REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

DISCURSO INAUGURAL

DEL AÑO ACADEMICO 1987 - 1988

LEIDO EN LA SESION CELEBRADA EL DIA 14 DE OCTUBRE 1987

POR EL ACADEMICO NUMERARIO

EXCMO. SR. D. ENRIQUE LINES ESCARDO

SOBRE

VALORES ESTETICOS EN LA MATEMATICA

M A D R I D
DOMICILIO DE LA ACADEMIA

Depósito Legal: M. 33759 - 1987

REALIGRAF, S. A. - Burgos, 12 - 28039 Madrid

VALORES ESTETICOS EN LA MATEMATICA

La Real Academia de Ciencias me ha hecho el honor de encomendarme el discurso inaugural del año académico. Agradezco este honor y la confianza que me dispensa. Dedicaré mi disertación a exponer algunas reflexiones sobre el sentido estético de la creación matemática y, en forma más general, sobre la valoración estética de lo matemático.

Cuando se discute el lugar de la formación humanística en la educación, y ante una Matemática, mente y lógica de un maravilloso desarrollo tecnológico, creo que tiene interés mostrar la otra cara de esta Ciencia, en la que criterios estéticos dan sentido a muchas de sus creaciones.

Una bella proposición

Conversaba con el Profesor Valdivia, por los pasillos de esta Casa, acerca de algunos de los resultados que había obtenido últimamente en el campo de su especialidad matemática y me habló de una proposición relativa a la Teoría de las distribuciones cuyo enunciado preciso es: "Si Ω es un abierto no vacío del espacio euclideo n-dimensional R^n, entonces el espacio $D(\Omega)$ es isomorfo al $D(R)$".

Es sorprendente la isomorfía entre el espacio $D(\Omega)$ de funciones de **n** variables, infinitamente derivables con soporte compacto contenido en el abierto Ω, y el espacio más sencillo $D(R)$ de las funciones infinitamente derivables de una variable en R. Pero todavía más sorprendente, es que el espacio asociado de las distribuciones de Schwartz, desde el punto de vista estructural no depende de la forma del abierto Ω de R^n, ni tampoco de la dimensión **n** del espacio euclideo.

No esperaba un resultado que me permitiera ver la complejidad del espacio de distribuciones $D'(\Omega)$ a través de la simplicidad del $D'(R)$. Sin duda una bella proposición, que descubre aspectos de simplicidad en un difícil concepto matemático.

Comentábamos ésta y otras proposiciones, y la conversación derivó hacia la motivación de la creación matemática, que cuando alcanza altos niveles de abstracción, es difícil encontrar su origen en las intuiciones sensibles. La opinión del investigador matemático no dejaba lugar a dudas cuando decía: Hay un aliciente estético que se convierte en una de las finalidades de la creación matemática.

En efecto, no se puede prescindir de la consideración de una componente estética en la investigación matemática, pero son ineludibles dos precisiones. En primer lugar, se trata de una creación artística en un ámbito o universo de ideas, que es el lugar donde el matemático tiene su taller, y por otra parte, para participar en ella, se requiere una especial sensibilidad ante la belleza formal. Tal vez, uno de los importantes objetivos de los estudios superiores de Matemáticas sea la educación de dicha sensibilidad.

Un bello tema para un discurso

Reflexionando posteriormente, pensé que tratar del aspecto estético de la creación matemática, y en forma más amplia de los valores estéticos de la Matemática, no sería un tema extraño al interés del auditorio en el discurso de inauguración del curso académico.

Muchos autores, tanto clásicos como modernos, han escrito sobre el tema, bien como expectadores en la contemplación pasiva, o también como actores, creadores de ciencia en la investigación activa, e incluso algunas opiniones pueden parecer excesivas. El célebre H. Poincaré aseguraba: "La Estética, más que la Lógica, es el elemento dominante en la creatividad matemática"; y el gran físico teórico P.A.M. Dirac escribía: "Es más importante la belleza en las ecuaciones que el que se acoplen perfectamente al experimento".

Interés especial tienen las opiniones de los dos grandes matemáticos modernos G.H. Hardy y H. Weyl. La actitud idealista de Hardy, es un puro esteticismo que le aproxima a la mentalidad clásica griega. Reflejo de su pensamiento son las siguientes palabras: "Un matemático, lo mismo que un pintor, o un poeta, es un constructor de configuraciones. Si sus configuraciones gozan de mayor perdurabilidad que las construidas por los demás hombres es a causa de que su material básico son las ideas". Más adelante agrega: "Las configuraciones construidas deben tener belleza. La belleza es la primera piedra de toque, en el mundo no hay un lugar permanente para las Matemáticas feas".

La opinión de Weyl es más concreta y se refiere al infinito, que en la Matemática es origen de un idealismo estético, presente en los momentos estelares de esta Ciencia. Escribe: "Matemática es la Ciencia del infinito, su meta es la comprensión del infinito con medios humanos, es decir, finitos. El gran logro de los griegos fue el haber hecho fructífero el contraste entre lo finito y lo infinito, para el conocimiento de la realidad". Más adelante agrega: "La tensión entre lo finito y lo infinito y su conciliación llega a ser el motivo conductor de la investigación griega.

Estas certeras palabras señalan uno de los conceptos matemáticos de más trascendencia estética. Recuérdese, si nó, cómo define Hegel la belleza artística: "La belleza artística es un infinito representado en algún objeto finito. La idea se encarna en el símbolo.

* * *

Naturaleza de los objetos matemáticos

Si queremos abordar el tema de una valoración estética dentro del campo de la Matemática, que no se limite a la exposición de algunas configuraciones, proposiciones o teorías que se consideren bellas según la opinión generalizada de los estudiosos, es conveniente introducir algunas normas metodológicas. Su carácter no puede ser vinculante, ya que en ella participa la sensibilidad de quién emite el juicio estético.

Principiaremos por examinar brevemente la estructura de una teoría matemática. Se parte de unos elementos primeros y de unas proposiciones, llamadas axiomas, que precisan y relacionan estos elementos. El único requisito que deben cumplir los axiomas, es el de ser independientes y no contradictorios entre sí. Lo primero se refiere a la estética, para evitar redundancias, y lo segundo pertenece al orden lógico para que la teoría sea consistente. Como se indica, un axioma es una proposición, que unas veces tiene carácter existencial, otras de relación entre elementos y las más de ellas tiene ambos caracteres. A partir de estas proposiciones, por deducción lógica se obtienen otras nuevas, se definen configuraciones más complejas, con el auxilio de las proposiciones demostradas y, por el mismo método de razonamiento, se prueban otras. De esta forma se edifica progresivamente la teoría.

Objetos matemáticos son: los que hemos llamado primeros elementos, los axiomas, las proposiciones, sus demostraciones, las nuevas configuraciones y las proposiciones que a ellas se refieren. Todos son componentes de una teoría matemática, y los juicios estéticos pueden referirse a cada uno de ellos, a la teoría o a partes determinadas de la misma.

En el esquema expuesto se han mencionado los llamados elementos primeros, que no se definen y cuyas propiedades están especificadas por los axiomas. Desde los orígenes de la Matemática, se ha reconocido que los objetos de que se ocupa son abstractos, y en particular tales elementos lo son. Sin embargo, el carácter abstracto de los elementos básicos, a partir de los que se construyó la Matemática clásica, tienen una representación concreta cuando de manera natural se interpretan los resultados en el ámbito de las cosas sensibles.

