REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

SOBRE LA NATURALEZA VARIACIONAL DE LA LEY FÍSICA

DISCURSO LEÍDO EN EL ACTO DE SU RECEPCIÓN
COMO ACADÉMICO DE NÚMERO POR EL

EXCMO. SR. D. PEDRO LUIS GARCÍA PÉREZ

Y CONTESTACIÓN DEL

EXCMO. SR. D. JOSÉ JAVIER ETAYO MIQUEO

EL DÍA 30 DE ENERO DE 2008

MADRID
Domicilio de la Academia
Valverde, 22

Depósito legal: M. 56.460-2007

Imprime:
Realigraf, S. A.
Pedro Tezano, 26. 28039 Madrid

Excmo. Sr. Presidente,

Excmos. Sres. Académicos,

Señoras, Señores:

Ante todo deseo expresar mi más profundo agradecimiento a los miembros de esta Real Academia por el alto honor que me han concedido al elegirme académico numerario. Tras veinte años de ejercer mis tareas como académico correspondiente nacional, es este un importante ascenso que aprecio sinceramente y que, dentro de mis posibilidades, espero poder desempeñar con entusiasmo y responsabilidad. Esta es mi promesa aquí al convertirme desde hoy en vuestro compañero.

Paso a ocupar la plaza número 51 de nueva creación adscrita a la Sección de Exactas para "*reforzar su flanco geométrico así como sus relaciones con la física*" según se dice en el escrito de mi presentación por los Académicos D. Darío Maravall, D. Baltasar Rodríguez Salinas (q.e.p.d.) y D. José M. Montesinos. Y al aludir a lo que han sido mis principales campos de interés científico, no puedo dejar de dedicar un emocionado recuerdo a los profesores que me iniciaron en estas ciencias allá por la segunda mitad de los años cincuenta: Palacios, Velayos, Durán, Sánchez del Río... del lado físico; Abellanas, Ancochea, Sancho, Etayo,... del lado matemático. Representantes todos ellos de una generación de profesores universitarios competente y generosa que, en conjunción con la espectacular expansión universitaria de los años setenta, hizo posible el alumbramiento de la generación actual de investigadores que tanto prestigio está dando a la matemática y física españolas.

Deseo mencionar especialmente al profesor Juan Sancho Guimerá, maestro colega y amigo, quien me encaminó por la senda de la docencia y la investigación, y ha guiado mis pasos durante años en mi vida científica.

De esa primera etapa guardo el grato recuerdo de haber aprendido de él la geometría diferencial y la mecánica simpléctica –justo en los años en que estas disciplinas se estaban formulando internacionalmente en el lenguaje moderno–, la relatividad general, la teoría de grupos y su aplicación a la mecánica cuántica, así como las técnicas espectrales en geometría y física a las que el profesor Sancho daba gran importancia como buen especialista que era en geometría algebraica. Tras un paréntesis de tres años en Venezuela siguió ejerciendo su magisterio en Barcelona y Salamanca, donde doctoró a algunos físicos y a muchos matemáticos entre los que tengo el honor de encontrarme. Su interés por los fundamentos de la ciencia y, en especial, por la interrelación entre la física y la geometría, ha sido también constante a lo largo de su vida, habiendo dejado en mí una profunda huella sus siempre sugestivas reflexiones sobre este apasionante tema.

Y es, precisamente, en esa zona fronteriza entre la geometría y la física donde deseo situar mi discurso, que va a tratar sobre la naturaleza variacional de la ley física.

Sobre este asunto, viejo y siempre de actualidad, debo comenzar diciendo que si uno de los rasgos más característicos de la física del siglo XX ha sido el constante cambio que se ha producido en su concepción del espacio, no lo ha sido menos la admirable adaptación a dichos cambios del famoso principio de la acción estacionaria, que desde hace más de 200 años rige la física tras su esencial conversión en mecánica. "*Espacio*" y "*ley física*" en perpetua interacción, exactamente igual al modo como en geometría las figuras geométricas y las reglas por las que se rigen se amoldan con naturalidad al espacio que las alberga. Y es en esta interrelación entre "*continente*" y "*contenido*" donde podría decirse que se halla el verdadero fundamento del pensamiento físico que con toda propiedad debería llamarse "*física geométrica*".

Este es el tema de mi elección, con el cual, si por una parte he tratado de aproximarme a lo que han sido mis áreas de interés preferente, tengo la esperanza, por otra, de poder mantenerme en un nivel de comprensión tolerable para la distinguida audiencia constituida por todos ustedes.

1. La mecánica de Lagrange

La historia de nuestro asunto empieza en 1788, año en el que se edita por primera vez la Mecánica Analítica de Lagrange [54]. Esta doctrina, que corona todos los esfuerzos del Siglo XVIII para elaborar un cuerpo unificado en el área de la mecánica, pasó a convertirse pronto en el fundamento mismo de lo que ha dado en llamarse física clásica. Flanqueada por las dos grandes teorías de ese periodo: la gravitación newtoniana y el electromagnetismo de Maxwell, la mecánica de Lagrange constituye de hecho la primera geometrización de la física en el sentido moderno.

Su punto de partida no fue otro que la profundización de la mecánica de Newton en su aspecto corpuscular.

Situada esta primera gran teoría de la física en el **espacio** de la geometría euclídea y con un manejo de la noción de **tiempo** deliberadamente ingenuo (lo que se mide con un reloj), el objetivo de la gravitación newtoniana es, como es bien sabido, la descripción del movimiento de los planetas y del sol por efecto de las fuerzas derivadas del campo gravitatorio producido por ellos. Un hecho clave de esta teoría es que por primera vez se establece una distinción clara entre "*condiciones iniciales*" y "*ley física*": dados los valores de las variables que caracterizan un sistema en un instante inicial, la ley física permite obtener los valores de dichas variables en cualquier otro instante. En el caso que nos ocupa: las posiciones y las velocidades de los componentes del sistema solar obedeciendo a las leyes de Newton.

Dos resultados básicos del análisis que hace Lagrange de esta teoría que aparecen en la edición de 1811 de la Mecánica Analítica [54] son: la expresión intrínseca de las ecuaciones de movimiento y, lo que es más sorprendente en esa fecha, el descubrimiento de la estructura de variedad simpléctica del conjunto de sus soluciones.

En efecto, en la sección V de esta edición aparecen las famosas ecuaciones de Lagrange, subrayándose que dichas ecuaciones sólo dependen de la función $Z = T - V$ (T=energía cinética y V=energía potencial), lo que hoy día llamamos lagrangiana y denotamos por L. En la sección anterior Lagrange se ve conducido a estas ecuaciones al tratar de obtener una expresión intrínseca del primer miembro de la ecuación de Newton. Demuestra que la función $H = T + V$ (la energía total) es una constante de movimiento, pero no cae en la cuenta de que sus ecuaciones son solución del problema variacional definido por la función L:

$$\delta \int L dt = 0.$$

Este resultado, el famoso principio de la acción estacionaria, fue obtenido por Hamilton en 1834 en el caso independiente del tiempo y por Jacobi en

1842 en el caso general.

Lo curioso de esto es que Lagrange conocía muy bien las ecuaciones diferenciales de los problemas variacionales, tema que había investigado en 1759 con resultados que fueron muy elogiados por Euler.

De índole más profunda es la descripción que Lagrange hace en esta misma sección de la estructura geométrica del conjunto de las soluciones de las ecuaciones de movimiento: los "*movimientos intemporales*" en su terminología.

Al parametrizar este conjunto por un sistema de condiciones iniciales lo que Lagrange está definiendo en realidad es una estructura de variedad sobre el mismo, donde las parametrizaciones son las cartas locales y las constantes de movimiento el anillo de funciones. La variedad es diferenciable a juzgar por los cambios de coordenadas que hace, siendo sus vectores tangentes en cada solución x lo que Lagrange llama "*características*" y denota por δx, Δx, etc. Más aún, Lagrange asocia a cada par de vectores tangentes, δx, Δx, una forma bilineal $\omega(\delta x, \Delta x)$ que demuestra que es una constante como una función del tiempo, lo que le permite dotar a la variedad de los movimientos intemporales de una métrica hemisimétrica en la que se reconoce la métrica simpléctica de la mecánica de hoy día.

Bajo este planteamiento, Lagrange obtiene en esos años importantes resultados: los paréntesis de Poisson para computar las componentes contravariantes de la métrica simpléctica, el método de variación de constantes con el que describe en la variedad de soluciones las perturbaciones de los sistemas mecánicos, la aplicación de la teoría al sólido rígido y a la hidrodinámica etc. Sin embargo, buena parte de ellos permaneció semioculta a la comunidad científica de la época, retrasándose casi un siglo su aceptación.

En ese largo periodo el punto de vista Hamiltoniano [37] produjo un avance sustancial de la doctrina. En el marco simpléctico lagrangiano, esta vez transferido del "*espacio de velocidades*" al "*espacio de momentos*" vía la transformación de Legendre, lo que Hamilton hace es caracterizar la teoría en términos de la energía, H, exclusivamente. En su formulación, obtiene el movimiento del sistema como el "*flujo simpléctico* " asociado a la energía, e inspirado en la óptica de Huygens interpreta la integral de acción evaluada sobre los movimientos (su célebre función principal) como solución de una ecuación en derivadas parciales de primer orden (la ecuación de Hamilton-Jacobi), que le permite identificar los movimientos con las "*curvas características* " de dicha ecuación. Las consecuencias teóricas y prácticas de esta gran idea, entre las que destaca el famoso método de integración de Jacobi, son bien conocidas y no vamos a insistir en ellas. Decir tan sólo que desde entonces el punto de vista hamiltoniano evolucionó cada vez más desligado de su origen variacional, abriendo uno de los más brillantes capítulos de la geometría simpléctica.

Toda esta corriente de ideas cristalizó en los últimos años del Siglo XIX y primeros del XX, en la teoría de invariantes integrales de Poincaré y Cartan [6], con la que puede decirse se cierra este periodo clásico de la mecánica de los sistemas con un número finito de grados de libertad.

La extensión de las ideas de Lagrange a la teoría de campos empezó con el electromagnetismo de Maxwell, la otra gran teoría de la física clásica.

Ya en 1873 Maxwell mismo reparó en la posible utilidad de expresar las ecuaciones del electromagnetismo de forma lagrangiana, pero no fue hasta 1892 cuando Helmholtz propuso la primera lagrangiana de esta teoría. En ella, el "*potencial vector*" y el "*campo eléctrico*" se tomaban como variables independientes, incluyéndose unos términos adicionales para describir las propiedades dieléctricas y magnéticas de la materia. En 1900 Larmor, por su parte, obtuvo varias de las ecuaciones de Maxwell y de la fuerza de Lorentz a partir de un problema variacional con ligaduras al que aplicó el método de los multiplicadores de Lagrange. Un procedimiento muy similar, por cierto, al que aparece en las lecciones de Electricidad y Óptica de Poincaré de 1899, publicadas en 1901. Finalmente, en 1903 Schwarzschild propuso bajo este planteamiento clásico la lagrangiana del electromagnetismo tal y como la conocemos hoy día.

Todas estas versiones fueron recopiladas por Lorentz en dos conocidos artículos de la Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, publicados en 1904 [57], un año antes de que esta doctrina encontrase su verdadero asiento en la teoría de la relatividad.

En cuanto a las simetrías de la lagrangiana en esta primera etapa, decir tan solo que fueron utilizadas principalmente para eliminar ciertas variables asociadas a ellas con objeto de facilitar la integración de las ecuaciones de movimiento (lo que hoy día llamamos "*reducción*"). Tal es el caso de la reducción de Routh de las "*variables cíclicas*", la eliminación de Jacobi del "*nodo*" en el problema de los n cuerpos o las reducciones de Lie-Poisson y de Euler-Poincaré en la teoría del sólido rígido y la hidrodinámica. De especial significado geométrico fue el descubrimiento, que se remonta a Lagrange, de la conexión existente entre las diez leyes de conservación clásicas de la teoría de Newton y las simetrías espacio-temporales galileanas. Sin embargo, lo que no se consiguió en este periodo fue relacionar la invarianza de la lagrangiana con la covarianza de las ecuaciones de movimiento.

2. La estacionaridad en Relatividad y Física Cuántica

Constatada la naturaleza variacional de la ley física en esta primera etapa de 1811 a 1904, la cuestión volvió a plantearse más profundamente con las dos grandes teorías del siglo XX: la relatividad y la física cuántica.

Dos hechos decisivos de este segundo periodo en relación con el concepto de estacionaridad son, a nuestro juicio, el descubrimiento por Hilbert en 1915 de la "*estructura variacional*" de las ecuaciones del campo gravitatorio de Einstein y el concepto de "*integral de caminos*" propuesto por Feynman en 1948 para fundar la Mecánica Cuántica.

Comentemos ambos hechos que, como es sabido, han marcado el rumbo de la física teórica prácticamente hasta nuestros días.

En 1905, treinta y tres años después de que Klein propusiera su famoso "*Programa de Erlangen*" [50], publica Einstein su teoría de la relatividad especial, la cual constituye, de hecho, la primera realización física del programa kleiniano. Si una geometría en sentido de Klein se caracteriza como el conjunto de los "*invariantes*" respecto de un grupo de transformaciones, la otra cara de la moneda fue entender una teoría física como los "*fenómenos*" que son vistos del mismo modo por una cierta clase de observadores. Y fue así, esencialmente, como Einstein concibió el electromagnetismo de Maxwell, a partir del grupo de Lorentz o, lo que es lo mismo, de sus observadores inerciales, con objeto de dar una respuesta teórica al hecho experimental de la constancia de la velocidad de la luz [21].

De este modo, análogamente a lo que ocurrió en geometría, la ciencia física abandonó su rígida ubicación en el espacio euclídeo tridimensional y su concepción ingenua del tiempo para fundarse en una **variedad cuadridimensional** (el espacio-tiempo), dotada de un grupo de transformaciones o, equivalentemente, de una cierta clase de sistemas de coordenadas locales (los observadores).

En relatividad especial, según la formulación propuesta en 1907 por Minkowski, antiguo profesor de Einstein en Zürich, el grupo en cuestión (el de Lorentz) es el de las isometrías de una métrica, g, sobre el espacio-tiempo, para la cual existen sistemas de coordenadas locales (x, y, z, t) (los sistemas inerciales) que la expresan de la forma canónica:

$$g = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 - c^2\mathrm{d}t^2$$

Esta es, precisamente, la geometría en el seno de la cual el electromagnetismo de Maxwell halló, por fin, su ubicación definitiva. En particular, en 1909, Born observó que la lagrangiana de Schwarzschild era un invariante de Lorentz. Y Mie, por su parte, que toda lagrangiana construida a partir de los invariantes de Lorentz básicos conducía a unas ecuaciones de Lagrange covariantes, observación esta que muestra por primera vez la relación existente entre la invarianza de la lagrangiana por un grupo de transformaciones y la covarianza de las ecuaciones de Lagrange.

La extensión de estas ideas a todos los observadores o, lo que es lo mismo, el deseo de hacer una teoría invariante por todas las transformaciones de coordenadas, llevó a Einstein, como se sabe, a la relatividad general y, con ella, a una nueva concepción de la ley física:

"*Las leyes generales de la Naturaleza tienen que expresarse por ecuaciones que sean válidas en todos los sistemas de coordenadas, esto es, que sean covariantes respecto a cualquier sustitución, generalmente covariante*".

Y siendo los campos de tensores los objetos más simples susceptibles de transformarse de un modo natural por los cambios de coordenadas, la física se convirtió en una teoría de campos sobre el espacio-tiempo, llegando a identificarse pronto con la geometría más emblemática de la época: la geometría de Riemann [68].

En efecto, al iniciar Einstein en 1907 la búsqueda de una teoría de la gravedad en el marco de la relatividad especial asoció la arbitrariedad de un sistema de referencia al concepto de aceleración, y este al de gravedad (principio de equivalencia).

Tras varios años de profunda reflexión, a lo largo de los cuales aprendió de su amigo Marcel Grossmann en Zürich la geometría riemanniana y el cálculo diferencial de Ricci y Levi-Civita, Einstein dio por fin el gran paso al sustituir la métrica de Minkowski por una métrica $g = (g_{\alpha\beta})$ de signatura $(3, 1)$ sobre el espacio-tiempo que, elevada al rango de campo físico, identificó con el campo gravitatorio, proponiendo para el mismo en 1915 sus célebres ecuaciones [22]:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = -kT_{\alpha\beta}$$

donde $R_{\alpha\beta}$ es el tensor de Ricci de la métrica $g_{\alpha\beta}$, $R = R_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$ la curvatura escalar, $T_{\alpha\beta}$ el tensor de momento-energía de un "*campo material*", Ψ^A, que se considera "*fuente*" del campo gravitatorio, y k una constante de acoplamiento.

Dichas ecuaciones, a las cuales llegó Einstein por razones de invarianza de acuerdo con la nueva concepción de la ley física traída por la relatividad general, juegan aquí un papel análogo a la ecuación de Poisson de la gravitación newtoniana, la cual es precisamente el límite de las ecuaciones de Einstein para $\epsilon = 1/c^2 \to 0$.

