

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

EL ANÁLISIS DE FOURIER Y
LAS ECUACIONES DIFERENCIALES,
NUEVOS RETOS

DISCURSO LEÍDO EN EL ACTO DE SU RECEPCIÓN
COMO ACADÉMICO DE NÚMERO POR EL

EXCMO. SR. D. LUIS VEGA GONZÁLEZ

Y CONTESTACIÓN DEL

EXCMO. SR. D. JUAN LUIS VÁZQUEZ SUÁREZ

EL DÍA 28 DE ABRIL DE 2021



MADRID
Domicilio de la Academia
Valverde, 22

ISSN: 0214-9540

ISBN: 978-84-87125-72-0

Depósito legal: M-8717-2021

ÍNDICE

1. PREÁMBULO	7
2. INTRODUCCIÓN	15
3. PERTURBACIONES SINGULARES DE LA ECUACIÓN DE DIRAC	33
4. PRINCIPIOS DE INCERTIDUMBRE	42
5. LA ECUACIÓN DE LOS HILOS DE TORBELLINO..	47
REFERENCIAS	90
DISCURSO DE CONTESTACIÓN DEL EXCMO. SR. D. JUAN LUIS VÁZQUEZ SUÁREZ ...	105

DISCURSO DE INGRESO

DEL

EXCMO. SR. D. LUIS VEGA GONZÁLEZ

EL ANÁLISIS DE FOURIER Y LAS ECUACIONES DIFERENCIALES, NUEVOS RETOS

Excelentísimo Señor Presidente,

Excelentísimos Señores Académicos,

Señoras y señores:

1. Preámbulo

Quiero expresar mi profundo agradecimiento a los miembros de esta Academia por haber tenido a bien proponer mi nombre para formar parte de ella. Es sin lugar a duda un honor y una responsabilidad que acepto con la idea de trabajar por la institución en general y por la sección de matemáticas en particular. Pertenezco a una generación, de las pocas que ha habido en la historia de nuestro país, que ha recibido financiación para su investigación a lo largo de toda su carrera. No es un bien menor, que hay que mantener y en la medida de lo posible mejorar. Pienso que instituciones como a la que hoy me incorporo son claves y determinantes a la hora de hacer ver a la sociedad los beneficios que la financiación y el apoyo a la ciencia provocan a medio y largo plazo.

Estos beneficios de la actividad científica no se reducen solo a los efectos económicos y sociales que el éxito de la misma antes o después siempre conlleva, sino también a la propia transmisión y propagación de los valores que el trabajo diario de un científico supone. Las páginas que siguen ponen de manifiesto la larga lista de colaboradores de muchas partes del mundo que he tenido, tengo y espero tener. En ellas ha dominado la generosidad en las ideas, el afán en gran medida desinteresado por entender lo que ocurre e intentar llegar más lejos. Y todo ello en un ambiente de sinceridad, respeto y honestidad científica.

El tema central de mi discurso es la aplicación del análisis de Fourier a problemas recientes de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales tanto lineales como no lineales. Enlaza por tanto con el dado por el profesor Miguel de Guzmán en el año 1982 y que llevaba por título “*Impactos del Análisis Armónico*”. Miguel de Guzmán fue alumno de doctorado del profesor Alberto Calderón en la universidad de Chicago, y fue quien abrió nuestro país a la escuela de Análisis de Chicago, más concretamente a lo que se conoce como la escuela de Calderón y Zygmund y la llamada teoría de las integrales singulares. Debo a Miguel el haberme dedicado al Análisis. Su curso de licenciatura sobre las Ecuaciones en Derivadas Parciales fue determinante para mí. Como lo fue el ambiente en el entonces llamado Departamento de Ecuaciones Funcionales de la Universidad Complutense a cuyos seminarios, organizados en aquel momento por el profesor Alberto Dou y posteriormente por el también miembro de esta Academia, el profesor Jesús Ildefonso Díaz, asistía con cierta frecuencia. Estos seminarios, a los que solía ir con mi compañero de fatigas, el ahora profesor Carmelo Núñez, supusieron mi primer contacto con la investigación en matemáticas.

Otro de los miembros de dicha escuela de Chicago es mi director de tesis, el profesor Antonio Córdoba, quien realizó su tesis doctoral con el profesor Charles Fefferman. Como veremos en las páginas que siguen, tanto las integrales singulares como la que se conoce como la teoría de las integrales oscilatorias, originada por C. Fefferman y Elias Stein, juegan un papel fundamental en muchos de los resultados que presento. Ambas teorías son cruciales para entender el impacto que tanto el análisis armónico como el análisis de Fourier, distintas caras de una misma moneda, han tenido en el desarrollo espectacular de las ecuaciones en derivadas parciales lineales y no lineales de los últimos 70 años.

Pero hablaré no solo de integrales (de Fourier) sino también de series trigonométricas (o de Fourier), no en vano soy descendiente matemático de Antoni Zygmund¹. En particular, prestaré especial atención a

¹ A. Zygmund, de origen polaco, emigró a los Estados Unidos durante la Segunda Guerra Mundial. Fue el fundador de la Escuela de Análisis de Chicago, y tuvo entre sus muchos estudiantes de doctorado a Alberto P. Calderón y Elias M. Stein. Escritor de varios libros sobresalen entre ellos los dos volúmenes sobre series trigonométricas cuya primera edición es de 1935. Sucesivas reediciones han hecho que su impacto llegue hasta nuestros días.

las sumas trigonométricas con fases cuadráticas cuyo estudio se remonta al menos hasta Gauss y Riemann. Se debe a este último la función que lleva su nombre, ejemplo patológico de función continua y no derivable en (casi) ningún punto. Siendo un alumno de tesis de A. Córdoba era difícil sustraerse a la extrema importancia que para él tenían y aún tienen las llamadas sumas de Gauss². Tanto el cálculo de dichas sumas como la fórmula de reciprocidad cuadrática fue una de las lecciones estelares del curso que Antonio impartió en el verano de 1983 en Jarrandilla de la Vera (Cáceres). Estos cursos, diseñados y organizados por Miguel de Guzmán y Juan Carlos Benítez, supusieron un antes y un después para toda una generación de jóvenes (analistas) españoles de aquellos años entre los cuales me encuentro. En la lista de profesores he de citar a José García Cuerva y a José Luis Rubio de Francia³, causantes también del gran desarrollo que esta escuela ha tenido en nuestro país y con los que posteriormente tuve una estrecha relación en el periodo en el que realicé mi tesis doctoral en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid. Fue esta una etapa crucial en mi carrera. Y no solo por el aprendizaje continuo y directo con mi director de tesis, quien no escatimó el tiempo para enseñarme el oficio, sino también por el indirecto, ya que de alguna manera se aprendía *respirando*. No puedo dejar de mencionar a este respecto a Juan A. Barceló, Javier Duoandikoetxea y Alberto Ruiz con quienes tengo una relación que va mucho más lejos de los trabajos que hemos escrito juntos.

Como digo, el ambiente en el joven departamento de la Universidad Autónoma de Madrid (UAM) era muy enriquecedor. Y lo era no solo en el campo del análisis matemático, ya que la llegada como profesor en 1983 de Juan Luis Vázquez, también miembro de esta Academia, trajo consigo el mundo “*no lineal*”. Habiéndome educado en la tradición de lo abstracto y estructural de las matemáticas, y por qué no decirlo, en la *ideología* formalista tan en boga entonces y que tan acertadamente menciona Jesús Sanz-Serna en el discurso inaugural del año académico 2018-2019 de esta institución, fue una agradable sorpresa

² Y la propia función de Riemann, [37], [36].

³ Con José Luis y Anthony Carbery escribí mi primer artículo [32], precisamente sobre la sumación de la integral de Fourier. La muerte prematura de J.L. Rubio en 1988 fue sin lugar a duda un revés importante, tanto en lo personal como en lo científico, no solo para la generación de jóvenes a la que me he referido, sino para la también joven comunidad matemática de esos años.

descubrir que a las ecuaciones en derivadas parciales no lineales hay que ir desentrañándolas una a una. Las hay con nombre, como pueden ser la ecuación de los medios porosos (PME) o la de Korteweg-de Vries (KdV), y se puede estar tentado a pensar que apenas habrá unas cuantas, y que las que llevan nombre son representativas de clases de equivalencia amplias. Pero afortunadamente no es así, y aunque es obvio que la ecuación de KdV y la que se conoce como modificada de Korteweg-de Vries (mKdV) tienen muchos puntos en común, son lo suficientemente distintas como para tener cada una nombre propio. Tanto KdV como mKdV son apenas dos ejemplos que surgen al explorar el sorprendente universo de las ecuaciones de Euler, y estas últimas no dejan de ser una idealización matemática de las de Navier-Stokes a cuyo universo pertenece PME y a la que J.L. Vázquez dedicó, con resultados bien conocidos, una importante parte de su tiempo en esos años⁴.

La formación que recibí en este ambiente y la receptividad del profesor Carlos E. Kenig, algo por lo que siempre le estaré agradecido, me permitió obtener en 1988 el puesto de L.E. Dickson Instructor en la Universidad de Chicago. Allí coincidí con el profesor Gustavo Ponce. Una simple vista a mi curriculum académico da una idea del impacto que en mi carrera profesional ha tenido la relación con ambos. Más que una relación ha sido una apasionante aventura compartida que se mantiene hasta hoy. Nuestra primera gran aportación⁵ fue precisamente usar las técnicas de integrales oscilatorias para completar el problema de la estabilidad de la ola solitaria, fenómeno natural descrito por primera vez en 1834 por el ingeniero escocés John Scott Russell y modelado 60 años después por medio de la ecuación KdV. Como explico en

⁴ En particular, en la relevancia que tienen las soluciones autosemejantes a la hora de describir situaciones singulares en la mecánica de fluidos, principio fundamental que guía muchos de los trabajos del profesor Grigory I. Barenblatt, a quien se debe el nombre de las soluciones autosemejantes de PME. Como veremos más adelante, las soluciones autosemejantes son también un tema central en lo expuesto sobre la dinámica de los hilos de torbellino. Es la interacción de las mismas la que genera la existencia de un continuo de posibles escalas para describir el espectro de singularidades, algo que encaja con la teoría de la turbulencia desarrollada por Frisch y Parisi, [76], [75].

⁵ La última de nuestras aportaciones relevantes ha sido en colaboración con el profesor Luis Escauriáza con quien hemos encontrado una nueva vía, más flexible, para abordar distintas versiones del principio de incertidumbre. Este es uno de los retos del que hablaremos en las páginas que siguen.

[141] tanto KdV como mKdV describen los *solitones*, ondas no lineales cuya interacción se asemeja a la colisión elástica de partículas. Nuestro resultado es muy versátil y también se aplica a estas colisiones, ya que probamos que la dinámica en tiempos pequeños es esencialmente lineal y está controlada por las propiedades dispersivas del sistema. Para medir estas el análisis de Fourier es eficaz e indispensable.

Tras un estancia breve de nuevo en la UAM, en la que tuve la gran suerte de empezar a colaborar con la profesora Ana Vargas, me incorporé en 1993 a la Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea, donde he desarrollado la mayor parte de mi actividad y donde siempre he trabajado muy a gusto. Por un lado, gracias a la buena atmósfera y al nivel académico en análisis y ecuaciones en derivadas parciales: además del ya mencionado Duoandikoetxea, con el profesor Miguel Escobedo empecé a explorar el mundo de la ecuación de Dirac; con la profesora Adela Moyua cristalizó la colaboración con A. Vargas sobre la ecuación de Schrödinger; y con el profesor Luis Escauriaza hicimos la conexión entre los principios de incertidumbre de la mecánica cuántica y las cuestiones de unicidad de las ecuaciones en derivadas parciales, temas los tres que desarrollaré con más detalle en las páginas que siguen. Por otro lado, el buen clima laboral nos permitió, junto con el profesor Mikel Lezaun, reaccionar en los tiempos difíciles de principios de este siglo. En esa época los alumnos en matemáticas escaseaban y había un serio peligro de que la presencia de la sección de matemáticas en la Facultad de Ciencias de la UPV/EHU se redujera a algo anecdótico.

Afortunadamente no fue así y en el año 2008 el gobierno vasco dirigido por Juan J. Ibarretxe decide crear⁶ el Centro Vasco de Matemática Aplicada (BCAM, por sus siglas en inglés) siendo el profesor Enrique Zuazua su primer director. Tras un corto periodo en el que la dirección recae en el profesor Tomás Chacón, en 2013 me encargo de dirigir el centro, siendo esta una actividad de la que estoy particularmente satis-

⁶ No puedo dejar de citar en este punto la definitiva influencia que ha tenido el también miembro de esta institución, el profesor Pedro M. Etxenike, en el avance fundamental de la ciencia en el País Vasco en los últimos 40 años. Así mismo el alto nivel científico en análisis y en ecuaciones en derivadas parciales al que me he referido anteriormente permitió la creación de un centro de investigación en matemática aplicada.

fecho. Esta experiencia es un ejemplo más de cómo una buena gestión, en este caso realizada por la ingeniera Lorea Gómez y el competente equipo que construyó a su alrededor, junto con la financiación y las directrices científicas adecuadas, hacen que la investigación sea mucho más fácil, mejor y más fructífera.

Los agradecimientos no pueden acabar aquí. Por suerte he tenido una lista muy amplia de colaboradores sin los cuales la investigación que he realizado no sería posible. Las páginas que siguen muestran de manera clara la fundamental influencia que han tenido en mi trabajo. En estas mismas páginas se pone de manifiesto también lo mucho que me he beneficiado de la interacción con los estudiantes de doctorado que he tenido la suerte de dirigir a lo largo de los años. A todos quiero expresar mi más sincera gratitud.

Pero no quiero acabar este prólogo sin volver a la razón fundamental del mismo, que es la presentación del discurso ante esta Academia. El mismo está construido sobre la propuesta que hice en 2014 al European Research Council de una solicitud de financiación que la institución europea tuvo a bien concederme, algo de lo que estoy profundamente agradecido ya que ha supuesto un salto cualitativo importante de mi labor investigadora reciente. En esta última el apoyo en la experimentación numérica ha sido crucial, entre otras cosas debido a que el computador se torna indispensable para poder entender objetos como la ya mencionada función de Riemann

$$(1.1) \quad R(t) = \sum_j \frac{\sin tj^2}{j^2}.$$

No deja de parecerme sorprendente la capacidad que tienen las matemáticas para expresar de una forma sencilla y sucinta, como es la expresión (1.1), un mundo tan complejo como la trayectoria que describe la gráfica de la función $R(t)$ y que, salvo por una pequeña variación, se puede ver en la figura 1. Esta sorpresa es la que intento expresar en la sección 5.8 donde escribo: “...De esta forma se encuentra una relación algo inesperada. La función no diferenciable de Riemann aparece alrededor de 1860 como un objeto puramente analítico que desafía la propia noción de función continua. Siglo y medio después se encuentra una interpretación geométrica de dicha función, o mejor dicho de una pequeña modificación de la misma. Y esta interpretación viene motivada por un modelo matemá-

tico, que aunque bastante idealizado, surge de un intento de describir las estructuras coherentes (...) que aparecen en la turbulencia desarrollada por los fluidos. Finalmente este modelo idealizado es una ecuación no lineal de Schrödinger que presenta soluciones (ondas) (...) que aunque interactúan de forma no lineal, no rompen las simetrías inherentes al conocido como efecto de Talbot. Es a la postre este efecto, descrito por primera vez en 1836 como una ilustración de los fenómenos de interferencia y difracción de la luz, el que explica las propiedades geométricas de la función de Riemann. Por último conviene recordar (...) que la pequeña variación necesaria para describir la función de forma geométrica, ver figura 1, hace que la correspondiente curva pese a ser continua no tenga tangente en ningún punto, no así la función de Riemann que (...) es derivable en algunos puntos racionales. La existencia de fluidos con campos de velocidades que sean continuos pero no diferenciables en ningún punto, y que por tanto la forma de interpretar la velocidad de una partícula de fluido tenga que ser probabilista, es algo de una u otra forma aceptado”.

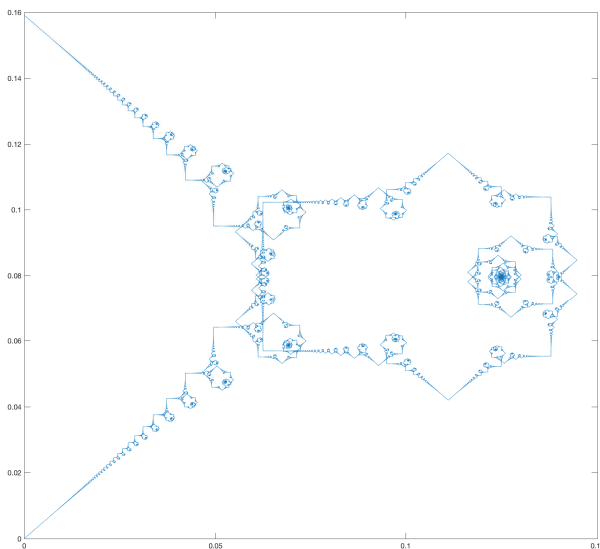


Figura 1: Gráfica de la función modificada de Riemann

$$\phi(t) = i \int_0^t \sum_j e^{i\tau j^2} d\tau = \sum_j \frac{e^{itj^2} - 1}{j^2}$$

Esta dificultad intrínseca de las matemáticas, por la que hay avances que tardan inexplicablemente demasiado tiempo en ser entendidos, y por tanto en ser aplicados, hace que el camino sea largo y como en cualquier otro ámbito de la investigación no exento de múltiples fraca-

sos. Por suerte el ambiente familiar en el que me eduqué de aprecio al estudio y al esfuerzo me ha dado la solidez necesaria para seguir siempre adelante. Pero esta solidez no es suficiente y pocas cosas hubieran sido posibles sin el apoyo continuo de Izaskun, Ainhoa e Iñaki.

Es una sana tradición que el candidato glose la labor realizada por el académico saliente, en este caso el profesor Pedro Jiménez Guerra, matemático español nacido el 18 de mayo de 1951 en Madrid y miembro de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales desde 1991. Es licenciado en Ciencias Empresariales por ICADE, además de doctor en Ciencias Matemáticas por la Facultad de Ciencias de la Universidad Complutense de Madrid habiendo sido su director de tesis el profesor Baltasar Rodríguez-Salinas Palero.

Fue el propio profesor Salinas quien el 6 de febrero de 1991 dio el discurso de contestación al presentado por el candidato y que llevaba por título: *“Origen y evolución de la integración vectorial”*. En esta contestación hace especial énfasis en las aplicaciones que los resultados obtenidos por el candidato habían dado lugar. Sobresalen sobre todo, y desde mi particular punto de vista, el cual es siempre subjetivo, aquellos sobre la extensión del teorema de Radon-Nykodim y más en concreto los alcanzados en el ámbito de los espacios localmente convexos.

La labor del profesor Jiménez Guerra hasta esos años gira principalmente en torno a los problemas de extensión de funciones aditivas y a diversos temas relacionados con la teoría de la medida. Posteriormente mostró su interés por problemas de optimización multiobjetivo y programación convexa, temas ambos de una gran actualidad en nuestros días. Estos trabajos son muchos de ellos fruto de la colaboración con antiguos alumnos, como por ejemplo los profesores A. Balbás, miembro correspondiente de esta institución, M. Ballvé y M. J. Muñoz-Bouzo.

Resumen

Tras analizar brevemente algunos aspectos relevantes del análisis de Fourier, presentamos tres nuevos retos sobre las aplicaciones del mismo a las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. El primero es en relación con la ecuación de Dirac y los modelos de confinamiento de partículas relativistas. El segundo trata sobre un nuevo método basado en técnicas de variable real, de los principios clásicos de incertidumbre como los de Hardy y Paley-Wiener. Finalmente el tercero versa sobre una ecuación en derivadas parciales geométrica que modeliza la dinámica de un hilo de torbellino (*vortex filament*). Este último lo desarrollamos con más detalle, estableciendo su conexión con el conocido como efecto de Talbot, un efecto óptico descrito en 1836 y cuya formalización matemática no ha tenido lugar hasta finales de los 80 del siglo pasado, y con la llamada función no diferenciable de Riemann, ejemplo de una función continua que no tiene derivada, o casi, en ningún punto.

2. Introducción

El hilo conductor de esta memoria es la íntima relación entre el análisis de Fourier y las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. Se podría pensar que esta afirmación es una obviedad ya que fue el propio Fourier quien utiliza la superposición de senos y cosenos para resolver una de las ecuaciones en derivadas parciales fundamentales, la de la Conducción del Calor, también conocida como ecuación de Fourier. Lo que posiblemente no sea tan obvio es que más de dos siglos después esta relación sigue siendo estrecha y fructífera sin haber perdido un ápice de su relevancia.

Esta relevancia estuvo al principio sembrada de una amplia polémica ya que como escribe J. Duoandikoetxea en [53] “[...] A falta de demostraciones generales de sus resultados, lo que Fourier nos legó no fue un teorema sobre la representación de una función en serie trigonométrica, sino un problema. Un problema en el que estaban implicados los conceptos de función, integral, suma de series y, posteriormente, tipo

de convergencia. La influencia de este problema en el desarrollo de los conceptos del análisis matemático fue considerable...”.⁷ De tal forma que el método propuesto por Jean Baptiste Fourier al Institut de France en 1807 en la memoria titulada “*Thèorie sur la propagation de la chaleur dans les solides*” sigue siendo una de las herramientas fundamentales del análisis matemático con una versatilidad que supera con mucho el campo de las ecuaciones diferenciales y, como no podía ser de otra manera, está además detrás de multitud de aplicaciones de las que nos beneficiamos en nuestra vida cotidiana⁸.

Sin embargo, no parece obvio por qué el método de Fourier sigue siendo útil en la actualidad a la hora de resolver los nuevos retos de las ecuaciones diferenciales y de analizar tanto cualitativa como cuantitativamente sus soluciones. La razón de ello es que el principio de superposición, que aparece intrínsecamente ligado a las ideas propuestas por Fourier, no es aplicable cuando se intentan resolver ecuaciones no lineales. Y las ecuaciones no lineales, empezando por las emblemáticas ecuaciones de Euler y de Navier-Stokes de la mecánica de fluidos, y siguiendo por las que aparecen de forma natural en el ámbito de la geometría tanto riemana como no riemana, han sido las causantes de una parte importante de los avances de las matemáticas en los últimos 50 años, atrayendo a una amplia variedad de investigadores. A pesar de tratarse de problemas no lineales el método de Fourier es una de las herramientas clave, aunque por supuesto no la única.

En esta memoria presentaremos tres escenarios y retos distintos, todos ellos con una gran actividad investigadora detrás, en los que el análisis de Fourier aparece de forma natural y se muestra como una, de nuevo no la única, de las técnicas indispensables para la resolución de los problemas planteados. Los tres escenarios son los siguientes:

⁷ Lo tratado en la sección 5.2 es un buen ejemplo de lo afirmado por Duoandikoetxea.

⁸ El éxito más reciente sea tal vez la aplicación de la teoría de Calderón y Zygmund realizada por el profesor Yves Meyer y sus colaboradores por medio de las llamadas wavelets. Estas últimas han sido utilizadas en una amplia variedad de escenarios, tan diversos como el análisis armónico computacional, la compresión de datos, la reducción de ruido, las imágenes médicas, la deconvolución de las imágenes del telescopio espacial Hubble, y la reciente detección (LIGO) de ondas gravitacionales creadas por la colisión de dos agujeros negros.

1. **Perturbaciones singulares del operador de Dirac;**
2. **Principios de incertidumbre y aplicaciones;**
3. **La ecuación del hilo de torbellino (VFE).**

En (1) se tratan hamiltonianos electromagnéticos singulares para las ecuaciones de Dirac y Schrödinger. En particular en el caso relativista la singularidad tiene el soporte en una superficie y se describe matemáticamente por una delta de Dirac con una amplitud dada por la constante de acoplamiento λ . Nos centramos en las propiedades que ha de tener λ para la existencia de autovalores, y estudiamos un problema de optimización asociado al posible tamaño del espectro puntual. Este es un primer paso para abordar los problemas de confinamiento de partículas relativistas, en particular del *MIT bag model*, modelo llamado así por ser profesores de ese centro americano quienes lo propusieron en los años 70 del siglo XX.

En (2) abordamos principios de incertidumbre clásicos, como el conocido como principio de incertidumbre de Hardy o el teorema de Paley-Wiener, desde un punto de vista innovador gracias a la conexión que establecemos con la cuestión de la unicidad de ecuaciones en derivadas parciales dispersivas y parabólicas. Este punto de vista resulta ser muy flexible al no hacer uso de las herramientas del análisis complejo, lo que permite entre otras aplicaciones entender el caso del laplaciano discreto.

En (3) estudiamos la que se conoce como la conjetura de Frisch-Parisi [76], [75]. Esta conjetura, inicialmente propuesta para fluidos turbulentos, también puede ser planteada como un problema meramente analítico que atañe por ejemplo a funciones que son continuas pero no derivables en ningún punto, en el espíritu de la función no diferenciable de Riemann (1.1). Analizamos la conjetura en la ecuación del hilo de torbellino (*Vortex Filament Equation*, VFE) que es un modelo no lineal directamente relacionado con la mecánica de fluidos. Los hilos se describen matemáticamente por medio de curvas alabeadas que no cambian su longitud, y que se mueven en la dirección del vector binormal con una velocidad que es proporcional a su curvatura. Ejemplos sencillos de construir, y que no se deforman a lo largo de la evolución, son las rectas, los círculos y las hélices. En nuestro caso tienen especial relevancia las curvas con esquinas, y en particular los polígonos regulares.

La VFE es una ecuación en derivadas parciales geométrica no lineal que se propone como un modelo sencillo para la evolución de los filamentos de vorticidad (hilos de torbellino), y que captura a nivel cualitativo, características relevantes de la turbulencia. Por ejemplo, este modelo predice el cambio intermitente en los ejes de simetría del filamento, fenómeno que se ha observado experimentalmente en el caso de chorros turbulentos que emanan de boquillas con forma de un polígono regular como el cuadrado o el triángulo equilátero, véase por ejemplo [80], [81] y [86]. El modelo también predice la creación de estructuras poligonales con un número arbitrario de lados. Demostramos que este número depende del valor preciso de algunas sumas trigonométricas bien conocidas, las llamadas sumas de Gauss, encontrando de esta forma la existencia de una conexión directa con el fenómeno de Talbot en óptica. Las simulaciones numéricas que hemos realizado sugieren que las diferentes esquinas dan lugar a torbellinos que interactúan entre sí de forma en apariencia caótica. Probamos que detrás de este comportamiento caótico hay una estructura algebraica que controla la dinámica y que permite entender los fractales que, como el exhibido en la figura 1, aparecen de manera natural. Estos fractales, o siendo más precisos multifractales, son consistentes con lo conjeturado por Frisch y Parisi.

Los tres temas tienen en común que se estudian haciendo un uso moderno de las técnicas clásicas del análisis de Fourier tales como: las integrales oscilatorias y sumas de Gauss para describir la dinámica de los hilos de torbellino, los operadores integrales singulares como la integral de Cauchy para estudiar el confinamiento de partículas cuánticas relativistas, y las llamadas estimaciones de Carleman para probar distintas versiones del principio de incertidumbre.

En las cuatro próximas secciones de esta introducción hacemos una breve descripción de estas técnicas. Empezamos con lo que Miguel de Guzmán llama “*la herramienta de Fourier*” ([45], p. 28). Es decir, el procedimiento que encuentra Fourier para resolver la ecuación que lleva su nombre, y que describe la propagación del calor en un cuerpo finito o infinito por medio de una relación (ecuación) entre la variación temporal de la temperatura en un punto cualquiera del cuerpo y su variación espacial. Fue el propio Fourier quien propuso la ecuación introduciendo la noción de flujo, una importante aportación conceptual ([74], sección 429), hasta el punto que Arnold Sommerfeld califica como “*Biblia de la Física Matemática*” el libro la *Thèorie analytique*

de la chaleur, también escrito por Fourier, publicado en 1822, y en el que dicho concepto es una pieza clave. La herramienta o método de Fourier resultó ser muy útil, no solo para la resolución de una amplia variedad de ecuaciones en derivadas parciales, sino para abordar otros muchos problemas en matemáticas. La razón última es que se propone la descomposición de cualquier función⁹ en sus armónicos elementales, siendo la solución para cada uno de estos armónicos fácil de calcular. Finalmente, la solución general se obtiene por el principio de superposición al tratarse de un fenómeno lineal.