En muchos casos, la abstracción que originó el concepto es análoga a la que encierra un nombre común en una lengua.

El paso más importante dado por los griegos para crear una ciencia, a partir de los conocimientos empíricos suficientes para calcular y medir, fue su insistencia en que la Ciencia matemática debía ocuparse de conceptos abstractos.

Los números son ideas que evidentemente proceden de una abstracción. Los naturales son abstracciones de la propiedad de coordinabilidad de conjuntos finitos.

Frente al sentido aplicado de la Geometría egipcia, los griegos comenzaron a razonar con los puntos, rectas, planos, circunferencias y distintas figuras geométricas de forma abstracta. Naturalmente que reconocían que estos conceptos estaban sugeridos por objetos físicos.

Mejor que cualquier comentario es transcribir las palabras de Platón referentes a los matemáticos: "Aunque hacen uso de las formas visibles, sobre las que razonan, ellos no discuten sobre tales formas, sino sobre las ideas a las que se asemejan; no discuten sobre las figuras que han trazado, sino de los cuadrados abstractos, de los diámetros abstractos, etc. Realmente ellos intentan contemplar la realidad de las cosas, que sólo pueden ser vistas con los ojos de la mente".

Esta cita, en el marco del puro idealismo helénico, basta para señalar cuál era la naturaleza de los objetos matemáticos en los albores de la Ciencia que se estaba creando.

La abstracción no es específica de la Matemática. Muchos conceptos de la Física clásica son resultado de una abstracción directa en el mundo fenomenológico. No obstante la Matemática difiere esencialmente de las otras Ciencias físicas y naturales, por la presencia en ella de un objeto matemático que trasciende a las abstracciones antes consideradas. El concepto matemático de infinito es ajeno a interpretaciones físicas.

Sin duda el infinito está en la raíz de la Matemática actual, y ya estuvo presente en el pensamiento griego. Unas veces de forma implícita a través de conjeturas, otras ante la evidente existencia de segmentos inconmensurables y de números irracionales, y también cuando se elude la palabra "infinito", como al razonar sobre la existencia de infinitos números primos.

Hay algo perturbador en el descubrimiento de los números irracionales. Mientras la infinitud de los números naturales tiene un carácter potencial, pues de cada número se pasa al siguiente, la de los irracionales no obedece a este proceso generativo. El infinito se hace tangible, en potencia: el famoso "devenir" en gestación finalista; o bien en acto: la presencia de un "ser" expresión de plenitud y acabamiento. La eterna disyuntiva: Heráclito-Parménides.

Estos conceptos son, pues, otros objetos de la Matemática. Una Ciencia en la que las nociones de límite y continuidad son básicas, y que no se podría construir evitando los distintos infinitos matemáticos.

No termina aquí la relación de los objetos matemáticos básicos. El término "conjunto" era de uso frecuente en las definiciones y proposiciones, pero fue G. Cantor quien tuvo el coraje de introducirlo, desde 1872, como un concepto de valor substantivo en la Matemática. El universo de los objetos matemáticos se enriqueció considerablemente.

No considera Cantor conjuntos de elementos determinados, como puntos, números o propiedades lógicas, por ejemplo, sino que elabora una teoría basada en los conceptos de elemento, conjunto y la noción de pertenencia. Su generalidad es extraordinaria.

Después de fuerte controversia la teoría de conjuntos se situó en los fundamentos de la Matemática, y hoy día la mayoría de las teorías matemáticas tienen una base conjuntista. Son elocuentes las palabras con que el gran matemático D. Hilbert enjuicia la Teoría de conjuntos: "La más fina creación del genio matemático y una de las supremas realizaciones de la actividad puramente intelectual del hombre".

Una belleza racional

Cuando nos planteábamos la cuestión de la forma cómo los objetos matemáticos son bellos, se nos presentaron un cúmulo de dificultades y dudas. Por una parte reconocemos, sin dudar, la presencia de tal cualidad en algunos objetos, pero por otra, no nos es fácil justificar nuestro juicio, seguramente por la misma naturaleza de lo bello que escapa a toda definición alternativa.

Probablemente fueron muchos los que conocieron estas dificultades, y es aleccionador el episodio que narra Aristóteles en su Metafísica. Se trata de una disputa filosófica entre él mismo y el cortés hedonista Aristipo, quien pretendía que en las Matemáticas no se podía encontrar rastro alguno de bondad o de belleza. Aristóteles se enfrentó a esta opinión mencionando a la belleza formal, idea que sin duda tenía una lejana procedencia pitagórica.

Cuando anteriormente estudiaba la naturaleza de los objetos matemáticos, buscaba aproximarme a un conocimiento de ellos que me permitiera encontrar el origen y raíz de los juicios estéticos. Los objetos matemáticos son ciertamente abstractos, es decir ideas, pero conviene hacer una matización que confirma la Historia de la Ciencia. Se pasa progresivamente de un periodo en el que los objetos matemáticos proceden de una abstracción próxima de objetos del mundo físico, hasta llegar a las últimas creaciones matemáticas en las que los únicos modelos posibles de muchas teorías, son otras teorías con un grado menor de abstracción. Pero lo cierto es que el matemático trabaja, investiga y crea en un universo de puras ideas.

No vamos a discutir el tema de la jerarquización de las Matemáticas entre las Ciencias del espíritu, ni de su correlación con el mundo físico, pues lo que buscamos es la forma de la belleza en la Matemática. Precisamente por este motivo hemos de recurrir a las fuentes del idealismo griego, para poder descubrir las notas objetivas que en opinión generalizada adornan a los objetos bellos, y cuya consideración es indispensable para emitir un juicio estético.

La Escuela pitagórica fue la primera en hacerle un lugar a la Estética. La filosofía de Pitágoras es la apoteosis de un formalismo estético en el que el número y la medida están en la raíz de todo lo que existe. En una especie de mística científica reúne a la Matemática y a la Música para construir un modelo de Universo, un Cosmos, en el que armonizan la matemática de las distancias y la música de las esferas. La ley del Universo es la armonía, que aparece como uno de los primeros conceptos estéticos: "La armonía es la unidad en la pluralidad y el acorde en lo discordante".

En el dodecaedro reconocían una figura perfecta, por lo que la incorporaron al modelo cosmogónico. También tuvieron conocimiento del tetraedro y del exaedro, pero es en la Academia de Platón donde se perfecciona la especulación sobre los cuerpos regulares, iniciada por Pitágoras y continuada en la cosmogonía de el Timeo platónico. En el diálogo posterior, el Teeteto, se mencionan el octaedro y el icosaedro, que con las tres anteriores forman las cinco "figuras platónicas", asimiladas por Platón a los cuatro elementos y a la figura del Universo. En el Teeteto, en el que se desarrolla la cosmogonía del Timeo, se dice textualmente: "Mirad cómo estos cuatro elementos se han hecho perfectamente bellos".

Me he detenido algo en la consideración de los cinco poliedros regulares, por el especial significado que tuvieron en el periodo clásico griego. La regularidad de sus formas los convirtió en arquetipos de la belleza geométrica, uno de cuyos caracteres es la especial simetría interna, que permite a cada uno de ellos coincidir consigo mismo después de ciertos movimientos.

