REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

DISCURSO

LEIDO EN EL ACTO DE SU RECEPCION

POR EL

EXCMO. SR. D. PEDRO PUIG ADAM

Y

CONTESTACION

DEL

EXCMO. SR. D. ANTONIO TORROJA MIRET

EL DIA 5 DE MARZO DE 1952

MADRID
DOMICILIO DE LA ACADEMIA: VALVERDE, 22
TELEFONO 21 25 29
1952

Nuevas Gráficas, S. A.-Andrés Mellado, 18.-Teléf. 24 01 20.-Madrid

DISCURSO

DEL

EXCMO. SR. D. PEDRO PUIG ADAM

TEMA: MATEMATICA Y CIBERNETICA

SEÑORES ACADÉMICOS:

Imposible resulta evitar el tópico inicial; y no por escrúpulo de bien parecer, sino por necesidad de ser sincero empiezo declarándome confuso y obligado en extremo por vuestra elección a mi favor, y tan inocente de sugerencias de ella como culpable de consentimiento.

No recuerdo ya dónde leí que es buena fórmula de felicidad la realización de sueños de juventud a edad madura. Ciñéndome a tal modelo habría de declararme hoy completamente feliz, y sin embargo—no lo toméis a mal, señores académicos—, esto es para mí un sueño, en efecto, pero dista mucho de ser, sin reservas, una felicidad.

No existe dicha sin duelo, ni bien sin quebranto, ni honor sin responsabilidad, y en esta sensación mixta de plenitud y de angustia amaso mi felicidad de hoy y elevo mi corazón a lo Alto, no sólo para dar gracias, sino también para pedir luz y perdón.

Voy a ocupar el sitio que un maestro y amigo entrañable, Don Esteban Terradas, dejó vacío en la plenitud de su gloria científica al elevarse hacia regiones de más glorioso y eterno privilegio. Comprenderéis que no pueda sustraerme a la grandeza de su recuerdo, tan lleno para mí de vivencias afectivas, y que me sienta a un tiempo entristecido y avergonzado.

Dice Quevedo que el buen gobernador que sucede en una ciudad a otro que lo fué malo, es bueno y además dichoso, porque siendo bueno sucede a otro que le hace mejor. Así comparezco aquí de infortunado, ya que siendo malo sucedo a quien me hace infinitamente peor.

Al acercarme al sillón que se me ofrece, no puedo menos de verle de tamaño proporcionado al talento de su último ocupante, y por tanto, de anchura tal que no he de alcanzar brazos ni respaldo en que apoyarme. Apeteciera, por ello, más firme y ceñida postura en una sillina al pie desde la que rendir culto al recuerdo del ausente entre tanto llegara a ocupar su puesto sustituto de igual medida. Pero ya que vuestro Reglamento, más que a la métrica de los sillones, atiende a la continuidad de su función, obedezco vuestro designio, y en la bondad de todos me amparo para decir como el coplero popular murciano:

Voy a cantar la copla que me han «mandao».
No quiero que me digan malo y «rogao».

Tomando pie de un recuerdo. Pese a mi estado de ánimo, procuraré que mi copla no sea triste. Pensé al principio dedicarla por entero al estudio y loa de la figura del desaparecido, pero, además de ser pretensión superior a mis fuerzas, ya la Academia había encomendado tal tarea a varios de sus más significados miembros y a otras personalidades, quienes la desarrollaron cumplidamente en memorable sesión. Cuanto pudiera yo añadir a los discursos que aquella tarde se pronunciaron en esta sala, en bien poco aumentaría la información de los oyentes y en nada la gloria del homenajeado.

Me limitaré a recordar, de mi vida de relación con Terradas, una breve escena y unas cálidas palabras suyas cuyo eco perdura en mi memoria, dirigiendo en estos últimos tiempos la brújula un tanto veleidosa de mis escarceos científicos. Y, tomando pie de aquel recuerdo y de tales escaramuzas, urdiré con uno y otras este modesto discurso mío que ofrendo a su recuerdo y confío a vuestra benevolencia.

Casi siempre que conversé con Terradas lo hice en aquellas tardes domingueras de invierno que invitan a la lectura y al estudio en el plácido rincón familiar. Cerrada la oscuridad y fatigadas la vista y la atención, apetecía el espíritu comunicación y esparcimiento con el amigo y maestro. Consultábale previamente por teléfono su voluntad y tiempo disponible. La respuesta era invariable y cordial. Me acogía siempre con paternal y al mismo tiempo infantil alegría. Apetecía él también, pese a su altura, o quizás por el mismo aislamiento en que tal altura le situaba, la charla con el amigo sencillo, la comunicación afectuosa, aun siendo tal comunicación casi unilateral. Se hablaba, mejor dicho, hablaba él, de las últimas novedades. Poco de personas y mucho de problemas. Eran éstos generalmente técnicos y lucía en ellos aquella erudición suya, asombrosa por lo extensa y por lo profunda. Consultábale, por mi parte, mis dificultades y problemillas. Me animaba en mis tareas; siempre tan afable, tan estimulante, sin lisonjas, que por insinceras hubieran sonado a humillante falsedad, pero con un contenido tan rico en alientos y tan jugoso de consejos y orientaciones, que no hallo con quién ni cómo sustituirlos y sigo añorándolos desde su inesperada muerte.

Aún le recuerdo en aquella reducida celdilla de su residencia de la Moncloa, donde transcurrían serenos los minutos, las horas, los días, que en el fluir de su apretada vida se convertían en unidades de lectura, en páginas, capítulos, libros, ... Imposible olvidar la unción con que los trataba. Sus manos, más que doblar hojas, las acariciaban suavemente, amorosamente, como quien en religioso rito cierra un arca donde se guarda un tesoro sagrado y abre a un tiempo otra en la que nuevos tesoros se ofrecían a su curiosidad inagotable.

Aquella tarde leía, en una revista recién llegada, la crítica de un libro de actualidad. El comentarista ponía de relieve el significado de los conceptos fundamentales sobre comunicación e información, y Terradas saboreaba la descripción del panorama conceptual como si estuviera en presencia del paisaje mismo. La novedad, el atrevimiento y la elegancia de los conceptos matemático-estadísticos que forman la nueva ciencia de la información, del «control» y del mensaje le llenaban de entusiasmo y de asombro, y con ojos brillantes de iluminado leía y releía y se agitaba en su asiento mientras no cesaba de exclamar: «Oiga, oiga esto, ... Estamos en una era nueva, amigo Puig, ¡en una era nueva!» Inútil mentar los peligros del desequilibrio entre el progreso científico y el moral que caracteriza asimismo nuestra época. Pese a todo, él daba gracias a Dios por vivir en ella, tan llena de azares, cierto, pero al propio tiempo tan maravillosa en conquistas del ingenio humano.

Y salí una vez más de aquella casa reconfortado, y en mis oídos martilleaban sus exclamaciones de júbilo: ¡Estamos en una era nueva, en una era nueva...! Algo empezaba a entrever yo, por lo oído, de la novedad trascendente de las técnicas comentadas, pero ¿en qué podía consistir la esencia de tal novedad, y hasta dónde eran en verdad trascendentales?

Las inolvidables palabras de Terradas excitaron primero mi curiosidad y a su muerte empezaron a resonar en mis oídos casi con carácter de mandato. Héme, pues, hace algún tiempo interesado en lecturas y trabajos sobre servomecanismos, comunicación y Cibernética, con lo que me parece seguir todavía sus consejos y permanecer en póstuma relación espiritual con él. Comprenderéis, por tanto, que en ofrenda a quien tan indignamente sustituyo y en ocasión de dicha sustitución, os presente hoy un modesto enracimado de ideas extraídas y enzarzadas al azar del desordenado cesto de cerezas, tempranas aún, que con tales lecturas he amontonado, bajo el epígrafe «***Matemática y Cibernética***».

* * *

De lo mucho que el hombre trabaja para no trabajar.

Desde la maldición bíblica el hombre porfía por liberarse de la esclavitud del trabajo. «Ganarás el pan con el sudor de tu frente», díjole Dios, y el hombre busca en la misma obra de Dios recursos para rehuir o para hacer más llevadero su mandato. Con la redondez de los troncos empezó aliviándose del arrastre de pesadas piedras. El tronco le sugirió el círculo y la rueda; el animal de tiro hizo lo demás. Fué el primer capítulo de la porfía. Desde entonces, tanto para crear como para destruir, no ha cesado de buscar en el dominio de la Naturaleza el remedio a su impotencia, a su odio o a su pereza. Para lanzar proyectiles con que abatir la caza o vencer al enemigo se vale sucesivamente de la honda, de la catapulta, del arco, del arcabuz y, finalmente, de explosivos de potencia creciente. Para cruzar los mares, eludiendo la esclavitud del remo, confía al viento la vela, y al vapor el álabe, y al gas el émbolo. Agota las fuentes de poder horadando la tierra y deteniendo el curso de las aguas a su antojo, y al fin busca la energía en la propia intimidad de la materia, deshaciendo el átomo, la prodigiosa joya infinitesimal de la Creación.

Era atómica llámase la nuestra, adjetivo que hasta el presente sólo evoca terribles experiencias y dantescos presagios. Pero habríamos de convertirnos en ángeles y asegurarnos de que la energía atómica sólo se empleará para fines pacíficos, y aún así no marcaría, desde un plano psicológico al menos, el sello más característico del progreso actual. La conquista del átomo constituye tan solo el último y alucinante capítulo de la partida empeñada entre el hombre y la fuerza natural. Pero creo, con Wiener y con Terradas, que el momento presente se caracteriza mejor por los pasos también gigantes que el hombre está dando en otra porfía, la de liberarse asimismo de la tarea de conducir, de vigilar, de gobernar las referidas energías, la de aliviarse en definitiva de esfuerzos de categoría superior a la muscular, como atender, informarse, registrar, corregir, ajustar, ...