Las series e integrales de Fourier aparecen por tanto como un método puramente matemático de resolución de ecuaciones diferenciales. Dada una función se transforma en otra para la que la solución es sencilla y

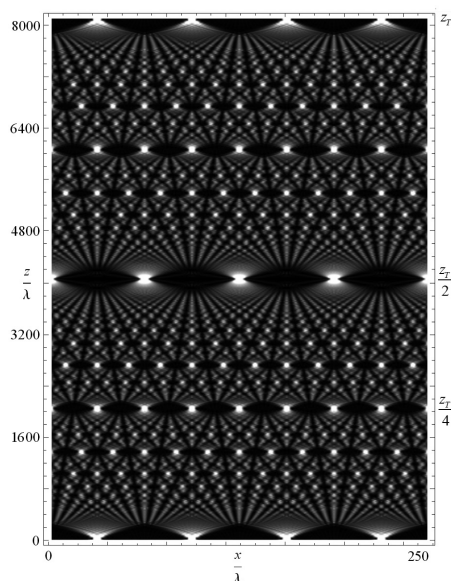


Figura 2: Una imagen del efecto de Talbot. Muestra la luz que recibe un observador o una pantalla situada a diferentes distancias de una rejilla periódica. La parte inferior representa la rejilla mencionada, que recibe la luz desde abajo. Vemos que en el extremo superior a distancia z_T esta rejilla se repite. A distancias intermedias se forman diferentes patrones de luz, siendo reconocibles aquellas que son múltiplos racionales de z_T . Figura de Ben Goodman con licencia CC BY-SA 3.0 https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Optical_Talbot_Carpet.png.

⁹ Aquí Fourier da otro gran salto conceptual en la definición que hace de función.

posteriormente se hace la transformación inversa. Vemos, sin embargo, en las secciones 2.2 y 2.3, que la transformada de Fourier de una función se puede medir¹⁰. De hecho, dicha transformación aparece como una deformación continua de la identidad, algo que nos resultará muy útil en el enfoque que damos de los principios de incertidumbre. En 2.2 la variable de deformación es el tiempo, siendo el problema físico el de la dinámica de una partícula cuántica libre. En 2.3, el contexto es la teoría de difracción de la luz de Fraunhofer y en este caso la variable de deformación es espacial, la distancia al objeto de difracción. Evidentemente ambos puntos de vista están relacionados, siendo la conexión la teoría de difracción de Fresnel, que es a su vez el punto de partida para explicar el efecto de Talbot (figura 2) que abordamos en secciones posteriores y que es el causante de la fractalidad exhibida en la figura 2. Hay que recordar a este respecto que Cantor llegó a la construcción de su célebre conjunto ternario por sus investigaciones sobre la forma que puede adoptar el conjunto de puntos de divergencia de una serie de Fourier.

La convergencia de las series e integrales de Fourier es una cuestión analítica fundamental, como bien reflejan tanto Guzmán en [45] como Duoandikoetxea en [53]. Asociada a este problema hay otra transformación indispensable, la llamada de Hilbert, que presentamos en la sección 2.4. Es su generalización a dimensión tres, la conocida como transformada de Cauchy-Clifford, la que ha resultado ser la adecuada para avanzar en el problema matemático asociado al confinamiento de partículas relativistas que analizamos en la sección 3.1. En dicha sección, motivados por intentar entender cómo se organiza la naturaleza, damos nuevos usos a herramientas clásicas. Un ejemplo más de lo expuesto por Fourier en el *Discourse préliminaire* de su Teoría Analítica del Calor [74]:

“El estudio profundo de la naturaleza es la fuente más fecunda de los descubrimientos matemáticos”.

Uno de los descubrimientos más sorprendentes, desde mi punto de vista similar en importancia al del conjunto fractal de Cantor, es el del llamado conjunto de Kakeya: un conjunto que tiene medida de cero y que sin embargo contiene una recta en cualquier dirección. La feliz

¹⁰ Al menos su módulo o amplitud siendo el cálculo de la fase una cuestión mucho más delicada.

conexión de este objeto geométrico con la cuestión de la sumabilidad o convergencia de las series e integrales de Fourier fue establecida en 1971 por Charles Fefferman, cuando apenas contaba con 21 años, en su célebre trabajo [72]¹¹. La existencia de dicho conjunto fue probada por Abram Besicovitch en 1919 [24]. Entender el papel que este conjunto juega en la naturaleza es uno de los mayores retos del análisis de Fourier, reto que ha dado lugar a desarrollos insospechados del análisis matemático, empezando por el propio trabajo de Fefferman y continuando con los de A. Córdoba, P. Tomas y E. Stein, J. Bourgain, T. Wolff, T. Tao y un largo etcétera que aún continúa. Mi aportación a esta tarea ha sido el artículo que escribí en 1998 en colaboración con T. Tao y A. Vargas, en el que mejoramos la marca establecida por Stein y Tomas en 1975. Todos estos resultados se encuadran dentro de la ya mencionada teoría de las integrales oscilatorias, la más simple de las cuales es precisamente la integral que define la transformada de Fourier (2.12). Es momento ya de empezar a mostrar algunos detalles relevantes de las matemáticas que hay detrás de las mismas.

2.1 La herramienta de Fourier

La forma habitual de abordar una ecuación en derivadas parciales como la del calor

$$(2.1) \quad \partial_t u = \frac{1}{2} \Delta u \quad x \in \mathbb{R}^n \quad t > 0$$

fijando una condición inicial $u(x, 0) = u_0(x)$, y suponiendo que la solución esté acotada en el infinito, es primero buscar un número amplio de soluciones. Fourier inventó para ello el método de separación de variables que lleva de forma inmediata a resolver el problema de autovalores

$$(2.2) \quad \Delta v(x) = -\mu v(x) \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

donde de nuevo se restringen las soluciones a aquellas que están acotadas y por tanto $\mu \geq 0$. En dimensión uno la solución se escribe como combinaciones lineales de senos y cosenos.

¹¹ Véase también el excelente vídeo <https://www.youtube.com/watch?v=j-dce6QmVAQ>.

La siguiente observación es que el problema es lineal con lo que la superposición de soluciones es también una solución. Un momento de reflexión muestra que si se busca una solución general de (2.1) la superposición finita de senos y cosenos no puede ser la respuesta, por lo que se está abocado a considerar, o bien series infinitas si las condiciones de frontera son periódicas, o bien integrales que es lo adecuado en el caso que nos ocupa.

Resulta más cómodo utilizar la notación compleja lo que nos lleva a considerar, lo hacemos ya en cualquier dimensión, la familia de soluciones de (2.2)

$$a(\xi)e^{ix \cdot \xi}$$

con $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $|\xi|^2 = \mu$ y $a(\xi) \in \mathbb{C}$ un escalar complejo cualquiera. Asociada a esta expresión se obtiene fácilmente la familia de soluciones de (2.1)

$$e^{-\frac{t}{2}|\xi|^2 + ix \cdot \xi}.$$

El principio de superposición da entonces la expresión

$$\int_{\mathbb{R}^n} a(\xi)e^{-\frac{t}{2}|\xi|^2 + ix \cdot \xi} d\xi.$$

Luego el problema se reduce a lo que se conoce como un problema inverso, dado $u_0(x)$ encontrar $a(\xi)$ tal que

$$(2.3) \quad u_0(x) = \int_{\mathbb{R}^n} a(\xi)e^{ix \cdot \xi} d\xi.$$

La fórmula de este inverso, la cual daremos en la siguiente sección, es una de las grandes aportaciones de Fourier y cuya validez él no se plantea en absoluto porque al menos en el caso de series se reduce al cálculo de los llamados coeficientes de Fourier que miden *áreas definidas*.

Hemos planteado en apenas unas líneas el problema de Fourier al que se refiere Duoandikoetxea: para qué funciones $u_0(x)$ y $a(\xi)$ el método anterior es válido. Entre otras cosas esto implica entender el propio concepto de función, cuál es la noción adecuada de integral, y por tanto de área, y en qué sentido se entiende la convergencia de la

misma. Si pensamos que la noción apropiada de convergencia, que al final estaba ligada a la propia noción de solución de (2.1), no se resolvió hasta el desarrollo de la teoría de distribuciones por Schwartz en los años 50 del siglo XX, tenemos un claro ejemplo de cómo la construcción de las matemáticas como una estructura sólida basada en el rigor convive con la aplicación de las mismas, aunque dicha estructura esté todavía construida parcialmente. No en vano el método descubierto por Fourier fue usado desde el principio y de forma muy fructífera por físicos e ingenieros.

Además, a los problemas anteriores hay que añadir al menos otro de gran importancia, el problema de la unicidad. Es decir, probar que dado $u_0(x)$ existe una única $a(\xi)$ que verifica (2.3). Evidentemente este problema es equivalente al de la unicidad de la solución de (2.1), cuestión nada obvia como podíamos haber deducido del hecho de que de las soluciones obtenidas por variables separadas nos hemos desentendido de aquellas con crecimiento exponencial

$$e^{\frac{t}{2}|\xi|^2 + x \cdot \xi}.$$

Veremos más adelante que estas soluciones de crecimiento exponencial juegan un papel crucial en los teoremas de unicidad, y por tanto en el principio de incertidumbre, del que nos ocuparemos en la sección 4. Más en concreto, en lo que se conocen como desigualdades de Carleman y en la construcción de los llamados pesos de Carleman.

2.2 La transformada de Fourier como un operador de scattering en la variable temporal

En el contexto de esta memoria existe otra forma de presentar la transformada de Fourier, que nos resultará muy útil a la hora de hablar de la ecuación del hilo de torbellino. El punto de partida es otra de las ecuaciones fundamentales de la física matemática, la de la partícula libre de Schrödinger, pieza clave a la hora de describir la mecánica cuántica no relativista,

$$(2.4) \quad \partial_t u = \frac{i}{2} \Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R},$$

ecuación a la que hay que añadir la condición inicial $u(x, 0) = u_0(x)$.

La construcción de la solución la haremos basándonos en las simetrías elementales del conjunto de soluciones de (2.4). La primera de ellas es que gracias a la regla de Leibniz si $v(x, t)$ con $x \in \mathbb{R}$ es solución, entonces

$$u(x_1, \dots, x_n, t) = v(x_1, t)v(x_2, t) \dots v(x_n, t)$$

para $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ también lo es. Este hecho nos permite reducirnos al caso unidimensional. La segunda es que para soluciones que decaigan de forma adecuada en el infinito, se tiene la siguiente *ley de conservación*

$$(2.5) \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) dx = 0.$$

La tercera es que si $\lambda > 0$ y u es solución, entonces

$$u_\lambda(x, t) = \frac{1}{\lambda} u\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{t}{\lambda^2}\right)$$

es también una solución, con la propiedad extra de que $\int_{\mathbb{R}} u_\lambda dx = \int_{\mathbb{R}} u dx$ para cualquier λ . Por simetría parece natural pensar que las soluciones que verifiquen que

$$u_\lambda = u \quad \text{para todo } \lambda > 0,$$

deben ser particularmente relevantes. A estas soluciones se las llaman autosemejantes y, como veremos en la sección 5, juegan efectivamente un papel estelar. Es fácil concluir que una tal solución autosemejante ha de ser de la forma

$$(2.6) \quad u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} G\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right),$$

lo que nos permite reducir el problema a buscar una función G solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$(2.7) \quad G'' - i(xG' + G) = 0,$$

que se puede integrar una vez. Obtenemos de esta forma

$$(2.8) \quad G' - ixG = a,$$

para algún $a \in \mathbb{C}$. La elección $a=0$ es particularmente sencilla, ya que imponiendo $\int G = 1$ obtenemos¹²

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} e^{\frac{i}{2}x^2},$$

habiendo usado la llamada integral de Fresnel $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi i}$. Hemos construido de esta forma la *solución fundamental*

$$(2.9) \quad u_f(x, t) = \frac{1}{(2\pi i t)^{n/2}} e^{\frac{i}{2t}|x|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

El siguiente paso es utilizar la invarianza por traslaciones de (2.4) junto con el principio de superposición para obtener la familia de soluciones

$$\frac{1}{(2\pi i t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} a(y) e^{\frac{i}{2t}|x-y|^2} dy.$$

Es un ejercicio relativamente fácil concluir que la elección $a(y) = u_0(y)$ da formalmente la solución buscada. De nuevo la unicidad es una cuestión que puede ser muy delicada pero que, como en el caso de la ecuación del calor (2.1), es sencilla si se suponen cotas superiores adecuadas en el crecimiento de la solución.

Observemos que desarrollando el cuadrado en la expresión integral anterior podemos escribir

$$(2.10) \quad u(x, t) = \frac{1}{(2\pi i t)^{n/2}} e^{\frac{i}{2t}|x|^2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\frac{x}{t} \cdot y} e^{\frac{i}{2t}|y|^2} u_0(y) dy.$$

Sustituyendo para tiempos grandes $e^{\frac{i}{2t}|y|^2} u_0(y)$ por $u_0(y)$ concluimos que

$$(2.11) \quad u(x, t) \sim u_f(x, t) \hat{u}_0\left(\frac{x}{t}\right),$$

definiendo la *transformada de Fourier* de u_0 como

$$(2.12) \quad \hat{u}_0(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot y} u_0(y) dy.$$

¹² $\sqrt{i} = e^{i\pi/4}$.

Uno de los teoremas básicos del análisis de Fourier es el cálculo de su inversa dada por (cf.(2.3))

$$(2.13) \quad u_0(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \hat{u}_0(\xi) d\xi.$$

Formalmente es fácil probar que existe otra ley de conservación: la energía, o la masa según el contexto físico de que se trate, se conserva

$$(2.14) \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^2 dx = 0,$$

de tal forma que el resultado preciso en (2.11) es

$$(2.15) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{\frac{-i}{2t}|\cdot|^2} u(\cdot, t) - \frac{1}{(it)^{n/2}} \hat{u}_0\left(\frac{\cdot}{t}\right)\|_{L^2} = 0,$$

siendo $\|f\|_{L^2}^2 := \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx$. Como consecuencia se obtiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}_0(x)|^2 dx.$$

La identidad (2.15), o más concretamente (2.10), va a jugar un papel fundamental en el futuro cuando estudiemos con técnicas de ecuaciones en derivadas parciales distintas versiones del principio de incertidumbre de Heisenberg.

La fórmula (2.13) junto con (2.11) nos permite en principio calcular el valor inicial u_0 a partir de los valores de la solución para tiempos grandes. Sin embargo, experimentalmente la cantidad que se mide es $|u(x, t)|^2$, por lo que la información es incompleta ya que falta *la fase* para poder determinar $u(x, t)$. Surge así lo que se conoce como el problema de la fase, problema que es común a las ecuaciones de Schrödinger tanto lineales como no lineales y con el que habremos de enfrentarnos más adelante.

Hay otras dos simetrías asociadas a (2.4) que nos resultarán muy útiles en el estudio de la ecuación del hilo de torbellino. Una de ellas es la que se conoce como la transformación conforme, que es el equivalente en el contexto de Schrödinger a la bien conocida transformación

de Kelvin para la ecuación de Laplace, o a la de Appell para la ecuación del calor. En concreto, un cálculo directo prueba que si $u(x, t)$ es una solución de (2.4) entonces

$$(2.16) \quad v(x, t) = \mathcal{T}u := \frac{1}{(it)^{n/2}} e^{\frac{i}{2t}|x|^2} \bar{u}\left(\frac{x}{t}, \frac{1}{t}\right),$$

es también una solución que verifica que $\bar{v}(x, 0) = \hat{u}_0(x)$. Obsérvese que

$$\mathcal{T}^2 = 1$$

lo que de hecho permite probar la fórmula de inversión de la transformada de Fourier (2.13).

Finalmente, mencionaremos las transformaciones de Galileo: si $u(x, t)$ es solución de (2.4) y $\nu \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$(2.17) \quad u_\nu(x, t) := e^{-it|\nu|^2 + i\nu \cdot x} u(x - \nu t, t)$$

es también solución. Es un ejercicio sencillo probar que si

$$u_\nu(x, t) = u(x, t) \text{ para todo } \nu$$

entonces $u(x, t)$ es un múltiplo de la solución fundamental u_f . Esta sencilla observación nos resultará muy útil a la hora de resolver la ecuación del hilo de torbellino para polígonos regulares y probar en este contexto el efecto de Talbot, ver [38], [47] y [60].

2.3 La transformada de Fourier como un operador de scattering en las variables espaciales

Existe otra forma de ver la transformada de Fourier como un operador de scattering, esta vez más ligada al teorema espectral y a la medida espectral asociada al operador laplaciano. Como hemos visto hay soluciones acotadas de (2.2) que no son nulas. Esto implica que la ecuación, llamada de Helmholtz,

$$(2.18) \quad \Delta u + k^2 u = f$$

no tiene solución única por ejemplo si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, es decir, si $\int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 dx$ es finita. Una de las formas de determinar una solución particular es por el llamado *limiting absorption principle*, que consiste en tomar un parámetro $\epsilon > 0$ y considerar la, en este caso única solución, u_ϵ de

$$(2.19) \quad \Delta u_\epsilon + (k^2 + i\epsilon)u_\epsilon = f.$$

Por simplicidad trabajaremos en dimensión tres. Siguiendo argumentos muy similares a los esbozados anteriormente, y utilizando la invarianza por rotaciones de (2.2) se obtiene la expresión

$$u_\epsilon = \frac{-1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{\sqrt{-i\epsilon - k^2}|x-y|}}{|x-y|} f(y) dy,$$

que en el límite da¹³

$$u^+ = \frac{-1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} f(y) dy.$$

De hecho, la función $\frac{-1}{4\pi} \frac{e^{ik|x|}}{|x|}$ juega en (2.18) un papel análogo al de u_f en (2.4). Como hicimos en el caso de la ecuación de Schrödinger nos interesa saber cuál es el comportamiento asintótico de u^+ . Observando que $|x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2x \cdot y$, y suponiendo por ejemplo que f es de soporte compacto, es fácil concluir con un sencillo desarrollo de Taylor que

$$(2.20) \quad u^+ \sim \frac{-1}{4\pi} \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ik \frac{x}{|x|} \cdot y} f(y) dy = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \hat{f}\left(k \frac{x}{|x|}\right).$$

La ecuación (2.19) aparece de manera natural en muchos contextos al ser la que verifican las ondas armónicas en el tiempo. En concreto, el comportamiento asintótico que acabamos de escribir es análogo al que se hace en la aproximación de Fraunhofer de la difracción de la luz por un obstáculo. En esta aproximación tanto la pantalla en la que se mide la intensidad de la luz, como la fuente luminosa están suficientemente lejos del obstáculo. Para zonas más cercanas a la pantalla hay que usar

¹³ Si $\epsilon < 0$ se construiría u^- con el correspondiente cambio de signo en la fase.

la llamada difracción de Fresnel, que tiene en consideración el siguiente término del desarrollo de Taylor, que es cuadrático. La difracción de Fresnel es precisamente la que explica el efecto de Talbot que nos aparecerá más adelante, y es la aparición de estos términos cuadráticos la razón de que, tras las normalizaciones oportunas, (2.4) sea un buen modelo matemático para describir dicho efecto, [22], [23], [98]. En este caso la variable temporal no es otra que la distancia al obstáculo.

Parece natural preguntarse si existe un resultado similar a (2.15) en este contexto. La respuesta es afirmativa, pero requiere más trabajo. Nos limitaremos a decir cuál debería ser en este caso la energía, es decir cuál es el espacio de funciones que juega el papel equivalente a L^2 en (2.15). Se trata del espacio de Agmon-Hörmander, que es un caso particular de los que se conocen como espacios de Morrey-Campanato. En concreto en [1] y [100] se prueba que si por ejemplo f además de estar en L^2 tiene su soporte en un conjunto acotado Ω entonces

$$(2.21) \quad \sup_{R,k} \frac{1}{R} \int_{|x| \leq R} k|u^+|^2 + |\nabla u^+|^2 dx \leq C \text{diam}(\Omega) \int |f|^2,$$

siendo $\text{diam}(\Omega)$ el diámetro de Ω .

Este tipo de desigualdad *funcional* es un ejemplo particular de lo que se llaman desigualdades uniformes de Sobolev, ya que la constante C es independiente del número de onda k que aparece en el lado de la izquierda de la desigualdad. Como veremos en la sección 3 este tipo de desigualdades juegan un papel clave en la resolución de las ecuaciones en derivadas parciales tanto lineales como no lineales. Para estas últimas los espacios de Lebesgue L^p son los naturales, mientras que en el caso lineal resultan muy útiles las llamadas desigualdades con peso. Estas son de la forma

$$(2.22) \quad \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_\epsilon|^2 + k|u_\epsilon|^2) \omega_1 dx \leq c(\omega_1, \omega_2) \int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 \omega_2 dx,$$

para ciertas constantes $c(\omega_1, \omega_2)$. Un problema importante y de gran dificultad es encontrar condiciones necesarias y suficientes en ω_1 y en ω_2 para que (2.22) sea cierta. Este es de hecho un problema abierto, véase [19]. A partir de (2.21) y usando (2.20) se obtiene fácilmente

$$(2.23) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} |u^+(x)|^2 dx = \frac{\pi}{2} \int_{|\xi|=k} |\hat{f}(\xi)|^2 dS(\xi),$$

y análogamente

$$(2.24) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} |u^+(x) - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \hat{f}(k \frac{x}{|x|})|^2 dS_x = 0,$$

que son las identidades básicas a partir de las cuales se puede demostrar el teorema espectral para el operador laplaciano. Esta es la forma natural de construir la transformada de Fourier en el contexto del análisis funcional.

Conviene resaltar que (2.23) y (2.24) se pueden probar usando métodos elementales. Para ello se multiplica a ambos lados de la ecuación por funciones (multiplicadores) adecuadas, y tras sucesivas integraciones por partes se utiliza la desigualdad de Cauchy-Schwarz para concluir el resultado. La ventaja de este procedimiento es que se generaliza sin dificultad a otros operadores distintos al laplaciano, en particular a los operadores de Schrödinger

$$-\Delta + V.$$

En este caso, particular importancia tiene la elección en (2.22) de $\omega_1 = |V|^{1/2}$ y $\omega_2 = 1/\omega_1$, ya que permite llevar adelante lo que se conoce como *el método de Birman-Schwinger*, que como veremos en la sección 3 se adapta muy bien al caso relativista en el que Δ se sustituye por el operador de Dirac.

2.4 La transformada de Hilbert y el operador de Cauchy

Recordemos (2.7). La elección $a = 0$ en (2.8) la hicimos por simplicidad. La razón de por qué es la adecuada se basa en el hecho de que la solución u_f construida de esta forma verifica la propiedad

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u_f(x, t) = \delta,$$

siendo δ la delta de Dirac, una medida de Radon positiva que actúa sobre funciones continuas f

$$\langle \delta, f \rangle = f(0).$$

De igual forma se puede considerar $a \neq 0$, o simplemente $a = 1$.

La renormalización natural ahora es $\int G = 0$, lo que permite obtener otra solución linealmente independiente de (2.7) que es en este caso impar. Cabe preguntarse cuál será el valor en $t = 0$ de la solución así obtenida. De (2.6) es fácil concluir que ha de ser impar y homogénea de grado -1, es decir ha de ser un múltiplo de

$$\text{v.p. } \frac{1}{x},$$

la distribución que actúa sobre funciones f regulares

$$\langle \text{v.p. } \frac{1}{x}, f \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} \frac{f(x)}{x} dx = \int_{|x| < 1} \frac{f(x) - f(0)}{x} dx + \int_{|x| > 1} \frac{f(x)}{x} dx.$$

Es fácil calcular la transformada de Fourier de esta distribución ya que al ser impar

$$\langle \text{v.p. } \frac{1}{x}, e^{ix\xi} \rangle = i \text{Im} \langle \text{v.p. } \frac{1}{x}, e^{ix\xi} \rangle,$$

y al ser homogénea basta hacer el cálculo para $\xi = 1$. Así,

$$\langle \text{v.p. } \frac{1}{x}, e^{ix} \rangle = -i \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} dx = -i\pi.$$

Poniendo todo junto obtenemos

$$(2.25) \quad \widehat{\frac{1}{\text{v.p. } (\cdot)}}(\xi) = -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{sgn}(\xi),$$

siendo $\text{sgn}(\xi)$ la función signo. Por otro lado, de la propia definición se obtiene que $\hat{\delta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

La distribución $\text{v.p. } \frac{1}{x}$ aparece de forma natural en muchos contextos, como por ejemplo en el estudio de las funciones analíticas en el semiplano. En efecto, si f es una función de variable real e integrable, entonces

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{y - z} dy$$

define una función analítica tanto en el semiplano superior $\text{Im } z > 0$, como en el inferior $\text{Im } z < 0$. Una pregunta natural¹⁴ es cuáles son los valores de $u(z)$ en la frontera $\text{Im } z = 0$. Dado que

$$\frac{1}{\xi + i\eta} = \frac{\xi - i\eta}{\xi^2 + \eta^2}$$

es sencillo probar la que se conoce como fórmula de Plemelj,

$$\lim_{\eta \rightarrow \pm 0} u(\xi + i\eta) = \frac{1}{2} (f(\xi) \pm iHf(\xi))$$

siendo

$$Hf(x) = \text{v.p.} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{x - y} dy$$

la transformada de Hilbert. De la definición concluimos que H es un operador antisimétrico y de (2.25) que $H^2 = -1$. Por tanto H es una isometría en $L^2(\mathbb{R})$.

La fórmula de Plemelj es válida no solo en el caso del semiplano sino para cualquier dominio regular del plano complejo. De forma análoga a la transformada de Hilbert se define entonces un operador integral singular que se conoce como el operador de Cauchy. Esta definición se puede extender a dimensiones mayores por medio del álgebra de Clifford, dando lugar al operador de Cauchy-Clifford que nos aparecerá en la próxima sección 3.1 asociado al operador de Dirac. En ella usaremos la caracterización de la esfera como el único dominio acotado para el que el operador de Cauchy-Clifford es una isometría.

¹⁴ El llamado problema de Riemann-Hilbert.

3. Perturbaciones singulares de la ecuación de Dirac

Nos referimos a la ecuación

$$(3.1) \quad \mathcal{H}_D = \alpha \cdot \left(\frac{1}{i} \nabla + A(x) \right) + m\beta + \mathbb{V}_D(x), \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

con $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ y β las matrices de Pauli-Dirac, el potencial $\mathbb{V}_D(x)$ es una matriz 4×4 hermítica, $A(x) \in \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial real, y $m \geq 0$ la masa. Las matrices α_j , con $j=1,2,3$ y β anticonmutan dos a dos y su cuadrado es la identidad. Llamaremos $\mathcal{H}_0 = \alpha \cdot \frac{1}{i} \nabla + m\beta$ al operador de Dirac libre. \mathcal{H}_D y \mathcal{H}_0 actúan sobre spinors $u(x) \in \mathbb{C}^4$.

Nuestro interés se centra en potenciales \mathbb{V}_D y A cuyos tamaños, medidos en espacios de funciones adecuados y que dependen de las propiedades específicas del operador libre \mathcal{H}_0 , no dependan de los cambios de escala. Es decir, dado $\nu > 0$ el tamaño tanto de $A^\nu = \nu A(\nu x)$ como de $\mathbb{V}_D^\nu = \nu \mathbb{V}_D(\nu x)$ es independiente de la escala ν . Medido puntualmente este comportamiento *crítico* es del tipo $1/|x|$. Recordemos que si $A = 0$ y $\mathbb{V}_D(x) = \frac{\nu}{|x|} \mathbf{1}$, siendo $\mathbf{1}$ la matriz identidad, obtenemos el potencial de Coulomb. Sorprendentemente el potencial de Coulomb aún plantea cuestiones analíticas relevantes, tanto en lo que se refiere a probar que da lugar a un operador autoadjunto, como en la caracterización del espectro. De hecho, encontrar cuáles son las desigualdades funcionales¹⁵ que determinan ambas propiedades ha dado lugar a un buen número de trabajos relevantes desde las aportaciones pioneras de Rellich y Kato en los años 50 y 60 del pasado siglo hasta nuestros días.

