REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

En torno al casi centenario Análisis Funcional

DISCURSO
LEÍDO EN EL ACTO DE SU RECEPCIÓN
POR EL

EXCMO. SR. D. MANUEL LÓPEZ PELLICER

Y
CONTESTACIÓN
DEL

EXCMO. SR. D. MANUEL VALDIVIA UREÑA

EL DÍA 29 DE ABRIL DE 1998

MADRID
Domicilio de la Academia
Valverde, 22
1998

ISBN.: 84-8497-475-8
Depósito Legal: V-1361-1998

Impreso en Gràfiques Vimar, S.L.
C/. Alqueria de Raga, 11
46210-PICANYA (Valencia)

INDICE

Discurso del Excmo. Sr. D. Manuel López Pellicer

DISCURSO

DEL

EXCMO. SR. D. MANUEL LOPEZ PELLICER

En torno al casi centenario Análisis Funcional

Capítulo 1

Introducción

Excmo. Sr. Presidente,
Excma. Sra. Presidenta del Instituto de España,
Excmos. Sres. Académicos,
Señoras, Señores:

1.1 Agradecimiento a la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

Ante todo, quiero que mis primeras palabras sean de sincero y profundo agradecimiento a esta ilustre Corporación por el gran honor que tan generosamente me ha concedido al designarme para ocupar un puesto en esta Real Academia.

Desde que tuve mis primeros contactos con el mundo científico me he sentido en deuda de gratitud con esta Academia. Los primeros libros de Física y Matemáticas que recuerdo haber meditado y explicado, fueron escritos por los Académicos Srs. Catalá de Alemany, Gúzman Ozámiz, Dou MasdeXexás, Etayo Miqueo, Linés Escardó, Maravall Casesnoves, Navarro Borrás, Puig Adam, Rey Pastor, Ríos García, San Juan Llosá y Valdivia Ureña. En los primeros cursos de Facultad tuve por profesores a los Académicos Srs. Catalá de Alemany, Costa Novella, Primo Yúfera, Rodríguez Vidal y Senent Pérez. El primer trabajo de investigación lo publiqué en 1971 en la revista de la Academia. Es parte de mi tesis doctoral que fue dirigida por el profesor Valdivia Ureña. Desde 1989 figuro en la relación de Académicos Correspondientes. Todo ello conforma un marco de agradecida vinculación con la Academia.

Soy consciente de la responsabilidad que he contraido y de la desproporción entre esta distinción y mis limitados méritos. Siempre he confiado en el esfuerzo personal y en los encuentros providenciales con otras personas. Por ello estoy seguro, señores Académicos, de contar ahora con su ayuda para superar mis deficiencias, ofreciéndoles mi entusiasmo y trabajo al servicio de esta Corporación, en la que vengo a ocupar la vacante del ilustre contraalmirante, ingeniero y científico Don Juan García-Frías y García, que ostentaba la medalla número 24.

1.2 Don Juan García-Frías y García.

Don Juan García-Frías y García nació en Albox (Almería) el treinta de noviembre de 1905. Ingresó en la Escuela Naval en 1923, obteniendo el grado de Alférez de Navío en 1928. Durante los años treinta simultaneó su profesión de marino con los estudios en Derecho, cuya licenciatura obtuvo en 1934. Más tarde haría interesantes aportaciones al Derecho Marítimo, dada su condición de abogado y marino.

Su primer trabajo de investigación comenzó en 1936, motivado por su preocupación en la reducción del volumen de las tablas de navegación astronómica, desarrollando un método de curvas de altura mientras estuvo embarcado en el submarino General Sanjurjo. Lo terminó y publicó en 1940 en la Revista General de la Marina con el título *Método de trazado de curvas de altura*, y tuvo repercusión inmediata, pues fue invitado a exponerlo por el Almirantazgo alemán en septiembre de 1941 en el Deutsche Seewarte de Hamburgo, donde mantuvo largas e intensas explicaciones de sus teorías con el astrónomo Freiesleben y el doctor Schütte, profesor de Geodesia en la Universidad de Viena, dos grandes científicos con quienes siguió intercambiando ideas y experiencias. Este trabajo sería la base de la publicación en 1944 de sus *Tablas de Líneas de Posición de Altura – Astronomical Position Line Tables-*, con texto en castellano y en inglés, del que se han publicado los siguientes trabajos dedicados a su difusión:

1. *Höheustandlinien in der Seekarte*, por H.C. Freisleben en "Annalen der Hydrographie und Maritimem Meteorologie", 1942, que fue reproducido en 1945 en el volumen XIII de la "Revue Hidrographique International" del Bureu Hidrographique International de Mónaco.
2. *Position Line by Involute Method*, por Binacle en "The Nautical Magazine", febrero, 1945.
3. *Il calcolo del Punto Nave con il metodo delle involute di altezza*, por R. Tirreni en "Rivista Marittima", abril, 1951.
4. *The Astronomical Position Line. The García-Frías Method*, en el "Admiralty Manual of Navigation", vol. III, 1954.

También en 1944 publica su *Teoría General de la Tabulación Escalar y Numérica de Ecuaciones* de la que obtuvo muchas aplicaciones a la Astronomía Naútica, simplificando la obtención del acimut y la reducción al meridiano, quedando como problema pendiente el obtener una simplificación similar en el cálculo de la altura, que consiguió en 1957 en su monografía *La reducción al meridiano en Astronomía Naútica.* Estas aportaciones fueron difundidas en el artículo *Numerische Tafeln zur Lösung von Gleichen*, escrito por H.C. Freiesleben en "Der Matematische und Naturwissenschaftliche Unterricht", 1956.

El trágico hundimiento del trasatlántico italiano "Andrea Doria" en su abordaje con el sueco "Stockholm" dirigió el interés de García-Frías hacia la seguridad de la navegación con visibilidad restringida. En Mayo de 1957 asistió en el Istituto Cívico Colombiano de Génova a la *Conferenza Internazionale Sulla Disciplina del uso del radar*, cuyo propósito era resolver el problema planteado por el rádar en la evitación de los abordajes con niebla. En diciembre de 1957 publica en la "Revista General de Marina" su trabajo *El rádar y la uniformidad en la maniobra anticolisión*, donde expone sus principios de la denominada *Regla del sector*, que luego desarrolla en sus artículos *Anticollision radar sectors* y *The Sector Rule and the* *collision problem*, publicados en "The Journal of the Institute of Navigation", en julio de 1960 y en abril de 1965, respectivamente.

Simultáneamente se preocupó de la seguridad de la navegación con mala visibilidad, obteniendo un nuevo sistema de líneas de posición, isobáticas, bidireccionales y de mínima distancia en su trabajo *Nuevo sistema de líneas de posición en el mar*, publicado en la "Revista General de la Marina", febrero, 1956, que completó con su artículo *Contour-based position lines*, en "The Journal of the Institute of Navigation", abril, 1967.

En ese año tomó posesión de su plaza de académico numerario. En su discurso de recepción sobre *La Batimetría y sus problemas*, glosó la historia, problemas y perspectivas futuras de la Batimetría, ciencia que estudia la profundidad de los mares para efectuar el levantamiento de los fondos marinos y, así, facilitar la navegación.

En 1968 el Instituto de España editó la obra *Examen Marítimo* de Jorge Juan, tratado de construcción naval, con mecánica y matemáticas aplicadas al buque. El prólogo, a modo de estudio introductorio, es de García-Frías, y contiene importantes observaciones, como, por ejemplo, que la fórmula de la resistencia del agua al avance de un buque dada por Newton, Mariotte y Bouguer fue mejorada por Jorge Juan, con una fórmula más aproximada al proceso físico de navegación. *Determinar la fuerza que produce un fluido sobre un obstáculo que se mueve en él*, escribió el profesor Millán Barbany en su discurso de ingreso en esta Academia [241], *ha sido un problema básico de la Mecánica de Fluidos, objeto de la más permanente atención desde los orígenes de esta ciencia.*

García-Frías fue Agregado Naval en Rabat, Director de la Escuela de Submarinos, Almirante Jefe de Logística del Estado Mayor, Director del Instituto Geográfico y Catastral, donde ingresó en 1943 como Ingeniero Geógrafo, Vicepresidente del Consejo Superior Geográfico, Presidente de las Comisiones Nacionales de Astronomía, de Geodesia y de Geofísica, de Metrología y Metrotecnia.

Se le concedieron las grandes cruces de Isabel la Católica, Alfonso X el Sabio, Mérito Civil, Mérito Naval con distintivo blanco y Orden Militar de San Hermenegildo. Fue Fellow de la Royal Geographical Society y del Instituto de Navegación de Londres.

Sus más de cien artículos de investigación, algunos ya mencionados, versaron sobre el trazado de curvas de altura, la tabulación numérica, identificación geográfica en el mar, uso naval del radar, anticolisión naval, cinemática aeronaval, etc.... .

Tuvo mucho interés por los fundamentos de la Geometría Euclídea y su axiomática, y por la aparición de las primeras geometrías no euclídeas, lo que le llevó, después de terminar su actividad profesional, a publicar su *Geometría Clásica Axiomática* en Editora Nacional, habiendo dejado inédito su libro sobre *Teoría del conocimiento Geométrico Puro*.

La modestia de Don Juan García-Frías le llevaba a pensar que sus excelentes trabajos profesionales y científicos sólo fueron debidos al celoso cumplimiento de sus obligaciones profesionales. Por eso, el profesor Maravall, en la sesión necrológica por el académico García-Frías, destacó su personalidad moral y humana, su bondad y su espíritu recto y justo. Falleció cristianamente, según había vivido, el 28 de mayo de 1996, a los noventa años de edad.

Capítulo 2

El final del siglo XIX y el nacimiento del análisis funcional

Hace un siglo estaba tomando forma el análisis funcional, parte del edificio matemático producido en nuestro siglo XX. En esta ocasión vamos a hablar de sus orígenes, de algunos resultados recientes, muchos relacionados con esta Real Academia según se puede constatar en la bibliografía, y también de algunos problemas abiertos. Tras la bibliografía está la relación nominal de los científicos citados en el discurso, que, al ir acompañada de fechas, puede facilitar la localización temporal de nuestra exposición. También quiere ser una muestra adicional de reconocimiento a sus obras.

En lo posible voy a evitar tecnicismos, tratando de encontrar *un balance justo entre lo aceptable y lo tolerable*, como proponía el profesor Montesinos Amilibia en su discurso de ingreso en esta Academia [246], *confiando en su benévola comprensión*.

2.1 Aportaciones de síntesis.

En la *Historia de la matemática en el siglo XIX (partes primera y segunda)*, publicadas en 1992 y 1994 por esta Real Academia, podemos ver la fecundidad matemática del XIX. La afirmación de Volterra en la conferencia de París de 1900 de que el siglo XIX había sido el siglo de la teoría de funciones refleja el gran desarrollo de esta teoría, si bien otras ramas matemáticas, como álgebra o geometría, también crecieron de forma espectacular. Como era previsible, se manifestó de inmediato lo más genuino de la actividad matemática con aportaciones de síntesis y de extensión, que llevaron al planteamiento o replanteamiento de importantes problemas, y a su solución, positiva o negativa, en muchos casos.

Así fue como a finales del XIX un resultado de álgebra nos trajo la solución negativa del famoso problema geométrico de la cuadratura del círculo, planteado alrededor del siglo V antes de Cristo. Consistía en construir con una regla y compás ideales, y en un número finito de etapas, un cuadrado de área igual a la de un círculo de radio unidad. Todos los esfuerzos para resolverlo resultaron estériles, hasta que la aparición de la geometría analítica lo redujo a obtener el punto de coordenadas ($\sqrt{\pi}$,0) como intersección del eje OX con una recta o una circunferencia, que se obtenía después de trazar un número finito de rectas y circunferencias.

Entonces, con una adecuada elección de esas rectas y circunferencias, resultaría que el número π sería raíz de cierta ecuación algebraica con coeficientes enteros, propiedad que se expresa diciendo que el número π no sería trascendente.

Pero Lindemann logró probar la trascendencia del número π en 1882, con las técnicas usadas por Hermite en 1873 para probar la trascendencia del número e, y de las que erróneamente había pensado que no tenían suficiente potencia para aplicarlas al número π.

Veinticuatro siglos de esfuerzos y una maravillosa síntesis de álgebra y geometría resolvieron, en negativo, el problema de la cuadratura del círculo.

2.2 La teoría de conjuntos.

En esos años, G. Cantor elaboró en la universidad de Halle la teoría de conjuntos. Entre 1874 y 1897 publicó sus resultados más importantes sobre números cardinales y ordinales transfinitos, mientras trabajaba en series trigonométricas, tema destacado en el siglo XIX por sus aplicaciones físicas.

Con su célebre proceso diagonal probó en 1874, que el conjunto de los números reales no se puede poner en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números naturales, descubriendo así que el cardinal c de los números reales, llamado el continuo, es mayor que el cardinal del conjunto N de los números naturales, denominado χ_o (alef subcero), que también es el cardinal del conjunto de los enteros y de los racionales.

Cantor también puso en correspondencia biunívoca los puntos de un plano y de una recta, construyó la aritmética de los cardinales transfinitos y descubrió muchas de las propiedades de los ordinales.

Respecto a la existencia de los conjuntos infinitos, parece que Cantor los admitía como *entes que están ahí*, recordándonos el idealismo de Platón.

Tanto la prueba de la trascendencia del número π de Lindemann, como la teoría de conjuntos de Cantor recibieron duras críticas por parte de Kronecker, profesor en la Univesidad de Berlín y uno de los matemáticos con más prestigio a finales del siglo XIX, que sólo admitía como objetos matemáticos a los construidos a partir de los números naturales en un número finito de etapas, considerando preceptivo aplicar los métodos aritméticos a los problemas de otras partes de la matemática.

Ello explica que Kronecker criticase a Weierstrass por el uso de irracionales representados por sucesiones de racionales, que dirigiese ataques a Cantor por haber extendido la sucesión de naturales con una jerarquía de nuevos números asociados a los conjuntos infinitos, y que, argumentando la no existencia de ciertos irracionales, no diese ningún valor a la demostración de Lindemann de la trascendencia del número π, una de las construcciones intelectuales que encierra más belleza.

Kronecker es el contrapunto al idealismo de Cantor.

2.3 Los espacios de funciones y el cálculo funcional.

La tercera aportación de finales del siglo XIX que vamos a considerar se debe a Vito Volterra. Casi todas las funciones utilizadas en el siglo XIX estaban definidas en conjuntos de puntos de un espacio euclídeo. Volterra, trabajando en 1887 en cálculo de variaciones, tuvo necesidad de ampliar el espacio euclídeo a un espacio cuyos elementos son funciones, sobre el que con integrales definió otras funciones, que llamó *funciones de línea*, rebautizadas en 1903 por Hadamard como *funcionales*, evitando así homonimias.

La ampliación de Volterra supone sustituir el espacio euclídeo finito-dimensional por un espacio de funciones de dimensión infinita. En principio, parece que se podría ganar mucho con esta extensión, supuesto que se dotase a esos espacios infinito dimensionales de estructura algebraica y topológica compatibles. El mérito de introducir el concepto de límite en un espacio **E** de funciones y el de diferencial en funcionales corresponde al matemático francés Fréchet. Estaba interesado en encontrar funciones donde cierta integral alcanzase extremos relativos, para lo que introdujo el concepto de diferencial del funcional definido por esa integral, de manera que la diferencial fuese nula en los extremos relativos.

También fue Fréchet el primero en representar las formas lineales continuas del espacio $\mathbf{L}^2$. Englobó sus aportaciones con el nombre *Cálculo Funcional*, donde ya consideraba espacios abstractos, pero sin la enriquecedora linealidad, que podemos ver en el trabajo de Fredholm sobre ecuaciones integrales.

No resulta explicable que Fréchet no se decidiese a construir un sistema de axiomas que definiesen una estructura general, de la que $\mathbf{L}^2$ fuese uno de sus numerosos ejemplos, mérito que comparten Hilbert, Banach, Wiener, von Neumann y Riesz.

Así fue como, fruto de la síntesis de análisis matemático, álgebra y geometría, apareció el análisis matemático sobre espacios de funciones, dando el *análisis funcional*.

Capítulo 3

La obra de David Hilbert

3.1 Datos biográficos.

Henry Poincaré y David Hilbert son dos de los matemáticos que más han influido en nuestro siglo. En el análisis matemático del siglo XX la huella predominante es la de Hilbert, a quien el profesor Rodríguez-Salinas dedicó un capítulo en la publicación de esta Real Academia *Historia de la Matemática del siglo XX* (1996) [346]. Aquí sólo glosaremos algunos aspectos de su entorno y obra matemática relacionados con el Análisis Funcional.

Hilbert nació en 1862 cerca de Könisberg, ciudad que pertenece a la historia de la matemática por el famoso problema de topología de sus siete puentes, resuelto por Euler en el siglo XVIII. En esta ciudad de la juventud de Hilbert se respiraba la impronta de la monumental obra filosófica de Immanuel Kant, de la que Hilbert heredó la *fe en el progreso y en el triunfo, por encima de todo, de la verdad científica.*

Ingresó en la Universidad en otoño de 1880, cuando, según se ha expuesto en §2.2, Cantor elaboraba en Halle la teoría de conjuntos e introducía el infinito, tal como hoy se utiliza. Entonces la universidad de Berlín tenía uno de sus momentos de mayor prestigio, con profesores de la talla de Weierstrass, Kronecker, Kummer y Helmholtz. Pero Hilbert no fue a Berlín; estudió en Heidelberg con Fuchs, conocido por sus trabajos en ecuaciones diferenciales lineales, y luego volvió a Könisberg para escuchar las lecciones de Weber sobre teoría de números, teoría de funciones y teoría de invariantes en polinomios homogéneos de varias variables, respecto a ciertas clases de transformaciones lineales.

En Könisberg, nació una amistad duradera entre Hilbert y su Minkowski, entonces estudiante y cuyo talento matemático fue reconocido por un premio de la Academia de Ciencias de París en 1883.

En 1884 Hurwitz, otro matemático precoz, sustituyó a Weber, nombrado profesor en Göttingen. Con sus dos alumnos, Hurwitz daba diariamente un paseo matemático a las cinco de la tarde, para hablar y discutir de matemáticas. Cuando Hilbert fue profesor hizo de esta costumbre una memorable institución; los paseos con amigos y alumnos le dieron ocasión de explicar sistemáticamente los problemas matemáticos.

Lindemann, que, como se ha indicado en §**2.1**, acababa de probar la trascendencia del número π, sugirió a Hilbert que hiciese su Tesis Doctoral sobre la teoría de los invariantes.

En 1885 Hilbert conoció a Felix Klein en Leipzig, quien, con su famoso programa de Erlangen, había unificado y clasificado las diversas geometrías según las características invariantes frente a ciertas transformaciones. Klein, cuyo prestigio llegaba ya a América, apreció el valor de Hilbert y le envió a París con Poincaré, de quien recibió un curso de teoría de potencial y mecánica de fluidos.

París le dio a Hilbert la posibilidad de entablar amistad con Picard y Hermite, de quien decían sus alumnos que transmitía el gusto por la belleza de la matemática y la pasión por la investigación. Precisamente Hermite indicó a Hilbert el problema de invariantes del que Gordan en Erlangen buscaba su solución.

De vuelta a Alemania, en junio de 1886, se detuvo en Göttingen, donde acaba de llegar Klein, y en Berlín, para hablar con Kronecker, a quien Hilbert seguía en su precepto de aplicar los métodos aritméticos en los problemas planteados en otras partes de la matemática, si bien disentía de la idea de Kronecker de que sólo eran admisibles como objetos matemáticos los deducidos de los números naturales por construcciones con un número finito de etapas, ya que Hilbert tenía la convicción de que Kronecker estaba limitando las posibilidades de las matemáticas. Por eso, cuando unos años después parecía que la teoría de conjuntos se tambaleaba por las paradojas, afirmaría con convicción *que Cantor había construido un paraíso para los matemáticos de donde nadie les podría expulsar.*

La síntesis entre diversos enfoques será una de las características de la obra de Hilbert, a la que, en otro contexto, se le puede aplicar la frase del profesor Girón González-Torre [173] de que *no hay exclusivismos y que las buenas ideas de cada enfoque repercuten en el otro*, pronunciada en su discurso de ingreso en esta Academia.

3.2 El problema de los invariantes.

Después de su habilitación, Hilbert siguió la sugerencia de Lindemann y de Hermite y fue a Erlangen a oir a Gordan, que quería probar que todo sistema de invariantes tiene una base finita, si bien aún no había conseguido la demostración ni siquiera para las formas binarias. Hilbert probó en 1888 de forma general la existencia de la base en todos los casos, sin necesidad de construirla, ya que elaboró una prueba indirecta observando que la hipótesis contraria conduciría a una contradicción.

Aunque las pruebas indirectas ya habían sido utilizadas en matemáticas, su trabajo recibió ataques muy duros de Kronecker y de Gordan por falta de constructividad y de rigor matemático, críticas moderadas de Lindemann, que lo consideraba *extraño*, y grandes elogios, como el de Klein, a quien le parecía *perfectamente sencillo y lógicamente irresistible*.

Hilbert, que no despreciaba en absoluto los métodos constructivos, dio respuesta a sus detractores elaborando en 1892 una nueva prueba constructiva del teorema de la base finita, si bien pensaba que *la futura matemática tendría muchas pruebas generales de existencia sin cálculos.*

3.3 Hilbert en Göttingen.

A la centenaria reputación de Göttingen, ilustrada por nombres como Gauss, Dirichlet y Riemann, Klein añadió:

- la creación de varios institutos tecnológicos desde su incorporación en 1886, como nexo de unión entre ciencia e industria,
- la incorporación de muchos estudiantes extranjeros, americanos principalmente,
- y su deseo de que la reputación matemática de Göttingen fuese la mayor en Alemania y en el mundo.

En 1895 convenció a Hilbert para aceptar un puesto de profesor en Göttingen sustituyendo a Weber, nombrado profesor en Estrasburgo.

Hilbert no deseaba defraudar las esperanzas que en él había depositado Klein. Entre 1895 y 1900 reanuda en Göttingen el hábito de los paseos matemáticos con sus mejores discípulos. Dió cursos sobre temas muy variados, preparando cuidadosamente las clases, que eran un proceso de creación matemática.

En unos años, Hilbert se convirtió en el matemático alemán de más prestigio, igualando el de Poincaré, y la fama de Göttingen superó a Berlín, donde Fuchs, Schwarz y Frobenius no contrarrestaban el atractivo de Göttingen sobre los jóvenes inquietos. Allí acudían espontáneamente Weyl, Born, Zermelo y van der Waerden, cuyo manual de álgebra moderna es el más utilizado universalmente desde 1930. Otros son invitados a trabajar en Göttingen, como Minkowski, Runge, Landau y Emmy Noether, a quien Hilbert defenderá enérgicamente contra las leyes entonces vigentes que prohibían a las mujeres puestos de enseñanza superior.

Cada vez que Hilbert rechazaba una oferta prestigiosa en otra Universidad, como la cátedra de Lie en Leipzig, o la de Fuchs en Berlín, pedía, y obtenía en premio, un nuevo puesto de trabajo para algún discípulo o un nuevo laboratorio en Göttingen.

La Escuela de Hilbert ejerció atractivo en el mundo entero, recibiendo estudiantes de Francia, Italia, Países Bajos, Grecia, Rusia, Japón, Estados Unidos, etc. Minkowski escribió que *una estancia en Göttingen infundía el deso de hacer grandes cosas.*

La energía de Hilbert, su fuerza de voluntad, su fe en el porvenir y su confianza en la razón para encontrar soluciones a los problemas bien planteados se comunicaban a quienes se le acercaban, que fueron muchos y de muy diversos lugares.

Con tan numerosos y buenos discípulos, la escuela de Hilbert iba a desarrollar excelencia en variados dominios de la matemática. En manos de Noether, Artin y van der Waerden se desarrollará nuestra Algebra Moderna. Hecke y Siegel inspirarán los trabajos de Weyl. Born creará, con Pauli y Heisenberg, la mecánica cuántica. Bernays, Ackermann Gentzen y el mismo Hilbert serán los pilares de una escuela de lógica, cuyos trabajos servirán de punto de partida al francés Herbrand, al austriaco Gödel y al polaco Tarski.

Entre 1920 y 1933 matemáticos, físicos, lógicos y filósofos peregrinarán a la ciudad de Gauss y Riemann, convertida por Hilbert en *el lugar sagrado del pensamiento puro.*

Luego, con la llegada de Hitler, vendrá la persecución de los judíos y la forzosa partida de Courant, Noether, Born, Weyl y tantos otros, matemáticos y no matemáticos.

Tal vez Hilbert había presentido esta desgarradora situación cuando en el congreso internacional de matemáticos de 1928, en Bolonia, insistió en el carácter universal de las matemáticas, defendiendo que *todas las fronteras, sobre todo nacionales, son contrarias a la naturaleza de la matemática.*

Años después, cuando un nuevo ministro nazi, de Educación, le preguntó cómo iban las cosas en Göttingen tras haber eliminado la influencia judía, Hilbert le respondió con gran entereza que *ya no había matemática en Göttingen.*

3.4 La teoría de los números algebraicos.

Veamos sucintamente su obra escrita. En sus primeros años en Göttingen, Hilbert concentró sus esfuerzos en su monografía sobre la teoría de los números algebraicos (Zahlbericht), verdadera joya que, según los especialistas, aún es una mina. Expuso de forma sistemática y unificada los resultados obtenidos después de Kummer, simplificando las pruebas, que sometió a la escrupulosa revisión de Minkowski. Hilbert deseaba preparar el futuro y facilitar descubrimientos posteriores. Fue más allá de sus previsiones, pues en el teorema noventa dio la raíz del álgebra homológica y elaboró la teoría de las extensiones abelianas de un cuerpo de números algebraicos, formulando conjeturas que más tarde resolvieron Takagi y Chevalley.

3.5 El problema de Dirichlet.

Después de la teoría de los invariantes y de los números algebraicos, Hilbert dirigió sus esfuerzos hacia el estudio del problema de Dirichlet, que consiste en encontrar en un dominio acotado Ω del plano una función armónica u que en la frontera de Ω coincida con una función continua f prefijada. El objetivo inicial del problema era averiguar la distribución de temperaturas en un disco a partir de valores conocidos en la frontera, si bien otros fenómenos eléctricos o hidrodinámicos admiten la misma modelización matemática.

La existencia de la función armónica u se daba por segura *por consideraciones físicas*. Dirichlet había conjeturado (en una publicación póstuma de 1876) que entre las funciones continuas que tomasen en la frontera del dominio Ω los valores definidos por la función f, se tendría que la solución sería la función u para la que la integral de $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ en el dominio Ω alcanzase el mínimo. Esta conjetura, denominada *principio de Dirichlet*, había sido utilizada por Riemann en su monumental obra *Principios fundamentales de una teoría general de funciones de una variable compleja*, si bien un contraejemplo de Weierstrass invalidó la forma en que Riemann utilizaba el principio de Dirichlet, lo que obligaba a largos caminos para justificar algunos resultados de la obra de Riemann.

Hilbert resolvió la objeción de Weierstrass con unas restricciones sobre la frontera del dominio D y de la función f, legitimando la obra de Riemann, una de las más importantes del siglo XIX, y mostrándonos que *el rigor y la sencillez son aliados, nunca enemigos*, y que *lógica y física son complementarias, pero no opuestas*, lo que siempre fueron dos de sus profundas convicciones epistemológicas. Su esfuerzo investigador repercutió en un excelente curso que dio en 1899 sobre cálculo de variaciones, que impactó fuertemente a von Laue, quien en 1914 sería premio Nobel de Física.

3.6 Los fundamentos de la Geometría.

También en 1899, y sintetizando mucho trabajo anterior, publicó *Los fundamentos de la Geometría*, obra dedicada al método axiomático y a la clasificación de los axiomas de la Geometría.

En este libro *el espacio aparece como un concepto matemático y sólo matemático, y no como el lugar, la forma o la estructura de nuestra experiencia*. Así Hilbert elevó la geometría por encima de la expresión idealizada de la realidad sensible, como la situaba Aristóteles en su *Metafísica*, libros M y N, o de la construcción de leyes formales de nuestra percepción del mundo, como la veía Kant en su *Crítica de la razón pura*, Estética trascendental.