Cada anhelo del hombre le ha conducido a crear una técnica científica de logro, la cual tiene a su vez método de ataque matemático específico. Quiso un día tener ingenios con los que medir el tiempo, ajustándolo al movimiento aparente de los astros, y construyó relojes que fueron la maravilla automática de la época. Con ellos determinó longitudes geográficas, zurció los mares, festoneó los continentes, y creó la Mecánica clásica, a imitación de la de los cielos; el instrumento matemático de esta ciencia fué el Cálculo infinitesimal. No faltó, para regalo de reyes y príncipes y para diversión de gentes sencillas, la construcción de autómatas que danzaban en torno al reloj que les daba vida, y martilleaban campanas a horas fijas al compás de musiquillas y carillones. Indiferentes a todo estímulo exterior, tales autómatas, sin grado alguno de libertad, repetían su monótona contradanza hasta que se les terminaba su precaria vida, es decir, la cuerda; ridículo truco irreversible con que el hombre parodiaba la infinita reversibilidad del Creador.

A la técnica de los relojes sucedió la de las máquinas de vapor. A la cuerda, el combustible; a la Mecánica, la Termodinámica, cuyo instrumento matemático pasó a ser el Cálculo de probabilidades. El tiempo termodinámico ya no es reversible como en la Mecánica newtoniana. El segundo principio marca su irreversibilidad. La energía se degrada inexorablemente hacia el futuro, como la cuerda del reloj, como la vida; por ello la Termodinámica se ajusta mejor a la realidad de los fenómenos a ras de tierra y así es ella de compleja.

El ciclo termodinámico no se ha cerrado todavía; a él pertenece el motor de explosión, los modernos sistemas de propulsión y, considerado en un sentido más lato, como ciclo energético, a él podríamos agregar toda la electrotecnia y aun la física nuclear, cuyo armazón matemático se fragua en los espacios de Hilbert.

Con tales conquistas científicas se ha liberado el hombre cuanto ha podido del esfuerzo físico, pero no del psíquico, de la vigilancia y ajuste de las fuerzas con que suplanta las suyas. Esto le lleva, como hemos dicho, a la nueva categoría de conquistas, iniciadas ciertamente antes de ahora con la técnica de la regulación, pero en la que se están dando en los momentos actuales avances decisivos. Los autómatas de creación reciente —como los pilotos automáticos, los servos que reemplazan al artillero en las baterías antiaéreas, las tortugas de Walter, el homeostato de Ashby—, reaccionan ante estímulos exteriores con un número tal de grados de libertad, que si bien sus reacciones no pueden ser calificadas de imprevistas para quienes los construyen, es lo cierto que se van acercando cada vez más a las reacciones de los seres vivos. No es de extrañar, pues, que en ciertos momentos remeden con fidelidad sorprendente no sólo la conducta de animales inferiores sino también la del hombre en cierta categoría de funciones que él mismo reduce a automatismos o a reflejos condicionados.

Pues bien, si el motor de combustión se rige por los mismos principios termodinámicos que regulan los cambios energéticos en la musculatura humana, los principios que regulan el funcionamiento de los servomecanismos que intervienen en los modernos autómatas serán similares a los que rigen el funcionamiento de los centros nerviosos, y a la antigua Ciencia Energética habrá que añadir la moderna Ciencia Cibernética, nombre con el que la bautizó su padrino Wiener y que derivó del griego κυβερνήτης «timonel».

Henos, pues, con ello en el campo de la biología, mejor dicho, en el lindero común a varios campos: la neurofisiología, la electrotecnia, la termodinámica, la estadística, el cálculo operacional, ..., instrumento matemático este último que parece revelarse como fundamental en tal encrucijada. Se trata de una ciencia en período de gestación, cuyos capítulos, algo inconexos aún, requieren precisamente el aglutinante de un armazón abstracto adecuado. Quizás no sea tarea inútil ofreceros algunas pequeñas perspectivas de dicho armazón, vistas desde mi ángulo visual, y os pido perdón por anticipado si la honrilla académica que ya se colgó en mi pecho antes que la medalla, me lleva a derivaciones de modesta cosecha propia.

Algunos aspectos matemáticos de la teoría de servomecanismos.

Los servomecanismos son combinaciones de sistemas físicos generalmente *lineales*, es decir, que transforman, según una correspondencia de carácter aditivo, continua e independiente del origen de tiempos, una magnitud física función del tiempo $x(t)$, llamada *causa, estímulo* o *entrada,* en otra $y(t)$, llamada *efecto, respuesta* o *salida*. En todo sistema de tal naturaleza, si se conoce la respuesta $K(t)$ del sistema a un impulso instantáneo (función de Dirac) se puede formular la respuesta a un estímulo cualquiera $x(t)$ mediante la integral

$$y(t) = \int_0^t K(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau$$

Esta integral es el llamado *producto compuesto* (Faltung) de las funciones x, K, y se convierte en producto ordinario al aplicar a dichas funciones la transformación de Laplace, es decir, que si ξ, η, χ son las transformadas de x, y, K se verifica (p parámetro de la transformación)

$$\eta(p) = \chi(p)\,\xi(p) \quad \text{o bien} \quad \frac{(p)}{\eta(p)} = \varphi(p) \quad \text{con} \quad \varphi = 1 : \chi$$

Llamaremos a la función $\varphi(p)$ «función de transformación» del sistema, la cual depende sólo del mismo y no del estímulo. En resumen, la transformación de Laplace convierte la relación funcional del sistema en sencilla proporcionalidad. Y como quiera que dicha transformación es la única que (bajo ciertas amplias condiciones) convierte el producto compuesto en ordinario (regla de la Faltung) (*), ello explica el papel singularmente esencial que dicha transformación y su análoga, la de Fourier, tienen en el estudio simplificado de tales sistemas, y en particular de los servomecanismos. En lugar de estudiar los fenómenos que en ellos se desarrollan mediante el instrumento clásico de la ecuación diferencial o íntegrodiferencial, resulta más sencillo efectuar el estudio en su imagen de Laplace algebrizada. De este modo se formulan las ecuaciones de los servos y a tal imagen nos referiremos en lo que sigue.

Las propiedades analíticas de la función de transformación caracterizan las propiedades físicas del sistema. En particular, la estabilidad del mismo exige que dicha función tenga sus ceros a la izquierda del eje imaginario. Esta condición se cumple en los casos corrientes (redes eléctricas pasivas), en que la función de transformación es racional y tiene no sólo los ceros sino también los polos a la izquerda del referido eje, con lo que la estabilidad del sistema se asegura funcionando en los dos sentidos.

Para tales sistemas el diagrama de Nyquist (curva transformada del eje imaginario mediante la función de transformación) permite juzgar de la estabilidad observando si la curva rodea o no al origen. El isomorfismo que realiza la transformación de Laplace pone así de relieve la esencia topológica de tales cuestiones de estabilidad.

Se obtiene un sistema retroactivo (feed-back) si a un sistema fundamental primario asociamos otro de corrección o control, que después de transformar la respuesta del primero la contraponga a su función de entrada para dar como nuevo estímulo

(*) Según ha demostrado nuestro estimado amigo y colega R. SAN JUAN. V. *Portugaliae Math.* Vol. 9. Fasc. 4, 1950.

una diferencia que provoque la rectificación o corrección. Si $\varphi(p)$ y $\psi_1(p)$ son las funciones de transformación primaria y secundaria, la función de transformación del sistema compuesto es (*)

$$\varphi(p) + \frac{1}{\psi_1(p)}$$

La yuxtaposición del sistema de control modifica, pues, la función de transformación $\varphi(p)$ del sistema primario agregándole la recíproca de la función de transformación de control $\psi_1(p)$. Si el sistema secundario es a su vez corregido por un nuevo sistema de función $\psi_2(p)$, la nueva función de transformación será ahora

$$\varphi(p) + \cfrac{1}{\psi_1(p) + \cfrac{1}{\psi_2(p)}}$$

y aplicando sucesivamente la misma ley, vemos cómo la función de transformación de un sistema retroactivo múltiple en el que cada sistema sirve de corrección al anterior, adopta la forma de una fracción continua cuyos cocientes incompletos son las funciones de transformación de los elementos componentes. Esta curiosa formulación que intuí al reconocer la presencia de cumulantes en las fórmulas clásicas de la teoría, se hizo sencilla y diáfana al tomar precisamente como función de transformación de un sistema la recíproca de la que ordinariamente se considera. Grata sorpresa fué la aparición de la fracción continua, tan poco frecuente en las aplicaciones, pero más gratas fueron aún, como veréis, las consecuencias.

Si las funciones φ, ψ_1, ψ_2, ..., son lineales, se llega a un tipo de fracciones continuas (llamadas fracciones J) bastante estudiadas en la literatura matemática especializada (**). Por medio de ellas se puede expresar, generalmente, las funciones racionales de transformación de los sistemas eléctricos aludidos

(*) V. para más detalles Nota 1 del Anejo.

(**) V. por ej. la moderna y completa obra de WALL «Continued fractions».

más arriba sin más que aplicar al cociente que las define el algoritmo de divisiones sucesivas de Euclides. Omitiendo la discusión de particularidades, se concibe cómo un tal desarrollo puede, por ejemplo, permitir la construcción geométrica del diagrama de Nyquist mediante producto de transformaciones geométricas particularmente sencillas: inversiones, homotecias, simetrías y sumas vectoriales en el plano complejo del parámetro p de la transformación (*).

