

**REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES**

DISCURSO INAUGURAL

DEL AÑO ACADÉMICO 2000-2001

LEÍDO EN LA SESIÓN CELEBRADA EL 29 DE NOVIEMBRE DE 2000

POR EL ACADÉMICO NUMERARIO

EXCMO SR. D. AMABLE LIÑÁN MARTÍNEZ

SOBRE EL TEMA

**LA MECÁNICA DE FLUIDOS
EN EL SIGLO XX**



MADRID
DOMICILIO DE LA ACADEMIA
VALVERDE, 22 - TELÉFONO 917 014 230
2000

LA MECÁNICA DE FLUIDOS EN EL SIGLO XX

Excmo. Sr. Presidente

Excmos. Srs. Académicos,

Señoras y Señores:

Me gustaría cumplir adecuadamente con la honrosa tarea que me asignó la Academia al encargarme este Discurso, ofreciéndoles algunas consideraciones sobre las contribuciones a la Mecánica de Fluidos, que me han parecido más importantes para llevarla al estado en que se encuentra al finalizar el siglo XX.

Introducción

Estas consideraciones empezarán por las contribuciones correspondientes a los siglos XVIII y XIX; etapa de gestación de las leyes que rigen el movimiento macroscópico de los líquidos y gases, homogéneos en composición y no reactivos. Tales leyes estaban ya disponibles al comenzar el siglo XX, pero hasta mediados del siglo XX no se generalizaron esas leyes para incluir la superfluidéz y los efectos electromagnéticos en el movimiento de flujos conductores y plasmas; ni tampoco para la descripción de los movimientos multifásicos de fluidos formados por mezclas de especies reactantes. Tampoco estuvieron disponibles, hasta el último tercio del siglo XX, las leyes que rigen la dinámica de los cristales líquidos, ni las correspondientes a los ferrofluidos.

Aunque ya en 1755 nacieron las ecuaciones de Euler que rigen los movimientos de fluidos no viscosos, y en 1845 las leyes de Navier-Stokes para los fluidos viscosos incompresibles, el progreso en su análisis matemático, que presenta grandes dificultades, fue muy lento antes del siglo XX, y lo ha seguido siendo después.

Del análisis estrictamente matemático no hablaré, salvo para decir que las aportaciones importantes a las ecuaciones de Euler se inician con contribuciones de Riemann en 1860 sobre la propagación de ondas en movimientos unidimensionales, y de Hadamard en su obra monumental ("Leçon sur la propagation des ondes et les équations du mouvement" A. Herman, París 1903). Las primeras aportaciones significativas al problema matemático de la resolubilidad de las ecuaciones de Navier-Stokes nacen con los trabajos de J. Leray en 1933, y han seguido recibido una atención considerable de los matemáticos. Una demostración de la dificultad del problema es que uno de los siete premios de un millón de dólares ofrecidos este año por el Clay Mathematics Institute para la solución de problemas matemáticos, está dedicado a quien contribuya significativamente a la teoría matemática de las ecuaciones de

Navier-Stokes. Creo que es interesante describir las motivaciones del premio con las palabras del anuncio

"Las ondas siguen nuestra barca cuando navegamos por un lago, y el aire se mueve detrás del avión en que volamos. Los matemáticos y los físicos tienen la creencia de que la explicación tanto de la brisa como de la turbulencia debe hallarse mediante nuestro conocimiento de las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes. Aunque éstas fueron escritas en el siglo XIX, nuestro conocimiento de las mismas continúa siendo escaso. El reto es contribuir con un avance significativo hacia una teoría matemática que permita desvelar los secretos ocultos en las ecuaciones de Navier-Stokes"

Mis consideraciones en estas notas irán dirigidas, en primer lugar, al modo en que se han establecido las leyes que rigen el movimiento de los fluidos; y en segundo lugar, a exponer cómo se han utilizado éstas, junto con los métodos experimentales, para abordar algunos problemas tecnológicos asociados al desarrollo de las máquinas hidráulicas y térmicas, y también de la Ingeniería.

La disponibilidad en esta Academia de una extensa monografía, dedicada a exponer la historia de las contribuciones más importantes a la Mecánica de Fluidos, que fue escrita por Gregorio Millán para acompañar a su Discurso de Ingreso de 1975, me excusa para restringir aquí la exposición a algunas consideraciones parciales de la Historia de la Mecánica de Fluidos. Otros aspectos de la historia de la Mecánica de Fluidos en este siglo los pueden encontrar publicados por esta Academia en el Discurso de Gregorio Millán para el año académico de 1978, y en las aportaciones de Gregorio Millán, Ignacio Da Riva y las mías propias al Curso de Ciencia y Tecnología Aeronáutica desarrollado en 1990.

La gestación de las leyes del movimiento de los fluidos

La Mecánica de Fluidos es la rama de la Física que se ocupa del movimiento de los líquidos y gases, tanto en forma homogénea como en forma multifásica, y de los fenómenos de transporte de calor y masa que ocurren en su seno. Tiene un papel determinante en Meteorología, Oceanografía, Geofísica, Astrofísica, en las Ciencias Biológicas y en las Ciencias Ambientales.

Es una de las Ciencias básicas de la Ingeniería, en primer lugar, por el papel central que tienen los fluidos en el funcionamiento de muchas de las máquinas. En segundo lugar, porque dado que las reacciones químicas ocurren frecuentemente en fase fluida, o en la interfase de fluidos con sólidos, a un ritmo que está en muchos

casos controlado por el transporte de calor y masa, la Mecánica de Fluidos resulta esencial para el análisis de muchos de los procesos de la Ingeniería Química y, por supuesto, de los procesos de Combustión.

Ya Newton, en su análisis del movimiento del aire alrededor de cuerpos, usaba la hipótesis de que el aire está formado por partículas, que en los gases no interaccionan entre sí y en los líquidos están ligadas por fuerzas que le dan cohesión. Daniel Bernoulli incluye en su Hidrodinámica de 1738 una incipiente teoría cinética basada en un modelo corpuscular de los fluidos. El reconocimiento de la estructura molecular de los fluidos fue afianzándose durante el siglo XIX, y se había generalizado al nacer el siglo XX gracias a las capacidades predictivas de la Mecánica Estadística y de la Teoría Cinética, cuyas bases conceptuales se deben a Maxwell, Boltzman y Gibbs. La Mecánica Estadística se ocupa de la descripción de los estados de equilibrio de los fluidos, en tanto que la Teoría Cinética se ocupa de su dinámica fuera del equilibrio. El tratamiento estadístico se apoya en el gran número de moléculas que contienen los fluidos.

Cuando en 1755 Euler da a la luz la Dinámica de Fluidos moderna, considera al fluido como un medio continuo. Los fluidos también fueron considerados como medios continuos, en las primeras descripciones del equilibrio termodinámico y de los procesos irreversibles de la Termodinámica, debidos a Meyer, Joule, Rankine (que introdujo el término energía), Clausius (que introdujo el concepto y el término entropía), Helmholtz y Lord Kelvin.

La Termodinámica proporciona la base conceptual para la descripción de las transformaciones de energía térmica y mecánica que tienen lugar en las máquinas de vapor nacidas de la mano de Newcombe y James Watt a finales del siglo XVIII, y en los motores de explosión interna que Otto y Diesel desarrollaron a finales del siglo XIX. Fue el Conde Rumford el primero que, a principios del siglo XIX, demostró que la energía mecánica podía transformarse en energía térmica, y fue Joule el que finalmente midió el equivalente mecánico del calor. El principio general de conservación de la energía y la posible ínter-convertibilidad de las distintas formas de energía se debe a Meyer (1845).

Las limitaciones de la conversión de energía térmica en mecánica, y con ello del rendimiento de las máquinas térmicas fueron descubiertas por Carnot (1824), previamente al enunciado general del principio de conservación de la energía. Estas posibilidades y limitaciones en la conversión de energía fueron recogidas en 1954 por Clausius en su enunciado de la primera y segunda ley de la Termodinámica. Su esfuerzo fue secundado por Helmholtz, Lord Kelvin y Gibbs, quienes dieron a la Termodinámica su forma moderna. Las leyes de la Termodinámica clásica se traducen en igualdades para los procesos reversibles, que corresponden a evoluciones del sistema tales que pueden considerarse como sucesiones de estados de equilibrio.

Algunas de estas igualdades se sustituyen por desigualdades cuando los procesos son irreversibles.

El estado de equilibrio en fluidos no reactivos de composición uniforme está caracterizado por dos variables termodinámicas; por ejemplo, la presión y la temperatura. Todas las demás variables termodinámicas como, por ejemplo, la densidad y los valores específicos de la entropía, entalpía y energía interna son funciones de la presión y temperatura. Se debe a Gibbs (1878) la extensión de la Termodinámica clásica a fluidos multifásicos que son mezcla de distintas especies químicas, reactivas o inertes.

Como decíamos antes, con Euler (1755) nace la Mecánica de Fluidos moderna. Euler supone que el fluido se comporta como un medio continuo, que se mueve en un espacio euclidio, caracterizando su estado por la densidad ρ y la velocidad $\mathbf{v}$ (respecto a un sistema de referencia inercial) de cada una de sus partículas infinitesimales. Para describir la evolución espacial y temporal de la densidad y velocidad del fluido hace el experimento mental de aislar una parte del fluido, aplicando a esa parcela la ley de conservación de la masa y la segunda ley de Newton, de la cantidad de movimiento. En esta última intervienen las fuerzas gravitatorias y las fuerzas que el resto del fluido ejerce sobre la parte aislada. Euler supone que estas fuerzas de interacción son localmente normales a la superficie de separación y proporcionales al área de separación con una intensidad, la presión p , independiente de la orientación. De este modo, Euler introduce el concepto de presión, en su acepción actual, que se utilizaría posteriormente en la formulación de las leyes de la Termodinámica.

Estas leyes de conservación, aplicadas a cualquier parte infinitesimal del fluido, dan lugar a un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales en derivadas parciales para las cinco incógnitas: densidad ρ , presión p , y las tres componentes del vector velocidad $\mathbf{v}$, que Euler suponía funciones continuas y derivables del tiempo y de las tres coordenadas espaciales. Para cerrar el sistema de ecuaciones, Euler incluyó entre sus ecuaciones una relación $\rho = \rho(p)$, que caracterizaba, según sus palabras, la elasticidad del fluido. Hubo que esperar hasta principios del siglo XIX, cuando nacen los primeros conceptos de la Termodinámica y entre ellos el de los calores específicos, para que Poisson pudiese mostrar que en procesos adiabáticos la relación de elasticidad que sugería Euler, es de la forma $p/\rho^\gamma = \text{constante}$, donde el exponente γ es el cociente entre los calores específicos, a presión y volumen constante, del fluido. Hoy sabemos, gracias a Clausius (1854), que esta relación corresponde a procesos en los que cada partícula fluida sigue una evolución isentrópica.

Reproducimos aquí el sistema de ecuaciones de Euler

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0 \\ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) &= -\nabla p + \rho \mathbf{g} \\ \rho &= \rho(p)\end{aligned}$$

Como condiciones de contorno para estas ecuaciones en la interfase con un sólido que limita al fluido, sólo se pide que ambos tengan la misma componente de la velocidad normal a la interfase; sin poner trabas al movimiento de deslizamiento tangencial del fluido respecto al sólido.