Esta teoría tuvo su primer gran reconocimiento internacional en Göttingen, donde Einstein, invitado por Hilbert, pronunció en el verano de 1915 seis conferencias memorables que produjeron el entusiasmo de su anfitrión y de la plana mayor de esa universidad, especialmente de Klein y de la joven Emmy Noether, recién llegada de Erlangen.

En esta estimulante atmósfera, el mismo mes en el que Einstein concluyó su famoso trabajo, Hilbert por su parte envió a la Academia de Ciencias de Göttingen una ambiciosa memoria de título "Los fundamentos de la Física" [44], en la que obtenía las ecuaciones de Einstein variacionalmente a partir de la integral de acción:

$$I = \int (R + kL)\sqrt{-\det g}\mathrm{d}^4x$$

donde $L(g_{\alpha\beta}, \Psi^A, \partial\Psi^A/\partial x^\alpha)\sqrt{-\det g}\mathrm{d}^4x$ es una 4-forma invariante por los difeomorfismos del espacio-tiempo (la densidad lagrangiana del campo fuente), R es la curvatura escalar de la métrica, y donde el tensor de momento-energía, $T^{\alpha\beta}$, toma la forma explícita:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{-\det g}} \frac{\delta L\sqrt{-\det g}}{\delta g_{\alpha\beta}}$$

Especulaciones aparte sobre esta interesante historia de investigación paralela sacada a la luz recientemente por Leo Corry, Jürgen Reen y John Stachel [18], el descubrimiento de Hilbert fue a nuestro juicio decisivo por tres razones principales:

- Haber convertido la noción de "*densidad Lagrangiana invariante*" en el concepto básico de la doctrina, a partir del cual el principio de Hamilton y la teoría de invariantes permiten obtener la "*Ley física*" (ecuaciones de campo) y las "*magnitudes dinámicas*" (corrientes conservadas), de un modo canónico.

- Demostrar bajo este planteamiento general que la invarianza de la densidad Lagrangiana respecto de un grupo de transformaciones implica la covarianza de las ecuaciones de campo, y

- Haber descrito toda la física teórica de la época (gravedad de Einstein y electromagnetismo de Mie) según este esquema.

Este fue, esencialmente, el planteamiento axiomático que hizo Hilbert de la física en 1915, por lo cual y con cierta licencia expositiva, podríamos considerar al genial matemático en relación con Einstein como el Lagrange del siglo XX.

Con todo ello, sin embargo, el "*porqué de la estacionaridad*" siguió sumido en el misterio, siendo esta vez la física cuántica la que en 1948 arrojó cierta luz al respecto.

En efecto, a partir de una profunda revisión del concepto de medida en los procesos cuánticos e inspirado en ideas anteriores de Dirac, en esa fecha propuso Feynman una nueva formulación de la Mecánica Cuántica [25], según la cual la evolución, $\Psi(x,t)$, de un estado del sistema entre dos instantes t_0 y t viene dada por la ley:

$$\Psi(x,t) = \int K(x,t;y,t_0)\Psi(y,t_0)\mathrm{d}y$$

en la cual el propagador $K(x,t;y,t_0)$ es la integral:

$$K(x,t;y,t_0) = \text{``}\int e^{-\frac{i}{\hbar}S[x(t)]}\mu[x(t)]\text{''}$$

donde $x(t)$ es un camino arbitrario entre (y,t_0) y (x,t), $\mu[x(t)]$ una cierta "*medida*" sobre el "*espacio*" de todos los caminos y $S[x(t)] = \int_{t_0}^{t} L(x(t),\dot{x}(t))\mathrm{d}t$ la acción clásica de $x(t)$.

Según esta nueva concepción de la ley física, la lagrangiana sigue siendo el concepto básico de la doctrina, pero ahora la búsqueda de las soluciones estacionarias se sustituye por la determinación de la medida $\mu[x(t)]$.

La relación entre ambas descripciones, la cuántica y la clásica, no pudo ser más sorprendente: para $\hbar << 0$ (límite semiclásico) la medida, $\mu[x(t)]$, "*se concentra*" en los caminos estacionarios. De un modo más preciso, se tiene la siguiente expresión asintótica de Maslov:

$$K(x,t;y,t_0) \sim \sum_{x_\alpha(t)} A_{x_\alpha(t)} \exp\left(\frac{i}{\hbar}S[x_\alpha(t)] + \frac{i\pi}{4}\sharp(x_\alpha(t))\right)$$

donde $x_\alpha(t)$ son los caminos estacionarios, $\sharp(x_\alpha(t))$ la signatura de la segunda variación $\delta^2 S[x_\alpha(t)]$ (con lo que la teoría variacional aparece en su segunda aproximación) y $A_{x_\alpha(t)}$ el cociente de dos cantidades infinitas, $(2\pi\hbar)^{\infty/2}$ y $|\det\delta^2 S[x_\alpha(t)]|$, que se compensan para dar un cociente finito.

El principio de la acción estacionaria de la física clásica se justifica así desde una perspectiva cuántica, pudiéndose decir que esta gran idea se ha mantenido hasta nuestros días como fundamento de la física teórica en sus dos aspectos clásico y cuántico.

3. Simetrías, Corrientes de Noether y Leyes de Conservación

Un tercer hecho clave del periodo que estamos comentando es el descubrimiento por Emmy Noether de la conexión existente entre las simetrías y las leyes de conservación de los sistemas lagrangianos.

En 1918, tres años después de que Hilbert obtuviera las ecuaciones de la relatividad general variacionalmente, publicó Noether un profundo trabajo al respecto [65], con el que se cerró brillantemente el programa Hilbertiano al caracterizarse las magnitudes dinámicas de un sistema a partir del grupo de transformaciones de su geometría.

El trabajo de Noether se concretó en dos teoremas muy generales sobre los problemas variacionales cuya densidad Lagrangiana es invariante por la acción de un grupo de Lie de dimensión finita, en el primer caso, e infinita, en el segundo, que son tratados separadamente por la diferencia esencial de sus implicaciones.

En el marco de la teoría de campos sobre el espacio-tiempo ambos resultados pueden enunciarse como sigue:

En el primer caso, a cada elemento del álgebra de Lie del grupo (simetría infinitesimal) le corresponde una 3-forma (corriente de Noether) cuya diferencial exterior se anula sobre las extremales del problema variacional (ley de conservación). Tal es el caso, por ejemplo, del electromagnetismo, donde el álgebra de Lie de los desplazamientos espacio-temporales del grupo inhomogéneo de Lorentz produce el tensor de momento-energía, mientras que la invarianza de la densidad lagrangiana por el grupo $U(1)$ da lugar a la 3-forma de carga-corriente.

En el segundo caso, esto es, cuando el grupo de Lie de simetrías es de dimensión infinita –localmente parametrizado por r funciones y sus derivadas sucesivas hasta un cierto orden sobre el espacio-tiempo–, lo que ocurre es que existen r "*identidades diferenciales*" entre los primeros miembros de las ecuaciones de Lagrange del problema variacional.

Así, por ejemplo, en relatividad general, donde la densidad lagrangiana del campo gravitatorio es invariante por los difeomorfismos del espacio-tiempo, lo que se obtiene son las identidades de Bianchi:

$$\mathrm{div}_g \left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g^{\alpha\beta} \right) = 0$$

En particular de aquí se sigue, para las soluciones de las ecuaciones de Einstein, la **ley de conservación del tensor de momento-energía** $\mathrm{div}_g T^{\alpha\beta} = 0$, asunto éste que fue muy discutido con anterioridad por Hilbert, Klein y el propio Einstein, y que Noether aclaró definitivamente con su teorema.

También en este segundo caso existen corrientes de Noether asociadas al álgebra de Lie del grupo, pero lo que ocurre ahora es que dichas corrientes son cohomológicamente nulas sobre las extremales (teorema de anulación). Este hecho, junto con las identidades anteriores, adquiere un significado especial en las teorías hiperbólicas, para las que se plantea un problema de Cauchy de las ecuaciones de campo sobre una hipersuperficie tridimensional del espacio-tiempo donde: las citadas identidades implican la "*no unicidad*" del problema, mientras que la anulación de la integral de las corrientes de Noether sobre las condiciones iniciales dan lugar a una "*ligadura*" cuyo estudio es la base del análisis de la estructura del conjunto de las soluciones de las ecuaciones de campo módulo la acción del grupo de simetrías.

Así pues, tras el resultado de Noether las magnitudes dinámicas de un sistema lagrangiano son una consecuencia canónica de su geometría, pudiéndose caracterizar, dualmente, las soluciones estacionarias por el hecho de que dichas magnitudes se conservan a lo largo de las mismas. Con ello se cierra este ciclo que, como hemos visto, tuvo como principal objetivo responder a los interrogantes planteados por la nueva concepción de la ley física traída por la relatividad general. Este es, sin duda alguna, el gran salto conceptual respecto de la etapa anterior, en la que las magnitudes dinámicas, introducidas de un "*modo físico*" según se decía, constituían los conceptos básicos fundamentales, mientras que la lagrangiana no pasaba de ser una cierta "*función auxiliar*" que, sorprendentemente, unificaba toda la doctrina.

Solamente añadir a lo hasta ahora dicho que estos teoremas se gestaron también en esa estimulante atmósfera de la Göttingen de 1915 a la que ya nos hemos referido, habiendo tenido como antecedentes más inmediatos un trabajo de Herglotz de 1911 sobre la relación entre las diez leyes de conservación clásicas y el grupo inhomogéneo de Lorentz, y el mismo problema para el grupo de Galileo en mecánica newtoniana, tratado en 1917 por Engel a propuesta de Klein, que vio en este tema una relación evidente con las investigaciones de Lie sobre la teoría de grupos en ecuaciones diferenciales.

Tras varios años de reconocimiento, los teoremas de Noether cayeron en el olvido, irrumpiendo de nuevo en la literatura cuatro décadas después, en plena etapa de fundamentación de la geometría diferencial en el lenguaje moderno, con la caracterización variacional del invariante integral clásico de Poincaré-Cartan, que pasó pronto a convertirse en el concepto clave de la doctrina.

Comentemos este nuevo hecho que abrió, a nuestro juicio, otra etapa decisiva de la evolución que estamos describiendo.

4. La forma de Poincaré-Cartan

En 1930 la formulación de Cartan de la mecánica hamiltoniana fue extendida por de Donder a la teoría de campos. Introducida principalmente para estudiar las ecuaciones de campo vía un formalismo canónico basado en una generalización de la ecuación de Hamilton-Jacobi, esta doctrina fue analizada cinco años más tarde por Weyl, conociéndose desde entonces como teoría de de Donder-Weyl. Dicha formulación y otras aproximaciones al tema anteriores (Volterra 1890, Frechet 1905, Mayer 1906, Caratheodory 1929, etc.) quedaron englobadas entre 1936 y 1942 en un formalismo general de posibles teorías canónicas propuesto por Lepage [56], que basó su análisis en la teoría geométrica de ecuaciones en derivadas parciales desarrollada unos años antes por Cartan.

De este modo, a fines de los años cuarenta del pasado siglo nos encontramos, por una parte, con una formulación hamiltoniana local de las leyes físicas dirigida a la exploración de la geometría definida por la dinámica de los sistemas con un número arbitrario de variables independientes y, por otra, con una renovada teoría lagrangiana de campos basada en la geometría del espacio-tiempo de acuerdo con la filosofía einsteniana.

Se entra así en una tercera etapa caracterizada por una profunda revisión conceptual de la doctrina en consonancia con el proceso de fundamentación de la geometría diferencial que se inicia alrededor de 1950 con la definición rigurosa de la noción de variedad diferenciable.

El marco espacial típico de este nuevo periodo es el de los **espacios fibrados diferenciables**, que se definen como una proyección de variedades diferenciables $p\colon E \to M$ que se comporta localmente como una proyección trivial $U \times F \to U$ (U =abierto de M, F =variedad dada). E es el espacio total del fibrado, M la variedad base, $E_x = p^{-1}(x)$ las fibras y F la fibra tipo.Introducida esta nueva clase de espacios por Ehresmann y Whitney entre 1937 y 1939 en el contexto topológico, pronto se vio que su extensión diferenciable iba a ser indispensable para la geometría diferencial global y la física teórica, donde las secciones de un fibrado $p\colon E \to M$ sobre una variedad dada (esto es, las aplicaciones diferenciables $s\colon M \to E$ tales que $p \circ s = \mathrm{Id}$) van a ser los nuevos "*objetos geométricos*" que pueden definirse sobre la variedad o, físicamente, los "*campos*" sobre el espacio-tiempo de los que han de predicarse las leyes de la naturaleza.

Dada una teoría de campos sobre un fibrado $p\colon E \to M$, el espacio natural para definir la lagrangiana de la teoría es el fibrado $j^k p\colon J^k E \to M$ de los k-jets de las secciones locales de E, cuyos puntos son las "*k-aproximaciones de Taylor*", $j^k_x s$, de las secciones s de E definidas en la vecindad de los puntos x de M, y donde $j^k p$ es la proyección $j^k_x s \mapsto x$. Dichos espacios son la generalización natural a las teorías de campos en cualquier orden de derivación del **espacio de las velocidades** clásico de la mecánica de Lagrange. Su geometría, basada en una cierta distribución (no integrable) definida localmente por las denominadas "*1-formas de contacto*", permite levantar (respecto de la proyección $q_k\colon j^k_x s \in J^k E \mapsto s(x) \in E$) cada sección $s\colon M \to E$ a una sección $j^k s\colon M \to J^k E$, y cada campo vectorial D de E a un campo vectorial $j^k D$ de $J^k E$, denominadas extensiones k-jet de la sección s y del campo vectorial D, respectivamente.

En estas condiciones la densidad Lagrangiana de la teoría no es otra cosa que una n-forma $j^k p$-horizontal, $\mathcal{L}$, sobre la variedad $J^k E$ ($n = \dim M$). En particular, si la variedad base está orientada por un elemento de volumen, ω, entonces $\mathcal{L}$ puede expresarse como $\mathcal{L} = L\omega$ donde L es una función diferenciable sobre J^kE. Este es el caso usual, siendo L la lagrangiana.

Bajo este planteamiento, la acción es una funcional sobre el conjunto $\Gamma(M,E)$ de las secciones de E definida por la regla:

$$\mathfrak{L}(s) = \int_{j^k s} L\omega, \quad s \in \Gamma(M,E) \tag{$\star$}$$

la cual puede ser "*variada*" en cada sección s por los elementos del espacio vectorial $\mathfrak{X}(E)$ de los campos vectoriales de E (variaciones infinitesimales) del modo natural:

$$(\delta_s\mathfrak{L})(D) = \int_{j^k s} \mathrm{L}_{j^k D}(L\omega), \quad D \in \mathfrak{X}(D) \tag{$\star\star$}$$

donde $\mathrm{L}_{j^k D}$ es la derivada de Lie respecto del campo vectorial j^kD.

Una sección s puede decirse ahora que es **estacionaria** cuando $\delta_s\mathfrak{L} = 0$ sobre los campos vectoriales cuyo soporte proyecta a un compacto de M o bien verifican ciertas condiciones de frontera o asintóticas según el problema de que se trate.

Introducidas a principios de los años sesenta las variedades diferenciables de dimensión infinita y las técnicas del análisis global, el conjunto de las secciones $\Gamma(M,E)$ (adecuadamente extendido) pudo dotarse de una estructura de variedad diferenciable respecto de la cual la acción $\mathfrak{L}$ se convierte en una función diferenciable y $\delta_s\mathfrak{L}$ en su diferencial en el punto s. Fue así como Smale y Palais generalizaron a esta nueva situación la teoría de Morse que, como se sabe, tenía como principal objetivo el obtener información topológica de la variedad M a partir de la estructura del conjunto $\{s \in \Gamma(M,E) \,/\, \delta_s\mathfrak{L} = 0\}$ de las extremales de un problema variacional definido sobre ella. Decir también, del lado físico, que el gran reto de la teoría cuántica de campos fue desde entonces generalizar la integral de Feynman al nuevo concepto de acción tratando de encontrar una adecuada medida sobre la variedad de secciones $\Gamma(M,E)$.

Pero volviendo al tema principal que aquí nos ocupa, el resultado básico de la teoría lagrangiana de esta tercera etapa es la siguiente expresión intrínseca de la diferencial de la acción:

$$(\delta_s\mathfrak{L})(D) = \int_M \langle \mathcal{E}(s), D_s^{\mathrm{v}} \rangle\omega + (j^{2k-1}s)^*\mathrm{d}(i_{j^{2k-1}D}\Theta), \quad D \in \mathfrak{X}(E) \tag{$\star\star\star$}$$

donde $\mathcal{E}\colon \Gamma(M,E) \to \Gamma(M, s^*VE^*)$ (VE =fibrado de los campos p-verticales sobre E) es un operador diferencial de orden $2k$ único (el operador de Euler-Lagrange), Θ una n-forma sobre $J^{2k-1}E$ no única (forma de Poincaré-Cartan), $D_s^{\mathrm{v}} \in \Gamma(X, s^*VE)$ la componente p-vertical del campo vectorial D a lo largo de s y $\langle\, ,\, \rangle$ el acoplamiento de la dualidad.

