultades de diverso género, puso silenciosamente los cimientos del actual edificio.

Pero volvamos a nuestro Alfonso Peña, a quien puede en verdad considerarse como genuino y directo continuador de Zafra.

Ya teníamos al pintor-papelista-profesor convertido en ingeniero constructor, entrando por la vía en que tantos triunfos había de conquistar.

En este tiempo fué encargado por el entonces concesionario de los Saltos del Duero de la redacción de un proyecto de presa para el embalse de Fermoselle, resolviendo el problema mediante una solución original de presa con contrafuertes, de 90 metros de altura, en cuyo interior iba alojada la Central eléctrica, que fué presentado en el Congreso que en 1917 celebró en Sevilla la Asociación Española por el Progreso de las Ciencias.

Los enormes estragos que en las construcciones navales había producido la guerra europea—por entonces en su período álgido—había sugerido a algunos autores ingleses y norteamericanos la idea de recurrir al hormigón armado para sustituir con él al acero, cuyo precio resultaba casi prohibitivo. Algunos ensayos tímidos, efectuados en California, era todo cuanto en este terreno se había realizado. Con la decisión en él característica, Peña estudió rápidamente el asunto y en un par de meses redactó los proyectos de dos barcos, de 1.000 y 3.000 toneladas, respectivamente, que presentó al Cónsul de Inglaterra en Vigo, y gestionó en Bilbao—la ciudad entonces de la fiebre naviera—la constitución de una Sociedad que explotara en España este negocio. No fué afortunado en este intento, ni en otro análogo que en Francia hizo. Pero la palabra "dificultad" es, para Peña, sinónima de "acicate". Y con nuestro compañero D. Cipriano Salvatierra y un amigo suyo portugués, que aportó parte del capital, constituyó una Sociedad portuguesa, que hubo de edificar un modesto astillero en Viana do Castello, en la desembocadura del río Lima. Al año y medio de comenzados los trabajos estaba listo, no sólo el astillero, sino un barco de hormigón armado de 700 toneladas, que fué botado el 12 de noviembre de 1920. El barco, tras algunos episodios emocionantes, pronto olvidados, fué un éxito, pero su aparición coincidió con el derrumbamiento de los precios de los fletes, consiguiente al final de la bélica contienda, y el barco de hormigón hubo de buscar junto a la cuna su tumba, en el fondo del mar, que no había surcado.

Abandonó Peña sus dominios marinos para construir, como resultado de reñido concurso, la fábrica que "La Papelera Española" tiene en Prat del Llobregat (Barcelona), con todos sus elementos accesorios (depósitos elevados, tinas, talleres, etc.), asociado en esta ocasión a los Ingenieros D. José Friberg y D. Francisco Panadero.

Los viajes que a Lisboa y Oporto había realizado Peña con motivo del asunto de Viana le pusieron en relación con el banquero portugués D. José Boniz, quien tenía entonces gran entusiasmo por el puente sobre el Tajo frente a Lisboa, del que solamente existía el esquema que había dibujado el socio de Eiffel, Bartissol.

Convinieron Boniz y Peña en desenterrar este asunto, encargándose el primero de la parte financiera y el segundo de la redacción de ese proyecto completo, para el que hubo de hacer detenidos sondeos en el lugar elegido para comunicar la capital de la vecina República con la costa de Almada que frente a ella se extiende. Hallábase casi terminado el proyecto cuando murió Boniz y hubo de seguir Peña sólo la difícil gestión. Emprendió una activísima campaña mediante conferencias y artículos de periódico, consiguiendo que el Parlamento se ocupara del asunto, después de informar en él siete diversas comisiones. Desgraciadamente, las anormales circunstancias políticas del país hermano y la disolución del Parlamento hicieron que, por entonces, hubiera de abandonar el asunto.

Este proyecto—que se publicó y repartió en el Congreso de Lisboa del Progreso de las Ciencias—empleaba arcos de hormigón armado de 200 metros de luz, los mayores en su género hasta entonces proyectados, y el método de cimentación de las pilas—verdaderamente atrevido—permitía cimentar al aire libre a una profundidad cualquiera, siendo empleado poco después en el puerto francés de La Rochelle y citado en todos los tratados extranjeros que se ocupan de estas materias.

En 1921, la Escuela de Caminos le nombró profesor de su Laboratorio, sustituyendo a Zafra a su fallecimiento, en 1925, en la cátedra—que sigue desempeñando—de Mecánica elástica y Hormigón armado y publicando para ella dos obras fundamentales: *Mecánica elástica* (dos ediciones) y *Construcciones de Hormigón Armado* (1).