La principal razón por la cual este no es un problema obvio es porque \mathcal{H}_D no es un operador semiacotado y, por tanto, los principios variacionales, tan útiles para otros operadores como el laplaciano, no se pueden aplicar directamente. [68] es un survey excelente sobre esta cuestión. Asimismo, en [5] y [34] se puede ver cuál es el estado del arte actualmente. El principal problema abierto es caracterizar los potenciales \mathbb{V}_D que verifican

$$|x \mathbb{V}_D| \leq 1$$

¹⁵ En el espíritu de (2.22) pero sustituyendo Δ por \mathcal{H}_0 .

y dan lugar a operadores autoadjuntos, determinando en este caso cuál es el espectro. Esta cuestión es fundamental si se quiere progresar en el estudio de las ecuaciones de evolución no lineales de Dirac, ecuaciones para las que se está mucho más lejos de entender los mecanismos de creación de singularidades que para los modelos dispersivos no relativistas como las ecuaciones no lineales de Schrödinger que trataremos más adelante. Sirva como ejemplo de lo dicho lo poco que se ha avanzado en este problema desde el trabajo [67], en el que se caracterizan las perturbaciones subcríticas de \mathcal{H}_0 utilizando métodos perturbativos, en comparación con el espectacular avance que ha habido en las ecuaciones dispersivas semilineales desde el trabajo pionero de Ginibre y Velo [78].

En el mismo orden de cosas, un ejemplo importante y bien conocido de potencial magnético es el de **Aharonov-Bohm**

$$A(x, y, z) = a_0(-y, x, 0)/(x^2 + y^2).$$

Obsérvese que en este caso el campo magnético es precisamente $B(x, y, z) = \nabla \times A = -2\pi a_0(0, 0, \delta(x, y))$. En otras palabras, el campo magnético es una medida vectorial singular con el soporte contenido en una superficie, una curva en este caso, de codimensión dos. De hecho en el contexto de la mecánica de fluidos, y como veremos más adelante al hablar de la ecuación del hilo de torbellino, este campo no es otro que el que describe la vorticidad de un torbellino con soporte en la línea recta $z = 0$.

Otros ejemplos importantes son aquellos en los que $A = 0$ y \mathbb{V}_D es un potencial dado por una medida cualquiera con soporte contenido en Σ , la frontera de un dominio acotado regular Ω con σ su medida de superficie, como la esfera unidad, ejemplo este último estudiado en [50]. En [9] resolvemos la cuestión de bajo qué condiciones estos potenciales son autoadjuntos. Ideas similares fueron desarrolladas con anterioridad y en un contexto abstracto en [131].

3.1 El confinamiento de partículas relativistas

Otro aspecto relevante de los potenciales \mathbb{V}_D es que aparecen naturalmente en relación con la posibilidad de confinar partículas relativistas dentro de un dominio Ω . En términos generales decimos que un potencial \mathbb{V}_D que actúa sobre spinors en $L^2(\sigma)^4$ genera **confinamiento** con respecto a \mathcal{H}_0 y Σ si las *partículas* que se mueven de acuerdo a la ecuación de evolución de Dirac cuyo generador infinitesimal es $\mathcal{H}_0 + \mathbb{V}_D$ nunca cruzan la frontera Σ . O lo que es lo mismo, si una función $u(x, t)$ es solución de la ecuación $\partial_t u + i(\mathcal{H}_0 + \mathbb{V}_D)u = 0$ y en tiempo cero el soporte de $u(\cdot, 0)$ está contenido en Ω , el potencial \mathbb{V}_D genera confinamiento si $u(\cdot, t)$ está soportada en Ω para todo $t \in \mathbb{R}$, de tal forma que Σ resulta impenetrable para las partículas.

Tomando como punto de partida [9] y para \mathbb{V}_D , se prueba en [10] un criterio general para la **existencia de valores propios** en $(-m, m)$. Este criterio relaciona la existencia de valores propios, que es un problema en todo \mathbb{R}^3 , con una propiedad espectral de ciertos operadores acotados en $L^2(\sigma)^4$, que es un problema en la frontera Σ . También mostramos algunas aplicaciones para el caso de potenciales electrostáticos:

$$(3.2) \quad \mathbb{V}_{D\nu_e} = \nu_e \delta_\Sigma \mathbf{1}.$$

En particular probamos que los Hamiltonianos $\mathcal{H}_0 + \mathbb{V}_{D\nu_e}$ y $\mathcal{H}_0 + \mathbb{V}_{D_{-A/\nu_e}}$ tienen los mismos valores propios en $(-m, m)$ para todos los valores de la constante de acoplamiento $|\nu_e| \neq 0$ dentro de un intervalo finito no vacío, y que $\mathbb{V}_{D\nu_e}$ no tiene valores propios en $(-m, m)$ si $|\nu_e|$ es demasiado grande o demasiado pequeño. Esta es una característica nueva y bastante llamativa, ya que muestra que hay cotas tanto inferiores como superiores en los valores posibles de $|\nu_e|$ para que existan valores propios no triviales en $(-m, m)$, a diferencia de lo que sucede con el acoplamiento del operador Dirac libre con potenciales genéricos como $\nu_e \chi_{B(0,1)} \mathbf{1}$. En este caso, existe un umbral ν_e^0 tal que si $|\nu| > \nu_e^0$ el espectro no es vacío. Para probar el resultado se necesita cierta regularidad en Σ lo que nos permite reducir el problema al estudio del espectro de un operador compacto.

En [10] también hacemos un estudio espectral de $\mathcal{H}_0 + \mathbb{V}_{D\nu_e}$ cuando Σ es la esfera

$$\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}.$$

En el espíritu de [51], este estudio espectral se basa en probar un principio de incertidumbre sobre algunos operadores acotados en L^2 y relacionados con \mathcal{H}_0 . Como consecuencia, obtenemos una desigualdad en \mathbb{S}^2 de un **operador de Cauchy** que es, en nuestro contexto, la generalización natural del clásico relacionado con el operador $\partial_{\bar{z}}$ de una variable compleja y del que hablamos en la sección 2.4. Hay una diferencia crucial en nuestro caso porque el operador depende de la masa m . Nuestra desigualdad resulta ser óptima y probamos la existencia del minimizante, lo que nos permite obtener el estado fundamental de $\mathcal{H}_0 + \mathbb{V}_{D_r}$. Además, en el límite sin masa, recuperamos una desigualdad bien conocida para la transformada de Riesz en dimensión dos en la esfera.

Recordemos que dadas una medida de Borel finita σ con soporte en una hipersuperficie Σ contenida en \mathbb{R}^3 , una función $h \in L^2(\sigma)$ y $x \in \mathbb{R}^3$, se define la transformada de Riesz bidimensional de h como

$$(3.3) \quad R_\sigma(h)(x) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{|x-y|>\epsilon} \frac{x-y}{|x-y|^3} h(y) d\sigma(y),$$

siempre que el límite tenga sentido. Es bien conocido que $R_\sigma : L^2(\sigma) \rightarrow L^2(\sigma)^3$ es un operador acotado para las conocidas como medidas de Ahlfors-David bidimensionales y uniformemente rectificables σ en \mathbb{R}^3 ; véase [43] para un estudio cuidadoso sobre esta materia. En particular, $R_\sigma : L^2(\sigma) \rightarrow L^2(\sigma)^3$ es un operador acotado si σ es la medida de superficie de un dominio acotado con regularidad Lipschitz. Es decir,

$$(3.4) \quad \|R_\sigma(h)\|_{L^2(\sigma)^3} \leq C \|h\|_{L^2(\sigma)}$$

para alguna constante $C > 0$ y para todo $h \in L^2(\sigma)$.

Se sabe mucho menos acerca de las mejores constantes de las desigualdades en L^2 para la transformada de Riesz y su caracterización en términos de la geometría del borde. Por un lado, en [93] los autores prueban que la transformada de Riesz (más precisamente el operador de Cauchy-Clifford) es una isometría si y solo si Σ es una esfera o un hiperplano. Por otro lado, una consecuencia de nuestros resultados en [10] es que cuando la masa no es trivial, el operador de Cauchy correspondiente es una isometría para un hiperplano pero no para una esfera, y es por esta razón que el espectro puntual no es trivial si se elige de forma adecuada la constante de acoplamiento v . Además, cuanto más

lejos de ser una isometría, mayor será el tamaño del conjunto de valores admisibles v . Es natural esperar que para una masa estrictamente positiva fija y dominios acotados con un límite regular y con una normalización adecuada, la esfera es la superficie que minimiza la norma del operador de Cauchy (con masa positiva). Un primer resultado relevante obtenido en esta dirección se puede encontrar en [8], resultado que analizamos más adelante. Otra cuestión importante explorada en [126] es sobre la dependencia de esta norma de la regularidad de la frontera, así como hasta qué punto se puede evitar el uso de operadores compactos. De hecho y, como ya hemos dicho, en [10] y para el caso de la esfera, empleamos el principio de incertidumbre como un camino alternativo.

La resolución de estos problemas tiene algunas consecuencias y aplicaciones importantes, en particular en el estudio del confinamiento. Más específicamente, en [10] también damos un criterio general para generar confinamiento que se establece en términos de una propiedad algebraica de ciertos operadores acotados en $L^2(\sigma)^4$. De nuevo transformamos un problema en \mathbb{R}^3 en un problema en la frontera Σ . En este trabajo también se encuentra una aplicación para potenciales de tipo electrostático y los llamados potenciales escalares de Lorentz dados de nuevo por medidas singulares con soporte en la *cáscara* (i.e. *shell*) Σ .

Por ejemplo, demostramos que, para $\nu_e, \nu_s \in \mathbb{R}$, el potencial

$$\mathbb{V}_{es} = (\nu_e + \nu_s \beta) \delta_\Sigma \mathbf{1}$$

da lugar a confinamiento si y solo si $\nu_e^2 - \nu_s^2 = -4$. Este hecho solo se conocía para el caso particular de la esfera [50], por lo que probamos que la misma condición es válida para todas las superficies. Nuestra caracterización del estado fundamental también funciona bajo esta condición general de confinamiento y, por lo tanto, podemos formular en este contexto un problema de optimización similar al que ya hemos propuesto. Más específicamente, se trata de probar cuál es la superficie Σ que, bajo restricciones elegidas adecuadamente, minimiza en valor absoluto la energía del estado fundamental. Hay que llamar la atención sobre el hecho de que el caso particular $\nu_e = 0$ y $\nu_s^2 = 4$ se conoce en la literatura como el modelo MIT para el confinamiento de quarks (*MIT bag model*), es decir, $\nu_e = 0$ y $\nu_s^2 = 4$, y ha recibido una atención especial; ver por ejemplo [6] y [7] para una explicación del modelo.

Nuestro punto de vista permite perturbar el modelo del MIT dentro de una familia uniparamétrica de problemas todos con la misma propiedad de confinamiento, lo que da una flexibilidad extra a la hora de abordar la cuestión de la optimización. En [8] hemos usado con éxito una flexibilidad análoga para (3.2). Como ya hemos dicho, el principal problema que presenta el operador de Dirac a la hora de resolver problemas de optimización como los que hemos planteado, es que los métodos variacionales no se pueden aplicar directamente. Por ello en [8] utilizamos como sustituto el llamado principio de Birman-Schwinger para caracterizar los autovalores de un operador dado. Así, en el ejemplo que estamos considerando, dado a con $-m < a < m$ se define $\nu_e(a)$ como el valor de la constante de acoplamiento del potencial tal que a es un autovalor para el operador asociado a dicho potencial. El método de Birman-Schwinger asocia $\nu_e(a)$ a la mejor constante de una cierta desigualdad con pesos para el inverso de $\mathcal{H}_0 + a$. Como vimos en la sección 2.3 esta desigualdad involucra al inverso del potencial. La ventaja de este método es que, si es satisfactorio, da de forma inmediata la monotonía $\nu_e(a)$, algo notable si recordamos que el operador de Dirac no es semiacotado.

La dificultad en nuestro caso reside primero en entender cuáles son los pesos ya que \mathbb{V}_{es} se anula fuera de Σ , y segundo en probar las desigualdades pertinentes ya que involucran al operador de Clifford-Dirac cuyo núcleo es una integral singular. Las técnicas de análisis de Fourier, en este caso la teoría de Calderón y Zygmund, vienen en nuestra ayuda, y finalmente usando de forma esencial ciertas fórmulas algebraicas del operador de Clifford-Dirac conseguimos probar la monotonía. Como consecuencia el valor óptimo se ha de alcanzar cuando $a^2 = m^2$. En este caso el sistema de ecuaciones que determinan el *spin up* y el *spin down* se desacoplan, lo que finalmente permite usar un método variacional. De esta forma resolvemos el problema de optimización para superficies regulares bajo una restricción natural entre el área del dominio y la capacidad del mismo. Como cabía esperar el minimizante resulta ser la esfera.

Las consideraciones anteriores sugieren que [8] abre la puerta a investigaciones posteriores que pueden tener mucho recorrido. Primero, en la dirección ya esbozada de intentar utilizar ideas similares en el modelo MIT. Segundo, la propia demostración indica que el caso de superficies no regulares, por ejemplo aquellas que posean esquinas, podría ser

muy distinto al caso regular. Esta pregunta está lejos de ser académica ya que tiene perfecto sentido que se plantee en dimensión dos, donde precisamente en el modelo matemático del grafeno aparecen de forma natural dominios cuyas fronteras tienen esquinas. Por último, en [8] necesitamos de una hipótesis, que aparece por razones técnicas y que todavía no entendemos, que involucra el poder medir en la superficie Σ la interacción del núcleo de Clifford-Dirac, que no es positivo, con el dado por el potencial de Newton, que sí lo es. Pienso que esta última cuestión es un reto analítico de envergadura.

3.2 Algunas observaciones sobre los hamiltonianos no relativistas

Los ejemplos estudiados en la sección anterior entran dentro de lo que se conocen como hamiltonianos con una interacción delta, por la delta de Dirac. Estos últimos han sido ampliamente estudiados en el caso no relativista [2], es decir hamiltonianos de la forma

$$(3.5) \quad \mathcal{H}_S = \left(\frac{1}{i} \nabla + A(x) \right)^2 - V_S(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

En este caso $A(x) \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ y $V_S(x) \in \mathbb{R}$, de forma que \mathcal{H}_S actúa sobre campos escalares $u(x) \in \mathbb{R}$.

El potencial de Aharonov-Bohm (A-B) ya mencionado, pertenece a la clase de potenciales magnéticos críticos que verifican

$$(3.6) \quad A^\nu(x) = \nu A(\nu x) = A(x) \text{ para todo } \nu > 0$$

y

$$(3.7) \quad x \cdot A = 0.$$

Es un ejercicio probar que bajo estas dos condiciones $x \cdot B \equiv 0$. Sin embargo, B es no nulo¹⁶. Este hecho es debido a la singularidad del potencial A . En efecto, si se tiene que $A(r\omega)$ es integrable como función

¹⁶ B se define como la 2-forma $B = \frac{1}{2}(DA - DA^t)$ si $d > 3$.

de r para cualquier vector unitario ω tanto en $r = 0$ como en $r = \infty$, entonces siempre se puede suponer que se verifica (3.7) gracias a lo que se conoce como el gauge de Poincaré. En tal caso, si $x \cdot B \equiv 0$, entonces $B \equiv 0$.

Este tipo de potenciales ha sido considerado por diversos autores. Entre otros citamos [42], [71], [69], [70] y [20]. En [20] estudiamos las propiedades de dispersión del problema de evolución asociado a (3.5) siendo A una pequeña perturbación (i.e., $x \cdot B$ es pequeño en un sentido apropiado) que verifica (3.6), (3.7) y

$$(3.8) \quad |x \cdot \nabla V_S(x)| < C.$$

Ejemplos relevantes son los homogéneos de grado cero $V_S(x) = n(x/|x|)$. Esta homogeneidad hace que el problema no sea estándar y que haya que probar en [20] estimaciones uniformes de Sobolev (cf. sección 2.3) de las ecuaciones

$$(3.9) \quad (\Delta + n(x/|x|))u - \lambda u + i\epsilon u = f, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \epsilon > 0.$$

La forma de obtener estas estimaciones es por medio de técnicas específicas del análisis de Fourier. Más concretamente, de lo que se conoce como la teoría de las integrales oscilatorias cuyos pioneros son E. Stein y C. Fefferman [137]. Se trata de una continuación natural en el contexto ondulatorio (i.e., ecuaciones de ondas hiperbólicas y dispersivas) de lo que supone la teoría de integrales singulares de Calderón y Zygmund para las ecuaciones elípticas y parabólicas. La conexión entre la teoría de integrales oscilatorias y las estimaciones uniformes de Sobolev es debida a C. Kenig, A. Ruiz y C. Sogge, [106], y en el caso de las ecuaciones dispersivas (i.e. ecuación de Schrödinger, ecuación de ondas, ecuación KdV, etc.) se debe a R.S. Strichartz [138] y a J. Ginibre y G. Velo [78]. En [99], [101] y [102] se desarrolla un procedimiento muy general que permite tratar ecuaciones con potenciales no lineales que involucran a la derivada de la solución como las ecuaciones de tipo Korteweg de Vries. La literatura posterior es inmensa y hoy es todavía un área muy activa de investigación, (véase, por ejemplo, [//kvm16.pims.math.ca/DispersiveWiki/index.php?title=Main_Page](http://kvm16.pims.math.ca/DispersiveWiki/index.php?title=Main_Page)).

Las condiciones anteriores en los potenciales son demasiado singulares y, como se deduce de los resultados en [92] y [127], no entran

dentro del alcance de la teoría clásica de Agmon y Hörmander [1] que esbozamos en la sección 2.3. En [128] se obtiene una importante estimación a priori que cuantifica una propiedad cualitativa que hasta entonces había pasado desapercibida. Esta propiedad dice que la solución de (3.9) decae más rápido en las direcciones dadas por los puntos críticos de n , de modo que la densidad de energía $|u|^2 dx$ tiende a concentrarse en el infinito precisamente en esas direcciones. Como consecuencia, los operadores de *scattering* tienen que ser completamente diferentes a los clásicos, que se ajustan a la teoría de Agmon-Hörmander. Estos últimos pueden implicar una modificación de la fase para potenciales de largo alcance, como, por ejemplo, el de Coulomb, pero no una concentración de la energía en algunas direcciones específicas.

Las propiedades de dispersión en el tiempo asociadas a estos potenciales son también diferentes. Por un lado, ninguna estimación estándar de Strichartz, excepto la trivial, es válida, como se demostró en [79]. Por otro lado, algunas estimaciones de Strichartz con pesos son ciertas, como se puede ver en [20]. Estas estimaciones con peso eran incluso desconocidas en el caso libre. Además en [20] hacemos una conexión con una pregunta muy natural en el análisis de Fourier, y que ya planteamos en la sección 2.3, sobre la caracterización de los buenos pesos para los propagadores dispersivos como los clásicos de Schrödinger, ondas, Klein-Gordon y Dirac, o, en general, para los operadores dados por integrales oscilatorias en el sentido de Fefferman-Stein. Estas estimaciones con peso también pueden verse como mejoras de las desigualdades clásicas de Strichartz, mejoras que han desempeñado un papel fundamental en el progreso reciente sobre el problema de valores iniciales de ecuaciones dispersivas críticas no lineales. [116], [120], [121] y [130] son ejemplos de algunas de las aportaciones que hemos hecho en esta dirección.

4. Principios de Incertidumbre

En esta sección expondremos las principales ideas que están detrás del nuevo procedimiento desarrollado con L. Escauriaza, C.E. Kenig y G. Ponce para demostrar distintas versiones analíticas del principio de incertidumbre.

La pregunta inicial surgió en 2002, y versaba sobre el estudio de la unicidad de las soluciones de las ecuaciones de tipo de Korteweg-de Vries (KdV)

$$(4.1) \quad u_t - u_{xxx} \pm u^p u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad p > 1.$$

En concreto, queríamos saber si dos soluciones que coinciden en $x > 0$, en dos tiempos diferentes tienen que ser iguales en todo momento. La pregunta había sido respondida positivamente si $p=1$ por B. Y. Zhang usando lo que se conoce como el *método inverso de scattering* ya que este caso particular, junto con la que se conoce como ecuación modificada de KdV $p=2$, es un sistema completamente integrable. Este método inverso es un procedimiento algebraico que permite linealizar la ecuación construyendo una versión no lineal de la transformada de Fourier. Para el caso general, donde este procedimiento no es posible, había algunos trabajos relevantes anteriores realizados por J. C. Saut y B. Scheurer en [135], y por J. Bourgain en [30]. En [104] respondimos positivamente a la pregunta usando lo que se conocen como estimaciones de Carleman específicamente construidas para el problema en cuestión. El otro ingrediente fundamental es un lema en el que se demuestra que si la solución tiene un decaimiento exponencial en dos tiempos distintos, entonces el mismo decaimiento es cierto y uniforme en todos los tiempos intermedios.

Las ecuaciones de tipo KdV son relevantes desde varios puntos de vista. En primer lugar, KdV es uno de los modelos más simples que describen el movimiento de las olas (*water waves*). De hecho, exhibe un equilibrio perfecto entre la dispersión, dada por el término de la tercera derivada, y la hiperbolicidad, y, por tanto, la tendencia a crear choques, dada por el potencial no lineal. Este equilibrio hace posible la existencia de ondas viajeras, que corresponden a la célebre ola solitaria descrita por Scott Russell en 1834 [141]. La ecuación de KdV es tam-

bién el punto de partida del *método inverso de scattering* que ya hemos mencionado. Este método es un campo de investigación en sí mismo, que desde los pioneros trabajos de Fermi, Pasta, Ulam y Tsingou ha generado avances sorprendentes en varias áreas de las matemáticas.

Sin embargo, nuestro enfoque es el habitual de las ecuaciones en derivadas parciales basado en estimaciones a priori, lo que se conoce habitualmente como el método de energía. Desde este punto de vista, las ecuaciones de tipo KdV son modelos canónicos no lineales cuya ecuación linealizada asociada, $u_t - u_{xxx} = 0$, es una mezcla de dispersión y parabolicidad. Esto se ve fácilmente en la solución fundamental, que se puede construir por medio de la función Airy utilizando ideas análogas a las esbozadas en la sección 2.2. La función de Airy es la única solución acotada de

$$f'' - \frac{x}{3}f = 0,$$

tal que $\int f = 1$. Esta solución oscila a la izquierda y tiene un decaimiento exponencial con una tasa del tipo $-x^{3/2}$ a la derecha. Hablando en términos generales, podríamos decir que se dispersa a la izquierda y se difunde a la derecha, aunque téngase en cuenta que estamos tratando con sistemas hamiltonianos que preservan la energía y son reversibles en el tiempo. Finalmente, la existencia de la interacción no lineal hace que las cosas sean más difíciles e interesantes. De hecho, el análisis de la estabilidad y la interacción de las soluciones de onda viajera (o solitones), y las propiedades de dispersión de los modelos de tipo KdV han sido un paso crucial para comprender modelos más generales como los de las ecuaciones de Schrödinger y de ondas.

El siguiente paso natural después de [104] fue relajar la condición de que las dos soluciones se anulen en $x > 0$, y suponer simplemente que la diferencia de ambas decae exponencialmente a la derecha con una tasa mayor que $-x^{3/2}$. Pero del análisis mencionado anteriormente, tal pregunta no puede responderse si no se conoce la respuesta a la análoga, aunque ligeramente diferente, en el contexto de los problemas de difusión. Este fue de hecho el caso y, motivados por esta pregunta, comenzamos una colaboración con L. Escauriaza que tuvo como consecuencia los artículos [61], [62] y [63] sobre la unicidad de las soluciones de KdV, Schrödinger y del calor. En [65] hacemos una recopilación de los resultados obtenidos hasta ese momento.

Una consecuencia inesperada de estos resultados fue el descubrimiento de la conexión íntima de estas preguntas de unicidad con el principio de incertidumbre. Más concretamente, consideremos la ecuación libre de Schrödinger que ya nos apareció en la sección 2.2¹⁷

$$(4.2) \quad u_t = i\Delta_x u, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad t \in \mathbb{R}.$$

El siguiente resultado es cierto: Si

$$u(x, T)e^{-\frac{|x|^2}{\alpha^2}} \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad u(x, 0)e^{-\frac{|x|^2}{\beta^2}} \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

y $\alpha\beta < 4T$ entonces $u \equiv 0$.

Además, si $\alpha\beta = 4T$ y se suponen condiciones L^∞ en vez de L^2 hay soluciones no triviales que son explícitas y vienen dadas por gaussianas. Pues bien, gracias a (2.10) es inmediato probar que el resultado anterior es equivalente al siguiente de G.H. Hardy [89]: Si

$$\hat{f}(x)e^{-\frac{4|x|^2}{\alpha^2}} \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad f(x)e^{-\frac{|x|^2}{\beta^2}} \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

y $\alpha\beta < 4T$, entonces $u \equiv 0$.

Recordamos que \hat{f} es la transformada de Fourier de f . El resultado en el extremo antes mencionado fue probado también por Hardy y la conclusión es que f tiene que ser una gaussiana.

Hay un resultado similar para la ecuación del calor,

$$(4.3) \quad u_t = \Delta_x u, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Supongamos que u es una solución de (4.3): Si

$$u(x, T)e^{-\frac{|x|^2}{\alpha^2}} \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad u(x, 0) \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

y $\alpha\beta < 4T$, entonces $u \equiv 0$.

¹⁷ Por comodidad reemplazamos $i/2$ por i en el lado de derecho de la ecuación, algo permitido tras un simple cambio de escala. Esta observación se aplica de igual forma a la ecuación del calor que aparece posteriormente.

De nuevo hay un resultado en el extremo $\alpha = 4T$ si se suponen condiciones de tipo L^∞ . Concretamente, si $u(x, T)e^{-\frac{|x|^2}{\alpha T}} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ y $\hat{u}(\xi, 0) \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, entonces $u(x, t)$ tiene que ser la solución fundamental de (4.3).

A lo largo de diferentes artículos, véase en [64] y [65] las referencias precisas, hemos podido extender estos resultados cuando se agregan a (4.2) y a (4.3) potenciales dependientes del tiempo tanto lineales como no lineales. En el contexto de la ecuación de Schrödinger, los resultados son óptimos y, como consecuencia, obtenemos otra prueba del principio de incertidumbre de Hardy sin el uso de métodos de variable compleja. A. Bonami escribió en [25] sobre este resultado: “ [] La sensación general era que los métodos complejos eran inevitables para los teoremas del tipo Hardy. El desarrollo de métodos reales por Escauriaza, Kenig, Ponce y Vega parece milagroso.” T. Tao también muestra su interés en estas preguntas en es.scribd.com/doc/88788300/14/Hardy's-uncertainty-principle.

Curiosamente nuestras técnicas, aplicadas directamente, no son suficientes para dar una prueba completa en el caso de la ecuación del calor, de tal forma que solo se obtiene el resultado para algunos α_0 de modo que $4/T < \alpha_0 < 2/T$. Hay que hacer notar que si $u_0 > 0$ el resultado es mucho más sencillo (al menos en el caso de coeficientes constantes), ya que en este caso la difusión de la correspondiente solución, que es positiva, tiene que ser como mínimo la de la solución fundamental. La situación es muy distinta cuando se consideran soluciones que pueden cambiar de signo, como por ejemplo aquella que en el tiempo inicial es $u_0 = \cos x^2$, suponiendo por simplicidad que la dimensión es uno. De hecho, estos problemas, al menos en el estado de comprensión donde estamos ahora, son principalmente unidimensionales. Es fácil verificar que la solución de (4.3) para esta condición inicial es

$$\operatorname{Re} \frac{e^{-\frac{t-i}{4(1+t^2)}|x|^2}}{\sqrt{t+i}}.$$

Esta solución es notable, porque no decae en $t=0$, luego comienza a decaer como una gaussiana con una tasa que sigue mejorando (i.e. la varianza se hace cada vez más pequeña) hasta un momento crítico $t=1$ a partir del cual la solución cada vez se difunde más (i.e., la varianza se hace cada vez más grande). Para datos iniciales positivos, la varianza

nunca puede disminuir, sino que tiene que aumentar. Finalmente unos años más tarde en [66] se consiguió evitar los obstáculos que ilustramos con este ejemplo y se obtuvo el resultado también para (4.3).

Las ideas desarrolladas son muy flexibles y se han podido extender al caso magnético [18] y al caso discreto [73]. También esperamos que nuestro punto de vista se pueda extender a los principios de incertidumbre de Beurling y Nazarov.

En [94] se prueba el siguiente resultado debido a A. Beurling:

$$(4.4) \text{ Si } f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ y } \int \int_{\mathbb{R}^2} |f(x)| |\hat{f}(y)| e^{|xy|} dx dy < +\infty, \text{ entonces } f \equiv 0.$$

Corolarios de (4.4) son los teoremas de Paley-Wiener y el principio de incertidumbre de Morgan [119] que dice que si $1/p + 1/q = 1$ y

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| e^{|x|^p} + \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)| e^{|x|^q} dx < +\infty,$$

entonces $f \equiv 0$. Ambos resultados se pueden probar con modificaciones, algunas de ellas importantes, de las ideas expuestas más arriba, cosa que hicimos en [63] y [105]. Sería interesante saber si se puede probar (4.4) con el mismo tipo de ideas, al menos si la condición de integrabilidad de tipo L^1 se sustituye por una de tipo L^2 .