La forma diferencial así obtenida generaliza el invariante integral clásico de Poincaré-Cartan de la mecánica analítica en el siguiente sentido:

Induce la misma acción que la densidad lagrangiana, esto es:

$$\mathfrak{L}(s) = \int_{j^k s} L\omega = \int_{j^k s} \Theta, \qquad s \in \Gamma(M,E)$$

de donde las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange (las extremales) pueden caracterizarse como las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\bar{s} = j^{2k-1}s, \quad \bar{s}^* i_{\bar{D}} \mathrm{d}\Theta = 0, \quad \forall \bar{D} \in \mathfrak{X}(J^{2k-1}E)$$

donde $\bar{s}$ es una sección del fibrado $j^{2k-1}p\colon J^{2k-1}E \to M$.

La segunda ecuación de este sistema generaliza las ecuaciones de Hamilton clásicas, planteándose un "*problema de regularidad*" consistente en ver si existe algún tipo de condición sobre la lagrangiana que permita asegurar la equivalencia de las ecuaciones de Euler-Lagrange y de Hamilton.

Por otra parte, si $\mathcal{V} = \{s \in \Gamma(M,E) \,/\, \mathcal{E}(s) = 0\}$ es el conjunto de las extremales y en cada una de ellas, s, se define como espacio tangente, $T_s\mathcal{V}$, el espacio vectorial de las soluciones $D_s^{\mathrm{v}} \in \Gamma(M, s^*VE)$ de las ecuaciones de Euler-Lagrange linealizadas, entonces la $(n+1)$-forma $\mathrm{d}\Theta$ define, por restricción a dichas soluciones, una métrica hemisimétrica sobre $\mathcal{V}$ con valores en las funciones de $\mathcal{V}$ a las $(n-1)$-formas cerradas de M que generaliza a la presente situación la estructura de variedad simpléctica de los movimientos intemporales de Lagrange de 1811.

Esta es la denominada "*variedad multisimpléctica de soluciones*" en la cual la teoría de simetrías de Emmy Noether encontró por fin su verdadero significado dinámico:

En efecto, si G es un grupo de Lie de automorfismos del fibrado $p\colon E \to M$ cuya extensión k-jet deja invariante la densidad lagrangiana $L\omega$, entonces los elementos de su álgebra de Lie (simetrías infinitesimales) son campos vectoriales D de E cuya corriente de Noether es la $(n-1)$-forma $i_{j^{2k-1}D}\Theta$ sobre la variedad $J^{2k-1}E$. De este modo la forma de Poincaré-Cartan puede verse también como el objeto geométrico básico que permite pasar de las "*simetrías infinitesimales*" de un problema variacional a sus "*corrientes de Noether*". Más aún, las simetrías infinitesimales inducen campos vectoriales sobre la variedad multisimpléctica de soluciones, los cuales son los gradientes multisimplécticos de sus propias corrientes de Noether.

Estos resultados son sin duda alguna la aportación más importante de esta tercera etapa al tema que aquí nos ocupa, llegando a configurar entre 1970 y 1985 una de las más bellas doctrinas de la física matemática, conocida desde entonces como **Teoría de Hamilton-Cartan del Cálculo de Variaciones.**

Su establecimiento preciso empezó con el caso $k=1$ a fines de los años 60 y principios de los 70 (Hermann [38], García y Rendón [29] [30], García [31], Goldschmidt y Sternberg [33], etc.). Tras la introducción de la denominada 1-forma de estructura de los fibrados de 1-jets y usando un cálculo diferencial con valores en fibrados vectoriales dotados de una conexión lineal, lo que se prueba en esos años para $k=1$ es la fórmula de variación $(\star\star\star)$ y sus consecuencias, obteniéndose en particular una forma de Poincaré-Cartan canónica que coincide localmente con la del formalismo de de Donder-Weyl. También se caracterizó intrínsecamente la condición de regularidad clásica así como la teoría de la segunda variación tanto desde el punto de vista lagrangiano como hamiltoniano. La generalización a k arbitrario y variedad base $M=\mathbb{R}$ (mecánica de orden superior) fue obtenida en 1978 por Sternberg [75], que caracterizó axiomáticamente una forma de Poincaré-Cartan verificando la fórmula $(\star\star\star)$ y probó la equivalencia entre las ecuaciones de Euler-Lagrange y de Hamilton bajo una cierta condición de regularidad. Finalmente, a principios de los años ochenta fue resuelto el caso general por diferentes procedimientos (García y Muñoz [27], Ferraris y Francaviglia [24], Horák y Kolář [51], etc.), siendo la "*no equivalencia genérica*" de las ecuaciones de Euler-Lagrange y de Hamilton y el nuevo modo como debía plantearse el "*problema de la regularidad*" lo que sin duda alguna atrajo más la atención de la nueva teoría en esos años.

Especialmente importante es el caso $k = 2$, para el que se puede elegir una forma de Poincaré-Cartan canónica de modo análogo a los casos $k = 1$ y $M = \mathbb{R}$, k arbitrario. En particular, si dicha forma es proyectable a J^1E, lo cual equivale a que las ecuaciones de Euler-Lagrange sean de segundo orden, se puede dar una noción de regularidad que permite probar la equivalencia entre las ecuaciones de Euler-Lagrange y las ecuaciones de Hamilton proyectadas:

$$\bar{s}^* i_{\bar{D}} \mathrm{d}\Theta = 0, \quad \forall \bar{D} \in \mathfrak{X}(J^1E)$$

donde $\bar{s}$ es una sección del fibrado $j^1p \colon J^1E \to M$ (García y Muñoz [28], Krupka y Štěpánková [53]).

La principal beneficiaria de este resultado fue la relatividad general, cuya dinámica como problema variacional de segundo orden pudo desarrollarse, por fin, de un modo completo. Más concretamente, y dejando aparte la densidad lagrangiana (de primer orden) del campo fuente sobre la que volveremos más adelante a propósito de la noción de "*acoplamiento mínimo*" en las teorías de gauge, la cuestión se centra en la densidad lagrangiana de Hilbert, $R(g)\sqrt{-\det g}\mathrm{d}^4x$, que define un problema variacional de segundo orden sobre el fibrado $p \colon \mathcal{M} \to M_4$ de las métricas de signatura $(3,1)$ sobre el espacio-tiempo con las características anteriormente señaladas. Este hecho, junto con la $\mathrm{Diff}(M_4)$-invarianza, permite caracterizar, recíprocamente, dicha lagrangiana, así como establecer su formalismo hamiltoniano correspondiente.

En particular, resulta evidente a partir de aquí la versión variacional de un importante resultado que Weyl atribuye a Vermeil en el Apéndice II de su famoso libro **Espacio, Tiempo, Materia** de 1918:

"*Las ecuaciones de la gravitación de Einstein en el vacío son las únicas ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden en las métricas que provienen de un problema variacional del orden más bajo posible invariante por todos los cambios de coordenadas del espacio-tiempo* ".

5. Los últimos veinticinco años

La cuarta y última etapa de nuestra historia la componen una serie de hechos nuevos que, producidos entre principios de los años ochenta y la actualidad, vamos brevemente a comentar.

A diferencia de la relatividad, que puede considerarse como el último acto de reflexión del pensamiento clásico, la física cuántica, nacida cinco años antes con el descubrimiento por Planck del famoso quantum de acción, empezó prácticamente desde cero con una serie de hechos nuevos inexplicables desde la física clásica pero incuestionables desde el punto de vista experimental. Y si la doctrina einsteniana llegó a hacerse pronto indistinguible de su substrato geométrico pasando las relaciones entre la física y la geometría por uno de sus más brillantes momentos, la matemática que mejor se adaptó a los fenómenos cuánticos fue el Análisis con su teoría de operadores, las C^*-álgebras, las funciones de varias variables complejas, etc. que eran muy poco geométricas en sus comienzos. Se comprende así ese largo divorcio entre la geometría y la física cuántica del que tanto se ha hablado en el pasado.

A título anecdótico, en 1970 el físico alemán Rudolf Haag, en esos años editor jefe de la prestigiosa revista "*Comm. in Math. Phys.* ", se mostraba muy crítico con las aplicaciones de la geometría diferencial moderna a la física, de las que decía por ejemplo: *que era un lenguaje excesivamente difícil para la mayoría de los lectores de su revista, que los resultados físicos obtenidos no justificaban que los físico matemáticos tuvieran que aprender esos métodos, que, personalmente, tenía muy pocas esperanzas de que estos fueran de alguna ayuda para la teoría relativista de campos* etc. Una rápida ojeada a cómo evolucionó esa revista a los pocos años prueba lo equivocado que estaba en este punto su director de entonces. En cualquier caso, esta era en ese tiempo la opinión general de los físicos teóricos en relación con este tipo de aplicaciones geométricas, que consideraban tenían principalmente un interés matemático o todo lo más mecánico en su sentido más clásico.

Esta apreciación, sin embargo, cambió radicalmente en la década de los años setenta debido al uso que empezó a hacerse en física teórica de sofisticados modelos no lineales de carácter geométrico que pusieron de manifiesto relaciones insospechadas entre ciertos conceptos y construcciones de la geometría global y la topología y determinados procesos fundamentales de la teoría cuántica de partículas elementales. Empezó así en el último cuarto del siglo XX una "*segunda edad de oro* " de las relaciones entre la física y la geometría que acabó con ese largo desencuentro entre ambas ciencias al que nos hemos referido antes. Dos referencias importantes en este sentido son: la magnífica colección de volúmenes de Lect. Notes in Math. de la editorial Springer, donde se publicaron los más de veinte congresos anuales sobre "*Métodos de Geometría Diferencial en Física Teórica* " que con tanto entusiasmo impulsó desde sus comienzos Konrad Bleuler del Instituto de Física Nuclear de la Universidad de Bonn, y la creación en 1982 de la revista "*J. of Geom. and Phys.* ", convertida hoy día en una de las mejores revistas internacionales del ramo por el buen hacer de su principal promotor y director hasta 2003, Marco Modugno, y de su sucesor, Ugo Bruzzo.

En esta nueva etapa, puede decirse que el planteamiento que se hace de las leyes físicas en los diferentes marcos espacio-temporales que van proponiéndose es, exclusivamente, variacional. A diferencia de épocas anteriores en que estas leyes eran previas a la comprobación de tal carácter, el punto de partida es ahora siempre el de una "*Lagrangiana* " en un "*espacio fibrado* " (posiblemente más general que los ordinarios) invariante por un "*grupo gauge*" que es dado de antemano como elemento primario de la teoría. Y es dicho esquema, cuya formulación geométrica precisa ha sido comentada ya, el que definitivamente se ha impuesto en física teórica hasta la actualidad.

Concretando un poco más, he aquí tres situaciones muy representativas de lo que acabamos de decir:

• Teorías de Gauge

Constituyen el formalismo por excelencia según el esquema anterior para explicar qué son las "*partículas elementales* " y cómo se comportan las "*fuerzas* " que actúan entre ellas, esto es: la **gravitatoria**, la **electromagnética**, la **fuerte** (que rige la física del núcleo atómico) y la **débil** (responsable de la desintegración β). Su meta principal es llegar a obtener una "*teoría unificada*" de dichas fuerzas en el sentido que tuvieron en su momento los intentos (fallidos) de Einstein para unificar la gravedad y el electromagnetismo a nivel clásico y la propuesta de Heisenberg, muchos años después (y también sin éxito), de un "*campo cuántico* " generando todas las partículas y sus interacciones. A este respecto, el denominado "*modelo estándar*", propuesto en 1970 como combinación del modelo electrodébil de Glashow-Weinberg-Salam y la cromodinámica cuántica que describe las interacciones fuertes, sigue siendo hasta la fecha el logro de mayor alcance en esta dirección.

Un concepto básico común en todos estos modelos es el de "*acoplamiento mínimo*":

En relatividad general, primera teoría gauge de la historia de la física, ello no es otra cosa que el procedimiento que llevó a Einstein a obtener dicha teoría a partir de una densidad lagrangiana $L(g, \Psi, \text{“}\partial\Psi/\partial x^{\alpha}\text{”})\sqrt{-\det g}\mathrm{d}^4x$ sobre el espacio-tiempo de Minkowski (M_4, g) invariante por el grupo inhomogéneo de Lorentz, mediante el "trick"de sustituir en la misma la métrica de Minkowski por una métrica de signatura $(3,1)$ arbitraria (campo gravitatorio), las derivadas ordinarias "$\partial\Psi/\partial x^{\alpha}$" (mal definidas como tensores) por las derivadas covariantes respecto de la conexión de Levi-Civita $\nabla(g)_{\partial/\partial x^{\alpha}}\Psi$, y tomar para ambos campos la densidad lagrangiana suma

$$[R(g) + L\,(g, \Psi, \nabla(g)\Psi)]\,\sqrt{-\det g}\mathrm{d}^4x$$

Del mismo tipo es la idea que llevó a Yang y Mills en 1955 a introducir los campos que llevan su nombre para describir las interacciones fuertes en física nuclear:

Tras interpretar la interacción de los campos cargados eléctricamente con su campo electromagnético asociado como el paso de una densidad lagrangiana $L(g, \Psi, \partial\Psi/\partial x^{\alpha})\sqrt{-\det g}\mathrm{d}^4x$ sobre el espacio-tiempo de Minkowski (M_4, g) invariante por el grupo $U(1)$ a la densidad lagrangiana suma $[(1/4)\|\mathrm{d}A\|^2 + L\,(g, \Psi, (\partial/\partial x^{\alpha} - iA_j)\Psi)]\,\sqrt{-\det g}\mathrm{d}^4x$ que se convierte de este modo en invariante por el grupo gauge $\{e^{2\pi i f(x)}\,,\ f(x) \in C^{\infty}(M_4)\}$, estos autores generalizaron a $SU(2)$, $SU(3)$ y otros grupos de simetrías dicho procedimiento (el "*trick*" de Yang-Mills) introduciendo un nuevo campo de ¡naturaleza geométrica desconocida! que veinte años después se identificó con las conexiones, A, de un fibrado principal $p\colon P \to M_4$ con grupo estructural, G, las simetrías inicialmente dadas (H. Kerbrat-Lunc [48], A. Pérez-Rendón [67], Yang y Wu [81] etc.)

La parte de la acción correspondiente al nuevo campo es la célebre lagrangiana de Yang-Mills

$$\mathcal{L}_{\text{Y-M}} = \frac{1}{4} \| \operatorname{Curv} A \|^2 \sqrt{-\det g} \mathrm{d}^4 x$$

donde $\operatorname{Curv} A$ es la 2-forma de curvatura de la conexión A, y $\| \, \|$ la norma definida por las métricas de Minkowski y de Cartan-Killing del grupo estructural.

En este caso, el campo material, Ψ, son las secciones de un fibrado vectorial asociado a P, el "*acoplamiento mínimo* " viene definido por las derivadas covariantes $\nabla_{\partial/\partial x^\alpha} \Psi$ respecto de la conexión A, y el grupo gauge, $\operatorname{Gau} P$, es el de los automorfismos verticales de P actuando sobre las conexiones y las secciones del fibrado vectorial asociado del modo natural.

La consideración, por último, del grupo $\operatorname{Aut} P$ de todos los automorfismos del fibrado principal $p \colon P \to M_4$ como grupo gauge de la teoría, que incluye a los grupos de simetrías de la relatividad general y de la teoría de Yang-Mills bajo la forma:

$$1 \to \operatorname{Gau} P \to \operatorname{Aut} P \to \operatorname{Diff} M_4 \to 1$$

condujo de un modo natural a un planteamiento de tipo Kaluza-Klein, a partir del cual se obtienen de un modo unificado las ecuaciones de Einstein y de Yang-Mills con sus interacciones mínimas correspondientes.

Combinando adecuadamente estos acoplamientos con algún que otro elemento "*ad hoc*" (como la introducción de los llamados campos de Higgs para generar masas en los bosones y fermiones) se obtiene la acción $S[A, \Psi, g]$ del modelo estándar, donde A es una terna de conexiones sobre otros tantos fibrados principales de variedad base el espacio-tiempo, M_4, y grupos estructurales: $U(1)$ (campo electromagnético), $SU(2)$ (campo débil) y $SU(3)$ (campo fuerte), Ψ son las secciones de un fibrado vectorial representando los campos materiales y g es la gravedad. Dicho modelo no sólo está muy bien elegido sino también es esencialmente único en el sentido de la geometría no conmutativa como veremos después. Por otra parte, su integral de Feynman correspondiente da lugar a una teoría cuántica de campos con resultados numéricos concordantes con la experiencia hasta un orden de aproximación de 10^{-11}; de ahí el éxito de esta teoría que ha sobrevivido a muchos intentos de sustitución.

No obstante todo ello, es bien sabido que el modelo no es plenamente satisfactorio, siendo su principal deficiencia la definición y uso que se hace en el mismo del espacio-tiempo y de la gravedad, cuya cuantificación ha sido siempre problemática así como su compatibilización con las otras tres interacciones fundamentales. En este sentido, resultaron muy esperanzadoras otras nuevas propuestas muy distintas de la teoría relativista de campos tradicional, como por ejemplo: la **teoría de campos conformes**, los **campos de Chern-Simons**, los **twistors** y, sobre todo, la famosa **teoría de cuerdas**, donde los campos usuales se tornan en auténticas figuras geométricas (las cuerdas) que viven en un nuevo espacio-tiempo cuya dimensión (26 o 10 según se trate de los casos bosónico o supersimétrico) depende ahora de ciertas condiciones de compatibilidad de la doctrina.