Conviene tener en cuenta que, aunque se use la relación de Poisson, la dinámica de los fluidos resultante de estas ecuaciones de Euler no corresponde directamente a la de los procesos reversibles adiabáticos de la Termodinámica clásica. En éstos no hay variaciones espaciales de las variables termodinámicas; y, en particular, por haber equilibrio mecánico, las variaciones espaciales de velocidad deberían ser pequeñas para algún observador.

Los procesos irreversibles aparecen en la Física cuando, en 1833, Fourier establece la ley que describe la conducción del calor en sólidos (y líquidos de densidad constante, sin movimiento). En esta ley está implícita la hipótesis de equilibrio termodinámico local, al caracterizar la energía interna local del medio por su temperatura, y también el concepto de transporte irreversible de calor, con un flujo proporcional al gradiente de temperatura y dirigido hacia las bajas temperaturas.

Ya en 1854, antes de que Gibbs extendiera las leyes de la Termodinámica a las mezclas de especies moleculares, Fick propuso un tratamiento análogo al de Fourier para el transporte difusivo de especies. Este transporte tendría lugar con flujos proporcionales a los gradientes de concentración, hacia las zonas de menor concentración. Con su ley, Fick, que era médico, trataba de describir los mecanismos del transporte de sustancias alimenticias en la sangre.

La irreversibilidad aparece también en las ecuaciones de la Mecánica de Fluidos que obtienen Saint-Venant (1843) y especialmente, Stokes¹ (1845) al generalizar las ecuaciones de Euler añadiendo a las fuerzas de presión las de viscosidad, como parte de las fuerzas de interacción de tipo superficial entre las distintas parcelas del fluido. Para la descripción de estas fuerzas de interacción pudieron apoyarse en el concepto de tensor de esfuerzos, introducido por Cauchy para estudiar la dinámica de los medios continuos. La ley de Navier-Poisson, constitutiva del comportamiento macroscópico de los fluidos que llamamos newtonianos, tiene ese nombre porque fue propuesta por primera vez por Navier,² en 1823, y Poisson (1829). Determina los esfuerzos viscosos como proporcionales, a los gradientes de velocidad a través del coeficiente ordinario de viscosidad.

Cuando, en 1845, Sir Gabriel Stokes escribió las ecuaciones

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) &= -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \Delta \mathbf{v} \quad , \end{aligned}$$

¹G.G. Stokes (1845) "On the Theories of the internal friction of fluids in motion and on the equilibrium and motion of elastic solids". Trans. Camb. Phil. Soc. 8, 287-305

²C.L.M.H. Navier (1823) "Memoire sur les lois de mouvement des Fluides". Mem. Acad. R. Sci., París 6, 389-416

que hoy llamamos de Navier-Stokes, lo hizo para fluidos de densidad ρ y viscosidad μ constante. Pero estas ecuaciones son también aplicables al movimiento de gases cuando, en una gran variedad de casos, se mueven a velocidades pequeñas frente a las del sonido, y oscilan con frecuencias bajas. Stokes propuso, entre las condiciones de contorno, propuso la continuidad de la velocidad del fluido con la de los sólidos que lo limitan. Advierte, sin embargo, que quizás esta condición de contorno de no deslizamiento del fluido respecto a la pared no tuviese validez general, ya que al utilizar esta condición al resolver las ecuaciones de Navier-Stokes para describir el flujo de líquidos en conductos circulares de sección constante, había obtenido una caída de presión proporcional a la velocidad. Ésto era contradictorio con resultados experimentales que Stokes conocía, en los que la caída de presión parecía depender cuadráticamente de la velocidad. Está claro que no conocía los resultados experimentales de Hagen (1839) y Poiseuille (1840) en tubos de pequeño diámetro, en los que la caída de presión es lineal con la velocidad. En estos tubos capilares el flujo es laminar, con una distribución de velocidades parabólica; y aunque este resultado no fue publicado por Stokes, parece claro que fue deducido teóricamente por él. Ésta sería la primera solución exacta de las ecuaciones de Navier-Stokes, correspondiente al flujo laminar desarrollado en conductos de sección constante, cuando los términos no lineales asociados al transporte convectivo son nulos. O, mejor dicho, son despreciables, si la longitud finita del conducto es grande frente al diámetro.

Sir Gabriel Stokes, nacido en Irlanda, ocupó en Cambridge, durante más de medio siglo, la cátedra Lucasiana, que había ocupado Newton. Hizo muchas contribuciones a la Física, especialmente a la Óptica (por ejemplo, fue descubridor de la Fluorescencia). Sus aportaciones a la Mecánica de Fluidos no se limitaron a la formulación de las ecuaciones de Navier-Stokes. Por ejemplo, en 1853 mostró que, en los flujos que llamamos lentos, donde los términos convectivos no lineales son despreciables, las ecuaciones de Navier-Stokes se simplifican para dar lugar al sistema de ecuaciones lineales que hoy llamamos ecuaciones de Stokes.

Hizo aplicación de estas ecuaciones en su análisis del amortiguamiento de los péndulos. En realidad describió el flujo lento (llamado de Stokes) alrededor de una esfera, usando aquí, ya sin ambigüedad, la condición de contorno de no deslizamiento del fluido respecto de la esfera. Esta solución tiene una gran variedad de aplicaciones, cuando es necesario describir el movimiento de partículas y gotas pequeñas en suspensión en fluidos. En particular, fue usada por Einstein en su descripción del movimiento Browniano, y por Millikan para la obtención experimental de la carga del electrón.

Stokes intentó calcular la solución de las ecuaciones de Stokes para los movimientos lentos alrededor de cilindros y se encontró con la paradoja, que también llamamos de Stokes, de que el problema no tenía solución. Whitehead, en 1899, intentó cal-

cular para el movimiento alrededor de cuerpos tridimensionales las perturbaciones introducidas por los términos no lineales no retenidos en las ecuaciones de Stokes. Encontró que cuando a estas ecuaciones se añadían estos términos, evaluados con la solución de Stokes, el nuevo problema no tenía solución. La solución a las paradojas de Stokes y Whitehead se hizo esperar hasta mediados del siglo XX, aunque fue avanzada de Oseen en 1910, cuando demostró que los términos no lineales convectivos se convertían en dominantes lejos del cuerpo y daban lugar a una estela.

Oseen, para tener en cuenta, los efectos del transporte convectivo de cantidad de movimiento de un modo aproximado para velocidades pequeñas, y poder así describir la estela, introdujo un modelo de las ecuaciones de Navier Stokes, sustituyendo el término convectivo $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ por su forma linealizada, $\mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{v}$, respecto a la velocidad $\mathbf{U}$ de la corriente libre. Usó las ecuaciones resultantes, hoy llamadas de Oseen, para obtener la primera corrección, debida a los efectos convectivos, del valor de la resistencia al movimiento de una esfera, calculada por Stokes. Inmediatamente después, en 1911, Lamb usó las ecuaciones de Oseen para describir el movimiento lento de un fluido alrededor de un cilindro de sección circular, y calcular así, por primera vez, la forma límite de la resistencia que el fluido opone al movimiento del cilindro para velocidades pequeñas.

Así pues, aunque a mediados del siglo XIX ya se conocían las ecuaciones de Navier-Stokes que gobiernan el movimiento de los fluidos incompresibles de viscosidad constante, su generalización a flujos compresibles sólo se hizo a finales del siglo XIX. En cambio, para los movimientos con fuerzas de viscosidad aparentemente despreciables, lo que sería el caso en muchísimas aplicaciones prácticas, la dinámica de fluidos debería estar bien descrita por las ecuaciones de Euler. Estas ecuaciones, disponibles desde 1755, serían aplicables a los movimientos de los fluidos compresibles, ideales (cuya viscosidad y conductividad de calor debería ser estrictamente nula), con la salvedad de que fuese físicamente correcta la relación, $\rho = \rho(p)$, que caracterizaría la elasticidad del fluido. Esta relación es trivial (ρ constante) para los líquidos perfectos; sin embargo, para los fluidos compresibles sólo puede ser obtenida apoyándose en consideraciones de tipo termodinámico, incluyendo entre ellas la ecuación de la energía, que no estuvieron disponibles hasta mediados del siglo XIX. Está claro que estas consideraciones son también imprescindibles para la generalización de las ecuaciones de Navier Stokes a flujos compresibles.

Durante el siglo XIX se pensaba que en muchos flujos de interés práctico, en los que tanto los efectos de las fuerzas viscosas como los de la compresibilidad del fluido parecen ser despreciables, el movimiento debería estar bien descrito por la forma simplificada de las ecuaciones de Euler

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) &= -\nabla P\end{aligned}$$

donde $P = p - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}$ es lo que llamamos presión motriz; que es uniforme en ausencia de movimiento. Estas ecuaciones constituían el marco en que se desarrolló la Hidrodinámica Teórica. El carácter no lineal de las mismas, junto a la falta del mecanismo regularizador de las soluciones, asociado a la viscosidad, hacía muy difícil, y sigue haciéndolo, su análisis matemático.

Sin embargo, ya Euler advirtió la existencia de soluciones de las ecuaciones de Euler de tipo potencial, o irrotacional, en las que $\mathbf{v}$ resulta ser el gradiente de una función escalar, el potencial de velocidades $\varphi(\mathbf{x}, t)$. Lagrange mostró que como consecuencia de la ecuación de continuidad, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, que expresa la conservación de la masa, el potencial de velocidades satisface la ecuación (lineal) de Laplace

$$\Delta \varphi = 0$$

La distribución de presiones viene entonces determinada por la ecuación de Euler-Lagrange

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho |\nabla \varphi|^2 + P = C(t)$$

que para flujos estacionarios se reduce a la ecuación de Bernoulli.

Es interesante observar que ya en los estudios publicados en 1752 y llevados a cabo por d'Alembert con el objetivo de calcular la resistencia al movimiento de cuerpos en fluidos, está implícito en las ecuaciones que escribe para los movimientos bidimensionales que éstos son irrotacionales. De estas ecuaciones es capaz de inferir, relacionando la resistencia, con los cambios de la cantidad de movimiento del fluido en su movimiento alrededor del cuerpo, que la resistencia es nula; lo que, usando sus palabras, constituye una paradoja cuya explicación dejó a los geómetras.

La descripción de los movimientos de los fluidos no viscosos, especialmente en el caso de que éstos resulten irrotacionales porque lo sean inicialmente, se convirtió en el objetivo fundamental de la Hidrodinámica Teórica, a la que hicieron contribuciones importantes los principales matemáticos del siglo XIX. Éstas están bien recogidas en el libro de Horace Lamb cuya última edición, de 1932, sigue publicando Dover. Sin embargo, en lo que se refiere al movimiento de fluidos alrededor de cuerpos, los resultados no presentaban ningún acuerdo con la realidad.

Otras áreas de la Mecánica de Fluidos, en las que durante el siglo XIX se hicieron aportaciones muy importantes, que sí eran concordantes con la realidad, son la teoría de las olas en líquidos con superficie libre, y las de los movimientos de tipo acústico. En ambos casos las fuerzas de viscosidad tienen un papel poco importante y los movimientos son irrotacionales. A la teoría de las olas contribuyeron muy significativamente Stokes, Green, Lord Kelvin y Scott Russell, el descubridor experimental de los solitones. Las aportaciones al análisis de los movimientos de tipo acústico están recogidas en la obra monumental de Lord Rayleigh, *The Theory of Sound*, cuya

segunda edición fue publicada en 1894, y que por su interés permanente continúa ofreciendo Dover.