No abandonó por eso su actividad constructora—como en tiempos de Echegaray, que de ello amargamente se lamentaba, el sueldo de un profesor de la Escuela bastaría sólo para satisfacer a un anacoreta—, y ya mediante Sociedades que su prestigio le permitía formar, Peña construyó en Madrid y Sevilla sendas colonias de hoteles y un estadio para deportes en la última de las citadas capitales.

Simultáneamente se había constituído la Compañía "Transaérea

---

(1) Además ha dado a luz los siguientes estudios:

"Proyecto de presa de contrafuertes de 90 metros de altura" (Congreso de Sevilla de la Asociación española para el Progreso de las Ciencias, 1917).

"Evoluciones constructivas en el Hormigón Armado" (Conferencia pronunciada el 10 de febrero de 1925 en la Escuela de Ingenieros de Caminos).

"Cimentaciones a grandes profundidades" (*Le Génie Civil*, 1926).

"Gran cobertizo en hormigón armado para el Aeropuerto de Sevilla" y "Estudio y determinación de los esfuerzos en las vigas de celosía" (Memorias presentadas al Congreso de Lieja, 1930).

"Elasticidad y resistencia de los hormigones" (Memoria presentada al Congreso de Zurich, 1932).

Una conferencia en la Escuela de Caminos sobre "Repartición de cargas en los sólidos" y un Cursillo de 14 conferencias dadas en la misma en el presente curso sobre el tema "Grandes estructuras y presas", que se publican en la *Revista de Obras Públicas*.

Colón" para el establecimiento de la línea de dirigibles que había de enlazar Sevilla con Buenos Aires. A Peña se encargó el proyecto del hangar de Sevilla, que será el mayor del mundo, pues alojará dos zeppelines del tipo L. Z. 128. Suspendida esta obra por disolución de la citada Compañía, se ha reanudado en el mes pasado por cuenta directa del Estado español.

Comprendiendo Peña la enorme importancia que tiene el estudio de las grandes presas, por la imprecisión que en su cálculo resulta, eligió el tipo de presas-bóvedas y de bóvedas múltiples, que presentó por vez primera para el pantano de Alloz y ensayó luego construyendo la de Isber.

Este sistema, presentado primero al Congreso de Lieja el año 1930, y el siguiente al de Lisboa, tiene la doble ventaja de concretar el cálculo y de reducir el costo a la mitad del de la presa de gravedad. Con arreglo a este modelo ha redactado proyecto de presa para el pantano de Blasco Ibáñez, en el río Júcar, aprobado por la Superioridad en marzo del corriente año, en sustitución del proyecto primitivo.

He procurado, señoras y señores, daros una idea de lo que hoy es y representa el Profesor de la Escuela de Ingenieros de Caminos D. Alfonso Peña Boeuf.

* * *

No porque ello sea necesario, y aunque en mí pueda parecer osadía, me creo obligado por las tradicionales prácticas de estos actos a deciros algo del tema que el recipiendario ha desarrollado ante vosotros en el discurso que le acabamos de oír, que más que discurso diríase tesis de Doctor-Ingeniero, si tal título existiera —como sería preciso—en nuestros vigentes planes de enseñanza.

Desde los primeros estudios de Mecánica aplicada a los sólidos y flúidos se vió la necesidad de estudiar el movimiento que se producía por la actuación de varias fuerzas en puntos determinados y que, al cesar su actuación, dejaba al cuerpo volver a su posición primitiva por efecto de la inercia. Este efecto de movimiento vibratorio general en todos los cuerpos, ya por fuerzas que cambian en intensidad o varían de posición, fué estudiado en su forma más sencilla desde los comienzos de la Mecánica de los cuerpos, pero fuera de las primeras leyes de propagación del movimiento, dadas por Newton en los sólidos indefinidos en extensión; sus aplicaciones más antiguas se hicieron sobre los flúidos para el estudio de las ondas sonoras en Acústica y para el movimiento de los líquidos en la circulación por tubos y canales. Principalmente para las teorías acústicas se pusieron en actividad los estudios matemáticos sobre cuerdas y membranas, dando origen a las primeras aplicaciones a los cuerpos sólidos con los admirables estudios de Lord Rayleigh, Melde, Chladni, Wheatstone y Kundt, sobre las vibraciones en las placas planas.