Este sentido trascendente de la belleza de los poliedros, perdura hasta los tiempos de Kepler, que creía que el Universo había sido hecho según un esquema poliedral, y así lo asegura en su obra "Misterio del Cosmos".

Platón tiene dos diálogos dedicados a lo bello: el Hipias Mayor, de carácter refutativo, y el Fedro sobre la belleza en las almas, antítesis del primero. Sin embargo las ideas expuestas no admiten una traducción a una Estética matemática. Sólo en sus últimas obras, de influencia pitagórica, se refiere a la medida, en los siguientes términos: "En todas las cosas la medida y la proporción constituyen la belleza como virtud".

También admite Platón cierto tipo de placer: lo agradable. En el Fitebo estudia el placer, al que no le ha de faltar la medida. Es precisamente la medida la que salva al oído y a la vista, los únicos sentidos que ofrecen sensaciones sometibles a reglas y proporción.

Es en Aristóteles donde encontramos una alusión más precisa al pensamiento matemático. Aristóteles más próximo a la Naturaleza que al universo de las ideas, refiriéndose a la belleza formal escribe:

"Las formas supremas de lo bello son, la conformidad con leyes, la simetría y la concreción, y son precisamente estas formas las que se encuentran en las Matemáticas; y puesto que estas formas parecen ser la causa de muchos objetos, las Matemáticas se refieren en cierta medida a una causa que es la Belleza".

Esta cita vale más que un discurso, y nos dispensa de mencionar otros muchos nombres.

Una breve glosa del texto de Aristóteles es necesaria.

Cuando se dice conformidad con leyes, se asegura implícitamente que lo bello no es arbitrario ni irracional. Las leyes están dictadas por la razón e imponen un orden y unos preceptos. La conformidad con ellas representa la condición más general de lo bello, de acuerdo con el espíritu de un científico naturalista.

El concepto de simetría de Aristóteles es el reflejo de una macrosimetría observada en la Naturaleza. La Matemática ha conseguido perfeccionar, hasta el virtuosismo, esta idea por medio de la noción de grupo.

Finalmente, el sentido de la concreción, otros dicen determinación, no es el de fijar una limitación, sino el de definir, el de precisar, el de indicar los caracteres esenciales de un objeto. Todos estos elementos se distinguen por su racionalismo.

Obsérvese que las cualidades que aprecia y estima el matemático, como la simplicidad y claridad de las ideas, la economía conceptual, la transparencia del razonamiento, la precisión de las conclusiones y el orden y la medida en la construcción de las teorías, están de una u otra forma implícitas en el concepto griego de belleza.

Los módulos helénicos de la belleza son los adecuados para percibir los valores estéticos de la Matemática griega, que tiene algo de proporcionada, acabada, estática y siempre fría. De carácter conscientemente especulativo, cultivada por una aristocracia intelectual fue adquiriendo un pulimento y un tallado exacto. Los "Elementos de Euclides" en su forma original han llegado hasta nuestros días, como obra maestra del pensamiento abstracto.

La expresión artística de la medida y la proporción en la arquitectura griega es el templo, igual en sus realizaciones y tan sereno en su equilibrio. Sus plantas rectangulares, sus iguales columnatas de un paralelismo euclídeo, sus frontones triangulares, más bien son representaciones de una idea geométrica, que ornamento de un templo. Tal vez fuera lo más puro e ideal que pudieran ofrecer a la divinidad.

Como indicábamos, en esta época, las ideas matemáticas se originaban por una abstracción próxima de los objetos del mundo físico, por lo que algunas de las formas de la belleza matemática tienen su origen en la de sus modelos de la Naturaleza. Tal es el caso de la simetría. Otras veces, son los principios estéticos presentes en las obras de arte, los que se trasladan al campo matemático, etc. Pero en definitiva, estas cualidades o normas que se enuncian como principios objetivos, son simples postulados que reflejan la esencia de una cultura, en nuestro caso, la cultura griega.

La sensibilidad en la belleza

Al final del apartado anterior hablábamos de una estética cerrada y fría: la estética formalista que el genio griego descubrió en la Matemática. Sin embargo en sus preceptos inmutables, algo echábamos en falta: esa gracia alada, esa emoción, esa sorpresa, que hoy reconocemos como necesarias en toda obra bella.

Cierto que estas notas pertenecen al campo de la sensibilidad, y al hacer mención de ellas introducimos en la definición estética un elemento nuevo e inquieto, pero esencial, que es el hombre.

No se trata de la presencia del hombre pensador, con cuyas ideas se ha construído la Matemática, sino del hombre poseedor de una sensibilidad, que incluso a veces le confunde.

De la función pasiva, como admirador de lo bello, pasa a ser actor en el juicio estético y por ello integra su sensibilidad en la definición de lo bello.

Al recorrer la Historia de la Estética, inmediatamente se observa el gran contraste y tensión con que aparecen el mundo de la razón y el de las sensaciones, al tratar el tema de la Belleza. Frente al pensamiento racionalista francés: lo bello es lo verdadero, según Descartes, se presenta el sensualismo inglés: todas las manifestaciones del espíritu se reducen a sensaciones, asegura Locke.

Pero no tratamos ahora de analizar si el juicio estético es un sentimiento o un conocimiento, o ambas cosas. Vamos sencillamente a reflexionar sobre el placer que produce el objeto bello, y la relación con las cualidades atribuidas a la belleza racional.

Cuando entre los objetos matemáticos, decimos que uno es bello, nuestra afirmación no tiene un valor determinante en sentido estricto. Es cierto que hemos considerado las notas objetivas de la belleza, pero como éstas tampoco son vinculantes, aún estando presentes en el juicio, no obligan a una calificación definitiva. Falta la comprobación de si existe placer o agrado estético en el que emite el juicio. Precisamente esta sensación placentera es la que decide. Ya dice Kant que "en el dominio estético basta saber si sentimos placer o desagrado".

El placer estético no se asemeja a los otros, en particular en el campo de la Matemática. Seguramente que el análisis de este placer es uno de los puntos más sugestivos de nuestra reflexión.

En primer lugar, la sensibilidad del hombre depende en gran medida de su circunstancia histórica y cultural, por lo que los juicios estéticos cambian con el tiempo.

Para que, en lo posible, el juicio estético sea intemporal e impersonal el tipo de placer, que se postula, ha de estar ligado a aquellas cualidades que pertenecen a la naturaleza del hombre como tal, con independencia de condicionamientos personales.

Aunque no haya avanzado mucho en el análisis del placer estético, ya queda claro que se trata de un placer intelectual, que afecta a la sensibilidad humana en sus aspectos más nobles.

Leibnitz define el placer intelectual como "el sentimiento de la perfección que se percibe ya sea fuera de nosotros ya sea en nosotros mismos". Se podría decir, que es la satisfacción ante la obra bien hecha, que tanto elogiara Eugenio d'Ors. En el contexto matemático, es el placer que se tiene ante un objeto que cumple los cánones clásicos de la belleza.

Kant se refiere a otro placer más sutil, que lo describe de la manera siguiente: "Dos de nuestras facultades intelectuales, de costumbres divergentes, se muestran aquí de acuerdo: la imaginación y el entendimiento. Esta coincidencia inhabitual nos produce placer, y este placer desinteresado y que no requiere posesión natural, es un puro placer intelectual".