En sentido recíproco, toda fracción continua J de cocientes lineales positivos tiene una realización eléctrica inmediata expresando la impedancia origen en un sistema de mallas formadas por pares de resistencias y autoinducciones en serie y de conductancias y capacidades en derivación. Se obtienen así esquemas análogos al de una línea continua cuando se consideran las mallas infinitesimales (**), de modo que estas líneas son en definitiva sistemas físicos que permiten interpretar fracciones continuas de coeficientes incompletos infinitesimales. La realidad física nos conduce, pues, como en tantas otras ocasiones, a un nuevo algoritmo (nuevo, al menos, hasta donde llegan mis informes que por múltiples conductos solicité). He estudiado ya, con algún detenimiento, dicho algoritmo por corresponder a un hueco analítico que era natural llenar, pues del mismo modo que la suma engendra por paso al infinito numerable la serie, y por paso al continuo la integral, así también la fracción continua aritmética engendra, por pasos al límite análogos, la fracción indefinida de una parte, y de otra el algoritmo que ahora se nos presenta y al que acaso debiera reservarse el nombre de *fracción continua* propiamente tal, aplicando a las frac-

(*) Un estudio detallado hallará el lector curioso en la comunicación que presenté al reciente coloquio de París sobre «Les machines à calculer et la pensée humaine» con el título «Les systèmes rétroactifs en chaîne et les fractions continues».

(**) V. el mismo trabajo citado sobre «Les systèmes rétroactifs...»

ciones continuas discretas el simple nombre de *eslabonadas* o *escalonadas*, que resulta más justo y más expresivo.

Para que las nuevas fracciones continuas tengan sentido es preciso definirlas, por lo menos, mediante un par de funciones y hacer aparecer alternadamente sus valores en los cocientes incompletos. La demostración de la existencia y unicidad del límite que define tal algoritmo me ha resultado relativamente fácil bajo ciertas condiciones impuestas a tales funciones (*), y la función de la abscisa que se obtiene al tomar el límite de las reducidas impares ascendentes satisface a una ecuación de Riccati bien fácil de formular. Basta para ello pasar al límite la relación entre dos reducidas impares consecutivas, relación que es de carácter proyectivo, y con ello se explica la conexión del algoritmo con dicha ecuación.

Como parámetro del haz solución puede tomarse el último denominador de la fracción. Variar éste equivale físicamente a cerrar la línea con la impedancia arbitraria que en el extremo queramos colocar. Aplicando la teoría a las líneas de constantes uniformemente distribuídas, se obtiene, efectivamente, la misma fórmula que la teoría clásica da para la variación de la impedancia a lo largo de la línea. Pero al mismo tiempo suministra el instrumento adecuado para el estudio de dicha variación en el caso de constantes eléctricas no uniformemente distribuídas. No parece, pues, muy aventurado esperar que asimismo se pueda mostrar apto dicho algoritmo para interpretar fenómenos de conducción en fibras biológicas, como son los nervios.

Digo esto a guisa de conjetura, fundándome en la interpretación de la corriente nerviosa por Lorente de Nó y otros fisiólogos, quienes la conciben como un proceso de feed-back o

(*) Sobre este estudio véanse los primeros resultados obtenidos en la Nota 2 del Anejo, reproducción en gran parte de un artículo publicado recientemente en la *Revista Matemática Hispano-Americana* (4.ª serie. Tomo XI. Núms. 3 y 4).

retroacción de naturaleza bioquímica regeneradora del potencial de la membrana a lo largo del nervio y elemento a elemento del mismo, admitida por supuesto, en primera aproximacón, la linealidad del fenómeno. Cierta la hipótesis o no, la conjetura es seductora, tanto más cuanto que cabe estudiar mayores generalizaciones de dicho algoritmo: las *fracciones continuas ramificadas*, de las que, para no cansaros, me limito a presentar ejemplos, y esquemas eléctricos correspondientes, en las notas anejas a este discurso (*). Con ellas será posible acaso estudiar la variación de las impedancias en redes de líneas de constantes localizadas o distribuídas, fijas o variables, materiales o biológicas.

Me es grato referirme aquí, aunque sólo sea de pasada, a los trabajos que sobre las curvas experimentales de Lorente de Nó, referentes a variaciones del potencial electrotónico en nervios excitados eléctricamente, hube de iniciar recientemente a su pregunta de si sería efectivamente posible interpretar la conducta que tales curvas manifiestan mediante esquemas físicos retroactivos adecuados. El análisis exponencial de dichas curvas, técnica que me pareció la más directa para el fin perseguido, y que resultó muy laboriosa, por lo que sólo tuve tiempo de aplicarla a un número muy reducido de ellas (**), reveló el carácter oscilatotorio del fenómeno, carácter que no acusa, por cierto, la simple observación visual de tales curvas. Así queda, al parecer, corroborada la tesis que sostienen Lorente de Nó y otros neurólogos sobre la naturaleza oscilatoria de la propagación de la corriente nerviosa y, en consecuencia, perfectamente racionales los intentos de su interpretación mediante una cadena continua de sistemas en feed-back (***).

(*) V. Nota 3 del Anejo.

(**) Es de justicia consignar aquí la ayuda que en tal tarea me han prestado mis alumnos de la Escuela de Ings. Inds. Segura y Sarmiento.

(***) V. para más detalles mi trabajo citado.

Retroacción y homeostasia. No es ninguna novedad la existencia de fenómenos de carácter retroactivo en el organismo humano. La fisiología nos ha hecho conocer en estos últimos tiempos un número cada vez mayor de fenómenos reguladores contrapuestos en sus diversas funciones. Tales, por ejemplo: la acción de músculos antagonistas y su inervación, artífices de la precisión de nuestros movimientos; las secreciones ácida y básica presentes en la digestión de los alimentos; la acción de nervios vasoconstrictores y vasodilatadores que regulan nuestra circulación; las secreciones de las glándulas reguladoras del metabolismo, de la temperatura (tiroides, suprarrenales, sudoríparas ...); la regulación de la composición de la sangre bajo sus múltiples aspectos: agua, azúcar, iones diversos, proteínas, oxígeno, ...

Todo organismo viviente, por simple que sea, parece caracterizado por la presencia de estos fenómenos que Cannon denominó de *homeostasia* y que actúan cada vez que las circunstancias exteriores modifican sus condiciones normales de vida, provocando reacciones que se oponen a dichas modificaciones. A medida que los seres se elevan en la escala biológica sus condiciones de vida son más exigentes y, por tanto, son más numerosos y complicados los fenómenos homeostáticos que las conservan. Las numerosas acciones y reacciones se influyen mutuamente en dichos organismos, formando redes de regulación y retroaccción extremadamente complejas. Tales sistemas no corresponderían, pues, a la imagen matemática de una fracción continua simple para un sistema de retroacciones en cadena lineal, sino más bien a las referidas fracciones ramificadas que parecen adecuadas para esquematizar las redes complejas retroactivas de los organismos vivientes.

Toda lesión o perturbación en estos sistemas puede acarrear la pérdida de estabilidad de los mismos y la aparición de oscilaciones no amortiguadas con las que se caracteriza matemáticamente tal inestabilidad. Los ejemplos que Wiener presenta asociando ciertos casos patológicos de temblor a las oscilaciones de servomecanismos inestables resultan particularmente impresionantes (*) y, cualquiera que sea su grado de ajuste a la realidad, no hay que negarles su derecho a ser considerados, tal es el cúmulo de analogías que sugieren entre los fenómenos patológicos de carácter alternativo. La marcha misma del borracho no obedece, probablemente, a otra causa que al funcionamiento defectuoso, por intoxicación, de los sistemas cerebrales reguladores del equilibrio, particularmente las retroacciones originadas en los canales semicirculares.

Mucho más profundas y misteriosas son las retroacciones en que interviene la conciencia y la inteligencia. La habilidad y la sensibilidad afectiva del artista en el momento en que crea o interpreta, parecen, de un lado, retroacciones extremadamente complejas asociadas a cadenas de control de profundidad extrema, cuya fineza y sensibilidad se despiertan y se agudizan con el ejercicio y el aprendizaje. Pero ¿en qué consiste entonces el referido aprendizaje?, ¿en la creación de nuevas cadenas que afinen la retroacción perfeccionándola o en la modificación de características de las cadenas ya existentes sensibilizándolas? Y a todo esto ¿cuál es el papel de la conciencia inteligente?, ¿dónde se halla el umbral de separación de las reacciones puramente nerviosas de aquéllas en las que interviene el alma?, ¿cuál es el proceso en virtud del cual el uso del pedal en el piano, por ejemplo, que en un principio requiere una consciencia cuidadosamente alerta, termina siendo un fenómeno inconsciente de asociación directa e inmediata entre la aparición del empaste disonante y la relajación del músculo que mantenía apretado el pedal? Cuestiones son éstas en las que dejamos la

(*) V. Wiener «Cybernetics».

palabra a los fisiólogos y psicólogos y que envuelven la eterna y misteriosa cuestión de las relaciones entre materia y alma (*).

Me he permitido hacer esta alusión a los problemas de carácter psicológico que plantea esta Ciencia de cuna marcadamente biofísica, porque estimo necesario deslindar los campos entre lo que es ciencia y lo que es fantasía. Pero sobre este tema he de volver al referirme a las modernas máquinas de calcular.

Filtrado y predicción El estudio de la estabilidad a que antes nos hemos referido no excede el marco de un primer capítulo en la teoría de los servomecanismos. Los textos y monografías que sobre tales ingenios circulan ya para uso de ingenieros y estudiantes de alta técnica (**) llegan bastante más allá en las exigencias prácticas que pueden acreditar el buen funcionamiento de un servo, especialmente en lo que se refiere a la fidelidad y rapidez de la reacción, es decir, a la brevedad de los términos transitorios de la respuesta. Relegando, pues, a dichos textos el estudio de la llamada *atenuación* y sus gráficas, permítasenos ahora hacer hincapié en los conceptos de carácter estadístico que se presentan lo mismo en la teoría de los servomecanismos que en la de la comunicación, y que son de mayor trascendencia epistemológica, ya que acaso en la unidad de estos problemas y métodos venga a cristalizar a la postre la unidad de la recién nacida ciencia cibernética (***).

(*) A la sonrisa, que quiero suponer discreta, con que más de un psicólogo materialista acogerá este dualismo, correspondo con otra sonrisa no menos amable pensando en la línea conceptual evolutiva que empieza en William James, sigue en Pavlov, Sherrington y termina en Carrel.

(**) Entre ellas es justo destacar la del ingeniero industrial don Antonio COLINO «Teoría de los servomecanismos», publicada recientemente por el Instituto Nacional de Electrónica del C. S. I. C.