En cualquier caso, lo que se mantiene intacta en todas estas teorías es la estructura diferenciable ordinaria de sus diferentes piezas, siendo su rasgo más característico la consideración *ab initio* de un "*grupo gauge*" de simetrías de la densidad lagrangiana que esencialmente la determinan de modo único por puras razones de invarianza (R. Utiyama [76], P. García [32], D. Betounes [5], etc.).

• Variedades Graduadas y Supervariedades

Con esta nueva propuesta de espacios que generaliza las variedades diferenciables ordinarias se trató de proporcionar un marco adecuado a las teorías de supersimetría y supergravedad que aparecieron a finales de los años 70 y principios de los 80.

Como se sabe, en teoría cuántica de campos hay dos clases de campos que describen los diferentes tipos de partículas elementales: los campos bosónicos (de espín entero) y los fermiónicos (de espín semientero). En los primeros, el espacio de estados es un espacio de funciones ordinarias, mientras que en los segundos se trata de un espacio de funciones valoradas en un álgebra de Grassmann. En este contexto, el principio básico de la supersimetría consiste en suponer que las ecuaciones de campo son invariantes por ciertas transformaciones que *"mezclan"* ambos tipos de campos o, lo que es lo mismo, *"intercambian"* entre sí bosones y fermiones.

Por otra parte, el deseo de unificar la gravedad con los campos de espín semientero y los intentos para construir una teoría cuántica consistente de la gravitación, condujeron de un modo natural a esta categoría más amplia de variedades en cuyo seno pudo formularse el concepto de *"supergravedad"*.

Una tercera idea, en fin, que influyó también en el desarrollo de esta doctrina fue el intento de eliminar la asimetría entre los campos gauge y los campos materiales con los que interactúan por acoplamiento mínimo, mediante la construcción de un supercampo gauge libre en un adecuado superfibrado principal que permitía describir de un modo unificado esta clase de interacciones.

La nueva teoría se desarrolló en dos vertientes diferentes: las variedades graduadas debida a Berezin, Kostant y Leites y las supervariedades en el sentido de Rogers, Jadczyk-Pilch , Boyer-Gitler y otros. *Grosso modo*, puede decirse que en una supervariedad se aumentan los puntos de una variedad clásica, en tanto que en una variedad graduada los puntos son los mismos pero aumentan las funciones. Más concretamente, si en las supervariedades el álgebra de Grassmann $\bigwedge \mathbb{R}^l$ (para un cierto $l \in \mathbb{N}$) juega el papel que tienen los números reales en la teoría de variedades ordinarias, las variedades graduadas son, en cambio, pares (M, A) donde M es una variedad clásica y A un cierto tipo de álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada de funciones sobre M dotada de una proyección natural $\sim : A \to C^\infty(M)$. Ambas categorías de variedades son equivalentes –Batchelor [4], donde se prueba también que el álgebra de una variedad graduada es el álgebra de secciones del álgebra exterior de un fibrado vectorial ordinario–, pero ello no implica en modo alguno que las teorías de campos para supervariedades y para variedades graduadas puedan construirse del mismo modo y conduzcan a resultados equivalentes. De ahí la disyuntiva: ¿supervariedades o variedades graduadas?. A este respecto, hay que decir que aunque las supervariedades fueron inicialmente el modelo más usado en la física de supersimetrías, la teoría de variedades graduadas se ajustó más a la concepción moderna de la geometría y de la física según la cual el álgebra de funciones (los observables) constituye el elemento primario de la doctrina.

Bajo este segundo planteamiento, D. Hernández y J. Muñoz desarrollaron en [39] y [40] un Cálculo de Variaciones de primer orden sobre los fibrados de variedades graduadas siguiendo la línea argumental establecida por P. García, A. Pérez-Rendón y J. Muñoz para el caso ordinario, que la hacían especialmente apta para la nueva situación al estar formulados todos sus conceptos básicos en términos de las álgebras de funciones de los fibrados de jets, exclusivamente.

El punto de partida de dicha teoría es la noción de elemento de volumen graduado:

Dada una variedad graduada (M, A) de proyección natural $\sim : A \to C^\infty(M)$, por un resultado de Kostant, la proyección $\sim$ induce isomorfismos $H^i\left(\bigwedge^{\cdot}\Omega(M,A)\right) \to H^i\left(\bigwedge^{\cdot}\Omega(M)\right)$ para todo $i \geq 0$, entre los grupos de cohomología de de Rham de (M, A) y de M, de modo que no puede haber otra noción de elemento de volumen graduado que una m-forma graduada cerrada $\omega \in \bigwedge^m \Omega(M, A)$ que se $\sim$-proyecta sobre un elemento de volumen ordinario $\widetilde{\omega}$ de la variedad M ($m = \dim M$). La integral graduada correspondiente es ahora la composición $\bigwedge^m \Omega(M, A) \to \bigwedge^m \Omega(M) \to \mathbb{R}$ definida por la regla:

$$\eta \mapsto \widetilde{\eta} \mapsto \int_M \widetilde{\eta}, \text{ (rel. a } \widetilde{\omega})$$

A partir de aquí, si $p\colon (E, B) \to (M, A)$ es un fibrado de variedades graduadas, una densidad Lagrangiana graduada sobre el fibrado de 1-jets graduado $J^1(B/A)$ es una m-forma $L\omega$ donde L es una función del álgebra graduada de $J^1(B/A)$. En estas condiciones y con la noción de integral anterior, las fórmulas $(\star)$ y $(\star\star)$ que definen la acción $\mathfrak{L}$ y su diferencial $\delta_s\mathfrak{L}$ en una sección s, pueden generalizarse al caso graduado así como el concepto de estacionaridad.

Lo más destacable de esta teoría es que la formula de variación $(\star\star\star)$ a la que se llega pasa al jet de segundo orden $J^2(B/A)$ aunque se trate de un problema variacional de primer orden, y que el operador de Euler-Lagrange tiene dos componentes: una de ellas la generalización natural de las ecuaciones clásicas y otra nueva que, en el caso de la supergravedad, coincide con las ligaduras impuestas *"ad hoc"* sobre ciertas componentes de la curvatura y de la torsión por varios autores (Wess, Mansuri etc.). Para más detalles sobre esta doctrina, incluyendo la teoría de simetrías de Noether, la estructura multisimpléctica, la aplicación a los campos gauge (teorías de supergauge) y la versión supersimétrica de la teoría de cuerdas (supercuerdas) pueden verse D. Hernández-J. Muñoz [42], A. López [58] y M. Green-J. Schwartz-E. Witten [35], respectivamente.

Decir por último que aunque esta teoría es la más natural que puede establecerse en la categoría graduada, muchas lagrangianas de interés físico se definen en términos de la denominada *"integral de Berezin"*, para la que no existe un cálculo diferencial exterior suficientemente efectivo. En [41] y [43] D. Hernández y J. Muñoz compararon ambos planteamientos dando un principio de equivalencia que permite pasar de una formulación a otra; concretamente: tras dar una descripción intrínseca del haz Bereziniano en términos de una cierta clase de superoperadores diferenciales, estos autores probaron que todo problema variacional Bereziniano de primer orden es equivalente a un problema variacional de orden superior definido por una densidad lagrangiana graduada. En particular, se puede dar una interpretación de la integral de Berezin sobre los grupos topológicos graduados análoga a la medida de Haar para los grupos topológicos localmente compactos, que permite aclarar de un modo esencial este concepto básico a la luz del Análisis.

• Geometría no conmutativa

En el marco de esta doctrina, desarrollada por Alain Connes y su escuela a lo largo de los últimos veinticinco años, se hace una propuesta de espacio-tiempo en cuyo seno parece haberse conseguido una razonable unificación del modelo estándar con la relatividad general vía un *"principio de acción espectral"* propuesto en 1997 por A. Chamseddine y Connes mismo [12].

El punto de partida de esta nueva geometría, bien conocido por otra parte en álgebra conmutativa y geometría algebraica, es la idea de obtener el espacio subyacente a un álgebra de funciones como el espectro del álgebra.

Este planteamiento, que transcendió pronto el ámbito concreto en el que nació para verse reflejado en otras disciplinas matemáticas (Lógica, Análisis armónico, Álgebra diferencial, etc.), está también en la base de la fenomenología cuántica, según la cual el espacio-tiempo no debe ser considerado como un concepto primario sino más bien derivarse del álgebra de observables (operadores) del sistema físico correspondiente.

Desde esta perspectiva, si el descubrimiento de Gelfand y Neumark de 1943 fue esencialmente la caracterización topológica de las C*-álgebras, la noción básica que aspira a representarse geométricamente en la teoría de Connes es la de un triple espectral, esto es: una terna $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ constituida por una $*$-álgebra, $\mathcal{A}$, una representación de la misma por operadores acotados de un espacio de Hilbert, $\mathcal{H}$, y un operador D autoadjunto (posiblemente no acotado) de $\mathcal{H}$ tal que el conmutador $[D, a]$ es acotado para todo $a \in \mathcal{A}$ y $(D^2 + 1)$ es compacto. El operador D^{-1} es la traducción a este lenguaje del elemento de longitud de la geometría. En particular, así como toda C*-álgebra conmutativa unitaria es el álgebra de las funciones continuas sobre el espacio topológico compacto de sus ideales maximales (espectro), el modelo geométrico al que aspira a representarse un triple espectral conmutativo unitario es el de una variedad diferenciable compacta espinorial riemanniana, (M, g), donde $\mathcal{A}$ se identifica con la $*$-álgebra $C^\infty(M) \otimes \mathbb{C}$, $\mathcal{H}$ es el espacio de Hilbert $L^2(S)$ de las secciones de cuadrado integrable del fibrado $S \to M$ de espinores asociado a la estructura espinorial, $\mathcal{A}$ opera por producto sobre $L^2(S)$, y D es el operador de Dirac. La traducción a este planteamiento de resultados clave de la teoría de variedades debidos a Atiyah, Brown, Douglas, Fillmore, Sullivan y otros, permitió caracterizar algebraicamente los triples espectrales representables de esta manera mediante siete axiomas (A. Connes [17]) donde se contemplan dos operadores más del espacio de Hilbert: la $\mathbb{Z}_2$-graduación, γ, y la estructura real, J, que son las abstracciones respectivas de la *"chiralidad"* y la *"conjugación de la carga"* del modelo ordinario.

En estas condiciones, la variedad M se recupera como el espectro maximal de la C*-álgebra conmutativa obtenida mediante el cierre por la norma de la acción de $\mathcal{A}$ sobre $\mathcal{H}$, mientras que la distancia geodésica entre dos puntos $x, y \in M$ viene dada por la fórmula:

$$d(x, y) = \text{Sup}\{|a(x) - a(y)| \,/\, a \in \mathcal{A}, \|[D, a]\| \leq 1\}$$

La generalización al caso no conmutativo resulta ahora evidente, proponiéndose también siete axiomas para los correspondientes triples espectrales, tres de ellos exactamente iguales a los del caso conmutativo y los restantes ligeramente modificados. La clase de geometrías que se obtiene de este modo es muy amplia, pudiendo convivir en pie de igualdad los espacios clásicos con otros *"discretos"* así como sus posibles *"mezclas"* obtenidas por producto tensorial. En particular, se sitúa así en su justo punto una vieja idea de Heisenberg de 1938 de usar relaciones de incerteza para las coordenadas espacio-temporales con objeto de atenuar las singularidades que se presentan a corta distancia en teoría cuántica de campos, idea esta, desarrollada unos años después por Snyder y replanteada más recientemente por S. Doplicher, K. Fredenhagen y J. Roberts como procedimiento para evitar el colapso gravitacional al localizar puntos del espacio-tiempo con excesiva precisión (véase R. Jackiw [47] para más detalles sobre este asunto).

Con esta nueva noción de espacio-tiempo, los conceptos de base de la teoría de campos pueden introducirse ahora siguiendo las pautas de la geometría algebraica. Así, por ejemplo, el espacio $\Omega^k(\mathcal{A})$ de las k-formas sobre $\mathcal{A}$ es el bimódulo generado por los símbolos "$a_0 \mathrm{d}a_1 \ldots \mathrm{d}a_k$" con $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathcal{A}$ y las relaciones $\mathrm{d}(a \cdot b) - \mathrm{d}a \cdot b - a \cdot \mathrm{d}b = 0$, $\mathrm{d}1 = 0$, definiéndose la diferencial sobre el álgebra graduada $\Omega^\bullet(\mathcal{A}) = \oplus_k \Omega_k(\mathcal{A})$ por la regla $\mathrm{d}(a_0 \mathrm{d}a_1 \ldots \mathrm{d}a_k) = \mathrm{d}a_0 \mathrm{d}a_1 \ldots \mathrm{d}a_k$. Los fibrados vectoriales son los $\mathcal{A}$-módulos proyectivos finito-generados, mientras que las formas sobre $\mathcal{A}$ con valores en un fibrado vectorial E se definen como los elementos del producto tensorial $E \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^\bullet(\mathcal{A})$. Las definiciones y fórmulas clásicas para los módulos de secciones de los fibrados vectoriales permiten, en fin, generalizar los conceptos de conexión, curvatura, métricas y conexiones hermíticas, etc., abriéndose con ello el camino para extender la teoría de campos a la nueva situación.

Fue así, de hecho, como A. Connes y J. Lott formularon en 1990 el modelo estándar en geometría no conmutativa [16], logrando caracterizar dicho modelo como un simple acoplamiento mínimo entre un campo de Yang-Mills y un campo de Dirac, en el cual quedan absorbidos los artificiosos campos de Higgs y sus interacciones por la no conmutatividad de la estructura geométrica. Más concretamente, la propuesta que hicieron estos autores fue la de una geometría levemente no conmutativa, obtenida por el producto tensorial de la geometría (conmutativa) del espacio-tiempo ordinario, M_4, por una geometría de tipo cuaterniónico de espectro un par de puntos (p, p'). Sobre el espacio-tiempo resultante, $M_4 \times \{p, p'\}$, la acción de Dirac-Yang-Mills no conmutativa $\mathcal{L}(\nabla, \psi) = \langle \psi, D_\nabla \psi \rangle + \mathrm{tr}\left((\mathrm{Curv}\,\nabla)^2 D_\nabla^{-4}\right)$ (donde D_∇ es el operador de Dirac del acoplamiento mínimo operando sobre el espacio de Hilbert de los campos materiales, $\mathrm{Curv}\,\nabla$ la curvatura de la conexión hermítica ∇ representada como un operador de dicho espacio, y donde el segundo término es la traza de Dixmier o *"integral"* de la *"densidad Lagrangiana"* $(\mathrm{Curv}\,\nabla)^2 D_\nabla^{-4}$), define un *"acoplamiento mínimo"* en el cual los campos de Higgs y sus interacciones no son otra cosa que la restricción de la conexión ∇ y del propio acoplamiento mínimo a la dirección discreta del nuevo espacio-tiempo.

Acerca de esta teoría, resulta muy sugestivo el comentario final de sus autores en el mencionado artículo:

"Del mismo modo que el espacio-tiempo de Minkowski es una consecuencia natural de la teoría de Maxwell, nuestra geometría no conmutativa puede ser considerada fenomenológica en el sentido de que se obtiene sin ambigüedad de la acción fenomenológica del modelo estándar".

La unificación de dicho modelo con la relatividad general se obtuvo, finalmente, con el *"principio de acción espectral"* de Chamseddine y Connes ya citado, en el cual se contemplan como únicas variables dinámicas los *"espinores"* y el *"operador de Dirac"* que definen la propia geometría.

La nueva acción viene dada por la fórmula universal sobre los triples espectrales $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$:

$$\mathfrak{L}(\psi, D) = \langle \psi, D\psi \rangle + \mathrm{tr}\,\chi(D/\Lambda)$$

donde $\mathcal{A}$ y $\mathcal{H}$ se consideran fijos, ψ recorre el espacio de espinores $\mathcal{H}$, χ es una función positiva y Λ es un factor de escala.

En particular, cuando este principio se aplica a la geometría del modelo estándar, se obtiene una verdadera unificación, a nivel clásico, de dicho modelo con la gravedad, donde el término $\langle \psi, D\psi \rangle$ incluye las interacciones de los fermiones con los bosones de espín 1 y los campos de Higgs, mientras que el segundo término $\mathrm{tr}\,\chi(D/\Lambda)$ coincide (módulo $o(\Lambda^{-\infty})$) con las restantes partes del modelo estándar junto con la acción de Einstein-Hilbert (con constante cosmológica) y la gravedad de Weyl.

Decir, por último, que análogamente a la teoría de Einstein-Yang-Mills clásica, el grupo gauge de esta teoría es el grupo $\mathrm{Aut}\,\mathcal{A}$ de los automorfismos del álgebra $\mathcal{A}$, que incluye las simetrías internas, $\mathrm{Int}\,\mathcal{A}$, bajo la forma:

$$1 \to \mathrm{Int}\,\mathcal{A} \to \mathrm{Aut}\,\mathcal{A} \to \mathrm{Out}\,\mathcal{A} \to 1$$

donde $\mathrm{Int}\,\mathcal{A} \subset \mathrm{Aut}\,\mathcal{A}$ es el subgrupo normal de los automorfismos internos definidos por los elementos $u \in \mathcal{A}$ tales que $u \cdot u^* = u^* \cdot u = 1$.