Algunos comentarios desearía hacer sobre la armonía de las dos facultades divergentes. Precisamente la imaginación y el entendimiento son los dos pilares en los que se asienta la creatividad del matemático. La presencia de una capacidad creadora potente es, pues, motivo de placer estético. Ahora bien, el goce que produce una creación matemática no es el de la contemplación estática de una obra de arte, sino el dinámico de una re-creación del objeto matemático en la mente propia, que frecuentemente requiere la repetición de un proceso lógico deductivo.

El proceso de la creación y de la admiración de lo bello en el hacer matemático, es uno de los placeres estéticos más intensos y puros que se pueden dar en la actividad intelectual del hombre. No se olvide que en toda creación interviene la imaginación, que es actividad del hombre libre, por lo que el placer estético es también gozo en la propia libertad.

Como una componente de la creatividad es la imaginación, que no está sometida a una disciplina canónica, es frecuente que la presencia de la creatividad, en un objeto matemático, se manifieste por una sorpresa. Es el algo inesperado que da vida a la obra bella. Algunas veces lo he llamado "efecto sorpresa", que da a las proposiciones matemáticas una gracia y belleza dinámicas indiscutibles.

Me gusta poner un ejemplo, aunque simple, expresivo. Hemos hablado de los cinco poliedros regulares convexos, las figuras platónicas, como prototipos de la belleza racional, y efectivamente para ellos tenemos nuestra tranquila admiración. Ahora bien, hay una proposición que asegura: "Sólo existen cinco *poliedros regulares convexos en el espacio euclideo tridimensional*". La primera reacción es de sorpresa, e inmediatamente nos preguntamos el por qué. Una bella proposición que además abre muchísimos interrogantes.

No termina aquí el análisis de la creatividad, como carácter dinámico del placer estético. Su mismo nombre indica una disposición para crear nuevos elementos. La fecundidad de las ideas es señal inequívoca de una verdadera creatividad, por lo cual, en el campo de la Matemática, la fecundidad de las ideas es también una forma de la belleza.

En resumen, la sorpresa y la fecundidad son dos formas de la belleza activa en los objetos matemáticos.

Terminamos este apartado volviendo a tratar del infinito, mejor dicho, de los conjuntos infinitos. Estos objetos matemáticos trascienden a todos los modelos sensibles, y su conocimiento no se produce a través de sus elementos, de los que sólo se conocen algunos. En cierto aspecto, la idea de conjunto infinito es incompleta. Su definición general está dada por la simple idea de ser coordinables con alguno de sus subconjuntos estrictos.

Sin embargo, este concepto está en la cumbre de la creatividad, pues la misma Matemática es muestra de su fecundidad interna. Es admirable este concepto, en el que están reflejadas las posibilidades creativas del matemático.

Evidentemente que a este objeto matemático, no son aplicables los módulos de la belleza formal, pero sin duda posee todas las cualidades inherentes a la belleza dinámica. Los grandes teoremas relacionados con el infinito, que son los grandes teoremas de la Matemática, frecuentemente tienen sorpresa, lo que es propio de un concepto potencialmente fecundo.

Otros aspectos estéticos en la Matemática

En los tres apartados anteriores se han expuesto ideas básicas, para una Estética de la Matemática, que creo son centrales; pero soy consciente de no haber prestado atención a otros aspectos notables y sugestivos de indudable valor estético. Forzosamente tengo que limitar la extensión de este discurso, en el que también ha de estar presente la medida.

No obstante creo que debo mencionar aspectos, uno lógico y otro de expresión, sin los cuales la Matemática aparecería como invertebrada y borrosa.

El razonamiento matemático es el cauce por el que discurren las proposiciones, y la deducción lógica es el hilo sutil y resistente que las enlaza. Después de la crisis sobre los fundamentos de la Matemática a principios de siglo, la Lógica, con el calificativo de matemática, es una rama con vitalidad extraordinaria, llena de contrastes y sorpresas y con proposiciones de gran belleza. Sirva de ejemplo el teorema que K. Gödel formuló en 1931, y que es uno de los más sugeridores de la Matemática actual. Dice así:

"Si es consistente una teoría formal que abarque a la Teoría de números, siendo los axiomas del sistema formal de la Aritmética axiomas o teoremas de la teoría formal considerada, entonces esta teoría es incompleta".

O sea, que existen proposiciones verdaderas de la Teoría de números, que no son formalmente demostrables. De alguna forma la creatividad humana supera al instrumento lógico.

El otro aspecto, que se ha mencionado, se refiere al uso del simbolismo. El progreso real de algunas ciencias, como la Física, estaba condicionado por la ayuda de la Matemática para la formulación de sus leyes. La cualidad de precisar los conceptos y procesos, y expresarlos en forma breve y decisiva, es típica del método matemático. Por citar algún ejemplo, recordemos las fórmulas de la gravitación newtoniana y la einsteiniana que expresa la masa de un móvil por su velocidad. Sin hablar de otras modernas teorías de la Física, en las que esta Ciencia ha sido motor de la Matemática, bastan los ejemplos mencionados para mostrar la belleza de una forma de expresión cuyas características son universalidad y sencillez.

No quiero dejar de citar un episodio de extraordinaria importancia en la Historia de la Matemática (cuyo análisis sería materia para una lección), que es la creación de la Geometría analítica.

Aunque ya existían precedentes desde los griegos de una investigación geométrica auxiliada por las medidas de longitudes y distancias, fue el genio de Descartes quien la convirtió en método. La idea central de asociar las ecuaciones algébricas a las curvas y superficies, es lo que permite pasar de un pensamiento espacial a una técnica de cálculo algébrico con símbolos y números. Desde el punto de vista conceptual, esta creación es una de las más ricas y fructíferas en el campo de la Matemática, y por ésto de gran belleza.

Establecidos unos principios generales, para la formación de juicios estéticos sobre objetos matemáticos, lo oportuno sería aplicarlos. La verdadera tarea a realizar, de un interés histórico-cultural extraordinario, sería el estudio comparado de la Estética matemática, frente a otras manifestaciones culturales a lo largo de la Historia. Obviamente nosotros nos limitaremos al exámen de algunos casos seleccionados.

* * *

La sección aurea

La más popular de las configuraciones geométricas, que se consideró portadora de una escondida belleza, es la llamada **Sección aurea.** Desde los tiempos clásicos se tiene noticia de ella, y su fama se conserva a través del brillo de su nombre. Es justo, pues, que dediquemos un comentario a la belleza encubierta de esta figura, que fue objeto de admiración por los geómetras durante siglos. Por otra parte, esta anécdota estética contiene ya el germen de un proceso infinito, lo cual confirma que, a veces, la anécdota es más elocuente que la historia.

Según Proclo, la sección aurea ya era conocida por Platón. Se trata de la partición de un segmento en otros dos, de manera que la razón de la parte menor a la mayor sea igual a la razón de la parte mayor al segmento total. En la literatura matemática clásica, la sección aurea ocupa siempre un lugar preferente. Kepler aseguraba que las dos joyas de la Geometría eran la sección aurea y el teorema de Pitágoras.

La razón entre el segmento menor y el mayor, en la sección aurea, es $(\sqrt{5}-1)/2$, y este valor debía tener la razón entre los lados de un rectángulo para que su forma fuera lo más bella posible. Este dogma estético está reflejado en las dimensiones de las fachadas del Partenón y en las de otros templos griegos.