(***) Al atribuir aquí a la Estadística tan honroso papel, no puedo menos de pensar en el regocijo espiritual que he de causar con ello a aquel de nuestros compañeros que espera de la indiscutible seducción de esta Ciencia la revitalización de la potencia creadora del genio científico de la raza.

El funcionamiento de todo servo se alimenta de estímulos acompañados invariablemente de perturbaciones. Son éstas tan inevitables como que algunas de ellas radican en la misma naturaleza de la conducción; en el movimiento en cierto modo desordenado de los electrones. Tales irregularidades y oscilaciones parásitas en el estímulo pueden perturbar notablemente el funcionamiento del servo cuando la magnitud de las mismas es comparable a las de las divergencias que se trata de corregir, ya que no es posible amplificar el estímulo sin amplificar asimismo la perturbación aleatoria que le acompaña.

Fenómeno parejo ocurre en la técnica de la comunicación, es decir, de la transmisión de mensajes (signos, conversaciones, música, imágenes) que es preciso amplificar. Un mensaje se reduce a un conjunto de oscilaciones de una cierta magnitud física (acústica, óptica, electromagnética) que, transformadas hasta impresionar nuestros sentidos, son percibidas por éstos y seleccionadas por nuestra atención consciente del conjunto de oscilaciones parásitas que invariablemente las acompañan. Mas cuando estos parásitos son del orden de magnitud del mensaje la selección se hace muy penosa, cuando no imposible.

Atenuar el mayor número posible de oscilaciones parásitas para dejar diáfanas las útiles es el problema del *filtrado* que, como vemos, se presenta lo mismo en teoría de servomecanismos que en la de la transmisión, y que tiene carácter matemático de problema *extremal*. Pensando en la representación gráfica de dichas oscilaciones, el problema es parecido al de separar las crestas o rugosidades parásitas de un oscilograma (smoothing) para obtener de él las ondulaciones esenciales y significativas; es, pues análogo, al problema de análisis armónico de las series cronológicas en estadística, carácter estadístico que resulta de la misma naturaleza aleatoria de las perturbaciones.

Lo dicho para el filtrado se repite para la predicción. Servos hay que corrigen anticipadamente, es decir, que ajustan no a la situación momentánea sino a la de un futuro próximo *probable*. Así el tiro antiaéreo debe dirigirse a la posición probable del blanco tras el breve intervalo que media entre el disparo y el impacto. Pero *predecir* es extrapolar fuera del intervalo de registro, la variación registrada ; es, en síntesis, formar un operador con los valores de una función en el pasado que sirva para evaluar estadísticamente una probabilidad futura. Claro es que para ello precisa considerar la tal función no como aislada sino perteneciente a un conjunto de funciones posibles sobre las cuales valga establecer consecuencias de orden estadístico.

Así también, los mensajes, cada uno de los cuales sólo merece tal nombre si guarda el secreto de su futuro, deben obedecer en conjunto a ciertas leyes estadísticas que permitan predecir o proyectar las caracerísticas de un sistema de comunicación. Tanto la técnica del servo como la de la comunicación nos conducen, pues, asimismo al estudio de la extrapolación o predicción estadísticas.

La técnica matemática que intenta resolver los problemas de filtrado y de predicción óptimas es particularmente bella y difícil. Difícil en los planteamientos, por cuanto hay que empezar por elegir magnitudes definidas estadísticamente cuyos valores extremales resuelvan el problema. Difícil en los cálculos resolutivos porque dichas magnitudes suelen definirse por operadores integrales afectando a la función estudiada y a ciertos núcleos cuya determinación se supedita a la referida condición extremal. Tal es, en esencia, la técnica matemática de Wiener que, como se ve, entra de lleno en el cálculo de variaciones exigiendo recursos analíticos avanzados, cuya base se halla en Memorias del propio Wiener y otros analistas de primera fila (*).

(*) Entregado este discurso en el mes de febrero de 1951, ha desarrollado posteriormente el propio WIENER en Madrid lo esencial de tales métodos, en tres conferencias, una de ellas dada en esta Real Academia.

Omito, pues, aquí todo detalle sobre esas técnicas, remitiendo a las notas anejas al discurso (*) a todo aquel que quiera satisfacer su curiosidad con una sucinta iniciación teórica. Renuncio asimismo a traer al cuerpo de este discurso el interesante concepto de *cantidad de información*, que relego a otra nota (**) por su carácter eminentemente matemático. Este concepto es esencial en la teoría de la comunicación y tiene todas las características de una entropía negativa que decrece con el empaste o solapamiento de mensajes y en general con todo proceso que suponga pérdida de discriminación.

Simbiosis entre cerebro y máquina. Consignados hasta aquí los servicios que la matemática rinde a la técnica de los servomecanismos y de la comunicación, justo es referirnos también a los servicios recíprocos que los servomecanismos y la electrónica prestan a la matemática en las maravillosas máquinas de cálculo de creación reciente. Haremos referencia exclusiva a sus posibililidades funcionales, es decir, a su fisiología, dejando a un lado su descripción anatómica demasiado compleja y varia para tener cabida aquí, y, por añadidura, todavía en proceso de evolución.

En la historia del progreso, estas máquinas son el último y colosal eslabón en el proceso secular de simbolización y mecanización de la actividad matemática del hombre. Al intentar éste la traducción de las leyes del mundo físico en esquemas matemáticos, los estadios por los que pasa son siempre los mismos: Primero la génesis de los conceptos abstractos, luego su simbolización, y finalmente el descubrimiento de las leyes formales que traducen las relaciones lógicas que los ligan. Llegado a este punto, el matemático se desprende ya de los con-

(*) V. Nota 4.
(**) V. Nota 5.

ceptos; y en vez de razonar con ellos se alivia de ellos manejando en su lugar los símbolos, de acuerdo con las reglas formales establecidas, que sabe le conducirán a resultados verdaderos, puesto que son trasunto fiel de consecuencias lógicas irrefutables (*).

Condensación simbólica y mecanización del razonamiento han hecho posible la incesante progresión de abstracciones y generalizaciones crecientes que constituyen la Matemática contemporánea. Conceptos que se expresan mediante formas nuevas. Combinación de formas que engendran a su vez conceptos nuevos y, en consecuencia, nuevas formas y así sucesiva e indefinidamente.

El número empezó simbolizando los conjuntos y las medidas. Las operaciones aritméticas primeras tradujeron las operaciones concretas de agregación y combinación así como la génesis de magnitudes compuestas: áreas, volúmenes, ... Los griegos descubrieron las leyes esenciales de tales operaciones creando la Aritmética. Las letras pasaron más tarde a simbolizar los números, y el cálculo literal fué el código en el que se concretaron las leyes generales de la Aritmética, dando origen al Algebra clásica, ciencia adelantada del Renacimiento, que empezó resolviendo triviales problemas de herencia lineales y terminó detenida en las ecuaciones de grado quinto. Descartes, en el siglo XVII, mecaniza con el Algebra la Geometría, y en el siglo siguiente el Cálculo infinitesimal metodiza la resolución de los problemas de la Mecánica, primero, y de la Física después. Y he aquí empeñada otra partida. Desde el cielo al átomo no ha quedado secreto del Universo que no haya sido escudriñado matemáticamente por el hombre, ni problema que no

(*) En el movimiento matemático actual la importancia de lo formal ha llegado a tal punto que dichas leyes se emplean incluso como medio axiomático indirecto de definición. Ante las dificultades crecientes de individualización metafísica de los conceptos primarios, se prefiere caracterizarlos pragmáticamente, es decir, mediante el conjunto de propiedades formales a que obedecen.

haya intentado reglamentar reduciéndolo a un esquema conveniente o confiándolo a un cerebro artificial auxiliar. Más que eludir esfuerzos procura ahora jerarquizarlos, relegando a la máquina la rutina y conservando ágil su atención para intentar con ella esfuerzos de categoría superior.

Creo interesante hacer notar aquí que los avances en el cálculo mecánico han sido históricamente mucho más irregulares que en el dominio del cálculo teórico. El progreso que va desde el ábaco de los chinos hasta las máquinas de Pascal y de Leibniz en los siglos XVII y XVIII no es comparable al ascenso desde tales aritmómetros hasta las modernas máquinas, sea en punto a principios, sea en punto a medios de realización.

Si nos referimos a las máquinas llamadas *analógicas*, en las que las variables que en ellas traducen las magnitudes físicas reales son cantidades de variación continua, como por ejemplo giro de ejes en el analizador de Bush o bien intensidades de corriente o diferencias de potencial en las analógicas eléctricas, vemos que su eficacia estriba en la posibilidad de realizar en ellas, mecánica o eléctricamente (respectivamente con el juego de discos, o con el condensador), la operación analítica de *integración*, esencial en la técnica de las ecuaciones diferenciales. La combinación de integraciones hasta suministrar la solución de una de tales ecuaciones es cuestión que exige, por otra parte, la transmisión fiel de las funciones integradas a otros elementos integradores, lo que se efectúa mediante delicados servomecanismos en el analizador de Bush o mediante combinación de circuitos en las máquinas analógicas eléctricas. Pese a la aparente fidelidad con que estas máquinas reproducen las relaciones cuantitativas de las cantidades en juego, su exactitud es limitada y no basta para las exigencias de algunas técnicas de precisión, por lo que se prefiere manejar el número discreto en vez de la cantidad continua (*), es decir, se prefiere volver a los aritmómetros

En tales máquinas *aritméticas* (me resisto a llamarlas «digitales»), los datos y resultados son números de tantas cifras (decimales o binarias) cuantas pueda necesitar la técnica más exigente, pero la operación aritmética fundamental de la máquina sigue siendo la misma que en el clásico aritmómetro de Pascal, la de *contar*, es decir, la de sumar y seguir. Los procesos analíticos de integración se sustituyen en dichas máquinas por largos procesos aritméticos de sumación aproximada; de aquí que su efectividad de aplicación esté vinculada a su velocidad. Esta rapidez se ha conseguido sustituyendo los antiguos y pesados elementos materiales de la máquina (ruedas, engranages, palancas), todos ellos de inercia y lentitud considerables, por los elementos más ágiles de la naturaleza, los electrones, cuya inercia es prácticamente nula. Ellos son los que saltando con rapidez vertiginosa de unas células a otras de la máquina realizan la operación de contar, base de todo el cálculo aritmético. Se comprende, en tal misión, la simplificación aportada por la numeración binaria, ya que los únicos signos cero y unidad que este sistema maneja se pueden traducir en la presencia o ausencia de corriente en los elementos representativos de los distintos órdenes binarios y la suma y arrastre de unidades se reducirá asimismo a un sistema de conmutación que elimine la corriente de un elemento cuando se aumente una unidad, es

(*) Aparente paradoja es ésta que se consiga mayor exactitud con el número discreto, teóricamente inexacto, que con la cantidad continua cuya exactitud teórica queda asegurada por su misma continuidad. Se debe ello a la presencia de los inevitables errores aleatorios. Para disminuir su influencia *relativa* hay que aumentar el tamaño de los elementos de las máquinas analógicas o aumentar el número de cifras del aritmómetro, y esto último es mucho más práctico y económico. Añadir, por ejemplo, dos cifras a una calculadora de uso corriente en el comercio se comprende que es técnicamente más sencillo que centuplicar el tamaño de una regla de cálculo.

decir, cuando modifique el estado del elemento del orden siguiente.