Constatado una vez más el planteamiento variacional de la física con todas estas doctrinas, hay que hacer notar, sin embargo, que dicho planteamiento no ha conducido siempre a una estructura hamiltoniana básica para construir la dinámica tal y como vimos en la sección anterior. Este es el caso, por ejemplo, de la teoría de Yang-Mills euclidiana, utilizada para computar la integral de Feynman y posteriormente obtener la del caso minkowskiano por prolongación analítica que, como se sabe, llevó a la introducción de los instantones sobre la esfera cuadridimensional, S^4, de cuyo espacio (variedad diferenciable de dimensión finita con singularidades) hizo uso Donaldson para probar importantes resultados sobre 4-variedades. A pesar de ello, puede decirse que han sido dichas *"teorías no dinámicas"* las que han marcado más el carácter de las nuevas relaciones entre la física y la geometría, las cuales han conducido, por un lado, a importantes resultados en geometría diferencial y algebraica, topología, aritmética, etc. y, por otro, a que la física teórica haya ampliado su arsenal metodológico al incorporar las poderosas técnicas de estas nuevas disciplinas. Para más detalles sobre esta interesante simbiosis puede verse: M. Atiyah [3], E. Witten [79], S. Donaldson [20] y N. Hitchin, G. Segal y R. Ward [45].

No es este el momento, ni yo la persona más adecuada, para valorar este profundo cambio desde el punto de vista físico. Sin salirnos de esta docta Casa, los discursos de ingreso de los académicos D. Alberto Galindo [26] y D. Francisco Yndurain [82] y sus respectivas contestaciones por Sánchez del Río y Galindo mismo, son una buena referencia al respecto. Y, transcurridos ya más de treinta años de una ininterrumpida *"teoría de cuerdas"*, resultan muy instructivos también el bello *"diálogo sobre gravedad cuántica"* de Carlo Rovelli [69], y la reciente crítica de Bert Schroer [70] a la teoría de cuerdas reivindicando algunos de los aspectos más estructurales de la teoría cuántica de campos, como son: la formulacíon axiomática (Wightman), la teoría constructiva (Nelson-Glimm), la teoría algebraica de campos cuánticos (Haag), los formalismos euclídeos (Osterwalder-Schreder), etc.

Llegado aquí, no sería justo concluir esta sección sin hacer alguna referencia a lo que han sido estos últimos años para la mecánica en su sentido más tradicional.

Como indicamos al principio de nuestra exposición, la formulación de Hamilton de la mecánica analítica evolucionó cada vez más desligada de su origen variacional, lo cual, en opinión del físico francés Jean Marie Souriau [74], supuso un notable retroceso respecto de la formulación establecida un cuarto de siglo antes por Lagrange. Concretamente, lo que defiende este autor es que lo que se dio en llamar a partir de Hamilton *"espacio de fases"* en abstracto debía más bien considerarse como un concepto derivado bajo la forma de la *"variedad de extremales"* de un sistema lagrangiano. Y este ha sido, precisamente, el punto de vista adoptado en la *"teoría de Hamilton-Cartan del cálculo de variaciones"* que hemos comentado ya.

En cualquier caso, la formulación moderna de la teoría de Hamilton abstracta se estableció a fines de los años cincuenta para los sistemas con un número finito de grados de libertad (Lichnerowicz, Reeb, Liebermann ...) y pocos años después, con la introducción de las variedades diferenciables de dimensión infinita, se generalizó a los campos y medios continuos (Ebin, Fischer, Marsden, ...). En el caso conservativo, la estructura básica de esta doctrina es una terna (M, ω, H), donde M es una variedad diferenciable cuyos puntos se identifican con los *"estados"* por los que puede pasar el sistema y sus funciones con los *"observables"* del mismo, ω es una 2-forma no singular tal que $\mathrm{d}\omega = 0$ (métrica simpléctica), y H es la función energía o hamiltoniana. A partir de estos datos, si D_f es el gradiente simpléctico de una función f ($i_{D_f}\omega = -\mathrm{d}f$), la evolución temporal del sistema no es otra cosa que el grupo uniparamétrico $\{\tau_t^H\}$ generado por D_H, mientras que el producto $\{f, g\} = \omega(D_f, D_g)$ dota a los observables de una estructura de álgebra de Lie real (álgebra de Poisson) a partir de la cual, recíprocamente, puede recuperarse la métrica simpléctica inicial.

También esta doctrina adquirió su significado físico desde una perspectiva cuántica al presentarse en los años veinte como el substrato macroscópico de la formulación de Schrödinger-Heisenberg de la mecánica cuántica vía un proceso denominado *"cuantificación"*, consistente –según Dirac, Weyl y von Neumann– en representar (irreduciblemente) el álgebra de Poisson de los observables de un sistema hamiltoniano en el álgebra de los operadores autoadjuntos de un espacio de Hilbert complejo de dimensión infinita, donde por representación se entiende una aplicación $\mathbb{R}$-lineal $f \mapsto \hat{f}$ entre dichas álgebras tal que $\widehat{\{f,g\}} = [\hat{f},\hat{g}]$, y $\hat{1} = k\mathrm{Id}$ para una cierta constante k. Los *"estados"* del sistema cuántico al que así se llega se identifican con los subespacios de dimensión 1 del espacio de Hilbert mientras que los *"observables"* son los operadores autoadjuntos, $\hat{f}$, obtenidos por el proceso de cuantificación. En cuanto a la evolución temporal del sistema, viene dada por la acción sobre los estados o los observables del grupo uniparamétrico $e^{-i\hat{\mathcal{H}}t}$, generado por la hamiltoniana $\hat{\mathcal{H}}$ según el teorema de Stone.

A este respecto, es oportuno señalar aquí que la resolución de este problema en términos de la estructura simpléctica del espacio de fases se consiguió en los años setenta, iniciándose con ello un brillante capítulo de la mecánica hamiltoniana conocido como **Cuantificación Geométrica**.

Basada en una idea de J.M. Soriau, esta doctrina fue establecida y desarrollada por B. Kostant [52], que la usó como un instrumento básico de su teoría de las representaciones unitarias de los grupos de Lie conexos. Tras la realización de la métrica simpléctica (verificando una cierta condición de integralidad) como la 2-forma de curvatura de una conexión hermítica sobre un fibrado de línea complejo $p\colon L \to M$, el álgebra de Poisson de la variedad simpléctica (M,ω) puede hacerse operar sobre las secciones de L de tal manera que el paréntesis de Poisson se transforma en el conmutador de operadores y la función unidad se aplica en el producto de una constante por la identidad (precuantificación). Tomando ahora secciones que son constantes en ciertas direcciones mediante la introducción de una estructura adicional denominada *"polarización"*, y tensorializando dichas secciones por unos nuevos objetos llamados *"semiformas"* se obtiene un espacio de Hilbert complejo que de este modo está canónicamente asociado a la variedad simpléctica y a la polarización consideradas. La cuantificación se obtiene, finalmente, restringiendo el homomorfismo de precuantificación a dicho espacio de Hilbert.

Investigada muy activamente esta teoría los últimos treinta años, especialmente en el caso de los sistemas con un número finito de grados de libertad (D.J. Simms [71], J. Sniatycki [72], N. Woodhouse [80], V. Guillemin y S. Sternberg [36] etc.), su generalización a la teoría relativista de campos ha sido retomada recientemente con nuevas propuestas que intentan resolver algunas de las dificultades que se presentan en el caso de dimensión infinita (O. Müller [64]).

Otro tema muy representativo de la doctrina hamiltoniana en esta cuarta etapa es, sin duda alguna, lo que ha dado en llamarse **Reducción Hamiltoniana**, cuyo principal objetivo es reducir el estudio de un sistema mecánico al espacio cociente por la acción de sus simetrías.

En su formulación moderna, dicha doctrina se inicia a principios de los años sesenta, en pleno auge de lo que ha dado en llamarse "*mecánica geométrica*", con el estudio topológico de la aplicación momento desarrollado por Smale para tratar el problema de los n cuerpos en mecánica celeste. De hecho, fue este autor el primero en destacar la importancia del concepto de "*aplicación momento*" y de las "*construcciones cociente*" en mecánica geométrica. El punto de partida de la teoría, tal y como es conocida hoy día, lo constituye un celebrado teorema de Marsden y Weinstein de 1974 [62], que tuvo como antecedente más inmediato un trabajo de Meyer del año anterior. De un modo más preciso:

Dada una variedad simpléctica (M, ω) y un grupo de Lie G de álgebra de Lie $\mathcal{G}$, se dice que una acción $g \in G \mapsto \phi_g \colon M \to M$ de G sobre M por difeomorfismos simplécticos ($\phi_g^*\omega = \omega$) es hamiltoniana respecto de una aplicación momento (equivariante) $\psi \colon M \to \mathcal{G}^*$, cuando para todo $g \in G$ y todo $\xi \in \mathcal{G}$ se verifica: $i_{D_\xi}\omega = -\mathrm{d}\psi_\xi$ y $\psi \circ \phi_g = \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}} \circ \psi$, donde ψ_ξ es la función $\psi_\xi \colon x \in M \mapsto \psi(x)(\xi)$, D_ξ es el campo vectorial inducido por ξ sobre M por la acción del grupo, y Ad^* es la representación adjunta.

Este es el caso, por ejemplo, de los sistemas lagrangianos para los cuales G es el grupo de simetrías de la densidad lagrangiana, $\mathcal{G}$ son las simetrías infinitesimales correspondientes y la aplicación momento (para los sistemas hiperbólicos) viene definida por la integración sobre una hipersuperficie portadora de condiciones iniciales para las ecuaciones de campo de la correspondencia entre las simetrías infinitesimales y sus corrientes de Noether establecida por la forma de Poincaré-Cartan.

En estas condiciones, lo que se afirma en el teorema de Marsden-Weinstein es que si la acción del grupo G sobre la variedad M es libre y propia y $\mu \in \mathcal{G}^*$ es un valor regular de la aplicación momento $\psi\colon M \to \mathcal{G}^*$, entonces $\psi^{-1}(\mu)$ es una subvariedad de M y el espacio de órbitas $M_\mu = \psi^{-1}(\mu)/G_\mu$ por el subgrupo de isotropía $G_\mu = \{g \in G \mid \mathrm{Ad}_g^*(\mu) = \mu\}$ es una variedad sobre la cual la 2-forma restricción $\omega|_{\psi^{-1}(\mu)}$ proyecta en una métrica simpléctica ω_μ. El proceso de reducción se completa ahora teniendo en cuenta que G es además un grupo de simetrías de la hamiltoniana H de modo que la restricción $H|_{\psi^{-1}(\mu)}$ se proyecta también en una función, H_μ, sobre la variedad cociente M_μ. La familia de ternas $(M_\mu, \omega_\mu, H_\mu)$ es, finalmente, el sistema hamiltoniano reducido.

También este tema ha sido intensamente investigado los últimos treinta años, empezando con la debilitación de las condiciones impuestas a la acción del grupo de simetrías. Así, por ejemplo, si la acción de G sobre (M, ω) es propia pero no libre, los espacios de órbitas, M_μ, están estratificados por variedades simplécticas, pudiéndose caracterizar su geometría por el anillo $(\mathcal{C}^\infty(\psi^{-1}(\mu)))_{G_\mu}$ de las funciones G_μ-invariantes. Esta nueva situación, llamada **Reducción Singular**, se remonta a Smale, que caracterizó los puntos regulares de una aplicación momento por la condición de no tener un subgrupo de isotropía continuo (véase a este respecto Arms, Marsden y Moncrief [2], Cushman [19], Arms, Cushman y Gotay [1], etc.). Más complicado es el caso en que la acción del grupo no es propia, con lo que se abre un nuevo capítulo de esta doctrina conocido como **Reducción Algebraica** (Śniatycki y Weinstein [73], Kimura [49], Willbour [78], etc.). Otros frentes muy activamente tratados también han sido la generalización a las variedades de Poisson, de contacto, de Jacobi, kählerianas e hiperkählerianas etc. Para una exposición muy completa de todos estos temas puede verse el reciente libro de J. Ortega y T. Ratiu: "*Momentum Maps and Hamiltonian Reduction*" [66].

Como tercera ilustración del punto de vista hamiltoniano de los últimos años citar, finalmente, lo que se conoce en la literatura como **Integradores**

Simplécticos.

En la encrucijada de la mecánica geométrica, el análisis numérico y la computación, esta doctrina empezó con los trabajos pioneros de Vorgelaere, Ruth y Feng Kang sobre la integración numérica de los sistemas hamiltonianos de dimensión finita. Basada en la idea de aproximar el grupo uniparamétrico de difeomorfismos simplécticos $\{\tau_t^H\}$ que integra las ecuaciones de Hamilton por un esquema numérico $x_{n+1} = \Phi_h(x_n)$ (h =constante de discretización) cuya primera etapa $x_0 \in M \mapsto \Phi_h(x_0) = x_1$ sea un difeomorfismo simpléctico, la observación clave es que dichos esquemas (integradores simplécticos) propagan el error en las integraciones a tiempo largo de un modo más favorable que otros algoritmos numéricos. Más aún, tales integradores pueden interpretarse como los (casi-)flujos simplécticos $x_n = \tau_{nh}^{\tilde{H}}(x_0)$ obtenidos a partir de la solución de un sistema hamiltoniano modificado de hamiltoniana una serie asintótica $\tilde{H} = H + hH_1 + h^2H_2 + \ldots$ en la constante de discretización.

Este es, grosso modo, el origen de las "*técnicas discretas*" en mecánica hamiltoniana que no han dejado de desarrollarse a lo largo de los últimos veinte años tanto desde el punto de vista puro como aplicado. Véase, por ejemplo, Channell y Scovel [13], González [34], McLachlan, Quispel y Robidoux [63], y, más recientemente, el brillante discurso de ingreso a esta Academia de nuestro compañero Jesús Sanz-Serna, reconocido especialista en este tema desde sus mismos comienzos.

Como se ve, el punto de vista hamiltoniano se convirtió en esta cuarta etapa en una poderosa metodología que transcendió la propia física para aplicarse a otras muchas disciplinas de matemática pura y aplicada. El caso lagrangiano, qué duda cabe, continuó siendo una aplicación importante, pero siempre en tanto que un sistema hamiltoniano derivado de una formulación variacional cuyo planteamiento inicial no tenía, en principio, significado hamiltoniano alguno. Así las cosas, en los primeros años noventa del pasado siglo se produjo un viraje de estas técnicas hacia el lado lagrangiano, inaugurándose con ello un movimiento neolagrangiano de la mecánica geométrica que, aparte de su interés práctico, está contribuyendo de un modo importante al esclarecimiento teórico de la doctrina variacional y su interpretación física.

Dos temas muy representativos de este nuevo punto de vista son la **Reducción Lagrangiana** y los **Integradores Variacionales** que, en el más puro espíritu de la teoría de Hamilton-Cartan del Cálculo de Variaciones, están completando la misma en algunos de sus puntos esenciales.

Comentemos brevemente ambos temas como cierre de nuestra exposición.

• Reducción lagrangiana

Constituye la versión variacional de la teoría de la reducción: si G es un grupo de Lie de simetrías de un problema variacional de un cierto orden definido por una densidad lagrangiana, $L\omega$, se trata de ver bajo qué condiciones el paso al cociente de $L\omega$ por la acción de G define otro problema variacional de un orden inferior al dado. Remontándose tal planteamiento a las formulaciones de Euler, Lagrange y Poincaré de las teorías del sólido rígido y de la hidrodinámica en términos del álgebra de Lie del grupo de simetrías sobre el que inicialmente están definidos dichos sistemas, su interés en la primera mitad del siglo XX fue notable (Hamel 1904, Ehrenfest 1904, Chetaev 1941, etc.). Tras una larga etapa de olvido, el tema se revitalizó a fines de los años sesenta con los trabajos de Arnold, Ebin y Marsden sobre las ecuaciones de Euler de los fluidos incompresibles, llegando a la actualidad, donde el problema, aunque todavía lejos de alcanzar una solución definitiva, ha podido situarse en su justa perspectiva teórica (Cendra, Ibort y Marsden [10], Castrillón, Marsden y Shkoller [9], Fernández, García y Rodrigo [23] etc.).

El punto clave de la doctrina es que el sistema reducido al que se llega por este procedimiento es un problema variacional que ya no es libre sino que está sometido a una cierta clase de ligaduras no holónomas.

En los sistemas mecánicos tratados por Poincaré, donde la lagrangiana es una función $L\colon T(G) \to \mathbb{R}$ sobre el fibrado tangente de un grupo de Lie G invariante por la acción natural de G sobre $T(G)$, el problema variacional dado se reduce por la proyección $p\colon T(G) \to T(G)/G = \mathcal{G} =$ álgebra de Lie del grupo, a un problema variacional con ligaduras cuya lagrangiana es la proyección $l\colon \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ de L y las variaciones admisibles en cada curva $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathcal{G}$ se identifican con las curvas de la forma $\delta\sigma = \frac{\mathrm{d}\Sigma}{\mathrm{d}t} + [\sigma, \Sigma]$ (Σ =curva arbitraria en el álgebra de Lie). En estas condiciones, las extremales del problema inicial se proyectan en las del problema ligado (reducción), las cuales son a su vez las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden en las curvas del álgebra de Lie (ecuaciones de Euler-Poincaré). Y recíprocamente, conocidas estas últimas se pueden obtener las primeras mediante un proceso de levantamiento obvio (reconstrucción).