Hoy no tendría sentido para muchos el considerar el número mágico, de la sección aurea, como una constante de valor estético. Generaciones inconformistas de pintores y arquitectos (recordemos a Le Corbusier) buscaron otras referencias, o simplemente aceptaron un relativismo funcional. Ya indicábamos anteriormente que la valoración estética depende de la época y del hombre, hijo de su tiempo.

Sin embargo, el número de la sección aurea aparece con insistencia en distintas situaciones, incluso al describir algunos procesos naturales; y por otra parte al contemplar cuadros con la forma del rectángulo aureo, tenemos la sensación de algo bien proporcionado.

No es difícil encontrar explicación matemática a esta reiterada presencia del número mágico, buscando un planteo general que englobe todos los casos, pero es claro que así no se consigue dar respuesta a una cuestión de tipo estético, cual es, el motivo de la sensación agradable al contemplar el rectángulo aureo.

El problema estético subyacente en la geometría de la sección aurea, está estrechamente relacionado con una propiedad de dicho rectángulo, que se puede enunciar de la siguiente forma: Un rectángulo aureo se puede considerar construído a partir de un cuadrado, completándolo con un rectángulo menor, que precisamente es semejante al primero, por lo que también es un rectángulo aureo.

Esta propiedad da lugar a un proceso ilimitado, en el que de un rectángulo aureo se pasa a otro contenido en él, por lo que continúa secreta la raíz de lo que fue un canon en la valoración estética.

Frente a este resultado, de aspecto negativo, aparece un elemento inesperado que escapa al exámen individual, y trasciende al de una sucesión indefinida de rectángulos. Tal vez el valor estético del rectángulo aureo resida en esta infinidad, contenida potencialmente en la finitud de un rectángulo.

El concepto de grupo en la ornamentación árabe

En la Historia de la Matemática, el periodo que se extiende desde el ocaso cultural de Grecia hasta la llegada del Renacimiento, presenta un fuerte contraste con la brillantez de la antigüedad clásica. La herencia griega es en parte asimilada por los árabes que también conocían la ciencia hindú. No vamos a mencionar los descubrimientos matemáticos fechados en esta época, que ya han sido estudiados en las conferencias sobre la Ciencia árabe dictadas en esta Academia. De lo que vamos a hablar es de uno de los notables logros de la Matemática árabe durante este periodo. Ordinariamente olvidado en la historia oficial, y del cual se hizo eco el Profesor Montesinos en interesante conferencia impartida el curso pasado en esta Casa. Se trata del concepto de grupo, piedra angular del Algebra moderna, del que los árabes presentaron modelos en los bellísimos mosaicos y atauriques que decoran las estancias de la Alhambra granadina.

No se sabe quiénes fueron los artífices de estas decoraciones. El noble musulmán andaluz Muhammed al-Ahmar, primer soberano de la dinastía nazarí, construyó su residencia en la Alhambra y Yusuf I fue uno de los primeros arquitectos.

El arte nazarí es frágil y delicado. Las tallas de estuco que como peregrinos tapices ornamentan las paredes, el alicatado de sus zócalos y el color de la azulejería, componen modelos de estructuras matemáticas extrañas a los "Elementos de Euclides". En ellas se encuentran propiedades de invariancia respecto a las traslaciones, simetrías, giros, etc., es decir, transformaciones que aplicadas al decorado le hacen casar consigo mismo. La colección de las transformaciones, admitidas por el mosaico o ataurí, tiene estructura de grupo.

Hay diecisiete grupos de mosaicos matemáticamente definibles, en este tipo de decoración, y para cada uno de ellos hay un modelo en la Alhambra granadina.

Son brillantes las aportaciones de los árabes en el campo de la Matemática, pero podemos asegurar que una de las más notables y sin duda la más bella, se debe a los artistas que de forma inspirada introdujeron la teoría de grupos en la ornamentación de la Alhambra.

Hasta principios del siglo XIX, no se pone de manifiesto el papel fundamental de la estructura de grupo. El matemático francés E.Galois (1811-1832) introduce los grupos de sustituciones en el estudio de la resolución de ecuaciones. Como estructura fundamental de la Matemática está presente en las teorías básicas del Análisis, de la Geometría y la Topología, así como en la Física y Química teóricas.

La simetría, que Aristóteles enumera entre las "formas supremas de lo bello formal", y que de manera confusa se describe en términos de una simetría especular, aparece en toda su nitidez, referida a objetos matemáticos, por medio del concepto de grupo.

Un conjunto es "simétrico" respecto de un grupo, si existe un grupo de transformaciones del conjunto sobre sí mismo, es decir, si admite las transformaciones de un grupo.

Los árabes intuyeron esta simetría grupal en la ornamentación.

El infinito en la pintura del Renacimiento

El Renacimiento, como reencuentro con el hombre y la Naturaleza a través de la cultura griega, origina nuevas corrientes de pensamiento en Europa. Se investiga lo verdadero y en el mundo físico se buscan las seguras realidades. La convicción griega, de que el comportamiento de la Naturaleza se describe por leyes matemáticas, dio sus frutos en el campo del Arte antes que en el de la Ciencia.

Cierto es que dos siglos antes Leonardo de Pisa, el Fibonacci, había escrito en 1202 su famoso "Liber abaci", que junto con el "Practica geométrica", recogía saberes árabes y propios; y que luego en pleno Renacimiento, los Pacioli, Cardano, Tartaglia y otros famosos algebristas, aparte de importantes resultados, consiguieron introducir definitivamente el simbolismo algébrico, que abrió cauce al desarrollo de esta rama de la Matemática. Sobre estos temas nos remitimos a la notable conferencia que dictó el Profesor Etayo en esta Academia sobre "El Algebra del Cinquecento".

Sin embargo en la valoración estética de la Matemática del Renacimiento, tiene más relieve la forma como el arte pictórico incide en el dominio de las puras ideas matemáticas. Los pintores renacentistas, a la manera griega, buscan las leyes matemáticas subyacentes para que la representación de la Naturaleza sea fiel.

El ojo ve la pintura, que, a través del mismo, ha de crear en el que la contempla la misma impresión que una escena real. La luz juega un papel esencial en la expresión artística renacentista, y el rayo luminoso es pura geometría. El rayo ha de pasar por el ojo del artista y es cortado por el plano del cuadro. Este es el principio de una nueva Geometría. En el plano se obtiene la imagen perspectiva, como la denominó A. Durero.

La Perspectiva focal fue descubierta por el arquitecto y escultor Brunelleschi (1397-1475), del que fue discípulo el gran Leone Battista Alberti (1404-1473), autor "Della Pittura", la obra en la que se formaron los pintores del glorioso Renacimiento italiano. En ella se lee: "Las Artes se aprenden por razón y método. Lo primero que necesita un pintor es aprender Geometría". El esquema matemático fue desarrollado por los Paolo Uccelo (1397-1475), Piero della Francesca (1416-1492), el inmortal Leonardo da Vinci (1452-1519) y otros. Hay cuadros de Piero della Francesca que son verdaderos teoremas de Perspectiva, y no olvidemos las ilustraciones didácticas de Durero, que en Italia aprendió la nueva Matemática de la representación espacial.