Estos movimientos acústicos, que corresponden a pequeñas perturbaciones del estado del fluido respecto al reposo, en los que los términos convectivos, no lineales, son despreciables. Para su descripción puede utilizarse una forma linealizada $p - p_0 = a_0^2(\rho - \rho_0)$ de la relación $p = p(\rho)$ de elasticidad del fluido, escrita en función de los valores no perturbados p_0 y ρ_0 de p y ρ . En la relación linealizada, a_0 es el valor de la velocidad del sonido del fluido, no perturbado, dada por la raíz cuadrada de la derivada de p respecto a ρ , evaluada para $\rho = \rho_0$.

Los movimientos de tipo acústico resultan ser frecuentemente irrotacionales, por lo que $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ y el potencial de velocidades φ satisface la ecuación de las ondas

$$\varphi_{tt} = a_0^2 \Delta \varphi$$

Cuando Poisson encontró que en procesos adiabáticos la relación de elasticidad tomaba la forma $p/p_0 = (\rho/\rho_0)^\gamma$, abrió la vía para la predicción teórica de la velocidad del sonido, $a_0 = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$, debida a Laplace. Así corrigió con el factor $\sqrt{\gamma}$, la raíz cuadrada de la relación de calores específicos, la fórmula, $a_0 = \sqrt{p_0/\rho_0}$, obtenida por Newton mediante consideraciones menos rigurosas. Es interesante señalar que la fórmula de Laplace sirvió como base para obtener un valor preciso de la relación de los calores específicos midiendo la velocidad del sonido.

Otros matemáticos y físicos insignes se ocuparon del análisis de los efectos no lineales en la propagación de las perturbaciones de presión en los fluidos ideales. En particular, ya en 1846, Stokes analizó los movimientos unidimensionales no estacionarios en los que la velocidad tiene una única componente no nula (u) en la dirección del movimiento (x), y al igual que p y ρ , sólo depende de x y del tiempo t . Como consecuencia de su análisis, Stokes anticipó la formación de discontinuidades. Más tarde, en 1860, Riemann hizo una contribución fundamental para la Mecánica de Fluidos con su análisis de estos movimientos unidimensionales, basado en las ecuaciones de Euler con la relación de Poisson. Demostró, en primer lugar, el papel fundamental que juegan en la solución las líneas características de las ecuaciones de Euler en el plano x, t . Estas características, que decimos representan ondas de presión, pueden ser asiento de discontinuidades en las derivadas de las magnitudes fluidas. La generalización de tales ideas a flujos no viscosos más generales puede encontrarse en la obra de Hadamard publicada en 1903. Por otra parte, Riemann demostró la posible aparición en tiempo infinito de discontinuidades en las propias magnitudes fluidas, aunque las condiciones iniciales sean suaves. Para hacer posible la descripción posterior del movimiento, dedujo las condiciones de salto de la velocidad, presión y densidad en la onda de discontinuidad, u onda de choque. Sin embargo, las condiciones de salto que obtuvo no son las correctas, porque la relación

de Poisson, en realidad de isentropía, deja de ser válida a través de la onda, y debe ser sustituida por la ecuación de conservación de la energía, como hicieron Rankine en 1870 y Hugoniot en 1879 en sus análisis de las ondas de choque. El análisis de la estructura interna de las ondas de choque fue hecha independientemente por G.I. Taylor y Rayleigh y publicada en 1910 en los Proceedings de la Royal Society.

Las ecuaciones de Navier-Stokes constituirían el marco apropiado. para el análisis de los flujos de densidad ρ y viscosidad μ constantes,. En este caso el problema mecánico de calcular la distribución de velocidades y presiones está desacoplado del térmico; para éste último las consideraciones termodinámicas sí son importantes.

En cambio, si en el análisis hemos de retener los efectos de compresibilidad, y esto es obligado para estudiar, por ejemplo, el flujo en máquinas térmicas, hemos de abandonar la relación de elasticidad $p = p(\rho)$ propuesta por Euler. En su lugar ha de utilizarse la información que proporciona la Termodinámica de los fluidos y la ecuación general de la energía que incluye el posible trasvase entre las energías cinética y térmica.

Esta idea tardó en hacerse camino, porque las ecuaciones de la Termodinámica, sólo toman la forma de igualdades cuando se aplican a flujos reversibles; mientras que los fluidos en movimiento parecían alejados del equilibrio. Cuando, en torno a 1850, después de la medición por Joule del equivalente mecánico del calor, Stokes escribió la ecuación que da la evolución de la energía cinética para los fluidos incomprensibles, se encontró con un término negativo, llamado ahora la disipación de Rayleigh, dado por el producto doblemente contraído entre los tensores de esfuerzos viscosos y el gradiente de velocidades. Este sumidero de energía mecánica fue identificado por Stokes como una fuente de energía térmica. Pero, según C. Truesdell, hay que esperar a 1894 para encontrar, en un artículo de C. Neumann, este trabajo de deformación de los esfuerzos viscosos, o disipación viscosa de energía mecánica, incorporado, como fuente que contribuye al crecimiento de la energía térmica, a la ecuación de la energía interna.

Así pues, la formulación de la Mecánica de Fluidos, al menos para fluidos no reactivos y homogéneos en composición, ya aparece a finales del siglo XIX en su forma actual, que damos a continuación,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0 \\ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) &= -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}' \\ \rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla e \right) &= -p \nabla \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\tau}' : \nabla \mathbf{v} + \nabla \cdot (k \nabla T) \\ \rho &= \rho(p, T) \quad , \quad e = e(p, T)\end{aligned}$$

En estas ecuaciones, que no incluyen los efectos de la radiación, $\boldsymbol{\tau}'$ es el tensor de esfuerzos viscosos; cuyas componentes están dadas por la ley de Navier-Poisson,

$\tau'_{ij} = \mu(\nabla_i V_j + \nabla_j V_i) + (\mu_v - \frac{2}{3}\mu)\nabla \cdot \mathbf{v}\delta_{ij}$, en función de los coeficientes, ordinario μ y volumétrico μ_v , de viscosidad. Éstos, al igual que el coeficiente de conducción de calor k , son funciones, específicas de cada fluido, de su estado termodinámico local, (caracterizado, por ejemplo, por la presión y la temperatura). Las ecuaciones de conservación, de la masa, cantidad de movimiento y energía interna, aparecen arriba complementadas con las ecuaciones de estado, térmica y calorífica, que tomamos de la Termodinámica para determinar la densidad y la energía interna como funciones de p y T ; funciones que también son específicas de cada fluido.

Esta formulación que sólo a mediados del siglo XX aparece generalizada a la dinámica de fluidos formados por mezclas de especies moleculares reactivas se apoya, implícitamente, en el concepto de equilibrio termodinámico local. Éste se basa en que cuando λ , el camino libre medio entre colisiones de una molécula (concepto, introducido por Clausius, en 1857, que aparece en las contribuciones de Maxwell a la teoría cinética) es pequeño frente al tamaño macroscópico L del campo fluido, las moléculas, mediante las colisiones, adaptan su estado al de las moléculas vecinas en un tiempo del orden del tiempo entre colisiones. Así se establece el equilibrio termodinámico local, como si todo el fluido estuviese en las condiciones locales. Por variar de un punto a otro del espacio el estado de equilibrio local, no hay equilibrio termodinámico global.

Así pues, si la distancia L a recorrer para encontrar variaciones significativas de las variables fluidas macroscópicas, es grande frente a la longitud de observación λ de la molécula, podemos suponer que, en primera aproximación para valores pequeños del número de Knudsen $\lambda/L \ll 1$, hay equilibrio termodinámico local en cada punto del campo fluido. Esto implica que podemos caracterizar el estado local del fluido por un número reducido de variables macroscópicas; por ejemplo, por los valores de la velocidad $\mathbf{v}$, densidad ρ , energía interna específica e , y fracciones másicas Y_α de las distintas especies moleculares. Éstas serán funciones de las coordenadas $\mathbf{x}$ y del tiempo t , continuas y derivables en cada fase fluida, a determinar con ayuda de las ecuaciones de evolución.

Naturalmente, las variables termodinámicas citadas antes, pueden ser substituidas por otras como la presión, temperatura, entropía o potenciales químicos de Gibbs, dadas por las correspondientes ecuaciones de estado cuya forma ya había sido propuesta por Gibbs cuando desarrolló la Termodinámica de mezclas reactivas. Para la descripción de la evolución espacial y temporal de las variables termodinámicas, han de utilizarse las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento, de la masa para cada una de las especies moleculares y de la energía.

En estas ecuaciones aparecen los efectos de no equilibrio asociados a las pequeñas variaciones de velocidad, temperatura y fracciones másicas que observa una molécula en su recorrido entre colisiones. Por ejemplo, los efectos de no equilibrio añaden a

las fuerzas de presión los esfuerzos viscosos, generan flujos másicos de las distintas especies representados por las velocidades de difusión y dan lugar al flujo de calor por conducción. Por ser λ pequeño frente a L , estos esfuerzos viscosos, las velocidades de difusión y el flujo de calor resultan ser proporcionales a los gradientes de velocidad, y los gradientes ordinarios, de temperatura de fracciones másicas y de presión, como corresponde a las leyes constitutivas de Navier-Poisson, Fourier y Fick.

Las reacciones químicas son consecuencia de colisiones inelásticas entre las moléculas, que eliminan unas especies y producen otras. Estas colisiones son poco frecuentes comparadas con las elásticas, por lo que el equilibrio termodinámico local es el correspondiente a mezclas no reactivas. Los efectos de las poco frecuentes colisiones inelásticas han de ser tenidos en cuenta, incluyendo en las ecuaciones de conservación de la masa de cada especie molecular la masa de esa especie producida, o desaparecida, como consecuencia de choques inelásticos.

La justificación del tratamiento continuo de los movimientos irreversibles de los fluidos sólo puede hacerse apoyándose en el marco más amplio de la Teoría Cinética cuyos fundamentos se deben a Maxwell y especialmente a Boltzmann, en el último tercio del siglo XIX. Éste escribió la ecuación interdiferencial no lineal, que permite describir la evolución de la función de distribución de probabilidad de velocidades moleculares para gases (con densidades pequeñas frente a la de los líquidos), cuando las colisiones triples son poco frecuentes. Ahora bien, para encontrar soluciones, obviamente aproximadas, de Boltzmann hay que esperar a finales del siglo XX, cuando se obtienen por métodos numéricos con ayuda de los grandes ordenadores. Pero ya antes se obtuvieron soluciones asintóticas de las ecuaciones para valores pequeños de la relación λ/L .

Fue el matemático David Hilbert, el primero en sugerir, en 1912, un procedimiento de perturbaciones para obtener la solución asintótica de la ecuación de Boltzmann para el caso importante para la Mecánica de Fluidos en que el camino libre medio entre colisiones es pequeño frente a la longitud característica del movimiento. Aunque, el análisis de Hilbert no fue completo hasta dar lugar a resultados explícitos. Poco después Chapman, e independientemente Enskog, desarrollaron este tratamiento asintótico para, como Hilbert, obtener en primera aproximación la distribución de Maxwell-Boltzmann, correspondiente al equilibrio termodinámico local, y con la segunda aproximación las ecuaciones de Navier-Stokes junto con las leyes constitutivas de Navier-Poisson y Fourier. El método proporcionaba las expresiones para el cálculo de los coeficientes de viscosidad y conducción de calor; fue extendido por Hirshfelder Curtis y Bird en su obra *"Molecular Theory of Gases and Liquids"* publicado por J. Wiley en 1954. En esta obra aparecen también las leyes de Navier-Stokes extendidas al análisis del movimiento de mezclas reactivas.