Un aspecto importante del nuevo punto de vista es que con esta ampliación de la clase de problemas variacionales se puede introducir una noción de morfismo entre dos problemas variacionales dados que tiene a las reducciones lagrangianas como caso particular. Se obtiene así una categorización del Cálculo de Variaciones que permite incorporar la funtorialidad como requisito básico para sus construcciones derivadas (formulación hamiltoniana, cuantificación, discretizaciones, etc.).

Así, por ejemplo, para los problemas de Poincaré antes citados, la transformación de Legendre permite pasar de dichos problemas a su expresión hamiltoniana $(T^*(G), \omega, H)$ sobre el fibrado cotangente con su métrica simpléctica usual, de tal manera que el morfismo de reducción lagrangiana $p\colon T(G) \to \mathcal{G}$ se aplica en el morfismo $p^*\colon T^*(G) \to \mathcal{G}^*$ de reducción hamiltoniana definido por la acción natural de G sobre $T^*(G)$. Más concretamente, el álgebra de Poisson definida sobre $\mathcal{C}^\infty(T^*(G))$ por la métrica simpléctica se proyecta por p^* en el álgebra de Lie-Poisson $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{G}^*)$ y la hamiltoniana $H \in \mathcal{C}^\infty(T^*(G))$ se proyecta en una cierta función $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{G}^*)$, de modo que las ecuaciones de Hamilton sobre $T^*(G)$ respecto de H se reducen a las ecuaciones de Lie-Poisson sobre $\mathcal{G}^*$ respecto de h. El diagrama finalmente conmuta, al descender la transformación de Legendre $T(G) \simeq T^*(G)$ a una aplicación $\mathcal{G} \simeq \mathcal{G}^*$ que lleva las ecuaciones de Euler-Poincaré a las de Lie-Poisson. Es importante observar en este ejemplo que el morfismo $p^*\colon T^*(G) \to \mathcal{G}^*$ es, de hecho, una aplicación momento cuya familia reducida $\{(T^*(G)_\mu, \omega_\mu, H_\mu) \mid \mu \in \mathcal{G}^*\}$ en el sentido de la reducción hamiltoniana no es otra cosa que la estratificación de $\mathcal{G}^*$ por subvariedades simplécticas (órbitas coadjuntas) definida por el álgebra de Lie-Poisson $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{G}^*)$.

Estas son, entre otras, el tipo de situaciones que se presentan en esta formulación categorial del Cálculo de Variaciones, cuya investigación actual ocupa un lugar muy destacado tanto desde el punto de vista teórico como aplicado. La literatura al respecto es abundante, especialmente en el caso de los sistemas de dimensión finita (Cendra y Marsden [11], Marsden y Scheurle [61], Holm, Marsden y Ratiu [46] etc.). Más problemático es el caso de la teoría de campos para la cual la reducción de la estructura multisimpléctica a una posible generalización de la de Lie-Poisson sólo parece que se entienda bien en unos pocos ejemplos (Marsden, Montgomery, Morrison y Thompson [59], Castrillón, García y Ratiu [7], Castrillón y Marsden [8], etc.).

• Integradores variacionales

Desde esta perspectiva es natural que se abordase una *"discretización"* del Cálculo de Variaciones con el objetivo de obtener los así llamados *"integradores geométricos"* de un modo canónico. Las primeras investigaciones sistemáticas en este sentido se deben a Veselov [77], quien a comienzos de los años 90 desarrolló una mecánica discreta para los sistemas lagrangianos de dimensión finita que le llevó a un tipo de integradores que dejaban invariante una métrica simpléctica (discreta) canónicamente asociada al problema variacional. Dicha teoría fue generalizada en 1998 por Marsden, Patrick y Shkoller a la teoría de campos [60] y, más recientemente, extendida por Chen, Guo y Wu [14] [15], incorporando una idea anterior de T.D. Lee [55] según la cual el espacio-tiempo (discreto) debe considerarse como una variable dinámica más para poder introducir el concepto de momento-energía (discreto) y su correspondiente ley de conservación.

El resultado es, esencialmente, una discretización de la teoría de Hamilton-Cartan del Cálculo de Variaciones, aproximando el caso continuo de la siguiente manera:

Dado un sistema lagrangiano (de primer orden) definido por una acción $\mathfrak{L}\colon \Gamma(M,E) \to \mathbb{R}$ sobre el espacio $\Gamma(M,E)$ de las secciones de un fibrado $p\colon E \to M$, la idea clave de la doctrina consiste en tomar las restricciones $p_d\colon E_d \to M_d$ del fibrado dado a los vértices, M_d, de una descomposición simplicial variable de la variedad base, M, y considerar los correspondientes espacios de secciones $\Gamma(M_d, E_d)$ como el dominio de una acción discreta $\mathfrak{L}_d$ que aproxima la acción $\mathfrak{L}$ inicial por la fórmula:

$$\mathfrak{L}_d(s_d) = \sum_{\Delta} L_\Delta(\{s_d(x_k) \mid x_k: \text{ vértices de } \Delta\}), \quad s_d \in \Gamma(M_d, E_d)$$

donde $\{\Delta\}$ es la descomposición simplicial cuyos vértices definen el dominio de la sección s_d, y L_Δ es una función en las variables x_k :vértices de un símplice Δ, $y_k \in E_{x_k}$ (densidad lagrangiana discreta) que aproxima la acción continua $\mathfrak{L}(s) = \int_{j^1 s} L\omega$ para las secciones $s\colon \Delta \to E$ tales que $s(x_k) = s_d(x_k)$.

De este modo, el sistema lagrangiano considerado puede aproximarse por un problema variacional definido por una función $\mathfrak{L}_d$ en un número finito de variables independientes que, dada su especial estructura, admite una fórmula de la primera variación expresable de la forma:

$$(\delta_{s_d}\mathfrak{L}_d)(\delta x_k, \delta y_k) = \sum_{x_k \in \mathrm{Int}\{\Delta\}} \langle \mathcal{E}_d(s_d), (\delta x_k, \delta y_k) \rangle + \sum_{x_k \in \partial\{\Delta\}} \Theta_d(s_d)(\delta x_k, \delta y_k)$$

donde $\mathcal{E}_d$ y Θ_d son análogos discretos del operador de Euler-Lagrange y de la forma de Poincaré-Cartan clásicas.

A partir de aquí y siguiendo las pautas del caso continuo resulta que una sección $s_d \in \Gamma(M_d, E_d)$ es estacionaria si y sólo si $\mathcal{E}_d(s_d) = 0$ para los puntos interiores del dominio de la sección s_d. Dicha condición define unas ecuaciones de recurrencia en las variables x_k y $s_d(x_k)$ que constituyen la versión discreta de las ecuaciones de Euler-Lagrange clásicas (integrador variacional). A diferencia del caso continuo, estos integradores no sólo condicionan los valores $\{s_d(x_k)\}$ de la sección s_d sino también su propio dominio, $\{x_k\}$, lo cual resulta esencial para poder establecer correctamente las leyes de conservación de las corrientes de Noether discretas que provienen de simetrías infinitesimales no necesariamente verticales, como es el caso de la energía.

Interpretando la fórmula de variación anterior en un correspondiente fibrado de 1-jets discreto, $j^1 p_d\colon J^1 E_d \to \{\Delta\}$ sobre la descomposición simplicial $\{\Delta\}$ –donde las "*derivadas parciales*" de una sección diferenciable en un punto se sustituyen por los "*valores próximos*" de una sección discreta en los vértices de un símplice– resulta posible ir traduciendo los diferentes conceptos y resultados de la teoría clásica a dicho espacio discreto (regularidad, variedad multisimpléctica de soluciones –o multisimplecticidad del integrador variacional–, teoría de Noether, segunda variación etc.). Más todavía, extendida la doctrina al cálculo de variaciones con ligaduras, parece posible definir el concepto de morfismo entre dos problemas variacionales discretos de tal manera que el proceso mismo de "*aproximación*" sea funtorial. En particular, esta es a nuestro juicio la razón profunda de que este tipo de integradores aproximen de un modo tan óptimo las magnitudes dinámicas del sistema lagrangiano inicial y, también, de que las aproximaciones de los espacios de caminos por variedades diferenciables de dimensión finita empleadas por Feynman en su formulación de la Mecánica Cuántica hayan sido tan acertadas.

En cualquier caso, se constata una vez más el carácter variacional de las leyes físicas, las cuales se expresan en esta ocasión por ecuaciones en diferencias finitas en virtud del planteamiento discreto de la doctrina. Este hecho es importante en nuestra argumentación, por cuanto se impone cada vez con más fuerza una formulación discreta de la física con independencia de una posible aproximación posterior del caso continuo. Con palabras de T.D. Lee en el artículo antes citado:

"A lo largo de más de tres siglos hemos estado influidos por el precepto de que las leyes fundamentales de la física debían expresarse por ecuaciones diferenciales. Las ecuaciones en diferencias finitas se consideraban siempre como una aproximación. Lo que aquí deseo explorar es, justamente, lo contrario, esto es: que las ecuaciones en diferencias finitas constituyen la verdadera expresión de las leyes de la naturaleza, pasando a ser las ecuaciones diferenciales un mero límite de las mismas."

6. Conclusión

Lo dicho hasta aquí supongo que nos habrá convencido bastante acerca del carácter variacional de las leyes de la física, tema central de este discurso. Los hechos descritos, producidos a lo largo de cuatro etapas sucesivas desde el tiempo de Lagrange hasta la actualidad, parece que así lo confirman. Son, ciertamente, unos hechos clave que han conducido con naturalidad a la visión variacional de la física que hoy tenemos y que podemos resumir como sigue:

- A partir de una representación del "*espacio-tiempo*" como un espacio fibrado (posiblemente de variedades más generales que las ordinarias), donde sus secciones se identifican con algún tipo de campo físico y donde se da como dato previo un grupo (gauge) de transformaciones como estructura geométrica, el concepto dinámico básico de la teoría es una densidad lagrangiana invariante por la acción del grupo.

- Bajo este planteamiento, la funcional inducida sobre los campos por la densidad lagrangiana define un problema variacional, cuyas ecuaciones de Euler-Lagrange son la expresión de la ley física y sus soluciones los **estados** del sistema. Y reemplazando la densidad lagrangiana por la así llamada forma de Poincaré-Cartan –la cual define sobre los campos el mismo problema variacional de partida–, se obtiene, mediante el producto interior por dicha forma, una representación de las transformaciones infinitesimales del grupo gauge por formas diferenciales con la propiedad fundamental de "*conservarse*" sobre las soluciones estacionarias. Estas son las **magnitudes dinámicas** del sistema, a partir de las cuales pueden recuperarse, dualmente, los estados del mismo vía dicha propiedad de conservación.

- Los **estados** y las **magnitudes dinámicas** configuran un nuevo espacio, sobre el cual la diferencial de la forma de Poincaré-Cartan define una "*geometría multisimpléctica*" en el seno de la cual la geometría del espacio-tiempo original admite un significado dinámico.

- Finalmente, la propia acción definida por la densidad lagrangiana se interpreta físicamente como el "*factor de fase*" de la integral de caminos de Feynman, que constituye la expresión de la ley física desde el punto de vista cuántico.

Siendo hasta la fecha este maravilloso esquema conceptual el fundamento de las principales teorías de la física, no podemos dejar de advertir, sin embargo, que existen "*zonas de excepción*" a la regla que si, por un lado, la confirman, plantean por otro nuevas preguntas para el futuro.

Muchas gracias.

Bibliografía

[1] Arms, J.M.; Cushman, R.H.; Gotay, M.J.; "*A universal reduction procedure for Hamiltonian group actions*", The geometry of Hamiltonian systems, 33–51, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 22, Springer, 1991.

[2] Arms, J.M.; Marsden, J.E.; Moncrief, V.; "*Symmetry and bifurcations of momentum mappings*", Comm. Math. Phys. 78, nº4, 455-478, 1980.

[3] Atiyah, M.; "*Geometry and Physics in the 20th century*", The Mathematical sicences after the year 2000, 1–9, World Sci. Publ. 2000.

[4] Batchelor, M.; "*The structure of supermanifolds*", Trans. Amer. Math. Soc. 253, 329..338, 1979.

[5] Betounes, D.; "*The geometry of gauge-particle field interaction: a generalization of Utiyama's theorem*", J. Geom. Phys. 6, nº1, 107–125, 1989.

[6] Cartan, E.; "*Leçons sur les invariants intégraux*", Hermann, Paris, 1922.

[7] Castrillón, M.; García, P.L.; Ratiu, T.S.; "*Euler-Poincaré reduction on principal bundles*", Lett. Math. Phys. 58, nº2, 167–180, 2001.

[8] Castrillón, M.; Marsden, J.E.; "*Some remarks on Lagrangian and Poisson Reduction for Field Theories*", J. Geom. Phys. 48, nº1, 52–83, 2003.

[9] Castrillón, M.; Marsden, J.E.; Shkoller, S.; "*Reduction in principal fiber bundles: covariant Euler-Poincaré equations*", Proc. Amer. Math. Soc. 128 nº7, 2155–2164, 2000.

[10] Cendra, H.; Ibort, A.; Marsden, J.E.; "*Variational principles on principal fiber bundles: a geometric theory of Clebsch potentials and Lin constraints*", J. Geom. Phys. 4, nº2, 183–205, 1987.

[11] Cendra, H.; Marsden, J.E.; "*Lin constraints, Clebsch potentials and variational principles*", Phys. D, 27, nº1-2, 63–89, 1987.

[12] Chamseddine, A.H.; Connes, A.; "*The spectral action principle*", Comm. Math. Phys. 186, nº3, 731–750, 1997.

[13] Channell, P.J.; Scovel, C.; "*Symplectic integration of Hamiltonian systems*", Nonlinearity, 3, nº3, 231–259, 1990.

[14] Chen, J.B.; Guo, H.Y.; Wu, K.; "*Total variation and Variational Symplectic-Energy-Momentum integrators*", arxiv:hep-th/01091178v1, 2001.

[15] Chen, J.; "*Total variation in discrete multisymplectic field theory and Multisymplectic-energy-momentum integrators*", Letters in Math. Phys. 61, nº1, 63–73, 2002.

[16] Connes, A.; Lott, J.; "*Particle models and noncommutative geometry*", Nuclear Phys. B, Proc. Suppl. 18B, 29–47, 1990.

[17] Connes, A.; "*Gravity coupled with matter and the foundation of noncommutative geometry*", Comm. Math. Phys. 182, nº1, 155–176, 1996.

[18] Corry, L.; Reen, J.; Stachel, J.; "*Belated decision in the Hilbert-Einstein priority dispute*", Science 278, nº5341, 1270–1273, 1997.

[19] Cushman, R.; "*Reduction, Brouwer's Hamiltonian and the critical inclination*", Celest. Mech. 31, nº4, 401–429, 1983.

[20] Donaldson, S.K; Kronheimer, P.B.; "*The Geometry of Four-Manifolds*", Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publ. 1990.

[21] Einstein, A.; "*Zur Elektrodynamik bewegter Körper*", Annalen der Physik, 17, 891–921, 1905.

[22] Einstein, A.; "*Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*", Annalen der Physik, 49, 769–822, 1916.

[23] Fernández, A.; García, P.; Rodrigo, C.; "*Lagrangian reduction and constrained variational calculus*", Publ. R. Soc. Mat. Esp., 3, 53–64, 2001.

[24] Ferraris, M.; Francaviglia, M.; "*On the Global Structure of Lagrangian and Hamiltonian formalisms in higher order calculus of variations*", Proc. of the international meeting on geometry and physics (Florence, 1982), 43–70, Pitagora Editrice, Bologna 1983.

[25] Feynman, R.P.; "*Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics*", Rev. Modern Physics, 20, 367–387, 1948.

[26] Galindo, A.; "*No-linealidad en las ciencias de la naturaleza*", Real Academia de Ciencias, Madrid 1980.

[27] Garcia, P.; Muñoz, J.; "*On the geometrical structure of higher order variational calculus*", Proc. of the IUTAM-ISIMM symp. on modern dev. in analyt. mech. Vol. I (Torino 1982), Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 117, suppl. 1, 127–147, 1983.

[28] Garcia, P.; Muñoz, J.; "*Le problème de la régularité dans le calcul des variations du second ordre*", C.R. Ac. Sci. Paris Sér. I Math. 301,nº12, 639–642, 1985.

[29] Garcia, P.; Pérez-Rendon, A.; "*Symplectic approach to the theory of quantized fields I*", Comm. Math. Phys. 13, 24–44, 1969.

[30] Garcia, P.; Pérez-Rendon, A.; "*Symplectic approach to the theory of quantized fields II*", Arch. Rat. Mech. Anal. 43, 101–124, 1971.

[31] Garcia, P.; "*The Poincaré-Cartan invariant in the calculus of variations*", Symposia Mathematica 14, 219–246, Academic Press, 1974.