Hilbert pudo tomar parte de su inspiración de la publicación póstuma de Riemann de 1867 titulada *Sobre las hipótesis en que se fundamenta la geometría*, para quien, como explicó el profesor Etayo Miqueo en su discurso de ingreso en esta Academia [121], *la noción geométrica fundamental es la longitud definida mediante una forma diferencial de acuerdo con la tendencia general de la física en ese tiempo, evitando así el someter la noción de longitud a leyes a priori* *que hacen intervenir en cada región del espacio al espacio entero* [121].

No obstante, el acento en la obra de Hilbert está puesto en las relaciones de compatibilidad y de dependencia entre proposiciones: Dos proposiciones son lógicamente compatibles si se verifican simultáneamente en un mismo modelo, entendido como un conjunto de elementos que verifican ciertas relaciones dadas a priori. Una proposición M es independiente de otras, si existe un modelo en el que son lógicamente compatibles con la negación de M. Es así como se pudo probar la independencia del axioma euclídeo de las paralelas.

De inmediato, *Los fundamentos de la geometría* de Hilbert se transformó en un clásico, con diez ediciones en su lengua original y numerosas traducciones. Es un magnífico fruto del espíritu de la matemática y texto de obligada referencia, con independencia de la posición respecto a la geometría.

3.7 Ecuaciones integrales y espacios de Hilbert.

El trabajo de Fredholm sobre ecuaciones integrales y el programa de Poincaré de obtener una teoría que unificase la Física y el Análisis Matemático, llevaron a Hilbert a desarrollar su teoría de formas cuadráticas con un número infinito de variables y la teoría espectral, nombre debido a Hilbert.

También definió el espacio de las sucesiones de cuadrado sumable e interpretó las ecuaciones integrales como transformaciones lineales en este espacio, estableciendo de dos formas diferentes la equivalencia entre una ecuación integral y un sistema de infinitas ecuaciones lineales con infinitas incógnitas.

Obtuvo el desarrollo de una función respecto a un sistema ortonormal completo, e introdujo lo que después se llamaría *espacio de Hilbert*.

Los aspectos geométricos de la teoría de Hilbert fueron desarrollados por Schmidt y, desde entonces, la Geometría y su lenguaje acompañan al Análisis Matemático.

Hilbert reunió sus resultados en el libro *Grundzüge einer Allgemeinen Theorie der Linearen Integralgleichungen* (1912). La axiomática de los espacios de Hilbert fue obtenida por von Neumann en el caso separable y por Riesz en el caso general.

Desde principios de siglo la Física Matemática ha incorporado los espacios de Hilbert como una de sus herramientas habituales. Estos espacios y la teoría de las ecuaciones integrales fueron instrumentos para la fundamentación matemática de la Mecánica Cuántica, hecha también por von Neumann en 1927.

Luego vendría el interés por los operadores, tratando de probar el teorema espectral con condiciones cada vez más débiles. La publicación por E. Hille en 1948 de una monografía sobre semigrupos de operadores, supuso la aparición de una nueva herramienta para el estudio del comportamiento asintótico de las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales.

Capítulo 4

Espacios de Banach y espacios vectoriales topológicos

4.1 Espacios de Banach.

La ecuación integral de Fredholm también atrajo la atención de Stefan Banach, y fue objeto de su tesis doctoral leída en Léopol en 1920, y publicada en 1922 en el tercer tomo de *Fundamenta Mathematicae* con el título *Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations integrales*, donde consideró espacios más generales que los de Hilbert, hoy llamados *espacios de Banach*, para los que estableció teoremas generales, válidos para distintos tipos de funciones (continuas, sumables, de potencia p-ésima integrable, medibles acotadas, ...), que evitaron repetir pruebas en cada caso y dieron nuevos resultados al aplicarlos en ecuaciones integrales.

Unos meses después de Banach, Norbert Wiener, uno de los padres de la cibernética, también introdujo los hoy llamados espacios de Banach, conocidos durante algún tiempo como espacios de Banach-Wiener. En 1956, Wiener escribió en su autobiografía que *estando invitado por Fréchet en 1922, con ocasión de un congreso matemático en Strasburgo, sucedió que Fréchet, muy excitado, le mostró el artículo de Stefan Banach publicado, le dijo un tanto despectivamente, en una revista matemática polaca.* Fréchet estaba irritado por el hecho de que Banach se hubiese adelantado unos meses a Wiener.

Desde este momento, continúa Wiener en su autobiografía, *se habló, durante algún tiempo, de la teoría de los espacios de Banach-Wiener.*

Pero Wiener abandonó pronto esta teoría, pensando que era casi un puro formalismo y que no podría producir suficientes teoremas no triviales. En su autobiografía, escrita treinta y cuatro años después de obtener la definición de espacio de Banach, reconoció que se había equivocado, ya que los espacios de Banach seguían siendo un instrumento popular de análisis, comenzando a desarrollar su pleno valor como método científico, y que era justo que sólo llevasen el apellido del primero de sus progenitores.

Así quedó inmortalizado el apellido de la planchadora y nodriza de Cracovia, que vivía en la calle Grozka, número 70 ó 71, donde Stefan Banach había sido abandonado por sus padres, razón por la que tomó el apellido de su madre afectiva. Sólo recibió alguna esporádica visita de su padre, directivo de los ferrocarriles de Cracovia.

El famoso libro de Banach, *Teoría de las operaciones lineales* (1932), contribuyó, más que ninguna otra publicación, a conseguir que el análisis funcional se fijara como una disciplina matemática independiente.

4.2 Espacios vectoriales topológicos y teoría de dualidad.

La aparición de problemas relativos a espacios de funciones con topologías que no se pueden describir con una sola norma, y que son muy familiares cuando se trabaja con funciones de clase infinito definidas en un abierto euclídeo n-dimensional, o con funciones holomorfas definidas en un abierto del plano complejo, originó la teoría de los espacios vectoriales topológicos, cuya definición axiomática se formuló en 1935 y, al igual que otras antes consideradas, también la elaboró von Neumann. Este desarrollo del análisis funcional nos ha proporcionado un contexto más amplio para plantear problemas, así como nuevos elementos para su resolución.

Uno de estos problemas era la rigorización de ciertos aspectos relacionados con las funciones no diferenciables que, en 1747, J.L. D'Alambert había propuesto como soluciones de la ecuación diferencial en derivadas parciales que modeliza a la cuerda vibrante.

Fue entonces la primera vez que se utilizaron funciones no diferenciables como soluciones de una ecuación en derivadas parciales, aceptadas sin ningún escrúpulo durante un siglo, hasta quedar prohibidas entre 1840 y 1900 con la llegada del rigor en matemáticas. Volvieron a abrirse camino, y de forma rigurosa, en el período que va de 1900 a 1950, después de diversas extensiones del concepto de función y de derivada, que culminaron con el desarrollo por Schwartz de su teoría de distribuciones, inscrita dentro del marco de la dualidad, que es el estudio de las formas lineales continuas definidas en un espacio vectorial topológico localmente convexo.

La teoría de la dualidad se había iniciado con J. Hadamard en 1903 cuando, hablando con el lenguaje actual, representó las formas lineales continuas definidas en el espacio de Banach de las funciones reales continuas en un intervalo [a, b] como límites de ciertas integrales. F. Riesz mejoró el resultado de Hadamard representando esas formas lineales con la integral de Lebesgue-Stieltjes, resultado extendido por Radon en 1913 a espacios más generales, utilizando ciertas medidas, hoy llamadas *medidas de Radon.*

Otro de los éxitos iniciales de la teoría de la dualidad se debió al matemático italiano Luigi Fantappie (1901-1956), que con la introducción de los funcionales analíticos consiguió representar por integrales los elementos del dual del espacio de funciones holomorfas definidas en un abierto del plano complejo, provisto de la topología de la convergencia uniforme en los compactos, y consiguió hacer riguroso el cálculo simbólico de Heaviside, no justificado hasta entonces y del que se hacía un uso muy familiar en física e ingeniería.

Así fue como la socorrida frase: "*Esto no es riguroso, pero funciona*" perdió adeptos y sentido, dadas las nuevas posibilidades que aportó el análisis funcional, creación de nuestro siglo, presente en el desarrollo de gran parte de la matemática actual y de sus aplicaciones, con reconocidas aportaciones de nuestros matemáticos.

4.3 Extensiones del concepto de función.

Una extensión notable del concepto de función se debe a Radon, quien identificó ciertas funciones con medidas definidas por densidades, con lo que las funciones quedan inmersas dentro de un espacio más amplio de medidas del que heredan su topología, y al que, en justa compensación, se pueden extender las operaciones usuales con funciones.

Un paso más en esta dirección es la obra del matemático ruso Sobolev, que no se desarrolló hasta su redescubrimiento por Schwartz con su teoría de distribuciones, debido a que nació prematura, pues al principio de los años treinta aún no había un conocimiento profundo de la teoría de la dualidad. Entonces estaba muy reciente todavía la posibilidad de extender los funcionales lineales continuos, dada por el teorema de Hahn-Banach, descubierto de forma independiente por Hahn en 1927 y por Banach en 1929.

Ya en la década de los cuarenta Schwartz desarrolló su teoría de las distribuciones. Partió de espacios de funciones muy regulares, a los que dio una topología muy fina. Así obtuvo duales muy grandes, cuyos elementos son las distribuciones e identificó de forma natural ciertas funciones con distribuciones definidas por densidades. Utilizó propiedades topológicas o la trasposición para extender propiedades de las funciones a las distribuciones, y así se demostró que eran distribuciones las soluciones no derivables en sentido ordinario de ciertas ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, que si eran derivables como distribuciones.

Para poder precisar correctamente en términos matemáticos un problema cualquiera relativo a una ecuación diferencial, escribió el Padre Dou en su discurso de ingreso en esta Academia [109], *es imprescindible fijar previamente cuál es el conjunto o universo lógico en el que deba entenderse el signo igual que figura en dicha ecuación, así como el signo igual que figura en las condiciones auxiliares, sean iniciales o de contorno, impuestas a la solución.*

Dicho más explícitamente, continuamos con la referencia, *hace falta fijar los conjuntos a los que exclusivamente queremos limitar la consideración de los datos y de las soluciones. Estos conjuntos deben estar dotados de una topología para que pueda definirse en ellos una noción de convergencia. Unicamente así se podrá llegar a problemas bien planteados matemáticamente y cargados de sentido físico.*

Capítulo 5

Distintos tipos de Análisis Funcional

5.1 Paradojas de la teoría de conjuntos.

Tras la elaboración de la teoría de conjuntos por Cantor, aparecieron dos trabajos de Frege en 1893 y 1903, bajo el modelo idealista de Cantor, que pretendían construir la matemática a partir de ciertos principios de la lógica.

Bertrand Russell invalidó esta construcción con su célebre contradicción obtenida con todos los conjuntos **X** que no se contienen asímismos considerados como elementos. El conjunto **X** = {1, 2} es uno de estos conjuntos. Russell consideró que todos esos conjuntos son los elementos de un nuevo conjunto **B**. Al considerar a **B** como un elemento observó que:

El elemento **B** *pertenece al conjunto* **B** *si, y sólo si es uno de sus elementos, lo que significa que* **B** *sería uno de los conjuntos que no contendría al elemento* **B**.

Así obtuvo su famosa contradicción de que **B**, *considerado como elemento, pertenece al conjunto* **B** *si, y sólo si* **B**, *considerado otra vez como elemento, no pertenece al conjunto* **B**.

Sobre 1908 aparecieron, independientemente, las axiomáticas de la teoría de conjuntos de Zermelo y la de Russell y Whitehead, que restringiendo el concepto de conjunto eliminaron las paradojas.

Bertrand Russell dice en su autobiografía que este periodo fue su *luna de miel intelectual* y que *abandonó la matemática porque no se sintió con ánimos para realizar un trabajo tan duro.*

5.2 El axioma de elección y la paradoja de Banach-Tarski.

De estas dos axiomáticas conjuntistas se maneja mejor la de Zermelo, llamada axiomática de Zermelo-Fraenckel, por haber sido completada con el axioma de reemplazamiento de Fraenckel. Uno de sus axiomas, *el de elección de Zermelo* [516], parece intuitivo e ingenuo. Dice que, dada una colección de conjuntos no vacíos, existe un conjunto que tiene un elemento de cada conjunto de la colección.

El axioma de Zermelo sólo habla de existencia y no de cómo hacer la elección, lo que requeriría un tiempo infinito si la familia de conjuntos no fuese numerable, tarea que excedería a la condición humana, tan limitada en el tiempo.

En 1940 [175], Gödel probó que el uso del axioma de Zermelo no lleva a ninguna contradicción, si bien, como vamos a ver, tiene consecuencias irrealizables desde nuestra realidad temporal.

La más famosa de estas consecuencias fue publicada por Stefan Banach y Alfred Tarski en 1923 en *Fundamenta Mathematica* [31], y afirma que una esfera de radio uno se puede descomponer en un número finito de partes que, sometidas a ciertos movimientos, se pueden reagrupar en otras dos esferas de radio también uno.

Este paradójico resultado fue complementado en 1945 por Sierpinski al probar que bastaba descomponer la esfera en ocho partes para poder aplicar la duplicación de Banach y Tarski.

Robinson, en 1947, demostró que cinco era el mínimo número de partes en que se debía descomponer la esfera para duplicarla, siendo claro que alguna de esas partes no debe ser medible Lebesgue, pues, la invariancia de la medida de Lebesgue por los movimientos impide duplicar una esfera con descomposiciones medibles Lebesgue.

Por tanto, la responsabilidad de la duplicación de la esfera la comparten el genio de Banach y Tarski y el axioma de elección, ya que, en 1971, Solovay [393] demostró que, sin el axioma de elección, no se pueden determinar en el espacio euclídeo subconjuntos que no sean medibles Lebesgue.

El estudio de los conjuntos medibles se debió, inicialmente, a la necesidad de determinar volúmenes de figuras cada vez más complejas. Las contribuciones de Jordan, Borel, Caratheodory, Lebesgue, Radon y Haar llevaron a la teoría de la medida.

Exigencias de la teoría de la probabilidad motivaron el desarrollo por Schwartz en 1964 de la teoría de la medida de Radon en espacios topológicos arbitrarios, cuyos resultados fueron extendidos en 1975 por B. Rodríguez-Salinas y P. Jiménez Guerra [196]. F. Bombal desarrolló en 1981 una teoría de medida e integración en espacios bornológicos [53].

5.3 Análisis funcional clásico, constructivo y solovayano.

El análisis funcional edificado sobre la axiomática de Zermelo-Fraenckel se llama Análisis Funcional **Clásico**.

Si se desea evitar las consecuencias del uso del axioma de libre elección, se le puede sustituir por el *axioma de elección numerable*, que dice que, dada una familia numerable de conjuntos, existe otro conjunto con un elemento de cada conjunto de la familia, y así se obtiene Análisis Funcional **Constructivo**.

Otra posibilidad es sustituir el axioma de elección por el axioma de Solovay, que afirma que *cada función real definida en el* *espacio euclídeo n-dimensional es medible Lebesgue*. Esta sustitución fue legalizada por el propio Solovay, quien estableció su consistencia en 1971 [393].

El Análisis Funcional **Solovayano** y el **Constructivo** nos privan del axioma de elección y también de otros muchos elementos familiares en Análisis, lo que justifica su escasa repercusión. Lo que parece de interés ha sido la obtención de pruebas constructivas de algunos resultados conocidos, eliminando el uso del axioma de elección.

5.4 Análisis funcional finitista.

Hilbert intentó poner el espíritu aritmético de Kronecker al servicio de los conceptos de Cantor, para lo que se propuso una reforma simultánea de los fundamentos de la aritmética y de la lógica, para garantizar desde la aritmética el trabajo con la matemática del infinito.

Dentro de este propósito se enmarcan los dos primeros problemas que propuso en la conferencia de París de 1900.

El primero hace referencia a la lógica y el segundo a la consistencia del sistema axiomático de los números enteros, problema del que, según Minkowski, *los matemáticos jamás habían dudado*.

Pero Gödel, en 1931 [175], puso límite a los proyectos de Hilbert al probar que ni siquiera el conjunto de proposiciones sobre los números enteros es reductible por inferencia lógica a un número finito de axiomas, ya que *toda teoría axiomática consistente que contenga a la aritmética elemental contiene enunciados indecidibles*, que, por tanto, establecen limitaciones al proyecto de Hilbert antes incluso de llegar a los elementos transfinitos.

Parte del proyecto de Hilbert ha sido retomado por los americanos H. Friedman y S.G. Simpson, que se propusieron averiguar qué axiomas conjuntistas son necesarios para demostrar los teoremas de la que ellos llaman matemática ordinaria, que comprende:

La teoría de números, la geometría, el cálculo diferencial, el análisis real y complejo, la combinatoria, el álgebra numerable, los espacios de Banach separables y los espacios métricos completos y separables.

Por otra parte, la matemática no ordinaria estaría formada por el análisis funcional abstracto, la teoría abstracta de conjuntos, el álgebra universal y la topología.

Entre 1977 y 1979 dedujeron importantes teoremas clásicos con un reducido número de axiomas, sobre los que se puede elaborar una parte del análisis funcional, que califican de finitista en recuerdo a Hilbert.

5.5 Indecidibles de Gödel e hipótesis del continuo.

Esos primeros enunciados indecidibles de Gödel parece que no tienen interpretación matemática sencilla.

Unos años después, se encontró que la hipótesis del continuo, que afirma que cada subconjunto infinito de números reales, o se puede poner en biyección con el conjunto **N** de los números naturales, o con el conjunto **R** de los números reales, es un indecidible en sentido de Gödel con clara interpretación matemática.

Su demostración se debe la mitad a Gödel al probar en 1939 que, *si la axiomática de la teoría de conjuntos es consistente, y se le añade como axioma la hipótesis del continuo, el nuevo sistema axiomático obtenido es también consistente*.

La otra mitad es fruto de Paul Cohen, quien, con las ideas de Gödel, obtuvo en 1963 que *si la axiomática de la teoría de conjuntos* *es consistente, y se le añade como axioma la negación de la hipótesis del continuo, se obtiene otro sistema axiomático también consistente*

5.6 Cardinales acotante y dominante.

Se denota por χ_0 el cardinal del conjunto **N** de los números naturales y por χ_1 el primer cardinal no numerable. El admitir como axioma la hipótesis del continuo es suponer que $\chi_1 = \mathbf{c}$, siendo **c** el cardinal del conjunto del conjunto **R** de los números reales, que como ya se ha dicho en **2.2**, se le llama el continuo.

Ha sido frecuente la obtención de resultados admitiendo la hipótesis del continuo, de los que, en algunos casos, se han conseguido posteriormente pruebas independientes de dicha hipótesis.

Así, Grothendieck [179] probó que un espacio localmente convexo metrizable separable **E** es casi-distinguido[1], y preguntó si se podría quitar la condición de la separabilidad.

Dieudonné dio una respuesta negativa asumiendo la hipótesis del continuo y, más tarde, con independencia de esa hipótesis, Amemiya [4] también contestó en negativo.

Si trabajamos sólo con la axiomática de Zermelo-Fraenkel, sin exigir la hipótesis del continuo, podremos obtener resultados haciendo referencia a cardinales intermedios entre χ_1 y **c**.

Muchos de esos cardinales se generan con el conjunto $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ de las sucesiones de números naturales y el casi-orden tal que $f \leq g$ si $f(n) \leq g(n)$, salvo para un número finito de valores de n.

[1] Un espacio localmente convexo **E** se dice que es casi-distinguido si cada acotado de la completación de **E** está contenido en la completación de un acotado de **E**.

Entonces el *cardinal acotante*[2], $\check{b}$, es el primer cardinal de la familia de cardinales de los subconjuntos no acotados de $(\mathbf{N}^{\mathbf{N}}, \leq)$ y el *cardinal dominante*[3], $\check{d}$, es el primer cardinal de los de la familia de los cardinales de los subconjuntos cofinales de $(\mathbf{N}^{\mathbf{N}}, \leq)$. Se tiene que $\chi_1 \leq \check{b} \leq \check{d} \leq \mathbf{c}$.

Si los acotados de un espacio localmente convexo **E** son los subconjuntos de los elementos de una familia ***B*** de subconjuntos de **E**, se dice que ***B*** es un sistema fundamental de acotados de **E**.

Se debe a Saxon y a Sánchez Ruiz [374] que el mínimo de los cardinales de los sistemas fundamentales de acotados de un espacio localmente convexo metrizable **E** es χ_0 si el espacio **E** es normado y no trivial, y es el cardinal dominante $\check{d}$ si el espacio **E** no es normado.

---

[2] F. Rothberger.: *Sur un ensemble toujours de premiêre categorie qui est depourvu de la propriétè* λ, Fund. Math. 32 (1939) 294-300.
[3] M. Katetov.: *Remarks on characters and pseudocharacters*, Comm. Mat. Univ. Car. 1 (1960) 20-25.

Capítulo 6

El teorema de Banach-Steinhaus

6.1 El teorema de Banach-Steinhaus.

Junto al teorema de Hahn-Banach, los de Banach-Steinhaus, el teorema de la gráfica cerrada y el teorema de la aplicación abierta son los pilares del análisis funcional, y nos muestran el excelente quehacer matemático de Banach, siendo los dos últimos teoremas equivalentes en los espacios de Banach. Vamos a considerar ahora el célebre teorema debido a Banach y Steinhaus, cuyo primer encuentro lo relató así Steinhaus en su discurso para el quince aniversario de la muerte de Stefan Banach:

"Banach, dijo Steinhaus, *hizo sus estudios de ingeniería en Leópol (Lwów) entre 1910 y 1914. Al estallar la primera guerra mundial volvió a su ciudad natal Cracovia y en medio de una situación muy penosa empezó, sólo, a estudiar con profundidad matemáticas hacia 1916.*

En verano de 1916 y mientras paseaba, siguió narrando Steinhaus, *por un parque de Cracovia oí una conversación de dos jóvenes que hablaban de la integral de Lebesgue. Lo inesperado del hecho me llevó a conocerles. Eran Stefan Banach y Otto Nikodym, que dijeron tener un tercer amigo de nombre Wilkosz."*

Lo inesperado del hecho llevó a Steinhaus, que ya era un consagrado matemático polaco, a conocerles. Los tres estaban unidos por un intenso amor a las matemáticas y por la situación desesperada de Cracovia, entonces una fortaleza. Vivían en total incertidumbre, sin tener posibilidad de encontrar trabajo ni de establecer ningún contacto científico. Esa atmósfera de Cracovia no impedía a los tres jóvenes reunirse en algún café para resolver problemas. El ruido parecía no perjudicar nada a Banach en sus investigaciones. Si había música, prefería mesas próximas a la orquesta.

Steinhaus, en su primer encuentro con Banach, le comentó que buscaba una función f de $\mathbf{L}^1$ cuya serie de Fourier fuese convergente a f casi por todas partes sin ser convergente con la norma de $\mathbf{L}^1$. Las condiciones de la guerra propiciaban que ambos desconociesen que Hahn había encontrado dos años antes una función f de $\mathbf{L}^1$ cuya serie de Fourier no converge a f en $\mathbf{L}^1$, poniendo en evidencia el distinto comportamiento de las series de Fourier en $\mathbf{L}^1$ y $\mathbf{L}^2$.

Fue grande la sorpresa de Steinhaus cuando, algunos días después del encuentro en el parque, Banach le dio la solución casi completa de su problema, con una pequeña reserva, provocada por el desconocimiento de Banach de un ejemplo de Du Bois-Reymond.

Así nació el primer artículo conjunto de Banach y Steinhaus. Nueve años después, en 1927, publicaron en *Fundamenta Mathematica* su celebre artículo *Sur le principe de la condensation de singularités*, donde, completando su primer artículo, probaron la existencia de una función integrable tal que el límite superior de las integrales entre a y b de las sumas parciales $s_n(x)$ de su serie de Fourier es $+\infty$, para cada par de números reales a y b, con $a<b$.

A Hankel se debe el nombre *principio de condensación de singularidades*, que permite la construcción de un ente con infinitas singularidades a partir de infinitos entes con una singularidad cada uno.

Banach y Steinhaus redujeron este principio a dos teoremas de cálculo funcional con sucesiones dobles, que, con la nomenclatura actual, nos dicen ambos que en un espacio de Banach la acotación puntual de una familia de formas lineales implica su acotación en norma (es decir, la acotación uniforme en la bola unidad).

6.2 Los espacios tonelados.

La fuerza del teorema de Banach-Steinhaus motivó el estudio de espacios más generales donde su tesis tuviese validez. El grupo Bourbaki obtuvo que en un espacio localmente convexo **E** se verifica el teorema de Banach-Steinhaus si, y sólo si, los subconjuntos absolutamente convexos, cerrados y absorbentes, que los bautizaron como toneles, son entornos del origen. A los espacios localmente convexos que verifican el teorema de Banach-Steinhaus corresponden los apartados 46A07 y 46A08 de los Mathematics Abstracts en Mathematical Reviews y en Zentralblatt für Mathematik, con el nombre de espacios tonelados.

"*La matemática*, decía Poincaré, *es el arte de razonar bien sobre figuras mal hechas*", y podríamos añadir que con denominaciones un tanto singulares. También los no matemáticos utilizan expresiones un tanto peculiares, como bien se puede comprobar en el discurso del profesor Etayo *De cómo hablan los matemáticos y algunos otros*, lección inaugural del curso 1990/91 de esta Real Academia.

6.3 El teorema de acotación uniforme de Dieudonné, Grothendieck y Nikodym.

Uno de los primeros ejemplos notables de espacio tonelado se debió a Dieudonné, quien probó que el espacio de las sucesiones que sólo toman un número finito de valores provisto con la norma supremo es un espacio tonelado, lo que por el teorema de Banach-Steinhaus equivale a que un conjunto de medidas escalares, finitamente aditivas y acotadas definidas en la σ-álgebra de las partes del conjunto **N** de números naturales y puntualmente acotadas en cada subconjunto de **N** están uniformemente acotadas.

El teorema de Dieudonné fue extendido por Nikodym y Grothendieck a medidas escalares, finitamente aditivas y acotadas, definidas en una σ-algebra $\mathcal{A}$. Es habitual que tesis de teoremas importantes se conviertan en definiciones. Eso fue lo que sucedió en este caso, y hoy se dice que un anillo $\mathcal{R}$ de subconjuntos de un conjunto dado tiene la propiedad de Nikodym si una familia de medidas escalares, acotadas, finitamente aditivas, definidas en $\mathcal{R}$ y puntualmente acotadas en cada elemento de $\mathcal{R}$, están acotadas en norma. Lo que dice el teorema de acotación uniforme de Dieudonné, Nikodym y Grothendieck es que las σ-álgebras tienen la propiedad de Nikodym, lo que se debe a que el espacio **E** de las funciones simples con la norma supremo es tonelado.

6.4 Propiedades de fuerte tonelación.

Si el espacio **E** de funciones simples que hemos considerado, tuviese propiedades más fuertes de tonelación, podría esperarse que algo menos que la acotación puntual en una familia de formas lineales continuas implicase la equicontinuidad. Esta suposición contenía el siguiente plan de trabajo:

Introducir propiedades más fuertes de tonelación que nos diesen equicontinuidad desde condiciones más débiles que la acotación puntual. Además, para su aplicabilidad en teoría de la medida, habría que comprobar que el espacio de las funciones simples definidas en una σ-álgebra tiene esas propiedades fuertes de tonelación.

La introducción de propiedades fuertes de tonelación se debe a Valdivia en 1979 [456] y a W.J. Robertson, I. Tweddle y F.E. Yeomans en 1980 [290]. Valdivia probó en 1979 que el espacio **E** de las funciones escalares simples definidas en una σ-álgebra es supratonelado respecto a la norma supremo [456], lo que significa que si **E** se recubre por una sucesión no decreciente $\{\mathbf{E}_n, n=1,2,3,...\}$ de subespacios de **E**, existe un $\mathbf{E}_p$ que es tonelado y denso en **E**, lo que comportaba una mejora profunda del teorema de acotación de Dieudonné, Nikodym y Grothendieck, así como nuevas propiedades de las medidas finitamente aditivas.

En 1980, el profesor Rodríguez-Salinas [317] agrupó en clases a los espacios tonelados, de manera que la clase 0 es la de los tonelados, si α es un número ordinal transfinito de primera clase se tiene que un espacio tonelado **E** es de clase α si, para cada recubrimiento no decreciente {$\mathbf{E}_n$, n=1,2,3,...} de subespacios de **E**, existe un $\mathbf{E}_p$ que es tonelado de clase α-1 y denso en **E**, y, si α es un número ordinal transfinito de segunda clase, se dice que **E** es tonelado de clase α si **E** es tonelado de cada clase $\alpha' < \alpha$. Estableció que el espacio de funciones simples definidas en una σ-álgebra con la norma supremo es tonelado de clase 2.