Otro principio de incertidumbre bastante sorprendente es el demostrado por F.L. Nazarov¹⁸ en [122]: Si E y F son subconjuntos de \mathbb{R} con medida de Lebesgue finita $|E|$, $|F|$ y $\text{sop } f \subset E$, entonces existe una constante C tal que

$$\int_F |\hat{f}|^2 dx \leq C e^{C|E||F|} \int_{\mathbb{R} \setminus F} |\hat{f}|^2 dx.$$

Esta afirmación es equivalente a la siguiente. Tómnese E y F como

¹⁸ Versiones no cuantitativas del teorema de Nazarov se habían obtenido antes por M. Benedicks [21] y W. O. Amrein y A.M. Berthier [3].

antes y supongamos que u es una solución de (4.2) con $d=1$, tal que en $t=0$ tiene su soporte en el conjunto E . Entonces

$$\int_F |u(x, 1)|^2 dx \leq C e^{C|E||F|} \int_{\mathbb{R} \setminus F} |u(x, 1)|^2 dx.$$

El resultado de Nazarov está por ahora fuera del alcance de nuestros métodos.

5. La ecuación de los hilos de torbellino

5.1 El efecto de Talbot

¿Cuál es el patrón que forma la luz cuando atraviesa un rejilla regular? Esta pregunta tan sencilla tiene una respuesta asombrosamente rica como puso en evidencia H. F. Talbot [139] en su pionero experimento de 1836. En dicho experimento, y basándose en trabajos anteriores de Fraunhofer y Fresnel, observó que si un haz de luz creado por un fuente casi puntual y de una longitud de onda λ dada, se hace pasar por una rejilla formada por rendijas muy finas, todas ellas a la misma distancia d de sus vecinas, este patrón periódico se repite a una determinada distancia z_T . A esta distancia se la llama hoy día distancia de Talbot. Este experimento fue posteriormente explicado por Lord Rayleigh [132] quien, analíticamente y por métodos muy ingeniosos, que parten del principio de Huyghens para la propagación de ondas, establece una fórmula para la distancia de Talbot:

$$z_T = \frac{\lambda}{1 - \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{d^2}}}.$$

Si λ es mucho más pequeña que d se obtiene la aproximación

$$z_T = \frac{2d^2}{\lambda}.$$

Una de las aplicaciones inmediatas de esta fórmula es que permite calcular la longitud de onda de un haz monocromático midiendo la distancia de Talbot.

El razonamiento de Rayleigh es más o menos como sigue. Partimos de un haz incidente de ondas planas de longitud de onda λ . Se trata por tanto de una solución $u(x, z)$ de la ecuación de Helmholtz, cf. sección 2.3,

$$(\partial_z^2 + \partial_x^2)u + \mu^2 u = 0,$$

con $\mu = \frac{1}{\lambda}$, $x \in \mathbb{R}$ y $z > 0$ mide la distancia a la rejilla, que suponemos colocada en $z = 0$. La dificultad proviene de entender cuáles son las condiciones adecuadas en la frontera $z = 0$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que la distancia entre las rendijas es $d = 2\pi$, y el cálculo es mucho más sencillo si nos colocamos en la situación ideal en el que número de rendijas es infinito y el ancho de la rendija es infinitesimal. Gracias a ello podemos escribir u en la rejilla $z = 0$ como una superposición de deltas de Dirac distribuidas de forma periódica con un periodo que coincide con la distancia entre ellas. Por tanto, tenemos una primera condición en la frontera del tipo:

$$u(x, 0) = 2\pi \sum_j \delta(x - 2\pi j),$$

y gracias a la fórmula de sumación de Poisson sabemos que

$$u(x, 0) = \sum_j e^{ijx}.$$

Siendo la ecuación que queremos resolver de orden dos necesitamos una segunda condición para determinar de forma única la solución. Para ello suponemos que las ondas se propagan en la dirección $z > 0$ y que, por tanto, han de tener la forma

$$e^{i\mu(z-x)}.$$

Un sencillo análisis utilizando series de Fourier nos da como solución

$$(5.1) \quad u(x, z) = \sum_j e^{i\sqrt{\mu^2 - j^2}z + ijx}.$$

En esta expresión vemos claramente que hay dos regiones bien diferenciadas. Una, la ondulatoria, ocurre cuando $\mu^2 > j^2$. La segunda, la

difusiva, ocurre en la región complementaria entendiéndose que en la fórmula anterior la raíz cuadrada que se elige es la que tiene parte imaginaria positiva. Esto determina un decaimiento exponencial en esta región y no nos preocuparemos por ella. La aproximación de Rayleigh consiste en reducir la suma en (5.1) a la región en la que j^2 es pequeño con respecto a μ^2 (i.e., $j^2 \ll \mu^2$). Tras un sencillo desarrollo de Taylor obtenemos la aproximación

$$(5.2) \quad u(x, z) = e^{i\mu(z-x)} \sum_{j \ll \mu^2} e^{-i\frac{z}{2\mu}j^2 + ijx},$$

que tiene como periodo precisamente $\frac{2}{\lambda}$. A partir de (5.2) y haciendo la renormalización $e^{-i\mu(t-z)}u(\mu z, x)$ se puede pasar fácilmente al límite en el sentido débil con μ tendiendo a infinito (ver [54] donde se hace todo el análisis anterior con cuidado). Se obtiene como resultado la expresión

$$(5.3) \quad \Psi(x, z) = \sum_j e^{-i\frac{z}{2}j^2 + ijx}.$$

La primera observación que conviene hacer es que renombrando la variable espacial z como la variable temporal t , la función $\Psi(x, t)$ no es otra que la solución fundamental de la ecuación de Schrödinger con condiciones de contorno periódicas,

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \Psi_t &= \frac{i}{2}\Psi_{xx}, \\ \Psi(x, 0) &= 2\pi \sum_j \delta(x - 2\pi j). \end{aligned}$$

Por razones que quedarán claras más adelante conviene introducir de nuevo el parámetro de la distancia de las rendijas, que en el nuevo contexto de la ecuación de Schrödinger no es otro que el periodo. En este caso lo escribiremos

$$d = \frac{2\pi}{M},$$

obteniendo

$$(5.5) \quad \Psi_M(t, x) = \sum_j e^{-i\frac{t}{2}(Mj)^2 + iMjx},$$

que para $t = 0$ verifica

$$\Psi_M(x, 0) = \frac{2\pi}{M} \sum_j \delta\left(\frac{x}{M} - 2\pi j\right).$$

El efecto de Talbot se vuelve evidente sin más que mirar lo que ocurre en los tiempos *racionales*

$$(5.6) \quad t_{pq} = \frac{4\pi p}{M^2 q}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad \text{mcd}(p, q) = 1.$$

En efecto, reescribiendo los números enteros en la forma $j = kq + l$ con $l = 0, 1, \dots, q - 1$ obtenemos

$$\begin{aligned} \Psi_M(s, t_{pq}) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-i(Mj)^2 2\pi p / (M^2 q) + iMjs} \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i(p/q)j^2 + iMjs} \\ &= \sum_{l=0}^{q-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i(p/q)(qk+l)^2 + iM(qk+l)s} \\ &= \sum_{l=0}^{q-1} e^{-2\pi i(p/q)l^2 + iMl s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{iMqks}. \end{aligned}$$

Utilizando la fórmula de sumación de Poisson, la última línea de esta expresión se puede reescribir de nuevo como suma de deltas de Dirac, esta vez a distancia $\frac{2\pi}{Mq}$. De esta forma obtenemos la identidad

$$(5.7) \quad \Psi_M(x, t_{pq}) = \frac{2\pi}{Mq} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{q-1} G(-p, m, q) \delta\left(x - \frac{2\pi k}{M} - \frac{2\pi m}{Mq}\right),$$

siendo G la función definida por las sumas de Gauss

$$\sum_{l=0}^{|c|-1} e^{2\pi i(al^2 + bl)/c},$$

y a, b, c , con $c \neq 0$, enteros cualesquiera.

Es bien conocido que

$$G(-p, m, q) = \begin{cases} \sqrt{q}e^{i\theta m}, & \text{si } q \text{ es impar,} \\ \sqrt{2q}e^{i\theta m}, & \text{si } q \text{ es par y } q/2 \equiv m \pmod{2}, \\ 0, & \text{si } q \text{ es par y } q/2 \not\equiv m \pmod{2}, \end{cases}$$

para un cierto ángulo θ_m que depende de m, p y q .

La fórmula (5.7) expresa matemáticamente y de una forma bastante sencilla el efecto de Talbot. Primero observamos que $\Psi_M(x, t)$ en los tiempos t_{pq} es una suma de deltas de Dirac espaciadas periódicamente con periodo $\frac{2\pi}{Mq}$. Estas deltas tienen una amplitud dada por las sumas de Gauss, que son un número complejo que se describe fácilmente en forma polar $G = \rho e^{i\theta}$, habiendo que considerar separadamente los casos en que q es par y aquellos en que q es impar. En el segundo caso las amplitudes de las deltas son siempre distintas de cero y se escriben

$$(5.8) \quad G(-p, m, q) = \sqrt{q}e^{i\theta m}.$$

En el caso par hay dos situaciones diferentes. La primera es cuando m y $q/2$ tiene la misma paridad, en la que se obtiene

$$(5.9) \quad G(-p, m, q) = \sqrt{2q}e^{i\theta m}.$$

Y la segunda es cuando m y $q/2$ tiene distinta paridad, en la que la amplitud de la correspondiente delta de Dirac es cero:

$$(5.10) \quad G(-p, m, q) = 0.$$

Así, por ejemplo, cuando la distancia a la rejilla (i.e., $z=t=0$) es la mitad de la distancia de Talbot (i.e., cuando el tiempo es la mitad del periodo temporal $\frac{2}{\pi M^2}$) el número de deltas en un periodo espacial $\frac{2}{\pi M}$ es el mismo que en la rejilla, (i.e., M), pero se encuentran situadas en puntos diferentes a los de la rejilla. De hecho, las M deltas están desplazadas una mitad de periodo respecto a la situación original de

la rejilla. Si la distancia es $1/3$ de la distancia de Talbot el número de deltas en un periodo es $3M$; si es $1/5$, $5M$; y así sucesivamente, como se ve claramente en la figura 3.

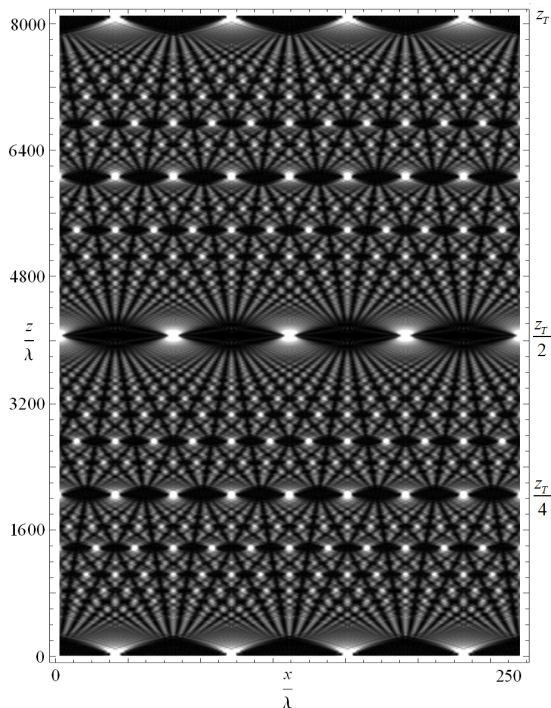


Figura 3: Una imagen del efecto de Talbot. Muestra la luz que recibe un observador o una pantalla situada a diferentes distancias de una rejilla periódica. La parte inferior representa la rejilla mencionada, que recibe la luz desde abajo. Vemos que en el extremo superior a distancia z_T esta rejilla se repite. A distancias intermedias se forman diferentes patrones de luz, siendo reconocibles aquellas que son múltiplos racionales de z_T . Figura de Ben Goodman (CC BY-SA 3.0) que se distribuye bajo la misma licencia que la original, disponible en https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Optical_Talbot_Carpet.png.

Esta misma figura indica que la descripción de lo que ocurre a distancias de la rejilla que son un múltiplo irracional de la distancia de Talbot es mucho más compleja. Analíticamente, dicha descripción es un problema de primera magnitud que no está todavía resuelto. Volveremos más adelante sobre esta cuestión.

En la figura 2 solo se aprecian las intensidades de la luz, es decir $|G|^2 = \rho^2$. Estas intensidades se pueden determinar utilizando la fórmula de Plancherel en el anillo

$$\mathbb{Z}_q = \{0, 1, \dots, q-1\}.$$

Es decir, son consecuencia de la conservación de la energía, hecho que en el contexto no lineal de los hilos de torbellino jugará un papel relevante. Por otro lado, es natural preguntarse qué forma toman las fases θ_m que aparecen en (5.8) y (5.9). Este cálculo, debido a Gauss, es un ejemplo muy relevante del uso del análisis de Fourier en grupos. Por simplicidad de la exposición nos reduciremos al caso en que q es primo. El resultado es el siguiente:

$$(5.11) \quad G(-p, m, q) = \begin{cases} \sqrt{q} \left(\frac{p}{q}\right) e^{2\pi i \varphi(p)m^2}, & \text{si } q \equiv 1 \pmod{4}, \\ -i\sqrt{q} \left(\frac{p}{q}\right) e^{2\pi i \varphi(p)m^2}, & \text{si } q \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

En esta fórmula $\left(\frac{p}{q}\right)$ denota el símbolo de Jacobi que satisface $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 1$ y $\varphi(p)$ el inverso de $4p$ en \mathbb{Z}_q . Veremos en la sección 5.9 que esta φ da lugar a un algoritmo que genera números pseudoaleatorios.

5.2 La función no diferenciable de Riemann, una interpretación geométrica

Concluimos la sección anterior comprobando que aunque la ecuación (5.4) es determinista la forma de entender (cuantificar) soluciones singulares como (5.5) ha de ser probabilista. Pasamos a continuación a ilustrar esta componente estocástica.

Llamemos $\Psi(x, t)$ a $\Psi_M(x, 2t)$ con $M=1$. Consideremos la función de variable compleja siguiente, función que como veremos en secciones posteriores nos aparecerá de forma natural,

$$(5.12) \quad \Phi(x, t) = i \int_0^t \Psi(x, \tau) d\tau = i \int_0^t \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{-i\tau j^2 + i j x} d\tau,$$

donde la integral anterior se entiende en el sentido de las distribuciones. De hecho, como expondremos más adelante, el problema de deter-

minar si la integral converge en un sentido más fuerte resulta ser una cuestión analítica delicada. Evaluando en $x=0$ obtenemos

$$(5.13) \quad \phi(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-itj^2} - 1}{-j^2},$$

entendiendo como *it* el término $j=0$ en la suma anterior. En la figura 4 se puede ver la gráfica de la curva descrita en el plano complejo por $\phi(t)$, cuya fractalidad es evidente. Esta función es de hecho una pequeña variación de la conocida como función no diferenciable de Riemann,

$$(5.14) \quad R(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(tj^2)}{j^2},$$

que a su vez se puede escribir como $\text{Re } \phi_D(t)$ siendo

$$(5.15) \quad \phi_D(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{itj^2}}{ij^2}.$$

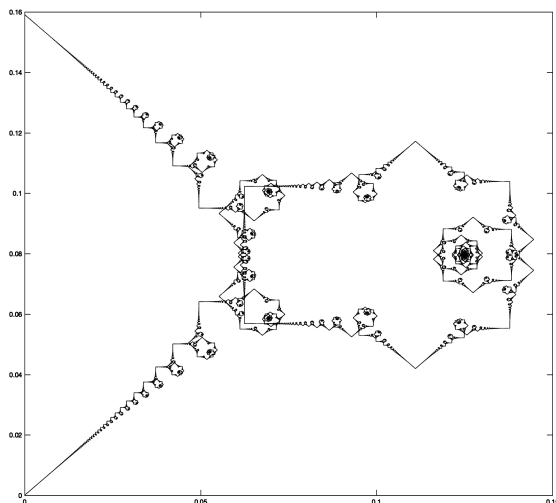


Figura 4: Gráfica de la función modificada de Riemann

$$\phi(t) = \int_0^t \sum_j e^{-itj^2} dt = \sum_j \frac{e^{-itj^2} - 1}{-j^2}$$

Un simple cálculo nos da

$$(5.16) \quad \phi(t) = -\frac{i}{2} \phi_D(-4t) + it + \frac{\pi}{12}.$$

La función $R(t)$ tiene una larga historia. En 1872, en una conferencia impartida en la Real Academia de Ciencia de Prusia, Weierstrass [142] afirma, contra la creencia general de la época, que existen funciones continuas de una variable real que no son derivables en ningún punto. Antes de mostrar ejemplos particulares de este hecho, en concreto las que hoy se conocen como funciones de Weierstrass, menciona la función $R(t)$ que es claramente continua. De acuerdo al propio Weierstrass, se cree que $R(t)$ fue propuesta por B. Riemann en el año 1861, o incluso antes, como un posible ejemplo de dicho hecho. Es decir que $R(t)$ no es diferenciable en ningún punto. Ante la dificultad de probar esta afirmación, Weierstrass propone variaciones de la misma sustituyendo las frecuencias cuadráticas n^2 por otras de tipo lagunar como, por ejemplo, 2^n .

Como cabía esperar, la apreciación de Weierstrass sobre la dificultad que plantea $R(t)$ era acertada. Hubo que esperar hasta 1916 para que Hardy [88] diera los primeros pasos no triviales, desarrollando un método distinto para probar la no diferenciableidad de las funciones de Weierstrass, método que también se puede aplicar al caso de $R(t)$. El enfoque de Hardy se basa en considerar precisamente la extensión analítica de la función (5.15) a la parte superior del plano complejo $\text{Im } z > 0$. Es decir,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-izj^2}}{ij^2}$$

lo que, no sin dificultad, le permite utilizar resultados previos que había obtenido con Littlewood [90]. Sin embargo, el resultado obtenido por Hardy es solo parcial ya que prueba que $R(t)$ no es diferenciable salvo cuando πt son números racionales p/q con p y q ambos impares, o p par y $q \equiv 3 \pmod{4}$. Finalmente el problema fue resuelto por Gerver en 1969 probando primero que la función $R(t)$ es de hecho derivable en los puntos p/q con p y q impares, i.e. cuando la suma de Gauss se anula, valiendo la derivada siempre, y esto es relevante, $-1/2$. Poco después, en [77], prueba que en los racionales de la forma p par y $q \equiv 3 \pmod{4}$ la función de Riemann no es derivable. Algo similar ocurre con

$$\text{Im } \phi_D(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos(tj^2)}{ij^2}.$$

En este caso los puntos de diferenciabilidad son los mismos, siendo la derivada nula en todos ellos. Como consecuencia, derivando en (5.16), obtenemos que en los puntos de diferenciabilidad

$$\phi'(t) = 0,$$

y por tanto, si se considera la gráfica de $\phi(t)$ en el plano complejo, i.e. la figura 3, dicha curva no tiene por qué tener tangente. En efecto, uno de estos puntos es precisamente $t = \pi$ y la curva alrededor de dicho punto tiene un comportamiento espiral que le impide tener tangente, como se comprueba en la figura 5.

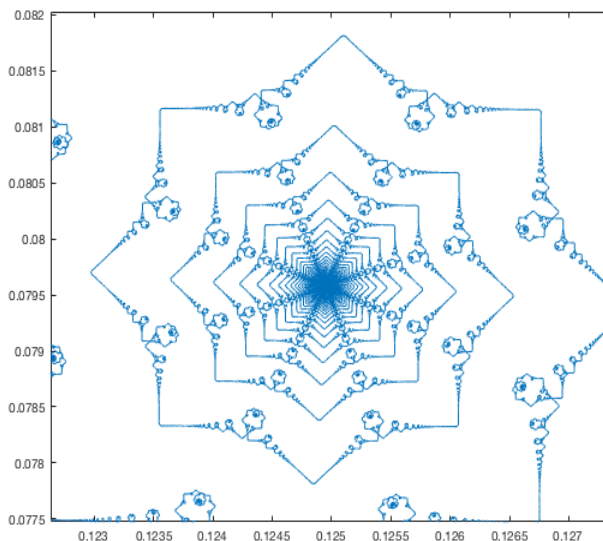


Figura 5: Gráfica de la función modificada de Riemann alrededor de $t = \pi$

Esta simple observación sugiere que la modificación que proponemos de la función de Riemann puede no tener tangente en ningún punto. Y así es, ya que este hecho ha sido probado recientemente por D. Eceizabarrena en su tesis doctoral [55].

Es importante entender que para la no existencia de la tangente no basta con probar que $R(t)$ no sea derivable. Por ejemplo, en $t = 0$ la no diferenciabilidad de $R(t)$ se deduce fácilmente a partir de la fórmula de sumación de Poisson, que permite probar que

$$(5.17) \quad R(t) \sim \sqrt{|t|},$$

y, por tanto, no es derivable en el cero ni por la derecha ni por la izquierda. Sin embargo, en la figura 6 vemos que la curva que determina $\phi(t)$ tiene tangente tanto por la derecha como por la izquierda. Es el hecho de que ambas tangentes no coinciden, ya que forman una esquina en ángulo recto, lo que permite concluir que la curva no tiene tangente en $t = 0$. Sorprendentemente, son los puntos racionales los que resultan ser más fáciles de tratar, mientras que los irracionales requieren un trabajo más delicado que depende de cómo se aproxima el irracional por fracciones continuas, ver [55].

El estudio del comportamiento fractal de $R(t)$ ha recibido mucha atención. Un paso relevante fue dado en [52] por Duistermaat, quien da un comportamiento asintótico muy preciso cerca de cualquier racional. En concreto prueba que, salvo para aquellos puntos en que la función es derivable, en todos los demás racionales t_{pq} , (5.6) con $M=1$, el comportamiento de Hölder $1/2$ de (5.17) es cierto, mejorando con q . Concretamente se prueba que

$$|R(t) - R(t_{pq})| \sim |q|^{-1/2} |t - t_{pq}|^{1/2}.$$

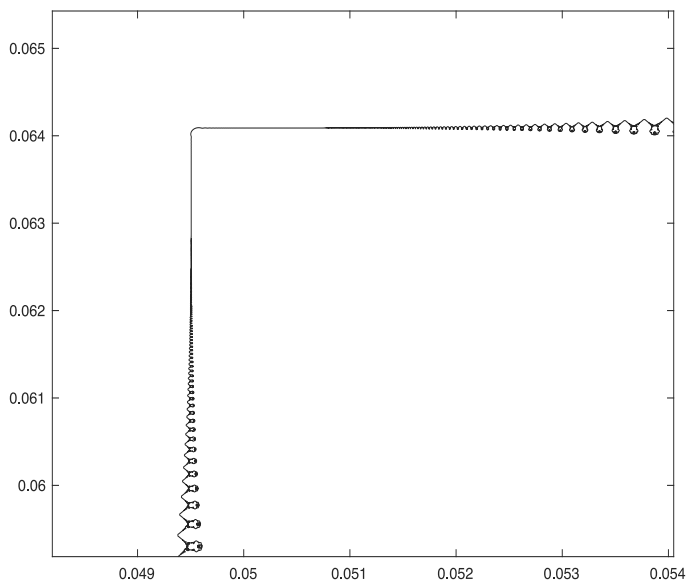


Figura 6: Gráfica de la función modificada de Riemann alrededor de $t = 1/8$

La pregunta es entonces cuál es el exponente de regularidad Hölder, llamémosle α , en los irracionales. Jaffard probó en [95] que dicho exponente depende de cómo el irracional es aproximado por fracciones continuas. Más concretamente demuestra que para los irracionales hay un rango continuo de posibles exponentes

$$1/2 \leq \alpha \leq 3/4.$$

Más aún, prueba que si se llama E_α el conjunto de los irracionales cuyo exponente de regularidad es α , entonces E_α es un fractal con dimensión fractal $d(\alpha)$ verificándose que

$$(5.18) \quad d(\alpha) = 4\alpha - 2.$$

A la función $d(\alpha)$ se la llama el *espectro de singularidades* de $R(t)$ y la fórmula (5.18) establece que $R(t)$ satisface lo que se conoce en la literatura como el *formalismo multifractal* para funciones. Este formalismo fue introducido por Frisch y Parisi en uno de sus trabajos sobre la turbulencia [75], como una forma de describir lo que en este contexto se conoce como intermitencia. Referimos al lector a la monografía de Frisch [76], donde podrá encontrar los detalles de dicho formalismo, y también al trabajo reciente [26] sobre la intermitencia de $R(t)$. Finalmente, queremos recordar que del trabajo de Jaffard se deduce que desde el punto de vista de la regularidad tanto $\phi(t)$ como $R(t)$ e $\text{Im } \phi_d(t)$ son equivalentes, y que por tanto el formalismo multifractal también se cumple para la función $\phi(t)$.

5.3 El flujo de la binormal

Estamos interesados en el flujo geométrico de curvas alabeadas que se propagan en el espacio euclídeo tridimensional de acuerdo a la ley

$$(5.19) \quad \chi_t = \chi_s \wedge \chi_{ss},$$

siendo $\chi = \chi(s, t) \in \mathbb{R}^3$ y s el parámetro de longitud de arco, bien en \mathbb{R} en el caso de curvas que se cierran en el infinito, o bien en $[0, 2\pi)$ para el caso de curvas cerradas. Como es habitual, t representa el tiempo. Derivando ambos miembros de la identidad precedente, llamando a la indicatriz tangente $T = \chi_s$, y usando las ecuaciones de Frenet,

$$(5.20) \quad \begin{cases} T_s = & cn \\ n_s = & -cT & + \tau b \\ b_s = & & - \tau n \end{cases}$$

se obtiene que

$$(5.21) \quad \chi_t = cb.$$

En (5.20) c representa la curvatura, τ la torsión, n es el vector normal y b el binormal; es por esta razón que a (5.19) se le conoce como el flujo de la binormal.

El flujo de la binormal fue introducido por primera vez por Da Rios en 1906 en su tesis de *laurea* dirigida por Levi-Civita [44], como una aproximación a la evolución de un filamento de vorticidad (*vortex filament*), o un *hilo de torbellino* traducción debida a Santaló [136] y que utilizaremos a partir de ahora.

Por lo tanto, el escenario es el que corresponde a las ecuaciones de Euler en tres dimensiones. Estas ecuaciones describen la dinámica de un fluido ideal e incompresible. Por hilo de torbellino entendemos que el fluido se caracteriza por la siguiente propiedad: la vorticidad, i.e. el campo vectorial que se obtiene al calcular el rotacional del campo de velocidades, está dada por una medida vectorial que tiene el soporte contenido en una curva (el hilo). Nuestro mayor interés se centra en dos tipos de ejemplos. Primero, en las curvas que tienden a infinito, o bien a dos rectas, o bien a dos espirales logarítmicas. Y segundo, en el caso de los polígonos regulares.

Es bien sabido que el campo de velocidades puede obtenerse a partir de la vorticidad utilizando la integral singular de Biot-Savart. El cálculo de esta integral no presenta ninguna dificultad para aquellos puntos que no se encuentran en el propio hilo. Sin embargo, para saber la velocidad del filamento necesitamos saber precisamente el valor de la integral en puntos que yacen en él. No hay una manera sencilla de hacer esto, debido a las singularidades que aparecen en la integral. Da Rios hace un desarrollo de Taylor alrededor del punto del hilo donde se debe calcular la velocidad. El primer término de este desarrollo consiste

en sustituir la curva por la recta tangente, con lo que la velocidad es la inducida por un hilo de torbellino recto. En este caso el fluido rota alrededor de la recta con una velocidad que es proporcional al inverso de la distancia a la misma, pero que no mueve el hilo. Es por ello que este primer término no afecta al movimiento, y, por tanto, no se tiene en consideración.

El término relevante es precisamente el siguiente, que apunta en la dirección de la binormal y es proporcional a la curvatura. Este término presenta dos problemas. Primero hay que truncar la integral ya que de otra forma diverge logarítmicamente. Este hecho supone en sí mismo una fuerte limitación ya que solo se tienen en consideración los efectos locales, cuando una de las mayores dificultades que plantean las ecuaciones de Euler es que, debido a la presencia de la vorticidad, la ecuación además de ser no lineal es no local. El segundo inconveniente es que incluso después del truncamiento, el término que se obtiene crece logarítmicamente con la distancia al filamento. Da Rios renormaliza el tiempo para absorber este crecimiento y finalmente obtiene salvo constantes la ecuación (5.19). El proceso de localización de la integral de Biot-Savart hace que este modelo también se conozca por la expresión *Localized Induction Approximation*, LIA. Como consecuencia, (5.19) supone, cuando menos a nivel cuantitativo, una aproximación muy cruda de la evolución real de un hilo de torbellino. Las limitaciones del modelo se pueden ver en [134], y en [96] y en [97] algunos resultados recientes rigurosos sobre la relación del modelo con las ecuaciones de Euler.