Los retos de la Mecánica de Fluidos en su nacimiento y a finales del siglo XIX

La Mecánica de Fluidos nació de un triple reto tecnológico: La descripción del movimiento de líquidos en conductos y canales; la determinación de la resistencia que oponen los fluidos al movimiento de cuerpos sólidos en su seno; y el análisis de los efectos del movimiento del agua en las turbinas hidráulicas, al que Euler hizo una aportación fundamental.

Así pues, debía ocuparse de la descripción de los flujos de líquidos en canales y conductos, y del problema relacionado de calcular la descarga de depósitos. En este contexto podemos resaltar las aportaciones pioneras de Torricelli y Newton, con su determinación de la velocidad de descarga de líquidos bajo la acción de las fuerzas gravitatorias, y la introducción, por Newton, del concepto de contracción de la vena líquida desde el orificio de salida.

En cuanto al flujo en conductos, debemos resaltar las aportaciones experimentales de Hagen y Poiseuille al análisis de los flujos viscosos en tubos capilares de sección constante. El análisis de Poiseuille estaba dirigido a entender el flujo de la sangre en venas y arterias, mientras que Hagen, en su artículo de 1839, llamaba la atención sobre el hecho de que para velocidades altas el flujo a la salida del conducto perdía su carácter regular, cristalino, y pasaba a tener un carácter irregular, oscilatorio e intermitente; y en un trabajo posterior, de 1854, mostraba que la transición del movimiento a la forma irregular dependía de la viscosidad además de la velocidad.

En 1883, Osborne Reynolds, profesor de Ingeniería en Manchester, publicó un trabajo experimental sobre el movimiento de líquidos en conductos. En este trabajo, que ha resultado ser fundamental para la Mecánica de Fluidos, demostró que el flujo es laminar o turbulento dependiendo del valor del número adimensional, UD/ν , que llamamos de Reynolds desde que Sommerfeld le dio este nombre en 1908. En este número, U es la velocidad media en el conducto, D su diámetro y $\nu = \mu/\rho$ la viscosidad cinemática. Para valores menores que un valor crítico; del orden de 3000 pero que depende de la rugosidad de la pared del conducto y de las perturbaciones introducidas aguas arriba, el flujo es laminar y estacionario, si se mantiene constante la presión de alimentación; las trayectorias de las distintas partículas fluidas son paralelas; y la caída de presión varía linealmente con la velocidad.

Para valores más altos del número de Reynolds, el flujo se vuelve irregular y no estacionario, con remolinos tridimensionales que mezclan rápidamente, transversalmente al conducto, los colorantes introducidos en el flujo para su visualización. Cuando el número de Reynolds supera apreciablemente al crítico, la caída de presión, medida con la presión dinámica $\rho U^2/2$, resulta ser el producto de la longitud del conducto, medida en diámetros, por un factor adimensional, función del número de Reynolds que tiende a un valor constante si éste es suficientemente alto. Para valores

del número de Reynolds próximos al crítico, el flujo tiene un carácter intermitente, con períodos laminares y turbulentos.

Reynolds publicó en 1895 un segundo trabajo sobre el flujo turbulento en conductos, en el que, teniendo en cuenta el carácter fluctuante, aparentemente caótico del flujo, obtuvo las ecuaciones, que ahora llamamos de Reynolds, que describen las variaciones espaciales de los valores medios locales. Estas ecuaciones tienen la misma forma que las de Navier-Stokes, salvo por la presencia de unos esfuerzos aparentes (de Reynolds) determinados por los valores medios de los productos de las fluctuaciones de velocidad. Los esfuerzos de Reynolds están ligados al transporte convectivo de cantidad de movimiento mediante las fluctuaciones turbulentas de velocidad, y han de ser evaluados con ecuaciones adicionales. Podemos escribir tales ecuaciones, pero nos encontramos con nuevas incógnitas, que son valores medios de los productos triples de las fluctuaciones de velocidades, y así sucesivamente. Éste es el llamado problema del cierre, que ha obligado, por el momento, a introducir modelos basados en consideraciones empíricas para relacionar los esfuerzos de Reynolds con las velocidades medias.

En su trabajo de 1895, Reynolds muestra también cómo la disipación de energía cinética del movimiento turbulento medio ocurre en primera instancia por transvase de ésta a la energía cinética de las fluctuaciones turbulentas respecto al flujo medio. También en el mismo trabajo propuso un método de tipo integral para obtener una estimación del valor del número de Reynolds crítico. La determinación de los límites de estabilidad de las corrientes laminares y de la forma en que se produce la transición hacia la turbulencia, es otro de los retos que tiene la Mecánica de Fluidos al nacer y al morir el siglo XX.

Un segundo reto de la Mecánica de Fluidos en su nacimiento es la determinación de la resistencia que encuentran los cuerpos sólidos en su movimiento en el seno de los fluidos; por ejemplo, en el aire o en el agua. Aristóteles postuló que los cuerpos sólidos podían moverse en el aire porque eran empujados por éste cuando, debido al horror al vacío de la naturaleza, acudía a llenar el vacío que de otro modo dejaría el cuerpo en su movimiento. Galileo adoptó un punto de vista muy distinto al expresar que la resistencia del aire al movimiento del sólido contribuye a reducir la velocidad relativa entre ambos.

Para calcular las fuerzas de resistencia y sustentación en el movimiento de cuerpos respecto al aire, Newton supuso que el aire está formado por partículas que se mueven con velocidad uniforme respecto al sólido hasta que chocaban con su superficie. En el choque pierden la cantidad de movimiento asociada a la componente de la velocidad normal a la superficie y conserva la componente tangencial, como ocurre aproximadamente con las gotas de agua en la ducha. En esta teoría, queda una estela vacía detrás del cuerpo. Es interesante observar que la teoría de Newton es

aplicable con ligeras modificaciones al régimen molecular libre, cuando $\lambda/L \gg 1$, si además la velocidad es grande frente a la del sonido.

Cuando la teoría de Newton se aplica a una placa plana de superficie S , que se mueve con velocidad V y ángulo de ataque α respecto al aire, la fuerza F ejercida por el aire sobre la placa resulta ser normal a la misma y de valor $F = \rho V^2 S \sin^2 \alpha$, donde ρ es la densidad del aire. Llamamos resistencia D a la componente de la fuerza en la dirección de la corriente, y sustentación L a la componente normal a la corriente. El papel que la resistencia y la sustentación juegan en el vuelo de cuerpos más pesados que el aire fue reconocido por primera vez, a principios del siglo XIX, por George Cayley, quien es reconocido como pionero en los estudios de la posibilidad de vuelo de cuerpos más pesados que el aire. Según la teoría de Newton la resistencia y sustentación de una placa plana vienen dadas por $D = \rho V^2 S \sin^3 \alpha$ y $L = \rho V^2 S \sin^2 \alpha \cos \alpha$. Para ángulos de ataque pequeños, cuando es grande la relación L/D , la fuerza sustentadora, proporcional a α^2 , es muy pequeña. Cuando se aumenta el ángulo de ataque para que la fuerza sustentadora se haga importante la relación L/D decrece a valores de orden unidad. Estas consideraciones, avaladas por la autoridad de Newton, apuntaban a la inviabilidad del vuelo con vehículos más pesados que el aire. Para poner un ejemplo que explique esto, podemos considerar el vuelo de veleros, cuyo ángulo de planeo α viene dado por la relación $\tan \alpha = D/L$, por lo que sólo para valores de $L/D \gg 1$, α es pequeño.

Cuando d'Alembert examinó el problema de la resistencia en su trabajo de 1752 sobre el movimiento de fluidos alrededor de cuerpos, consideró el fluido como medio continuo. Al acercarse al cuerpo, las trayectorias de las distintas partículas fluidas, se deflexan, primero hacia fuera y luego hacia dentro, de modo que la corriente se adapta a la forma del cuerpo, y no aparece la estela vacía de Newton. Como ya indicamos antes, en el análisis de d'Alembert, hecho para el movimiento bidimensional alrededor de cilindros, está implícita la hipótesis de irrotacionalidad del flujo. Mediante consideraciones globales de conservación de la cantidad de movimiento llegó a la conclusión de que la resistencia era nula.

Cuando en 1843, Stokes calculó por vez primera el flujo irrotacional alrededor de una esfera, encontró también, como d'Alembert, que la resistencia es nula si el movimiento es estacionario; resultado muy alejado de la realidad experimental. El resultado es generalizable a otros cuerpos, y es posible demostrar que la solución de la ecuación de Laplace que describe el movimiento irrotacional de un fluido incompresible, con velocidad uniforme en el infinito, alrededor de un cuerpo tridimensional finito es única, y conduce, cuando el movimiento es estacionario, a una resistencia y sustentación nula; nada de esto se corresponde en absoluto con la realidad.

Sin embargo, no hay solución única para el movimiento irrotacional bidimensional alrededor de cilindros, quedando determinada sólo cuando se fija la circu-

lación Γ alrededor del perfil. En este movimiento la resistencia es nula; pero, Kutta y Joukowski, independientemente, demostraron en 1911 que la sustentación no es nula, y está dada por la fórmula de Kutta-Joukowski $L = \rho V \Gamma$. Ya en 1902, el matemático Kutta había propuesto, para determinar el valor de la circulación Γ y con ello, la sustentación L de un perfil delgados con borde de salida afilado, la condición, de que la velocidad debe ser finita en este borde, llamada ahora de Kutta,. Con esta condición, las dos corrientes que rodean el perfil, siguiendo el intradós y el extradós, se reúnen en el borde de salida, moviéndose juntas aguas abajo con la misma velocidad. La teoría de Kutta y de Joukowski ofrece un panorama muy optimista para el vuelo, ya que la relación L/D , sería infinita. Un objetivo principal de los ingenieros aeronáuticos en el siglo XX ha sido encontrar y hacer posibles las condiciones que den validez a esta teoría. Los valores típicos que en los aviones actuales tiene esta relación en el vuelo de crucero suelen estar en el intervalo 16-20, alcanzando en algunos veleros de gran envergadura valores de hasta 40.

El resultado paradójico de resistencia y sustentación nula para un cuerpo de tamaño finito, que se mueve a velocidad constante respecto a un fluido incompresible, está en consecuencia de haber supuesto nulas las fuerzas de viscosidad. La relación entre las fuerzas de presión y las fuerzas viscosas que actúan sobre una partícula fluida es del orden del número de Reynolds, VL/ν , basado en la velocidad V del cuerpo, el tamaño característico L del mismo y la viscosidad cinemática ν del fluido. En la mayoría de aplicaciones prácticas este número es muy alto frente a la unidad, por lo que las fuerzas de viscosidad, introducidas por Newton, no fueron tenidas en cuenta hasta mediados del siglo XIX, con las ecuaciones de Navier-Stokes. Así pues, las ecuaciones de Euler, siguieron constituyendo el marco para el análisis de la mayoría de los flujos a altos números de Reynolds.