Ese mismo año, Arias de Reyna probaba que este espacio no es totalmente tonelado, concepto introducido por Valdivia y Pérez Carreras [474] en 1980, y que es una propiedad de tonelación más fuerte que la de ser tonelado de cualquier clase α.

Uno de los motivos de atracción de estos resultados, señalado antes implícitamente, está en que las medidas acotadas finitamente aditivas son los elementos del dual del espacio de las funciones simples definidas en una σ-álgebra con la norma supremo, del que quedaba por averiguar si era o no tonelado de clase α, para cada ordinal α. Con J.C. Ferrando obtuvimos su solución afirmativa para cualquier ordinal finito en 1990 [136], lo que nos permitió dar un teorema de acotación tipo Dieudonné, Nikodym, Grothendieck, otros de localización del rango de medidas vectoriales, y varios del tipo de los de Diestel y Faires [140] relativos a condiciones débiles en medidas finitas que implican aditividad numerable.

Lo natural hubiese sido continuar la investigación con los ordinales no finitos, pero el profesor Valdivia nos indicó en 1990 que para la localización del rango de medidas vectoriales sería interesante saber si, al recubrir por una malla de subespacios el espacio de las funciones simples definidas en una σ-álgebra y provisto con la norma supremo, existiría una sucesión decreciente de subespacios, extraídos de los escalones sucesivos de la malla, que fuesen todos tonelados y densos.

Junto con Ferrando trabajé en clases de tonelación para obtener herramientas que nos permitiesen abordar el nuevo problema. Obtuvimos propiedades hereditarias en los espacios tonelados de clase n y ω_0, consiguiendo su separación [137, 138, 139 y 141], y estudiamos condiciones de tonelación en espacios de Lebesgue-Bochner en la línea de Díaz Alcaide, Drenowski, Florencio y Paúl [142]. También conseguimos dar condiciones en un álgebra para que su espacio de funciones simples con la norma supremo no fuese tonelado [153].

No obtuvimos juntos ningún progreso en la solución del problema que nos había planteado el profesor Valdivia, ya que erróneamente pensabamos entonces que su solución era negativa.

6.5 Espacios baireled o supertonelados.

Por otra parte, Ferrando y Sánchez Ruiz en su trabajo *A maximal class of spaces with strong barrelledness conditions*, publicado en 1992 en los *Proceedings of the Royal Irish Academy* [148], hicieron un estudio de las propiedades de los espacios localmente convexos que verifican la condición de tonelación en mallas propuesta por el profesor Valdivia para espacios de funciones simples. En recuerdo a la propiedad de Baire los denominaron *baireled*, y plantearon la pregunta de Valdivia como problema abierto, cuya solución afirmativa obtuve en 1995 [229], gracias a la introducción de unas mallas especiales de subespacios, con las que pude obtener las propiedades que necesitaba para resolver el problema.

Muy poco después de conocer nuestro resultado, el profesor Rodríguez-Salinas probó que un espacio localmente convexo tendría esa propiedad de tonelación en mallas, a la que denominó *supertonelación*, si y sólo si, era tonelado de clase ω_1.

En su artículo *On superbarrelled spaces. Closed graph theorems* [343] estableció, además, la equivalencia de la tonelación de clase ω_1 con ser tonelado de clase α para cualquier ordinal α. De todos los resultados antedichos se deduce que el espacio base de la teoría de la medida es tonelado de cualquier clase α.

6.6 Otros resultados.

Muchos de los resultados anteriores los hemos extendido con J.C. Ferrando al espacio de las funciones simples definidas en una σ-álgebra A con valores en un espacio vectorial topológico **E** [138]. Los resultados de J. Mendoza en $B(A,E)$, [238], han motivado la obtención reciente por J.C. Ferrando de otras propiedades de tonelación, bornología y de Baire.

También con J. C. Ferrando hemos probado que el espacio de funciones simples definidas en los subconjuntos de densidad cero del conjunto de los números naturales es tonelado de clase n, para cada natural n, no sabiendo si es supertonelado [144].

Otro problema abierto es la separación de las clases de tonelación para ordinales transfinitos.

6.7 Tonelación y el cardinal acotante.

Convencido de que los límites de mi mundo tienen que ver con los límites de mi lenguaje, soy partidario de no restringir la creación matemática, ni siquiera bajo el pretexto falaz de que se tiene la suficiente investigación matemática para las aplicaciones que se desarrollarán en los próximos años, pues de detenerse la investigación matemática, ¿qué aplicaciones se podrían desarrollar después de esos próximos años?

Vamos a ver ahora cómo el no usar la restricción que supone la admisión de la hipótesis del continuo ha producido recientemente resultados en tonelación con el apoyo de los antedichos cardinales acotante y dominante, fruto del trabajo de Saxon y Sánchez Ruiz, que ha provocado un fructífero matrimonio entre el cardinal acotante de F. Rothberger, el cardinal dominante de M. Katetov (ver **5.6** en página 35) y los espacios tonelados, creando una línea de investigación seguida actualmente, entre otros, por Burke y Tordorcevic [80].

En Bourbaki, utilizando el teorema de Baire, se deduce que la dimensión algebraica de un espacio tonelado metrizable es o finita o no numerable. Saxon y Sánchez Ruiz [374] precisan más, obteniendo que la referida dimensión algebraica es finita, o mayor o igual que el cardinal acotante, construyendo, asímismo, un espacio metrizable tonelado de dimensión el cardinal acotante, por lo que su resultado es óptimo y análogo al de Mazur, que afirma que la dimensión de un espacio de Fréchet de dimensión infinita es mayor o igual que el continuo.

Si un espacio localmente convexo **E** es tonelado y metrizable, y **F** es un subespacio de codimensión menor que el cardinal acotante, entonces la codimensión de la clausura de **F** es finita, y a partir de ahí se deduce que el subespacio **F** es también tonelado. Si la codimensión del subespacio **F** es mayor puede suceder que **F** no sea tonelado, por lo que el resultado de Saxon y Sánchez Ruiz no se puede extender a cardinales mayores, dando nuevamente una caracterización del cardinal acotante similar al cardinal continuo en una dicotomía *metrizable tonelado* versus *Fréchet*, ya que, en los espacios de Fréchet, el continuo es el mayor cardinal κ que permite afirmar que la tonelación se hereda por subespacios de codimensión menor κ.

En el caso general de espacios tonelados sólo sabemos que la tonelación se hereda en los subespacios de codimensión numerable, resultado clásico obtenido de forma independiente por Saxon y Levin [371] y por Valdivia [410].

6.8 El problema BCE.

El uso más relevante hecho hasta ahora de los cardinales acotante y dominante está en relación con las soluciones parciales propuestas para el problema de la extensión numerable tonelada, que se etiqueta como problema BCE de las iniciales de su expresión inglesa (*Barrelled countable enlargement*), denominación introducida por Robertson, Tweddle y Yeomans [290].

El problema, que sigue abierto en su contexto general, consiste en averiguar cuándo un espacio tonelado **E** con dual **E'** admite una topología más fina tonelada que genere un dual que contenga a **E'** como un subespacio de codimensión numerable. Entonces se dice que **E** tiene la propiedad BCE. Robertson, Tweddle y Yeomans [290] han encontrado que **E** tiene la propiedad BCE si contiene un subespacio denso tonelado y de codimensión c o mayor. Saxon y Sánchez Ruiz [375 y 376] han resuelto en positivo el problema BCE para:

1. Los espacios normados tonelados.
2. Los espacios metrizables tonelados de dimensión mayor o igual al cardinal dominante, resultado que contiene al caso continuo dimensional antedicho de Robertson, Tweddle y Yeomans.
3. Los espacios metrizables tonelados con la hipótesis cardinal acotante igual a cardinal dominante, que es una condición más débil que el axioma de Martin, que implica la coincidencia entre los cardinales acotante y continuo.

Recientemente, Saxon ha resuelto positivamente el problema BCE en los espacios metrizables tonelados.

El que los espacios normados sean casi-distinguidos, dado que los acotados de su completación se alcanzan por clausuras desde los acotados del espacio normado, llevó Tsirulnikov [396] a preguntarse si los espacios metrizables originados por las extensiones numerables toneladas de espacios normados serían casi-distinguidos.

Catalán y Tweddle [82] contestaron negativamente a esta pregunta asumiendo la hipótesis del continuo. Saxon y Sánchez Ruiz [377], con la axiomática de Zermelo Fraenckel y el uso adecuado de los cardinales acotante y dominante, han dado la respuesta general negativa al problema de Tsirulnikov, con independencia de la hipótesis del continuo.

Recientemente, el académico correspondiente, profesor J. Horváth, autor del clásico y excelente tratado *Topological vector spaces and distributions* [183], se ha interesado en saber cuándo la completación de un espacio vectorial topológico de Montel[1] hereda dicha propiedad, problema del que no se conoce si existe contraejemplo. Su solución puede depender de las ideas anteriores.

6.9 Espacios distinguidos.

Un espacio **E** con dual fuerte tonelado se llama distinguido, lo que equivale a que respecto al par **(E', E'')** los acotados del bidual se alcancen por clausuras de acotados del espacio **E**.

Al trabajo de K.D. Biersted, J. Bonet y R. Meise [36, 37, 38 y 41] se deben caracterizaciones de amplias clases de espacios de Fréchet distinguidos.

Desde Grothendieck [180] viene el interés por los productos tensoriales proyectivos de espacios de Fréchet distinguidos y S. Dierolf [102] ha obtenido un espacio reflexivo de Fréchet cuyo producto tensorial proyectivo por l^1 no es distinguido.

A K.D. Biersted, J. Bonet [36], J.C. Díaz y M.A. Miñarro [Doga Tr.J.Math.14(1990) 191-208] se debe el estudio de la estabilidad de los espacios distinguidos en los productos tensoriales proyectivos.

El caso de los productos tensoriales inyectivos de espacios de Fréchet distinguidos ha sido investigado por J.C. Díaz, J.A. López Molina y M.J. Rivera [99], debiéndose a los dos últimos autores el estudio de la estabilidad de la condición de distinguido en otros productos tensoriales [227].

---

[1] Un espacio vectorial topológico se dice que es de Montel si sus cerrados y acotados son compactos. Muchos de los espacios de la teoría de distribuciones son espacios de Montel. Y. Kömura en *Some examples on linear topological spaces*, Math. Ann. 153 (1964) 150-162, dio el primer ejemplo de un espacio de Montel que no es completo, que no parece ser el candidato idóneo a contraejemplo del problema de Horváth dado que el ejemplo de Kömura es un subespacio de un producto de rectas.

Capítulo 7

Teoremas de gráfica cerrada

7.1 El teorema de gráfica cerrada de Banach.

Se dice que una aplicación **T** definida entre dos espacios **E** y **F** tiene gráfica cerrada si su gráfica es un subconjunto cerrado de $\mathbf{E}\times\mathbf{F}$. Si **T** es continua, es cerrada su gráfica.

Banach demostró que si **E** y **F** son espacios de Banach y **T** es una aplicación lineal con gráfica cerrada, se tiene que **T** es continua. Este tipo de teorema, apellidado de gráfica cerrada, es obviamente válido si se reemplaza el espacio de partida por un límite inductivo de espacios de Banach, al que se le llama espacio ultrabornológico, o, en particular, por un espacio de Fréchet.

Lo que no es tan sencillo es obtener teoremas de gráfica cerrada sustituyendo el espacio de Banach de llegada **F** por espacios de clases más amplias que contengan a los utilizados en la teoría de distribuciones de Schwartz, lo que tenía gran interés dado que es más fácil probar la condición de gráfica cerrada que la de continuidad.

Por tanto, lograr teoremas de gráfica cerrada que en la clase de llegada contuviesen a los espacios de la teoría de distribuciones simplificaría pruebas de continuidad en la teoría de distribuciones.

Esta cuestión de gráfica cerrada y ciertos problemas de la teoría de distribuciones motivaron el trabajo de Dieudonné y Schwartz de 1949 en los *Anales del Instituto Fourier* [108] sobre límites inductivos estrictos de espacios de Fréchet, algunos de cuyos resultados extendió Köthe al caso no estricto.

No consiguieron obtener el deseado resultado de gráfica cerrada, ni tampoco otros diez problemas que plantearon al final del trabajo, y que fueron resueltos en muy poco tiempo por A. Grothendieck, quien, además, en su famosa tesis doctoral de 1954 [179] se fue acercando al buscado teorema de gráfica cerrada, al probar que una aplicación lineal con gráfica cerrada **T**, definida en un espacio de Banach (o en un ultrabornológico) y con valores en un límite inductivo de espacios de Fréchet, es continua.

7.2 La conjetura de Grothendieck.

La imaginación de Grothendieck le aproximó aún más al teorema de gráfica cerrada, permitiéndole conjeturar la existencia de una clase de espacios $\mathcal{G}$ que contuviese a los espacios de Banach y que fuese estable para:

- productos numerables.
- sumas directas numerables,
- cocientes separados,
- y subespacios lineales cerrados.

de manera que cada aplicación lineal **T** con gráfica cerrada, definida en un espacio de Banach (o ultrabornológico) **E** y con valores en un espacio **F** de la clase $\mathcal{G}$, fuese contínua. Entonces la clase $\mathcal{G}$ contendría a los espacios de la teoría de distribuciones, y resolvería el problema de la gráfica cerrada para distribuciones.

Lo trabajado en torno a la conjetura de Grothendieck hasta 1977 fue una parte del discurso de ingreso en esta Real Academia del profesor Valdivia [449], donde comentaba algunos problemas abiertos entonces, cuya solución encontró unos años después. Vamos a dedicarles unos minutos, y también comentaremos algunos resultados recientes y problemas abiertos relacionados con los teoremas de gráfica cerrada.

7.3 Las soluciones de Slowikowski, Raikov y De Wilde.

En 1961 Slowikowski [392] fue el primero en encontrar una clase G de espacios que resolvía la conjetura de Grothendieck. Otra solución la obtuvo Raíkov [283] en 1966. Durante veinte años estuvo abierto el problema de la separación entre las clases de espacios introducidas por estos dos matemáticos. En 1986 probó Valdivia que ambas clases eran idénticas [487].

Los espacios de Slowikowski y Raíkov se manejan con dificultad. Afortunadamente, en 1967, M. De Wilde [88 y 89] encontró la clase de espacios con malla completante (o de tipo C), fáciles de manejar y que también resolvían la conjetura de Grothendieck. La relación entre las soluciones de De Wilde, Slowikowski y Raíkov la obtuvo Valdivia en 1986 [487] al probar que un espacio de Slowikowski tiene una malla completante. Está abierto el problema general de encontrar un espacio con malla completante que no sea de Slowikowski, si bien se sabe por Valdivia que los espacios con malla estricta coinciden con los espacios estrictos de Slowikowski [487].

7.4 El teorema de gráfica boreliana de Schwartz.

En 1966, un poco antes que De Wilde, Schwartz [386] obtuvo un teorema de gráfica cerrada válido para trabajar con distribuciones. Los espacios de llegada que utilizaba eran los espacios localmente convexos de Suslin, que son imágenes continuas de métricos separables completos con excelentes propiedades de estabilidad y que contienen a los espacios usuales de la teoría de distribuciones.

El teorema de la gráfica cerrada de Schwartz no resolvía la conjetura de Grothendieck, pues la separabilidad de los espacios de Suslin excluía a los Banach no separables. Este resultado de Schwartz se conoce como el teorema de la gráfica boreliana de Schwartz, pues dice que, si **T** es una aplicación lineal de un espacio de Banach (o ultrabornológico) **E** en un espacio localmente convexo de Suslin **F**, y si la gráfica de **T** es un conjunto de Borel en $\mathbf{E}\times\mathbf{F}$, entonces **T** es continua. Para pasar a su enunciado en términos de gráfica cerrada basta recordar que los cerrados son conjuntos de Borel.

En 1982 Valdivia [478] probó que la teoría de gráfica cerrada de De Wilde no contiene a la de Schwartz, pues determinó un π producto tensorial de Suslin sin malla completante.

7.5 Los espacios quasi-LB.

El trabajo de gráfica cerrada de De Wilde, uno de cuyos muchos méritos es la sencillez, proponía como problema abierto si un espacio sucesionalmente completo con una malla completante tendría una malla estricta.

La respuesta afirmativa la obtuvo Valdivia diecinueve años después [489], fruto de un detenido análisis del teorema inicial de gráfica cerrada de Banach, por el que, además, introdujo los quasi-LB-espacios, que, con sorprendente sencillez, resuelven de forma directa la conjetura de Grothendieck, probando, además, que una aplicación lineal con gráfica cerrada definida en un espacio estrictamente tonelado y con valores en un espacio quasi-LB es continua.

Es inmediato probar que un espacio supertonelado (= *baireled*) es estrictamente tonelado.

No conozco si el recíproco es cierto, ni la posición de los estrictamente tonelados respecto a las clases de tonelación introducidas por el profesor Rodríguez-Salinas.

7.6 Clases maximales para el teorema de la gráfica cerrada: Los espacios Γ_r.

El problema de gráfica cerrada, que hemos considerado, puede plantearse en el siguiente contexto general: Dada una clase *U* de espacios localmente convexos, caracterizar la clase *C(U)* de todos los espacios localmente convexos, tales que una aplicación lineal con gráfica cerrada de un espacio **E** de la clase *U* en un espacio **F** de la clase *C(U)* sea continua.

Se tiene, pues, que *C(U)* es la clase maximal de llegada para el teorema de gráfica cerrada respecto a la clase *U* en la partida.

En 1962, Y. Kömura [209] probó que si *U* es la clase de los espacios tonelados, entonces *C(U)* está formado por los espacios localmente convexos **E(*T*)** tales que es más fina que ***T*** la topología tonelada asociada a cualquier topología localmente convexa menos fina que ***T*.**

Los espacios de esta clase *C(U)* fueron bautizados, simultáneamente, como infra-s espacios por N. Adasch y como Γ_r-espacios por Valdivia, quien en un artículo publicado en 1968 en la Revista de esta Real Academia [401], obtuvo una caracterización intrínseca de estos espacios basada en propiedades de dualidad, que también sirve cuando la clase *U* es estable para los límites inductivos, contiene a los espacios de dimensión finita y está formada por espacios localmente convexos cuyas topologías son de Mackey [407, 459 y 473].

En 1980, Rodríguez-Salinas, en un artículo [316] también publicado en la Revista de esta Real Academia, llamó Γ_r^0 a los espacios Γ_r y dio por inducción esta definición:

Si α es un número transfinito de primera especie, se dice que el espacio localmente convexo F *es un* Γ_r^α *-espacio si es una unión numerable y no decreciente de* $\Gamma_r^{\alpha-1}$ *subespacios. Si* α *es un número* *transfinito de segunda especie, un* Γ_r^α*-espacio es un espacio que es* $\Gamma_r^{\alpha'}$*, para algún* $\alpha' < \alpha$. El profesor Rodríguez-Salinas probó que si **E** es un espacio tonelado de clase α, **F** es un Γ_r^α espacio y **T** es una aplicación lineal de **E** en **F** con gráfica cerrada entonces **T** es continua, y existe en **F** un subespacio $\mathbf{F_0}$ que es Γ_r y que contiene a la imagen de **T**.

De forma análoga, dado un espacio localmente convexo fijo **E**, el profesor Rodríguez-Salinas dice que *el espacio localmente convexo* **F** *es* Γ_r(**E**) *si cada aplicación lineal T de E en F que tenga gráfica cerrada es continua.*

Define que una aplicación lineal **T** es *subcontinua* si transforma las series que son subseries convergentes en series incondicionalmente convergentes, conmutando entonces **T** y el sumatorio.

En el antes referido artículo mejora un resultado de Bennett y Kalton, probando que es subcontinua una aplicación lineal con gráfica cerrada **T** de un espacio localmente convexo **E** en un espacio localmente convexo y sucesionalmente completo **F** que sea $\Gamma_r(l_0^\infty)$ y que no contenga copias de l^∞.

También da otras caracterizaciones de subcontinuidad localizando la imagen de la aplicación en un escalón cuando el espacio de llegada es unión de una sucesión creciente de subespacios, y aplica sus teoremas de gráfica cerrada para obtener la aditividad fuerte o aditividad numerable de ciertas medidas.

Recientemente [143], hemos obtenido con J.C. Ferrando que el conjunto de funciones escalares, acotadas, medibles, con imagen numerable y definidas en una σ-álgebra es, con la norma supremo, un espacio ultrabornológico.

Este resultado nos ha permitido aplicar los teoremas de la gráfica cerrada de De Wilde y de Valdivia para dar otras condiciones de aditividad fuerte, exhaustividad y subcontinuidad en medidas vectoriales, inspirados en los resultados antes citados del profesor Rodríguez-Salinas.

7.7 Los espacios Λ_r.

Un espacio localmente convexo se dice que es localmente completo si la envoltura lineal de cada acotado, absolutamente convexo y cerrado, provisto con el correspondiente funcional de Minkowski es un espacio de Banach. Se dice que un espacio localmente convexo **E** es dual localmente completo si su dual con la topología débil (σ(E',E)) es un espacio localmente completo.

Valdivia obtuvo en 1974 los espacios Λ_r, [426], que forman la clase maximal de llegada para el teorema de gráfica cerrada, respecto a la clase de espacios dual localmente completos en la partida.

Utilizando los espacios Λ_r hemos probado en un artículo conjunto con Ferrando [140] teoremas de aditividad numerable de medidas vectoriales, inspirados en los de Diestel y Faires [106], pero sin tener que imponer la condición de no contener copias de 1^∞, que Diestel y Faires necesitaban para poder aplicar el teorema de Rosenthal relativo a los operadores definidos en $l^\infty(\Gamma)$.

También hemos obtenido teoremas similares para medidas vectoriales con valores en los Γ_r de Valdivia, sin poder evitar la condición de que no contuviesen copias de 1^∞, lo que nos hacer pensar que los Γ_r que no contengan copias de 1^∞ deben ser Λ_r.

Capítulo 8

Bases de Schauder y la propiedad de aproximación en espacios de Banach

8.1 Bases de Schauder.

Nuestras intuiciones sobre el espacio se trasladan muy bien a los espacios euclídeos, gracias a sus bases ortonormales que nos permiten hablar de coordenadas de un vector respecto a una base.

Lo mismo sucede en los espacios de Hilbert, donde las componentes de un vector respecto a una base ortonormal forman una familia de cuadrado sumable con muchas propiedades agradables. En particular, si $\{x_n, n \in N\}$ es una base ortonormal de un espacio de Hilbert separable, se tiene que los productos escalares a_n de un vector x por cada uno de los vectores de la base son los únicos números que permiten escribir el vector x por la suma de la serie absolutamente convergente $\sum_1^\infty a_n x_n$.

Trasladando lo esencial de esta igualdad al contexto más general de los espacios de Banach separables, se dice que una sucesión $\{x_n, n \in N\}$ en un espacio de Banach **E** es una base de Schauder si para cada vector x de **E** existe una única sucesión de escalares $\{a_n, n \in \mathbf{N}\}$ tales que $x = \sum_1^\infty a_n x_n$.

Banach se planteó si los espacios de Banach separables tendrían base, ya que todos los espacios de Banach usuales separables admiten base de Schauder. Inspirados en la construcción de una base ortonormal en un espacio de Hilbert, Banach y Mazur probaron que cada espacio de Banach de dimensión infnita tiene un subespacio infinito dimensional con base de Schauder, pero en el caso de espacios separables no consiguieron ajustar la sucesión básica de forma que su envoltura lineal fuese densa en el espacio.

Este fue uno de los problemas propuestos por Banach en el cuaderno de tapas rígidas que custodiaba el cajero del Café Escocés en Leópol (o Lwów en polaco), donde Banach se reunía frecuentemente para hacer matemáticas con Mazur, Ulam y otros discípulos.

Las sesiones eran muy largas, llegando una de ellas a durar diecisiete horas, pero nadie tomó notas y desgraciadamente no se pudo reproducir.

Parece que otros teoremas corrieron la misma suerte.

Fue mérito de su esposa, Lucie Banach, el comprar el famoso cuaderno de tapas rígidas dedicado a escribir problemas y dejar espacio para las respuestas eventuales. Este *"Libro del Café Escocés"* se encontraba a disposición de cada matemático que lo pidiese. Algunos problemas tenían premio, que variaba de una pequeña taza de café a un ganso.

Un hermoso ganso fue el premio entregado por Mazur a Per Enflo en 1972 al encontrar un subespacio completo en c_0 sin base de Schauder [120].

Se debe también a Johnson y Rosenthal [200] que los espacios de Banach separables de dimensión infinita tienen un cociente infinito dimensional con base.

Este resultado se podría mejorar quitando la condición de separabilidad, si se llegase a probar que *los espacios de Banach de dimensión infinita tienen algún cociente separable de dimensión infinita*, que es uno de los problemas abiertos de enunciado más sencillo que conozco, aunque, probablemente, aún tardaremos en saber su solución.

También estos autores han probado que un espacio de Banach de dimensión infinita con predual separable contiene un subespacio con predual y base [200].

8.2 Bases y reflexividad.

A diferencia de lo que sucede en los espacios de Hilbert, hay muchos duales de espacios de Banach capaces de dar formas lineales continuas no representables por elementos del espacio de Banach. Entonces se dice que el espacio de Banach no es reflexivo.

James [191] obtuvo que la reflexividad de un espacio de Banach equivalía a que las formas lineales continuas alcanzasen el supremo en la bola unidad, obteniendo otra caracterización geométrica en términos de distancias entre ciertas envolturas convexas formadas con términos de una sucesión de puntos de la bola unidad [188].

A V. Montesinos se debe la equivalencia entre la propiedad de la gota (*drop property*) y la reflexividad [254].

La reflexividad de los espacios de Hilbert podía hacer pensar que un espacio de Banach con base de Schauder suficientemente buena sería reflexivo. La respuesta a esta suposición es esta caracterización de James: Un espacio de Banach con base es reflexivo si, y sólo si, la base es acotadamente completa y contractiva [186].

El resultado de Banach y Mazur de existencia de subespacios con base, ha dado lugar a que Pelczynski probase que cada espacio no reflexivo contiene un subespacio no reflexivo con base [1].

---

[1] Pelczynski A.: *A note to the paper of I. Singer "Basic sequences and reflexivity of Banach spaces"* Studia Math. 21 (1962) 371-373

8.3 Bases incondicionales.

Con frecuencia hay bases de Schauder que sólo producen series $\sum_{1}^{\infty} a_n x_n$ incondicionalmente convergentes, y se las llama bases de Schauder incondicionales. Los espacios l^p, $1 \leq p < \infty$, y los espacios separables de sucesiones de Orlicz tienen base de Schauder incondicional.

Gaposhkin [171] probó que un espacio de funciones de Orlicz tiene base incondicional si, y sólo si, es reflexivo.

Es difícil probar este resultado de Paley [270] y Marcinkiewicz [232]: *El sistema de Haar es una base incondicional para los espacios* $L^p[0,1]$, $1<p<\infty$. En cambio $L^1[0,1]$ no admite base de Schauder incondicional.

Se debe a Olevskii [266] el que un espacio simétrico de funciones definidas en $[0,1]$ tiene base incondicional si, y sólo si, el sistema de Haar es una base incondicional.

8.4 Operadores compactos y la propiedad de aproximación.

Los operadores que transforman la bola unidad en un conjunto relativamente compacto se llaman operadores compactos. Uno de los primeros resultados de Análisis Funcional estableció que los operadores compactos en los espacios de Hilbert son, exactamente, los límites en norma de operadores de rango finito, resultando que una parte de la prueba vale exactamente si se sustituyen los espacios de Hilbert por Banach. La otra vale si el espacio de llegada es un espacio de Banach con base de Schauder, teorema que es consecuencia del de la gráfica cerrada.

Como consecuencia del teorema de Rosenthal [355] de que cada sucesión acotada de un espacio de Banach contiene una subsucesión débilmente de Cauchy si, y sólo si, el espacio de Banach no contiene una copia de l^1, se deduce que los operadores compactos entre espacios de Banach, cuyo espacio inicial no contenga una copia de l^1, son los que transforman sucesiones débilmente convergentes a cero en sucesiones fuertemente nulas.