Pero no bastaría con haber conseguido rapidez en las operaciones aisladas si a lo largo de todo un proceso de cálculo fuera necesaria la intervención del operador manual a cada paso entre dos operaciones consecutivas, con objeto de efectuar el transporte de los resultados de cada operación al registro de datos de la operación siguiente. Es preciso que la máquina sea capaz de realizar automáticamente todo el programa de operaciones sin más intervención del hombre que la preparación inicial. Esta necesidad es la que ha determinado el progreso esencial y decisivo en el nuevo tipo de máquinas, consistente, de un lado, en la *posibilidad de registrar y obedecer órdenes* y, de otro, en la *posibilidad de retener y conservar datos y resultados,* función esta última llamada «memoria» de la máquina, por su similitud con la función análoga de la inteligencia. Dichas «memorias» son de muy diversos tipos, según los constructores y las características exigidas a la máquina; las hay de inscripción mecánica en tarjetas y bandas perforadas, las hay de carácter magnético, de registro análogo al empleado en las cintas e hilos magnetofónicos; otras son de carácter acústico ultrasonoro y consisten en el establecimiento de circuitos, retardados mediante tubos con mercurio, en los que se conservan y regeneran sucesiones de impulsos representativos de los números registrados, y que se trasladan en el momento deseado al lugar exigido por el programa, etc. (*).

La tarea de la máquina se corona con la traducción escrita de los resultados en los aparatos registradores de salida. Las velocidades conseguidas con tales sistemas son verdaderamente alucinantes. Hartree refiere (**) el hecho de haber resuelto con

(*) Para detalles de construcción consulte el lector especialmente los trabajos de los dos coloquios sobre tales máquinas: el habido en Cambridge (Massachusetts) en 1947 y el reciente de París (enero 1951).

(**) V. *Nature*. Número de octubre de 1946.

la ENIAC problemas de contorno en un sistema de tres ecuaciones diferenciales no lineales mediante un proceso aproximado, resultante de fraccionar el intervalo de integración en 250 intervalos parciales, en el tiempo inverosímil de cuatro minutos, incluídas todas las operaciones de tanteo y aproximación, hasta llegar, a través de los 250 pasos intermedios, a obtener siete cifras en los resultados. Para quienes conozcan la interminable longitud de los cálculos que los problemas de esta índole suponen, este simple dato resulta mucho más elocuente acerca de la eficiencia de dichos monstruos electrónicos que cualquier otro de los que se exhiben en los artículos de divulgación y cuya significación resulta, por cierto, muy imprecisa; por ejemplo, el dato de las 5.000 sumas o de las 300 multiplicaciones por segundo.

Tales hazañas dan idea asimismo del servicio inestimable que estas máquinas pueden rendir al Análisis matemático, ya que no sólo convierten en viables soluciones tenidas hasta ahora por inoperantes por la longitud extrema de sus cálculos, sino que traen a la investigación matemática en su zona de tanteo previo, de ejemplificación, el recurso experimental que era hasta ahora inconfesable para todo matemático de pura cepa, no sé todavía si por inelegante o por incómodo. El caso es que ya no se recatan hoy los matemáticos de invocarlo en congresos y coloquios. Así confiesa Courant que las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden de tipo hiperbólico *no lineales,* de interés actual en el vuelo supersónico, presentan singularidades cuyo estudio sólo puede efectuarse, por el momento, de un modo numérico experimental (*).

Por el contrario, sólo el análisis teórico y el cálculo de probabilidades podrán resolver los nuevos arduos problemas que

(*) V. R. COURANT. «Method of finite differences for the solution of partial differential equations». Proceedings of a Symposium on large scale digital calculation machinery.

estas máquinas plantean, y el más importante de los que están pendientes de solución es el de la evaluación de los errores de redondeo en los resultados tras procesos tan largos de cálculo. Véase, pues, cómo el cerebro humano al crear sus colaboradores electrónicos establece con ellos una interesante simbiosis de esfuerzos en la que los viejos problemas de tabulación de familias de funciones definidas por ecuaciones diferenciales le son resueltos con esfuerzo mínimo, por dichos ingenios, mientras éstos ofrecen al ingenio creador del hombre interrogantes y problemas nuevos de mucha mayor envergadura.

Ciencia y fantasía. La primera idea de automatización de todo un programa de cálculo se debe al inglés Babbage (1820). No llegó a realizar su sueño, pero es de justicia reconocerle su calidad de precursor. Así se hizo en el coloquio que sobre las máquinas comentadas tuvo lugar en Cambridge (Massachusetts) hace cuatro años. Desde Babbage el desarrollo de las máquinas de calcular ha corrido parejas con el de la Automática, y asimismo es justo destacar, con orgullo de españoles, el papel precursor que en el desarrollo moderno de esta Ciencia desempeñó el presidente por largos años de esta Academia, don Leonardo Torres Quevedo.

A sus ingeniosos y variados inventos, no sueños sino sorprendentes realidades en su época, ha rendido París recientemente el homenaje internacional que la Ciencia moderna debía. La divulgación de estos éxitos con motivo del reciente coloquio sobre el mismo tema, me exime de referirlos (*).

(*) Creo un deber llamar la atención sobre el valor que aún conserva hoy el artículo publicado por TORRES QUEVEDO en la Revista de esta Real Academia en enero de 1914: «Ensayos sobre Automática. Su definición. Extensión teórica de sus aplicaciones» que en algunos puntos resulta realmente profético. Después de su lectura no pude menos de preguntarme hasta dónde hubiera llegado nuestro ilustre inventor si hubiera dispuesto de los medios que hoy suministra la Electrónica.

El famoso ajedrecista y todos los demás ingenios expuestos o reseñados en el coloquio: las calculadoras electrónicas, las máquinas que resuelven problemas de naturaleza lógica por interferencia de condiciones, los servomecanismos antes citados, más sorprendentes aún por remedar funciones de acomodación, tanteo y aprendizaje, han vuelto a poner sobre el tapete el problema de la posible suplantación del intelecto humano por la máquina, y a conceder impropia categoría científica a la fantasía teatral de Karel Capek cuyos personajes, los famosos *robots*, son hombres artificiales de reacciones idénticas a las humanas.

Cuando la imaginación se desborda a impulsos de un sensacionalismo de rotativa, toda precaución de lenguaje es poca para los que aman la Ciencia, es decir, la verdad desnuda, pues aún entre sus mismos cultivadores prende a veces el fuego de la fantasía cuando caldea el tema y deslumbran los progresos.

No nos dejemos impresionar por palabras como la de «memoria» con las cuales denominamos ciertas funciones de la máquina por su analogía conceptual con otras de la inteligencia, y no pretendamos por ello que nuestro cerebro haya de funcionar como tales máquinas. Una simple metáfora no puede servir de base a una hipótesis científica. No me impresionan las máquinas, citadas hace un momento, que resuelven problemas de carácter lógico al amparo de una codificación de premisas en la que radica su gracia y su eficiencia. Habría de poderse llegar a construir un artefacto capaz de materializar toda la lógica formal y seguiría sonriéndome al oír hablar de inteligencias mecánicas, porque ¿quién es capaz de automatizar el divino soplo de la intuición creadora? ¿Quién osará mecanizar el «esprit de finesse» de Pascal? Es la misma lamentable confusión que existe entre preparar y formar. Preparar es hacer autómatas, formar es hacer hombres. ¿Quién es capaz de fabricar un autómata que sea capaz a su vez de inventar otros autómatas nuevos o de escribir un tratado sobre ellos? Querer explicar con automatismos las funciones de la inteligencia me parece aún más inútil y, desde luego, más agnóstico que pretender escudriñar los secretos de la razón pura con los recursos de la pura razón.

Me vais a permitir que sobre el escepticismo de estas preguntas proyecte la ingenuidad de un recuerdo juvenil. Intrigábame de mozalbete el diseño del envase de un producto en el que aparecía un niño apoyado en una imagen del mismo envase, imagen en la cual de nuevo figuraba obligadamente el niño apoyado en otro envase más chiquito, en el cual habría de figurar a su vez otro niño y otro envase, etcétera. Pedí una lupa para observar hasta dónde llegaba ese etcétera, y no fué más elocuente que mi razón que instintivamente me apartaba del vértigo de la infinitud. El dibujo encerraba en sí una substancial imposibilidad, un autografismo paradójico, por ser ilimitado, al reverter sobre sí mismo como otras tantas paradojas de la lógica clásica (el «Yo miento» de Epiménides) y de la teoría de conjuntos (el conjunto de todos los conjuntos), paradojas nacidas de juicios o conceptos que no pueden quedar establecidos por recaer sobre el mismo concepto o juicio que se está estableciendo.