Sin embargo, el flujo binormal captura algunos de los ejemplos bien conocidos de torbellinos, como las líneas rectas, relacionadas con los tornados o con el vórtice que se genera al vaciar una bañera, y los anillos de humo que pueden crearse fácilmente, por ejemplo, mediante un cañon de humo de forma circular, o reteniendo humo en la boca y expulsándolo abruptamente. Además, y como veremos más adelante, las hélices también son soluciones de (5.19). Recordemos que gracias a los trabajos de Hardin se ha demostrado que existen hilos de torbellino de forma helicoidal que son soluciones de las ecuaciones de Euler (ver [87]).

Uno de los principales propósitos de la investigación que hemos realizado a lo largo de estos años, es mostrar el interés matemático del

flujo de la binormal por sí mismo. De hecho, lo entendemos como un objeto geométrico universal que aparece en diferentes situaciones físicas. Por ejemplo, si en (5.19) diferenciamos formalmente con respecto al parámetro de longitud de arco, obtenemos la siguiente ecuación (recordemos que $\chi_s = T$)

$$(5.22) \quad \begin{cases} T_t = T \wedge T_{ss} \\ |T|^2 = 1. \end{cases}$$

Obsérvese que la segunda ecuación en (5.22) es siempre cierta si lo es en el tiempo inicial. Esta es una consecuencia fácil de (5.22) como se puede ver al calcular $\partial_s |T|^2$. (5.22) no es más que lo que se conoce como el mapa de Schrödinger (*Schrödinger map* en la literatura en inglés) en la esfera unidad \mathbb{S}^2 . Este es un modelo simplificado de la conocida ecuación de Landau y Lipschitz para el ferromagnetismo. En este caso $T(s, t)$ representa el espín, ver por ejemplo [112], [113] y [114].

Otro ejemplo sorprendente es el uso hecho por Peskin y McQueen de (5.19) en [129] para describir la forma de una válvula aórtica humana. En ese modelo, la ecuación aparece como consecuencia de un equilibrio mecánico de las fuerzas involucradas.

La ecuación (5.22) es uno de los ejemplos más sencillos de una ecuación no lineal de Schrödinger. De hecho, (5.22) se puede reescribir de la forma

$$(5.23) \quad T_t = JD_s T_s,$$

siendo D_s la derivada covariante y J la estructura compleja de la variedad imagen, la esfera \mathbb{S}^2 en el caso de la ecuación del hilo de torbellino. Una alternativa a la esfera es considerar por ejemplo que $T(s, t) \in \mathbb{H}^2$ el espacio hiperbólico.

Desde el punto de vista de ecuaciones en derivadas parciales el problema de valores iniciales asociado a (5.23) ha sido estudiado ampliamente. Una primera observación a este respecto es que el conjunto de soluciones de (5.22) es invariante respecto de un semigrupo de escalas. En concreto, si $\lambda > 0$ y suponemos que $T(s, t)$ es una solución, entonces

$$(5.24) \quad T_\lambda(s, t) := T(\lambda s, \lambda^2 t) \quad ; \quad s \in \mathbb{R},$$

es también una solución. Si medimos la regularidad de T en la variable espacial por medio de los espacios de Sobolev

$$(5.25) \quad \dot{H}^{1/2} := \left\{ T_0 : \|T_0\|_{\dot{H}^{1/2}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |D^{1/2}T_0(s)|^2 ds < +\infty \right\},$$

entonces se obtiene que la norma es invariante por el reescalamiento (5.24). En (5.25) se está usando la definición $D^{1/2} = (-\Delta)^{1/4}$.

Una segunda observación es que (5.23) es una ecuación hamiltoniana cuya energía viene dada por

$$(5.26) \quad \|T\|_{\dot{H}^1}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |T_s(s, t)|^2 ds,$$

cantidad esta última que se preserva formalmente por el flujo. Usando (5.21), obtenemos que (5.26) es igual a

$$(5.27) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |c(s, t)|^2 ds.$$

Nuestro interés principal es considerar curvas que sean solución de (5.19) y que tengan una regularidad crítica (i.e. sea invariante) con respecto a (5.24), cosa que no ocurre con (5.27). La razón de este interés quedará explicada cuando relacionemos el efecto de Talbot con la dinámica generada por curvas que inicialmente están dadas por polígonos regulares. Los ejemplos más sencillos de soluciones que tienen esta regularidad crítica son las soluciones autosemejantes que tienen la forma

$$(5.28) \quad \chi(s, t) = \sqrt{t}G(s/\sqrt{t}), \quad t > 0,$$

para cierta G elegida de forma conveniente.

Observemos también que la ecuación (5.19) es invariante bajo el grupo de las rotaciones. Este hecho sugiere que es posible hacer una pequeña modificación del ansatz (5.28) y buscar soluciones con la forma

$$(5.29) \quad \chi(s, t) = e^{\mathcal{A} \lg t} \sqrt{t}G(s/\sqrt{t}), \quad t > 0,$$

siendo \mathcal{A} una matriz 3×3 real y antisimétrica. Por simplicidad nos reduciremos a soluciones de (5.19) del tipo dado en (5.28). Las de la forma (5.29) se pueden encontrar en [84] y [114]. La estabilidad de estas

últimas plantea problemas delicados que caen dentro del análisis de Fourier y que empezamos a resolver en [85] quedando todavía muchas cuestiones abiertas.

Encontrar soluciones de (5.28) es un ejercicio elemental de geometría diferencial. Usando (5.19) se obtiene fácilmente que G tiene que resolver la ecuación diferencial ordinaria

$$(5.30) \quad \frac{1}{2}G - sG' = G' \wedge G''.$$

Derivando y llamando con un pequeño abuso de notación $G' = T$ obtenemos

$$(5.31) \quad -\frac{1}{2}sT' = T \wedge T''.$$

El lado derecho de (5.31) se escribe como $c'b - \tau n$ mientras que el izquierdo es $-scn$. Como consecuencia se obtiene que las soluciones de (5.30) son las curvas determinadas por las propiedades geométricas ([112], [113], [31])

$$(5.32) \quad c = a \quad ; \quad \tau = \frac{s}{2}.$$

No es difícil probar, véase [83], que dado cualquier $a > 0$ ($a = 0$ es el ejemplo trivial de la línea recta) existen dos vectores unitarios A_a^+ and A_a^- tales que

$$(5.33) \quad \left| G(s) - A_a^\pm s \right| \leq \frac{c_a}{1 + |s|}, \quad s \neq 0.$$

Debido a la invarianza por rotaciones podemos suponer sin pérdida de generalidad que las condiciones iniciales para el sistema de Frenet en $s = 0$ son

$$(T(0), n(0), b(0)) = \mathbf{1}_{3 \times 3},$$

siendo $\mathbf{1}_{3 \times 3}$ la matriz identidad.

Se prueba en [83] que dado cualquier $a > 0$ existe una única solución de (5.28) que satisface dichas condiciones iniciales. Llamaremos a esa tal solución G_a .

De (5.30) se obtiene que

$$(5.34) \quad G_a(0) = 2a(0, 0, 1),$$

y definiendo

$$(5.35) \quad \chi_a(s, t) = \sqrt{t}G_a\left(\frac{s}{\sqrt{t}}\right)$$

concluimos de (5.33) y (5.34), que χ_a es una solución analítica de (5.19) ($t > 0$) tal que

$$(5.36) \quad \chi_a(s, 0) = \begin{cases} A_a^+ s & s \geq 0 \\ A_a^- s & s \leq 0. \end{cases}$$

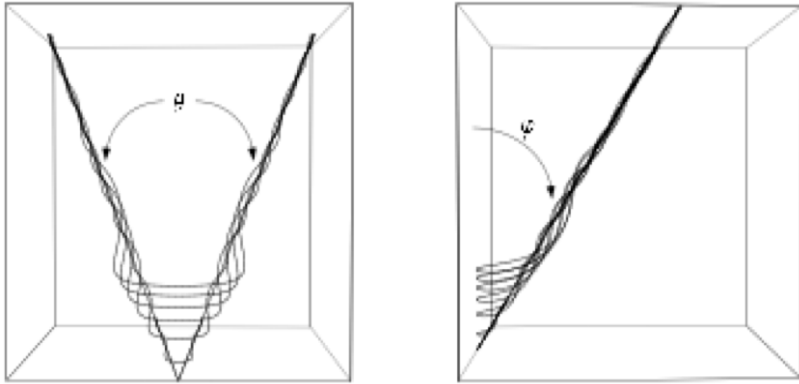


Figura 7: Una solución autosemejante del flujo de la binormal.

En la figura 7 se puede ver $\chi_a(s, t)$ para varios tiempos. Sorprende, al menos desde nuestro punto de vista, la similaridad de estas curvas con las líneas de corriente que se visualizan alrededor de un ala delta (ver por ejemplo la figura 8 y [46] para los detalles). En [84] se hace un análisis similar al que acabamos de realizar para el ansatz (5.29), aunque los resultados son mucho menos completos que los obtenidos en [83]. Sin embargo filamentos con la forma de espirales logarítmicas, que son los relacionados con (5.29), también aparecen en experimentos reales, en concreto en las llamadas turbinas de Francis (véase [85]).

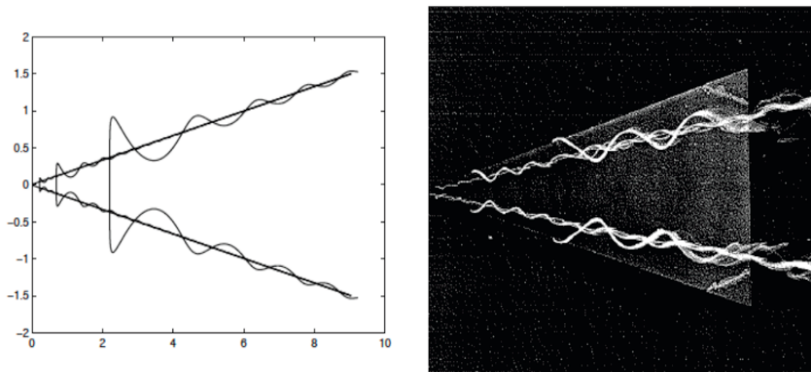


Figura 8: Comparación entre la solución autosemejante del flujo de la binormal (izda.) y las líneas de corriente alrededor de un ala delta (dcha.).

Una pregunta natural que surge del hecho de que el dato inicial asociado a χ_a es el dado en (5.36), es si el problema se puede invertir. En otras palabras, si (A_1, A_2) es un par de vectores unitarios cualesquiera, ¿existe una solución χ_a tal que

$$(5.37) \quad A_a^+ = A_1 \text{ y } A_a^- = A_2?$$

Obsérvese que (5.19) es invariante por el cambio de variable $(s, t) \rightsquigarrow (-s, -t)$, ya que si $\chi(s, t)$ es una solución de (5.19) entonces

$$(5.38) \quad \tilde{\chi}(s, t) = \chi(-s, -t)$$

es también una solución. Este hecho tiene dos consecuencias: primero, que (5.19) es reversible en el tiempo; y segundo, que hay que considerar curvas orientadas. Esto significa que la solución dada por (A_1, A_2) no es la misma que la obtenida por (A_2, A_1) . Por otro lado, es muy simple obtener una de la otra. Para ello basta con considerar la rotación ρ tal que

$$(5.39) \quad \rho(A_1) = -A_2 \quad ; \quad \rho(A_2) = -A_1 \quad ; \quad \rho(A_1 + A_2) = A_1 + A_2.$$

En otras palabras, ρ es la rotación con ángulo π y eje $A_1 + A_2$.

Recuérdese que $(T(0), n(0), b(0)) = \mathbf{1}_{3 \times 3}$. Como consecuencia, podemos suponer sin pérdida de generalidad que el par (A_1, A_2) está determinado por el ángulo θ dado por

$$(5.40) \quad \cos \theta = A_1 \cdot A_2.$$

En [83] se prueba que dado G_a y llamando θ al ángulo que forman A_a^+ y A_a^- , entonces

$$(5.41) \quad \cos \frac{\theta}{2} = e^{-\pi a^2/2}.$$

Por tanto, dado cualquier par $(A_1, A_2) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ tal que $A_1 + A_2 \neq 0$ hay una única G_a con $(A_a^+, A_a^-) = (A_1, A_2)$. Este resultado de existencia y unicidad demuestra que hay una manera única de extender χ_a de manera continua para $t \leq 0$ dentro del conjunto de soluciones autosemejantes. De hecho, es suficiente definir

$$(5.42) \quad \chi_a(s, t) = \rho_a \chi_a(-s, -t), \quad t < 0,$$

con ρ_a como en (5.39) y $(A_1, A_2) = (A_a^+, A_a^-)$. Se podría pensar que esta es una construcción artificial y que no hay ninguna razón a priori para creer que la familia de curvas así obtenida sea una solución de (5.19). El hecho de que χ_a , determinada por (5.35), (5.36) y (5.42), es la solución única de (5.19) en un sentido adecuadamente definido y con datos iniciales (5.36), es una de las consecuencias no triviales probadas en [11], [12], [13] y [15]. Este es el primer resultado que se conoce sobre la continuación de soluciones que desarrollan singularidades en el contexto de las ecuaciones no lineales de Schrödinger.

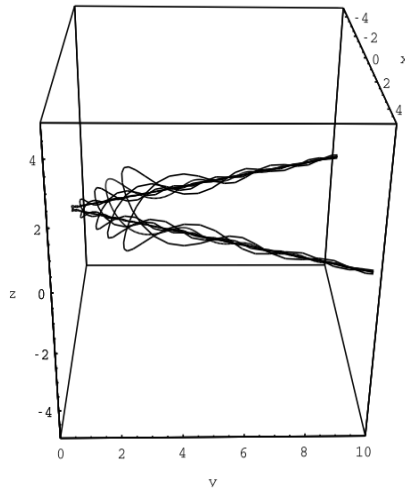


Figura 9: Evolución de la solución autosemejante para tiempos positivos y negativos. La estabilidad de la misma ha sido establecida en [11], [12], [13] y [15].

5.4 La transformación de Hasimoto

Como hemos dicho, nuestro mayor interés reside en curvas que desarrollan singularidades en forma de esquinas o de espirales logarítmicas. Para ello no parece razonable utilizar el triedro de Frenet, que obliga a que, por ejemplo, la curvatura sea una función que no se anula. Una alternativa es utilizar triedros distintos. En concreto el que se conoce como *parallel frame* formado por los vectores ortonormales (T, e_1, e_2) que satisfacen

$$(5.43) \quad \begin{cases} T_s = \alpha e_1 + \beta e_2 \\ e_{1s} = -\alpha T \\ e_{2s} = -\beta T. \end{cases}$$

El siguiente paso es considerar la función

$$(5.44) \quad \Psi(s, t) = \alpha(s, t) + i\beta(s, t),$$

usada por Hasimoto en su célebre trabajo y a la que llamó función del filamento [91]¹⁹. El punto clave consiste en calcular la ecuación que satisface Ψ . La respuesta se encuentra en [89], siendo la conclusión que Ψ es solución de la ecuación unidimensional cúbica de Schrödinger:

$$(5.46) \quad \Psi_t = i \left\{ \Psi_{ss} + \frac{1}{2} (|\Psi|^2 - A(t)) \Psi \right\}, \quad A(t) \in \mathbb{R}.$$

Ejemplos de soluciones de (5.19) que se obtienen fácilmente son los mencionados anteriormente:

- La línea recta corresponde a $\Psi \equiv 0$; $A(t) = 0$.
- El círculo se obtiene tomando $\Psi = a$; $A(t) = a^2$.
- La hélice corresponde a $\Psi = a$; $A(t) = a^2$.
- Las soluciones autosemejantes vienen dadas por

$$(5.47) \quad \Psi_a = \frac{a}{\sqrt{it}} e^{is^2/4t} \quad ; \quad A(t) = \frac{a^2}{t}, \quad t > 0.$$

¹⁹ En términos del triedro de Frenet Ψ se escribe

$$(5.45) \quad \Psi(s, t) = c(s, t) \exp(i \int_0^s \tau(s', t) ds')$$

siendo c la curvatura y τ la torsión.

Es importante señalar que la hélice se puede obtener directamente del círculo utilizando la llamada simetría galileana que deja invariante el conjunto de soluciones de (5.46). Como vimos en la sección 2.2, esta simetría es la siguiente:

$$(5.48) \quad \Psi_N(s, t) = e^{-itN^2 + iNs} \Psi(s - 2Nt, t), \quad N \in \mathbb{R}$$

es una solución de (5.46) si Ψ lo es.

Es bien sabido que (5.46) es un sistema completamente integrable con infinitas cantidades conservadas. Sin embargo, no haremos uso de este hecho en esta memoria. La ley de conservación más simple es, cf. (5.26) y (5.27),

$$(5.49) \quad \frac{d}{dt} \int |\psi(s, t)|^2 ds = 0.$$

Pero $\Psi_a = \frac{a}{\sqrt{it}} e^{is^2/4t}$ no es de cuadrado integrable en toda la recta y, por lo tanto, (5.49) no se puede usar. Esta es una de las principales dificultades que hay que superar para estudiar la estabilidad de Ψ_a . Sin embargo, téngase en cuenta que la hélice es otro ejemplo relevante de una curva con una función del filamento cuyo cuadrado no es integrable. Por otro lado, ambos ejemplos están localmente en L^2 , lo que parece una suposición muy natural desde un punto de vista geométrico.

En cualquier caso, hay una manera sencilla de ver que Ψ_a pertenece a un espacio de funciones natural. La forma de proceder es recordando otra de las simetrías relevantes asociadas a la ecuación de Schrödinger que mencionamos en la sección 2.2, y que, como hemos visto, juega un papel fundamental en la demostración del carácter multifractal de la función no diferenciable de Riemann. Se trata de la transformación conforme: dada una solución $\Psi(x, t)$ de (5.46) se construye la función $v = v(s, t)$,

$$(5.50) \quad \Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{it}} e^{i\frac{x^2}{4t} v} \left(\frac{1}{t}, \frac{x}{t} \right).$$

Una computación sencilla prueba que v es entonces una solución de

$$(5.51) \quad iv_t + v_{xx} + \frac{1}{2t} (|v|^2 - a^2) v = 0.$$

Es fácil demostrar que esta ecuación preserva por un lado las condiciones de contorno periódicas y por otro que preserva la norma L^2 :

$$\int_0^{2\pi} |v(x, t)|^2 dx = \int_0^{2\pi} |v(x, 0)|^2 dx.$$

Además, se deduce de la propia definición de Ψ_a que $v_a = a$, por lo que obtenemos una solución de (5.51) que es de cuadrado integrable en cualquier periodo.

5.5 Curvas poligonales

Hemos visto en la sección anterior que la formación y desaparición instantánea de una esquina es posible gracias a la caracterización de la familia de las soluciones autosemejantes, y al estudio de la estabilidad de las mismas realizado en [13]. En este trabajo se analiza la evolución de curvas no cerradas cuya curvatura está localmente en L^2 , salvo en un punto en el que en el instante inicial hay una esquina. Por otro lado, veremos en la sección 5.8 que para polígonos regulares planos con M lados la evolución presenta las mismas características que exhibimos al hablar del efecto de Talbot. Aunque el análisis teórico de estas soluciones es muy complicado, la evidencia numérica que se establece en [97] y [47] es muy sólida. Por ejemplo se prueba en [47] que se generan curvas albeadas dadas por polígonos con Mq lados si $t_{p,q} = \frac{p}{2\pi q}$ y q es un número entero impar. Por ello, en esta sección nos centraremos en curvas que en tiempo inicial son líneas poligonales que tienden a dos rectas en el infinito. Los resultados presentados son un paso importante para llenar el vacío entre el caso de una esquina y la cuestión mucho más delicada de los polígonos cerrados.

En concreto, el resultado principal que se prueba en [16] es el siguiente.

Teorema 1 (La evolución por el flujo de la binormal de hilos de torbellino poligonales) Sea χ_0 una línea poligonal parametrizada por longitud de arco con las esquinas localizadas en los números enteros $k \in \mathbb{Z}$, y sean $\theta_k \in (0, \pi)$ los ángulos de dichas esquinas. Si la sucesión, cf. (5.41),

$$(5.52) \quad \alpha_k \sqrt{-\frac{2}{\pi} \log \left(\sin \left(\frac{\theta_k}{2} \right) \right)},$$

es tal que para $p=2$ y $s=3$

$$\|\{\alpha_k\}\|_{l^{p,s}} := \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|)^{ps} |\alpha_k|^p \right)^{1/p}$$

es finita, entonces existe $\chi(t)$, una solución regular de (5.19) si $t \neq 0$ y una solución de (5.19) en el sentido débil en toda la recta, tal que

$$|\chi(t, x) - \chi_0(x)| \leq C\sqrt{t}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, |t| \leq 1.$$

Merece la pena hacer algunos comentarios generales sobre los distintos pasos de la demostración. Tanto (5.41) como la transformada de Hasimoto sugieren considerar la ecuación unidimensional cúbica de Schrödinger (5.46) con datos iniciales

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \delta(x - k),$$

siendo α_k números complejos definidos de manera precisa a partir de χ_0 . Más concretamente usando la forma polar $\alpha_k = \rho_k e^{i\theta_k}$ con $0 \leq \theta_k < 2\pi$ elegimos

$$\rho_k = \sqrt{-\frac{2}{\pi} \log \left(\sin \left(\frac{\theta_k}{2} \right) \right)},$$

y θ_k determina la *torsión* en cada esquina. Es decir, el ángulo que forma el plano determinado por los lados $k-1$ y k con el consecutivo formado por los lados k y $k+1$. Un primer paso no trivial es un resultado de existencia y unicidad de la solución $\Psi(t)$ de (5.46) en $t > 0$ con dichos datos iniciales. Esta solución resulta ser regular en $]0, \infty[$, lo que permite construir una curva suave $\chi(t)$ del flujo binormal para $t > 0$, que demostramos que tiene un límite $\chi(0)$ en $t=0$. El siguiente objetivo es mostrar, módulo una translación y una rotación, que $\chi(0)$ es χ_0 . Esto se hace en varios pasos. Primero mostramos que el vector tangente tiene un límite en $t=0$. En segundo lugar, mostramos que dicho límite es constante a trozos, por lo que $\chi(0)$ es un segmento para $x \in]k, k+1[$

con $k \in \mathbb{Z}$. Luego probamos, utilizando la clasificación de las soluciones autosemejantes dada en [83], que $\chi(0)$ presenta esquinas en las mismas ubicaciones que χ_0 , con los mismos ángulos que χ_0 .

La recuperación de la torsión de χ_0 es más delicada. Primero se define el vector normal complejo $N = e_1 + ie_2$ y se prueba que su evolución para $t > 0$ se ve afectada por una corrección logarítmica de la fase provocada por ser el potencial cúbico de (5.46) de largo alcance, ya que la dimensión espacial es uno. Una vez hecha esta corrección se prueba que la modulación del vector normal $\tilde{N}(t, x) = e^{i \sum_{j \neq x} |\alpha_j|^2 \log \frac{x_j}{\sqrt{t}}} N(t, x)$ también tiene límite en $t = 0$. Y finalmente, se vuelve a usar la clasificación de las soluciones autosemejantes, y sus sistemas ortonormales asociados, para calcular las torsiones asociadas a cada esquina.

Como resultado final se recupera χ_0 módulo una traslación y una rotación, que se fijan a partir de las condiciones iniciales del problema. De esta forma se obtiene $\chi(t)$, la solución deseada del flujo binormal para $t > 0$ con límite χ_0 en $t = 0$. La unicidad se prueba dentro de la clase de curvas cuya transformación de Hasimoto es (5.44). De una forma similar a la anterior, podemos extender $\chi(t)$ a tiempos negativos usando la reversibilidad en el tiempo de la ecuación.

5.6 La ecuación cúbica de Schrödinger en una dimensión con masas de Dirac equiespaciadas como dato inicial

Como hemos visto en la sección anterior, el problema geométrico de resolver la ecuación del hilo de torbellino cuando en el tiempo inicial es una línea poligonal, se reduce a encontrar la solución de (5.46) con datos iniciales

$$(5.53) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \delta(x - k).$$

Repasemos primero los resultados conocidos sobre el problema de valores iniciales en el marco de los espacios de Sobolev. La ecuación está bien planteada en H^s , para cualquier $s \geq 0$ ([78], [35]). Por otro lado, para $s < 0$ el problema de Cauchy está mal planteado debido a las transformaciones de Galileo, según se prueba en [103], trabajo que fue extendido en [39] donde se prueba el fenómeno que se conoce como

inflación de normas (i.e. existe una sucesión de datos iniciales todos del mismo tamaño tales que la norma de las soluciones tiende a infinito en un tiempo dado). Recordemos que si, en vez de considerar el grupo de las simetrías de Galileo, se analiza el semigrupo de las dilataciones el espacio crítico es $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}$. En este caso, el fenómeno de inflación de la norma se probó en [33], [108] y [125]. Finalmente, cotas superiores para el crecimiento de las normas de Sobolev para soluciones en la clase de Schwartz y $-\frac{1}{2} < s < 0$, tanto en la recta real como en el toro, se han probado en [107] y [111].

Por otro lado, en un trabajo pionero [140] empezamos a analizar, motivados precisamente por el problema del hilo de torbellino, espacios de funciones y/o distribuciones alternativos a los espacios de Sobolev. En este trabajo hacemos una conexión entre este problema en ecuaciones en derivadas parciales y ciertas propiedades de restricción de la transformada de Fourier a superficies curvadas que fueron puestas de manifiesto por E. Stein a finales de los años 60 del siglo pasado; véase la monografía del mismo autor [137]. Esta conexión sugiere que una forma natural de medir la regularidad del dato inicial es establecer a qué espacio de Lebesgue L^p , $p < +\infty$, pertenece su transformada de Fourier. La conclusión final se puede encontrar en [40] y en [82], y permite un resultado positivo siempre que $p < \infty$. Desafortunadamente, la delta de Dirac se caracteriza porque su transformada de Fourier está en L^p si y solo si $p = \infty$, lo que nos da otra indicación de la dificultad que supone resolver (5.46) con datos iniciales (5.53).

En concreto, supongamos que solo tenemos una masa de Dirac en $t=0$. Como hemos dicho, pertenece a $\mathcal{F}(L^\infty)$ (i.e. las distribuciones cuya transformada de Fourier son acotadas) y, por tanto, está en los espacios de Sobolev H^s para $s < -\frac{1}{2}$. Pues bien, en este caso (5.46) está mal planteada. Más precisamente, se muestra en [103] mediante el uso de la invarianza galileana, que si existe una solución única, esta debería ser para tiempos positivos

$$\alpha \frac{e^{-i\frac{|\alpha|^2}{4\pi} \log \sqrt{t+i\frac{x^2}{4t}}}}{\sqrt{4\pi it}},$$

y por tanto el dato inicial no se puede recuperar. Sin embargo, es inmediato observar que un simple cambio logarítmico de la fase da lugar a la solución de la ecuación modificada (cf. (5.46))

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u \pm \frac{1}{2}(|u|^2 - A(t))u = 0, \\ u(0) = \alpha\delta_0, \end{cases}$$

con $A(t) = \frac{\alpha^2}{4\pi t}$. Con esta elección, la ecuación tiene como solución precisamente la solución fundamental de la ecuación lineal (2.9). Añadir el potencial real $A(t)$ es inocuo desde un punto de vista geométrico ya que el problema es invariante gauge. En otras palabras, si $A(t)$ es real, el hilo de torbellino construido a partir de una solución de la ecuación de Schrödinger $\Psi(x, t)$ es el mismo que el construido a partir de $e^{iA(t)}\Psi(x, t)$. En el contexto de las ecuaciones en derivadas parciales, esta renormalización de tipo *Wick* fue introducida de forma artificial por J. Bourgain en [29] para construir la medida invariante de Gibbs del conjunto de soluciones del problema con condiciones de contorno periódicas establecido en [28]. Esta renormalización se necesita para evitar algunos términos resonantes que de otra forma dan lugar a cantidades infinitas y se incluye de forma sistemática en trabajos posteriores [40], [123] y [124]. Obsérvese que en nuestro caso es una renormalización natural inducida por la geometría del problema. Pese a todo, incluso con esta renormalización el problema está mal propuesto, ya que en [12] se prueba que pequeñas perturbaciones regulares de $\Psi_\alpha(t)$ en $t=1$ se comportan cerca de $t=0$ como $\Psi_\alpha(t) + e^{i\log t}f(x)$ para alguna $f \in H^1$. La aparición del factor logarítmico lleva a una pérdida de información de la fase cuando t tiende a cero. Es lo que en la literatura se conoce como el *problema de la pérdida de la fase*.