En realidad, la falta de acuerdo de la teoría potencial con la realidad esta ligada a la hipótesis de irrotacionalidad en todo el campo fluido y no a las ecuaciones de Euler. El primer paso para resolver esta paradoja la dio Helmholtz, cuando en un trabajo de 1858 se ocupó de la dinámica de torbellinos de acuerdo con las ecuaciones de Euler. Pero aun más trascendental fue su contribución de 1868, con el título "Sobre movimientos discontinuos de fluidos". En este trabajo empieza con la observación experimental de que, cuando examinamos cómo se descarga un líquido a través de un conducto, y con el borde de salida afilado sumergido en el líquido, vemos que la corriente no se abre a la salida en todas las direcciones, sino que continúa en forma de chorro, mezclándose con el líquido en el exterior del conducto sólo gradualmente, al alejarse de la sección de salida. Lo mismo ocurre cuando el aire de un depósito se deja descargar en el aire ambiente a través de un orificio. Para explicar estos hechos experimentales, Helmholtz introdujo en la descripción de los flujos no viscosos superficies de discontinuidad en las velocidades tangenciales o, lo

que es lo mismo, capas de torbellinos de espesor nulo.

Esta idea fue inmediatamente adaptada por Kirchhoff (1869) para la descripción del movimiento alrededor de cuerpos, suponiendo que la corriente que fluye alrededor del cuerpo se separa del mismo en las esquinas o puntos angulosos, y genera así las capas de torbellinos. Éstas forman los límites de una estela detrás del cuerpo, que llega al infinito en la teoría de Kirchhoff, donde el fluido está en reposo con presión constante. Kirchhoff usó este modelo para el cálculo del flujo bidimensional normal a una placa plana, obteniendo una resistencia finita, que sin embargo es sólo aproximadamente la determinada experimentalmente. Lord Rayleigh consiguió extender el análisis de Kirchhoff para describir el movimiento bidimensional alrededor de placas para cualquier valor del ángulo del ataque α menor que $\pi/2$. Aunque obtuvo valores no nulos tanto para la resistencia como para la sustentación, desafortunadamente sus resultados tampoco coinciden con los experimentales.

La causa del desacuerdo se entiende gracias al análisis que Lord Kelvin hizo, en 1871, de la estabilidad de las capas de torbellinos. Encontró que estas capas eran inestables ante perturbaciones de tipo sinuosidad, para todas las longitudes de onda. En esta inestabilidad, que llamamos de Helmholtz-Kelvin, se encuentra la causa, por una parte, de la no estacionariedad del flujo en la estela que generan las capas de torbellinos, y con ello del desacuerdo de los análisis de Kirchhoff y Rayleigh con la experiencia. Por otra parte, esta inestabilidad está en muchos casos en el origen de la turbulencia. Éste es el caso de las capas de torbellinos que limitan los chorros, que se convierten en turbulentas favoreciendo la mezcla con el fluido ambiente. También en el marco de las ecuaciones de Euler, Rayleigh analizó, en 1880, el papel que el espesor no nulo de la capa de torbellinos tienen en su estabilidad. Encontró que sólo las perturbaciones con longitudes de onda superiores a un valor crítico se amplifican, con una tasa de crecimiento máxima para un valor de la longitud de onda del orden del espesor de la capa.

Al incorporar torbellinos y capas de torbellinos al análisis de los movimientos fluidos con las ecuaciones de Euler, Helmholtz, Kelvin y Rayleigh, y otros investigadores posteriores, pudieron explicar muchos fenómenos naturales. A pesar de estos últimos avances en la descripción de los flujos a altos números alrededor de cuerpos, no está disponible a finales del siglo XIX la teoría que explique las razones de la discrepancia entre los análisis existentes y los resultados experimentales.

Levi-Civita a principios del siglo XX argumentó en una serie de trabajos³ la necesidad de extender la teoría de Kirchhoff a cuerpos con superficies no angulosas, teniendo en cuenta que la inestabilidad de las capas de torbellinos que emergerían del cuerpo darían a la estela turbillonaria un carácter no estacionario. Quedaba el problema de encontrar el mecanismo que determinase la línea desde la que emergen

³Citados en el artículo de R. Giacomelli y E. Pistolesi "Historical Sketch" publicado en el Vol I de la obra "Aerodynamic Theory" cuyo editor fue W.F. Durand. Reproducida por la editorial Dover 1963.

las capas de torbellinos al desprenderse la corriente de la superficie del cuerpo.

Por último un tercer reto de la Mecánica de Fluidos al finalizar el siglo XIX sigue estando en cómo conseguir hacerla aplicable al diseño de las máquinas hidráulicas y turbinas de vapor; pero, además es necesario extender la Mecánica de Fluidos al análisis de los flujos multifásicos de mezclas reactivas, para su aplicación al diseño de los motores térmicos tipo Otto y Diesel que acaban de aparecer.

El impacto de los desarrollos tecnológicos en la Mecánica de Fluidos

Los retos asociados al desarrollo de los motores térmicos y turbinas de vapor, así como los asociados al desarrollo de la Aeronáutica, con vuelos en aerostatos o con aeronaves más pesadas que el aire, sirvieron de incentivo para atraer a la Mecánica de Fluidos a algunos investigadores de extraordinaria capacidad, que iban a revolucionar esta disciplina.

La historia de la Aeronáutica está bien recogida por Gregorio Millán en la Introducción al Curso sobre Tecnología Aeronáutica publicado en 1990 por esta Academia de Ciencias. El comienzo tiene lugar en París, en 1783, con la ascensión en globo de los hermanos Montgolfier. En 1898 Santos Dumont dota de un timón de dirección y un motor con hélice a un aerostato fusiforme, para convertirlo en un dirigible que realizará el primer vuelo tripulado con una aeronave menos pesada que el aire. Leonardo Torres Quevedo, hizo en España contribuciones importantes al desarrollo de los dirigibles, especialmente en sus aspectos estructurales.

Las técnicas experimentales en Aerodinámica nacen con una doble aportación de Benjamin Robins, a mediados del siglo XVIII. Robins introdujo la técnica del brazo giratorio para medir, con medios rudimentarios, la resistencia del aire al movimiento de cuerpos, situados en el extremo del brazo. También introdujo el péndulo balístico, con el que midió la resistencia aerodinámica de balas a velocidades subsónicas y supersónicas. Así comprobó experimentalmente la dependencia de la resistencia con el cuadrado de la velocidad, anticipada por Newton y encontró un crecimiento “anómalo” de la resistencia para velocidades en torno a la del sonido; correspondiente a lo que después se llamó barrera del sonido.

Sir George Cayley fue el gran impulsor, a principios del siglo XIX, de los esfuerzos para desarrollar los conocimientos técnicos que pudiesen conducir al vuelo con aeronaves más pesadas que el aire. Construyó e hizo volar los primeros aeromodelos de veleros. Éstos estaban dotados con elementos sustentadores y de estabilidad rudimentarios, cuyas características aerodinámicas analizaba Cayley con la técnica de Robins del brazo giratorio.

Sin duda gracias al impulso pionero de Cayley, nace en Inglaterra, en 1866, la Aeronautical Society y poco después su Aeronautical Journal, que todavía sigue

publicándose en la actualidad. Dos de sus miembros, Wenham y Phillips, con el apoyo de la Sociedad diseñan y construyen los dos primeros túneles aerodinámicos. El primero, diseñado por Francis Wenham, en 1870 tiene una sección cuadrada de 45 cm de lado donde consigue velocidades de hasta 45 Km/hora, soplando con un ventilador movido por un motor de vapor. Usando una balanza muy rudimentaria para medir la resistencia y la sustentación de placas, pone de manifiesto experimentalmente que sólo la relación L/D alcanza valores grandes frente a la unidad a ángulos de ataque pequeños.

Horatio Phillips, diez años después, diseñó un nuevo túnel aerodinámico en el que la corriente de aire era aspirada por un eyector de vapor situado, en la sección mínima de una tobera convergente-divergente, aguas arriba de la sección de ensayo. La corriente en la sección de ensayo, donde se alcanzaban velocidades de hasta 65 Km/hora, era mucho más uniforme que en el túnel de Wenham. Phillips publicó en 1884 los resultados de ensayos de alas con perfiles con curvatura, mostrando que éstos proporcionan un valor más alto de la relación L/D .

Otto Lilienthal, un Ingeniero Mecánico alemán, publicó un libro con el título “El vuelo de los pájaros como base de la aviación”, en el que muestra los resultados de una serie de medidas, en un brazo giratorio, de la sustentación y resistencia de superficies sustentadoras de tipos diversos, incluyendo perfiles delgados en arco de círculo. Lilienthal fue inventor, constructor y piloto de veleros. Fue el primero que, en 1891, consiguió volar en un velero más pesado que el aire con perfiles en forma de arco de círculo. Murió en accidente, por entrada en pérdida de su velero cuando ya había hecho más de 2000 vuelos. Su habilidad como piloto era sin duda excepcional, dado que, antes de los hermanos Wright, sólo se sabía asegurar la estabilidad y control de los veleros mediante desplazamientos del piloto.

Samuel Langley, un astrónomo prestigioso que ocupaba el puesto muy influyente de Secretario de la Smithsonian Institution (a la que están adscritos los museos nacionales en Washington), inició su actividad aeronáutica en 1886, después de oír una conferencia del inglés Lanchester. Fue el primero que, en 1896, consiguió hacer volar un aeromodelo de aeronave, más pesado que el aire. Éste tenía tres metros de envergadura y estaba propulsado por dos hélices movidas por un motor de vapor de un caballo.

Langley conoció pronto los datos publicados por Wenham y Phillips sobre la resistencia y sustentación de perfiles, pero no los de Lilienthal. Hizo experimentos cuidadosos en un brazo giratorio, para determinar las fuerzas aerodinámicas sobre placas planas a diversos ángulos de ataque, comprobando así que los resultados del análisis de Newton no reproducirían los resultados experimentales. Cuando más tarde, en 1893, conoció las medidas de Lilienthal en perfiles curvos, descartó su validez como poco fiables. Sin embargo, terminó usando perfiles curvos para las

alas en diedro de su modelo propulsado. Albert Zahm, director del departamento de Física y Mecánica de la Universidad Católica de Washington, montó el segundo laboratorio aeronáutico americano (el primero era el de Langley en la Smithsonian Institution), incluyendo en él el primer túnel aerodinámico americano.

Octave Chanute, que era Presidente de la Asociación Americana de Ingeniería Civil, jugó un papel muy importante, al recoger y diseminar, en su obra de 1894 "Progress in the Flying Machines", los conocimientos aeronáuticos del momento. Mantuvo un contacto estrecho con los hermanos Wright, ya durante el período en que éstos iniciaron sus esfuerzos preparatorios del vuelo, y fue un gran divulgador de su obra.

La contribución de los hermanos Wright a la Ingeniería Aeronáutica fue excepcionalmente importante. En poquísimo tiempo los dos hermanos consiguieron, sin ayuda exterior, diseñar, construir, ensayar y, en Diciembre de 1903, volar por primera vez, en una aeronave más pesada que el aire, con una arquitectura relativamente próxima a la actual.

Los hermanos Wright no tenían formación universitaria; cuando terminaron su enseñanza secundaria montaron en Dayton, Ohio, un taller para la venta y reparación de bicicletas y pronto para la fabricación, que ellos hacían personalmente, de sus propios diseños. El mayor de los hermanos, Wilbur Wright, aficionado a la Ornitología, inició su preocupación por el vuelo humano al enterarse en 1896 de la muerte por accidente de Lilienthal. Ya estaban los hermanos Wright decididos a contribuir con su esfuerzo al vuelo con una aeronave más pesada que el aire cuando, en 1899, solicitaron de la Smithsonian Institution, la información que les pudiesen ofrecer sobre el tema. Pronto recibieron una lista de libros, entre ellos el de Chanute citado antes, y algunos folletos de la Smithsonian, donde se resumían los resultados obtenidos por Langley y otros.