[32] Garcia, P.; "*Gauge algebras, curvature and symplectic structure*", J. Diff. Geom. 12, nº2, 209–227, 1977.

[33] Goldschmidt, H.; Sternberg, S.; "*The Hamilton-Cartan formalism in the calculus of variations*", Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 23, n$^{\underline{o}}$1, 203–267, 1973.

[34] Gonzalez, O.; "*Time integration and discrete Hamiltonian systems*", J. Nonlinear Sci. 6, n$^{\underline{o}}$5, 449–467, 1996.

[35] Green, M.B.; Schwarz, J.H.; Witten, E.; "*Superstring theory*", Cambridge Monographs on Math. Physics, 1987.

[36] Guillemin, V.; Sternberg, S.; "*Geometric quantization and multiplicities of group representations*", Invent. Math. 67 n$^{\underline{o}}$3, 515–538, 1982.

[37] Hamilton, W.R.; "*On a general method in dynamics*", Phil Trans. Roy. Soc. London, 247–308, part II of 1834; "*Second essay on a general method in dynamics*", Phil. Trans. Roy. Soc. London, 95–144, part I of 1835.

[38] Hermann, R.; "*Differential geometry and the calculus of variations*", Mathematics in Science and Engineering 49, Academic Press, 1968.

[39] Hernandez, D.; Muñoz, J.; "*Global variational calculus on graded manifolds I. Graded jet bundles, structure 1-form and graded infinitesimal contact transformations*", J. Math. Pures Appl. (9) 63, n$^{\underline{o}}$3, 283–309, 1984.

[40] Hernández, D.; Muñoz, J.; "*Global variational calculus on graded manifolds II*", J. Math. Pures Appl. (9) 64, n$^{\underline{o}}$1, 87–104, 1985.

[41] Hernández, D.; Muñoz, J.; "*Construction intrinsèque du faisceau de Berezin d'une variété graduée*", C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 301, n$^{\underline{o}}$20, 915–918, 1985.

[42] Hernandez, D.; Muñoz, J.; "*Infinitesimal functoriality of graded Poincaré-Cartan forms*", Differential geometric methods in theoretical physics (Shumen 1984) 126–132, World Sci. Publishing, Singapore, 1986.

[43] Hernández, D.; Muñoz, J.; "*Variational Berezinian problems and their relationship with graded variational problems*", Differential geometric

methods in mathematical physics (Salamanca 1985) 137–149, Lecture Notes in Math. 1251, Springer 1987.

[44] Hilbert, D.; "*Die Grundlagen der Physik*", Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1915.

[45] Hitchin, N.J.; Segal, G.B.; Ward, R.S.; "*Integrable Systems*". Twistors, Loop Groups and Riemann Surfaces, Oxford Graduate texts in Mathematics 4, Oxford Science Publ. 1999.

[46] Holm, D.; Marsden, J.; Ratiu, T.; "*The Euler-Poincaré equations and semidirect products with applications to continuum theories*", Adv. in Math. 137, nº1, 1–81, 1998.

[47] Jackiw, R.; "*Observations on noncommuting coordinates and on fields depending on them*", Ann. Henri Poincaré 4, suppl. 2, 913–919, 2003.

[48] Kerbrat-Lunc, H.; "*Contribution à l'étude du champ de Yang et Mills*", Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A 13, 295–343, 1970.

[49] Kimura, T.; "*Generalized classical BRST cohomology and reduction of Poisson manifolds*", Comm. Math. Phys. 151, nº1, 155–182, 1993.

[50] Klein, F.; "*Le programme d'Erlangen*", (traduc. del original de 1891)Collection Discours de la Méthode, Gauthier-Villars 1974.

[51] Kolář, I.; "*A geometrical version of the higher order Hamilton formalism in fibred manifolds*", J. Geom. Phys. 1, nº2, 127–137, 1984.

[52] Kostant, B.; "*Quantization and unitary representations I. Prequantization*", Lecture Notes in Math., 170, Springer-Verlag 1970.

[53] Krupka, D.; Štěpánková, O.; "*On the Hamilton form in second order calculus of variations*", Proc. of the international meeting on geometry and physics (Florence 1982), 85–101, Pitagora Editrice, Bologna, 1983.

[54] Lagrange, J.L.; "*Mécanique Analytique*". Chez la Veuve Desaint 1788.

[55] Lee, T.D.; "*Difference equations and conservation laws*", J. Statist. Phys. 46, nº5-6, 843-860, 1987.

[56] Lepage, Th.; "*Champs stationnaires, champs géodésiques et formes intégrables*", Acad. Roy. Belgique Bull. Cl. Sc. (5) 28, 247–265, 1942.

[57] Lorentz, H.A.; "*Maxwells elektromagnetische Theorie*", "*Weiterbildung der Maxwellschen Theorie. Elektronentheorie*", Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, mit Einschluss ihrer Anwendungen, 5, Physik, part 2, 63–280, Teubner, Leipzig, 1904.

[58] López Almorox, A.; "*Supergauge theories in graded manifolds*", Differential geometric methods in mathematical physics (Salamanca, 1985), 114–136. Lec. Notes in Math. 1251, Springer Verlag, 1985.

[59] Marsden, J.E.; Montgomery, R.; Morrison, P.J.; Thompson, W.B.; "*Covariant Poisson brackets for classical fields*", Ann. of Phys. 169, nº1, 29–47, 1986.

[60] Marsden, J.E.; Patrick, G.W.; Shkoller, S.; "*Multisymplectic geometry, variational integrators, and nonlinear PDEs*", Comm. Math. Phys. 199, nº2, 351–395, 1998.

[61] Marsden, J.E.; Scheurle, J.; "*The reduced Euler-Lagrange equations*", Dynamics and control of mechanical systems (Waterloo 1992), Fields Institute Comm. 1, AMS, 1993.

[62] Marsden, J.E.; Weinstein, A.; "*Reduction of symplectic manifolds with symmetry*", Rep. Mathematical Phys. 5, nº1, 121–130, 1974.

[63] McLachlan, R.I.; Quispel, G.R.W.; Robidoux, N.; "*Unified approach to Hamiltonian systems, Poisson systems, gradient systems, and systems with Lyapunov functions or first integrals*", Phys. Rev. Lett. 81, nº12, 2399–2403, 1998.

[64] Müller, O.; "*Natural Geometric Quantization of First-order Field Theories*", Tesis Doctoral Universidad de Leipzig, 2003.

[65] Noether, E.; "*Invariante Variationsprobleme*", Nachrich. v. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 235–257, 1918.

[66] Ortega, J.P.; Ratiu, T.; "*Momentum maps and Hamiltonian reduction*", Progress in Mathematics, 222, Birkhäuser Boston Inc., 2004.

[67] Pérez-Rendon, A.; "*A minimal interaction principle for classical fields*", Symposia Mathematica 14, 293–312. Academic Press, 1974.

[68] Riemann, B.; "*Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen*", Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 13, 1854.

[69] Rovelli, C.; "*A dialog on quantum gravity*", Internat. J. Modern Phys. D 12, nº9, 1509–1528, 2003.

[70] Schroer, B.; "*String theory and the crisis in particle physics*", arXiv:physics/0603112v3.

[71] Simms D.J.; "*An outline of geometric quantisation (d'après Kostant)*", Differential geometrical methods in mathematical physics (Proc. Sympos. Bonn, 1975). Lec. Not. in Math. 570, 1–10, Springer-Verlag 1977.

[72] Śniatycki, J.; "*Geometric quantization and quantum mechanics*", Applied mathematical sciences, 30, Springer Verlag, 1980.

[73] Śniatycki, J.; Weinstein, A.; "*Reduction and quantization for singular momentum mappings*", Lett. Math. Phys. 7, nº2, 155–161, 1983.

[74] Souriau, J.M.; "*La structure symplectique de la mécanique décrite par Lagrange en 1811*", Math. Sci. Humaines 94, 45–54, 1986.

[75] Sterngerg, S.; "*Some preliminary remarks on the formal variational calculus of Gel'fand-Dikiĭ*",Differential geometrical methods in mathematical physics II (Proc. Conf., Bonn 1977), Lecture Notes in Math. 676, 399–407, Springer-Verlag, 1978.

[76] Utiyama, R.; "*Invariant theoretical interpretation of interaction*", Phys. Rev. (2) 101, 1597–1607, 1956.

[77] Veselov, A.P.; "*Integrable Lagrangian relations and factorization of matrix polinomials*", Funktsional Anal. i Prilozhen. 25, nº2, 38–49, 1991. Funct. Anal. Appl. 25, nº2, 112–122, 1991.

[78] Wilbour, D.C.; "*Poisson algebras and singular reduction of constrained Hamiltonian systems*", Ph.D. Thesis, U. Washington, 1993

[79] Witten, E.; "*Unravelling string theory*", Nature 438, página 1085, Diciembre de 2005.

[80] Woodhouse, N.M.J.; "*Geometric Quantization*", Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 1980.

[81] Wu, T.T.; Yang, Ch.N.; "*Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields*", Phys. Rev. D (3), 12, nº12, 3845–3857, 1975.

[82] Yndurain, F.J.; "*Espacio, Tiempo, Materia*", Real Academia Ciencias, Madrid 1996.

CONTESTACIÓN
DEL
EXCMO. SR. D. JOSÉ JAVIER ETAYO MIQUEO

Excmo. Sr. Presidente,
Excmos. Sres. Académicos,
Señoras, señores:

Los que nos deslizamos ya, ¡y con qué rapidez!, por la rama descendente de la parábola de la vida, se diría que vamos encontrando, a medida que crece la abscisa tiempo, aquellas ordenadas que mucho más lentamente habíamos recorrido en nuestra subida pero dispuestas ahora en sentido inverso. Yo no sé si esta especie de simetría podría servir como imagen, casi metáfora, de una experiencia habitual entre los viejos cuya memoria, retrocediendo en el tiempo, nos lleva a recuperar vivencias cada vez más remotas. Así, enlaza Machado el comienzo de su pequeña autobiografía poética, "Mi infancia son recuerdos de un patio de Sevilla...", con el contrapunto de los dos últimos versos que escribió y encontraron, dicen, en su bolsillo: "Estos días azules, este sol de la infancia". Este volver, en fin, que acaso nos facilite, al acercarnos a nuestro azul postrero, seguir la recomendación bíblica de hacernos como niños.

Tales o parecidas cosas me venían a las mientes cuando me enfrentaba a la honrosa y gratísima tarea de elegir unas palabras de salutación a nuestro nuevo compañero D. Pedro Luis García Pérez. Porque hablar de él me supone echar la mirada más de medio siglo atrás, cuando él era alumno de segundo curso de Físicas en nuestra Facultad madrileña y yo profesor de prácticas. Y ahí empezó la cosa. La Sección de Físicas había confiado algunas de las enseñanzas relacionadas con las matemáticas a D. Pedro Abellanas que, a su vez, recabó la colaboración del pequeño grupo que trabajaba con él: por allí andábamos Martínez Losada, Sancho Guimerá y yo mismo, que habíamos sido alumnos de D. Pedro en Zaragoza y, ya él en Madrid, nos habíamos puesto bajo su dirección y magisterio. Íbamos así pasando desde la condición de alumnos a la de discípulos y, en la docencia que nos encomendó, de aprender geometría a aprender a enseñarla.[1]

Cómo no voy a evocar aquellos tiempos, tiempos difíciles, llenos de incertidumbres, de estrechez de medios, de horizonte profesional oscuro pero a la vez, quizá por eso mismo –o por ser los tiempos de nuestra juventud–, de ilusión y de afanes. Yo recuerdo con inmensa gratitud aquellos cursos en que compartía la geometría con los alumnos de Físicas, con un compañerismo que ha derivado en amistad y dejado un regusto como acaso no lo haya sentido en gran parte de mi modesta actuación de profesor. Y, de todas aquellas promociones, una de las más singulares, por su fidelidad en guardar y mantener la relación entre sus componentes y la persistencia de aquel afecto durante tantos años, es la de Pedro Luis, que así le llamamos todos familiarmente.

De las personas de que he hablado hay dos que no quiero que se me vayan de tapadillo. Porque les debo mucho, y no sólo yo, y forman parte de nuestra historia personal. Uno es un maestro y el otro, un compañero. El maestro, ya lo he citado, es D. Pedro Abellanas, maestro en el saber y en el ser, guía de tantos, inagotable en sus esfuerzos, dechado y ejemplo para quienes estuvimos con él. Yo tengo la presunción de que los primeros –porque la cronología manda– que accedimos a sus lecciones allí en Zaragoza fuimos los que verdaderamente llegamos a saborear lo que suponía un despertar realmente luminoso hacia la matemática al verla a través de sus ojos. En mi discurso de ingreso en esta casa quise ya expresar lo que había sido para nosotros la figura y la acogida, nunca suficientemente agradecida, de nuestro maestro.

Discípulo suyo fue el segundo de los nombres que quiero rescatar: mi compañero, pero compañero magisterial también, al par que verdaderamente

[1] Seguramente D. Pedro también lo veía así. En el último artículo que publicó y que, para honra mía, me lo dedicó en mi jubilación, se lee: "Creo que su trabajo con los físicos formó a Etayo como Profesor."

fraterno, Juan Bautista Sancho Guimerá. Ambos vinimos de Zaragoza siguiendo a D. Pedro, con él trabajamos codo a codo, hicimos bajo su dirección nuestras tesis doctorales, nos acompañamos mutuamente, juntos preparamos las oposiciones a cátedras universitarias y hoy, que no nos vemos casi nunca, parece como si no hubiéramos dejado de estar en contacto. Me siento grandemente deudor del Sancho de aquellos tiempos cuando este contacto era efectivo, de su ayuda en los primeros pasos y aun tropezones de mi incipiente investigación y de la visión que sabía transmitir de los grandes escenarios de nuestra ciencia. Él ha sido para mí el primero, el más brillante y profundo de entre los eximios colegas de mi generación. Pero además fue leal y generoso en la amistad, capaz de desprenderse con naturalidad de las cosas que legítimamente tocaban a su misma conveniencia si con ello favorecía a otro. Yo, que fui beneficiario privilegiado de su largueza, considero justo declararlo antes de que se borre en el olvido. Sirvan estas pocas palabras para descubrir levemente su figura, muchas veces velada por él mismo, que antepuso a la ostentación de sus logros propios la formación de una sólida escuela y el enriquecimiento de los que a él se confiaron. Lo retrataría bien una frase de Rey Pastor: "Si en las investigaciones experimentales basta al director dar las ideas directrices para que el alumno realice sus trabajos, en las ciencias del pensamiento puro dar las ideas es darlo todo".[2]

Tengo la seguridad de que a Pedro Luis ha de parecerle bien que comience con este recuerdo del amigo común, al cual él mismo se ha referido con gratitud y respeto, la escueta enumeración de sus propios méritos. Porque no extrañará, tras lo dicho, que si alguien de nuestro pequeño equipo consiguió arrastrar junto a sí a algunos de aquellos alumnos fue Sancho. Y de entre ellos, el primero de sus discípulos, nieto científico pues de Abellanas, fue Pedro Luis. Como brevemente nos acaba de contar, tras licenciarse en Físicas por Madrid, empezó acompañando a Sancho a la Universidad venezolana de Valencia y su actividad como profesor instructor debió de ser suficientemente satisfactoria como para ser contratado en varios años posteriores para cursos de postgrado. Cuando en 1963 obtuvo Sancho la cátedra de

[2] Tomo la cita de A. Roca y J.M. Sánchez Ron: *Esteban Terradas. Ciencia y técnica en la España contemporánea.* El Serbal, 1990.

Barcelona, allá marchó con él, fue profesor de aquella Universidad y de la E.T.S. de Arquitectura y, bajo su dirección, se doctoró en Matemáticas con premio extraordinario. En 1969 llegó a nuestra Complutense como profesor agregado y dos años después consiguió la cátedra de Salamanca, a donde también se había trasladado Sancho. Pero ya el discípulo volaba por su cuenta, aunque manteniendo intactos, como se ha visto, los lazos de amistad y compañerismo con el maestro.

No voy a hacer un inventario, árido siempre, de sus contribuciones y méritos. En resumen se pueden contar unas cuarenta publicaciones, otras tantas intervenciones en congresos nacionales e internacionales, en muchos de ellos como conferenciante invitado o como coorganizador, de modo muy especial en las conferencias internacionales sobre métodos de la geometría diferencial y sus aplicaciones a la física teórica; aparte de los que él mismo ha creado y dirigido en España y Portugal sobre Geometría y Física. Ha sido durante nueve años miembro del Comité Español de la Unión Internacional de Matemáticas (IMU). También en nuestra casa ha desplegado su actividad participando en cuantas ocasiones se le ha solicitado; en 1977 obtuvo el Premio de la Academia y en 1988 fue elegido Académico Correspondiente Nacional.