Desde 1936 se sabe que existen espacios de Banach para los que todos los operadores que se pueden definir entre ellos son compactos. El célebre resultado de Pitt [280] dice que eso es así para las aplicaciones definidas en l^p y con valores en l^q, si $p>q\geq 1$. Se debe a J.A. López Molina y M.J. Rivera [278] la aportación de que lo mismo sucede entre el producto tensorial proyectivo de l^p y l^q y el espacio l^s, si $1\leq p, q\leq \infty$ y $1/p + 1/q < 1/s$, y también el estudio de esta propiedad en otros contextos.

Por otra parte, en teoría de operadores hay situaciones en que conviene representar un operador como límite de una sucesión de operadores con propiedades conocidas. Los operadores mejor investigados han sido los de rango finito dimensional y los compactos, por lo que era natural preguntarse para qué espacios de Banach los operadores lineales y continuos se pueden aproximar por operadores de esta clase.

Grothendieck, [180], en su memoria *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires* obtuvo que eran los espacios de Banach en que el operador identidad se puede aproximar en cada compacto uniformemente por operadores de rango finito.

En consecuencia definió que un espacio de Banach **E** tiene la propiedad de aproximación si para cada compacto K y cada $\varepsilon>0$ existe un operador T de **E** en **E** con rango finito tal que $\|Tx - x\| \leq \varepsilon$, para cada $x\in K$, y probó que si el dual de un espacio de Banach **E** tiene la propiedad de aproximación, entonces el espacio **E** también tiene la propiedad de aproximación, resultado complementado por Lindenstrauss [221] probando la existencia de un espacio de Banach con base de Schauder cuyo dual no tiene la propiedad de aproximación.

Este resultado de Grothendieck relativo a la propiedad de aproximación en los preduales, y el que los espacios de Banach con base de Schauder tuviesen la propiedad de aproximación, son los antecedentes para que Johnson, Rosenthal y Zippin [201] obtuviesen que, si el dual de un espacio de Banach **E** tiene base de Schauder, lo mismo le sucede a **E**, y, en sentido recíproco, que si el espacio de Banach **E** tiene base de Schauder y dual separable con la propiedad de aproximación, entonces dicho dual tiene base de Schauder.

Exigiendo un poco más a la base, se sabe que, si un espacio de Banach tiene base incondicional y dual separable, entonces el dual también tiene base incondicional.

Completando esta información se han obtenido espacios de funciones continuas en un intervalo de ordinales sin base incondicional, cuyo dual tiene base incondicional [35 y 222].

Otro aspecto considerado por Grothendieck [180] fue la relación entre la propiedad de aproximación y la estructura de los espacios de Banach, por lo que supuso un progreso esencial el contraejemplo de Enflo [120] de 1972 de un espacio separable de Banach sin la propiedad de aproximación, y, por tanto, sin base de Schauder.

El resultado de Enflo ha sido mejorado por Davie [83], Figiel [157] y Szankowski [394] probando con series aleatorias que existe un subespacio $\mathbf{E}_p$ en l_p, para $p \geq 1$ y $p \neq 2$, que no tiene la propiedad de aproximación.

Otro bello contraejemplo para la propiedad de aproximación de interés en análisis armónico ha sido dado por Kwapien [215], al probar que para cada número finito $p>2$, existen dos sucesiones crecientes $\{n_k,\ k \in \mathbf{N}\}$ y $\{m_k,\ k \in \mathbf{N}\}$, tales que la envoltura lineal cerrada de las funciones $f_k(t) = e^{2\pi i t n_k} + e^{2\pi i t m_k}$, para $k \in \mathbf{N}$, no tiene la propiedad de aproximación.

8.5 La propiedad de aproximación acotada.

Las pruebas relativas a que un espacio de Banach tenga la propiedad de aproximación suelen revelar propiedades de aproximación más fuertes. De los distintos tipos de propiedades de aproximación estudiadas por Grothendieck [180], Johnson, Rosenthal y Zippin [201], Lindenstrauss [220] y Pelczynski [272], vamos a detenernos en la propiedad de aproximación acotada, que se define así:

Se dice que un espacio de Banach **E** *tiene la propiedad de aproximación acotada con constante* a (>1) *si para cada compacto* K *y cada* $\varepsilon > 0$ *existe un operador* T *de* **E** *en E con rango finito y norma menor o igual que a tal que* $\|Tx - x\| \leq \varepsilon$ *, para cada* $x \in K$.

La construcción de un espacio de Banach con la propiedad de aproximación y sin la propiedad de aproximación acotada se debe a Figiel y Johnson [158].

Por el teorema de Banach Steinhaus los espacios de Banach con base de Schauder tienen la propiedad de aproximación acotada; por tanto, el ejemplo de Figiel y Johnson también resuelve el problema de la existencia de espacios de Banach con la propiedad de aproximación y sin base de Schauder.

Lo que no se conoce es un espacio con la propiedad de aproximación acotada que no tenga base de Schauder.

Sí se sabe, por Johnson, Rosenthal y Zippin [201], que un espacio de Banach separable tiene la propiedad de aproximación acotada si, y sólo si, es isomorfo a un subespacio complementado de un espacio de Banach con base.

También en la célebre memoria de Grothendieck [180] se prueba que, si el dual de un espacio de Banach **E** tiene la propiedad de aproximación acotada con constante a, entonces el espacio **E** también tiene la propiedad de aproximación con constante $\leq$a. En este resultado interviene el principio de reflexividad local de Lindenstrauss y Rosenthal [223] que establece que un espacio de Banach es localmente isométrico a su bidual.

La formulación de la propiedad de aproximación acotada en términos de operadores se debe a Davie [84], Ryll-Nardzewski Michael y Pelczynski [240], y Wojtaszczyk [515].

Capítulo 9

Resoluciones proyectivas y bases de Markushevich

9.1 Sistemas biortogonales y bases de Markushevich.

Al no poder probar que los espacios de Banach separables tenían base, Banach buscó otros sistemas de coordenadas más débiles, lo que motivó su interés por los sistemas biortogonales. Este es el origen de la nota del capítulo VII de su monografía *Teoría de las operaciones lineales* [28], parcialmente contestada por Ovsepian y Pelczynski [269] en la siguiente forma:

Cada espacio de Banach separable **E** admite un sistema biortogonal $\{(x_n, f_n), n\in \mathbf{N}\}$, con $\|x_n\|=1$, para $n\in \mathbf{N}$, y $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n\| = 1$, tal que $\{x_n : n\in \mathbf{N}\}$ es total en **E** y $\{f_n : n\in \mathbf{N}\}$ separa los puntos de **E**, siendo pues $\{f_n(x) : n\in \mathbf{N}\}$ un sistema de coordenadas del vector x. Además, dada una constante $c>1$ puede elegirse el sistema de manera que $\sup\limits_n\|f_n\|<c$ [271].

No se sabe aún si la afirmación es cierta para $c=1$.

Los sistemas biortogonales han sido una herramienta adecuada para introducir sistemas de coordenadas en espacios de Banach. Extendiendo al caso no numerable la parte esencial de la proposición anterior, se dice que un sistema biortogonal $\{(x_\alpha, f_\alpha), \alpha \in \Gamma\}$ en un espacio de Banach **E** es una base de Markushevich si $f_\beta(x_\alpha) = \delta_{\alpha\beta}$, los vectores x_α separan los puntos del dual y los vectores f_α separan los puntos del espacio **E**. Cuando los vectores x_α y el vector 0 forman un conjunto débilmente compacto, se dice que se tiene una base de Markushevich débilmente compacta.

Resulta inmediato que una base de Schauder de un espacio de Banach **E** y sus formas lineales asociadas determinan una base de Markushevich, no siendo cierto su recíproco, ya que el análisis de Fourier clásico nos dice que las funciones $e^{i2\pi nt}$, $n \in \mathbf{Z}$, no forman una base de Schauder en el espacio de las funciones continuas complejas definidas en el intervalo [0,1], en tanto que del teorema de Weierstrass se deduce que esas funciones y las medidas definidas por las densidades $e^{-i2\pi nt}$, $n \in \mathbf{Z}$, forman una base de Markushevich.

9.2 El teorema de Amir y Lindenstrauss

Un espacio de Banach es de generación débilmente compacta si admite un subconjunto débilmente compacto cuya envoltura lineal es densa en **E**. Un importante resultado de Amir y Lindenstrauss [8] establece que un espacio de Banach **E** de generación débilmente compacta admite una base de Markushevich débilmente compacta. El ya clásico trabajo conjunto de Davis, Figiel, Johnson y Pelczynski [85] prueba que:

- Un espacio de Banach es de generación débilmente compacta si, y sólo si, contiene un subespacio denso que es la imagen inyectiva y continua de un espacio de Banach reflexivo.

- Un operador débilmente compacto entre espacios de Banach factoriza a través de un espacio reflexivo.

- Los espacios de generación débilmente compacta son isomorfos a cocientes Z**/Z,

extendiendo al caso no separable los resultados de James [187] y Lindenstrauss [221].

Para los espacios separables, que son un caso particular de espacios de generación débilmente compacta, era de esperar que se pudiese afirmar algo más. Valdivia estableció que se podía elegir Z de forma que el espacio separable fuese isométrico al cociente Z**/Z, y obtuvo otros resultados más fuertes para espacios con bidual separable [491 y 495].

9.3 Resoluciones proyectivas de la identidad

La parte complicada en la determinación por Amir y Lindesntrauss de bases de Markushevich en los espacios de Banach de generación débilmente compacta es la descomposición del espacio de Banach en subespacios, mediante una familia ordenada de proyecciones, que se llama una resolución proyectiva de la identidad y que de forma gráfica se dice en el libro de Deville, Godefroy y Zizler (Smoothness and renormings in Banach spaces, Pitman 64 (1993)) que es una "*sucesión larga de proyecciones*".

Amir y Lindenstrauss [8], al dotar a un espacio **E** de generación débilmente compacta de base Markushevich, consiguieron definir una inyección continua del espacio **E** en cierto $c_0(\Gamma)$, probando también que la bola unidad del dual de **E**, con la topología débil definida por los vectores de **E**, es un compacto de Eberlein, lo que significa que es homeomorfa a un subconjunto débilmente compacto de cierto $c_0(\Lambda)$.

La pregunta natural era si admitirían resoluciones proyectivas de la identidad los espacios de Banach cuya bola unidad del dual, provista con la topología débil estrella, pueda sumergirse en un producto de rectas de manera que la imagen de cada punto sólo tenga una cantidad numerable de coordenadas diferentes de cero. Este problema tiene dos respuestas parciales del profesor Valdivia:

La primera exige que en el dual, y no sólo en la bola unidad, pueda definirse una inyección continua en un producto de rectas, de manera que la imagen de cada punto tenga una cantidad numerable de coordenadas diferentes de cero [497].

La segunda es para espacios C(K) de funciones continuas, cuando el compacto K se pueda sumergir en un producto de intervalos [0,1], de manera que las imágenes de los puntos de un subconjunto denso de K tengan una cantidad numerable de coordenadas no nulas (*Projective resolution of identity in C(K) spaces*, Arch. Math. 54 (1990) 493-498).

Estos compactos llevan ya en la literatura especializada el nombre de su descubridor y abren una serie de preguntas relativas a la posibilidad de construir una teoría de resoluciones proyectivas de la identidad que englobe las de Amir-Lindesntrauss y Valdivia, así como el estudio de los espacios de Banach que admitan resoluciones proyectivas de la identidad cuando en la bola unidad del dual los puntos de un conjunto frontera, o los de algún subconjunto de puntos extremales, admitan representaciones con cantidad numerable de coordenadas no nulas.

Todos los esfuerzos en esta dirección serán fructíferos para el estudio de los espacios de Banach, particularmente los no separables, y, consecuentemente, para la teoría de operadores en espacios de Banach.

Capítulo 10

Espacios de Banach isométricos o isomorfos a un espacio de Hilbert

10.1 El problema de la isometría.

Alguna de las propiedades de los espacios de Banach nos hacen recordar los espacios de Hilbert. No debe extrañarnos, pues, que uno de los problemas propuestos por Banach en su *Teoría de las operaciones lineales* consistiese en describir una propiedad **P** tal, que un espacio de Banach con la propiedad **P,** fuese isométrico, o bien isomorfo, a un espacio de Hilbert. Ahora expondremos alguna caracterización isométrica.

En 1935 [202], Jordan y von Neumann probaron que un espacio de Banach es isométrico a un espacio de Hilbert si, y sólo si, satisface la ley del paralelogramo ($\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$). Foias [161] y von Neumann [264] probaron que un espacio de Banach complejo **E** es isométrico a un espacio de Hilbert si, y sólo si, para cada operador lineal T de **E** en **E** y cada polinomio P con coeficientes complejos se verifica que $\|P(T)\| \leq \|T\| \sup\|P(z): |z|=1\|$.

También se debe a von Neumann [264], en colaboración con Auerbach [16], que un espacio de Banach finito dimensional **E** es isométrico a un espacio de Hilbert si, y sólo si, para cada par de puntos x e y de la esfera unidad de **E** existe una isometría T de **E** en **E** tal que T(x) = T(y).

Dado un número finito k se tiene en los espacios de Hilbert que los subespacios k-dimensionales son isométricos. Otro de los problemas propuestos por Banach en su *Teoría de las operaciones lineales* fue si la isometría entre los subespacios de dimensión k de un espacio de Banach **E**, caracterizaría la isometría del espacio **E** con un espacio de Hilbert.

Lo que se sabe de este problema por los trabajos de Auerbach, Mazur y Ulam [17], Dvoretzky [110] y Gromov [177] es que la respuesta es afirmativa si k es par y k+1 es menor que la dimensión de **E**. Para espacios de Banach reales la solución también es afirmativa si k es impar y k+2 es menor que la dimensión de **E**. Para espacios de Banach complejos la solución también es afirmativa si k es impar y 2k es menor que la dimensión de **E**.

Se debe a Kakutani [208] y Bohnenblust [59] que un espacio de Banach de dimensión mayor que 2 es isométrico a un espacio de Hilbert si, y sólo si, los subespacios de dimensión dos son imágenes de proyecciones de norma 1, lo que equivale a que cada subespacio cerrado sea imagen de una proyección de norma 1.

10.2 El problema de la isomorfía.

El anterior resultado de Kakutani y Bohnenblust es sencillo de probar, pero, si se prescinde de que la proyección sea de norma 1, sólo se obtiene isomorfía, según el siguiente resultado de Lindenstrauss y Tzafriri [224]:

Un espacio de Banach es isomorfo a un espacio de Hilbert si, y sólo si, sus subespacios cerrados son complementados.

En general, las propiedades que caracterizan que un espacio de Banach sea isométrico a un espacio de Hilbert han sido más simples de obtener que las que sólo establecen la isomorfía, de las que vamos a dar algunas que parecen particularmente atractivas:

- Un espacio de Banach **E** separable es isomorfo a un espacio de Hilbert si, y sólo si, **E** y su dual son isomorfos a subespacios de $L^1([0,1])$, o si, y sólo si, son isomorfos a cocientes de $C([0,1])$ (Grothendieck [180], Lindenstrauss y Pelczynski [224]).
- Un espacio de Banach **E** es isomorfo a un espacio de Hilbert si, y sólo si, es un operador acotado la transformada de Fourier definida en el espacio $L_0^2(R, \mathbf{E})$ y con valores en su completación, siendo $L_0^2(R, \mathbf{E})$ el espacio de las funciones simples definidas en el conjunto R de los números reales, con valores en el espacio **E** y provisto con la norma L^2 (Kwapien [214]).
- En términos de convexidad y suavidad uniforme se tiene que un espacio de Banach **E** es isomorfo a un espacio de Hilbert si, y sólo si, existe una constante A y dos espacios de Banach $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ isomorfos a **E**, de manera que $\mathbf{E}_1$ es uniformemente convexo, $\mathbf{E}_2$ es uniformemente suave, y los módulos de convexidad y suavidad verifican que $\delta_{E_1}(t) \geq At^2$ y $\rho_{E_2}(t) \leq At^2$, para los valores positivos de t menores que cierto ε positivo [159].

Finalmente, se debe a Enflo [119] que un espacio de Banach **E** es isomorfo a un espacio de Hilbert si, y sólo si, es homeomorfo a un espacio de Hilbert, siendo el homeomorfismo y su inverso aplicaciones uniformemente continuas.

Capítulo 11

Consideraciones finales

Los cambios radicales experimentados en los últimos cien años hacen que no sean fiables las extrapolaciones para predecir el futuro científico. No es un simple dato anecdótico que el Congreso Internacional de París de 1900 tuviese 226 asistentes, y que el número de asistentes en el último Congreso internacional de matemáticos de 1994 fuera unas treinta veeces superior. No es exagerado estimar alrededor de diez mil asitentes para el 23 congreso internacional a celebrar el próximo Agosto en Berlín.

En el congreso internacional de Kyoto de 1990, la delegación americana propuso una serie de congresos en diversas partes del mundo en el año 2000, como versión actual del congreso de París de 1900. Esta iniciativa fue complementada con otros acuerdos tomados en Río de Janeiro, en mayo de 1992, por el Comité ejecutivo de la Unión Matemática Internacional, desde la perspectiva del desarrollo actual de la matemática. Su presidente, Jacques-Louis Lions, propuso entonces que el año 2000 fuese reconocido como *Año mundial de la Matemática*, con programas específicos dedicados a la enseñanza, investigación y países en vías de desarrollo, iniciativa próxima ya a su ejecución.

Si miramos hacia atrás vemos que nunca la Matemática ha sido un compartimento aislado del resto de la ciencia, particularmente por la interrelación tan profunda y venerablemente anciana entre Física y Matemáticas, que hace díficil concebir a una sin la otra. Por eso el sexto problema de Hilbert se interesaba por el tratamiento matemático de los axiomas de la Físca, considerándolos parte integrante de la actividad matemática, y, en sentido opuesto, son muchas las ideas físicas que han generado conceptos e invariantes matemáticos (los monopolos han dado invariantes en variedades diferenciales; las integrales de Feynman de la teoría cuántica de campos han dado invariantes en teoría de nudos, con un etcétera que en este caso es mucho más largo de lo usual).

También la modelización y resolución de problemas físicos conlleva, cada vez más, la utilización de elementos matemáticos, muchos de carácter muy abstracto, así como el planteamiento de nuevos problemas matemáticos. Parte de los discursos de ingreso en esta Academia de los profesores Millán Barbany [241] y Liñán Martínez [225] versaron sobre problemas matemáticos de la mecánica de fluidos y su aplicación a los procesos de combustión.

Otro hecho distintivo de nuestro siglo ha sido que la matemática ha invadido otras ramas del saber, lo que puede ser debido a que, como escribió el profesor de Guzmán Ozámiz en su discurso de ingreso en esta Academia [87], *"el número, es la herramienta a disposición de nuestro pensamiento para hacerse con las normas de actuación de la naturaleza.* En ese mismo discurso transcribía el profesor de Guzmán la siguiente frase de Filolao, indicando que era uno de los pitagóricos primitivos: *"El número es quien armoniza en el alma las cosas con su percepción, haciéndolas cognoscibles unas con otras, proporcionándoles corporeidad".*

En justa reciprocidad la Matemática ha sido permeable a la influencia de las demás ciencias, por lo que, en 1961, el profesor Ríos García terminaba así su discurso de ingreso en esta Academia: *"...desde comienzos de siglo la Física, más tarde la Biología y, desde hace un par de décadas, las Ciencias humanas, han hecho que en la Matemática del siglo XX florezcan ideas nuevas y fecundas, que le dan un influjo sobre el resto de la Ciencia comparable al que tuvo en la época de Newton y Leibnitz".*

En 1968, el profesor Maravall escribía en su discurso de ingreso: *"Las fronteras entre las diversas ciencias no están trazadas de manera clara y distinta al estilo cartesiano, sino que se solapan entre sí ofreciendo un aspecto de continuidad, de modo que si bien es cierto que cada ciencia tiene un núcleo claramente diferenciado, tiene* *también una corteza que resulta difícil precisar si pertenece a ella o pertenece ya a otra;.....Toda ciencia tiene sus auxiliares y a su vez es auxiliar de otras ciencias, y esta relación de ayudantía es tan fuerte que, con relativa frecuencia, un progreso en la ciencia auxiliar perfecciona la ciencia fundamental, infinitamente más que un progreso de ella misma".*

En el proceso de investigación matemática han influido siempre valores lógicos y estéticos, y los mejores servicios prestados por la matemática han exigido profundos recursos teóricos. El profesor Rodríguez-Salinas, en su contestación al discurso de ingreso en esta Academia del profesor Jiménez Guerra [194], indicaba la circunstancia de que *las mayores contribuciones aplicadas han sido hechas por grandes matemáticos, debido a que sus profundos conocimientos matemáticos les permitían abordar problemas difíciles.*

En el referido discurso del profesor Jiménez Guerra se consideraban aplicaciones de la integración bilineal a la resolución de problemas de momentos y optimización, a la mejora de métodos empleados en Mecánica Cuántica y Teoría de la Comunicación, y a la obtención directa de la integral de Feynman, sin utilización de medidas gaussianas, entre otras aplicaciones.

Nunca pues deberemos renunciar al desarrollo de la Matemática desde la misma Matemática, y siempre serán bien venidos problemas que, como los de Hilbert o Banach, estimulen y dirijan la investigación.

Además de resolver problemas y plantear conjeturas muy interesantes, Hilbert y Banach hicieron una fecunda labor de síntesis, con una fe sin límites en el valor y potencia de las construcciones matemáticas, por encima incluso de la realidad sensible. *La medida de su amor a la Matemática era amor sin medida*, palabras que, llevándolas al contexto matemático, las he tomado de unos consejos de San Buenaventura, a uno de sus discípulos.

El aprecio de la belleza de la Matemática, y en general de la construcción científica, hace olvidar, al menos en parte, el esfuerzo que comporta su cultivo. Comparto pues el deseo de que *"habría que lograr que el mayor número posible de hombres y mujeres accediesen* *no sólo al placer del conocimiento, sino al del descubrimiento científico, por muy modesto que éste fuera"*, escrito por el profesor Díaz Díaz [100] en su discurso de ingreso en esta Academia.

El futuro matemático dependerá de las nuevas generaciones, para quienes creo que tienen validez las ideas siguientes, extraidas de una carta de Santo Tomás de Aquino a un estudiante:

"Me preguntaste: ¿Qué hacer para encontrar el tesoro de la sabiduría? He aquí mi consejo: No te lances directamente al mar, acude a él por los ríos. Con otras palabras: Empieza por lo sencillo, que ya llegará lo complicado.

Archiva en tu memoria todo lo bueno que oigas o veas, venga de donde venga. Esfuérzate por entender. Disipa las dudas que te surjan. Ve llenando tu mente de cosas como quien va llenando un vaso: poco a poco.

Trázate objetivos claros, evitando toda dispersión, y sigue las huellas que han dejado marcadas los mejores".

Agradecimientos

A lo largo de la vida me he encontrado con muchas ayudas, y tengo la convicción de que nunca podré devolver todo lo que he recibido. No puedo olvidar al casi tricentenario colegio de las Escuelas Pías de Valencia donde estudié doce años, aprendí la ilusión por la enseñanza, me caló hondo su lema *Piedad y letras*, y en los tres últimos cursos recibí diariamente clase de Matemáticas del prestigioso profesor Don Francisco Castaños, quien amaba tanto el cálculo que olvidaba su aguda asma con los problemas difíciles.

Otro recuerdo muy grato es el de la querida Facultad de Ciencias de Valencia, donde tuve excelentes profesores, que conseguían que entrásemos en el fondo de las ideas y que nos interesásemos por la ciencia, podando el frondoso árbol de los conocimientos para dejar lo esencial y formativo. También aprecié como se puede hacer ciencia de calidad con pocos medios y mucha ilusión de trabajar. Siento no poder compartir los trabajos en la Academia con los que fueron mis profesores Don Maximino Rodríguez Vidal y Don Fernando Senent Pérez, de tan grato recuerdo.

El haber sido catedrático de Instituto entre 1968 y 1975 me permitió entablar amistad con maestros en el sentido más profundo de la palabra. Siempre he considerado un ejemplo a Don José García García, que suscitó muchas vocaciones hacia la Matemática. Muchas ideas que utilizo habitualmente las aprendí del ingenio de Don José Iribarne Caus y de Don Fernando del Valle García. No imaginaba entonces que bastantes de mis alumnos harían de la Matemática su profesión y, por tanto, parte de su vida, y que años más tarde dirigiría la Tesis a tres de ellos, los profesores Salvador Romaguera, José Mas y Luis Sánchez, con quienes he publicado artículos y cuyo buen trabajo reconozco y admiro.

En aquella época se dedicaba mucho tiempo en Enseñanza Media a la Matemática. En mi opinión, considero erróneas las reducciones horarias que ha sufrido la Matemática en Bachillerato y en muchas carreras universitarias, que no son compensables con textos de gran calidad, de los que todos conocemos ejemplos. La Matemática requiere la formación de hábitos mentales, que conllevan tiempo. La falta de formación matemática implica su simple utilización algorítmica en otras ciencias, lo que impide llegar al fondo de sus mensajes. Pienso que sin formación no hay aprendizaje, ya que el saber presupone siempre la comprensión de las ciencias básicas.

En 1968 conocí a mi maestro Don Manuel Valdivia por sus apuntes de Cálculo. Encontré en ellos un mundo nuevo y, sin ninguna reflexión adicional, le pedí que me dirigiese la Tesis Doctoral. Sería injusto no reconocer que le debo todo lo que he hecho en Matemáticas, y que para mí ha sido mucho más que un maestro. Otro estímulo constante ha sido la escuela que ha formado el profesor Valdivia, ya con tres generaciones, y con nombres de reconocido prestigio internacional. Valoro tanto sus obras como el trato de amistad que siempre me han dado.

Parte de lo que he aprendido ha sido durante la dirección de las tesis doctorales de Enrique Tarazona, Salvador Romaguera, Angel Gutiérrez, Jesús Ferrer, Valentín Gregori, Pilar Bravo, Juan Carlos Ferrando, José Mas, Luis Manuel Sánchez y José Ramón Ferrer.

Junto al actual Rector de la Universidad Politécnica de Valencia, Don Justo Nieto, y a los Directores de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos y del Departamento de Matemática Aplicada, Don Rafael Bru y Don Pedro Pérez, son muchos los compañeros de la Universidad a los que admiro y de los que también he recibido ayuda.

En mis padres, hermanas y familia he tenido siempre un sólido soporte y, como muchos otros de mi generación, pude estudiar gracias a su capacidad de sacrificio. Los primeros conceptos matemáticos, físicos y químicos se los debo a mi padre. Era muy claro, intuitivo y transmitía ilusión por la ciencia y el pensamiento. Todos sus estudios provenían de libros que meditaba después de su muy larga jornada de trabajo. Es otra de las ausencias para las que, personalmente, la esperanza cristiana me es muy reconfortante.

Ahora mis apoyos son mi esposa y mis hijos, que cargan con todas las servidumbres que comporta el trabajo matemático. Son lo mejor que tengo, y nunca daré suficientes gracias a Dios por haberles encontrado.

Termino estas palabras agradeciendo a todos ustedes la atención que me han prestado. Muchas gracias.

BIBLIOGRAFIA

1. Adasch N., Ernst B. y Keim D.: *Topological vector spaces. The theory without convexity conditions*. Lect. Notes in Math. 639. Springer Verlag 1978.
2. Alegre C., Ferrer J. y Gregori V.: *Quasi-uniform structures in linear lattices*. Rocky Mount. J. Math. 23 (1993) 877-884.
3. Alfsen E. : *Compact sets and boundary integrals*. Springer Verlag (1971).
4. Amemiya I.: *Some examples of (F) and (DF) spaces*. Proc. Japan Acad. 33 (1957) 169-171.
5. Amemiya I. y Kōmura Y.: *Über nicht vollständige Montelräume*. Math. Ann. 177 (1968) 273-277.
6. Amir D.: *On isomorphism of continuous function spaces*. Israel J. Math. 3 (1965) 205-210.
7. Amir D.: *Projections onto continuous functions spaces*. Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964) 396-402.
8. Amir D. y Lindesntrauss J.: *The structure of weakly compact sets in Banach spaces*. Ann. of Math. 88 (1968) 35-46.
9. Ansemil J.M.: *Relation between* τ_0 *and* τ_ω *on spaces of holomorphic functions*. Advances in the theory of Fréchet spaces. Ed. T. Terzioglu. Kluver acad. Publishers (1989) 173-180.
10. Ansemil J.M. y Ponte S.: *An example of a quasinormable Fréchet function space which is not a Schwartz space*. Proc. Royal Irish Acad. 82A (1982) 121-128.
11. Ansemil J.M. y Ponte S.: *The compact open and the Nachbin ported topologies on spaces of holomorphic functions*. Arch. Math. 51 (1988) 65-70.
12. Ansemil J.M. y Taskinen J.: *On a problem of topologies infinite dimensional holomorphy*. Arch. Math. 54 (1990) 61-64.
13. Arias de Reyna, J.: *Dense hyperplanes of first category*. Math. Ann. 249 (1980) 111-114.
14. Arias de Reyna, J.: $l_0^\infty(\Sigma)$ *no es totalmente tonelado*. Rev. Real Acad. Ciencias Madrid 79 (1980) 77-78.
15. Aron R.M., Hervés C. y Valdivia M.: *Weakly continuous mappings on Banach spaces*. J. Funct. Anal. 52 (2) (1983) 189-204.
16. Auerbach H.: *Sur les groupes bornés de substitutions linéaires*. C. R. Acad. Sci. Paris 195 (1932) 1367-1369.
17. Auerbach H., Mazur S y Ulam S.: *Sur une propriété characteristique de l'ellipsoide*. Monatshefte für Mathematik und Physik 42 (1935) 45-48.