Establecieron un plan de acción que incluía, en primer lugar, ensayos con modelos de veleros operados contra el viento como cometas, para pasar después al vuelo tripulado con veleros. Comprendieron pronto que la estabilidad y el control del vuelo deberían ser activos, basados en los cambios de las fuerzas aerodinámicas al cambiar la configuración geométrica de la aeronave, y no en el desplazamiento del piloto respecto a la misma.

Para una breve descripción del esfuerzo que les condujo desde su primer vuelo con un velero en el verano de 1900 hasta su primer vuelo propulsado el 17 de Diciembre de 1903 en Kitty Hawk, North Carolina, cito aquí lo escrito por Gregorio Millán en su Introducción al Curso sobre Ingeniería Aeronáutica, publicado por esta Academia en 1990.

"La Aviación, empieza el día 17 de Diciembre de 1903, cuando los her-

manos Wright, dos hábiles mecánicos, fabricantes de bicicletas en Dayton, Ohio, consiguen el primer vuelo tripulado con un avión dotado de medios de propulsión y gobierno.

Es un vuelo modesto, de 12 segundos de duración y 40 m escasos de recorrido, contra un viento de más de 30 Km. por hora, pero cuya enorme significación histórica describe el propio tripulante, Orville Wright, en los términos siguientes: "El primero en la historia del mundo en que una máquina, que llevaba un hombre, se elevó por su propia potencia en el aire volando hacia adelante sin reducir su velocidad y aterrizó finalmente en un punto tan alto como el de despegue".

El avión: el "Wright Flyer I" que se conserva en el Museo Aeronáutico y Espacial de la Institución Smithsonian, en Washington, era un biplano con estructura de madera, revestimiento de tela y arriostramiento con cables; propulsado por dos hélices bipalas, accionadas mediante una transmisión de cadenas de bicicleta, por un motor de gasolina de 12 C.V. de potencia y 90 Kg. de peso.

El piloto iba tumbado encima del ala inferior, a la izquierda del motor y gobernaba el avión mediante un timón biplano horizontal, situado delante de las alas (configuración "canard"), para controlar las maniobras de cabeceo; dos timones verticales detrás de las alas, para controlar la dirección del avión; y finalmente la torsión o "alabeo" de las puntas de las alas, en sentidos opuestos, para mantener el equilibrio de balanceo y para inclinarse al evolucionar en un plano horizontal.

La historia de los inventos y desarrollos de los hermanos Wright está muy bien documentada por ellos mismos y por otras muchas fuentes, que los acreditan como los primeros ingenieros aeronáuticos, en el moderno sentido profesional de esta expresión.

Efectivamente; cuando los hermanos Wright decidieron abordar el problema del vuelo, que había excitado su imaginación desde la infancia, lo hicieron seriamente, a lo largo de un proceso por etapas, estudiando toda la abundante información ya disponible sobre la materia. Para esto recurrieron a la Institución Smithsonian de Washington, cuyo Secretario Samuel P. Langley fue uno de los más entusiastas precursores del vuelo propulsado en Norteamérica; así como al ingeniero de Chicago Octavio Chanute, historiador de la Aeronáutica y diseñador de planeadores, cuyo asesoramiento y amistad fueron de gran valor para los estudios y trabajos de los hermanos Wright.

Idearon y construyeron en 1901 su propio túnel aerodinámico que les permitió ensayar y medir el comportamiento aerodinámico de sus modelos para optimizar el diseño de sus aparatos, mediante series sistemáticas de pruebas

realmente notables.

Proyectaron y construyeron el motor de explosión y las hélices necesarias para la propulsión.

Resolvieron a entera satisfacción el difícil problema del guiado y control de vuelo; especialmente el de balanceo, mediante el ingenioso sistema de alabeo ya citado, precursor de los “alerones” de uso universal introducidos por el aviador francés Henry Farman en 1909, tras comprobar en París, un año antes, la superioridad de control del avión de los Wright.

Por último; recabaron y estudiaron la información meteorológica necesaria para seleccionar el sitio más adecuado para sus ensayos en vuelo, eligiendo un lugar de la costa de Carolina del Norte: Kitty Hawk, con vientos fuertes y regulares, donde experimentaron primero con planeadores (aviones sin motor) no tripulados; seguidamente, con planeadores tripulados por ellos mismos y finalmente con el “Flyer I” que abrió la era de la aviación“.

Sólo quiero añadir que este desarrollo experimental iba acompañado de predicciones de la respuesta de la aeronave, basadas en los datos existentes y en sus propias consideraciones teóricas. Una muestra de estas consideraciones aparece en la primera publicación, ya en 1900, de Wilbur Wright (sobre la definición apropiada del ángulo de ataque) en el *Aeronautical Journal* inglés.

De la falta de concordancia entre las medidas del ángulo de planeo de su velero para distintas velocidades del viento, y sus predicciones basadas en los resultados experimentales publicados, pronto dedujeron que éstos no eran fiables, dada su gran disparidad e incertidumbre en la técnica de medida. Por ello se decidieron, después de la campaña de vuelos de 1901, a montar su propio túnel aerodinámico y hacer sus propias medidas. Con ellas descubrieron el papel que en la resistencia aerodinámica del ala tenía su alargamiento; que se define como el cociente entre la envergadura del ala y el valor medio de la cuerda de sus perfiles. La resistencia disminuía muy significativamente al aumentar el alargamiento. Por eso el valor usado en el velero de 1902 y en el avión de 1903 es más del doble del valor 3 del alargamiento modesto de sus veleros anteriores.

Cuando hacen sus vuelos de 1902 obtienen un acuerdo excelente entre las actuaciones del velero y sus predicciones, basadas ahora en sus propias medidas. Por ello se deciden a pasar a ya al vuelo propulsado.

Sus estimaciones de la resistencia aerodinámica definen la fuerza de tracción que debían proporcionar las hélices. Puesto que no existía la teoría para hacer la predicción de la tracción y el par motor necesario, desarrollaron su propia teoría aproximada (del elemento de pala) considerando que las hélices se comportaban como alas giratorias. Dado que tampoco había disponible un motor de peso no

excesivo que produjese el par necesario, lo diseñaron y construyeron ellos mismos en seis meses.

Ellos dos, solos y sin ninguna ayuda ni personal ni financiera, en cuatro años, utilizando el tiempo libre que les dejaba su trabajo en el taller de bicicletas, abrieron la era de la aviación y establecieron la metodología que habría que usar en su desarrollo.

Los costes de su proyecto, sin considerar su aportación personal al diseño, construcción y ensayo, fueron modestos, del orden de 2000 dólares, en flagrante contraste con el esfuerzo paralelo, que después de su éxito con el aeromodelo propulsado de 1886, estuvo desarrollando Langley, con el mismo objetivo, en su laboratorio de la Smithsonian Institution. El proyecto de Langley fue financiado por el Departamento de Defensa americano con cincuenta mil dólares, a los que hay que añadir otros veinte mil que aportó la Smithsonian. Los dos intentos de vuelo que hizo, en octubre de 1903, el piloto Charles Taylor (quien también había contribuido con un excelente diseño para el motor), habían fracasado estrepitosamente, por la entrada en pérdida del ala, y enfriaron durante varios años el interés de los militares americanos por la aviación.

La hazaña de los hermanos Wright, hecha sin ningún espíritu publicitario, fue tan inesperada que los periódicos no dieron crédito a la nota escueta sobre su vuelo, que los hermanos Wright hicieron llegar a la Associated Press para su difusión. Continuaron trabajando calladamente, sin apoyo financiero, para mejorar la configuración aerodinámica y estructural del avión, así como las prestaciones del motor.

Las asociaciones aeronáuticas europeas acogieron con entusiasmo sus primeros vuelos, en velero y en avión, y sus contribuciones posteriores, y la configuración del Flyer I fue ya imitada en 1906 por otros pioneros, la fama de los hermanos Wright no llegó al gran público hasta el verano de 1908. Cuando, primero en París y luego en Pau, hicieron una campaña de vuelos de exhibición, solos o con un acompañante invitado, ante una muchedumbre que acudía para ver el espectáculo. Sólo cuando la información sobre el éxito de estas informaciones llegó desde Francia a la prensa americana, ésta descubrió la hazaña de los hermanos Wright; y su Departamento de Defensa se decidió a apoyar al desarrollo aeronáutico.

Algunos desarrollos emblemáticos de la Mecánica de Fluidos en el siglo XX

Las contribuciones a la Aerodinámica en el siglo XX se inician con una aportación que resultó ser trascendental para su aplicación al diseño de los aviones.

Es interesante observar que también las contribuciones científicas seminales a la Aerodinámica se inician en el mismo momento, con las aportaciones de algunos investigadores de calidad excepcional que abordaron algunos de los problemas que

planteaba la tecnología que se estaba desarrollando.

Este es el caso del matemático Wilhem Kutta, quien se interesó por los problemas de la Aerodinámica, gracias a la labor estimulante de Otto Lilienthal. Kutta conocía el libro publicado en 1889 por Lilienthal, "El vuelo de los pájaros", donde se ofrecían muchos datos sobre la resistencia de alas con perfiles delgados curvos. Entre estos datos incluía el resultado, que parecía sorprendente, de que un ala, de envergadura grande comparada con la cuerda, con un perfil delgado en arco de círculo con valores moderados de la curvatura, tenía una sustentación apreciable a ángulo de ataque nulo. El valor de la resistencia era mucho más pequeño (como si fuese cierto el resultado de d'Alembert).

Kutta, en su tesis doctoral presentada en 1902 en la Universidad de Munich, dió una explicación satisfactoria de este resultado, al obtener la solución exacta al movimiento, bidimensional, irrotacional e incompresible, alrededor de un perfil en forma de arco de círculo. Para obtener el valor apropiado de la circulación usó la condición de Kutta de la que ya hemos hablado antes, de velocidad finita en el borde de salida. La solución fue obtenida al encontrar la transformación conforme del arco de círculo en el círculo completo; método que ya había sugerido Riemann en 1851. La solución conduce a un valor nulo de la resistencia y finito de la sustentación; no muy alejado de los resultados experimentales, teniendo en cuenta que estos sólo existían para alas de envergadura finita. Es la primera vez que, en el análisis del movimiento a altos números de Reynolds alrededor de cuerpos hay concordancia razonable entre los resultados de la Hidrodinámica Teórica y los experimentales. La contribución de Kutta con su método para la selección de la circulación alrededor del perfil tuvo una gran trascendencia para el desarrollo de la Aerodinámica y su aplicación al diseño de aviones, gracias al complemento de la Teoría de la Capa Límite de Prandtl que llegaría dos años después.

Nikolai Joukowski es otra de las personalidades que pusieron su sello en la Aerodinámica. Fue profesor de Mecánica en la Universidad de Moscú y profesor de Matemáticas en la Escuela Técnica Superior de Moscú, donde montó un túnel aerodinámico para sus experimentos. Había obtenido la licenciatura en Matemáticas en la Universidad de Moscú, y posteriormente se había doctorado con una tesis sobre la estabilidad de los movimientos fluidos. Allí pasó a ser pronto, en 1886, Director del Departamento de Mecánica. Publicó más de 200 trabajos en Mecánica básica y aplicada; entre ellos, un trabajo de gran impacto tecnológico sobre la teoría del golpe de ariete. Desde 1905, hasta su muerte en 1921, fue Presidente de la Sociedad Matemática de Moscú.