Pues bien, cada vez que se me presentan teorías en las cuales he de analizar la esencia de mi pensamiento con los recursos de mi pensamiento mismo, dicho más llanamente, cada vez que me invitan a pensar de qué manera pienso lo que estoy pensando..., no puedo menos de pensar que voy a envasar mi pensamiento en un autografismo paradójico e ilimitado y, dejando a los aficionados al «carrusel» ontológico seguir dando vueltas a la metafísica o a la electrificación de nuestra inteligencia hasta marearse, termino reconociendo humildemente que estoy emparedado entre dos limitaciones, la de mis sentidos y la de mi razón.

La Ciencia, al intentar enlaces racionales entre el mundo de nuestras sensaciones y el de nuestras abstracciones, va rebotando de una a otra pared, procurando ensanchar con ello heroicamente el espacio que comprenden. Más allá de ellas, la ignorancia. Pero bendita ignorancia, que al humillar nuestra vanidad, espolea al propio tiempo nuestra curiosidad eternamente insatisfecha. Y bendita asimismo la fantasía siempre que cabalgue al lado de la Ciencia, pues de este modo, al tirar ésta de las riendas de aquélla cuando se desboque, recibirá de ella impulso acelerador. Sólo así se repetirá el ciclo característico del progreso: Fantasía de ayer, Ciencia de mañana.

* * *

Y con esto termino, señores, la reseña prometida y cumplo, en parte con vosotros y con el recuerdo del desaparecido. Dije que la palabra griega κυβερνήτης que dió origen a la de Cibernética significa «timonel». Timonel ilustre de la Ciencia española fué Terradas, quien gustaba de usar metáforas marineras refiriendo episodios de su vida. Al ingresar en esta Real Academia decía:

> «Cualquiera que sea el medio en que hayamos de desenvolvernos, la corriente que nos arrastre y el escollo que se tercie en la derrota, vibre la hélice de nuestro navío impulsada por el fuego de la voluntad y gire el timón sorteando adversidades dirigido por la inteligencia serena y templada. Si la nave no llega a puerto habremos, al menos, instruído la marinería para que un día resplandezca su mirada ante amaneceres más claros. Es preciso navegar.»

Y navegó entre turbias tempestades y claros amaneceres por todos los confines del humano saber, hasta que un día con el ánimo firme y la inteligencia «serena y templada» se nos fué.

Al explorador de infinitos horizontes sucédele marino de agua mansa, barquero cuya vida discurre entre dos orillas. Llamado éste al faro en que los descubridores refieren sus hazañas y coleccionan sus trofeos, contempla con desconsuelo su modesta dote. De la orilla donde aprende a la orilla donde enseña ha ido su pobre barquichuela trasegando materiales de poco peso y vieja cantera; pero, a la llamada, cobra todavía pulso con qué atraer el remo e ilusión con qué henchir la vela. Al recalar al pie de la escalera que ha de subirle al torreón asáltale el recuerdo de navegantes insignes que en él tuvieron lugar de honor: Don José María Plans, su llorado maestro, con quien cruzó mares de Relatividad recién explorados; Don Miguel Vegas, inolvidable defensor suyo en reñida competición que le llevó a tierras de enseñanza; y el entrañable consejero timonel perdido, conocedor como nadie de rutas y escollos, cuya sustitución le abruma y sobrecoge. Cohibido y fatigado reposa el barquero unos instantes antes de atracar la frágil cáscara en que viene bogando. Véncele el sueño, y dormido sueña.

Una voz velada e imperceptible le dice cariñosamente: Soy tu amigo y maestro. ¿Para qué excusarte? Lo sé ya. Quien quise que te precediera no aceptó. Acepta tú como un deber, pero no te envanezcas. Huye de vanidades personales y corporativas. Sé humilde hasta conseguir que te perdonen. Sin humildad no es posible amar ni ser amado.

Otra voz noble y severa continúa: Soy tu amigo y defensor. Huelga tu excusa; quien antepuse a tu elección ha sido electo ya. Entra y sé justo. Ni la amistad ni el odio deben turbar tu juicio. Guárdalo de toda pasión propia o ajena. Sin rectitud jamás merecerás el nombre de maestro.

Y la tercera voz añade: Soy tu amigo y consejero. No tienes por qué disculparte conmigo. Sabes cuánto me holgaba de tenerte al lado. Me llamó antes la Providencia; pero conténtame verte en mi puesto. Ocúpalo sin cobardía, pero sé laborioso y estudia, ¡estudia sin descanso! Sólo así puedes llegar a merecer bien de la Patria.

Todo eso oye en sus sueños el soñador. Una brisa le despierta. Amarra el bote. Y confortado por el placentero reposo empieza a subir la escalera despacio, despacio, meditando la responsabilidad que cada peldaño agrega a su ya excesiva carga. Y mientras sube musita una oración:

Dame, Señor, fortaleza con qué afrontar los nuevos deberes y déjame transferir los honores, que por entero te pertenecen, a todos los seres de quienes tu infinita Bondad me ha rodeado. A padre y madre que en tu nombre me dieron vida y en cuyo sacrificio incalculable asentó mi educación, a la esposa que cuidó de mi fatiga sin medir la suya, a los hijos que alimentaron de esperanza mis desalientos, a cuantos quisieron hacerme bien enalteciéndome o humillándome, y en especial a los maestros que me enseñaron a aprender y a los discípulos entre quienes aprendí a enseñar. Haz, Señor, que en estos tres verbos aprender, enseñar y amar, se condense mi vida, y dame laboriosidad con qué continuar mi aprendizaje, rectitud con qué mantener mi magisterio, y sencillez en qué abastecer mi sed de amistad...

Suena tímido el aldabón, entreábrese la puerta y, cruzado el umbral, contiene su emoción.

—Me llamasteis y aquí comparezco. No sé en verdad en qué puedo seros útil. Nada traigo que enseñaros; pero hallaré mucho que aprender y no poco en que poner afecto. Acogedores sois conmigo y grata es vuestra casa para el estudio. Tenéis, me dicen, muchos libros, ¿dónde están? ¿Dónde el rincón de trabajo que me habéis asignado?

He dicho.

ACOTACIONES MATEMATICAS AL DISCURSO

Nota 1.—SOBRE LA FUNCIÓN DE TRANFORMACIÓN DE UN SISTEMA RETROACTIVO

Si $\varphi(p)$ es la función de transformación del sistema primario aislado, al estímulo $\xi(p)$ correspondería la respuesta $\eta(p)$ tal que

$$\xi(p) = \varphi(p)\,\eta(p) \qquad \text{o sea} \qquad \frac{\xi(p)}{\eta(p)} = \varphi(p)$$

Pero al agregar el sistema secundario de corrección o control, si éste transforma dicha respuesta η (que será estímulo en tal sistema)

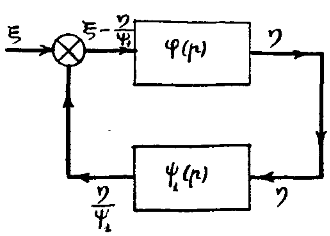


Figura 1

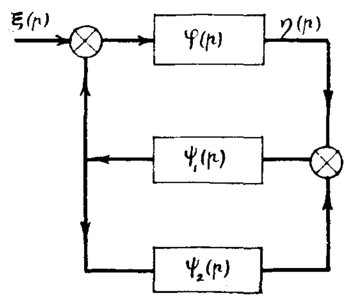


Figura 2

mediante la función de transformación $\psi_1(p)$ contraponiendo su transformada $\eta:\psi_1$ a la función de entrada ξ (en esto consiste la retroacción), se obtendrá como nuevo estímulo en el sistema primario $\xi - \dfrac{\eta}{\psi_1}$, el cual habrá de verificar con la respuesta η la ecuación de transformación anterior, es decir (fig. 1):

$$\xi(p) - \frac{\eta(p)}{\psi_1(p)} = \varphi(p)\,\eta(p)$$

de donde resulta la función de transformación del sistema total retroactivo

$$\frac{\xi(p)}{\eta(p)} = \varphi(p) + \frac{1}{\psi_1(p)}$$

como se indica en el texto del discurso.

La figura 2 indica el esquema retroactivo en cadena cuya función de transformación viene definida por

$$\frac{\xi(p)}{\eta(p)} = \varphi(p) + \cfrac{1}{\psi_1(p) + \cfrac{1}{\psi_2(p)}}$$

Nota 2.—SOBRE LAS FRACCIONES CONTINUAS DE COCIENTES INCOMPLETOS INFINITESIMALES Y SU APLICACIÓN A LÍNEAS ELÉCTRICAS

Concepto

Sean en un intervalo $[a, b]$ dos funciones de variable x real $f(x)$, $g(x)$ positivas, acotadas e integrables (Riemann). Llamemos

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx, \qquad G(x) = \int_a^x g(x)\,dx \qquad [1]$$

de donde, en todo intervalo parcial x, $x + \Delta x$

$$\Delta F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(x)\,dx, \qquad \Delta G(x) = \int_x^{x+\Delta x} g(x)\,dx \qquad [2]$$

Las funciones $F(x)$ y $G(x)$ son, pues, continuas y *monótonas crecientes*. Demostremos:

I.—*Al fraccionar el intervalo* [a, b] *en intervalos parciales mediante un sistema cualquiera de puntos intermedios*

$$x_0 = a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_i,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n = b$$

la fracción continua

$$\varphi = \Delta F(x_0) + \cfrac{1}{\Delta G(x_0) + \cfrac{1}{\Delta F(x_1) + \cfrac{1}{\Delta G(x_1) + \ddots + \cfrac{1}{\Delta F(x_{n-1}) + \cfrac{1}{\Delta G(x_{n-1}) + \cfrac{1}{C}}}}}} \qquad [3]$$

(donde C es un número real positivo cualquiera) *está constantemente comprendida entre* F(b)+C *y* $\frac{C}{CG(b)+1}$.