18. Banach S.: *Sur les ensembles de points oú la derivée est infinie*. C. R. Acad. Sci. Paris 173 (1921) 457-459.
19. Banach S.: *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*. Fund. Math. 3 (1922) 133-181.
20. Banach S.: *Sur le problème de la measure*. Fund. Math. 4 (1923) 7-33.
21. Banach S.: *Un théorèm sur les transformations biunivoques*. Fund. Math. 6 (1924) 236-239.
22. Banach S.: *Sur la décompositions des ensembles de points en parties respectivement congruents*. Fund. Math. 6 (1924) 244-277.
23. Banach S.: *Sur le fontionnelles linéaires*. Studia Math 1 (1929) 211-216.
24. Banach S.: *Sur le fontionnelles linéaires II*. Studia Math 1 (1929) 223-239.
25. Banach S. y Kuratowski C.: *Sur une généralisation du problèm de la measure*. Fund. Math. 14 (1929) 127-131.
26. Banach S.: *Uber additive Massfunktionen in abstrakten Mengen*. Fund. Math. 15 (1930) 97-101.
27. Banach S.: *Théorème sur les ensembles de première catégorie*. Fund. Math. 16 (1930) 395-398.
28. Banach S.: *Théorie des operations linéaires*. Monografie Matematyczme 1, Varszawa (1932).
29. Banach S.: *The Lebesgue integral in abstract spaces*. Nota al libro de S. Saks: *Theory of integral Monografie Matematyczne 7*, Warszawa-Lwów (1937) 320-330.
30. Banach S. y Steinhaus H.: *Sur le principe de la condensation de singularités*. Fund. Math. 9 (1927) 50-61.
31. Banach S. y Tarski A.: *Sur la descomposition des ensembles de points en parties respectivement congruents*. Fund. Math. 6 (1924) 244-277.
32. Batt J., Dierolf P. y Voigt J.: *Summable sequences and topological properties of* $m_0(I)$. Arch. Math. 28 (1977) 86-90.
33. Bennet G. y Kalton N.: (FK)-*spaces containing* c_0. Duke Math. J. 39 (1972) 561-582.
34. Bennet G y Kalton N.: *Inclusion theorems for k-spaces*. Canad. J. Math. 25 (1973) 511-524.
35. Bessaga C. y Pelczynski A.: *Banach spaces of continuous functions IV*. Studia Math. 19 (1960) 53-62.
36. Biersted K.D. y Bonet J.: *Stefan Heinrich's condition for Fréchet spaces and the characterization of the distinguished echelon spaces*. Math. Nachr. 135 (1988) 149-180.
37. Biersted K.D. y Bonet J.: *Dual density conditions in (DF)-spaces, I*. Results Math. 14 (1988) 242-274.

38. Biersted K.D. y Bonet J.: *Dual density conditions in (DF)-spaces, II.* Bull. Soc. roy. Scien. Liège, 57 année (6) (1988) 567-589.
39. Biersted K.D., Bonet J. y Galbis A.: *Weighted inductive and projective limits of spaces of holomorphic functions on balanced subsets of C^N.* Michigan Math. J. 40 (1993) 271-297.
40. Biersted K.D., Bonet J. y Taskinen J.: *Associated weights and spaces of holomorphic functions.* Studia Math. 127 (1998) 137-168.
41. Bierstedt K.D. y Meise R.: *Distinguished echelon spaces and the projective description of weighted inductive limits of type VC(X).* Aspects of Mathematics and its Applications. North Holland Math. Library. North Holland (1986), 169-226.
42. Blasco J.L.: *Sobre la k-extensión de topologías completamente regulares.* Rev. Real Acad. Cien. Madrid 68 (4) (1974) 761-769.
43. Blasco J.L.: *Two problems on* k_r*-spaces.* Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 32 (1-2) (1978) 27-30.
44. Blasco J.L.: *Pseudocompacidad y compacidad numerable del producto de dos espacios topológicos.* Collect. Math. 29 (2) (1978) 89-96.
45. Blasco J.L.: *Complete bases and Wallman realcompactifications.* Proc. Amer. Math. Soc. 75 (1) (1979) 114-118.
46. Blasco J.L.: *Two questions on Wallman Rings.* Pacific J. Math. 88 (1) (1980) 29-33.
47. Blasco J.L.: *Realcompactaciones de tipo Wallman: Sobre la completación de una base.* Rev. Real Acad. Cien. Madrid 75 (1) (1981) 233-239.
48. Blasco J.L.: *Funciones de Baire asociadas a ciertas subálgebras de C(X).* Rev. Real Acad. Cien. Madrid 75 (1) (1981) 241-256.
49. Blasco J.L.: *A note on spaces in which avery open set is z-embedded.* Proc. Amer. Math. Soc. 85 (3) (1982) 444-446.
50. Blasco J.L.: *Hausdorff compactifications and Lebesgue sets.* Topology and its Applications 15 (1983) 111-117.
51. Blasco J.L.: *Conjuntos de Lebesgue y compactaciones de un espacio topológico.* Rev. Real Acad. Cien. Madrid 78 (1-2) (1984) 195-200.
52. Blasco J.L. y Moltó A.: *On the uniform closure of a linear space of bounded real-valued functions.* Ann. Mat. pura ed applicata 134 (1983) 233-239.
53. Bombal F.: *Medida e integración en espacios bornológicos.* Rev. Real Acad. Cien. Madrid 75 (1981) 115-137.
54. Bombal F.: *El teorema de Radon-Nikodym en espacios bornológicos.* Rev. Real Acad. Cien. Madrid 75 (1981) 139-154.
55. Bombal F. y Cembranos P.: *The Dieudonné property on C(K,E).* Trans. Amer. Math. Soc. 285 (1984) 649-656.

56. Bombal F. y Rodríguez-Salinas B.: *The Tychonoff product theorem for compact Hausdorff spaces does not imply the axiom of choice: a new proof. Equivalent propositions*. Collect. Math. 24 (1973) 219-230.
57. Bombal F. y Rodríguez-Salinas B.: *Representación de inf-semirretículos en las partes de un espacio topológico*. Collect. Math. 26 (1975) 67-95.
58. Bombal F. y Rodríguez-Salinas B.: *Some classes of operators on C(K,E). Extension and applications*. Arch. Math. 47 (1986) 55-65.
59. Bohnenblust F.: *A characterization of complex Hilbert spaces*. Portugal. Math. 3 (1942) 103-109.
60. Bonet J.: *Una nota sobre la coincidencia de topologías en productos tensoriales*. Rev. Real Acad. Cien. Madrid 81 (1987) 87-89.
61. Bonet J.: *A question of Valdivia on quasinormable Fréchet spaces*. Bull. Canadian Math. Soc. 34 (1991) 310-304.
62. Bonet J., Defant A. y Galbis A.: *Tensor products of Fréchet or (DF)-spaces with a Banach space*. J. Math. Anal. Appl. 166 (1992) 305-318.
63. Bonet J.: *Intersections of Fréchet spaces and their duals*. Arch. Math. 68 (1997) 320-325.
64. Bonet J. y Díaz J.C.: *The density condition in subspaces and quotients of Fréchet Spaces*. Mh. Math. 117 (1994) 199-212.
65. Bonet J. y Dierolf S.: *On the lifting of bounded sets in Fréchet spaces*. Proc. Edinburgh Math. Soc. 36 (1993) 277-281.
66. Bonet J. y Domanski P.: *Real analytic curves in Fréchet spaces and their duals*. Publicación prevista en 1998 en Monatshefte Math.
67. Bonet J., Domanski P., Lindström M. y Taskinen.: *Composition operators between weighted spaces of analytic functions*. Publicación prevista en 1998 en J. Austral. Math. Soc.
68. Bonet J. y Fernández C. *Bounded sets in (LF)-spaces*. Proc. Amer. Math. Soc. 123, n° 12 (1995) 3717-3723.
69. Bonet J. y Galbis A.: *The range of non-surjective convolution operators on Beurling spaces*. Glasgow Math. J. 38 (1996) 125-135.
70. Bonet J., Galbis A. y Meise R.: *On the range of convolution operators on non-quasianalytic ultradifferentiable functions*. Studia Math. 126 (2) (1997) 171-198.
71. Bonet J., Galindo P., García D. y Maestre M.: *Locally bounded sets of holomorphic mappings*. Trans. Amer. Math. Soc. 309 (1988) 609-620.
72. Bonet J. y Lindström.: *Spaces of operators between Fréchet spaces*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 115 (1994) 133-144.
73. Bonet J., Lindstroöm M. y Valdivia M.: *Two theorems of Josefson-Nissenzweig type for Fréchet spaces*. Proc. Amer. Math. Soc. 117 (2) (1993) 363-364.

74. Bonet J. y Melichov S.: *Interpolation of entire functions and projective descriptions*. J. Math. Anal. Appl. 205 (1997) 454-460.
75. Bonet J. y Peris A.: *Remarks on the stability of barrelled-type topologies*. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 52 (1983) 313-318.
76. Bonet J. y Taskinen J. *The subspace problem for weighted inductive limits of spaces of holomorphic functions*. Michigan Math. J. 42 (1995) 259-268.
77. Bourbaki N.: *Elements de mathématiques. Libre V. Espaces vectoriels topologiques*. Paris. Hermann 1964.
78. Bravo P. y Santos J.L.: *A characterization of bornological C(X) spaces*. Acta Math. Hungaricae 55 (1990) 219-221.
79. Browder F.E.: *Mathematical developments arising from Hilbert problems*. Proceedings of symposia in pure mathematics. Amer. Math. Soc. (1976).
80. Burke M.R. y Todorcevic S.: *Bounded sets in topological vector spaces*. Math. Ann. 305, nº 1, (1996), 103-125.
81. Castillo J., Díaz J.C. y Motos J.: *On the Fréchet space L_p*. Aceptado en Manuscrpta Math.
82. Catalán F.X. y Tweddle I.: *Countable enlargements of norm topologies and the quasidistinguished property*. Glasgow Math. J. 35 (1993) 235-238.
83. Davie A.M.: *The approximation problem for Banach spaces*. Bull. London Math. Soc. 5 (1973) 261-266.
84. Davie A.M.: *Linear extension operators for spaces and algebras of functions*. American J. Math. 94 (1972) 156-172
85. Davis W.J., Figiel T., Johnson W.B. y Pelczynski A.: *Factoring weakly compact operators*. J. Functional Analysis 17 (1974) 311-327.
86. De Guzmán M. y Rubio B.: *Integración: Teoría y técnicas*. Madrid, 1979.
87. De Guzmán M.: *Impactos del análisis armónico*. Discurso de recepción en la Real Academia de Ciencias de Madrid (1983) 3-47.
88. De Wilde M.: *Réseaux dans les espaces linéaires à semi-normes*. Mémoires Soc. Roy. Sc. De Liège 18, 2 (1969)
89. De Wilde M.: *Closed graph theorems and webbed spaces*. Research Notes in Math. 19. Pitman, London 1978.
90. De Wilde M. y Houet C.: *On increasing sequences of absolutely convex sets in locally convex spaces*. Math. Ann. 192 (1971) 257-261.
91. De Wilde M. y Schmets J.: *Caractérisation des espaces C(X) ultrabornologiques*. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 40 (3-4)(1971) 119-121.
92. Defant A. y Floret K.: *Tensor norms and operator ideals*. North Holland Math. Studies 176. North Holland 1993.

93. Dineen S.: *Complex analysis in locally convex spaces*. North Holland Math. Studies 57 (1981).
94. Dineen S.: *Quasinormable spaces of holomorphic functions*. Note di Mat. 13 (1) (1993) 155-195.
95. Dineen S.: *Holomorphic functions and Banach-nuclear decompositions of Fréchet spaces*. Studia Math. 113 (1) (1995) 43-54.
96. Dineen S.: *A Dvoretzky theorem for polynomials*. Proc. Amer. Math. Soc. 123 (9) (1995) 2817-2821.
97. Dineen S., Galindo P., García D. Y Maestre M.: *Linearization of holomorphic mappings on fully nuclear spaces with a basis*. Glasgow Math. J. 36 (1994) 201-208.
98. Díaz J.C., Florencio M. y Paul P.J.: *A uniform boundedness theorem for* $L^{\infty}(\mu, E)$. Arch. Math. 60 (1993) 73-78.
99. Díaz J.C., López Molina J.A. y Rivera M.J.: *Distinguished injective tensor products of Fréchet spaces*. Proc. R. Ir. Acad. 92ª, nº 2, (1992) 165-174.
100. Díaz J.I.:*El mundo de la ciencia y las matemáticas del mundo*. Discurso de recepción en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (1997).3-106.
101. Díaz S., Drenowski L., Fernández A., Florencio M. y Paúl P.: *Barrelledness and bornological conditions on spaces of vector-valued* μ *-simple functions.* Resultate der Math. 21 (1992) 289-298.
102. Dierolf S.: *On spaces of continuous linear mappings between locally convex spaces*. Note di Mat. 5 (1985) 147-255.
103. Dierolf P, Dierolf S. y Drewnowski L.: *Remarks and examples concerning unordered Baire-like and ultrabarrelled spaces*. Colloq. Math. 39 nº 1 (1978) 109-116.
104. Dierolf S. y Kakol J.: *On S-barrelled spaces*. Result. in Math., to appear.
105. Diestel J.: *Sequences and series in Banach spaces*. Springer-Verlag 1984.
106. Diestel J. and Faires B.: *On vector measures*. Trans. Amer. Math. Soc. 198 (1974) 253-271.
107. Diestel J. and Uhl J.J.: *Vector measures*. Math. Surveys 15. Amer. Math. Soc. Providence 1977.
108. Dieudonné J. y Schwartz L.: *La dualité dans les espaces (F) et (LF)*. Ann. Inst. Fourier 1 (1949) 61-101.
109. Dou A: *Relaciones entre las ecuaciones en derivadas parciales y la Física*. Discurso de recepción en la Real Academia de Ciencias de Madrid (1963) 5-63.
110. Dovoretzky A.: *A theorem on convex bodies and applications to Banach spaces*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 45 (1959) 223-226.

111. Drewnowski L.: *Un théorème sur les opérateurs de* $l_\infty(\Gamma)$. C. R. Acad. Sc. Paris 281 (A) (1975) 967-969.
112. Drewnowski L.: *An extension of a theorem of Rosenthal on operators acting from* $l_\infty(\Gamma)$. Studia Math. 57 (1976) 209-215.
113. Drewnowski L., Florencio M. y Paúl P.J.: *The space of Pettis integrable functions is barrelled.* Proc. Amer. Math. Soc. 114 (1992) 687-694.
114. Drewnowski L., Florencio M. y Paúl P.J.: *Uniform boundedness of operators and barrelledness in spaces with Boolean algebras of projections.* Atti. Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 41 (1993) 317-329.
115. Drewnoski L., Florencio M. y Paúl P.J.: *Barrelled subspaces of spaces with subseries descompositions or Boolean rings of projections.* Glasgow Math. J. 36 (1994) 57-69.
116. Drewnowski L., Florencio M. y Paúl P.J.: *On the barrelledness of spaces of bounded vector functions.* Arch. Math. 63 (1994) 449-458.
117. Dunford N. Y Schwartz J.T.: *Linear Operators.* Interscience 1958.
118. Duporcq E.: *Compte rendu du deuxième congrès international des mathématiciens.* Gauthier-Villars (1902).
119. Enflo P.: *Uniform structures and square roots in topological groups I, II.* Israel J. Math. 8 (1970) 230-252 y 253-272.
120. Enflo P.: *A counterexample to the approximation problem in Banach spaces.* Acta Math. 130 (1973) 309-317.
121. Etayo J.J.: *Pequeña historia de las conexiones geométricas.* Discurso de recepción en la Real Academia de Ciencias de Madrid (1983) 7-58.
122. Etayo J.J.: *De cómo hablan los matemáticos y algunos otros.* Discurso inaugural del año académico 1990-91 en la Real Academia de Ciencias de Madrid (1983) 5-47..
123. Faires B.T.: *On Vitali-Hahn-Saks-Nikodym type theorems.* Ann. Inst. Fourier 21 (1971) 3-13.
124. Ferrando J.C.: *Subespacios totalmente tonelados en espacios de Banach con una base.* Rev. R. Acad. Cien. Madrid 86 (1992) 211-216.
125. Ferrando J.C.: *A proyective description of the simple scalar function space.* Rev. R. Acad. Cien. Madrid 86 (1992) 231-236.
126. Ferrando J.C.: *On the barrelledness of the space* $L_\infty(\mu, X)$. Bull. Soc. Math. Belg. 44 (Serie B) (1992) 165-169.
127. Ferrando J.C.: *Ultrabornological Bochner integrable function spaces.* Bull. Austral. Math. Soc. 47 (1993) 119-126.
128. Ferrando J.C.: *On the barrelledness of the vector-valued bounded function space.* J. Math. Anal. Appl. 184 (1994) 437-440.

129. Ferrando J.C.: *Strong barrelledness properties in certain* $l_0^\infty(A)$ *spaces*. J. Math. Anal. Appl. 190 (1995) 194-202.

130. Ferrando J.C.: *Unordered Baire-like vector-valued function spaces*. Bull. Belg. Math. Soc. 2 (1995) 223-227.

131. Ferrando J.C. y Ferrer J.: *On certain non-barrelled normed spaces*. Math. Japonica 38 (1993) 161-164.

132. Ferrando J.C., Ferrer J. y López Pellicer M.: *Strong barrelledness properties in* $L_p(\mu, X)$. Bull. Belg. Math. Soc. 1 (1994) 73-78.

133. Ferrando J.C. y López Pellicer M.: *Quasi-suprabarrelled spaces*. J. Austral. Math. Soc. (A) 46 (1989), 137-145.

134. Ferrando J.C. y López Pellicer M.: *On ordered suprabarrelled spaces*. Arch. Math. 53 (1989), 405-410.

135. Ferrando J.C. y López Pellicer M.: *Una propiedad de M. Valdivia, espacios de tipo (L) y condiciones débiles de tonelación*. Rev. Real Acad. Cienc. Madrid LXXXIII (1989), 25-34.

136. Ferrando J.C. y López Pellicer M.: *Strong barrelledness properties in* $l_0^\infty(X, A)$ *and bounded finite additive measures*. Math. Ann. 287 (1990), 727-736.

137. Ferrando J.C. y López Pellicer M.: *An ordered suprabarrelled space*. J. Austral. Math. Soc. (A) 51 (1991), 106-117.

138. Ferrando J.C. y López Pellicer M.: *Vector valued functions spaces which are barrelled of class* χ_0 *but not totally barrelled.* Math. Japonica 37 No 1 (1992), 117-121.

139. Ferrando J.C. y López Pellicer M.: *Barrelled spaces of class n and of class* χ_0. UNED Disertaciones del Seminario de Matemáticas Fundamentales 4 (1992) 3-17.

140. Ferrando J.C. y López Pellicer M.: *A note on a theorem of J. Diestel and B. Faires.* Proc. Amer. Math. Soc. 115 (4) (1992), 1077-1081.

141. Ferrando J.C. y López Pellicer M.: *Barrelled spaces of class* χ_0 *which are not totally barrelled.* Math. Japonica 37 (3) (1992) 465-471, y corrección en Math. Japonica 38 (6) (1993) 1197-1199.

142. Ferrando J.C., Ferrer J. y López Pellicer M.: *Strong barrelledness properties in Lebesgue-Bochner spaces*. Bull. Belg. Math. Soc. 1 (1) (1994), 73-78.

143. Ferrando J.C. y López Pellicer M.: *On exhaustive vector measures*. Rev. Colombiana Mat. 29 (1994), 13-21.

144. Ferrando J.C. y López Pellicer M.: *On the ideal of all subsets of N of density zero.* Aceptado en Rev. Real Acad. Cienc. Madrid.

145. Ferrando J.C., López Pellicer M. y Sánchez Ruiz L.M.: *Metrizable barrelled spaces*. Pitman Research Notes in Math. Series 332. Longman (1995).
146. Ferrando J.C. y Más J.: *Quasi-totally barrelled spaces of class*. Portugaliae Math. 47 (2 - 1990) 205-213.
147. Ferrando J.C. y Sánchez Ruiz L.M.: *On sequential barrelledness*. Arch. Math. 57 (1991) 597-605.
148. Ferrando J.C. y Sánchez Ruiz L.M.: *A maximal class of spaces with strong barrelledness conditions*. Proc. R. Ir. Acad. 92A (1) (1992) 69-75.
149. Ferrando J.C. y Sánchez Ruiz L.M.: *On a barrelled space of class χ_0 and measure theory*. Math. Scandinavica 71 (1992) 96-104.
150. Ferrando J.C. y Sánchez Ruiz L.M.: *Strong barrelledness properties in $\mathcal{B}(\Sigma, \mathcal{X})$*. Bull. Austral. Math. Soc. 52 (1995) 207-214.
151. Ferrer J. y Gregori V.: *Some classes of topological spaces with a unique quasi-uniformity*. Canad. Math. Bull. 29 (1986) 446-449.
152. Ferrer J. y Gregori V.: *On a certain class of complete regularity*. Acta Math. Hungar. 47 (1986) 179-180.
153. Ferrer J. y López Pellicer M.: *Algebras of sets generating non-barrelled spaces*. Periodica Math. Hungarica 29(3) (1994) 207-211.
154. Ferrer J.R., López Pellicer M., Mas J. y Sánchez Ruiz L.M.: *Topologías fuertes en espacios linealmente topologizados de funciones continuas*. Rev. Real Acad. Cienc. Madrid 83 (1) (1989) 97-103.
155. Ferrer J.R., López Pellicer M. y Sánchez Ruiz L.M.: *A strongly barrelled space*. Math. Japonica 39 (1) (1993) 89-94.
156. Ferrer J.R., López Pellicer M. y Sánchez Ruiz L.M.: *Some $\mathcal{L}$-barrelled subspaces in Banach spaces*. Math. Japonica 40 (1) (1994) 93-97.
157. Figiel T.: *Further counterexamples to the approximation problem*. Ohio State University (1973).
158. Figiel T y Johnson W.B.: *The approximation property does not imply the bounded approximation property*. Proc. Amer. Math. Soc. 41 (1973) 197-200.
159. Figiel T. y Pisier G.: *Séries aléatoires dans les spaces uniformément convexes ou uniformément lisses*. C. R. Acad. Sci. Paris 279 (1974) 611-614.
160. Florencio M. y Paúl P.J.: *Barrelledness conditions on certain vector valued sequence spaces*. Arch. Math. 48 (1987) 153-164.
161. Foias C.: *Sur cetains théorèmes de J. von Neumann concernant les ensembles spectraux*. Acta Sci. Math. (Szeged) 18 (1957) 15-20.
162. Freniche F.J.: *Barrelledness conditions of the space of vector valued and simple functions*. Math. Ann 267 (1984) 479-489.

163. Freniche F.J.: *The Vitali-Hahn-Saks theorem fro Boolean algebras with the subsequential interpolation property*. Proc. Amer. Math. Soc. 92 (1984) 362-366.
164. Galindo P., García D. y Maestre M.: *The coincidence of τ_0 and τ_ω for spaces of holomorphic functions on some Fréchet-Montel spaces*. Proc. Royal Irish Acad. 91A (1991) 137-143.
165. Galindo P.: García D. y Maestre M.: *Holomorphic mappings of bounded type*. Jour. Math. Anal. Appl. 66 (1) (1992) 236-246.
166. Galindo P., García D. y Maestre M.: *Holomorphic mappings of bounded type on DF-spaces*. Progress in Functional Analysis. Ed. K.D. Biersted, J. Bonet, J. Horvath y M. Maestre. North Holland Math. Studies 170 (1992) 135-148.
167. García Falset J., Jiménez Melado A. y Llorens Fuster E.: *Measures of non compactness and normal structure in Banach spaces*. Studia Math. 110 (1994) 1-8.
168. García Falset J. y Llorens Fuster E.: *Normal structure and fixed point property*. Glasgow Math. J. 38 (1996) 29-37.
169. García Falset J., Jiménez Melado A. y Llorens Fuster E.: *Isomorphically expansive mappings in* l_2. Proc. Amer. Math. Soc. 125(9) (1997) 2633-2636.
170. García-Frías J.: *La batimetría y sus problemas*. Discurso de recepción en la Real Academia de Ciencias de Madrid (1967) 5-33.
171. Gaposhkin V.F.: *On the existence of unconditional bases in Orlicz spaces*. Functional Anal. i Prilozen. 1 (1967) 26-32.
172. Gassó M.T.: *Algebras with the local interpolation property*. Rocky J. Math. 22 (1992) 181-196.
173. Giron F.J.: *Conceptos y técnicas de la estadística bayesiana: comentarios sobre su estado actual*. Discurso de recepción en la Real Academia de Ciencias de Madrid (1983) 7-42.
174. Godefroy G., Montesinos V. y Zizler V.: *Strong subdifferentiability of norms and geometry of Banach spaces*. Comment. Math. Univ. Carolinae 36(3) (1985), 493-502.
175. Gödel K.: *Obras completas*. Alianza Editorial (Madrid).
176. Graves W.H. y Weeler R.F.: *The Grothendieck and Nikodym properties*. Rocky J. Math. 13 (1983) 333-353.
177. Gromov M.L.: *On a geometric conjeture of Banach*. Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 31 (1967) 1105-1114.
178. Grothendieck A.: *Sur les applications lineaires faiblement compactes d'espaces du type C(K)*. Canad. J. Math. 5 (1953) 129-173.
179. Grothendieck A.: *Sur les espaces (F) et (LF)*. Summa Brasil Math. 3 (1954) 57-123.

180. Grothendieck A.: *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*. Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1955).
181. Grothendieck A.: *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques.* Bull. Soc. Math. Sao Paulo 8 (1956) 1-79.
182. Hilbert D.: *Gesammelte Abhanlungen*, 3 volúmenes, Springer (1932-1935) (reimpresión Chelsea, 1965).
183. Horváth J.: *Topological vector spaces and distributions I.* Addison-Wesley 1966.
184. Hueso J.L. y Motos J.: *On spaces of vector valued continuous functions*. Bull. Soc. R. Sc. Liège, 54 (4-5) /1985) 271-275.
185. Huff R.: *Remarks on Pettis integrability*. Proc. Amer. Math. Soc. 96 (1986) 402-404.
186. James R.C.: *Bases and reflexivity of Banach spaces*. Ann. of Math. 52 (1950) 518-527.
187. James R.C.: *Separable conjugate spaces.* Pacific J. Math. 10 (1960) 563-571.
188. James R.C.: *Characterisations of reflexivity*. Studia Math. 23 (1964) 205-216.
189. James R.C.: *Weakly compact sets*. Trans. Amer. Math. Soc. 17 (1964) 129-140.
190. James R.C.: *Weak compactness and reflexivity*. Israel J. Math. 2 (1964) 101-119.
191. James R.C.: *Reflexivity and the sup of linear functionnals*. Israel J. Math. 13 (1972) 289-300.
192. Janicka L. y Kalton N.J.: *Vector measures of infinite variation*. Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 25 (1977) 239-241.
193. Jarchow H.: *Locally convex spaces*. B.G. Teubner Stuttgart 1981.
194. Jiménez P.: *Origen y evolución de la integración vectorial*. Discurso de recepción en la Real Academia de Ciencias de Madrid (1991) 5-59.
195. Jiménez P y Rodríguez-Salinas B.: *Espacios de Radon de tipo (H)*. Rev. Real Acad. Cien. Madrid 69 (1975) 761-774.
196. Jiménez P y Rodríguez-Salinas B.: *Medidas de Radon de tipo (H) en espacios topológicos arbitrarios*. Mem. Real Acad. Cien. Madrid X (1979) 1-190
197. Jiménez P y Rodríguez-Salinas B.: *Teorema de Fubini en espacios topológicos arbitrarios*. Rev. Real Acad. Cien. Madrid 76 (1982) 503-518.
198. Jiménez P y Rodríguez-Salinas B.: *Strictly localizable measures*. Nagoya Math. (1982) 81-86.
199. Jiménez P y Rodríguez-Salinas B.: *A general solution of the Monge-Kantorovich mass-transfer* problem. J. Math. Anal. Appl. 202 (1996) 492-510.