Esta pérdida de la fase es un fenómeno habitual en las ecuaciones no lineales de Schrödinger que desarrollan singularidades, y es, por supuesto, una consecuencia de la invarianza gauge de la ecuación. ¿Cómo continuar la solución después de que se haya formado la singularidad? Es un tema relevante que aparece de forma recurrente en la literatura, ver por ejemplo [118], [117], [27] y [115]. Como ya hemos mencionado, en [14] encontramos una forma geométrica natural para continuar la solución de la ecuación del hilo de torbellino después de que la singularidad ha aparecido, en nuestro caso en la forma de una esquina. Como el flujo de la binormal es reversible en el tiempo, para poder prolongar de forma única una solución para tiempos negativos se requiere obtener la traza de $\chi(0)$ en $t=0$. A partir de ahí se considera la curva orientada de forma inversa $\chi(0, -s)$ como nuevo dato inicial y se construye, usando el mismo procedimiento y para tiempos positivos, la solución

única que en $t=0$ coincide con ella. Un tema muy delicado al usar este procedimiento es cómo determinar cuál es el triedro (T, e_1, e_2) adecuado en el tiempo $t=0$. Por un lado, es clave la caracterización de las soluciones autosemejantes probada en [83], y por otro hay que usar de forma crucial el resultado probado en [14] de que pequeñas perturbaciones regulares de las soluciones autosemejantes en un tiempo positivo no rompen la simetría de autosemejanza en la esquina que surge en $t=0$.

En el teorema 1 demostramos que este procedimiento puede extenderse, no sin dificultades, al caso de una línea poligonal. No es necesario que la línea sea plana y se permiten infinitas esquinas. En este caso, aparecen nuevos problemas relacionados con la pérdida de la fase en la ecuación de Schrödinger, y nuevamente la caracterización de las soluciones autosemejantes juega un papel crucial.

5.7 La energía es una función discontinua

Volvamos a la ecuación (5.46) con datos (5.53) satisfaciendo las condiciones del teorema 1. Esta elección de datos iniciales tiene su propio interés desde el punto de vista de la ecuación de Schrödinger, porque hasta donde sabemos y para un potencial no lineal cúbico en una dimensión, los únicos resultados rigurosos en el nivel crítico de regularidad son aquellos en [14] y [16], ya mencionados. El caso de deltas de Dirac todas ellas de la misma amplitud (i.e. $\alpha_k = \frac{2\pi}{M}$ siendo la curva inicial un polígono regular de M lados), se estudia en [47], donde como veremos más adelante se propone un candidato a solución.

El caso en el que el potencial no lineal en la ecuación de Schrödinger $|\Psi|^{p-1}\Psi$ es subcrítico (i.e. $p < 3$) se estudia en [109], donde se demuestra que hay una única solución de la forma

$$(5.54) \quad u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k(t) e^{it\Delta} \delta_k(x),$$

siendo $\{A_k\} \in \mathcal{C}([0, T]; l^{2,1}) \cap C^1(]0, T]; l^{2,1})$. A medida que la potencia no lineal se acerca al caso cúbico, el problema se hace cada vez más singular. En [16] se utiliza el mismo *ansatz* pero para la ecuación cúbica renormalizada por medio del potencial real $A(t)$, como hemos explicado anteriormente.

Observemos que el dato inicial (5.53) tiene la propiedad

$$(5.55) \quad \widehat{u(0)}(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{-ik\xi},$$

y, en particular, $\widehat{u(0)}$ es 2π -periódica. Además, la condición $\{\alpha_k\} \in l^{2,s}$ se traduce en $u(0) \in H^s(0, 2\pi)$. Recíprocamente, toda función 2π -periódica se puede descomponer como en (5.55) y representa por tanto la transformada de Fourier de una combinación de masas de Dirac como (5.54). Llamaremos

$$H_{pF}^s := \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) : \hat{u}(\xi + 2\pi) = \hat{u}(\xi), \hat{u} \in H^s(0, 2\pi)\},$$

que está trivialmente contenido en $\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \{\|\hat{u}\|_{H^s(2\pi j, 2\pi(j+1))}\}_j \in l^\infty\}$. También usaremos la notación

$$\|u\|_{H_{pF}^s} = \|\hat{u}\|_{H^s(0, 2\pi)}.$$

En [16] se prueba que (5.46) tiene una única solución si $s > \frac{1}{2}$. Este resultado es el que permite posteriormente probar el teorema 1. La prueba es una aplicación del teorema del punto fijo en una bola de un espacio de Banach elegido de forma adecuada. Una observación relevante es que hay una cantidad natural conservada ya que al menos formalmente

$$(5.56) \quad \partial_t \sum_j |A_j(t)|^2 = 0,$$

y por tanto la norma l^2 se mantiene constante. De forma equivalente se puede escribir que

$$\int_0^{2\pi} |v(t, x)|^2 dx = \text{constante},$$

siendo $v(x, t)$ la solución de (5.51). Por tanto, se concluye que las soluciones autosemejantes tienen una masa/energía finita para la ecuación cúbica de Schrödinger en una dimensión si esta masa/energía se define de forma adecuada. Esto no tiene nada que ver con que el sistema sea completamente integrable, ya que también es cierto en los casos subcríticos estudiados en [109].

Para terminar esta sección mostraremos algunas de las propiedades *no lineales* que poseen las soluciones construidas. Nos referimos a las soluciones del problema geométrico (5.19), ya que en el caso de la ecuación de Schrödinger la solución se construye de forma perturbativa, y, por tanto, al menos para tiempos cortos, la solución no lineal se comporta como la solución lineal.

La primera cuestión que planteamos es cuál es el significado geométrico de (5.56). Es decir, cuál es el equivalente de esta cantidad conservada en el contexto tanto de la ecuación del hilo de torbellino (5.19) como en el del mapa de Schrödinger (5.22). Recordemos que para las soluciones regulares de (5.19) la densidad de energía viene dada por

$$c^2 dx = |T_x|^2 dx,$$

siendo c la curvatura. Como consecuencia, aquellas soluciones de (5.22) que se construyen a partir de soluciones de (5.46) y que tienen la norma L^2 finita tienen una energía que también es finita. Pero este no es el caso para las soluciones singulares que nos interesan. Resulta que la forma correcta de interpretar (5.56) es por medio de la transformación de Fourier respecto de la variable espacial de T_x . Entonces, la energía aparece como una energía de scattering que se conserva para $t \neq 0$, mientras que tiene un salto en $t=0$. Más concretamente, se tiene el siguiente resultado [17].

Teorema 2 Sea χ la solución del flujo de la binormal (5.19) con dato inicial una línea poligonal establecida en el teorema 1, y T la indicatriz tangente. Definimos

$$(5.57) \quad \Xi(T(t)) := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_k^{k+1} |\widehat{T}_x(t, \xi)|^2 d\xi.$$

Para $t > 0$ se tiene la siguiente ley de conservación

$$(5.58) \quad \Xi(T(t)) = 4\pi \sum_j |\alpha_j|^2.$$

Sin embargo, en $t=0$, momento en el que χ desarrolla singularidades en forma de esquina, se tiene que

$$(5.59) \quad \int_k^{k+1} |\widehat{T}_x(0, \xi)|^2 d\xi = 4 \sum_j (1 - e^{-\pi|\alpha_j|^2}), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto, hay una discontinuidad de salto de $\Xi(T(t))$ en $t=0$, que prueba que hay un crecimiento para $t > 0$ y decrecimiento para $t < 0$ de la energía de las frecuencias altas ya que

$$(5.60) \quad \Xi(T(0)) = 4 \sum_j (1 - e^{-\pi|\alpha_j|^2}) < 4\pi \sum_j |\alpha_j|^2 = \Xi(T(t)).$$

La prueba de este teorema, aunque bastante técnica, utiliza herramientas elementales del análisis de Fourier. Se basa en una descomposición cuidadosa de $\widehat{T}_x(t, \xi)$ en unos términos dominantes que dan lugar a $\Xi(T(t))$, y otros términos resonantes. Estos últimos son más delicados ya que a priori pueden dar lugar a un crecimiento logarítmico. Se prueba entonces que la región donde dicho crecimiento puede ocurrir es pequeña y su aportación desaparece al calcular el límite de altas frecuencias. En cualquier caso, estas resonancias requieren un estudio más cuidadoso ya que podrían estar relacionadas con los experimentos numéricos realizados en [49] y de los que hablaremos más adelante.

Es oportuno observar que $\Xi(T(t))$ mide la amplitud de las altas frecuencias de la variación espacial de T . Por otro lado, T hay que interpretarla como la dirección de la vorticidad en el contexto de la mecánica de fluidos, ya que es la dirección del hilo de torbellino y, por tanto, del soporte de la vorticidad. Conviene recordar a este respecto el criterio [41] de Constantin-Fefferman-Majda, el cuál establece que el crecimiento en la variación de la dirección de la vorticidad es necesario para producir singularidades en las ecuaciones de Euler en tres dimensiones.

Como ya hemos dicho, la densidad de masa en la ecuación de Schrödinger es $|\Psi(x, t)|^2 ds$. En el contexto de la ecuación del mapa de Schrödinger da lugar a la densidad de energía que ya hemos mencionado,

$$c^2 dx = |cn|^2 dx = |T_x|^2 dx,$$

siendo n el vector normal. Cuando se utiliza (5.22) como modelo matemático del ferromagnetismo, en cuyo caso se conoce como la ecuación de Landau-Lifshitz, esta energía es la de intercambio entre los distintos espines. Sin embargo, en el contexto de la ecuación de la binormal (5.19) existe otra posible interpretación ya que también se puede escribir

$$c^2 dx = |cb|^2 dx,$$

siendo b el vector binormal que determina la dirección de la velocidad del torbellino. En este caso, la interpretación física [133] es que se trata de la energía cinética²⁰ ya que $\chi_t = cb$. De hecho, obsérvese que $N_x = (e_1 + ie_2)_x = \Psi T$ luego $|N_x|^2 = |\Psi|^2$. Por lo tanto, parece oportuno preguntarse si la discontinuidad puesta de manifiesto en el teorema 2 ocurre también para N . La respuesta es positiva. Más concretamente,

$$(5.61) \quad \Xi(N(t)) := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_k^{k+1} |\widehat{N}_x(t, \xi)|^2 d\xi = 4\pi \sum_j |\alpha_j|^2,$$

pero

$$(5.62) \quad \Xi(\tilde{N}(0)) = 4 \sum_j (1 - e^{-\pi|\alpha_j|^2}),$$

siendo $\tilde{N}(0, x)$ el límite en $t = 0$ de ²¹

$$\tilde{N}(t, x) = e^{i \sum_{r \in \mathbb{Z}, r \neq x} |\alpha_r|^2 \log \frac{|x-r|}{\sqrt{t}}} N(t, x).$$

5.8 Los polígonos regulares

En esta sección esbozamos algunas ideas que se pueden encontrar en el artículo [47]. En ese trabajo se estudia el flujo de la binormal (5.19) tomando como condición inicial un polígono regular de M lados. Si se utiliza la transformación de Hasimoto, la condición inicial de la correspondiente ecuación de Schrödinger ha de ser

$$(5.63) \quad \Psi_M(s, 0) = \frac{2\pi}{M} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(s - \frac{2\pi k}{M}\right).$$

Obsérvese que

$$(5.64) \quad e^{iMjs} \Psi_M(s, 0) = \Psi_M(s, 0).$$

para todo $j \in \mathbb{Z}$.

²⁰ Véase a este respecto el modelo de Peskin y McQueen [129] sobre la arteria aorta donde ambas cantidades aparecen de forma natural como la tensión que se ejerce sobre la pared en las dos direcciones perpendiculares n y b .

²¹ La existencia de $\tilde{N}(0, x)$ se prueba en el Lemma 4.5 de [16].

Por otro lado, recordemos que las simetrías de Galileo, que ya nos han aparecido anteriormente en (5.48), dejan invariante el conjunto de soluciones (5.46). Por tanto, si hubiera unicidad del problema de valores iniciales asociado a (5.19) con dato (5.63) concluiríamos que

$$(5.65) \quad \Psi_M(s, t) = e^{iMks - i(Mk)^2 t} \Psi(s - 2Mkt, t), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Esta familia de identidades tiene importantes consecuencias ya que argumentos sencillos dan

$$\begin{aligned} \widehat{\Psi}_M(j, t) &= \frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi/M} e^{-iMjs} \Psi_M(s, t) ds \\ &= \frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi/M} e^{-iMjs} \left[e^{iMks - i(Mk)^2 t} \Psi(s - 2Mkt, t) \right] ds \\ &= \frac{Me^{-i(Mk)^2 t}}{2\pi} \int_0^{2\pi/M} e^{-iM(j-k)s} \Psi_M(s - 2Mkt, t) ds \\ &= \frac{Me^{-i(Mk)^2 t}}{2\pi} \int_0^{2\pi/M} e^{-iM(j-k)(s+2Mkt)} \Psi_M(s, t) ds \\ &= \frac{M}{2\pi} e^{-i(Mk)^2 t - iM(j-k)(2Mkt)} \int_0^{2\pi/M} e^{-iM(j-k)s} \Psi_M(s, t) ds \\ &= e^{-i(Mk)^2 t - iM(j-k)(2Mkt)} \widehat{\Psi}(j - k, t), \end{aligned}$$

para todo $j, k \in \mathbb{Z}$. Por tanto, si $j = k$ obtenemos que

$$(5.66) \quad \widehat{\Psi}_M(j, t) = e^{-i(Mj)^2 t} \widehat{\Psi}(0, t), \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Como consecuencia,

$$\left| \widehat{\Psi}(j, t) \right|^2 = \left| \widehat{\Psi}(0, t) \right|^2$$

y

$$(5.67) \quad \sum_j \left| \widehat{\Psi}(j, t) \right|^2 < +\infty$$

implica que $\widehat{\Psi}(0, t) \equiv 0$ y, por tanto, $\Psi(s, t) \equiv 0$. En otras palabras, concluimos que no hay solución si $\Psi(\cdot, t) \in L^2([0, 2\pi))$, como se puede esperar del caso de una esquina que estudiamos en secciones anteriores.

Téngase en cuenta, sin embargo, que Ψ_a dada en (5.47) está localmente en L^2 , algo que no puede ocurrir en el caso de condiciones de contornos periódicas, ya que estar localmente en L^2 implica estar en L^2 .

Sin embargo, podemos utilizar todavía las ideas anteriores si suponemos que

$$t = \frac{2\pi p}{M^2 q}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad \text{mcd}(p, q) = 1.$$

En este caso

$$\begin{aligned} \psi(s, t_{pq}) &= \widehat{\psi}(0, t_{pq}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i(Mk)^2 2\pi p / (M^2 q) + iMks} \\ &= \widehat{\psi}(0, t_{pq}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i(p/q)k^2 + iMks} \\ &= \widehat{\psi}(0, t_{pq}) \sum_{l=0}^{q-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i(p/q)(qk+l)^2 + iM(qk+l)s} \\ &= \widehat{\psi}(0, t_{pq}) \sum_{l=0}^{q-1} e^{-2\pi i(p/q)l^2 + iMl}s \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{iMqks}, \end{aligned}$$

expresión que ya nos había aparecido al hablar de la función no diferenciable de Riemann. Por tanto

$$\psi(s, t_{pq}) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{q-1} (\alpha_m + i\beta_m) \delta\left(s - \frac{2\pi m}{Mq}\right), & \text{si } q \text{ es impar,} \\ \sum_{m=0}^{q/2-1} (\alpha_{2m+1} + i\beta_{2m+1}) \delta\left(s - \frac{4\pi m + 2\pi}{Mq}\right), & \text{si } q/2 \text{ es impar,} \\ \sum_{m=0}^{q/2-1} (\alpha_{2m} + i\beta_{2m}) \delta\left(s - \frac{4\pi m}{Mq}\right), & \text{si } q/2 \text{ es par,} \end{cases}$$

y

$$|\alpha_m + i\beta_m| = \begin{cases} \frac{2\pi}{M\sqrt{q}} |\widehat{\psi}(0, t_{pq})|, & \text{si } q \text{ es impar,} \\ \frac{2\pi}{M\sqrt{\frac{q}{2}}} |\widehat{\psi}(0, t_{pq})|, & \text{si } q \text{ es par y } q/2 \equiv m \pmod{2}, \\ 0, & \text{si } q \text{ es par y } q/2 \not\equiv m \pmod{2}, \end{cases}$$

lo que nos permite concluir que en el tiempo t_{pq} , el ángulo ρ entre dos lados adyacentes es constante. Además, la estructura del polígono está completamente determinada por los ángulos θ_m que aparecen en la suma de Gauss ya que $\alpha_m + i\beta_m = \rho e^{i\theta_m}$.

Para obtener el polígono tenemos que integrar el sistema

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} T \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}.$$

Nótese que, en principio, el lado derecho de la identidad anterior no tiene sentido ya que la expresión de $\alpha + i\beta$ incluye deltas de Dirac, mientras que (T, e_1, e_2) tiene saltos. Concretamente,

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} T \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a\delta & b\delta \\ -a\delta & 0 & 0 \\ -b\delta & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}.$$

Esta aparente dificultad se resuelve como se hace en el caso de una curva plana con una esquina en un punto dado, donde el sistema de Frenet se integra fácilmente al escribirlo en forma de divergencia. Como consecuencia escribimos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1(0^+) \\ u_2(0^+) \\ u_3(0^+) \end{pmatrix} &= \exp \left[\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 \end{pmatrix} \int_{0^-}^{0^+} \delta(s') ds' \right] \cdot \begin{pmatrix} u_1(0^-) \\ u_2(0^-) \\ u_3(0^-) \end{pmatrix} \\ &= \exp \left[\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} u_1(0^-) \\ u_2(0^-) \\ u_3(0^-) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Iterando el procedimiento,

$$\begin{pmatrix} T \left(\frac{2\pi k^+}{Mq} \right)^T \\ e_1 \left(\frac{2\pi k^+}{Mq} \right)^T \\ e_2 \left(\frac{2\pi k^+}{Mq} \right)^T \end{pmatrix} = M_k \cdot M_{k-1} \cdot \dots \cdot M_1 \cdot M_0 \cdot \begin{pmatrix} T (0^-)^T \\ e_1 (0^-)^T \\ e_2 (0^-)^T \end{pmatrix},$$

siendo M_k , $k = 1, 2, \dots, Mq - 1$ matrices ortogonales. Pero queremos que el polígono sea cerrado, luego

$$M_{Mq-1} \cdot M_{Mq-2} \cdot \dots \cdot M_1 \cdot M_0 \equiv I.$$

No sin dificultad, y después de hacer experimentación computacional, se concluye en [47] que

$$(5.68) \quad \cos(\rho) = \begin{cases} 2 \cos^{2/q}(\pi/M) - 1, & \text{si } q \text{ es impar,} \\ 2 \cos^{4/q}(\pi/M) - 1, & \text{si } q \text{ es par.} \end{cases}$$

Por lo tanto, tenemos todos los ingredientes necesarios para poder calcular el polígono buscado. En la figura 10 hacemos una comparación entre los cálculos numéricos (T_{num}) y los teóricos (T_{alg}) de la indicatriz tangente; como vemos, están notablemente cerca. Nos remitimos a [47] para el resto de detalles y, en particular, sobre cómo obtener las posiciones exactas de los polígonos para tiempos racionales.

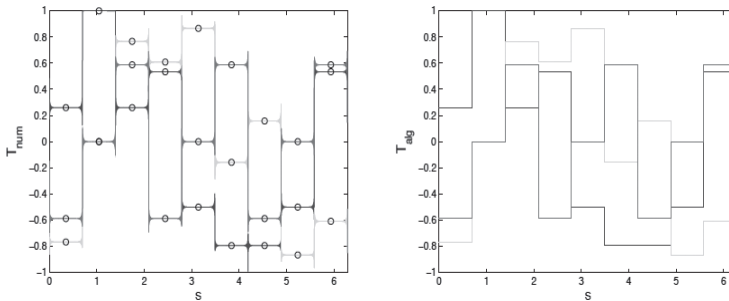


Figura 10: T_{num} versus T_{alg} , con $M=3$, en $T_{1,3} = \frac{2\pi}{27}$. T_1 en azul, T_2 en verde y T_3 en rojo. En T_{num} , se ve claramente el fenómeno de Gibbs. Los círculos negros son los puntos que se utilizan para la comparación.

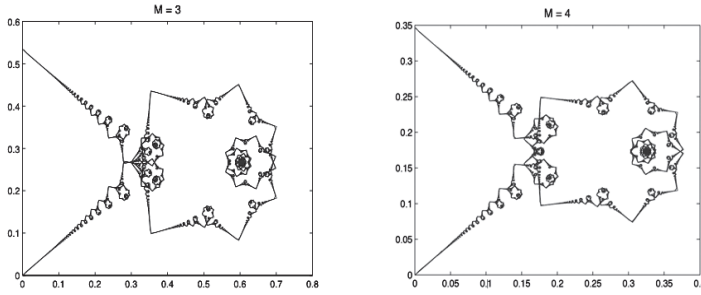


Figura 11: Trayectoria de un punto que en tiempo $t=0$ es una esquina de un triángulo (izda.) y de un cuadrado (dcha.)

Nuestro siguiente paso consiste en analizar las figuras de las trayectorias de un vértice para los casos $M=3$ y $M=4$. Es decir, $\chi_M(0, t)$ con $M=3$ y $M=4$. De las simetrías elementales del triángulo y el cuadrado y del hecho de que el flujo de la binormal (5.19) es invariante con respecto a las rotaciones, es muy fácil concluir que las trayectorias de un vértice tienen que estar en un plano, como se muestra en la figura 11. Estas trayectorias recuerdan bastante a la función no diferenciable de Riemann

$$\phi_D(t) = \sum_{k \neq 0} \frac{e^{itk^2}}{k^2},$$

que estudiamos anteriormente. De hecho en [47] y [49] se prueba numéricamente que cuando M tiende a infinito y después de las normalizaciones apropiadas, se recupera $\phi_D(t)$ a partir de las trayectorias $\chi_M(0, t)$.

De esta forma se encuentra una relación algo inesperada. La función no diferenciable de Riemann aparece alrededor de 1860 como un objeto puramente analítico que desafiaba la propia noción de función continua. Siglo y medio después se encuentra una interpretación geométrica de dicha función, o mejor dicho de una pequeña variación de la misma. Y esta interpretación viene motivada por un modelo matemático, que aunque bastante idealizado, surge de un intento de describir las estructuras coherentes ([44], [4], [134], [76]) que aparecen en la turbulencia desarrollada por los fluidos. Finalmente, este modelo idealizado es una ecuación no lineal de Schrödinger que presenta soluciones (ondas) con un nivel crítico de regularidad que, aun interactuando de forma no lineal, no rompen las simetrías inherentes al conocido

como efecto de Talbot. Es a la postre este efecto, descrito por primera vez en 1836 como una ilustración de los fenómenos de interferencia y difracción de la luz, el que explica las propiedades geométricas de la función de Riemann. Por último, conviene recordar el resultado reciente ya mencionado y debido a D. Echeibarrena [55], que asegura que la pequeña variación necesaria para describir la función de forma geométrica, hace que la correspondiente curva pese a ser continua no tiene tangente en ningún punto, no así la función de Riemann que, como vimos, es derivable en algunos puntos racionales. La existencia de fluidos con campos de velocidades que sean continuos pero no diferenciables en ningún punto, y que por tanto la forma de interpretar la velocidad de una partícula de fluido tenga que ser probabilista, es algo de una u otra forma aceptado, véase por ejemplo [96], sección 1.2, o el capítulo 3 de la monografía [76].

También vale la pena ver las figuras 12 y 13, ya que dan una pista de la complejidad de la dinámica para los tiempos dados por números racionales cuyo denominador es grande.

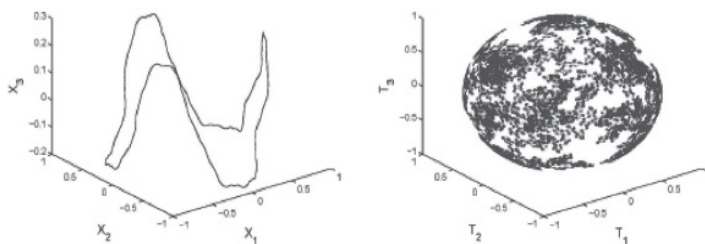


Figura 12: X_{alg} y T_{alg} , en $t = \frac{2\pi}{9} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{41} + \frac{1}{401} \right) = \frac{2\pi}{9} \cdot \frac{18209}{65764}$

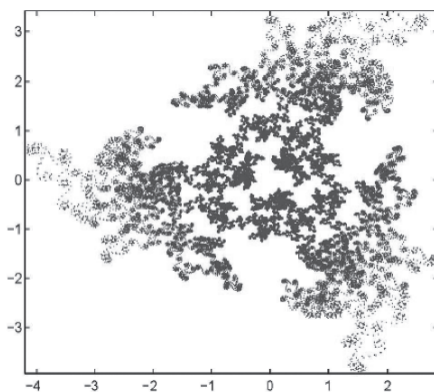


Figura 13: Proyección estereográfica del lado derecho de la figura 12.

Queremos terminar esta sección dando una explicación plausible de la fórmula (5.68), fórmula que resulta clave tanto en el teorema 1 como en la discontinuidad de la energía expresada en el teorema 2 y que, como dijimos, se propone en [47] a partir de la evidencia numérica obtenida por las simulaciones hechas en dicho artículo.

Como ya hemos dicho, se prueba en [83] que si el dato inicial de (5.19) viene dado por dos semirrectas que se juntan en un vértice en $x = 0$ formando una esquina de ángulo θ , la solución es autosemejante y gracias a la transformación de Hasimoto está determinada por la solución de (5.46) eligiendo $A(t) = \frac{a^2}{t}$ $\Phi_a(t, x) = a \frac{e^{i \frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{t}}$, con

$$\sin \frac{\theta}{2} = e^{-\pi \frac{a^2}{2}}.$$

Como consecuencia, y excepto en la situación trivial de una línea recta donde $\theta = \pi$, la función de filamento de la curva inicial $\theta \delta_0$, es decir, $\theta \delta_0$, no es el límite de las funciones de filamento de $\chi_a(t)$. Sin embargo, se demuestra en [14] que esta solución es única y que el problema del valor inicial correspondiente está bien planteado en un sentido apropiado.

De forma similar, si $\chi(0)$ es una línea poligonal con varias esquinas de ángulos θ_j ubicadas en los enteros $x = j$, se prueba en el teorema 1 que se ha de considerar la sucesión $\{\alpha_j\}$ tal que

$$\sin \frac{\theta_j}{2} = e^{-\pi \frac{|\alpha_j|^2}{2}},$$

siendo las fases de α_j más complicadas de especificar. En el caso de polígonos planos los α_j son números reales. Entonces se construye una solución de (5.46) con $A(t) = \frac{\sum_j |\alpha_j|^2}{t}$, y tal que en tiempo cero valga

$$\sum_j \alpha_j \delta(x - j).$$

Por tanto, es natural esperar que si el dato inicial de (5.19) es un polígono regular plano con M lados se tenga que considerar como dato inicial de (5.46)

$$(5.69) \quad \sum_j \alpha \delta(x - \frac{j}{N})$$

con $\alpha > 0$ definida por

$$\sin(\frac{\pi}{N}) = e^{-\pi \frac{\alpha^2}{2}}.$$

Como ya hemos visto, usando las simetrías de Galileo se concluye en [47] que la solución correspondiente de (5.46) debe escribirse como

$$\psi(t, x) = \hat{\psi}(t, 0) \sum_j e^{it(2\pi Nj)^2 + i(2\pi Nj)x}.$$

De (5.69) y la fórmula de sumación de Poisson

$$\sum_j e^{i(2\pi Nj)x} = \frac{1}{N} \sum_j \delta(x - \frac{j}{N}),$$

obtenemos que

$$\hat{\psi}(t, 0) = \alpha N,$$

y que, por tanto, no depende del tiempo.