En efecto, al suponer nulos todos los ΔG (es decir, $g(x)\equiv 0$) la fracción aumenta convirtiéndose en

$$\Delta F(x_0)+\Delta F(x_1)+\ldots+\Delta F(x_{n-1})+C=F(b)+C$$

y al hacer todos los $\Delta F=0$ (o sea $f(x)\equiv 0$) resulta disminuída la fracción convirtiéndose en

$$\frac{1}{\Delta G(x_0)+\Delta G(x_1)+\ldots+\Delta G(x_{n-1})+\frac{1}{C}}=\frac{C}{CG(b)+1}$$

En todo intervalo parcial $[x, b]$, siendo $a<x<b$, la fracción construída análogamente con las definiciones [1] de F y G admitirá la acotación

$$\frac{C}{C[G(b)-G(x)]+1}<\varphi_{(x,b)}<F(b)-F(x)+C$$

que se demuestra del mismo modo.

Tanto de la definición de estas fracciones como de su acotación se desprende que son *positivas*, por serlo $f(x)$ y $g(x)$.

TEOREMA II.—*Podemos hacer los intervalos suficientemente pequeños para que al fraccionar en dos uno de ellos, dejando intactos los demás y la constante* C, *el nuevo valor* φ' *de la fracción resulte menor que el anterior* φ.

En efecto, sea

$$\varphi=\Delta F(x_0)+\cfrac{1}{\Delta G(x_0)+\ddots+\cfrac{1}{\Delta F(x_j)+\cfrac{1}{\Delta G(x_j)+\cfrac{1}{\psi}}}}$$

o abreviadamente

$$\varphi=\ddots+\cfrac{1}{h+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{\psi}}}$$

con $h=\Delta F(x_j)$, $k=\Delta G(x_j)$ y donde ψ representa la fracción continua formada desde x_{j+1} hasta el extremo b del intervalo.

Al fraccionar en dos el intervalo parcial x_j, x_{j+1} se convierte la fracción en

$$\varphi' = \cdots + \cfrac{1}{h_1 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{h_2 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{1}{\psi}}}}}$$

donde h_1 h_2 k_1 k_2 son los incrementos parciales de F y G, que, por la monotonía de dichas funciones, son positivos y verifican

$$h_1 + h_2 = h, \qquad k_1 + k_2 = k$$

El teorema quedará demostrado en cuanto probemos que

$$h_1 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{h_2 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{1}{\psi}}}} \quad \text{es menor que} \quad h + \cfrac{1}{k + \cfrac{1}{\psi}}$$

ya que después de un número *par* de inversiones y adiciones de sumandos positivos se conservará la misma relación de desigualdad entre φ' y φ.

Ahora bien, la segunda fracción se puede expresar

$$\frac{r}{s} = \frac{hk\psi + h + \psi}{k\psi + 1} = \frac{(h_1 + h_2)(k_1 + k_2)\psi + h_1 + h_2 + \psi}{(k_1 + k_2)\psi + 1}$$

y en función de su numerador r y denominador s se puede escribir la primera así

$$\frac{r'}{s'} = \frac{r + h_2 k_1 (h_1 k_2 \psi + h_1 - \psi)}{s + k_1 h_2 k_2 \psi + k_1 h_2}$$

Pero ψ es positiva y acotada cualquiera que sea el sistema de partición, mientras la continuidad de F y G aseguran la posibilidad de hacer sus incrementos h_1 h_2 k_1 k_2 tan pequeños como queramos tomando intervalos Δx_j suficientemente pequeños. En definitiva, podemos hallar $\varepsilon > 0$ tal que, para toda partición cuyos intervalos cumplan la condición $\Delta x_j < \varepsilon$, se verifique $h_1 k_2 \psi + h_1 - \psi < 0$, y por tanto

$$\frac{r'}{s'} < \frac{r}{s}$$

y en consecuencia también $\varphi' < \varphi$, como queríamos demostrar.

De este teorema se desprende, por aplicaciones reiteradas:

TEOREMA III.—*Al formar una sucesión de particiones* P_i *tal que cada partición contenga los puntos de división de las anteriores y que todos los intervalos tiendan a cero, los valores correspondientes de las fracciones* φ_i *tienen a un límite* φ. Puesto que, al menos, a partir de un cierto término, estos valores formarán una sucesión monótona decreciente (II) y acotada (I).

Veamos ahora cómo este límite es independiente del sistema de divisiones elegido. Más general:

TEOREMA IV.—*La sucesión de fracciones* φ_i, *correspondientes a una sucesión cualquiera de particiones* D_i *del intervalo* [a, b], *cuyos intervalos parciales tienden a cero, tienden hacia un límite* E *independiente de la sucesión elegida. Este límite coincide con el extremo inferior del conjunto de todas las fracciones* φ *que se pueden obtener dividiendo arbitrariamente el intervalo* [a, b].

Este teorema, análogo al de Darboux relativo a la integral de Riemann, puede demostrarse de modo similar (*). Sea E el extremo interior del conjunto de valores de φ, conjunto que es acotado (Teorema I). Dado $\varepsilon > 0$ podemos, pues, hallar una partición del intervalo $[a, b]$ tal que la fracción φ resultante sea $< E + \frac{\varepsilon}{2}$. Pero φ es una función continua $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})$ de las abscisas $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ de los puntos de división, ya que las variaciones ΔF, ΔG son funciones continuas positivas de dichas abscisas. Podemos, pues, hallar en la sucesión D_i una partición D_k de intervalos suficientemente pequeños ($<\delta$) para que los puntos de división de D_k más próximos a los $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ tengan abscisas $x'_1, x'_2, \ldots x'_{n-1}$ que difieran respectivamente de $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ en menos de δ. Por tanto podemos obtener una fracción $\varphi(x'_1\ x'_2 \ldots x'_{n-1})$ que difiera de $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})$ menos que $\varepsilon/2$. Si llamamos ahora φ_{D_k} la fracción obtenida con todos los puntos de división de D_k resultará (Teorema II):

$$E < \varphi_{D_k} \leqslant \varphi(x'_1, x'_2, \ldots x'_{n-1}) < \varphi(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}) + \frac{\varepsilon}{2} < E + \varepsilon$$

En resumen: Dado $\varepsilon > 0$ es posible hallar una división D_k perteneciente a la sucesión D_i del enunciado, tal que la fracción correspondiente φ_{D_k} y todas las que se obtendrían con intervalos parciales menores difiera de E menos que ε, lo que demuestra el teorema.

Este límite común puede, pues, considerarse como representa-

(*) V. por ej., GOURSAT: «Cours d'Analyse Mathématique». Tomo I.

tivo de una fracción continua cuyos cocientes incompletos dF, dG sean infinitesimales; es decir, puede expresarse mediante el algoritmo siguiente, que parece a primera vista desprovisto de sentido:

$$f(a)\,dx + \cfrac{1}{g(a)\,dx) + \ddots + \cfrac{1}{f(x)dx + \cfrac{1}{g(x)dx) + \ddots + \cfrac{1}{f(b)dx + \cfrac{1}{g(b)dx + \cfrac{1}{C}}}}}}$$

Estimo que es a dicho algoritmo al que debiera reservarse el nombre de *fracción continua* propiamente dicha, mientras debieran llamarse *fracciones escalonadas* las impropiamente designadas con el nombre de fracciones continuas (*).

Es interesante observar que este algoritmo comprende como caso particular la integral $\int_a^b$ y la recíproca de la integral $1 : \int_a^b$, ya que para $g \equiv 0$, $C = 0$ se reduce a $\int_a^b f(x)dx$ y para $f \equiv 0$, $C = \infty$ se reduce a $1 : \int_a^b g(x)dx$.

Cálculo del nuevo algoritmo

En lo que sigue supondremos f, g positivas y *continuas*.

Si comparamos dos secciones o reducidas impares ascendentes consecutivas de la fracción (3), es decir, las fracciones construídas entre los dos puntos consecutivos de división x_i, x_{i+1} y el extremo b del intervalo, resulta

$$Z(x_i) = \Delta F(x_i) + \cfrac{1}{\Delta G(x_i) + \cfrac{1}{Z(x_{i+1})}}$$

o bien

$$Z(x_i) = \frac{(\Delta F \cdot \Delta G + 1) Z(x_{i+1}) + \Delta F}{\Delta G \cdot Z(x_{i+1}) + 1} \qquad [4]$$

que establece una *relación proyectiva* entre $Z(x_i)$ y $Z(x_{i+1})$ de módulo 1. Variando la constante C (primera de las reducidas ascendentes impares) *los valores de* $Z(x_i)$ *darán*, pues, *una serie proyectiva con la serie de los valores de* C.

(*) En alemán para designar las nuevas fracciones bastaría añadir al nombre clásico *Kettenbrüchen* el calificativo «*stetige*», resultando una terminología más propia.

Designando $Z(x_{i+1})-Z(x_i)=\Delta Z(x_i)$ la relación (4) se convierte en

$$Z^2(x_i)\,\Delta\,G(x_i)+Z(x_i)\,\Delta\,G(x_i)\,\Delta\,Z(x_i)=\Delta\,F(x_i)\,\Delta\,G(x_i)\,Z(x_i)+$$
$$+[\Delta\,F(x_i)\,\Delta\,G(x_i)+1]\,\Delta\,Z(x_i)+\Delta\,F(x_i)$$

Dividiendo por Δx_i y haciendo tender $\Delta x_i \to 0$ se obtiene finalmente la ecuación de Riccati

$$Z^2 g(x)-f(x)=\frac{dZ}{dx} \tag{5}$$

El valor de la fracción continua ascendente $Z(x)$ entre x y b, variando x en el intervalo $[a,\ b]$

$$Z(x)=f(x)\,dx+\cfrac{1}{g(x)\,dx+\cfrac{\ddots}{+\cfrac{1}{f(b)\,dx+\cfrac{1}{g(b)\,dx+\cfrac{1}{C}}}}}$$

es, pues, solución de la ecuación de Riccati (5), en la que C es la constante del haz integral, y los valores de $Z(x)$ para cada abscisa x son proyectivos con los valores de C.