200. Johnson W.B. y Rosenthal H.P.: *On w^*-basic sequences and their applications to the study of Banach spaces.*Studia Math. 43 (1972) 77-92.
201. Johnson W.B. Rosenthal H.P. y Zippin M.: *On bases finite dimensional decompositions and weaker structures in Banach spaces.* J. Math. 9 (1971) 488-506.
202. Jordan P. y von Neumann J.: *On inner products in linear metric spaces.* Ann. of Math. 36 (1935) 719-723.
203. Kakol J.: *Topological linear spaces with some Baire-like properties.* Functiones et Approx. 13 (1982) 109-116.
204. Kakol J.: *Unordered Baire-like spaces without local convexity.* Collect. Math. 43 (1992) 43-53.
205. Kakol J. y Roelcke W.: *Topological vector spaces with some Baire-type properties.* Note di Mat. 12 (1992) 77-92.
206. Kakol J. y Roelcke W.: *On the barrelledness of l_p-direct sums of seminormed spaces for* $1 \leq p \leq \infty$. Arch. Math. 62 (1994) 331-334.
207. Kakol J., Sliwa W. Y Wójtowicz M.: *CS-barrelled spaces.* Preprint.
208. Kakutani S.: *Some characterizations of Euclidean spaces.* Japan J. Math. 16 (1939) 93-97.
209. K$\bar{o}$mura Y.: *On linear topological spaces.* Kumamoto J. Sci. 5 (seies A, number 3) (1963) 148-157.
210. Köthe G.: *Topological vector spaces I.* Springer-Verlag 1969.
211. Köthe G.: *Topological vector spaces II.* Springer-Verlag 1979.
212. Künzi H.P.A. y Romaguera S.: *Some remarks on Doitchinov completeness.* Topology Appl. 74 (1996) 61-72.
213. Künzi H.P.A. y Romaguera S.: *Spaces of continuous functions and quasi-uniform convergence.* Acta Math. Hungar. 76 (1997) 287-298.
214. Kwapien S.: *Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector valued coefficients.* Studia Math. 44 (1972) 583-595.
215. Kwapien S.: *On Enflo's example of a Banach space without the approximation property.* Séminaire Goulaonic-Schwartz 1972-1973, Ecole Polytechnique, Paris.
216. Kunzinger M.: *Barrelledness, Baire-like and (LF)-spaces.* Pitman Research Notes in Math. Series 298. Longman 1993.
217. Labuda I.: *Exhaustive measures in arbitrary topological vector spaces.* Studia Math. 58 (1976) 239-248.
218. Lacey E.: *Separable quotients of Banach spaces.* An. Acad. Brasil. Cienc. 44 (1972) 185-189.
219. Levin M. y Saxon S.A.: *A note in the inheritance of properties of locally convex spaces by subspaces of countable codimension.* Proc. Amer. Math. Soc. 29 (1) (1971) 97-102.

220. Lindenstrauss J.: *Extension of compact operators*. Mem. Amer. Math. Soc. 48 (1964) 1-112.
221. Lindenstrauss J.: *On James's paper "Separable conjugate spaces"*. Israel J. Math. 9 (1971) 279-284.
222. Lindenstrauss J y Pelczynski A.: *Absolutely summing operators in L_p spaces and their applications*. Studia Math. 29 (1968) 275-326.
223. Lindenstrauss J. y Rosenthal H.P.: *The L_p spaces*. Israel J. Math. 7 (1969) 325-349.
224. Lindenstrauss J. y Tzafriri L.: *On complemented subspaces problem*. Israel J. Math. 9 (1971) 262-269.
225. Liñán A.: *El papel de la mecánica de fluidos en los procesos de combustión*. Discurso de recepción en la Real Academia de Ciencias de Madrid (1991) 5-127.
226. Llorens J.L., Serra V. y Tarazona E.: *La completa regularidad de un espacio topológico no es una propiedad local*. Rev. Real Acad. Cienc. Madrid 75 (3) (1981) 689-692.
227. López Molina J.A. y Rivera M.J.: *Distinguished α_{pq}-tensor products of Fréchet spaces*. Rend. Circ. Mat. Palermo 33 (1993) 363-374.
228. López Molina J.A. y Rivera M.J.: *Bounded, compact and Montel maps on projective tensor products of Köthe spaces*. Bull. Polish Acad. Sci. 44(4) (1996) 411-426.
229. López Pellicer M.: *Webs and bounded finitely additive measures*. J. Math. Anal. Appl. 210 (1997), 257-267.
230. López-Fernández Asenjo F., Pérez-Cacho García S. y Pérez Gómez A.:*Completizado de un espacio de sucesiones recurrentes*. Rev. Real Acad. Cienc. Madrid 77 (1) (1983) 97-106.
231. Maravall D.: *La economía y la sociología como motores de la investigación matemática*. Discurso de recepción en la Real Academia de Ciencias de Madrid (1968) 5-56.
232. Marcinkiewicz J.: *Quelques théorêmes sur les séries orthogonales*. Ann. Soc. Polon. Math. 16 (1937) 84-96.
233. Marín J. y Romaguera S.: *Bicompleting the left quasi-uniformity of a paratopological group*. Aceptado en Arch. Math.
234. Marquina A. y Sanz Serna J.M.: *Barrelledness conditions on $C_0(E)$*. Arch. Math. 31 (1978) 589-596.
235. Mas J.: *On a general open mapping theorem by M. Valdivia*. Acta Math. Hungarica 53 (1-2) (1989) 91-93.
236. Mas J. y Sánchez Ruiz L.M.: *On L-(DF) spaces*. Bull. Soc. Math. Belg. 43 (B) (1) (1991) 31-36.
237. McArthur C.W.: *On a theorem of Orlicz and Pettis*. Pacific J. Math. 22 (1967) 297-302.

238. Mendoza J.: *Barrelledness conditions on* $S(\Sigma, E)$ *and* $B(\Sigma, E)$. Math. Ann. 261 (1982) 11-22.
239. Mendoza J.: *A barrelledness criterion for* $c_0(E)$. Arch. Math. 40 (1983) 156-158.
240. Michael E. y Pelczynski A.: *A linear extension theorem*. Illinois J. Math. 11 (1967) 563-579.
241. Millán G.: *Problemas matemáticos de la mecánica de fluidos. Estructura de las ondas de choque y combustión*. Discurso de recepción en la Real Academia de Ciencias de Madrid (1983) 9-642.
242. Moltó A.: *On the Vitali-Hahn-Saks theorem*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh 90a (1981) 163-173.
243. Moltó A.: *On uniform boundedness properties in exhausting additive set function spaces*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh 90a (1981) 175-184.
244. Moltó A., Montesinos V. y Troyansky S.L.: *On quasi-denting points, denting faces and geometry of the unit ball of* $d(\Omega, 1)$. Arch. Math. 63 (5) (1994) 45-55.
245. Moltó A., Montesinos V., Orihuela J. y Zizler V.: *Strong subdifferentiability of norms and geometry of Banach spaces*. Aceptado en Comment. Math. Univ. Carolinae.
246. Montesinos J.M.: *Nudos, cristales y números: Aspectos de la topología de baja dimensión*. Discurso de recepción en la Real Academia de Ciencias de Madrid (1990) 7-34.
247. Montesinos V.: *Some results on non-semireflexive spaces*. Manuscripta Math. 22 (1977) 165-170.
248. Montesinos V.: *Sobre espacios no semireflexivos*. Actas V Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas (1978).
249. Montesinos V.: *Compacidad en espacios de sucesiones*. Rev. Real Acad. Cien. Madrid 72 (1978) 459-465.
250. Montesinos V.: *Teoremas tipo Smulian en espacios localmente convexos*. Rev. Real Acad. Cien. Madrid 72 (4) (1978) 599-604.
251. Montesinos V.: *Una nota sobre el teorema de Krein*. Rev. Real Acad. Cien. Madrid 76 (1) (1982) 73-77.
252. Montesinos V.: *Un lema en compacidad débil*. Actas IX Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas (1982) 339-342.
253. Montesinos V.: *Solution to a problem of S. Rolewicz*. Studia Math. 82 (1985) 65-69.
254. Montesinos V.: *Drop property equals reflexivitiy*. Studia Math. 87 (1987) 93-100.
255. Monteisnos V.: *A note on drop property of unbounded sets*. Arch. Math. 56 (1991) 606-608).
256. Montesinos V. y Torregrosa J.R.: *A uniform geometric property for Banach spaces*. Rocky J. Math. 22 (2) (1992) 683-690.

257. Montesinos V. y Torregrosa J.R.: *Rotund and uniformly rotund Banach spaces*. Collect. Math. 42 (2) (1991) 43-52.
258. Montesinos V. y Torregrosa J.R.: *Some properties which generalize uniform rotundity of Banach spaces*. Arch. Math. 59 (1992) 457-467.
259. Montesinos V.: *A note on weakly continuous Banach space valued functions*. Quaestiones Math. 15 (1992) 501-503.
260. Motos J.: *On linear embedding of $C(X,E)$ into $(C(I,E))^N$*. Bull. Polish Ac. Sc. Math. 37 (7-12) (1989) 391-396.
261. Motos J. y Planells M.J.: *Sobre los espacios de Hörmander vectoriales $B_{p,w}(E)$*. Collect. Math. 39 (1988) 263-286.
262. Motos J. y Pérez-Esteva S.: *On vector-valued Hardy spaces*. Math. Japonica 44 (3) (1996) 555-563.
263. Narayanaswami P.P. and Saxon S.A.: *(LF)-spaces, quasi-Baire spaces and the strongest locally convex topology*. Math. Ann. 274 (1986) 627-641.
264. von Neumann J.: *Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes*. Math. Nach. 4 (1951) 258-281.
265. Noll D. y Stadler W.: *Abstract sliding hump technique and characterization of barrelled spaces*. Studia Math. 94 (1989) 103-120.
266. Olevskii A.M.: *Fourier series and Lebesgue functions*. Summary of a lecture to the Moscow Math. Soc. Uspehi Mat. Nauk 22 (1967) 236-239.
267. Orihuela J., Schachermayer W. y Valdivia M.: *Every Radon-Nikodym Corson compact space is Eberlein compact*. Studia Math. 98 (2) (1991) 157-174.
268. Orihuela J. y Valdivia M.: *Projective generators and resolutions of identity in Banach spaces*. Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid 2, número suplementario (1989) 179-199.
269. Ovsepian R.I. y Pelczynski A.: *The existence in every separable Banach space of a fundamental total and bounded biorthogonal sequence and related constructions of uniformly bounded orthonormal systems in L^2*. Studia Math. 54 (1975) 149-159.
270. Paley R. E. A. C.: *A remarkable series of orthogonal functions I*. Proc. London Math. Soc. 34 (1932) 247-268.
271. Pelczynski A: *All separable Banach spaces admit for every $\varepsilon > 0$ fundamental total biorthogonal system bounded by $1+\varepsilon$*. Studia Math. 55 (1976) 295-304.
272. Pelczynski A. y Rosenthal H.P.: *Localization techniques in L^p spaces*. Studia Math. 52 (1975) 263-289.
273. Pérez Carreras P. y Bonet J.: *Remarks and examples concerning suprabarrelled and totally barrelled spaces*. Arch. Math. 34 (1982) 340-347.

274. Pérez Carreras P. y Bonet J.:*Barrelled locally convex spaces*. Math. Studies 131. North-Holland 1987.
275. Peris A.: *Topological tensor products of a Fréchet-Schwartz space and a Banach space*. Studia Math. 106 (2) (1993) 189-196.
276. Peris A.: *Quasinormable spaces and the problem of topologies of Grothendieck*. Ann. Acad. Scientiarum Fennicae, series A.I. Mathematica, 19 (1994) 167-203.
277. Peris A.: *Fréchet Schwartz spaces and approximation properties*. Math. Ann. 300 (1994) 739-744.
278. Pettis B.J.: *On integration in vector spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. 44 (1938) 277-304.
279. Pietsch A.: *Nuclear locally convex spaces*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 66. Springer 1972.
280. Pitt H.R.: *A Note on bilinear forms*. J. London Math. Soc. 11 (1936) 171-174.
281. Popoola J.O. y Tweddle I.: *On the dimension of a complete metrizable topological vector space*. Canad. Math. Bull. 20 (1977) 271-272.
282. Pták V.: *Completness and the open mapping theorem*. Bull. Soc. Math. France 86 (1958) 41-74.
283. Raikov D.A.: *Double closed-graph theorem for topological linear spaces*. Siberian Math. J. 7 (2) (1966) 287-300.
284. Reid C.: *Hilbert*. Springer-Verlag (1970; 1983 cuarta edición).
285. Ríos S.: *Procesos de decisión*. Discurso de recepción en la Real Academia de Ciencias de Madrid (1961) 5-29.
286. Robertson A.P. y Robertson W.J.: *Topological vector spaces*. Cambridge University Press 1973.
287. Robertson W.J.: *Completions of topological vector spaces*. Proc. London Math. Soc. 8 (1958) 242-257.
288. Robertson W.J.: *On properly separable quotients of strict (LF) spaces*. J. Austral. Math. Soc. (Series A) 47 (1989) 307-312.
289. Robertson W.J., Saxon S.A. y Robertson A.P.: *Barrelled spaces and dense vector subspaces*. Bull. Austral. Math. Soc. 37 (1988) 383-388.
290. Robertson W.J., Tweddle I. and Yeomans F.E.: *On the stability of barrelled topologies III*. Bull. Austral. Math. Soc. 22 (1990) 99-112.
291. Rodríguez-Salinas B.: *Sobre la teoría de la medida*. Rev. Real Acad. Cien. Madrid 42 (1948) 465-491.
292. Rodríguez-Salinas B.: *Generalización sobre módulos del teorema de Hahn-Banach y sus aplicaciones*. Collect. Math. 14 (1962) 105-151.
293. Rodríguez-Salinas B.: *Sobre la prolongación de funciones lineales*. Collect. Math. 16 (1964) 67-78.

294. Rodríguez-Salinas B.: *Sobre la teoría de la medida y sus fundamentos*. Discurso de recepción en la Academia de Ciencias de Zaragoza (2 de Mayo de 1965).
295. Rodríguez-Salinas B.: *Sur la décomposition d'ensembles en paties respectivement équivalents. Quantité et measure*. C. R. de la III^e Réunion du Groupement des Mathématiciens d'Expression Latine, Namur, (20-23 septembre 1965) 139-152. Centre Belge de Recherches Mathématiques, Librairie Universitaire, Louvain (1966).
296. Rodríguez-Salinas B.: *Construcción de medidas de Borel sobre los espacios regulares*. Actas Quinta reunión Anual de Matemáticos Españoles, Madrid (1966) 34-41.
297. Rodríguez-Salinas B.: *Sobre las medidas invariantes en un grupo topológico*. Collect. Math. 18 (1966-67) 207-223.
298. Rodríguez-Salinas B.: *El problema de la media I. Extensión de medidas en semigrupos*. Rev. Mat. Hispano-Americana 30 (4) (1970) 141-171.
299. Rodríguez-Salinas B.: *El problema de la media II. Funciones aditivas sobre un semigrupo ordenado*. Rev. Mat. Hispano-Americana 30 (1970) 219-250.
300. Rodríguez-Salinas B.: *El problema de la media III. Teoría de la medida exterior en un semigrupo de Lebesgue*. Rev. Mat. Hispano-Americana 31 (1971) 46-85.
301. Rodríguez-Salinas B.: *El problema de la media IV. Extensión de funciones biaditivas*. Rev. Mat. Hispano-Americana 31 (1971) 46-85.
302. Rodríguez-Salinas B.: *El problema de la media V. Extensión de A-homomorfismos*. Rev. Mat. Hispano-Americana 31 (1971) 160-180.
303. Rodríguez-Salinas B.: *El problema de la media VI. Módulos normados inyectivos*. Rev. Mat. Hispano-Americana 31 (1971) 223-238.
304. Rodríguez-Salinas B.: *El problema de la media VII. Medidas invariantes sobre A-módulos normados inyectivos*. Rev. Mat. Hispano-Americana 31 (1971) 253-306.
305. Rodríguez-Salinas B.: *Algunos problemas y teoremas de extensión de aplicaciones lineales continuas*. Rev. Real Acad. Cien. Madrid 65 (1971) 677-704.
306. Rodríguez-Salinas B.: *Teoría de la medida sobre los espacios topológicos no localmente compactos*. Rev. Mat. Hispano-Americana 33 (4) (1973) 677-704.
307. Rodríguez-Salinas B.: *A theorem of Hahn-Banach type for arbitrary vector spaces*. Boll. Un. Mat. Ital. 10 (4) (1974) 390-393.
308. Rodríguez-Salinas B.: *Medidas en espacios topológicos*. Discurso de recepción en la Real Academia de Ciencias de Madrid (19 de mayo 1976) 7-34.

309. Rodríguez-Salinas B.: *μ-espacios de Suslin y Lusin. Propiedad del "lifting" fuerte*. Rev. Real Acad. Cien. Madrid 72 (1978) 541-557.

310. Rodríguez-Salinas B.: *Medidas de Radon de tipo (H) y medidas con "lifting"*. Rev. Real Acad. Cien. Madrid 72 (1978) 605-610.

311. Rodríguez-Salinas B.: *Semi-μ-espacios de Suslin y Lusin. Propiedad del "lifting" fuerte*. Rev. Real Acad. Cien. Madrid 73 (1979) 33-40.

312. Rodríguez-Salinas B.: *Integración de funciones con valores en un espacio localmente convexo*. Rev. Real Acad. Cien. Madrid 73 (1979) 361-387.

313. Rodríguez-Salinas B.: *El teorema de Radon-Nikodym para las medidas con valores en un espacio localmente convexo*. Rev. Real Acad. Cien. Madrid 74 (1980) 41-64.

314. Rodríguez-Salinas B.: *La propiedad de Radon-Nikodym, σ-dentabilidad y martingalas en espacios localmente convexos*. Rev. Real Acad. Cien. Madrid 74 (1980) 65-89.

315. Rodríguez-Salinas B.: *Sobre el teorema de Dieudonné-Grothendieck*. Rev. Real Acad. Cien. Madrid 74 (1980) 169-171.

316. Rodríguez-Salinas B.: *Sobre el teorema de la gráfica cerrada. Aplicaciones lineales subcontinuas*. Rev. Real Acad. Cien. Madrid 74 (1980) 811-825.

317. Rodríguez-Salinas B.: *Sobre la clase del espacio tonelado $l_0^\infty(\Sigma)$*. Rev. R. Acad. Cien. Madrid 74 (5) (1980) 827-829.

318. Rodríguez-Salinas B.: *Sobre el teorema de la aplicación abiera. Teorema de Seever*. Rev. Real Acad. Cien. Madrid 75 (1981) 33-37.

319. Rodríguez-Salinas B.: *Sobre el teorema de la gráfica cerrada. Teorema de Banach-Schauder*. Rev. Real Acad. Cien. Madrid 75 (1981) 39-46.

320. Rodríguez-Salinas B.: *Sobre una extensión de la teoría de De Wilde*. Rev. Real Acad. Cien. Madrid 75 (1981) 579-587.

321. Rodríguez-Salinas B.: *La propiedad de Radon-Nikodym, σ-dentabilidad y martingalas en espacios localmente convexos II*. Rev. Real Acad. Cien. Madrid 78 (1984) 59-64.

322. Rodríguez-Salinas B.: *Sobre el dual de un espacio localmente convexo con la propiedad de Radon-Nikodym*. Rev. Real Acad. Cien. Madrid 78 (1984) 77-83

323. Rodríguez-Salinas B.: *La propiedad de Radon-Nikodym del dual fuerte de un espacio infratonelado*. Rev. Real Acad. Cien. Madrid 78 (1984) 471-475.

324. Rodríguez-Salinas B.: *La propiedad de Radon-Nikodym del dual de un espacio localmente convexo*. Rev. Real Acad. Cien. Madrid 78 (1984) 476-484

325. Rodríguez-Salinas B.: *La propiedad de Dieudonné y la propiedad V de Pelczynski sobre espacios $C(\Omega,E)$*. Rev. Real Acad. Cien. Madrid 79 (1985) 33-38.

326. Rodríguez-Salinas B. Y Hernández F.L.: *On l^p-complemented copies in Orlicz spaces*. Israel J. Math. 62 (1988) 37-55.

327. Rodríguez-Salinas y Jiménez P.: *On the completeness of L^α for locally convex spaces*. Arch. Math. 52 (1989) 82-91.

328. Rodríguez-Salinas B. y Hernández F.L.: *On l^p-complemented copies in Orlicz spaces II*. Israel J. Math. 68 (1989) 27-55.

329. Rodríguez-Salinas B. y de María J.L.: *Structure of measures on topological spaces*. Rev. Mat. Univ. Complt. Madrid 2 (n° suplementario) (1989) 129-136.

330. Rodríguez-Salinas B.: *On the variation of an indefinite integral in Banach spaces*. Ann. Soc. Math. Polon. Ser. I Comment. Math. Prace Mat. 30 (1990) 167-170.

331. Rodríguez-Salinas B.: *Quasi-Radon measures and Radon measures of type (H)*. Rend. Circ. Mat. Palermo 40(2) (1991) 142-152.

332. Rodríguez-Salinas B. y de María J.L.: *The space $(l_\infty / c_0, weak)$ is not a Randon space*. Proc. Amer. Math. Soc. 112 (1991) 1095-1100.

333. Rodríguez-Salinas B.: *On the structure of a vector measure*. Rev. Real Acad. Cien. Madrid 84 (1990) 409-414.

334. Rodríguez-Salinas B y Hernández F.L.: *Orlicz spaces containing singular l^p-complemented copies*. Function spaces 15-22. Teubner Texte zur Mathematik, Bd 120. Teubner, Leipzig (1991).

335. Rodríguez-Salinas B y Hernández F.L.: *Remarks on the Orlicz function spaces $L^\varphi(0,\infty)$*. Math. Nachr. 156 (1992) 225-232.

336. Rodríguez-Salinas B.: *Strictly localizable measures*. Rend. Circ. Mat. Palermo 41 (2) (1992) 225-232.

337. Rodríguez-Salinas B. y de María J.L.: *On measures on $\sigma-$metrizable spaces*. Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 41 (1993) 131-147.

338. Rodríguez-Salinas B. y de María J.L.: *Banach spaces which are Radon spaces with the weak topology*. Bull. London Math. Soc. 25 (1993) 577-581.

339. Rodríguez-Salinas B.: *On the complemented subspaces of $c_0(I)$ and $l_p(I)$ for $1<p<\infty$*. Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 42 (1994) 339-402.

340. Rodríguez-Salinas B.: *On the uniqueness of non-locally finite invariant measures on a topological group*. J. Math. Anal. Appl. 188 (1994) 387-397.

341. Rodríguez-Salinas B. y Hernández F.L.: *Lattice-embedding L^p into Orlicz spaces*. Israel J. Math. 90 (1995) 167-188.

342. Rodríguez-Salinas B. y de María J.L.: *Weakly θ-refinable spaces and τ-additive measures*. Mathematical Contributions. Libro homenaje al Profesor José Javier Etayo Miqueo (1995) 203-207.
343. Rodríguez-Salinas B.: *On superbarrelled spaces. Closed graph theorems*. Rev. Real Acad. Cien. Madrid 84 (1 y 2) (1995) 7-10.
344. Rodríguez-Salinas B.: *Teoría de la medida en espacios métricos y topológicos*. Publicaciones del Departamento de Análisis Matemático, Sección 1, n° 29. Universidad Complutense, Madrid (1996) 1-243.
345. Rodríguez-Salinas B. y Jiménez P.: *A general solution of the Monge-Kantorovich mass-transfer problem*. J. Math. Anal. Appl. 202 (1996) 492-510.
346. Rodríguez-Salinas B.: *David* Hilbert, capítulo de *Historia de la Matemática del siglo XX*. Real Acad. Cienc. Madrid. Serie Historia de la Ciencia (1998), 283-299.
347. Roelcke W. y Dierolf S.: *On the three-space-problem for topological vector spaces*.Collect. Mat. 32(1) (1981) 3-25.
348. Romaguera S.: *On equinormal quasi-metrics*. Proc. Edinburgh Math. Soc. 37 (1989) 193-196.
349. Romaguera S.: *Left K-completeness in quasi-metric spaces*. Math. Machr. 157 (1992) 15-23.
350. Romaguera S.: *On hereditary precompactness and completeness in quasi-uniform spaces*. Acta Math. Hungar. 73 (1996) 159-178.
351. Romaguera S. y Salbany S.: *On bicomplete quasi-pseudometrizability*. Topology Appl. 50 (1993) 283-289.
352. Romaguera S. y Schellekens M.: *Quasi-metric properties of complexity spaces*. Aceptado en Topology Appl.
353. Rosenthal H.P.: *Quasicomplemented subspaces of Banach spaces*. J. Funct. Anal. 4 (1969) 176-214.
354. Rosenthal H.P.:*On relatively disjoint families of measures, with some applications to Banach space theory*. Studia Math. 37 (1970) 13-36.
355. Rosenthal H.P.: *A characterization of Banach spaces containing l^1*. Proc. Nat. Acad. Sci.(USA) 71, 2411-2413.
356. Rowe D.: *Hilbert and the Göttingen mathematical tradition*. Osiris (1989) 5-186.
357. Russell B.: *Los principios de la matemática*. Espasa Calpe (1967. Primera edición 1903 en Cambridge).
358. Ruess W.: *Generalized inductive limit topologies and berrelledness properties*. Pacific J. Math. 63(2) (1976) 499-516.
359. Sánchez Ruiz L.M.: *Some examples on L-barrelled spaces*. Bull. Soc. Math. Belg. 43 Ser. B (1991) 211-215.

360. Sánchez Ruiz L.M.: *On the Banach-Steinhaus theorem between topological vector spaces and locally convex spaces*. Math. Japonica 36 (1991) 143-145.
361. Sánchez Ruiz L.M.: *On the closed graph theorem between topological vector spaces and Fréchet spaces*. Math. Japonica 36 (1991) 271-275.
362. Sánchez Ruiz L.M.: *Two maximal classes of topological vector spaces*. Math. Japonica 36 (1991) 643-646.
363. Sánchez Ruiz L.M.: *On completness and the closed graph theorem*. Math. Japonica 36 (1991) 891-894.
364. Sánchez Ruiz L.M.: *The closed graph theorem for locally bounded linear mappings between topological vector spaces and Fréchet spaces*. Math. Japonica 37 (1992) 877-881.
365. Sánchez Ruiz L.M.: *A countable number of $\mathcal{L}$-barrelled spaces*. Bull. Soc. Math. Belg. 45 Ser. B, 1, (1993) 59-67.
366. Saxon S.A.: *Nuclear and product spaces, Baire-like spaces and the strongest locally convex topology*. Math. Ann. 197 (1972) 87-106.
367. Saxon S.A.: *Two characterizations of linear Baire spaces*. Proc. Amer. Math. Soc. 45, n° 2 (1974) 204-208.
368. Saxon S.A.: *Some normed barrelled spaces which are not Baire*. Math. Ann. 209 (1974) 153-160.
369. Saxon S.A.: *Non-Baire hyperplanes in non-separable Baire spaces*. J. Math. Anal. Appl. 168, n° 2 (1992) 460-468.
370. Saxon S.A.: *The codensity character of topological vector spaces*. Topological vector spaces, Algebras & Related Areas. Pitman Research in Math. Series 316. Longman (1994) 24-36.
371. Saxon S.A. y Levin M.: *Every countable-codimensional subspace of a barrelled space is barrelled*. Proc. Amer. Math. Soc. 29 (1971) 91-96.
372. Saxon S.A. y Narayanaswami P.P.: *Metrizable (LF)-spaces, (db)-spaces and the separable quotient problem*. Bull. Austral. Math. Soc. 23 (1981) 65-80.
373. Saxon S.A. y Narayanaswami P.P.: *Metrizable (normable) (LF)-spaces and two classical problems in Fréchet (Banach) spaces*. Studia Math. 93 (1989) 1-16.
374. Saxon S.A. y Sánchez Ruiz L.M.: *Optimal cardinals for metrizable barrelled spaces*. J. London Math. Soc. 51 (1995) 137-147.
375. Saxon S.A. y Sánchez Ruiz L.M.: *Barrelled countable enlargements and the bounding cardinal*. J. London Math. Soc. 53 (1996) 158-166.
376. Saxon S.A. y Sánchez Ruiz L.M.: *Barrelled countable enlargements and the dominating cardinal*. J. Math. Anal. Appl. 203 (1966) 677-685.