Fue Decano de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Salamanca, Director-Comisario de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Telecomunicaciones de la Universidad Politécnica de Cartagena, a la que puso en marcha, Presidente de la Confederación Española de Centros de Investigación Matemática y Estadística del CSIC y, durante seis años, Presidente de la Real Sociedad Matemática Española. A título anecdótico podría decir que desde esa Presidencia le interesó la noticia de la confección de un nuevo plan de estudios de la Marina, si no recuerdo mal; se comunicó con aquellas autoridades aduciendo la conveniencia de contar con el asesoramiento de la Sociedad en los estudios de matemáticas y, caso realmente ejemplar y que otras instituciones más cercanas a nosotros nunca siguen, se le llamó e intervino en aquellos planes, lo que al parecer hizo a satisfacción de todos. Yo no sé si tal vez a consecuencia de ese contacto suscribió después convenios de la Universidad de Salamanca con el Centro Superior de Estudios de la Defensa Nacional y con los Consejos Académicos de los

Estudios de Aviación Civil de Salamanca y de la Academia de Policía de Ávila. Y seguramente como recompensa a su competente actuación le fueron concedidas en distintas fechas las Cruces del Mérito Naval, Militar y Policial de primera clase con distintivo blanco. Lo mismo que la Medalla de la Orden de Andrés Bello de la República de Venezuela, como miembro que fue, representante de la Universidad Complutense, en la Comisión Gestora del Área de Estudios de Postgrado de la Universidad de Valencia de aquella nación hispanoamericana.

De las notas forzosamente breves de este retrato y, sobre todo, del espléndido discurso que acaba de ofrecernos, puede desprenderse que la mirada intelectual del profesor García Pérez ha estado siempre atraída por esos dos polos: la física, física teórica sobre todo, y la geometría, en concreto la geometría diferencial. Él se mueve con soltura y autoridad más que en una línea divisoria entre ambas, en el terreno comunal en que físicos y geómetras han sentado sus reales. Todo su discurso delata la intención de tender un puente entre ambas orillas, fundado en la mecánica –la física geométrica, dice él– , y asentado en la comprensión cada vez más refinada del concepto de espacio que nos ha presentado.

Porque el espacio, que comienza siendo una noción común y familiar, el espacio material, este espacio en que nos encontramos, en el que se sitúan los objetos y tienen lugar los fenómenos de la naturaleza, ha de dejar pronto paso, si hemos de estudiar esos hechos con cierto sabor científico, al espacio físico, un espacio abstracto cuyos elementos son ahora puntos, planos, curvas, idealizaciones de aquellos objetos, trayectorias y fenómenos que veíamos en el espacio material. Con el añadido de que en él operamos ya con técnicas geométricas, deductivas, no propiamente experimentales, pero sabiendo que si las premisas se habían ajustado a hechos reales, hechos reales nos describirán las conclusiones. Sugestiva visión para la mente de un griego, ésta de poder anticipar comportamientos naturales sin otras operaciones que las de la pura razón. Laplace dice algo de esto: "Sin las especulaciones de los griegos sobre las secciones cónicas, las bellas leyes de Kepler permanecerían ignoradas todavía. La historia de las ciencias nos ofrece muchos ejemplos de las aplicaciones de la geometría pura y a menudo una sola observación ha bastado para fecundar las verdades en apariencia más estériles trasladándolas a la naturaleza, cuyos fenómenos no son sino resultados matemáticos de un pequeño número de leyes inmutables". [3]

Pero, aun utilizando métodos matemáticos propios, la geometría seguía siendo una ciencia natural, imprescindible seguramente para el estudio del mundo físico pero ligada a él porque no pasaba de ser la explicación de una de sus facetas. El espacio físico es el trasunto del espacio material y su validez estriba en que lo representa unívocamente: en aquel contexto histórico, ese espacio era el euclídeo y hasta se creía que sus proposiciones se seguían lógicamente de los postulados precisamente por su presunta adecuación al espacio real. Lo que pasa es que los matemáticos son muy enredadores y empiezan a pensar si con técnicas análogas a las del espacio euclídeo no se podrá encontrar otros tipos de espacios que sean tan matemáticamente válidos, aunque no nos den la imagen del espacio que nos rodea. Y claro que los encuentran, con la consecuencia de que la geometría, por fin, deja de ser una de las ciencias naturales, se incorpora definitivamente a la matemática y sus espacios son ya espacios matemáticos, sin amarras obligadas con lo natural.

Según y cómo, porque los físicos, por no ser menos, se ponen también a enredar y comprueban que el espacio de la naturaleza no es como se pensaba y se acomoda mucho mejor a alguno de los nuevos espacios. Y no sólo eso sino que idean otros espacios y otros conceptos que convengan a sus hipótesis y nos obsequian con una tanda de productos como espacios de Einstein, universos en expansión, universos "bebés", universos que se conectan, agujeros de gusano, universos múltiples o "multiversos", agujeros negros, espacios-tiempo "enrollados" de diez, once y otras dimensiones, espacios-tiempo con "dos" tiempos...[4] Es un mundo en el que no ha querido entrar Pedro Luis en esta ocasión por haberse ceñido a los concretos problemas de su discurso pero unos y otros no hacen sino acentuar esa ligazón entre matemáticas y física en que él se ha situado.

¿Cómo se produce tal correspondencia? Parecería, después de lo dicho, que la matemática surge para esquematizar las observaciones hechas sobre

---

[3] P.-S. Laplace. *Exposición del sistema del mundo.* Ed. Crítica, 2006.

[4] J.A. Azcárraga: *En torno a Albert Einstein, su ciencia y su tiempo.* Publ. Univ. de Valencia, 2006.

objetos o fenómenos naturales pero que luego sus esquemas se echan a andar por su cuenta y aportan inesperadas soluciones a problemas que van apareciendo en la física. Hilbert, uno de los grandes matemáticos que hizo también importantes incursiones en la mecánica, dice[5]: "El espíritu humano, alentado por el descubrimiento de las soluciones, tiene conciencia de su propia independencia, crea problemas nuevos sin aparente impulso externo; es él, esencialmente, quien plantea las cuestiones... Pero mientras está en marcha el poder de crear de la razón pura, el mundo externo hace valer su influencia y nos lleva a nuevos problemas. Es en estos intercambios entre la razón y la experiencia donde residen tantas analogías sorprendentes y la armonía, en apariencia tan fuertemente preestablecida, observada por los matemáticos."

Y en este dar y tomar, teorías como la de los grupos continuos de Lie, inutilizada durante mucho tiempo, fue rehabilitada por los fundamentos teóricos de la física de partículas; o el álgebra de Grassman, ignorada en el siglo XIX, sería referencia importante para la física en el XX; lo mismo que las especulaciones de Weyl o de Hamilton. Más en concreto, dice Feynman que los físicos se desprendieron de la mayor parte del sistema de los cuaternios excepto la más simple, que se convirtió en el análisis vectorial, pero cuando se requirió toda la potencia de los cuaternios para la mecánica cuántica, Pauli reinventó el sistema en una nueva forma. A pesar de lo cual todavía se le escapa a Feynman un respingo: "Y algo que no comprendo es el hecho de que los matemáticos habían investigado grupos y cosas así antes de que apareciesen en física".[6] ¿Y por qué no? ¿Acaso no lo provocaba la teoría de ecuaciones? (Claro que también sobre la relatividad de Einstein llegó a decir: "todavía no puedo entender cómo se le ocurrió") Leía recientemente a propósito del destacado papel que la física ha comenzado a desempeñar en las matemáticas modernas: "Durante bastante tiempo los físicos han excavado en los archivos matemáticos a la búsqueda de instrumentos para construir y analizar modelos del mundo físico. Ahora, gracias al descubrimiento de la teoría de cuerdas, la física está empezando a saldar la deuda suministrando

---

[5] Citas tomadas de P. Zellini: *La rebelión del número*. Ed. Sexto Piso, 2007.

[6] R.P. Feynman: *El placer de descubrir*. Ed. Crítica, 2000.

a los matemáticos nuevos planteamientos poderosos para sus problemas no resueltos. La teoría de cuerdas no sólo aporta un marco unificador para la física, sino que puede seguramente llegar a establecer una unión igualmente profunda también con las matemáticas."[7]

En conclusión, todo nos lleva a recalcar la bien conocida simbiosis entre matemática y física. Unas veces es el físico el que se enfrenta a unos problemas o necesita formalizar una teoría y requiere del matemático que fabrique la estructura que la explique. Otras veces es éste el que empieza por elaborar una teoría abstracta guiado por la propia dinámica interna de la matemática, sin apoyatura en situaciones observables del mundo natural, aunque acaso tenga aplicación más tarde. Un poco juguetonamente me permití distinguir hace bastante tiempo estos dos sentidos de la conexión entre ambas ciencias y les llamé, con perdón, "operación Berta" y "operación Cenicienta". No hacía falta mucho ingenio para hacerlo. En el caso de la Cenicienta todos sabemos lo que pasaba: se tenía un zapato y había que buscar un pie que encajara en él; lo mismo que el matemático tiene una teoría, que aún no se sabe a qué hecho experimental puede convenir, pero quizá aparezca alguna vez el pie que la calce. El caso opuesto es el de Berta, "la de los grandes pies", a cuya medida hubo de hacérsele el zapato, como el matemático confecciona una teoría que sirva para el pie que el físico le presenta. Y ustedes disculpen esta frivolidad.[8]

---

[7] B. Greene: *El universo elegante.* Ed. Crítica, 2001.

[8] Y más que habrán de perdonarme, si tienen la bondad. Y es que, ya que hablaba tanto de recuerdos, me apetecería traer el de la lectura, en mis tiempos de estudiante, de un librito de Álvaro Cunqueiro en el que se glosaba la famosa *Ballade des dames du temps jadis*, de François Villon. Entre aquellas damas estaba Berta, reina de Francia, mujer de Pepino el Breve; uno de sus enormes zapatos sirvió como cuna a su hijo Carlomagno cuando lo llevaron a bautizar. El bardo y aventurero Villon la incluyó en aquella balada de la cual el verso que más nos suena es el que canta "Mais où sont les neiges d'antan?". Tal vez por encontrarlo parejo al de su contemporáneo, nuestro Manrique, en sus *Coplas*: "¿Qué se hizo del rey don Juan?..." Coincidencia nada extraña, pues era un tema recurrente y tradicional entonces esta melancólica contemplación de la fugacidad de la vida y del tiempo. Era la moda del "Ubi sunt?", que también recoge el *Gaudeamus igitur*: " Ubi sunt qui ante nos fuerunt?". Y puestos a rememorar , déjenme aludir siquiera a aquella película, *Si yo fuera rey*, cuyo protagonista, Ronald Colman, tal vez un poco talludito para el papel, encarnaba precisamente a François Villon. No he vuelto a saber de ella desde que la vi en aquellos remotos años pero, si la memoria no me es infiel, creo

Pero es lo que con más seriedad se nos dice si volvemos a leer a Laplace: "El físico recurre al geómetra para alzarse hasta las causas generales y el geómetra interroga al físico para hacer provechosas sus investigaciones y abrir con esas experiencias nuevos caminos en el análisis... Y así el deseo de ayudarse mutuamente ha establecido entre los miembros de las academias, desde sus orígenes, el convenio de no admitir más resultados que los de observación y cálculo". Precisamente el lema que campea en la nuestra.

Esta fuerte corriente osmótica entre las dos ciencias ha conducido a los físicos teóricos a la necesidad de proveerse de unos recursos matemáticos tan duros y exigentes como los de los matemáticos mismos. Incluso Hilbert llegó a decir que la geometría no es nada más que una rama de la física y las verdades geométricas en ningún aspecto son diferentes de las verdades físicas. La escuela de Götingen, heredera de Gauss y de Weber y a la que él pertenecía, abordaba con un trabajo de altísima calidad e inigualable prestigio aquella unidad orgánica de matemática y física.[5]

¿En qué podemos, pues, diferenciarlas? La matemática explora estructuras lógicas, es una extensión de nuestra forma de razonar, y la física describe la naturaleza y para ello emplea el lenguaje de la matemática. De alguna manera, el físico, aun el físico teórico que especula con entidades abstractas, queda vinculado a la comprobación experimental de sus resultados, mientras que el geómetra crea sus propios conceptos y va descubriendo después platónicamente sus propiedades, de lo que responde únicamente ante el universo abstracto que ha creado, sin tener por qué referirlo al mundo material.

Esto podría no estar tan claro en el tiempo en que la geometría era, como ya dijimos, una de las ciencias naturales. En su Codex Urbinas dice Leonardo da Vinci: "Ninguna humana investigación puede ser denominada ciencia si antes no pasa por demostraciones matemáticas; y si tú me dices que las ciencias que tienen su principio y fin en la mente participan de la verdad, esto no te concederé, que lo niego por muchas razones; la primera, porque en tales discursos de la mente no se accede a la experiencia, sin la

---

que era Basil Rathbone el que hacía una interpretación que me pareció estupenda de un cascarrabias Luis XI de Francia. Y si a este punto he llegado a través de Berta desde las relaciones geometría-física, sean ustedes un poco indulgentes con esta debilidad mía de revivir las ordenadas que crucé cuando aún no había llegado a ser un veinteañero.

que certeza alguna se produce... Las verdaderas ciencias son aquellas que la experiencia ha hecho penetrar a través de los sentidos."

Hoy, sin embargo, la geometría se ha desligado de la supeditación al mundo material, e incluso hay distintas geometrías, y la física teórica, que era la hermana pobre de la física experimental durante el siglo XIX, ha pasado, de ser el resultado de observaciones empíricas que reclaman una explicación, a convertirse en un conjunto de teorías que han de predecir inequívocamente hechos nuevos deducidos a partir de cálculos matemáticos; si las predicciones se confirman mediante la observación, la teoría es correcta y, si no, es errónea.[9] Ya Wigner hablaba del regalo maravilloso e inmerecido que supone la "irrazonable eficacia" de las matemáticas, un milagro de la adecuación del lenguaje matemático a la formulación de las leyes físicas. Y el mismo Einstein se extrañaba de que las matemáticas, que habían llegado a ser un producto humano independiente de la experiencia, estuvieran tan admirablemente adaptadas a los objetos de la realidad. Para él, el físico teórico está cada vez más obligado a guiarse por consideraciones puramente matemáticas y formales, pero una teoría posee una ventaja importante si sus conceptos básicos y sus hipótesis fundamentales están próximos a la experimentación. Así vio él revalidada su teoría con la comprobación empírica de que efectivamente se curvaba la trayectoria de un rayo de luz. El descubrimiento de una ley puede basarse en consideraciones matemáticas pero no su confirmación.[4] A este supuesto es muy significativo el comentario de Feynman tras el éxito del ensayo de la bomba atómica en Nuevo Méjico: "... habíamos trabajado mucho para que esa cosa funcionara y no estábamos seguros de cómo iría. Yo había tenido siempre una cierta desconfianza de los cálculos teóricos, aunque me dedique a ese negocio, y nunca he estado realmente seguro de que la naturaleza acabe haciendo lo que has calculado que debería hacer. Pues ahí estaba, haciendo lo que habíamos calculado."

No aspiro a que pueda decirse otro tanto si algo mejor se esperaba de mí ya que, por mis graves faltas, sé tan poca física que no he logrado dar un acompañamiento medianamente conformado al brillante discurso de Pedro

---

[9] J. Magueijo: *Más rápido que la velocidad de la luz.* Fondo de Cultura Económica de Argentina, 2006.

Luis, que nos ha brindado el hermanamiento entre las dos orillas, la ley física y el espacio geométrico. Sólo en este extremo del puente podría encontrarme con él, en esa rama que ambos hemos cultivado, la geometría diferencial: precisamente la maquinaria que había anticipado Riemann y Einstein necesitaba: "... herramienta exquisita que aporta el lenguaje necesario para una concepción del universo", dice el ya citado Magueijo. Y menos mal que lo dice porque antes me había dado un buen susto al escribir: "La geometría diferencial, esa horrible rama de las matemáticas que intenté comprender sin éxito cuando era adolescente." Porque cree que es muy difícil de entender a menos que se tenga una formación profesional en física, y así lo prueba la dudosa relación inicial que él mantuvo con la relatividad general. Está claro, dice, que el intento de separar la física y la matemática, hacia mediados del siglo XX, tuvo la desastrosa consecuencia de que generaciones enteras de matemáticos crecieran desconociendo la mitad de su ciencia e ignorando totalmente las demás.

No es éste el caso de nuestro nuevo Académico, como bien se ha visto, y ya que mis palabras han sido hasta ahora poco ilustrativas sí quiero que las finales sean de agradecimiento. Porque en ese recuento vital que uno hace en estas ocasiones, encuentro más de una vez, inmediatamente detrás de mí, la presencia puntual y dispuesta de Pedro Luis: pasó a presidir la Real Sociedad Matemática Española al terminar mi mandato; cuando dejé la dirección del Instituto "Jorge Juan" del CSIC, él la ocupó, aunque cambiando su estructura; también a mi jubilación ganó él la cátedra que dejaba vacante, si bien renunció a ella por motivos familiares o personales. Afortunadamente para mí llega ahora a la Academia sin tener que ocupar mi puesto para lo que, dado el carácter vitalicio de nuestros nombramientos, debería antes haberme muerto yo. Esta vez, profesor García Pérez, amigo Pedro Luis, si me doy la vuelta no es para ver que me sigues sino para esperarte y darte la bienvenida a esta casa en representación de todos sus miembros y por amable delegación, que mucho agradezco, de nuestro Presidente. Y tú sabes que lo hago con todo el afecto labrado en los muchos años que dejamos atrás.

He dicho.