En torno a 1890 nació su interés por el vuelo, hasta el punto de que viajó a Alemania para visitar a Lilienthal y comprar uno de sus veleros. De su contribución a la fórmula que liga la sustentación de perfiles con la circulación ya hemos hablado;

pero otra de sus aportaciones, crucial para el desarrollo de la aerodinámica aplicada en sus primeros tiempos, es su fórmula de transformación conforme, que convierte el círculo en una familia de perfiles, con borde de salida afilado, que llamamos de Joukowski. Se dispone por este procedimiento de una solución analítica exacta para el movimiento irrotacional alrededor de los mismos; con la circulación seleccionada con la hipótesis de Kutta. Puesto que la transformación de Jaoukowski contiene parámetros libres, que podemos variar para conseguir los valores deseados de la curvatura y el espesor de los perfiles resultantes. Se dispone así una descripción simple de cómo éstos valores afectan a las características aerodinámicas de los perfiles.

Otra de las personas que contribuyó con sus ideas al desarrollo de la Aerodinámica fue el inglés Frederick Lanchester. Aunque estudió durante tres años en el Royal College of Science, no llegó a graduarse porque empezó pronto a trabajar como ingeniero, dedicado en el diseño de motores de combustión interna. En 1899 formó su propia compañía, la Lanchester Motor Company, para la fabricación y venta de automóviles.

A principios de los años 1890 nació su afición por la Aeronáutica, a la que dedicó una buena fracción de su tiempo, haciendo a cabo experimentos con modelos de planeadores, con perfiles curvados. Pronto, de un modo intuitivo, llegó a encontrar la descripción cualitativa del flujo alrededor de alas, la llamada Teoría de Lanchester que responde bien a la realidad. Si el ala está volando a un ángulo de ataque positivo se fuerza al aire a pasar por encima del ala con velocidades más altas (y menor presión) que en la corriente libre; y a pasar con velocidades menores (y mayor presión) por el intradós. Estas diferencias de velocidad corresponden a la circulación de la velocidad alrededor del perfil; están ligadas a las depresiones en el extradós y a las sobrepresiones en el intradós que conducen a la sustentación.

Debido a esta diferencia de presiones habrá un movimiento, bordeando las puntas del ala, desde el intradós hacia el extradós. Éste se traduce en la aparición de dos capas de torbellinos que emergen desde el borde de salida y se enrollan aguas abajo para formar dos torbellinos contrarrotatorios en la estela de las alas, situados cerca de sus puntas. Estos torbellinos, que forman los núcleos de las estelas de condensación de los aviones, comunican al (aire un movimiento hacia abajo entre los torbellinos), con una energía cinética que debe ser aportada por la potencia necesaria para vencer la resistencia. Esta resistencia ligada a la sustentación, se llama resistencia inducida; aunque disminuye al aumentar el alargamiento de las alas, sólo es nula cuando el alargamiento es infinito. Las capas de torbellinos de Helmholtz que emergen del borde de salida del ala, y que al enrollarse forman los torbellinos de Lanchester, invalidan la paradoja de d'Alembert: No podemos tener sustentación sin resistencia.

Lanchester intentó, sin éxito, publicar su teoría en las revistas científicas, sus

trabajos fueron rechazados en parte porque su teoría era sólo cualitativa y no cuantitativa. Sus ideas eran tan sorprendentes y dirigidas a una empresa, como era el vuelo, todavía quimérica, que una de los que revisaron su trabajo le recomendó que no intentase publicarlo, para que su empeño en proyectos típicos de iluminados no dañase a su reputación como Ingeniero. Cuando, finalmente en 1907, publicó su libro "Aerodynamics" tuvo una gran difusión.

Fue Prandtl en los años 1910 el que, apoyándose en las ecuaciones de Euler y la condición de Kutta, sustituyó la teoría cualitativa de Lanchester por una teoría cuantitativa con base sólida científica. Además, con su teoría de la capa límite mostró como calcular la resistencia de fricción, debida a los efectos viscosos, para añadir a la inducida que aparece aunque el fluido sea ideal.

El matemático Félix Klein fue el gestor en la Universidad de Göttingen del desarrollo de las disciplinas científicas, usando sus buenas relaciones con Friedrich Althoff, durante muchos años director responsable de la enseñanza científica y técnica en el Ministerio Prusiano de Cultura y también con magnates de la industria, como Krupp y Siemens.

Félix Klein visitó la Exposición Universal de Chicago en 1893, y allí tuvo ocasión de observar los avances tecnológicos espectaculares que se estaban produciendo. Es muy posible que, por ejemplo, pudiese ver en funcionamiento la turbina desarrollada por Laval. Estaba impulsada por vapor a través de una tobera convergente-divergente, que permitía al vapor alcanzar velocidades supersónicas antes de incidir sobre los álabes. Con la tobera de Laval se había incrementado notablemente el rendimiento de la turbina y ésta alcanzaba hasta 30000 revoluciones por minuto.

A su vuelta, se propuso impulsar en Göttingen los lazos entre las matemáticas y las otras disciplinas científicas y también introducir en la Universidad la preocupación por los problemas tecnológicos. Con la cooperación de la industria, consiguió formar en Göttingen una asociación para el avance de la Física Aplicada y las Matemáticas. Con su apoyo consiguió, en primer lugar, establecer, una división técnica del Instituto de Física de la Universidad y, después, la dotación de dos cátedras para la División de Física Técnica. Una Cátedra de Mecánica aplicada y otra de Matemática Aplicada.

Para la de Mecánica Aplicada intentó atraer, a un ingeniero húngaro, Aurel Stodola, Profesor muy prestigioso de Mecánica Aplicada en el Instituto Politécnico de Zurich. Acababa de publicar en 1903 un libro sobre turbinas, donde exponía los resultados de las primeras medidas de la distribución de presiones en toberas de Laval, convergentes-divergentes. Con estas medidas había demostrado que el vapor realmente alcanzaba velocidades supersónicas en la parte divergente de la tobera. Las medidas de presión mostraban, en algunos casos, la presencia de las ondas de choque predichas por Riemann. Klein, en parte, por razones de tipo económico,

tuvo que abandonar la idea de contratar a Stodola. Se decidió entonces por ofrecer a Ludwig Prandtl la Cátedra de Mecánica Aplicada, y a Carl Runge la de Matemática Aplicada. Ambos eran profesores en la Escuela Técnica Superior de Hanover.

Esta selección resultaría providencial para convertir la Universidad de Göttingen en el gran centro de excelencia, no sólo para las ciencias matemáticas y físicas sino también para las de ingeniería.

Prandtl estudió Ingeniería Mecánica en la Escuela Superior Técnica de Munich y se doctoró en el año 1900 con una tesis sobre Elasticidad. Pasó un año en una empresa de fabricación de maquinaria encargado de la tarea de hacer más eficiente el sistema de recogida, por succión, de las virutas que producían los tornos. Al no existir métodos apropiados para predecir el funcionamiento del sistema de succión llevó a cabo algunos experimentos propios que le ayudaron en el diseño de un nuevo sistema que redujo los costes de recolección de las virutas a un tercio.

En 1901 fue contratado como Profesor en la Escuela Superior Técnica de Hanover, y fue madurando sus ideas sobre la capa límite. Estas ideas surgieron al tratar de entender la dificultad de predecir la corriente en conductos de sección variable. En éstos, la corriente no se abre para seguir llenándola sección cuando su área aumenta bruscamente, sino que se desprende para generar un chorro como el flujo a la salida de orificios analizado por Helmholtz.

Ya, había conseguido en 1904, cuando aceptó el puesto de Profesor en Göttingen, describir la estructura asintótica, de los flujos laminares meros de Reynolds; que representan una gran mayoría de los flujos de interés práctico.

Prandtl observó que, si bien los efectos viscosos y de la conducción de calor pueden despreciarse en la mayor parte del campo fluido, ambos juegan un papel esencial en la capa límite adyacente a las superficies sólidas que limitan el fluido, debido a los fuertes gradientes de velocidad y de temperatura que se dan en la dirección transversal a esta capa.

Prandtl escribió la forma simplificada de las ecuaciones del movimiento del fluido en la capa límite; y añadió como condiciones de contorno, primero la de continuidad de la velocidad y temperatura con la superficie sólida y, segundo, la condición de que al alejarse de la superficie sólida (hasta distancias grandes frente al espesor característico, $L/\sqrt{Re}$, de la capa límite) la temperatura y las componentes de la velocidad paralelas a la superficie tomen los valores que da la solución de las ecuaciones de Euler para la temperatura y velocidad de deslizamiento en la superficie sólida. La presión en la capa límite es la presión que dan las ecuaciones de Euler sobre la superficie.

Las velocidades transversales a la capa límite que resultan de la Teoría de Prandtl son pequeñas, del orden $U/\sqrt{Re}$, frente a la velocidad exterior. Por ello en primera aproximación no se tiene en cuenta el efecto de desplazamiento que introduce en

el flujo exterior la deceleración viscosa en la capa límite. Prandtl señaló que este desplazamiento se traduciría en una corrección relativamente pequeña del campo fluido exterior; del orden de $U/\sqrt{Re}$, para las velocidades.

También mostró que, la capa límite podía desprenderse en zonas donde el gradiente de presión es adverso, esto es en zonas donde la presión crece en la dirección del movimiento. Cuando la capa límite se desprende se presenta en el seno del fluido en forma de una capa de torbellinos, con una estructura interna que también se puede analizar mediante la teoría de la capa límite.

Felix Klein convenció a Prandtl de que presentase su teoría de la capa límite en el Tercer Congreso Internacional de Matemáticas que se celebraba en Heidelberg en 1904. El trabajo, de 8 páginas, con fotografías obtenidas por visualización de algunos flujo, recoge lo que él pudo decir en los diez minutos asignados a su presentación.

Además de los aspectos esenciales de su teoría; incluye también una breve nota para explicar que las ecuaciones no lineales que describen la capa límite en el flujo paralelo a una placa plana tienen solución de semejanza, por lo que el problema se reduce a resolver una ecuación diferencial ordinaria, no lineal, que él obtuvo aproximadamente con el método de Runge para predecir por primera vez la resistencia de fricción sobre la placa.

Con la introducción de la teoría de la capa límite, Prandtl estableció también el modelo a seguir para la solución de problemas de perturbaciones singulares asociados a la existencia de escalas muy dispares. Estos métodos asintóticos basados, en desarrollos asintóticos acoplados, junto con los métodos de escalas múltiples para el análisis de procesos oscilatorios, pasaron a ser una herramienta imprescindible para el análisis de los flujos con escalas múltiples, a partir de 1955, como consecuencia de las aportaciones y el esfuerzo sistematizador de Kaplun y Lagerstrom, Cole y Kevorkian y Van Dyke,

En sus primeros años en Göttingen, desde 1905 a 1908, Prandtl se ocupó, del análisis del flujo en toberas de Laval, en colaboración de Meyer, un estudiante de doctorado. Para ello construyó un pequeño túnel supersónico con una tobera convergente divergente cuya sección mínima era rectangular de aproximadamente medio centímetro de lado. Se alimentaba esta tobera desde un depósito presurizado, y descargaba a la atmósfera. Usó paredes laterales de cuarzo para permitir la visualización con el sistema de estrioscopía que había desarrollado Ernest Mach 15 años antes. En la figura que se adjunta, aparecen reproducidas algunas de las fotografías de la visualización del flujo, subsónico en la parte convergente de la tobera y del flujo supersónico en la parte divergente, para distintos valores de la presión en el depósito.