Entre los nuevos elementos geométricos que se presentan en las perspectivas, están los puntos y rectas límites, o de fuga como dicen los pintores. Cuando varias rectas son paralelas en el espacio euclídeo de la escena real, aparecen en el cuadro como rectas concurrentes en un punto límite. El punto del infinito de las rectas paralelas queda representado por un punto finito en el plano. Otra vez se da la situación sorprendente y bella de un infinito, con todo el secreto de su inaccesibilidad, representado por una realidad finita y próxima. Precisamente el punto de fuga unifica el fondo infinito con las figuras de los primeros planos, consiguiendo un todo orgánico y vivo.

El matemático encuentra una luminosa expresión de la belleza, de una visión finita de lo infinito, en la obra maestra de Rafael de Urbino (1483-1520), de la Cámara de la signatura vaticana titulada "La escuela de Atenas".

No puedo pasar sin hacer un comentario sobre esta obra maestra de la pintura universal, que parece resumir y cerrar hacia el infinito, una época gloriosa de la cultura griega: Un gran arco circular acoge, en unidad, a una numerosa asamblea de filósofos. Platón, en cuyo rostro se descubre a Leonardo, en el centro, dialoga con Aristóteles, y su índice hacia lo alto señala un mundo de ideas, mientras Aristóteles adelanta su mano en ademán de equilibrio entre un puro idealismo y una realidad. Hacia un lado Sócrates acompañado por Alcibiades, después Diógenes, Heráclito y otros. A la derecha y en primer término, se sitúa el mismo pintor en un grupo de astrónomos y geómetras como Ptolomeo que sostiene un globo terráqueo en la mano, Zoroastro con una esfera celeste, Euclides, cuyo rostro es el del arquitecto Bramante, dibujando una circunferencia.

Pero hay algo más en la grandiosa representación rafaelina. Hasta cinco arcadas de bóvedas inmensas se van alejando hacia un punto de fuga, en el que convergen todas las rectas no trazadas de una perspectiva matemática, que cierra un espacio sin límite para el legado perenne que nos dejó la cultura griega.

La Matemática de lo variable

Gran parte del siglo XVII y principios del XVIII es un periodo lleno de contrastes en la historia de Europa. Es la época del Barroco, con sus luchas y crisis, con los descubrimientos de nuevas tierras y nuevos horizontes, y en el que domina el ansia de la mudanza y la novedad. El hombre sabe que es actor de su destino y no sólo espectador. Este espíritu se manifiesta en las Artes y en la Literatura. Los escultores y pintores buscan la representación de la vida en el movimiento, y en los escritores el tema de lo mudable y pasajero está presente.

Admira que también el tema de la Matemática sea lo variable.

No se trataba de un tema nuevo. Los Fermat, Pascal, Barrow, Cavalieri, Roberval, Wallis, Huygens y Gregory, ya estuvieron en el problema y dejaron un depósito considerable de ideas y resultados, pero se podría decir, que el tiempo aún no había llegado. En palabras de Newton, se trataba de "sujetar las leyes de la Naturaleza a las leyes de la Matemática", sujetar lo variable, sin que lo variable pierda su condición. Este propósito sólo podría considerarse como sensato en una época en la que se admitía la entidad de lo variable, e incluso "la celeste armonía, en mudanza se funda" como escribiera el poeta.

Casi simultáneamente, un físico-matemático, Newton, y un filósofo-matemático Leibniz, institucionalizan algunas de las ideas de sus predecesores, para que sean fundamento de un nuevo Cálculo, que para Newton es el Cálculo de fluxiones y para Leibniz el Cálculo infinitesimal. Los dos atacan el problema de la misma forma. Tratan de estudiar el proceso variable en un instante o en un lugar determinado, sin interrumpirlo, es decir, sin pasar a una situación estática.

Para Newton la variación en el movimiento se conoce por la velocidad, y para Leibniz la variación es consecuencia del comportamiento de los indivisibles de los que está constituido el continuo, según su concepción filosófica.

Obsérvese que el tema del infinito, a través del continuo subyace en ambas presentaciones del estudio local de lo variable.

Para Newton, la velocidad aparece como un límite de un cociente incremental, que es la velocidad media, al que nos aproximamos tanto como deseemos.

Leibniz trata directamente con incrementos infinitesimales, no nulos, pero menores que cualquier número, llamados diferenciales, con las que forma el cociente diferencial. (Una interpretación de estas entidades se da en el moderno Análisis non-standard).

La diferencia entre una y otra manera de ver las cosas refleja la orientación física del pensamiento de Newton, y la filosófica del de Leibniz enmarcada en la teoría de las mónadas.

Consecuencia de lo expuesto es que Newton resuelve el problema del área calculando su derivada, y así la obtiene como una antiderivada, es decir, pasando de las fluxiones a las fluyentes. Leibniz, siguiendo las ideas de Cavallieri, obtiene el área como una suma de una infinidad de indivisibles.

Los dos conceptos: la derivada y la integral, independientemente de cómo han sido generados, son dos máximos en la capacidad creativa del ingenio matemático. Su simplicidad conceptual y su fecundidad demostrada en la construcción de un Cálculo para lo variable, los muestra como objetos matemáticos plenos de belleza.

La resolución de ecuaciones algébricas por radicales

Hay problemas que resisten a la acción del tiempo. Puede cambiar su enunciado, de acuerdo con los conocimientos matemáticos de cada época y con los progresos realizados en su resolución, pero lo esencial de la pregunta permanece sin respuesta. Esta sólo llega cuando se dispone del instrumento matemático adecuado, que con frecuencia se basa en nuevas ideas.

Uno de estos problemas es el de la resolución de ecuaciones algébricas por radicales; es decir, se trata de hallar fórmulas que den las raíces de la ecuación a partir de sus coeficientes, en las que sólo intervengan las cuatro operaciones racionales y la radicación.

En la antigüedad ya se conocían métodos para resolver ecuaciones de segundo grado, y los matemáticos italianos del Renacimiento dieron fórmulas para las de tercer y cuarto grados.

Desde mediados del siglo XVI hasta principios del XIX, se hicieron infructuosas tentativas, algunas protagonizadas por los más grandes matemáticos, como Euler y Lagrange, para hallar fórmulas para la ecuación de quinto grado. Ruffini en 1811, e independientemente Abel en 1824, probaron que no existían fórmulas para las ecuaciones generales de grado superior al cuarto.

Este resultado negativo dio lugar a una nueva formulación del problema, pues si bien las ecuaciones generales no son resolubles por radicales, pudieran serlo algunas ecuaciones particulares de grado superior al cuarto, como en efecto ocurre. Se trata pues, de hallar condiciones necesarias y suficientes para que una ecuación algébrica sea resoluble por radicales.

En 1832 moría trágicamente el joven matemático francés Evaristo Galois, la estrella de esta teoría, dejando unos escritos con la solución del problema. En sus trabajos inspirados en los métodos de Lagrange, introducía nuevos conceptos, como el de grupo, con los cuales no sólo resolvió la cuestión planteada sino que inició un camino moderno para el Algebra. De la importancia de este hecho se hace eco el gran matemático J. Liouville, que en 1843 dirigía una comunicación a la Academia de Ciencias de París, en los siguientes términos:

"Espero interesar a la Academia al anunciarle que entre los papeles de Evaristo Galois he encontrado una solución, tan precisa como profunda, del bello problema de la resolución de una ecuación algébrica por radicales".