377. Saxon S.A. y Sánchez Ruiz L.M.: *Quasidistinguished countable enlargements of normed spaces*. Glasgow Math. J. 38 (1996) 65-68.
378. Saxon S.A. y Sánchez Ruiz L.M.: *Dual local completeness*. Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997) 1063-1070.
379. Saxon S.A. y Sánchez Ruiz L.M.: *Mackey weak barrelledness*. Aceptado en Proc. Amer. Math. Soc.
380. Saxon S.A. y Tweddle I: *The fit and flat components of barrelled spaces*. Bull. Austral. Math. Soc. 51 (1995) 521-528.
381. Saxon S.A. y Wilansky A.: *The equivalence of some Banach spaces*. Colloq. Math. 37 (1977) 217-226.
382. Schachermayer W.: *On some classical measure-theoretic theorems for non σ-complete Boolean algebras*. Dissertations Math. Rozprawy Mat. 214 (1982) 1-36.
383. Schaefer H.H.: *Topological vector spaces*. Springer-Verlag 1986.
384. Schmets J.: *Spaces of vector-valued continuous functions*. Lect. Notes in Math. 1003. Springer-Verlag 1983.
385. Schappacher N.: *Questions politiques dans la vie des mathématiques en Allemagne (1918-1935)*. Libro: *La science sous le troisième Reich* (dirigido por Josiane Olff-Nathan), Seuil (1993), página 51.
386. Schwartz L.: *Sur le théorème du graphe fermé*. C. R. Acad. Sci. Paris 263 (1966) 602-605.
387. Seever G.L.: *Measures on F-spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. 133 (1968) 267-280.
388. Semadeni Z.: *Banach spaces of continuous functions I*. Polish Scientific Publishers, Warszawa 1971.
389. Sikorski R.: *Boolean Algebras*. Springer 1964.
390. Sinaceur H.: *Corps et modèles. Essai sur l'histoire de làlgèbre réelle*. Vrin (1991).
391. Sinaceur H.: *Du formalism à la constructivité: le finitisme*. Revue international de philosophie (automne, 1993).
392. Slowikowski W.: *Quotient spaces and the open map theorem*. Bull. Amer. Math. Soc. 67 (5) (1961) 498-500.
393. Solovay R.: *A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue-measurable*. Ann. Math. 92 (1970) 1-56.
394. Szankowski A.: *Subspaces without the approximation property*. Israel J. Math. 30 (1978) 123-129.
395. Todd A.R. y Saxon S.: *A property of locally convex Baire spaces*. Math. Ann. 206 (1973) 23-34.
396. Tsirulnikov B.: *On the locally convex noncomplete quasi-distinguished spaces*. Bull. Roy. Sci. Liège 47 (1978) 147-152.
397. Tweddle I.: *Barrelled spaces whose bounded sets have at most countable dimension*. J. London Math. Soc. (2) 29 (1984) 276-282.
398. Tweddle I. y Catalán F.C.X.: *Countable enlargements and weak barrelledness conditions*. Topological vector spaces, Algebras &

Related Areas. Pitman Research in Math. Series 316. Longman (1994) 56-65.

399. Tweddle I., Saxon S.A. y Sánchez Ruiz L.M.: *Barrelled countable enlargements*. Topological vector spaces, Algebras & Related Areas. Pitman Research in Math. Series 316. Longman (1994) 3-15.
400. Tweddle I. y Yeomans F.E.: *On the stability of barrelled topologies II*. Glasgow Math. J. 21 (1980) 91-95.
401. Valdivia M.: *El teorema general de la gráfica cerrada en los espacios vectoriales topológicos localmente convexos*. Rev. R. Acad. Cien. Madrid 72 (3) (1968) 545-551.
402. Valdivia M.: *El teorema general de la gráfica abierta en los espacios vectoriales topológicos localmente convexos*. Rev. R. Acad. Cien. Madrid 72 (3) (1968) 553-562.
403. Valdivia M.: *Aplicaciones lineales fuertemente casi abiertas*. Rev. R. Acad. Cien. Madrid 73 (1) (1969) 33-37.
404. Valdivia M.: *Sobre los conjuntos acotados en los espacios vectoriales topológicos cocientes*. Rev. R. Acad. Cien. Madrid 73 (1) (1969) 39-44.
405. Valdivia M.: *Sobre la completitud en los espacios vectoriales topológicos localmente convexos*. Collect. Math. 20(3) (1969) 257-265.
406. Valdivia M.: *Sobre los conjuntos compactos en los espacios DF*. Collect. Math. 21 (2) (1970) 99-103.
407. Valdivia M.: *Sobre el teorema de la gráfica cerrada*. Collect. Math. 22 (1) (1971) 51-72.
408. Valdivia M.: *A hereditary property in locally convex spaces*. Ann. Inst. Fourier 21(2) (1971) 1-2.
409. Valdivia M.: *On DF-spaces*. Math. Ann. 191 (1971) 38-43.
410. Valdivia M.: *Absolutely convex sets in barrelled spaces*. Ann. Inst. Fourier 21 (1971) 3-13.
411. Valdivia M.: *A class of bornological barrelled spaces which are not ultrabornological*. Math. Ann. 194 (1971) 43-51.
412. Valdivia M.: *On final topologies*. J. reine angew. Math. 251 (1971) 193-199.
413. Valdivia M.: *On non-semireflexive spaces*. Manuscripta Math. 7 (1972) 307-313.
414. Valdivia M.: *On nonbornological barrelled spaces*. Ann. Inst. Fourier 22 (2) (1972) 27-30.
415. Valdivia M.: *Some criteria for weak compactness*. J. reine angew. Math. 255 (1972) 165-169.
416. Valdivia M.: *On bounded set which generate Banach spaces*. Arch. Math. 23 (6) (1972) 640-642.
417. Valdivia M.: *On subspaces of countable codimension of a locally convex space*. J. reine angew. Math. 256 (1972) 185-189.

418. Valdivia M.: *On weak compactness*. Studia Math. 49 (1973) 35-40.
419. Valdivia M.: *A note on locally convex spaces*. Math. Ann. 201 (1973) 145-148.
420. Valdivia M.: *On a class of quasi-barrelled spaces*. Math. Ann. 202 (1973) 295-300.
421. Valdivia M.: *Sobre los espacios vectoriales topológicos de dimensiones finitas*. Collect. Math. 24 (1) (1973) 3-6.
422. Valdivia M.: *Un teorema de immersión en espacios tonelados que no son bornológicos*. Collect. Math. 24 (1) (1973) 7-11.
423. Valdivia M.: *A class of quasi-barrelled (DF)-spaces which are not bornological*. Math. Z. 136 (1974) 249-251.
424. Valdivia M.: *Quotients of complete locally convex spaces*. Manuscripta Math. 14 (1974) 235-240.
425. Valdivia M.: *The space of distributions $D'(\Omega)$ is not B_r-complete*. Math. Ann. 211 (1974) 145-149.
426. Valdivia M.: *Mackey convergence and the closed graph theorem*. Arch. Math. 25 (1974) 649-656.
427. Valdivia M.: *On countable strict limits*. Manuscripta Math. 11 (1974) 339-343.
428. Valdivia M.: *On Mackey spaces*. Duke Math. J. 41 (4) (1974) 835-841.
429. Valdivia M.: *Some characterizations of ultrabornological spaces*. Ann. Inst. Fourier 24 (3) (1974) 57-66.
430. Valdivia M.: *A note on quasi-barrelled spaces*. Arch. Math. 26 (1) (1975) 98-100.
431. Valdivia M.: *On inductive limits of Banach spaces*. Manuscripta Math. 15 (1975) 153-163.
432. Valdivia M.: *A class of precompact sets in Banach spaces*. J. reine angew. Math. 276 (1975) 130-136
433. Valdivia M.: *Some properties in countable inductive limits*. Arch. Math. 26 (1975) 201-208.
434. Valdivia M.: *On quasi-completeness and sequential completeness in locally convex spaces*. J. reine angwe. Math. 276 (1975) 190-199.
435. Valdivia M.: *On countable locally convex direct sums*. Arch. Math. 26 (1975) 407-413.
436. Valdivia M.: *On B_r-completeness*. Ann. Inst. Fourier 25 (2) (1975) 235-248.
437. Valdivia M.: *Algunos resultados sobre completitud en espacios localmente convexos*. Collect. Math. 26 (2) (1975) 97-104.
438. Valdivia M.: *On metrizable locally convex spaces*. Arch. Math. 27 (1) (1976) 79-85.
439. Valdivia M.: *Sucesiones de conjuntos convexos en espacios vectoriales topológicos*. Rev. Mat. Hisp. Amer. 36 (4ª serie números 2 y 3) (1976) 92-99.

440. Valdivia M.: *Nuclearity and Banach spaces*. Proc. Edinburgh Math. Soc. 20 (1977) 205-209.
441. Valdivia M.: *On weakly complete sets in a locally convex space*. Arch. Math. 28(6) (1977) 638-643.
442. Valdivia M.: *Sur certains hyperplans qui ne sont pas ultra-bornologiques*. C. R. Acad. Sc. Paris 284 (A) (1977) 935-937.
443. Valdivia M.: *On a class of Banach spaces*. Studia Math. 60 (1977) 11-13.
444. Valdivia M.: *Some news results on weak compactness*. J. Funct. Anal. 24 (1) (1977) 1-10.
445. Valdivia M.: *On the completion of a bornological space*. Arch. Math. 29 (6) (1977) 607-613.
446. Valdivia M.: *The space $D(\Omega)$ is not B_r-complete*. Ann. Inst. Fourier 27 (4) (1977) 29-43.
447. Valdivia M.: *On the completion of a bornological space*. Arch. Math. 29 (6) (1977) 608-613
448. Valdivia M.: *Sobre una cierta clase de espacios topológicos*. Collect. Math. 28 (1) (1977) 9-20.
449. Valdivia M.: *Recientes aspectos del Análisis Funcional*. Discurso de recepción en la Real Academia de Ciencias de Madrid (1977) 7-39.
450. Valdivia M.: *On the closed graph theorem in topological spaces*. Manuscripta Math. 23 (1978) 173-184.
451. Valdivia M.: *Representaciones de los espacios $D(\Omega)$ y $D'(\Omega)$*. Rev. Real Acad. Cien. Madrid 72 (3) (1978) 386-414.
452. Valdivia M.: *Una representaciones del espacio $D_+(\Omega)$*. Rev. Real Acad. Cien. Madrid 72 (4) (1978) 559-571.
453. Valdivia M.: *On the space $D(\Omega)$*. Arch. Math. 30 (5) (1978) 516-522.
454. Valdivia M.: *Sobre los espacios localmente convexos de Suslin*. Rev. Real Acad. Cien. Madrid 72 (2) (1978) 215-220.
455. Valdivia M.: *Solution of a problem of Grothendieck*. J. reine angew. Math. 305 (1979) 116-121.
456. Valdivia M.: *On certain barrelled normed spaces*. Ann. Inst. Fourier 29 (1979) 39-56.
457. Valdivia M.: *On Baire-hyperplanes spaces*. Proc. Edinburgh Math. Soc. 22 (1979) 247-255.
458. Valdivia M.: *On subseries convergent sequences*. Proc. Edinburgh Math. Soc. 22 (1979) 257-262.
459. Valdivia M.: *Algunos nuevos resultados sobre el teorema de la gráfica cerrada*. Rev. Mat. Hisp. Amer. 39 (4ª serie) (1979) 27-47.
460. Valdivia M.: *Some notes on convex sets*. Manuscripta Math. 26 (1979) 381-386.

461. Valdivia M.: *A characterization of echelon Köthe-Schwartz spaces*. Approx. Th. and Func. Anal. Norht Holland (1979) 409-419.
462. Valdivia M.: *Cocientes de espacios escalonados*. Rev. Real Acad. Cien. Madrid 73(2) (1979) 169-183.
463. Valdivia M.: *Algunas propiedades de los espacios escalonados*. Rev. Real Acad. Cien. Madrid 73(3) (1979) 289-400.
464. Valdivia M.: *Sobre ciertos espacios de funciones continuas*. Rev. Real Acad. Cien. Madrid 73(4) (1979) 485-490.
465. Valdivia M.: *Espacios de medidas de Radon*. Rev. Real Acad. Cien. Madrid 74 (1) (1980) 91-89.
466. Valdivia M.: *A representation of the space D(K)*. J. reine angew. Math. 320. (1980) 97-98.
467. Valdivia M.: *Sobre el espacio $B_o(\Omega)$*. Rev. Real Acad. Cien. Madrid 74 (5) (1980) 835-863
468. Valdivia M.: *Espacios de funciones ultradiferenciables*. Rev. Real Acad. Cien. Madrid 74 (5) (1980) 972-1002.
469. Valdivia M.: *Sobre ciertas clases de conjuntos en espacios localmente convexos*. Collect. Math. 31(3) (1980) 217-228.
470. Valdivia M.: *Convex sets in metrizable spaces*. Arch. Math. 36 (3) (1981) 244-254.
471. Valdivia M.: *A representation of the space O_M*. Math. Z. 177 (1981) 463-478.
472. Valdivia M.: *On suprabarrelled spaces*. Lect. Not. in Math. 843. Func. Anal. Hol. and Approx. Theory. Springer (1981) 572-580.
473. Valdivia M.: *Classes of barrelled spaces related with the closed graph theorem*. Portugaliae Math. 40, 3 (1981) 345-366.
474. Valdivia M. y Pérez Carreras P.: *On totally barrelled spaces*. Math. Z. 178 (1981) 263-269.
475. Valdivia M.: *A representation of the space O_M*. Math. Z. 177 (1981) 463-478.
476. Valdivia M.: *Representaciones de los espacios $C^m(V)$ y $D^m(V)$*. Rev. Real Acad. Cien. Madrid 75(3) (1981) 489-596.
477. Valdivia M.: *Topics in locally convex spaces*. Math. Studies 67. North-Holland 1982.
478. Valdivia M.: *A class of locally convex spaces without C-webs*. Ann. Inst. Fourier 32, 2 (1982) 261-269.
479. Valdivia M.: *Localization theorems in webbed spaces*. Semesterberich Funktionalanalysis. Univ. Tübingen. Somersemester 1982. 49-58.
480. Valdivia M.: *Sobre los espacios LF metrizables*. Collect. Math. 33 (3) (1982) 299-303.
481. Valdivia M.: *On semi-Suslin spaces and dual metric spaces*. Funct. Anal. Holom. And Approx. Theory. North-Holland (1982) 445-459.

482. Valdivia M.: *Subespacios de primera categoría en espacios vectoriales topológicos de Baire*. Collect. Math. 34 (3) (1983) 287-296.
483. Valdivia M.: *B_r-complete spaces which are not B-complete*. Math. Z. 185 (1984) 253-259.
484. Valdivia M.: *A property of Fréchet spaces*. Funct. Anal. Hol. and Appr. Theory II. North-Holland (1984) 469-477.
485. Valdivia M.: *Products of Baire topological vector spaces*. Fund. Math. 125 (1985) 61-80.
486. Valdivia M.: *Una propiedad de los espacios de Banach que no son casirreflexivos*. Collect. Math. 36(3) (1985) 291-299.
487. Valdivia M.: *On Slowikowski, Raíkov and de Wilde closed graph theorems*. Aspects of Mathematics and its Applications. Elsevier Science Publishers (1986) 833-857.
488. Valdivia M.: *Three-space problems and projective tensor products of locally convex spaces*. Proc. R. Ir. Acad. 86A, 2 (1986) 127-141.
489. Valdivia M.: *Quasi-LB-spaces*. J. London Math. Soc.(2) 35 (1987) 149-168.
490. Valdivia M.: *F spaces and strict LF spaces*. Math. Z. 195 (1987) 345-364.
491. Valdivia M.: *Banach spaces X with X^{**} separable*. Israel J. Math. *59(1) (1987) 107-111*.
492. Valdivia M.: *Espacios de Fréchet de generación débilmente compacta*. Collect. Math. 38 (1987) 17-25.
493. Valdivia M.: *Completing sequences and semi-LB*-spaces. Note di Mat. 7 (1987) 55-82.
494. Valdivia M.: *(F)-spaces and stric (LF)-spaces.*Math. Z. 195 (1987) 345-364.
495. Valdivia M.: *Shrinking bases and Banach spaces Z^{**}/Z*. Israel J. Math. *62(3) (1988) 347-354*.
496. Valdivia M.: *Bases y cuasirreflexividad en espacios de Banach*. Rev. Real Acad. Cien. Madrid 82 (1988) 45-53.
497. Valdivia M.: *Resolutions of the identity in certain Banach spaces*. Collect. Math. 39 (1988) 127-140.
498. Valdivia M.: *Some properties of weakly countably determined Banach spaces*. Studia Math. 93 (1989) 137-144.
499. Valdivia M.: *Countable direct sums of Banach spaces*. Math. Nach. 141 (1989) 73-79.
500. Valdivia M.: *A characterization of totally reflexive Fréchet spaces*. Math. Z. 200 (1989) 327-346.
501. Valdivia M.: *Resoluciones proyectivas del operador identidad y bases de Markushevich en ciertos espacios de Banach*. Rev. R. Acad. Cien. Madrid 84 (1) (1990) 23-34.

502. Valdivia M.: *Topological direct sums decompositions of Banach spaces*. Israel J. Math. 71 (3) (1990) 289-308.
503. Valdivia M.: *Resoluciones proyectivas del operador identidad y bases de Markushevich en ciertos espacios de Banach.* Rev. R. Acad. Cien. Madrid 84 (1) (1990) 23-34.
504. Valdivia M.: *On basic sequences in Banach spaces*. Note di Mat. XII (1992) 245-258
505. Valdivia M.: *Fréchet spaces with no subspaces isomorphic to l_1*. Math. Japonica 38 (3) (1993) 397-411.
506. Valdivia M.: *Boundaries of convex sets*. . Rev. R. Acad. Cien. Madrid 87 (2-3) (1993) 177-183.
507. Valdivia M.: *Sobre el teorema de interpolación de Borel en espacios de Hilbert*. Rev. Colombiana de Mat. 27 (1993) 235-247.
508. Valdivia M.: *On certain classes of Markushevich bases*. Arch. Math. 62 (1994) 445-458.
509. Valdivia M.: *Banach spaces of polynomials without copies of l^1*. Proc. Amer. Math. Soc. 123(10) (1995) 3143-3150.
510. Valdivia M.: *On certain linear operators in spaces of ultradifferentiable functions*. Results in Math. 30 (1996) 321-345.
511. Valdivia M.: *On certain analytic function ranged linear operators in spaces of ultradifferentiable functions*. Math. Japonica 44 (3) (1996) 415-434.
512. Valdivia M.: *Fréchet spaces of holomorphic functions without copies of l^1*. Math. Nachr. 181 (1996) 277-287.
513. Valdivia M.: *Some properties of basic sequences in Banach spaces*. Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid 10 (2) (1997) 331-361.
514. Whitehead A.N. y Russell B.: *Principia Mathematica, vol. I* (1910) *vol. II* (1912) *y vol. III* (1913). Cambridge.
515. Wojtaszczyk P.: *Some remarks on the Gurarii space*. Studia Math. 41 (1972) 207-210.
516. Zermelo E.: *Neuer Beweis für Wohlordnung*. Math. Ann. 65 (1908) 107-128.

IN MEMORIAM
DE LOS CIENTIFICOS REFERENCIADOS

Emil **Artin** (1898 – 1962).
Stefan **Banach** (1892 – 1945).
Paul Isaak **Bernays** (1888 – 1977).
Emile **Borel** (1871 – 1956).
Max **Born** (1882 – 1970).
Georg **Cantor** (1845 – 1918).
Constantin **Carathéodory** 81873 – 1950).
Richard **Courant** (1888 – 1972).
Jean le Rond **D'Alambert** (1717 – 1783).
Jean **Dieudonné** (1906 – 1992).
Gustav Peter Lejeune **Dirichlet** (1805 – 1859).
Paul David Gustave **Du Bois Reymond** (1831 – 1889).
Leonhard **Euler** (1707 – 1783).
Luigi **Fantappie** (1901 – 1956).
Adolf Abraham **Fraenckel** (1891 – 1965).
Maurice **Fréchet** (1878 – 1973).
Erik Ivar **Fredholm** (1866 – 1927).
Friedrich Ludwig Gottlob **Frege** (1848 – 1925).
Georg Ferdinand **Frobenius** (1849 – 1917).
Immanuel Lazarus **Fuchs** (1833 – 1902).
Juan **García-Frías** García (1905 – 1996).
Carl Friedrich **Gauss** (1777 – 1855).
Gerhard **Gentzen** (1909 – 1945).
Kurt **Gödel** (1906 – 1978).
Paul Albert **Gordan** (1837 – 1912).
Alfred **Haar** (1885 – 1933).
Jacques **Hadamard** (1865 – 1963).
Hans **Hahn** (1879 – 1934).
Hermann **Hankel** (1839 – 1873).
Oliver **Heaviside** (1850 – 1925).
Erich **Hecke** (1887 – 1947).
Werner Karl **Heisenberg** (1901 – 1976).
Jacques **Herbrand** (1908 – 1931).
Charles **Hermite** (1822 – 1901).
David **Hilbert** (1862 – 1943).
Witold **Hurewicz** (1904 – 1956).
Adolf **Hurwitz** (1859 – 1919).
Camille **Jordan** (1838 – 1921).
Felix **Klein** (1849 – 1925).

Leopold **Kronecker** (1823 – 1891).
Ernst Edward **Kummer** (1810 – 1893).
Edmund **Landau** (1877 – 1938).
Henry Léon **Lebesgue** (1875 – 1941).
Marius Sophus **Lie** (1842 – 1899).
Carl Louis Ferdinand **Lindemann** (1852 – 1939).
Enrique **Linés** Escardó (1914 –1988).
Stefan **Mazurkiewicz** (1888 – 1945).
Hermann **Minkowski** (1864 – 1909).
Andrzej **Mostowski** (1913 – 1975).
Francisco de Asís **Navarro Borrás** (1905 – 1974).
Johann von **Neumann** (1903 – 1957).
Amalie Emmy **Noether** (1882 – 1935).
Wolfgang **Pauli** (1900 – 1958).
Charles Emile **Picard** (1856 – 1941).
Henry **Poincaré** (1854 – 1912).
Pedro **Puig Adam** (1990 – 1960).
Johann **Radon** (1887 – 1956).
Julio **Rey** Pastor (1888 – 1962).
Georg Friedrich Bernhard **Riemann** (1826 – 1866).
Frédéric **Riesz** (1880 – 1956).
Maximino **Rodríguez Vidal** (1921–1997).
Carl David Tolmé **Runge** (1856 – 1927).
Bertrand Arthur William **Russell** (1872 – 1970).
Stanislaw **Saks** (1897 – 1943).
Ricardo **San Juan** Llosá (1908 – 1969).
Juliusz **Schauder** (1896 – 1943).
Erhard **Schmidt** (1876 – 1959).
Hermann Amandus **Schwarz** (1843 – 1921).
Fernando **Senent** Pérez (1923 – 1997).
Carl Ludwig **Siegel** (1896 – 1981).
Waclaw **Sierpinski** (1882 – 1969).
Thomas Jan **Stieltjes** (1856 – 1894).
Hugo **Steinhaus** (1887 – 1972).
Alfred **Tarski** (1902 – 1983).
Teijii **Takagi** (1875 – 1960).
Stanislaw **Ulam** (1909 – 1986).
Vito **Volterra** (1860 – 1940).
Heinrich **Weber** (1842 – 1913).
Karl Theodor Wilhelm **Weierstrass** (1825 –1897).
Hermann **Weyl** (1885 – 1955).
Norbert **Wiener** (1894 – 1964).
Alfred North **Whitehead** (1861 – 1947).
Ernst Friedrich Ferdinand **Zermelo** (1871 – 1953).

CONTESTACION

DEL

EXCMO. SR. D. MANUEL VALDIVIA UREÑA

Excmo. Sr. Presidente,
Excma. Sra. Presidenta del Instituto de España,
Excmos. Srs. Académicos,
Señoras y Señores:

Ha sido un honor para mí que la Real Academia me designe para contestar el discurso de ingreso de mi querido amigo y discípulo D. Manuel López Pellicer.

La primera tesis doctoral que dirigí cuando llegué a la Universidad de Valencia, hace más de treinta años, fue la de López Pellicer, y ya pude darme cuenta entonces de su laboriosidad, profunda inteligencia, entusiasmo y vocación por las matemáticas. Esto, unido a otras muchas cualidades humanas, ha tenido como consecuencia que nuestra relación no sólo haya sido científica, sino que ha cristalizado, además, en una amistad entrañable.

Nació López Pellicer en Valencia en 1944. Cursó la licenciatura de Físicas en Valencia y la terminó, con brillantes calificaciones, en 1966. En el año 1970, se doctoró en Ciencias Matemáticas en la Universidad de Valencia con la calificación de "sobresaliente cum laude", recibiendo, además, el premio de doctorado de la fundación Cañada Blanch. En 1973, se licenció en Ciencias Matemáticas.

Desde que acabó la licenciatura de Físicas se dedicó a la docencia en la Universidad, actividad que, como todos sabemos, es tan importante como pueda ser la investigación. Sólo citaré a este respecto que en 1976 fue profesor agregado numerario de Análisis Funcional en la Universidad de Valencia. en 1977, profesor agregado del Grupo I, Matemáticas, en la Universidad Politécnica de Valencia y, en la misma universidad, catedrático de Matemática Aplicada a partir de 1979.

Desde abril de 1989 ha sido académico correspondiente nacional de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid.

Sería muy largo de exponer, aunque fuera someramente, el trabajo de investigación del profesor López Pellicer, recogido en más de cincuenta artículos, muchos de ellos publicados en revistas internacionales de gran difusión. Solamente, daré algunos detalles. En topología conjuntista, ha obtenido propiedades de espacios regulares, no completamente regulares, en relación con el ejemplo de Tychonoff, y también ha dado otros ejemplos de espacios topológicos de esta clase. López Pellicer construyó el primer ejemplo de un espacio completamente regular tal que el k-espacio correspondiente no es completamente regular. Ha probado además que la topología $\mathcal{T}^{f}$ de Kōmura es regular, poniendo de manifiesto así que la no compatibilidad con la estructura vectorial de una topología $\mathcal{T}^{f}$ no depende de la regularidad. Ha caracterizado por dualidad los teoremas de Nachbin-Shirota y de De Wilde-Schmets. Sus artículos sobre tonelación son numerosos y contienen resultados muy interesantes, desde las medidas aditivas hasta los espacios de Lebesgue-Bochner y los espacios que intervienen en el teorema de la gráfica cerrada. El último artículo publicado por el profesor López Pellicer sobre medidas aditivas, en 1997, es de una gran profundidad y permite localizar los valores de medidas vectoriales en ciertos espacios importantes como, por ejemplo, el de las distribuciones de Schwartz.

Debo añadir que de los trabajos del profesor López Pellicer se han dado numerosas citas y también que nuestro nuevo académico ha realizado una labor importante en la dirección de tesis doctorales. Ha dirigido diez tesis doctorales, y los diez doctores son actualmente uno catedrático de Universidad, cinco profesores titulares de Universidad, dos catedráticos de Escuela Universitaria, una profesora titular de Escuela Universitaria y uno catedrático de Instituto y profesor asociado de Universidad.

Tras esta breve exposición de los méritos académicos del profesor López Pellicer, paso a hacer algunos comentarios sobre el magistral discurso que nos ha dado y en el cual ha expuesto de una forma muy clara y atractiva los conceptos básicos relacionados con las disciplinas que él cultiva.

Uno de los aspectos que ha desarrollado se refiere a la teoría de los conjuntos infinitos y, en especial, ha comentado *el axioma de Zermelo*. Dicho axioma aparece por primera vez en 1904, en un artículo publicado por Zermelo en *Mathematische Annalen*, en el cual da solución positiva a la conjetura del matemático alemán Cantor, que afirmaba que cada conjunto admite una buena ordenación, es decir, una ordenación en la que cada subconjunto no vacío tenga primer elemento.