Pero no sólo en Acústica, sino también en todas las ramas de aplicaciones físicas, la teoría vibratoria es fundamental: en Optica, desde los primeros ensayos de Fresnel y Newton hasta los últimos del sabio Einstein, todos los fenómenos de propagación y de producción están explicados y medidos por los principios de vibración de la materia y del éter, constituyendo modernamente la teoría matemática más fecunda que enlaza y unifica la óptica con la electricidad y con la constitución de la materia. En Fisiología también tiene esta teoría aplicaciones de gran interés, tanto en los fenómenos circulatorios como en los nerviosos y reflejos. En Aeronáutica y Navegación, tanto para el movimiento de la nave como para los efectos de propulsión y trasmisión de energía, los fenómenos vibratorios son básicos de las teorías respectivas, y del mismo modo resultan de gran interés los estudios publicados modernamente por las Asociaciones de Ingenieros navales sobre las oscilaciones del centro de carena, las transversales o de flexión de quilla, y las debidas a la transmisión de las hélices y a todas las perturbaciones que en el movimiento en un flúido ocasiona la propulsión por motor.

Es quizá en las aplicaciones constructivas en las que menos se ha estudiado este importante efecto, que no sólo por su importancia intrínseca, sino también por la reiteración de las causas, puede producir los mayores efectos.

La teoría de las vibraciones es, sin duda, el capítulo más general y fecundo de la Física matemática. En todos los fenómenos de la Naturaleza, por intervenir fuerzas en movimiento, aun siendo quietas, por las variaciones en su intensidad, en la circulación de flúidos, en la propagación de las actuaciones internas en los sólidos y en las mismas manifestaciones de la vida humana, todos los efectos son debidos a vibraciones.

En algunas ramas de la ciencia, como la Acústica, la Electricidad y la Optica, el estudio vibratorio es fundamental y todas las consecuencias de orden físico surgen como interpretación del problema vibratorio.

El estudio, en general, parte intuitivamente de la similación armónica, fenómeno de vibración el más sencillo producido en un punto solicitado por una fuerza atractiva proporcional a su distancia a un foco de atracción y en la mayor parte de los casos de reiteración de causas es la solución armónica la que del modo más simple y representativo permite determinar el proceso físico, aunque hay, sin embargo, algunos aspectos en que esa asimilación no puede hacerse.

De todos modos, y aunque no sea más que para determinar los tonos fundamentales, proporciona la solución armónica una asimilación posible que tiene notables ventajas.

En las aplicaciones de la mecánica a la ciencia de la Construcción, es lo más frecuente prescindir de las vibraciones, no porque de antiguo se creyera despreciable su influencia, sino por evitar el complicado estudio que la dinámica lleva consigo al intervenir en sólidos de bastante complejidad en forma y dimensiones.

Más que el estudio riguroso de la solución matemática completa, interesa en estas aplicaciones el orden de magnitud del efecto dinámico, pues la variabilidad de composición de los materiales empleados sólo permite las estimaciones mecánicas interiores dentro de un amplio margen de apreciación.

Tal sucede principalmente en los puentes de ferrocarril, en los que la multiplicidad de cargas de los trenes, la periodicidad de los movimientos de las locomotoras y la complejidad de las celosías, hace, hoy por hoy y probablemente en mucho tiempo, prácticamente imposible resolver el problema en toda su complicación.

Es, pues, muy interesante el planteo del problema desde el punto de vista que por su simplificación permita aplicarle a esas formas constructivas, dentro de una razonable aproximación, y éste es el objeto perseguido por el Sr. Peña al elegir el citado tema, poco desarrollado en la técnica de las construcciones, y que, como tantos otros, ha de obtener frutos espléndidos de la aplicación de los modernos métodos y teorías de la Matemática Superior.

* * *

Daría aquí gustoso fin a las deslabazadas páginas de este Discurso, si una circunstancia feliz, en que quizá no habréis reparado todos, no me obligaran a destacar el aspecto que el acto presente tiene de una fiesta de la gran familia de los Ingenieros de Caminos.

Porque he aquí que por primera vez en la vida, casi secular, de la Academia, se da el caso de ostentar este preciado título profesional el Presidente y el Secretario perpetuo de la misma, si bien, por la inexorable ley de las compensaciones, despliegue nuestro venerado Presidente, D. Leonardo Torres y Quevedo, la gloriosa bandera del genio, paseada en triunfo por los países en que mejor pueda ser apreciada, y cuente el que os habla, en su menguado *haber,* tan sólo la voluntad, que no es don de dioses, sino de pobres mortales.