El esquema de las ideas y métodos de Galois es el que se expone en las siguientes definiciones y propiedades:

Dada una ecuación algébrica, cuyo término de grado máximo tiene coeficiente unidad, el cuerpo base es el generado por los coeficientes, y el cuerpo de descomposición es la mínima extensión del cuerpo base que contiene las raíces de la ecuación.

Los automorfismos del cuerpo de descomposición, que dejan invariantes los elementos del cuerpo base, forman un grupo respecto de la operación habitual de composición de aplicaciones, que se denomina grupo de Galois de la ecuación dada. Cada automorfismo efectúa una permutación en el conjunto de las raíces de la ecuación, por lo que el grupo de Galois se puede identificar con un grupo de permutaciones de las raíces de la ecuación, que evidentemente es finito.

Definido este grupo mágico, la propiedad central de la teoría es que existe una correspondencia biunívoca que relaciona el conjunto de subgrupos del grupo de Galois, y el conjunto de los cuerpos intermedios entre el cuerpo base y el de descomposición. Esta correspondencia los vincula estrechamente, de manera que las propiedades de los cuerpos intermedios se deducen de las de dichos subgrupos.

El grupo de Galois de una ecuación caracteriza la simetría interna de sus raíces. Todos los problemas fundamentales relativos a la posibilidad de reducir la resolución de una ecuación a las de otras de grados inferiores, se pueden formular como problemas sobre la estructura de grupos de Galois.

En particular, una ecuación es resoluble por radicales si, y sólo si, su grupo de Galois es soluble, es decir, si posee una serie normal en la que los sucesivos factores sean abelianos.

La Teoría de Galois es prototipo de una bella realización matemática. En ella se introducen algunas nociones nuevas referentes a las teorías de cuerpos y grupos, pero son las indispensables para alcanzar los fines de la teoría. Los razonamientos se orientan en cada fase por lo que demanda el problema, con la coherencia de algo necesario. Por medio de la teoría de grupos se consigue analizar la simetría interna del conjunto de las raíces de la ecuación. Todos los objetos matemáticos de la Teoría son los adecuados para conseguir la transparencia de las conclusiones.

Realmente que en esta Teoría se reconocen las formas de que hablara Aristóteles al tratar de la belleza formal.

Clasificación de los infinitos

En todos los esforzados trabajos realizados por Cauchy, Bolzano y especialmente por Weierstrass para rigorizar el Análisis matemático, estaba latente siempre el mismo problema. Se trataba en realidad de descubrir los esquemas que permitieran operar con los elementos de conjuntos infinitos. La rigorización no estaba urgida por deficiencias lógicas, sino por un conocimiento incompleto de ciertas clases de conjuntos infinitos.

Fue hacia 1870 cuando, por vez primera, un matemático eligió como objeto de sus investigaciones el concepto abstracto de conjunto, es decir, conjunto sin calificativo alguno. G. Cantor elaboró una teoría, a partir de ideas muy simples, que abarca tanto a los conjuntos finitos como a los infinitos.

La necesidad de comparar las magnitudes de los conjuntos infinitos condujo a Cantor a establecer un criterio de comparación, que además permitiera definir la potencia de cada conjunto y su número cardinal correspondiente, expresión de su magnitud.

La simple idea de coordinabilidad, que por abstracción originaba el concepto de número natural, era aplicable a conjuntos cualesquiera, dando lugar al concepto de número cardinal: Dos conjuntos tienen el mismo número cardinal, o la misma potencia, cuando se puede establecer una correspondencia biunívoca entre ellos. La noción de número cardinal fue formalizada posteriormente por J. Von Neumann.

Los conjuntos infinitos más conocidos son, el de los números naturales, y el de los números reales, que tienen distinta potencia. El descubrimiento de infinitos de distinta potencia fue una sorpresa y el origen de la fecunda teoría de la numeración cardinal de los infinitos.

Además, se puede asegurar que existen conjuntos de potencias cada vez mayores en virtud de la proposición cantoriana: "El conjunto formado por las partes de un conjunto tiene potencia superior al original". La reiteración de esta propiedad, a partir de un conjunto infinito, como el de los números naturales, permite obtener una sucesión creciente de números cardinales.

Problemas fundamentales de la Matemática son los referentes a la existencia de potencias intermedias entre las de la escala anterior.

La teoría de Cantor de los números cardinales, es una de las bellas creaciones del ingenio matemático. El infinito, con toda su problemática y su inaccesibilidad es el elemento básico, la coordinabilidad como instrumento comparativo es una idea simple, y el desarrollo de la teoría es fecundo y sorprendente.

Una definición de Geometría

Los años de la década 1870-1880 fueron de especial relieve para la Universidad alemana, que vivía un clima de optimismo nacional. El año 1872 tuvo un peculiar significado en el campo de la Matemática: Cantor estableció las directrices de una Teoría de conjuntos abstractos, abriendo un nuevo campo de investigación; Weierstrass daba a conocer en la Academia de Berlin una función continua sin derivada en ningún punto; Dedekind publicaba el trabajo "Continuidad y números irracionales" en el que construía los números irracionales por medio de las cortaduras, método de estilo clásico indudable; y finalmente Klein dio a conocer su famoso "Programa de Erlangen", del que nos ocuparemos con detalle.

Se han mencionado estos trabajos porque desde un punto de vista estético tienen una valoración muy notable, dentro del periodo calificado como "Edad del rigor".

Félix Klein, con 23 años, fue llamado a la Universidad de Erlangen con la categoría máxima de Profesor. En el discurso inaugural ante la Facultad y el Senado universitarios, expuso un extenso programa de investigación para los años próximos. La disertación estuvo dedicada especialmente a la Geometría, en una época de florecimiento de las Geometrías proyectivas y no euclídeas. Con admirable decisión y para ordenar las ideas, se planteó la cuestión básica previa: ¿Qué es una Geometría?.

Naturalmente que esta pregunta trasciende a toda consideración metodológica, para incidir en los conceptos fundamentales, no sólo de la Matemática sino también de la Física.

En el razonamiento que hace Klein para llegar a una definición, observa que, en cada una de las geometrías, las correspondientes transformaciones espaciales forman un grupo, y dice textualmente "Las propiedades geométricas están caracterizadas por su invariancia frente a las transformaciones del grupo".

Más adelante escribe lo que se puede considerar como definición de Geometría: "Dado un conjunto en el que está definido un grupo de transformaciones, la Geometría es la teoría de los invariantes relativos al grupo".

Definición simple y profunda que no solo engloba a todas las geometrías entonces conocidas, sino que muestra el camino para descubrir otras.

Para captar el pensamiento de Klein con toda claridad lo mejor es volver al contexto histórico.

La fama de la Geometría proyectiva se consolidaba después que Poncelet publicara un tratado sobre la materia. En él distingue las propiedades proyectivas, invariantes para las transformaciones proyectivas, de las propiedades métricas, que no lo son. Aunque esta distinción era bastante expresiva, fue Cayley quien aclaró completamente la cuestión, al descubrir que las propiedades métricas son invariantes respecto de las transformaciones proyectivas que dejan fijos ciertos elementos, como son los puntos cíclicos del plano proyectivo complejo, y claro está que estas transformaciones forman un grupo. Esta observación señalaba el camino hacia el "Programa de Erlangen", que después seguiría Klein.