Luego,

$$\psi(t, x) = \sum_j \hat{\psi}(t, 0) e^{it\Delta} \delta(x - \frac{j}{N}),$$

y si suponemos que la ley de conservación (5.56) sigue siendo cierta con condiciones de contorno periódicas, afirmación que al menos formalmente es cierta, obtenemos que

$$N(\alpha N)^2 = N|\hat{\psi}(t, 0)|^2.$$

Por otro lado, se prueba en [47] haciendo uso de nuevo de la fórmula de sumación de Poisson, que para tiempos racionales $t_{p,q}$ el efecto de Talbot es válido: si q es impar

$$\psi(t_{p,q}, x) = \frac{\hat{\psi}(t_{p,q}, 0)}{Nq} \sum_l \sum_{m=0}^{q-1} G(p, q, m) \delta_{l+\frac{m}{Nq}}(x) =: \sum_l \sum_{m=0}^{q-1} \alpha_{l,m} \delta_{l+\frac{m}{Nq}}(x),$$

con

$$|\alpha_{l,m}| = \frac{|\hat{\psi}(t_{p,q}, 0)|}{N\sqrt{q}}.$$

Luego,

$$|\alpha_{l,m}|^2 = \frac{|\hat{\psi}(t_{p,q}, 0)|^2}{N^2q},$$

y

$$e^{-\pi \frac{|\alpha_{l,m}|^2}{2}} = e^{-\pi \frac{|\hat{\psi}(t_{p,q}, 0)|^2}{2N^2q}} = (e^{-\pi \frac{\alpha^2}{2}})^{\frac{1}{q}},$$

y, por tanto, los ángulos $\theta_{p,q}$ del polígono alabeado que se obtiene en tiempo $t_{p,q}$ satisfacen

$$\sin\left(\frac{\theta_{p,q}}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{N}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Este es precisamente el valor dado en [47]. El argumento es análogo si q es par.

5.9 Aleatoriedad

En la sección anterior damos una evidencia numérica muy sólida (ver [47] y [49]) de que las trayectorias descritas por los vértices de un polígono regular que se mueve de acuerdo al flujo de la binormal (5.19) se caracterizan por ser funciones continuas, pero que no tienen tangente en ningún punto. De hecho, pasando al límite de forma adecuada en el número de lados se obtiene la versión geométrica de la función no diferenciable de Riemann que gracias al teorema de D. Eceizabarrena tiene esta propiedad. Este hecho sugiere que la forma de entender estas trayectorias ha de ser probabilista. En esta sección, basándonos en [48], damos un ejemplo concreto de dónde puede residir esta aleatoriedad. En concreto, la encontramos en las fases de las sumas de Gauss en cuyo cálculo se ha de echar mano de la función $\varphi(p)$ definida en (5.11).

La función $\varphi(p)$ puede ser calculada de forma eficiente, por ejemplo, por el algoritmo extendido de Euclides. Otra forma más explícita (pero menos eficiente) es a través del teorema de Euler. Por ejemplo, en \mathbb{Z}_q ,

$$(5.70) \quad p^{\varphi(q)} \equiv 1 \pmod{q} \Leftrightarrow p^{\varphi(q)-1} \equiv p^{-1} \pmod{q} \quad \forall p \in \mathbb{Z} / \text{mcd}(p, q) = 1.$$

Cuando q es primo, esta expresión se conoce como el pequeño teorema de Fermat (del que el teorema de Euler es de hecho una generalización); en tal caso, $\varphi(q) = q - 1$, y

$$(5.71) \quad p^{q-1} \equiv 1 \pmod{q} \Leftrightarrow p^{q-2} \equiv p^{-1} \pmod{q}, \quad \forall p \in \mathbb{Z}_q \setminus \{0\}.$$

Como hemos dicho, nuestro interés se centra en las propiedades aleatorias de $\varphi(p)$.

Existen diversos métodos para generar números pseudoaleatorios, siendo los más populares los generadores congruenciales lineales (LCG) (ver por ejemplo [110, Section 3.2.1]). Dado un número natural $q \in \mathbb{N}$ de gran tamaño y $a, b, x_0 \in \mathbb{Z}$, una sucesión de congruencias lineales $(x_n)_{n \geq 0}$ se define como

$$(5.72) \quad x_{n+1} \equiv ax_n + b \pmod{q}, \quad n \geq 0.$$

Eligiendo apropiadamente q, a, b, x_0 , y tomando $(u_n) = (x_n/q)_{n \geq 0}$ se obtiene una sucesión de números pseudoaleatorios en el intervalo $[0, 1)$.

La calidad de los métodos LCGs depende muy fuertemente de la estructura de la red de vectores de dimensión s , $\mathbf{u}_n^{(s)} = (u_n, \dots, u_{n+s-1})$, generada por la sucesión periódica $(u_n)_{n \geq 0}$, y puede dar lugar a ejemplos no deseados como el célebre generador RANDU [59].

Para solucionar los problemas generados por los métodos LCG, se han introducido generadores aleatorios no lineales [57]. La idea subyacente es que dado un primo q grande, y dada una función no lineal f , los elementos de la sucesión se van obteniendo de forma aleatoria de acuerdo a la ley:

$$(5.73) \quad x_{n+1} \equiv f(x_n) \pmod{q}, \quad n \geq 0;$$

tras aplicar la normalización $u_n = x_n/q$ como hicimos anteriormente, se obtienen números pseudoaleatorios uniformemente distribuidos en el intervalo $[0, 1)$. Un importante ejemplo de este tipo de construcción son los *inversive congruential generators* (ICGs), definidos en [58] por la ley:

$$(5.74) \quad x_{n+1} \equiv \begin{cases} ax_n^{-1} + b \pmod{q}, & x_n \neq 0, \\ b, & x_n = 0, \end{cases} \quad n \geq 0,$$

con q primo, $a \not\equiv 0 \pmod{q}$. La principal ventaja es que no presentan ningún tipo de estructura de red, aunque computacionalmente su cálculo no es tan eficiente como el de los métodos LCG. En este campo es costumbre usar la notación

$$(5.75) \quad x_{n+1} \equiv a\bar{x}_n + b \pmod{q}, \quad n \geq 0,$$

con $\bar{z} \equiv z^{p-2} \pmod{q}$. De (5.71), se deduce que \bar{z} es el inverso de z , si $z \not\equiv 0 \pmod{q}$; mientras que \bar{z} es cero, si $z \equiv 0 \pmod{q}$.

En nuestro caso nos interesan particularmente los ejemplos dados en [56] por Eichenauer-Herrmann, los llamados *explicit inversive congruential generators* (EICGs):

$$(5.76) \quad x_n \equiv \overline{an + b} \pmod{q}, \quad n \geq 0,$$

con q primo y $a \not\equiv 0 \pmod{q}$.

Por otro lado, y como expusimos en la sección anterior, si $\chi_M(x, t)$ es la solución de (5.19) que en el tiempo inicial es un polígono plano regular de M lados y $T_M(x, t)$ es la correspondiente indicatriz tangente, ambos vectores son esencialmente aleatorios. Más concretamente, a partir de ellos se puede construir un generador de números pseudoaleatorios como se prueba en [48]. Para ello hay que considerar las dos cantidades siguientes: por un lado, el triple producto de tres vectores tangente consecutivos, y, por otro, el producto escalar de un vector tangente con el segundo siguiente. Entonces tomando estas dos cantidades respectivamente como las partes real e imaginaria de un número complejo, tendremos un generador de números pseudoaleatorios ubicados en una cierta circunferencia. La sucesión de números pseudoaleatorios es esencialmente la dada en (5.76) debido al valor de las fases θ de las sumas de Gauss que hemos mencionado anteriormente.

Referencias

- [1] Shmuel Agmon and Lars Hörmander. Asymptotic properties of solutions of differential equations with simple characteristics. *J. Anal. Math.*, 30(1):1–38, 1976.
- [2] Sergio Albeverio, Friedrich Gesztesy, Raphael Hoegh-Krohn, and Helge Holden. *Solvable models in Quantum Mechanics*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [3] Werner O Amrein and Anne-Marie Berthier. On support properties of L^p -functions and their Fourier transforms. *J. Funct. Anal.*, 24(3):258–267, 1977.
- [4] RJ Arms and Francis R Hama. Localized-induction concept on a curved vortex and motion of an elliptic vortex ring. *Phys. Fluids*, 8(4):553–559, 1965.
- [5] Naiara Arrizabalaga, Javier Duoandikoetxea, and Luis Vega. Self-adjoint extensions of Dirac operators with Coulomb type singularity. *J. Math. Phys.*, 54(4):041504, 20pp., 2013.
- [6] Naiara Arrizabalaga, Loïc Le Treust, Albert Mas, and Nicolas Raymond. The MIT Bag Model as an infinite mass limit. *J. Éc. Polytech. "Math."*, 6:329–365, 2019.
- [7] Naiara Arrizabalaga, Loïc Le Treust, and Nicolas Raymond. On the MIT bag model in the non-relativistic limit. *Comm. Math. Phys.*, 354(2):641–669, 2017.
- [8] Naiara Arrizabalaga, Albert Mas, and Luis Vega. An isoperimetric-type inequality for electrostatic shell interactions for Dirac operators. *Comm. Math. Phys.*, (2):105–123, 1919.
- [9] Naiara Arrizabalaga, Albert Mas, and Luis Vega. Shell interactions for Dirac operators. *J. Math. Pures Appl.*, 102(4):617–639, 2014.
- [10] Naiara Arrizabalaga, Albert Mas, and Luis Vega. Shell interactions for Dirac operators: on the point spectrum and the confinement. *SIAM J. Math. Anal.*, 47(2):1044–1069, 2015.

- [11] Valeria Banica and Luis Vega. On the stability of a singular vortex dynamics. *Comm. Math. Phys.*, 286(2):593–627, 2009.
- [12] Valeria Banica and Luis Vega. Scattering for 1d cubic NLS and singular vortex dynamics. *J. Eur. Math. Soc.*, 14(1):209–253, 2012.
- [13] Valeria Banica and Luis Vega. Stability of the self-similar dynamics of a vortex filament. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 210(3):673–712, 2013.
- [14] Valeria Banica and Luis Vega. The initial value problem for the binormal flow with rough data. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, 48(4):1423–1455, 2015.
- [15] Valeria Banica and Luis Vega. Singularity formation for the 1-D cubic NLS and the Schrödinger map on \mathbb{S}^2 . *Commun. Pure Appl. Anal.*, 17:1317–1329, 2018.
- [16] Valeria Banica and Luis Vega. Evolution of polygonal lines by the binormal flow. *arXiv:1807.06948*, *aparecerá en Annal. PDE*, 2020.
- [17] Valeria Banica and Luis Vega. On the energy of critical solutions of the binormal flow. *arXiv:1907.08789*, *aparecerá en Comm. Partial Differential Equations*, 2020.
- [18] Juan A Barceló, Luca Fanelli, Susana Gutierrez, Alberto Ruiz, and Mari Cruz Vilela. Hardy uncertainty principle and unique continuation properties of covariant Schrödinger flows. *J. Funct. Anal.*, 264(10):2386–2415, 2013.
- [19] Juan A Barceló, Alberto Ruiz, and Luis Vega. Weighted estimates for the Helmholtz equation and some applications. *J. Funct. Anal.*, 150(2):356–382, 1997.
- [20] Juan A Barceló, Luis Vega, and Miren Zubeldia. The forward problem for the electromagnetic Helmholtz equation with critical singularities. *Adv. Math.*, 240:636–671, 2013.
- [21] Michael Benedicks. On Fourier transforms of functions supported on sets of finite Lebesgue measure. *J. Math. Anal. Appl.*, 106(1):180–183, 1985.

- [22] Michael V Berry and Sz Klein. Integer, fractional and fractal Talbot effects. *J. Mod. Opt.*, 43(10):2139–2164, 1996.
- [23] Michael V Berry. Quantum fractals in boxes. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 29(20):6617, 1996.
- [24] Abram S Besicovitch. Sur deux questions de l'intégrabilité des fonctions. *J. Soc. Phys. Math.*, 344(2):483–505, 1900.
- [25] Aline Bonami. The uncertainty principle for Fourier analysts. *Rev. Mat. Iber.*, pages 57–63, 2011.
- [26] Alexandre Boritchev, Daniel Echeizabarrena, and Victor Vilaça da Rocha. Riemann's non-differentiable function is intermittent. *arXiv:1910.13191*, 2019.
- [27] Jean Bourgain and Wensheng Wang. Construction of blowup solutions for the nonlinear Schrödinger equation with critical nonlinearity. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 25(1-2):197–215, 1997.
- [28] Jean Bourgain. Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. *Geom. Funct. Anal.*, 3(3):209–262, 1993.
- [29] Jean Bourgain. Invariant measures for the 2D-defocusing nonlinear Schrödinger equation. *Comm. Math. Phys.*, 176(2):421–445, 1996.
- [30] Jean Bourgain. On the compactness of the support of solutions of dispersive equations. *Int. Math. Res. Not.*, 1997(9):437–447, 1997.
- [31] Thomas F Buttke. A numerical study of superfluid turbulence in the self-induction approximation. *J. Comput. Phys.*, 76(2):301–326, 1988.
- [32] Anthony Carbery, José L Rubio De Francia, and Luis Vega. Almost everywhere summability of Fourier integrals. *J. London Math. Soc.*, 2(3):513–524, 1988.
- [33] Rémi Carles and Thomas Kappeler. Norm-inflation with infinite loss of regularity for periodic NLS equations in negative Sobolev spaces. *Bull. Soc. Math. France*, 145(4):623–642, 2017.

- [34] Biagio Cassano, Fabio Pizzichillo, and Luis Vega. A Hardy-type inequality and some spectral characterizations for the Dirac–Coulomb operator. *Rev. Mat. Comp.*, pages 1–18, 2018.
- [35] Thierry Cazenave and Fred B Weissler. The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s . *Nonlinear Anal.*, 14(10):807–836, 1990.
- [36] Fernando Chamizo and Antonio Córdoba. Fractales de Riemann: números y figuras. *Gac. R. Soc. Mat. Española*, 1(1):37–47, 1998.
- [37] Fernando Chamizo and Antonio Cordoba. Differentiability and dimension of some fractal Fourier series. *Adv. Math.*, 142(2):335–354, 1999.
- [38] Vasilis Chousionis, Mehmet B Erdogan, and Nikolaos Tzirakis. Fractal solutions of linear and nonlinear dispersive partial differential equations. *Proc. London Math. Soc.*, 110(3):543–564, 2015.
- [39] Michael Christ, James Colliander, and Terence Tao. Asymptotics, frequency modulation, and low regularity ill-posedness for canonical defocusing equations. *Amer J. Math.*, 125(6):1235–1293, 2003.
- [40] Michael Christ. Power series solution of a nonlinear Schrödinger equation. *Mathematical aspects of nonlinear dispersive equations*, *Ann. of Math. Stud.*, 163:131–155, 2007.
- [41] Peter Constantin, Charles Fefferman, and Andrew J Majda. Geometric constraints on potentially singular solutions for the 3-d Euler equations. *Comm. Partial Differential Equations*, 21(3-4), 1996.
- [42] Piero D’Ancona, Luca Fanelli, Luis Vega, and Nicola Visciglia. Endpoint Strichartz estimates for the magnetic Schrödinger equation. *J. Funct. Anal.*, 258(10):3227–3240, 2010.
- [43] Guy David and Stephen Semmes. *Analysis of and on uniformly rectifiable sets*, volume 38. American Mathematical Soc., 1993.
- [44] Luigi S Da Rios. Sul moto d’un liquido indefinito con un filetto vorticoso di forma qualunque. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 22:117–135, 1906.

- [45] Miguel de Guzmán. Impactos del análisis armónico. *Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid*, 72, 1983.
- [46] Francisco de la Hoz, Carlos J García-Cervera and Luis Vega. A numerical study of the self-similar solutions of the Schrödinger map. *SIAM J. Appl. Math.*, 70(4):1047–1077, 2009.
- [47] Francisco de la Hoz and Luis Vega. Vortex filament equation for a regular polygon. *Nonlinearity*, 27(12):3031, 2014.
- [48] Francisco de la Hoz and Luis Vega. The vortex filament equation as a pseudorandom generator. *Acta Appl. Math.*, 138(1):135–151, 2015.
- [49] Francisco de la Hoz and Luis Vega. On the relationship between the one-corner problem and the M-corner problem for the vortex filament equation. *J. Nonlinear Sci.*, 28(6):2275–2327, 2018.
- [50] Jaroslav Dittrich, Pavel Exner, and Petr Šeba. Dirac operators with a spherically symmetric δ -shell interaction. *J. Math. Phys.*, 30(12):2875–2882, 1989.
- [51] Jean Dolbeault, Maria J Esteban, Javier Duoandikoetxea, and Luis Vega. Hardy-type estimates for Dirac operators. In *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.*, volume 40, pages 885–900, 2007.
- [52] Johannes J Duistermaat. Selfsimilarity of “Riemann’s nondifferentiable function”. *Nieuw Arch. Wisk.*, 4(3):303–337, 1991.
- [53] Javier Duoandikoetxea. 200 años de convergencia de las series de Fourier. *Gac. R. Soc. Mat. Esp.*, 10(3):651–688, 2007.
- [54] Daniel Eceizabarrena. *A geometrical and physical study of Riemann’s non-differentiable function*. PhD thesis, UPV/EHU, Bilbao, Spain, 2020.
- [55] Daniel Eceizabarrena. Geometric differentiability of riemann’s non-differentiable function. *arXiv:1910.02536*, *aparecerá en Adv. Math.*, 2020.
- [56] Jürgen Eichenauer, Holger Grothe, and Jürgen Lehn. Marsaglias lattice test and non-linear congruential pseudo random number generators. *Metrika*, 35(1):241–250, 1988.

- [57] Jürgen Eichenauer-Herrmann. Statistical independence of a new class of inversive congruential pseudorandom numbers. *Math. Comp.*, 60(201):375–384, 1993.
- [58] Jürgen Eichenauer and Jürgen Lehn. A non-linear congruential pseudo random number generator. *Stat. Hefte*, 27(1):315–326, 1986.
- [59] Karl Entacher. Bad subsequences of well-known linear congruential pseudorandom number generators. *ACM Trans. Model. Comput. Simul.*, 8(1):61–70, 1998.
- [60] Mehmet B Erdogan and Nikolaos Tzirakis. Talbot effect for the cubic nonlinear Schrödinger equation on the torus. *Math. Res. Lett.*, 20(6):1081–1090, 2013.
- [61] Luis Escauriaza, Carlos E Kenig, Gustavo Ponce, and Luis Vega. On uniqueness properties of solutions of the k -generalized KdV equations. *J. Funct. Anal.*, 244(2):504–535, 2007.
- [62] Luis Escauriaza, Carlos E Kenig, Gustavo Ponce, and Luis Vega. The sharp Hardy uncertainty principle for Schrödinger evolutions. *Duke Math. J.*, 155(1):163–187, 2010.
- [63] Luis Escauriaza, Carlos E Kenig, Gustavo Ponce, and Luis Vega. Uncertainty principle of Morgan type and Schrödinger evolutions. *J. London Math. Soc.*, 83(1):187–207, 2011.
- [64] Luis Escauriaza, Carlos E Kenig, Gustavo Ponce, and Luis Vega. Unique continuation for Schrödinger evolutions, with applications to profiles of concentration and traveling waves. *Comm. Math. Phys.*, 305(2):487–512, 2011.
- [65] Luis Escauriaza, Carlos E Kenig, Gustavo Ponce, and Luis Vega. Uniqueness properties of solutions to schrödinger equations. *Bull. Ameri. Math. Soc.*, 49(3):415–442, 2012.
- [66] Luis Escauriaza, Carlos E Kenig, Gustavo Ponce, and Luis Vega. Hardy uncertainty principle, convexity and parabolic evolutions. *Comm. Math. Phys.*, 346(2):667–678, 2016.

- [67] Miguel Escobedo and Luis Vega. A semilinear Dirac equation in $H^s(\mathbb{R}^3)$ for $s > 1$. *SIAM J. Math. Anal.*, 28(2):338–362, 1997.
- [68] Maria Esteban, Mathieu Lewin, and Eric Séré. Variational methods in relativistic Quantum Mechanics. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 45(4):535–593, 2008.
- [69] Luca Fanelli, Veronica Felli, Marco A Fontelos, and Ana Primo. Time decay of scaling critical electromagnetic Schrödinger flows. *Comm. Math. Phys.*, 324(3):1033–1067, 2013.
- [70] Luca Fanelli, Veronica Felli, Marco Fontelos, and Ana Primo. Time decay of scaling invariant electromagnetic Schrödinger equations on the plane. *Comm. Math. Phys.*, 337(3):1515–1533, 2015.
- [71] Luca Fanelli and Luis Vega. Magnetic virial identities, weak dispersion and Strichartz inequalities. *Math. Ann.*, 344(2):249–278, 2009.
- [72] Charles Fefferman. The multiplier problem for the ball. *Ann. Math.*, pages 330–336, 1971.
- [73] Aingeru Fernández-Bertolin and Luis Vega. Uniqueness properties for discrete equations and Carleman estimates. *J. Funct. Anal.*, 272(11):4853–4869, 2017.
- [74] Joseph Fourier. *Théorie analytique de la chaleur*, vol. 1 of *oeuvres de Fourier*. Gauthier–Villars, Paris, 1888.
- [75] Uriel Frisch and Giorgio Parisi. Fully developed turbulence and intermittency. *Proc. Enrico Fermi International Summer School in Physics. Appendix to “Fully developed turbulence and intermittency”, by U. Frisch.*, pages 84–88, 1985.
- [76] Uriel Frisch. *Turbulence: the legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, 1995.
- [77] Joseph Gerver. The differentiability of the Riemann function at certain rational multiples of π . *Amer. J. Math.*, 92(1):33–55, 1970.

- [78] Jean Ginibre and Giorgio Velo. On a class of Schrödinger equations. I. The Cauchy problem, general case. *J. Funct. Anal*, 32(1):1–71, 1979.
- [79] Michael Goldberg, Luis Vega, and Nicola Visciglia. Counterexamples of Strichartz inequalities for Schrödinger equations with repulsive potentials. *Int. Math. Res. Not.*, 2006, 2006.
- [80] Fernando F Grinstein and C Richard DeVore. Dynamics of coherent structures and transition to turbulence in free square jets. *Phys. Fluids*, 8(5):1237–1251, 1996.
- [81] Fernando F Grinstein, Ephraim Gutmark, and Timothy P Parr. Near field dynamics of subsonic free square jets. A computational and experimental study. *Phys. Fluids*, 7(6):1483–1497, 1995.
- [82] Axel Grünrock. Bi- and trilinear Schrödinger estimates in one space dimension with applications to cubic NLS and DNLS. *Int. Math. Res. Not.*, 2005(41):2525–2558, 2005.
- [83] Susana Gutiérrez, Judith Rivas, and Luis Vega. Formation of singularities and self-similar vortex motion under the localized induction approximation. *Comm. Partial Differential Equations*, 28(5-6):927–968, 2003.
- [84] Susana Gutiérrez and Luis Vega. Self-similar solutions of the localized induction approximation: singularity formation. *Nonlinearity*, 17(6):2091–2136, 2004.
- [85] Susana Gutiérrez and Luis Vega. On the stability of self-similar solutions of 1D cubic Schrödinger equations. *Math. Ann.*, 356(1):259–300, 2013.
- [86] Ephraim J Gutmark and Fernando F Grinstein. Flow control with noncircular jets. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 31(1):239–272, 1999.
- [87] Jay C. Hardin. The velocity field induced by a helical vortex filament. *Phys. Fluids*, 25(11):1949–1952, 1982.
- [88] Godefroy H Hardy. Weierstrass’s non-differentiable function. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 17(3):301–325, 1916.

- [89] Godefroy H Hardy. A theorem concerning Fourier transforms. *J. London Math. Soc.*, 1(3):227–231, 1933.
- [90] Godfrey H Hardy and John E Littlewood. Some problems of diophantine approximation: Part ii. the trigonometrical series associated with the elliptic ϑ -functions. *Acta Math.*, 37:193–239, 1914.
- [91] Hidenori Hasimoto. A soliton on a vortex filament. *J. Fluid Mech.*, 51(3):477–485, 1972.
- [92] Ira W Herbst. Spectral and scattering theory for Schrödinger operators with potentials independent of $|x|$. *Amer. J. Math.*, pages 509–565, 1991.
- [93] Steve Hofmann, Emilio Marmolejo-Olea, Marius Mitrea, Salvador Pérez-Esteva, and Michael Taylor. Hardy spaces, singular integrals and the geometry of euclidean domains of locally finite perimeter. *Geom. Funct. Anal.*, 19(3):842, 2009.
- [94] Lars Hörmander. A uniqueness theorem of Beurling for Fourier transform pairs. *Ark. Mat.*, 29(1-2):237–240, 1991.
- [95] Stephane Jaffard. The spectrum of singularities of Riemann’s function. *Rev. Mat. Iber.*, 12(2):441–460, 1996.
- [96] Robert L Jerrard and Christian Seis. On the vortex filament conjecture for Euler flows. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 224(1):135–172, 2017.
- [97] Robert L Jerrard and Didier Smets. On the motion of a curve by its binormal curvature. *J. Eur. Math. Soc.*, 17(6):1487–1515, 2015.
- [98] Lev Kapitanski and Igor Rodnianski. Does a quantum particle know the time? In *Emerging applications of number theory, IMA Vol. Math. Appl.*, pages 355–371. Springer, 1999.
- [99] Carlos E Kenig, Gustavo Ponce, and Luis Vega. Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 40(1):33–69, 1991.

- [100] Carlos E Kenig, Gustavo Ponce, and Luis Vega. Small solutions to nonlinear Schrödinger equations. In *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, volume 10, pages 255–288. Elsevier, 1993.
- [101] Carlos E Kenig, Gustavo Ponce, and Luis Vega. Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle. *Comm. Pure Appl. Math.*, 46(4):527–620, 1993.
- [102] Carlos E Kenig, Gustavo Ponce, and Luis Vega. A bilinear estimate with applications to the KdV equation. *J. Amer. Math. Soc.*, 9(2):573–603, 1996.
- [103] Carlos E Kenig, Gustavo Ponce, and Luis Vega. On the ill-posedness of some canonical dispersive equations. *Duke Math. J.*, 106(3):617–633, 2001.
- [104] Carlos E Kenig, Gustavo Ponce, and Luis Vega. On the support of solutions to the generalized KdV equation. In *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, volume 19, pages 191–208. Elsevier, 2002.
- [105] Carlos E Kenig, Gustavo Ponce, and Luis Vega. A theorem of Paley–Wiener type for Schrödinger evolutions. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, 47:539–557, 2014.
- [106] Carlos E Kenig, Alberto Ruiz, and Christopher D Sogge. Uniform Sobolev inequalities and unique continuation for second order constant coefficient differential operators. *Duke Math. J.*, 55(2):329–347, 1987.
- [107] Rowan Killip, Monica Visan, and Xiaoyi Zhang. Low regularity conservation laws for integrable PDE. *Geom. Funct. Anal.*, 28(4):1062–1090, 2018.
- [108] Nobu Kishimoto. Well-posedness of the Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation at the critical regularity. *Differential and Integral Equations*, 22(5/6):447–464, 2009.
- [109] Naoyasu Kita. Mode generating property of solutions to the nonlinear Schrödinger equations in one space dimension. *GAKUTO Internat. Ser., Math. Sci. Appl.*, 26:111–128, 2006.

- [110] Donald Ervin Knuth. *Seminumerical algorithms*, volume 2. Addison-Wesley, 1997.
- [111] Herbert Koch and Daniel Tataru. Conserved energies for the cubic nonlinear Schrödinger equation in one dimension. *Duke Math. J.*, 167(17):3207–3313, 2018.
- [112] Muthusamy Lakshmanan and M. Daniel. On the evolution of higher dimensional Heisenberg continuum spin systems. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 107(3):533–552, 1981.
- [113] Muthusamy Lakshmanan, T. W. Ruijgrok, and Colin J Thompson. On the dynamics of a continuum spin system. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 84(3):577–590, 1976.
- [114] Tomasz Lipniacki. Quasi-static solutions for quantum vortex motion under the localized induction approximation. *J. Fluid Mech.*, 477:321–337, 2003.
- [115] Frank Merle, Pierre Raphaël, and Jeremie Szeftel. The instability of Bourgain-Wang solutions for the L^2 critical NLS. *Amer. J. Math.*, 135(4):967–1017, 2013.
- [116] Frank Merle and Luis Vega. Compactness at blow-up time for L^2 solutions of the critical nonlinear Schrödinger equation in $2d$. *Internat. Math. Res. Notices*, 1998(8):399–425, 1998.
- [117] Frank Merle. Limit behavior of saturated approximations of nonlinear Schrödinger equation. *Comm. Math. Phys.*, 149(2):377–414, 1992.
- [118] Frank Merle. On uniqueness and continuation properties after blow-up time of self-similar solutions of nonlinear Schrödinger equation with critical exponent and critical mass. *Comm. Pure Appl. Math.*, 45(2):203–254, 1992.
- [119] G. W. Morgan. A note on Fourier transforms. *J. London Math. Soc.*, 1(3):187–192, 1934.