Nuestro nuevo académico ha citado *la paradoja de Banach-Tarski* que, en el fondo, no es una paradoja, sino un teorema matemático, pero que, como choca con la realidad, ha consolidado su denominación de paradoja. Dicho teorema dice lo siguiente: *"Una esfera de radio unidad se puede dividir en un número finito de partes de manera que tomando alguna de éstas, no todas ellas, y sometiéndolas a movimientos, se logra reconstruir una esfera de radio uno, y con el resto de las partes, sometiéndolas también a movimientos, se reconstruye otra esfera de radio uno."*

A este resultado matemático se le llama, además de la paradoja de Banach-Tarski, *el teorema de la duplicación de la esfera.*

Esto es, en primer lugar, sorprendente y extraño. Estas cosas no ocurren en el mundo que nos rodea, en el mundo real, salvo cuando tienen un carácter milagroso, como, por ejemplo, el milagro de Jesús de la multiplicación de los panes y los peces.

El teorema de la duplicación de la esfera se publicó en Polonia en 1923, en *Fundamenta Mathematica*, por los matemáticos polacos Stephan Banach y Alfred Tarski. Como ha dicho nuestro nuevo académico la prueba de este teorema se logra gracias a la utilización del *axioma de elección de Zermelo*, fuente de numerosas discusiones y controversias, que han dado lugar a investigaciones profundas seguidas de resultados sorprendentes en *Teoría de Conjuntos* y en *Lógica Matemática*.

Insisto en este hecho para poner de manifiesto que una cosa es el mundo real y otra es la matemática, aunque estén relacionados y tengan numerosos puntos de contacto. Por esta razón, cuando se estudian ciertos modelos matemáticos obtenidos a partir de fenómenos naturales, hay que tomar algunas precauciones, pues, en algún caso, uno puede pensar que está adquiriendo conocimientos del mundo, y puede no ser así, mientras que de lo que sí se está completamente seguro es de conocer, incluso profundamente, el modelo matemático.

En la raíz de los hechos citados anteriormente, que podemos llamar paradójicos, está el *concepto del infinito*. Cuando Cantor trabajaba en la elaboración de su aritmética transfinita, sus investigaciones fueron bien recibidas por numerosos matemáticos, aunque no por todos, como, por ejemplo, por el matemático alemán Kronecker. La objeción fundamental descansaba en la reserva que se tenía para la aceptación del *infinito actual*. Cuando decimos que el conjunto de los números enteros es infinito, esto se puede entender de dos formas:

Primero, como una capacidad para obtener números tan grandes como queramos. Así, si tomamos el número un millón, podemos afirmar que existe un número más grande que él, por ejemplo, dos millones. Al infinito concebido de esta manera se le llama *infinito potencial*.

La segunda forma es la utilizada por Cantor: los números enteros positivos se consideran formando un conjunto con una existencia real y objetiva, como algo que está ahí. Al infinito concebido de esta otra manera se le llama *infinito actual* y ha sido fuente de numerosas discusiones. Hemos de añadir que ahora el infinito actual se maneja con absoluta tranquilidad, aunque los hechos paradójicos hayan surgido de él.

Ya Galileo observaba que el conjunto de los enteros positivos se puede poner en correspondencia biunívoca con los enteros que son cuadrados perfectos, a pesar de que este conjunto parezca menos numeroso que el de los enteros positivos. Galileo deducía de aquí que los atributos *"igual"*, *"mayor"* o *"menor"* no son aplicables a cantidades infinitas. De esta manera, Galileo se anticipaba a los desarrollos matemáticos de esta naturaleza aparecidos en nuestro siglo, sobre todo después de los trabajos de Lebesgue y de las pruebas de no existencia en ciertas medidas. Así, Vitali, en 1905, usa razonamientos de este tipo para demostrar la existencia de subconjuntos de la recta que no son medibles Lebesgue, pero sobre todo fue Hausdorff, en 1914, quien hizo una famosa descomposición paradójica de la esfera unidad mediante la acción sobre ella de un cierto grupo libre de rotaciones.

Uno puede preguntarse cuál fue la inspiración para que Banach y Tarski llegaran a formular el *teorema de la duplicación de la esfera* puesto que, obviamente, la observación del mundo que nos rodea no puede dar lugar a una proposición de este tipo. Hagamos un análisis más detallado. En 1920, Stephan Banach, influido por el trabajo de Hausdorff, demostró que en el plano euclídeo es posible construir una medida aditiva para la cual todos los subconjuntos del plano resultan medibles. Dicha medida coincide con la medida de Lebesgue en los conjuntos medibles Lebesgue y, además, es invariante para los movimientos. A la vista de este resultado de Banach, es natural preguntarse si en el espacio tridimensional se puede hacer una construcción análoga a la del plano. Pues bien, el *teorema de la duplicación de la esfera* no es más que un contraejemplo para probar que en el espacio euclídeo de tres dimensiones no es posible construir una medida aditiva para la cual todos los subconjuntos sean medibles, coincida con la medida de Lebesgue en los conjuntos medibles Lebesgue y que sea invariante para los movimientos.

El profesor López Pellicer ha hablado también sobre los teoremas básicos del Análisis Funcional: *el teorema de extensión de Hahn-Banach, el teorema de Banach-Steinhaus* y *el teorema de la gráfica cerrada.* Hemos de decir que Banach, en su artículo sobre la existencia de medidas aditivas en el plano, utiliza ya, de una manera especial, su teorema de extensión, descubierto independientemente por Hahn, y añadiremos que, para la prueba del teorema de Hahn-Banach, necesariamente se ha de utilizar el axioma de elección de Zermelo o alguna proposición equivalente.

El ya citado teorema de Banach, relativo a la existencia de ciertas medidas aditivas en el plano, invariantes para los movimientos, impide que exista una descomposición paradójica del círculo que permita duplicarlo. No obstante, sobre descomposiciones del círculo se han realizado otras investigaciones matemáticas muy interesantes. En relación con esto voy a citar un famoso problema propuesto por Tarski en 1925. A este problema se le llama la *cuadratura conjuntista del círculo* y dice lo siguiente: ¿Será posible en el plano, descomponer un círculo en un número finito de partes de manera que, sometiendo cada una de ellas a un movimiento, se pueda reconstruir un cuadrado, obviamente de la misma área? Las investigaciones que se han derivado del estudio de este problema han repercutido no sólo en la teoría de la medida, sino también en la teoría de grupos.

El problema clásico de *la cuadratura del círculo con regla y compás*, citado por nuestro nuevo académico es, evidentemente, mucho más famoso que el problema de Tarski. Los primeros intentos para conseguir la cuadratura del círculo con la regla y el compás se localizan en Grecia, en el siglo quinto antes de Cristo. A partir de entonces, y durante más de dos mil años, se ha empleado por numerosos matemáticos un inmenso caudal de energía para tratar de obtener una respuesta satisfactoria. En el siglo de Pericles, algunas personas tenían una verdadera obsesión por el problema. Esto motivó que Aristófanes, el célebre comediógrafo griego, que tan dado era a la burla, hablara de la necesidad de hacer la cuadratura del mundo. En 1882, Lindemann, utilizando ideas del matemático francés Hermite, logró probar que la cuadratura del círculo con regla y compás es imposible.

La situación del problema de Tarski, la cuadratura conjuntista del círculo, es muy diferente. Pues en este caso la respuesta es afirmativa. Fue en el año 1989, después de más de sesenta años de haber sido planteado el problema, cuando un matemático húngaro, Lackovich, demostró lo siguiente: *"En el plano, se puede dividir un círculo en un número finito de partes de manera que, sometiendo cada una de ellas a una traslación, se reconstruya un cuadrado."*

Es sorprendente, en primer lugar, que para realizar esta cuadratura del círculo basta con la utilización de traslaciones, no siendo necesario utilizar movimientos cualesquiera. Por otra parte, hay que hacer notar también que el número de partes que empleó Lackovich fue muy grande, del orden de 10^{50}. La minimización del número de partes es un problema que está abierto.

La teoría de conjuntos y el infinito matemático son temas apasionantes, de un enorme atractivo intelectual. A este respecto, quisiera citar al matemático polaco Sierpinski, no sólo por el ingenio extraordinario que poseía para la resolución de problemas matemáticos, o por las bellísimas construcciones que hizo en la teoría de conjuntos infinitos, sino también por el entusiasmo y pasión que puso en sus estudios. Su tumba, conforme a su deseo expresado mucho antes de su muerte, tiene la siguiente inscripción: *Waclaw Sierpinski, 1882-1969, explorador del infinito.*

Dado el tipo de abstracción que se maneja en la matemática que estamos considerando, quisiera referirme al matemático húngaro, nacionalizado americano, John von Neumann, que se ocupó de los fundamentos de la matemática introduciendo, en 1925, una famosa axiomática de la teoría de conjuntos, edificada sobre el concepto primitivo de clase. Von Neumann fue el primero que, en 1929, planteó el problema de contar el número de partes en las que habría que dividir la esfera unidad para conseguir una descomposición paradójica, es decir, para lograr mediante movimientos de estas partes la duplicación de la esfera. Afirmaba que con nueve partes era suficiente. Sierpinski, en el año 1945, logró demostrar que bastaba con ocho y, finalmente, Robinson, en 1957 obtuvo el número mínimo: cinco partes.

John von Neumann trabajó en problemas de hidrodinámica, teniendo que manejar ciertas ecuaciones en derivadas parciales cuyas soluciones eran difíciles de estudiar. Entonces sintió que había necesidad de conseguir resultados numéricos para estas soluciones, cuya observación iluminara un camino que condujera a la creación de una teoría. Esto le obligó a examinar el problema del cálculo con máquinas electrónicas. Durante los años 1944 y 1945, von Neumann aportó importantes descubrimientos sobre computación. El matemático polaco Stanislaw Ulam, nacionalizado americano, amigo de von Neumann y que trabajó con éste en Los Álamos, en un proyecto de investigación atómica, dice que las aportaciones de von Neumann a la teoría de la computación están inspiradas en los artículos que escribió sobre fundamentos de las matemáticas. Esto pone de manifiesto que incluso la parte más abstracta de la matemática puede conducir a aplicaciones.

De todas formas, hay que tener en cuenta en la matemática mucho más que los aspectos que parezcan utilitarios. Así, por ejemplo, la *Teoría de Conjuntos* tal como la construyó Cantor, ha sido la gran base del desarrollo de la *Lógica Matemática*, uno de los mayores logros intelectuales de todos los tiempos.

Uno de los últimos trabajos del profesor López Pellicer estudia el espacio vectorial generado por las funciones características de los conjuntos de una σ-álgebra dada, dotado de la norma que coincide con el supremo del módulo de cada función. Las propiedades de tonelación fuerte que se obtienen en este artículo son interesantísimas y, como he dicho al principio, tienen aplicaciones en la localización de valores en las medidas vectoriales aditivas. Uno puede fijarse, observando el anterior espacio normado o bien los demás resultados del profesor López Pellicer, en el grado de abstracción que poseen.

Si se reflexiona con la atención debida, se puede concluir que un espacio de Sobolev, por ejemplo, no es menos abstracto que estos espacios que maneja nuestro nuevo académico. En algunos trabajos de matemática aplicada, por la dificultad de los problemas que se estudian, lo más que se logra es probar la existencia de una solución débil de una ecuación en derivadas parciales; por otra parte, una solución débil, una distribución, es una forma lineal cuya construcción en general depende del teorema de extensión de Hahn-Banach que, a su vez, se demuestra utilizando el axioma de elección de Zermelo. Entonces nos encontramos con algunos trabajos de matemática aplicada edificados sobre el axioma de elección de Zermelo.

Esto no es una crítica a la matemática pura ni a la matemática aplicada. Mas bien, es una llamada de atención que pone de manifiesto que los calificativos de *"pura"* y *"aplicada"* no parece que se hayan elegido muy acertadamente.

De hecho, la interpretación de esa palabra *"aplicada"* como se hace en la calle, es decir, con carácter utilitario, no tiene nada que ver con la realidad que nos ocupa, aunque en algunos casos la Administración misma lo entienda de esta manera y con las consecuencias que de ello se derivan. Es obvio, que los matemáticos no se caracterizan por patentar sus descubrimientos y, por tanto, nos encontramos con una ciencia aplicada, la *matemática aplicada*, en donde, en general, no hay patentes ni registro de los inventos. La razón de ello es que la palabra *"aplicada"* en este caso significa algo que está por encima de la utilidad y que es sumamente interesante e importante desde el punto de vista científico. Se trata de la colaboración con otras ciencias, ayudando a comprender ciertos fenómenos naturales que estudian éstas, o aumentando el conocimiento sobre dichos fenómenos, y esto utilizando la matemática como un instrumento fundamental de investigación.

En líneas generales, podríamos decir que en este tipo de trabajo hay tres fases:

- En primer lugar, se elige o se crea un modelo.
- En segundo lugar, se estudia matemáticamente el modelo o algunos de sus aspectos.
- Y, finalmente, se contrastan experimentalmente los resultados del modelo teórico, que es lo que valida su utilidad.

Esta última fase es decisiva. Puede suceder que el experimento choque con la teoría; en este caso, uno debe sospechar que no hizo matemática aplicada. No obstante, aunque suceda esto, no debe interpretarse como un cataclismo, pues si en la segunda fase la matemática es de calidad, parece probable que se pueda aprovechar.

De todas formas lo que estamos comentando no sucede frecuentemente. Lo que realmente sucede es que los experimentadores, bien porque tengan otras cosas que hacer que crean más relevantes, bien porque no dispongan del tiempo suficiente o por las razones que sean, no intervienen con frecuencia en la fase de corroboración de las predicciones realizadas por la teoría. Y entonces nos encontramos, por la no intervención de los experimentadores, con un porcentaje elevadísimo de trabajos que nunca sabremos si pertenecen a la matemática aplicada o no. Esto, obviamente, es triste, sobre todo para los interesados, pero hemos de aceptarlo como un hecho más que se deriva de la condición humana.

A veces, cuando se nos pregunta a los matemáticos sobre nuestra actividad, solemos decir que hacemos *matemática pura*, o bien *matemática aplicada*, a pesar de que, en este último caso, la tercera fase citada antes, que es la sancionadora de si esto es así o no, aún esté por llegar. No obstante, no cabe formular ninguna crítica al respecto porque las respuestas se dan a título orientativo, de buena fe y actuando desde la honestidad intelectual.

Otra cosa es cuando se subvalora o sobrevalora la *matemática pura,* o la *matemática aplicada*, y esto por otros fines; entonces estamos ante hechos patológicos de los que no vale la pena hacer comentario alguno.

Somos muchos los matemáticos y hay numerosos campos en los que podemos intervenir, pero no podemos olvidar que la primera condición que debemos tener en cuenta es la calidad de nuestra matemática. Por otra parte, somos conscientes de las limitaciones que pueda tener nuestro trabajo en relación con otras ciencias. Por ejemplo, a los grandes problemas que hay planteados, como pueden ser la curación del cáncer o del sida, no somos tan ingenuos para pensar que un matemático con un modelo va a dar algún tipo de solución. Nuestra colaboración resulta muchísimo más modesta, pero esto no quiere decir que carezca de valor.

A veces, por un exceso de ilusión, tratamos incluso de aplicar la matemática a cualquier fenómeno de la naturaleza. Personalmente creo que Dios ha hecho un mundo extremadamente más rico de lo que puede abarcar la matemática. A este respecto, recuerdo lo que dice Hamlet, en la famosa tragedia de Shakespeare, dirigiéndose a Horacio: *"Hay más cosas en el cielo y en la tierra, Horacio, de las que pueda soñar tu filosofía"*.

Y ahora, debo felicitar al profesor López Pellicer por la alta calidad de la matemática que ha cultivado, y animarle a que continúe en esa dirección.

Querido amigo López Pellicer, en nombre de la Academia le doy la bienvenida a esta Casa. Desde ahora tenemos la suerte de contar con usted que con sus conocimientos, laboriosidad y juventud realizará, sin duda, una colaboración fecunda en las tareas de la Academia.

Gracias por la atención que me han prestado.

PUBLICACIONES DEL PROFESOR MANUEL LOPEZ PELLICER

ARTICULOS DE INVESTIGACION

1. *Desarrollos asintóticos y familias compactas de funciones holomorfas con valores vectoriales*. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid **LXV** (1971), 55-91 (parte de la Tesis Doctoral dirigida por el profesor D. Manuel Valdivia). MR **46** (1973): 4183.
2. *Conjuntos absolutamente convexos en espacios infratonelados*. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid **LXVI** (1972), 287-293. MR **48** (1974): 6867.
3. *Sobre una clase de espacios topológicos cociente*. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid LXVI (1972), 377-387. MR **48** (1974): 2704.
4. *Una caracterización sucesional de los espacios C(X) ultrabornológicos*. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid **LXVII** (1973), 485-503. MR **48** (1974): 1204.
5. *Una nota sobre conjuntos bien ordenados*. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid **LXVII** (1973), 599-606. Zbl. Math. **282** (1975): 54016.
6. (con J.A. López Molina) *Algunas caracterizaciones de ciertos espacios de funciones continuas*. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid **LXVII** (1973), 607-627. Zbl. Math. **278** (1975): 46012.
7. *Un ejemplo de un espacio completamente regular que el k-espacio correspondiente no es completamente regular*. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid **LXVIII** (1974), 111-118. Zbl. Math. **281** (1975): 54011.
8. *Sobre unas propiedades de los espacios C(X) no hereditarias en los espacios $C^*(X)$*. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid **LXVIII** (1974), 119-127. Zbl. Math. **297** (1975): 46021.
9. *Un ejemplo de un C(X) metrizable, ultrabornológico y no completo*. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid **LXVIII** (1974), 807-809. Zbl. Math. **298** (1975): 46022.

10. *Algunas propiedades de los espacios de funciones continuas ultrabornológicos*. Collectanea Mathematica **XXV** (1974), 119-126. Zbl. Math. **294** (1975): 46014. MR **55** (1978): 3764.
11. (con J.L. Blasco) *Algunas propiedades del ejemplo de Tychonoff de un espacio regular que no es completamente regular*. Collectanea Mathematica **XXV** (1974), 213-221. Zbl. Math. **293**(1975): 54040.
12. *Sobre ciertos espacios topológicos no completamente regulares*. Revista Matemática Hispano Americana **XXXVI** (1976), 125-132. Zbl. Math. **348** (1977): 54010. MR **55** (1978): 11203.
13. (con J.A. López Molina) *Sobre ciertos conjuntos acotados en ciertos espacios localmente convexos*. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid **LXX** (1976), 583-593. MR **55** (1978): 10999.
14. (con J.A. López Molina) *Sobre la existencia de topologías T^{f}-regulares*. Collectanea Mathematica **XXIX** (1978), 85-88. MR **80m**: 46013.
15. (con J.A. López Molina) *Unas notas y ejemplos de espacios localmente convexos*. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid **LXVIII** (1979), 401-405. MR **83g**: 46002.
16. *Sobre una clase de espacios tonelados*. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid **LXXIII** (1979) 453-457. MR **83g**: 46006.
17. (con J.A. López Molina) *Dos clases de S-espacios*. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid **LXXIII** (1979) 531-534. MR **83g**: 46003.
18. (con E. Tarazona) *Sobre el teorema de inmersión de Mrówka*. Revista Matemática Hispano Americana **XLI** (1981) 80-88. MR **85j**: 54014.
19. (con S. Romaguera) *Inmersión en espacios cuasiseudométricos y cuasiuniformes*. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid **LXXVI** (1982), 67-71. MR **83m**: 54050.
20. (con E. Tarazona) *Una caracterización de los espacios topológicos de Moore*. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid **LXXVI** (1982), 601-604.
21. (con E. Tarazona) *Immersion in products of regular topological spaces*. Archiv der Mathematik **40** (1983), 170-174. MR **85j**: 54014.
22. *Una nota sobre la propiedad de Blumberg*. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid **LXXXVIII** (1984), 147-150. MR **87e**: 54047.
23. (con A. Gutiérrez) *A generalization of Tong's theorem and properties of pairwise perfectly normal spaces*. Journal of the

Australian Mathematical Society **30** (1985), 353-359. MR **86j**: 54056.
24. (con R. Bru) *Extensions of algebraic Jordan basis.* Glasnik Matematicki **20** (40) (1985), 289-292. MR **87e**: 15022.
25. (con R. Bru) *Jordan basis for an infinite dimensional vector space.* Portugaliae Mathematica **43** (1985-86), 153-156. MR **88g**: 15006.
26. (con A. Gutiérrez) *A product theorem for I-convex-Baire spaces.* Analele Stiintifice ale Universitätii "Al. I. Cuza" Din Iasi **XXXIV** (1988), 1105-109. MR **90g**: 46018.
27. (con J.C. Ferrando) *Quasi-suprabarrelled spaces.* Journal of the Australian Mathematical Society (Series A) **46** (1989), 137-145. MR **89m**: 46004.
28. (con J.C. Ferrando) *On ordered suprabarrelled spaces.* Archiv der Mathematik **53** (1989), 405-410. MR **90h**: 46005.
29. (con J.C. Ferrando) *Una propiedad de M. Valdivia, espacios de tipo (L) y condiciones débiles de tonelación.* Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid **LXXXIII** (1989), 25-34. MR **91j**: 46005.
30. (con J.R. Ferrer, J, Mas y L.M. Sánchez Ruiz) *Topologías fuertes en espacios linealmente topologizados de funciones continuas.* Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid **LXXXIII** (1989), 97-103. MR **91j**: 46029.
31. (con L.M. Sánchez Ruiz) *On a result of Adasch and Ernst.* Collectanea Mathematica **40** (1) (1989), 13-17. MR **91k**: 46002.
32. (con J.C. Ferrando) *Strong barrelledness properties in $l_0^\infty(X, A)$ and bounded finite additive measures.* Mathematischen Annalen **287** (1990), 727-736. MR **91i**: 46002.
33. *Clases de tonelación y medidas acotadas.* Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid **LXXXIV**, cuaderno 4^0 (1990) 541-567. MR **94e**: 46004c
34. (con L.M. Sánchez Ruiz) *On linearly topologized spaces and μ-spaces.* Portugaliae Mathematica **48** Fasc. 3 (1991), 309-318. MR **92k**: 46011.
35. (con J.R. Ferrer y L.M. Sánchez Ruiz) *Some properties of $C_s(X)$.* Radovi Matematiçki **7** (1991), 99-102. MR **93a**: 46039.
36. (con L.M. Sánchez Ruiz) *On linearly topological spaces and real-compact spaces.* Portugaliae Mathematica **48** Fasc. 4 (1991), 397-404. MR **93h**: 46003.
37. (con L.M. Sánchez) *On linearly topological spaces and real-compact spaces II.* Portugaliae Mathematica **48** Fasc. 4 (1991), 475-482. MR **93h**: 46003.

38. (con J.C. Ferrando) *An ordered suprabarrelled space*. Journal of the Australian Mathematical Society (Series A) **51** (1991), 106-117. MR **92k**: 46008.
39. (con J.R. Ferrer y L.M. Sánchez Ruiz) *Compact contractive projections in continuous functions spaces*. Michigan Mathematical Journal **38** (1991) 395-400. MR **92h**: 46029.
40. (con J.R. Ferrer y L.M. Sánchez Ruiz) *Suprabarrelledness in* $l_0^\infty(X, \mathcal{H})$ *and measure theory*. Analele Stiintifice ale Universitätii "Al. I. Cuza" Din Iasi, **XXXVII**, fasc. 2, sect. I-Matematica (1991), 141-144. MR **94i**: 46007.
41. (con J.R. Ferrer y L.M. Sánchez Ruiz) *Some properties of continuous functions spaces*. Portugaliae Mathematica **49** (1992), 23-28. MR **93d**: 46040.
42. (con J.C. Ferrando) *Vector valued functions spaces which are barrelled of class* χ_0 *but not totally barrelled.* Mathematica Japonica **37** No 1 (1992), 117-121. MR **93a**: 46067.
43. (con J.C. Ferrando) *Barrelled spaces of class n and of class* χ_0. UNED Disertaciones del Seminario de Matemáticas Fundamentales **4** (1992) 3-17. MR **93d**: 46007.
44. (con J.C. Ferrando) *A note on a theorem of J. Diestel and B. Faires.* Proceedings of the American Mathematical Society **115** número 4 (Agosto 1992), 1077-1081. MR **93c**: 46078.
45. (con J.C. Ferrando) *Barrelled spaces of class* χ_0 *which are not totally barrelled.* Mathematica Japonica **37**, No 3 (1992) 465-471. Corrección en Math. Japonica 38(6) (1993), 1197-1199. MR **93d**: 46007 y MR **94j**: 46004.
46. (con S. Romaguera y A. Gutiérrez) *A theorem of insertion and extension of functions for normal spaces*. Archiv der Mathematik **60** (1993), 543-545. MR **94e**: 54029.
47. (con J.R. Ferrer y L.M. Sánchez Ruiz) *A strongly barrelled space*. Mathematica Japonica **39** No 1 (1994), 89-94. MR **95a**: 46007.
48. (con J.C. Ferrando y J. Ferrer) *Strong barrelledness properties in Lebesgue-Bochner spaces*. Bulletin of the Belgian Mathematical Society Simon Stevin **1** No 1(Enero 1994), 73-78. MR **95j**: 46036.
49. (con J.R. Ferrer y L.M. Sánchez Ruiz) *Some* L *-barrelled subspaces in Banach spaces*. Mathematica Japonica **40** No 1 (1994) 93-97.MR **95f**: 46001.
50. (con J.Ferrer) *Algebras of sets generating non-barrelled spaces*. Periodica Mathematica Hungaricae **29** (3) (1994), 207-211. MR **95k**: 46005.
51. (con J.C. Ferrando) *On exhaustive vector measures*. Revista Colombiana de Matemáticas **29** (1994), 13-21. MR **96a**: 46087.

52. *Webs and bounded finitely additive measures*. Journal of Mathematical Analysis and Applications **210** (1997), 257-267.
53. (con J.R. Ferrer y L.M. Sánchez Ruiz) *Pták homomorphism theorem revisited*. Aceptado en Czechoslovak Mathematical.
54. (con J.C. Ferrando) *On the ideal of all subsets of N of density zero*. Aceptado en la Revista de la Real Academia de Ciencias de Madrid.
55. (con J.C. Ferrando) *A note on the Orlicz-Pettis theorem*. Pendiente de aceptación.

LIBROS Y CAPITULOS DE LIBROS

1. Autor de diversos textos de Bachillerato en colaboración con J. Aymerich y J. García.
2. (con J. García) *Algebra Lineal y Geometría*. Editorial Marfil, Alcoy (1977). ISBN: 84-268-0269-9.
3. (con J. C. Ferrando) *On linearly barrelled spaces*, capítulo del libro *Contribuciones matemáticas en homenaje al profesor D. Antonio Plans Sanz de Bremond*. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Zaragoza (1990), 91-103. ISBN 84-7733-158-8.
4. (con J.C. Ferrando) *Barrelled spaces of class χ_0 which are not totally barrelled*, recopilación de resultados de los autores como capítulo del libro *Aportaciones matemáticas en Memoria del profesor Victor Manuel Onieva Aleixandre*. Universidad de Cantabria (1991), 163-173. ISBN: 84-87412-40-8. MR **92j**:46004.
5. *Una extensión del teorema de Nikodym-Grothendieck*, capítulo del libro *Homenaje a Pablo Bobillo Guerrero*.Universidad de Granada (1992), 73-87. ISBN: 84-338-1656-X. MR **94e**:46004a.
6. *Las construcciones de los números reales*, capítulo del libro *Historia de la matemática en el siglo XIX (2^a parte)*. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid, serie Historia de la Ciencia (1994), 11-33. ISBN: 84-87.125-26-3.
7. (con J.C. Ferrando y L.M. Sánchez Ruiz) *Metrizable barrelled spaces*. Número **332** de la serie Pitman Research Notes in Mathematics. Logman, Essex, England, 1995. ISBN 0 582 28703 0. Libro recensado en: Bulletin (new Series) of the American Mathematical Society **34** (n^0 1, 1997), 101-105, Proceedings of the Edinburg Mathematical Society **40** (1997), 613-614, y Mathematical Reviews **97d**:46001.
8. *Banach*, capítulo del libro *Historia de la matemática en el siglo XX*. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid, serie Historia de la Ciencia (1998), 221-270. ISBN: 84-87125-36-0.