Las Geometrías no euclídeas, que habían causado tanta sensación, también quedaban incluidas en el esquema proyectivo, siendo sus transformaciones las proyectivas que dejan invariante una cónica en el plano, tomando una adecuada distancia. Cayley entusiasmado con esta síntesis escribió: "La Geometría proyectiva es toda la Geometría".

Desde el punto de vista kleiniano, se consigue una clasificación racional de las propiedades geométricas, a partir de los grupos de transformaciones. El grupo lineal determina las propiedades proyectivas, el ortogonal las métricas, el simpléctico las propiedades de los complejos lineales, etc. Incluso la Topología aparece como el conjunto de las propiedades invariantes respecto del grupo de las transformaciones biunívocas y bicontinuas.

El espacio, en una Geometría de Klein, es el conjunto en el que están definidas las transformaciones del grupo. La Geometría no es ya la simple descripción de los objetos de un espacio, en el que creemos estar inmersos, sino que precisamente la Geometría es la que da forma a dicho espacio.

Por otra parte, si en el espacio se sitúa un sistema de referencia para la Geometría, cualquier otra referencia admisible se obtiene de la primera por una transformación del grupo, y se puede establecer una correspondencia natural entre las transformaciones del grupo y los sistemas de referencia. Entonces se podría dar como definición de Geometría: "El conjunto de las nociones que no dependen del sistema de referencia". Tengamos presente que en Física el sistema de referencia equivale al observador.

La Geometría definida en el espacio tetradimensional por las transformaciones del grupo de Lorentz determina el espacio de la Relatividad restringida.

La noción kleiniana de Geometría tiene la belleza de la sencillez unificadora, y da luz y coherencia a extensas áreas de la Matemática.

La belleza en la investigación básica

Los juicios estéticos referentes a la Matemática actual, se basan esencialmente en los mismos criterios que han estado presentes al enjuiciar los objetos matemáticos de otras épocas. La dificultad radica en que, dado el alto grado de abstracción de muchas teorías, sólo los especialistas son capaces de decidir si se presentan los caracteres clásicos de la belleza estática o los más difíciles de percibir en el campo de la creatividad.

La belleza de la Matemática actual es más difícil de percibir, y normalmente sólo es posible a los iniciados. Sin embargo el carácter estético de la investigación básica no se debe menospreciar, pues en algunos casos es el principal argumento para realizarla.

Como decía al principio, cuando el Profesor Valdivia comentaba su proposición, pronto me dí cuenta de que se trataba de una bella proposición. Su formulación era simple y tenía sorpresa, pero para poder percibir su belleza se ha de conocer la estructura del espacio $D(\Omega)$, lo que requiere un largo proceso de especialización, y una educación pareja de la sensibilidad estético-matemática.

Belleza matemática y Didáctica

Los valores estéticos de la Matemática, que en algunos casos llegan a convertirse en verdaderas finalidades de la investigación, tienen interés indiscutible en el campo didáctico en cualquier nivel de enseñanza. Este aspecto ha sido olvidado con frecuencia, lo que ha originado fallos lamentables, tanto más cuanto que, en este tipo de enseñanza, juega un papel importante la educación de una cierta sensibilidad intelectual.

No se trata de una reordenación de materias a niveles elementales, ni del establecimiento de cursos especiales relacionados con estas materias, se trata esencialmente de una disposición en el profesor por la que prime el sentido creativo de la belleza sobre el utilitario.

Quien sea capaz de sentir el placer estético en la re-creación de una teoría, estará próximo a la creación personal; y cuando un joven llega a sentir el placer de lo bello al reflexionar sobre lo oído o estudiado, quedará convencido de que es algo que vale la pena.

Hace muchos años, después de varias lecciones en las que expliqué rigurosamente la teoría del número real, se me acercó un joven que me dijo:

"Profesor, he gozado fenomenalmente".

Quedé perplejo y le dije que me alegraba. Este ha sido uno de los mayores elogios que he recibido en mi vida profesional.

Palabras finales

Para la investigación en el campo abstracto de la Matemática actual, aparte de una necesaria vocación, requiere el científico cualidades poco frecuentes, y ante el legítimo deseo de ocupar un lugar digno en la oferta tecnológica que se hace a la sociedad, algunos se formulan la siguiente pregunta: ¿No sería más recomendable desviar el interés de tales estudiosos hacia otros objetivos científicos más próximos y concretos?.

Precisamente cuando no me ocupaba de la Matemática ni de la Estética, vino a caer a mis manos un texto del literato y premio Nobel alemán Hermann

Hesse, que me impresionó por su sencilla y rotunda afirmación, y que contestaba la pregunta que antes formulara. Dice así:

"Si en un mundo que busca finalidades y está ávido de realizaciones, ya no fuéramos sensibles a la fantasía, ni a la alegría de la belleza, y tampoco a la libertad de los colores y al adorno de los espacios, entonces, en medio de él, seríamos los más pobres de los hombres".

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Aristóteles: **Metafísica.** Trad. V. García Yebra, Ed. Gredos, 1982.

Bayer, R.: **Historia de la Estética.** F.C.E., México, 1961.

Burton, D.M.: **The History of Mathematics.** Ed. Allyn and Bacon, Boston, 1985.

Cantor, G.: **Gesammelte Abhandlungen mathematischen und plilosophischen Inhalt,** Ed. Springer 1932.

Dedekind, R.: **Stetigkeit und irrationale Zahlen, Ges. math. Werke** Braunschweig, 1932.

Davis, J.D. & Reuben, H.: **The Mathematical Experience.** Ed. Birkhäuser Boston, 1981.

Ferreter Mora, J.: **Diccionario filosófico.** Alianza Editorial.

Fleckenstein, J.O.: **Scholastik, Barock, Exakte Wissenschaften.** Johannes Verlag, Einsiedeln 1949.

García Pérez, P.L.: **Sobre los fundamentos geométricos de las teorías físicas.** Lección inaugural de curso en C.E.S. Armada 1985.

Gödel, K.: **Uber formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme,** Monatsheft für Math, u, Phys., 1931.

Hardy, G.H.: **Autojustificación de un matemático.** Ariel Barcelona, 1981.

Heath, T.L.: **A History of Greek Mathematics,** Oxford Univ. Press, 1921.

Hofstadter, D.R.: **Gödel, Escher, Bach. E.Klett Verlag** N,Y, 1979.

Kant, I.: **Crítica de la razón pura. Crítica de la razón práctica.** Ed. Porrúa S.A. México 1982, 1983.

Kline, M.: **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.** Oxford Univ. Press 1972.

Klein, F.: **Ges, math, Werke. I.B.** Springer Verlag 1921.

Leibniz, G.W.: **Escritos filosóficos.** Ed. Charcas, Buenos Aires, 1982.

Maravall, J.A. **La cultura del Barroco.** Ariel Barcelona, 1980.

Millan Puelles, A.: **Léxico Filosófico.** Ed. Rialp.

Nestle, W.: **Historia del Espíritu Griego.** Ariel. Barcelona, 1961.

Platón. **Diálogos.** Ed. Porrúa, México, 1984. También Aguilar en las Obras Completas.

Poincaré, H.: **La valeur de la Science y otras.** Ed. Flammarion, París, 1902-13.

Weyl, H.: **Philosophy of Mathematics and Natural Science.** Princeton Univ. Press. 1949.