- [120] Adela Moyua, Ana Vargas, and Luis Vega. Schrödinger maximal function and restriction properties of the Fourier transform. *Internat. Math. Res. Notices*, 1996(16):793–815, 1996.
- [121] Adela Moyua, Ana Vargas, and Luis Vega. Restriction theorems and maximal operators related to oscillatory integrals in R^3 . *Duke Math. J.*, 96(3):547–574, 1999.
- [122] Fedor L Nazarov. Local estimates for exponential polynomials and their applications to inequalities of the uncertainty principle type. *Algebra i Analiz*, 5(4):3–66, 1993.
- [123] Tadahiro Oh and Catherine Sulem. On the one-dimensional cubic nonlinear Schrödinger equation below L^2 . *Kyoto J. Math.*, 52(1):99–115, 2012.
- [124] Tadahiro Oh and Yuzhao Wang. Global well-posedness of the one-dimensional cubic nonlinear Schrödinger equation in almost critical spaces. *J. Differential Equations*, 2020.
- [125] Tadahiro Oh. A remark on norm inflation with general initial data for the cubic nonlinear Schrödinger equations in negative Sobolev spaces. *Funkcialaj Ekvacioj*, 60(2):259–277, 2017.
- [126] Thomas Ourmieres-Bonafos and Luis Vega. A strategy for self-adjointness of Dirac operators: applications to the MIT bag model and δ -shell interactions. *Publ. Mat.*, 62(2):397–437, 2018.
- [127] Benoit Perthame and Luis Vega. Morrey–Campanato estimates for Helmholtz equations. *J. Funct. Anal.*, 164(2):340–355, 1999.
- [128] Benoit Perthame and Luis Vega. Energy concentration and Sommerfeld condition for Helmholtz equation with variable index at infinity. *Geom. Funct. Anal.*, 17(5):1685–1707, 2008.
- [129] Charles S Peskin and David M McQueen. Mechanical equilibrium determines the fractal fiber architecture of aortic heart valve leaflets. *Amer. J. Physiol.-Heart and Circulatory Physiology*, 266(1):H319–H328, 1994.

- [130] Fabrice Planchon and Luis Vega. Bilinear virial identities and applications. In *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, volume 42, pages 261–290, 2009.
- [131] Andrea Posilicano. Self-adjoint extensions of restrictions. *Oper. Matrices*, 2:483–506, 2008.
- [132] Lord Rayleigh. XXV. On copying diffraction-gratings, and on some phenomena connected therewith. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 11(67):196–205, 1881.
- [133] Renzo L Ricca. The contributions of Da Rios and Levi-Civita to asymptotic potential theory and vortex filament dynamics. *Fluid Dynam. Res.*, 18(5):245–268, 1996.
- [134] Philip G Saffman. *Vortex dynamics*. Cambridge University Press, 1992.
- [135] Jean-Claude Saut and Bruno Scheurer. Unique continuation for some evolution equations. *J. Differential Equations*, 66(1):118–139, 1987.
- [136] Luis A Santaló Sors. *Vectores y tensores con sus aplicaciones*. Editorial Universitaria de Buenos Aires, 1962.
- [137] Elias M Stein and Timothy S Murphy. *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, volume 3. Princeton University Press, 1993.
- [138] Robert S Strichartz. Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations. *Duke Math. J.*, 44(3):705–714, 1977.
- [139] Henry Fox Talbot. LXXVI. Facts relating to optical science. No. IV. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 9(56):401–407, 1836.
- [140] Ana Vargas and Luis Vega. Global wellposedness for 1D non-linear Schrödinger equation for data with an infinite L^2 norm. *J. Math. Pures Appl.*, 80(10):1029–1044, 2001.

[141] Luis Vega González. La ola solitaria. *Gac. R. Soc. Mat. Esp.*, 4(3):528–566, 2001.

[142] Karl Weierstrass. Über continuirliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen. *mathematische werke. ii. abhandlungen 2. Mayer & Muller, Berlin*, pages 71–74, 1895.

DISCURSO DE CONTESTACIÓN

DEL

EXCMO. SR. D. JUAN LUIS VÁZQUEZ SUÁREZ

Excmo. Sr. Presidente,

Excmos. Sres. Académicos,

Señoras y Señores:

Es para mí un honor dar la bienvenida al Profesor D. Luis Vega González en nombre de los miembros de esta Real Academia de Ciencias. Es una grata tarea por tratarse de alguien a quien conozco bien desde su llegada a la Universidad Autónoma de Madrid para realizar su tesis doctoral, comienzo de una brillante carrera de investigador que he seguido con deleite intelectual creciente y es hoy un signo de orgullo para nuestras matemáticas. Cuando nos conocimos yo era profesor titular de la UAM, recién llegado (1981) buscando la modernidad intelectual que esa universidad entonces representaba. Y los hechos demuestran cuán acertados estaban quienes nos aconsejaron.

Según los estatutos, mis palabras han de dar contestación a su discurso. En el texto que sigue entrelazaré algunos apuntes de su vida con su trayectoria científica e iré engranando mis comentarios y recuerdos.

Años de juventud en Madrid. Luis Vega González nació en Madrid en 1960 y obtuvo la Licenciatura de Ciencias Matemáticas en la Universidad Complutense de Madrid en julio de 1982. Durante sus estudios recibió la influencia del Académico Miguel de Guzmán¹, quien tras sus estudios en Chicago con el gran maestro Alberto Calderón, introdujo en Madrid los estudios del Análisis de Fourier y Armónico que tan honda huella iban a dejar en España.

Motivado por estas nuevas tendencias, el joven licenciado se trasladó como he dicho a la Univ. Autónoma de Madrid, una joven universidad entonces en pleno desarrollo, para realizar su tesis doctoral. Luis

¹ El añorado profesor Guzmán fue el creador del programa ESTALMAT de la Real Academia.

defendió su tesis en marzo de 1988 bajo la dirección del Prof. Antonio Córdoba Barba, que era y es uno de los grandes expertos en el Análisis Armónico en nuestro país, hombre de múltiples saberes y discípulo a su vez de Charles Fefferman, de Princeton, una figura estelar en este campo (Medalla Fields en 1978).

El título de la tesis refleja bien algunos de los temas que ilustrarán su futuro investigador: *“El multiplicador de Schrödinger: la función maximal y los operadores de restricción”*. En esa época recibió la influencia del joven grupo de Análisis Armónico que se estaba formando en la UAM y muy en particular del Profesor José Luis Rubio de Francia, que procedía de la Univ. de Zaragoza, y está aún hoy tan presente en la memoria de la comunidad matemática española. Quiero recordar unas palabras del autor en defensa de su trabajo de tesis: *“En mi tesis doctoral descubrí lo que resultó ser una propiedad fundamental de la ecuación libre de Schrödinger que, como es bien sabido, es la ecuación fundamental de la Mecánica Cuántica. Esta propiedad se conoce como efecto suavizante local y me permitió mejorar un resultado de L. Carleson² en un problema clásico en Análisis Armónico. Mi trabajo, publicado en 1988, no fue mejorado hasta 2012 por J. Bourgain³”*. Vemos que, ya en sus comienzos, Luis tenía interés por los problemas relevantes, tuvo éxito en su resolución y halló la compañía de las grandes figuras.

Deseo ahora dar una pincelada sobre su formación española. Recuerdo aquí cómo el autor menciona *“el curso que Antonio Córdoba impartió en el verano de 1983 en Jarandilla de la Vera (Cáceres). Estos cursos, diseñados y organizados por Miguel de Guzmán y Juan Carlos Benítez, supusieron un antes y un después para toda una generación de jóvenes analistas españoles”*.

Tal era el ambiente circundante de cambio hacia el futuro que se vivía en las universidades de Madrid en los años 70 (y supongo que en el resto del país), y que culminó tanto para Luis como para mí en unos estudios doctorales que nos prepararon para la aventura postdoctoral y

² Lennart Carleson es un matemático sueco, Premio Abel en 2006, que resolvió uno de los problemas fundamentales en la teoría de series de Fourier.

³ Jean Bourgain, profesor en la Univ. de Princeton, fallecido en 2018, fue una de las figuras más brillantes en el Análisis Armónico (y otros saberes), Medalla Fields en 1994.

toda una vida de creación matemática. Me separa de Luis el haber vivido este ambiente un poco antes en el tiempo (en años más turbulentos que fueron con todo tan fructíferos) y con algún retraso en mi edad debido a mis años pasados en los estudios de ingeniería⁴. También me separa de Luis una profunda influencia francesa que viví intensamente a través del maestro Haïm Brezis, de París⁵. Notaré que ambos quedamos asombrados ante la eclosión del Análisis Armónico en España, que tanto me impresionó a mi llegada a la UAM y aún me impresiona. Para Luis este asombro pasó a ser el centro de su vida.

También nos une la “experiencia americana” que nos aconteció a continuación, con la natural diferencia de unos años, en la prodigiosa década de los 80 y que pasaré a revisar. Pues si los años 70 fueron para nosotros los de la influencia francesa (¿quién no recuerda el formidable bourbakismo en las matemáticas?)⁶, por su parte los 80 iban a ser los del descubrimiento de las grandes universidades americanas y su sorprendente ambiente científico y forma de hacer. Había algo muy especial en ellas y aún se mantienen en lo más alto de cualquier ránking, incluso tras el notable desarrollo de las universidades y centros de investigación de otros países entre los que modesta pero orgullosamente ya nos encontramos.

Época postdoctoral. Tras su tesis, Luis dirigió sus pasos postdoctorales a EE.UU, y en el período 1988-90 fue Dickson Instructor en la Univ. de Chicago. Allí estableció una intensa relación de investigación con dos grandes matemáticos latinoamericanos residentes en EE.UU. Uno es su mentor Carlos Kenig, que sigue siendo una estrella de la Universidad de Chicago, y el otro Gustavo Ponce, hoy profesor de la Univ. de California en Santa Bárbara, que en esa época estaba en Chicago.

Fue un momento afortunado en uno de los centros punteros de la matemática mundial. Pronto empezaron a fluir de su esfuerzo conjun-

⁴ Que tanto iban a modelar mis matemáticas.

⁵ Como tan acertadamente glosó nuestro compañero académico el Prof. Ildefonso Díaz al contestar a mi discurso de ingreso en 2014. Hoy su universidad de entonces se llama la Universidad de Paris-Sorbona.

⁶ En aquellos años la cultura francesa llegaba en España a muy diversos ámbitos de la cultura, la filosofía y las artes, además de la lengua. Pensemos en el estructuralismo, les philosophes engagés, la nouvelle vague del cine, Brassens, Brel, Édith Piaf,...

to una serie de artículos magistrales que asentaron la fama de nuestro candidato, junto a sus colaboradores, entre los mejores expertos en el tema central que nuestro autor define como “la aplicación del Análisis Armónico y el Análisis de Fourier a problemas recientes de EDPs (ecuaciones diferenciales en derivadas parciales), tanto lineales como no lineales”. Recordemos que tanto la Mecánica Cuántica como la Relatividad fueron formuladas en el siglo XX en términos de EDPs, y que antes lo habían sido la teoría matemática de los fluidos y el electromagnetismo y la elasticidad. Más adelante veremos con más detalle estas obras de Luis a que me he referido.

Añado de nuevo unas pinceladas personales. Como apunta el autor en cita que me agradó, hay en esta orientación un paralelismo entre nosotros. En efecto, tras mi tesis en la Universidad Complutense yo estaba preparado en el Análisis Funcional pero en la rama próxima a la llamada Escuela de Lions (o el estilo de Louis Nirenberg en los EE.UU.), que era abstracta en su formulación originaria pero enormemente eficaz para tratar las ecuaciones de la Física y próxima también al Análisis Numérico, tal como el que practicó Alfredo Bermúdez y su naciente grupo en Santiago de Compostela desde esos mismos años 80. Por ese camino los alumnos “no lineales” de Brezis en España llegamos a las ecuaciones elípticas y parabólicas no lineales y a las fronteras libres.

En resumen, Luis y sus colegas comparten con nosotros el uso de ramas diversas del Análisis para atacar grupos de ecuaciones en derivadas parciales; las suyas llevan nombres como ecuaciones de ondas, de Schrödinger, ecuaciones dispersivas, con solitones, etc., las nuestras llevan otros nombres (como soluciones autosemejantes, problemas de obstáculo, fronteras libres, combustión y blow-up, ...), pero ambas líneas son parientes no tan lejanos. Somos parte de una super-comunidad que aloja territorios extensos, que a veces se tocan y a veces son tan lejanos.

Aquí nuestros caminos se bifurcan, como los senderos de Borges, pues el mundo de la investigación es un mundo que une la simplicidad de las grandes intuiciones con una labor técnica larga, meticulosa, exhaustiva y exigente, un rigor que nos viene de Pitágoras, Euclides y Arquímedes⁷ de forma que el progreso de cada día exige una espe-

⁷ Por circunscribirnos al legado de la Grecia Clásica que nos es más familiar.

cialización muy alta que permite ver el orden bien oculto entre tanta rama y hojarasca. Lo cual nos lleva por nuevas bifurcaciones que solo el esfuerzo de los maestros mantiene coordinado en un panorama armonioso y relevante. Les recuerdo, con los viejos maestros, que nuestras matemáticas han de ser puras y aplicadas, bellas y al tiempo resolutivas. Y que el saber profundo no tiene atajos.

Volvamos al hilo principal. Usando una expresión del discurso de Luis, *“esta dificultad intrínseca de las matemáticas, por la que hay avances que tardan inexplicablemente demasiado tiempo en ser entendidos, y por tanto en ser aplicados, hace que el camino sea largo y como en cualquier otro ámbito de la investigación no exento de múltiples fracasos”*. A veces la exploración de un territorio desconocido nos lleva, como dice el divino poeta:

*“mi ritrovai per una selva oscura che la diritta via era smarrita”*⁸.

Solo las mentes poderosas y las fuertes comunidades te devuelvan al camino sosegado, y se abren de nuevo horizontes novedosos, brillantes y productivos que pagan todos los esfuerzos y noches sin sueño. De eso vamos a hablar en un momento.

Vuelta a España. Profesor en Bilbao. Tras una breve período suplementario en la UAM, donde el Análisis Armónico seguía su ascendente implantación⁹, empieza una nueva etapa.

Luis continuó desde 1993 su carrera en la Universidad del País Vasco sita en Lejona/Leioa, cuya trayectoria investigadora es tan reciente como exitosa debido a la decidida apuesta de las autoridades por la selección de talento, la innovación y la internacionalización. Hijo de un tiempo afortunado, como él explica, tuvo la suerte de que su labor allí fuera tan valiosa como reconocida.

En Bilbao tuvo la compañía de matemáticos españoles de edad y actitud vital paralelas, como Javier Duoandikoextea, formado en la UAM y autor de un famoso texto; Miguel Escobedo, formado en París en la

⁸ Dante: Me encontré en una selva oscura habiendo perdido el recto camino.

⁹ Que se expresaba en los famosos Congresos de El Escorial a los que acudían y acuden los mejores expertos del mundo.

Escuela de Brezis; y Luis Escauriaza, más joven y formado en Minesota con Eugene Fabes¹⁰. Se añaden otros coautores como Adela Moyua, fallecida prematuramente en 2013. Y Luis Vega mantuvo su contacto con la UAM, en particular con Ana Vargas y Alberto Ruiz que han sido colaboradores suyos, junto con Juan A. Barceló de la UPM.

No pretendo ser exhaustivo, pido disculpas por ello, solo pretendo reflejar la época que yo recuerdo cuando empezamos a viajar a Bilbao (y al campus de Lejona) para hacer matemáticas, atraídos por el encanto de la matemática que se hacía en la UPV. Años aquellos de juventud, vino y rosas.

Breve paseo por su producción científica. Luis continuó los viajes a EE.UU. que explican una parte de su impresionante producción. Una parte que resaltaré aquí por efectividad, pero que no es todo. Si unas pocas palabras pueden resumir los hitos de su producción científica, estas podrían ser la concentración en una temática actual y exigente, el nivel de calidad sobresaliente de los artículos y la preferencia de la calidad sobre la cantidad¹¹.

Así, de la célebre colaboración C. Kenig-G.Ponce-L. Vega salieron en la década de los 90 una serie de obras que han alcanzado el favor de los expertos en Análisis Armónico aplicado a las Ecuaciones en Derivadas Parciales no Lineales. Solo mencionaré aquellas más citadas, pues fue una época de muy intenso y exitoso trabajo y conviene fijarse en los hitos. La lista empieza por las integrales oscilatorias, un objeto delicado de la técnica analítica, para pasar a atacar los temas básicos planteados en la teoría de ecuaciones dispersivas.

- * KPV. *Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations*. Indiana Univ. Math. J. 40 (1991), no. 1, 33–69.
- * KPV. *Well-posedness of the initial value problem for the Korteweg-de Vries equation*. J. Amer. Math. Soc. 4 (1991), no. 2, 323–347.

¹⁰ Sabio y de una alegría contagiosa, era un ardiente amigo de Italia como tantos de nosotros, empezando por Nirenberg y Serrin. Luis Vega también cultivó la conexión con *il bel paese*, en particular por su colaboración con Luca Fanelli, actualmente profesor en Roma, y con Nicola Visciglia, profesor en Pisa.

¹¹ Aunque el lector advertirá que la cantidad no falta a la cita.

- * KPV. *Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle*. *Comm. Pure Appl. Math.* 46 (1993), no. 4, 527–620.
- * KPV. *The Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation in Sobolev spaces of negative indices*. *Duke Math. J.* 71 (1993), no. 1, 1–21.
- * KPV. *A bilinear estimate with applications to the KdV equation*. *J. Amer. Math. Soc.* 9 (1996), no. 2, 573–603.
- * KPV. *On the ill-posedness of some canonical dispersive equations*. *Duke Math. J.* 106 (2001), no. 3, 617–633.

En la lista ampliada aparecen también estudios sobre las soluciones de la ecuación de Schrödinger no lineal (1993), de la ecuación generalizada de Benjamin-Ono (1994), sobre la ecuación de ondas (2000), ...

Quiero citar dos *papers* distintos de ese período que me llamaron la atención. Uno es

- * Tao, Terence; Vargas, Ana; Vega, Luis. *A bilinear approach to the restriction and Kakeya conjectures*. *J. Amer. Math. Soc.* 11 (1998), no. 4, 967–1000,

que considera uno de los problemas más clásicos del análisis armónico moderno, en colaboración con Terence Tao, el genial matemático de UCLA que ganaría la Medalla Fields en Madrid en 2006 y acaba de ser galardonado con el Premio Princesa de Asturias (concedido en Oviedo en junio de 2020). El otro es

- * Escobedo, M.; Vega, L. *A semilinear Dirac equation in $H^s(\mathbb{R}^3)$ for $s > 1$* . *SIAM J. Math. Anal.* 28 (1997), no. 2, 338–362.

.....

No me extenderé ante el amable público en los pormenores de tan delicados análisis donde la razón pura y la virtuosidad técnica se dan la mano, tarea que ha cumplido el autor en su discurso. Pero si diré que el tema central era difícil y esquivo, y de él hizo el trío Kenig-Ponce-Vega

una cacería implacable que fue premiada con trabajos que vieron la publicación en revistas del mayor prestigio mundial y han sido referidos por los mejores autores. Es todo un monumento a la cooperación internacional de alto nivel, y al tiempo un episodio ejemplar de las matemáticas ibero-americanas y de la fructífera cooperación con EE.UU.

Tras haber vivido una experiencia parecida en algún sentido, recordar esta saga científica me resulta emocionante, como sin duda lo es para Carlos Kenig, presidente actual de la Unión Matemática Internacional, a quien conocí en Minesota en 1982.¹²

Siglo XXI. Integrales singulares y oscilatorias, ecuaciones de Schrödinger no lineales, ecuaciones de ondas, ecuaciones dispersivas, continuación única, ... son temas que siguen apareciendo en el periodo de madurez que transcurre desde entrados los años 2000 hasta nuestros días. En 2003 aparecen dos temas que han de atraer la atención del autor en el futuro, uno de ellos es la continuación única

- * KPV. *On unique continuation for nonlinear Schrödinger equations.* Comm. Pure Appl. Math. 56 (2003), no. 9, 1247–1262.

y otro tema emergente son los filamentos de vorticidad

- * KPV. *On the interaction of nearly parallel vortex filaments.* Comm. Math. Phys. 243 (2003), no. 3, 471–483,

que desarrollaría en forma personal y brillante, en colaboración con Valeria Banica, actualmente profesora en la Sorbonne. Dejemos aquí este breve repaso, recordando solo que la obra con coautores como B. Perthame, F. Merle y otros no será mencionada siendo merecedora de elogio.

El largo camino hasta el Congreso Internacional de Matemáticos. La favorable evolución de la investigación matemática española fue algo más tardía que en otras ciencias, no tuvimos un Severo Ochoa ni a un Blas Cabrera. Sucedió cuando llegó su tiempo.

¹² La Universidad de Minesota fue una especie de Eldorado para matemáticos y economistas españoles en aquellos años. Se dice que la feroz inclemencia del clima invernal estimulaba en forma notable la concentración matemática. También lo hacía su impresionante panel de grandes investigadores.

Esta eclosión estuvo basada en la notable mejora de la enseñanza de los años 60 y 70 del pasado siglo y surgió de forma apreciable ya en los años 80. Fue acompañada en el tiempo por una serie de eventos sociales propicios como la entrada oficial de España en la Unión Europea (enero de 1986), que muchos investigadores vimos como el paso definitivo hacia la Modernidad y la cooperación europea sin barreras; y la Ley del Fomento y Coordinación General de la Investigación Científica y Técnica del mismo año (abril de 1986), que sentó las bases racionales de la práctica y gestión de la investigación científica en nuestro país. Siguiéron años en que las oportunidades crecían y a las promesas les seguían los actos y los dineros: la financiación proveniente del Ministerio se vio complementada por los sustanciosos Proyectos Europeos y aún quedaban los fondos de Embajadas y Fundaciones. Fueron años en que los grupos de investigación florecieron y los resultados no se hicieron esperar. Como hemos visto con nuestro autor.

En este ambiente de gran optimismo y apertura, que era como un milagro en la historia social de nuestra ciencia, muchas piezas empezaron a estar en su sitio. Así, en 1991 se fundó la Sociedad Española de Matemática Aplicada SEMA (legalmente en 1993). Luego sucedió la refundación de la Real Sociedad Matemática Española RSME¹³. Cuando en el año 2000 se celebró el “Año Mundial de las Matemáticas”, este evento tuvo una especial repercusión en España tanto en la comunidad de investigadores y docentes como en el público en general¹⁴. La Real Academia tuvo una participación destacada con un solemne acto en el Senado.

Estudios cuantitativos rigurosos de la evolución de la producción matemática en estas fechas demostraron que esta se había multiplicado en España por un factor de más de 10 y España pasaba a situarse entre los primeros 10 países del mundo, rompiendo así por primera vez un atraso secular. Además, las puntas de calidad alcanzadas tocaban niveles muy altos como muestra el resumen que he hecho de la trayectoria de Luis Vega.

¹³ En 1996, como recuerda el hoy académico D. Manuel de León que fue unos los protagonistas.

¹⁴ Yo escribí a petición del Comité Organizador, CEAMM2000, un “Llamamiento para el Año Mundial Matemático 2000” dirigido a los matemáticos españoles, ver <https://verso.mat.uam.es/juanluis.vazquez/decanos8.html>, donde se describía un presente esperanzador.

Esta efervescencia culminó en una invitación de la Unión Matemática Internacional, UMI, para que España presentara su candidatura para organizar el Congreso Mundial de Matemáticos del año 2006¹⁵, la cual fue presentada y aprobada en el congreso de Pekín en 2002 (los congresos mundiales se celebran cada 4 años).

El gran acontecimiento, en siglas ICM2006, sucedió en Madrid en agosto de 2006 en el marco del Palacio de Congresos del IFEMA. Con una enorme afluencia y una perfecta organización, mostró al mundo una comunidad matemática boyante. Entre los varios matemáticos españoles que hablaron en sesiones invitadas estaba Luis Vega¹⁶. Era un justo premio de visibilidad internacional a una carrera conseguida y asentada, en su país y fuera de él. En mi opinión, así culminaba una época.

La experiencia del BCAM. La vida investigadora de Luis estaba firmemente asentada, y no volveré a describir los detalles de sus éxitos en la época subsiguiente, el lector los encontrará en su discurso de ingreso. He de reseñar que, por esta época, Luis era un asiduo colaborador de las dos sociedades, RSME y SEMA, que siempre tuvieron óptimas relaciones gracias en parte a la influencia de gente como él, sabia, prudente y amable.

Paso a referir un suceso que será importante en su vida. En el año 2008 el gobierno vasco decide crear el Centro Vasco de Matemática Aplicada (BCAM, por sus siglas en inglés), siendo el Profesor Enrique Zuazua su primer director. Desde 2013 a 2019 Luis dirigió el BCAM, que se ha convertido en pionero en la investigación matemática en España. Así, Luis unió a su excelencia matemática y amplitud de intereses un creciente compromiso por las aplicaciones industriales y sociales de las matemáticas¹⁷. Al mismo tiempo desarrolló una notable capacidad para la gestión científica, que explica en parte el creciente éxito del centro. Yo agradezco en particular su apertura y la generosidad con que

¹⁵ La invitación fue hecha en 1988.

¹⁶ Ver la reseña “¿Quiénes son los conferenciantes españoles del ICM?” en La Gaceta de la RSME, 9 (2006), no 2, 281-310.

¹⁷ Una muestra de su pensamiento sobre la aplicación práctica de las matemáticas se puede ver en el artículo escrito en 2011 con el Prof. Mikel Lezaun, cf. <http://www.bcamaath.org/es/people/lvega/conferences-and-talks/opinion>.

mis alumnos y yo fuimos acogidos en el BCAM en tiempos algo oscuros en que tales virtudes eran poco practicadas en otros lugares.

Reconocimientos. En su época de dorada madurez, Luis exhibe las muestras que acompañan a las grandes carreras científicas. En su CV verán una notable sucesión de visitas a centros del mayor prestigio, entre los que destacan repetidas visitas a EE.UU. y a París. Ha recibido distinciones como

- “Highly Cited Researcher” por el ISI Institute (Thomson) desde 2004.
- Fellow de la AMS en la distinción “Inaugural Class” desde 2012.
- Miembro correspondiente de nuestra academia RAC desde 2013.
- Miembro de EURASC, la European Academy of Sciences, desde 2015, en ella juega un papel muy activo. De esta sociedad había recibido la Medalla Blaise Pascal en 2014.
- En el período 2015-2020 disfrutó de una ERC-Advanced grant “Harmonic Analysis and Differential Equations”.

Tiene otras varias distinciones que no citaré por brevedad.

.....

Me toca concluir estas palabras. Deseo expresar el sentir general de satisfacción por el nombramiento de D. Luis Vega González como Académico de esta Institución. Junto con mis coproponentes D. Ildefonso Díaz y D. Javier Jiménez Sendín, y junto a toda la sección de Exactas, creo que sus cualidades investigadoras y humanas afectarán muy favorablemente la vida y proyección internacional de esta Real Academia. De hecho, ya ha venido colaborando como miembro correspondiente en forma muy satisfactoria y ha llegado la hora en que sus propuestas tengan el peso que la situación de Numerario otorga.

El prestigio de esta Academia va ligado a la incorporación de personas como Luis, que atesora una carrera científica tan reconocida como excepcional, no solo en nuestro país sino también en los países más avanzados de nuestro tiempo. Su relativa juventud unida a su dilatada experiencia, su gran capacidad de trabajo, su carácter abierto a la interacción y su curiosidad científica nos son muy necesarios para afrontar los difíciles retos del presente y el futuro.

Querido Luis, te invito en nombre de esta institución a unirme a la tarea de Limpiar, Fijar y Dar Esplendor al mundo de los números, figuras, funciones y algoritmos. Como se dice en esta sede, con Observación y Cálculo.

No es tarea fácil pero es honrosa. Sé bienvenido.

Muchas gracias por su atención.

Oviedo, a 19 de noviembre de 2020