En estas fotografías se observan claramente las ondas de presión, que llamamos de Mach, correspondientes a las superficies características de las ecuaciones de Euler.

El ángulo (de Mach) que las características forman con la corriente es indicativo del valor local del número de Mach; relación entre la velocidad local del fluido y la del sonido.

Fuera ya de la tobera, la estructura del flujo, depende del valor de la relación entre la presión del depósito y la presión exterior, que en estos experimentos es la presión atmosférica. La presión en la sección de salida es mayor que la atmosférica cuando la presión del depósito es superior a 6 atmósferas. En este caso el chorro de salida se ensancha mediante un abanico de ondas de expansión, que arrancan del borde de salida de la tobera, y los límites del chorro son capas de torbellinos de Helmholtz.

Por el contrario, para valores de la presión en el depósito menores que 6 atmósferas, la presión en la sección de salida es menor que la atmosférica, y se produce una contracción del chorro a la salida, mediante ondas de choque oblicuas que arrancan de los bordes de la tobera. Cuando estas ondas de choque alcanzan los límites del chorro se reflejan en forma de un abanico de expansión.

Para explicar estos fenómenos, Prandtl y Meyer extendieron la teoría de las ondas de choque normales de Rankine y Hugoniot para ondas de choque oblicuas. También fueron capaces de encontrar una solución exacta de las ecuaciones no lineales de Euler, que describe el flujo supersónico observado en los abanicos de expansión.

Prandtl estaba dedicado a estas investigaciones, sobre un flujo que es típico de las toberas de los cohetes usados en la propulsión espacial, mientras los hermanos Wright estaban haciendo nacer la aviación con velocidades de vuelo pequeñas frente a la del sonido.

Prandtl contribuyó también al progreso de la Aeronáutica con el diseño y montaje, en 1908, de un túnel aerodinámico de circuito cerrado, con una sección de ensayos cuadrada. de 2 metros de lado, incorporando alabes guía en los codos con el fin de minimizar las pérdidas de presión. Este túnel de Göttingen fue el modelo en que se inspiraron muchos de los túneles posteriores, entre ellos los montados por von Karman, primero en Aachen en 1913 y después en Pasadena en 1928. También es de este tipo el que en 1921 montó en Cuatro Vientos Emilio Herrera, quién fue miembro de esta Academia. En él se ensayaron muchos de nuestros primeros aviones y también modelos del autogiro de la Cierva.

Teodoro von Karman nació en Budapest, donde estudió Ingeniería Mecánica antes de trasladarse a Göttingen para hacer el doctorado en el Instituto de Prandtl. Allí permaneció hasta 1913 repartiendo su actividad, al igual que Prandtl, entre la Mecánica de Sólidos y la de Fluidos.

En ese período hizo, entre otros, dos trabajos de gran impacto científico: Uno, con Max Born, dedicado a la teoría de los calores específicos de los sólidos. El otro que fue presentado en el Quinto Congreso Internacional de Matemáticas, representa su

primer gran aportación a la Mecánica de Fluidos. Es un estudio de la estabilidad de la calle de torbellinos que se organiza en la estela de los cuerpos cilíndricos, cuando el número de Reynolds supera a un valor crítico del orden de 40. Los torbellinos se desprenden alternativamente del cilindro con una frecuencia característica de los tonos eólicos, proporcional al cociente entre la velocidad y el diámetro o la dimensión característica del cilindro. Von Karman consideró la estabilidad de distintas disposiciones regulares de los torbellinos, que resultaban inestables salvo una que era marginalmente estable. En ésta los torbellinos, que suponía puntuales, se situaban alternativamente, al tresbolillo, en dos líneas paralelas con un valor preciso del cociente entre la distancia y la separación. La calle de torbellinos de Karman va ligada a fuerzas aerodinámicas oscilatorias sobre el cilindro por lo que tienen mucha importancia en la estabilidad estructural de los mismos.

Von Karman dirigió desde 1913 hasta 1933 un Instituto de Aerodinámica en Aachen donde siguió haciendo contribuciones notables a la Aerodinámica, que incluyen la ley logarítmica de distribución de velocidades cerca de la pared en el flujo turbulento en conductos y capas límites.

Cuando en 1928 fue nombrado director del Guggenheim Aeronautical Laboratory del Instituto Tecnológico de California, éste se convirtió pronto en el centro de excelencia de las ciencias aeronáuticas en Estados Unidos. En el túnel aerodinámico, que él contribuyó a diseñar, ensayaron sus aviones todas las industrias aeronáuticas americanas.

Von Karman, se ocupó del desarrollo de la propulsión mediante motores cohete, siendo el creador, durante la segunda guerra mundial, del Jet Propulsion Laboratory y de la compañía Aerojet, dedicadas a la propulsión.

Sus aportaciones científicas no disminuyeron en América. Entre ellas destaca especialmente su teoría de los movimientos transónicos alrededor de cuerpos esbeltos y perfiles delgados, desarrollada cuando, a mediados del siglo XX, nace el vuelo transónico. Para velocidades próximas a la del sonido aparecen efectos no lineales que invalidan la teoría desarrollada para el vuelo subsónico y supersónico, por Prandtl-Glauert en los años 1920.

En 1951 von Karman dió en la Sorbona, con la colaboración de Gregorio Millán, un curso sobre Aero termoquímica, publicado en 1958 en forma ampliada y actualizada por Gregorio Millán en su *Aero thermochemistry*. En este curso aparecen por primera vez las ecuaciones de la Mecánica de Fluidos en su forma generalizada para el análisis de los movimientos de fluidos con reacciones químicas.

De esta aportación de von Karman a la Mecánica de Fluidos nació el grupo español en Combustión, y con él la dedicación a este campo de quien escribe esto.

Otra contribución pionera a la Mecánica de Fluidos, con un importantísimo impacto tecnológico se debe a Reynolds que en 1886 dio las bases para la Teoría de la

lubricación. El análisis de la lubricación de cojinetes fue hecho por Sommerfeld, y presentado en 1904 en el Tercer Congreso Internacional de Matemáticas.

Sommerfeld presentó en 1908, en el Cuarto Congreso Internacional de Matemáticas, las ecuaciones de Orr-Sommerfeld de la estabilidad de flujos paralelos incluyendo los efectos viscosos. Fue Heisenberg el primero en obtener, en su tesis doctoral de 1924, una estimación del número de Reynolds crítico para el que el flujo laminar de Poiseuille bidimensional pierde estabilidad. Está basada en la solución asintótica, para valores grandes del número de Reynolds, de las ecuaciones de Orr-Sommerfeld.

Ya en 1921, G.I. Taylor, que es sin duda el más importante de los investigadores ingleses en Mecánica de Fluidos, publicó en los Proceedings de la Royal Society un trabajo seminal sobre la inestabilidad del flujo de Couette entre cilindros concéntricos. Dedicó los primeros años de su actividad investigadora a la Meteorología e hizo en los años 1930, los trabajos que sirvieron de fundamento para la teoría estadística de la turbulencia isotrópica. (A la que el matemático ruso Kolmogorov contribuiría con su teoría fundamental de la cascada). Taylor hizo durante la primera guerra mundial las primeras medidas en vuelo de la distribución de presiones sobre un ala; actuando simultáneamente como piloto e ingeniero de vuelo.

Otro insigne investigador inglés es James Lighthill, quien entre, otras muchas aportaciones contribuyó con el desarrollo de la teoría de la generación del ruido en flujos turbulentos. También han sido pioneras sus contribuciones a la Biofluidodinámica. Murió en 1998 cuando, a sus 74 años, llevaba ya nueve horas nadando alrededor de la isla Sark en el canal de la Mancha; fue el primero en rodear la isla. Sir James Lighthill había ocupado la cátedra Lucasiana en Cambridge.

Me he limitado aquí a citar sólo algunas de las contribuciones emblemáticas a la Mecánica de Fluidos en la primera mitad del siglo XX, que establecieron las bases para el extraordinario desarrollo posterior. De los avances en la segunda mitad del siglo, me ocupé en mi conferencia del Curso de Ingeniería Aeronáutica y en mi discurso de ingreso, publicados por esta Academia en 1990 y 1991.

Muchas Gracias por la atención que me han prestado.

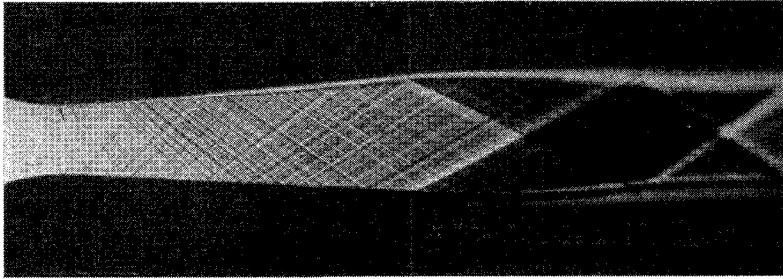


Figure 8

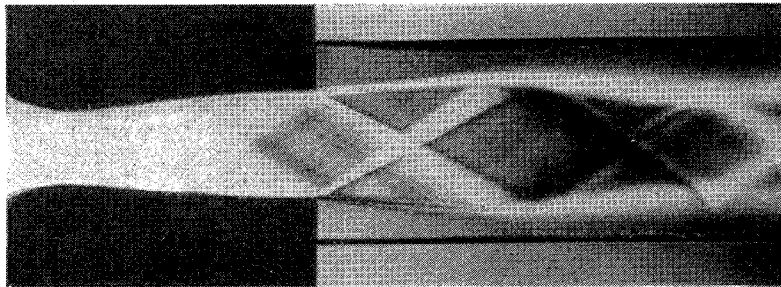


Figure 11. Initial pressure 8 atm

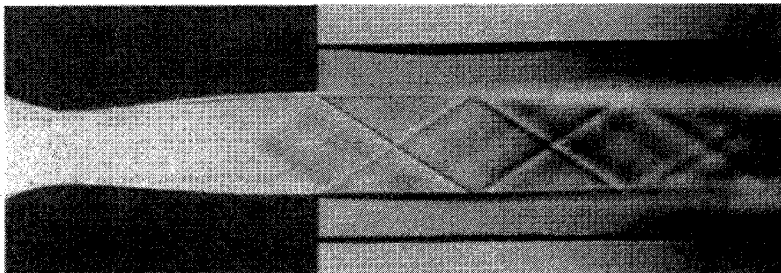


Figure 12. Initial pressure 6 atm

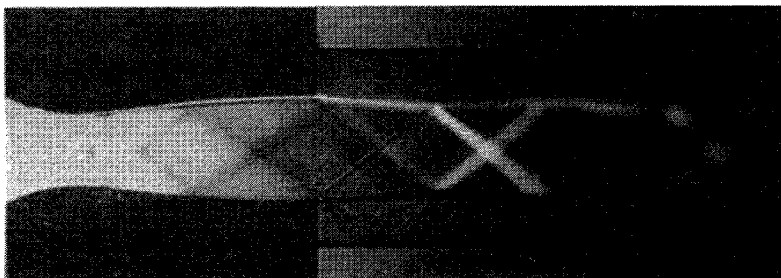


Figure 13. Initial pressure 5 atm