Por otra parte, D. Alfonso Peña Boeuf hace el número diez y nueve—si mi cuenta no falla—entre los profesores de la Escuela de Caminos que ostentan nuestra Medalla académica. Y ello me obliga a cumplir el grato deber de rendir el debido homenaje a Centro de enseñanza de tan dilatada y brillante historia y a dedicar un recuerdo a los que en ella ejercieron su magisterio en forma tan perfecta que les hizo acreedores al homenaje de esta Corporación.

Al crear la Reina doña Isabel II, en 25 de febrero de 1847, esta Academia, designó la mitad de sus miembros, que libremente habían de elegir luego los dieciocho restantes. Entre los primeros figuraba ya D. Juan Subercase, y entre los segundos, D. José García Otero y D. Jerónimo del Campo, profesores los tres de la Escuela de Ingenieros de Caminos.

Los dos últimos aparecen en la primer acta de su Junta de Profesores, fechada el 25 de noviembre de 1836, y poco después, el 6 de julio del siguiente año, toma el primero posesión del cargo de director del Centro, instalado entonces en el edificio de la Aduana vieja, sito en la plazuela de la Leña.

Subercase restauró en todo su rigor el férreo Reglamento por que la Escuela se había regido en la época de su fundación, determinación que le puso, a los diez días de su mando, en el difícil trance de sofocar lo que en las actas de la Escuela se llama pomposamente "sublevación de julio de 1837", cuyo imberbe capitán era precisamente otro hombre ilustre, que con el tiempo vendría a ocupar también un sitial en esta Academia: D. Lucio del Valle, número 2 de la primera promoción que salió de la Escuela en el tercer y definitivo período de su historia, y el que proyectó y construyó en su primera parte las obras del Abastecimiento de aguas de la capital de España.

En el decenio siguiente obtuvieron asimismo el título de Ingenieros de Caminos otros muchachos en cuyo pecho había de llegar a refulgir la Medalla académica: D. José Subercase y el insigne matemático, financiero, ingeniero y dramaturgo D. José Echegaray, a quienes el mismo Del Valle contestó en el acto de su recepción; D. José Morer, a quien contestó Echegaray, y otro hombre que en la Escuela fué temible cabecilla y en la vida pública hábil y sesudo hombre de gobierno: D. Práxedes Mateo Sagasta, a quien su precoz afición a la Política no dió lugar a ser profesor de la de Ingenieros, pero sí de la de Ayudantes de Obras Públicas.

Siguiendo ya el orden cronológico de su entrada en la Academia, nos encontramos en 27 de junio de 1869 con uno de los más sólidos prestigios científicos del Cuerpo y de su Escuela: D. Eduardo Saavedra y Moragas, que descolló como maestro en diversas disciplinas, ostentando en su pecho, con la medalla de la Academia de Ciencias, las de la Lengua y de la Historia.

Diez años después llegó D. Miguel Martínez Campos; siguió D. Francisco Prieto y Caules, que falleció sin haber tomado posesión del cargo, y D. Amós Salvador, que ocupó más tarde, por espacio de seis años, la presidencia de la Academia, sustituyendo a Echegaray, que la había desempeñado durante tres lustros.

Siguieron D. Manuel Pardo y D. Eduardo Echegaray, y en tiempos más recientes, mis maestros D. Vicente Garcini y D. Juan Manuel de Zafra, cuya falta se nota más entre nosotros cada día que pasa, y los presentes, que por muchos años nos acompañen, D. Luis Sánchez Cuervo y D. Pedro González Quijano.

No he incluído en la anterior relación a nuestro actual Presidente porque su magisterio tiene carácter nacional y no limitado a las aulas escolares. Junto al suyo debe figurar el nombre de otro

Ingeniero de Caminos de talla singular que, sin pertenecer al Claustro de Profesores, ha explicado a los alumnos varios cursos monográficos de subido interés; me refiero, como habréis adivinado, a D. Esteban Terradas e Illa.

Cierra esta digresión histórica, en que amablemente me habéis acompañado, el nombre del más joven de los Académicos que en la Escuela de Caminos ejerce su magisterio: D. Alfonso Peña Boeuf, cuya historia es garantía de que en su mano no ha de apagarse, sino que lucirá cada vez con más brillo, la antorcha científica de nuestra *alma máter* profesional.

He dicho.