Estamos, pues, en posesión no sólo de un algorismo nuevo, sino también de un método para su cálculo que lo relaciona con la teoría de las ecuaciones diferenciales.

Otro procedimiento de cálculo puede fundarse en la integración del sistema lineal

$$\frac{dz}{dx}=f(x)\,y, \qquad \frac{dy}{dx}=g(x)\,z \tag{6}$$

El cociente $Z(x)=-\dfrac{z}{y}$ satisface a la ecuación (5). En efecto,

$$Z'(x)=\frac{zy'-yz'}{y^2}=\frac{gz^2-fy^2}{y^2}=gZ^2-f$$

Bastará, por tanto, integrar el sistema (6) con la condición $z=C$, $y=1$ para $x=b$.

Del sistema [6] puede pasarse, a su vez, a ecuaciones de segundo orden en y y en z por eliminación de z e y respectivamente, lo que da

$$z''=fg\,z+\frac{f'}{f}z', \qquad y''=fg\,y+\frac{g'}{g}y' \tag{7}$$

con las condiciones $z=-C$, $z'=f(b)$, $y=1$, $y'=-g(b)C$ para $x=b$.

Aplicaciones

Si f y g son constantes, la primera de las ecuaciones [7] se reduce a $z''=fgz$, que da

$$\left.\begin{aligned} z &= A e^{\sqrt{fg}\,x} + B e^{-\sqrt{fg}\,x} \\ y &= \frac{z'}{f} = \sqrt{\frac{f}{g}}\left(A e^{\sqrt{fg}\,x} - B e^{-\sqrt{fg}\,x}\right) \end{aligned}\right\}$$

$$\text{para} \quad x = b \left\{\begin{aligned} -C &= A e^{\sqrt{fg}\,b} + B e^{-\sqrt{fg}\,b} \\ 1 &= \sqrt{\frac{f}{g}}\left(A e^{\sqrt{fg}\,b} - B e^{-\sqrt{fg}\,b}\right) \end{aligned}\right.$$

obteniéndose

$$A = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{f}{g}} - C\right) e^{-\sqrt{fg}\,b}, \qquad B = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{f}{g}} + C\right) e^{\sqrt{fg}\,b}$$

es decir, sustituyendo en z e y

$$\left.\begin{aligned} z &= -C \operatorname{Ch}\sqrt{fg}\,(x-b) + \sqrt{\frac{f}{g}} \operatorname{Sh}\sqrt{fg}\,(x-b) \\ y &= -C\sqrt{\frac{g}{f}} \operatorname{Sh}\sqrt{fg}\,(x-b) + \operatorname{Ch}\sqrt{fg}\,(x-b) \end{aligned}\right\}$$

$$Z = \frac{C - \sqrt{\frac{f}{g}} \operatorname{Th}\sqrt{fg}\,(x-b)}{1 - C\sqrt{\frac{g}{f}} \operatorname{Th}\sqrt{fg}\,(x-b)} \tag{8}$$

La misma solución resulta de integrar la ecuación [5] (en este caso de variables separadas), pues

$$dx = \frac{dZ}{Z^2 g - f}, \quad \text{da} \quad x + k = \frac{-1}{\sqrt{fg}} \operatorname{Arg\,Th}\sqrt{\frac{g}{f}}\,Z$$

con $Z=C$ para $x=b$, y por tanto

$$x - b = \frac{1}{\sqrt{fg}}\left[-\operatorname{Arg\,Th}\sqrt{\frac{g}{f}}\,Z + \operatorname{Arg\,Th}\sqrt{\frac{g}{f}}\,C\right]$$

o bien

$$\operatorname{Th}\sqrt{fg}\,(x-b) = \frac{\sqrt{\frac{g}{f}}\,(C - Z)}{1 - \frac{g}{f}\,ZC}$$

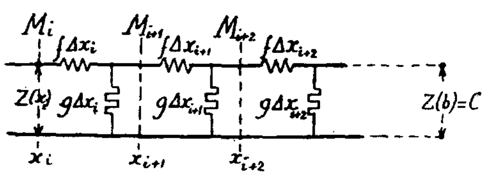
de donde resulta el mismo valor Z de antes (8).

Si $C = \sqrt{\dfrac{f}{g}}$ resulta Z independiente de x e igual a C.

La recta $Z = \sqrt{\dfrac{f}{g}}$ pertenece, pues, al haz integral.

Cuando f y g son respectivamente la impedancia y la admitancia por unidad de longitud en una línea eléctrica de transmisión de constantes uniformemente distribuídas, este valor [8] de Z coincide con la fórmula que la teoría clásica (*) da para la impedancia total en un punto x de la línea en función de la impedancia terminal C y de la impedancia llamada *característica* $Z_0 = \sqrt{\dfrac{f}{g}}$.

Esta coincidencia no es casual; tiene su origen en la misma esencia de la transmisión. La impedancia total en un punto cualquiera de la línea puede formularse directamente suponiendo ésta fraccionada en trozos de longitud Δx_i, cuyas impedancia y admitancia valdrán, respectivamente, $f\Delta x_i$ y $g\Delta x_i$.



Siendo las admitancias inversas de las impedancias y sumándose éstas en serie y aquéllas en paralelo; se verificará:

$$\text{Impedancia en el punto } M_i = f\,\Delta\, x_i + \cfrac{1}{g\,\Delta\, x_i + \cfrac{1}{\text{imp.}^{\text{a}} \text{ en } M_{i+1}}}$$

Al repetir la recurrencia para M_{i+1}, M_{i+2}, ... y pasar al continuo. vamos a parar a la fracción continua de eslabones infinitesimales, tratada más arriba.

El algoritmo que hemos estudiado responde, pues, a una realidad física, que fué precisamente la que nos lo sugirió, y como la formulación y esquema indicados son válidos tanto si f y g son constantes como si varían a lo largo de la línea, el algoritmo general en cuestión

(*) Compárese, por ej., con P. PUIG ADAM: «La Matemática en la transmisión de la energía eléctrica», pág. 67, fórmula (17). (Publicaciones de la Escuela de Ingenieros Industriales de Madrid, Curso 1947-48.)

y la ecuación de Riccati (5) o el sistema (6) permitirán calcular la variación de la impedancia total en el caso de impedancias y admitancias unitarias *no uniformemente distribuídas*. En particular, el sistema (6) desempeña papel análogo al de Lord Kelvin en la teoría clásica de líneas, designando y la intensidad y z la diferencia de potencial en el punto de abscisa x.

Añadiremos, para terminar, que en las aplicaciones indicadas aquí y en el cuerpo del discurso es suficiente establecer el nuevo algoritmo para funciones f y g positivas; pero el concepto es generalizable a funciones reales continuas de signos cualesquiera, así como a funciones f y g complejas de variable real o compleja. Estas generalizaciones, que ya hemos realizado en el momento de leerse este discurso, serán desarrolladas en oportuno artículo.

Nota 3.—SOBRE LAS FRACCIONES CONTINUAS RAMIFICADAS

Nos limitaremos a dar unas leves indicaciones de lo que con este concepto (del que tampoco conocemos antecedentes) queremos significar.

Imaginemos el último denominador de una cierta fracción continua descompuesto, por ejemplo, en dos sumandos, y que éstos sean a su vez otras tantas fracciones continuas; así

$$\varphi = f_1 + \cfrac{1}{g_1 + \cfrac{1}{f_2 + \cfrac{1}{g_2 + \cfrac{1}{f_3 + \cfrac{1}{g_3 + \cfrac{1}{f_4 + \cfrac{1}{g_4}}} + f'_3 + \cfrac{1}{g'_3 + \cfrac{1}{f'_4 + \cfrac{1}{g'_4}}}}}}}$$

El cálculo de tal algoritmo se efectuará fácilmente empezando por las últimas cadenas. Un conjunto de operaciones de inversión y suma dará sencillamente los valores de las dos fracciones

$$f_3 + \cfrac{1}{g_3 + \dots} \qquad f'_3 + \cfrac{1}{g'_3 + \dots}$$

Con su suma, considerada como quinto cociente incompleto, se continuará fácilmente el cálculo de la fracción total. Y del mismo modo procederíamos para varios sumandos. ¿Qué significado y qué interés puede tener tal algoritmo, aparentemente caprichoso?

Véase la siguiente red eléctrica de impedancias y admitancias, designadas las primeras por f y las segundas por g:

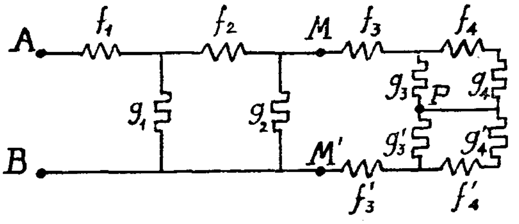


Figura 3

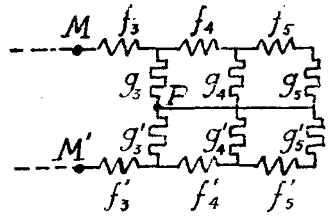


Figura 4

La impedancia entre M y P vale (fig. 3)

$$f_3 + \cfrac{1}{g_3 + \cfrac{1}{f_4 + \cfrac{1}{g_4}}}$$

Entre M′ y P es la expresión análoga con letras acentuadas. La suma de ambas fracciones es la impedancia entre M y M′; y la fracción total es la impedancia entre A y B.

Se comprende que las ramas de la red, correspondientes a las de la fracción, pueden seguir prolongándose con nuevos eslabones (véase figura 4, cuya expresión dejamos a cargo del lector).

Vemos, en resumen, que el algoritmo de las fracciones continuas ramificadas es apto para representar impedancias entre puntos alejadas en redes complejas formadas de impedancias y admitancias elementales, por traducir, en definitiva, de modo simple y natural las leyes de Kirchhoff. En estas fracciones puede igualmente realizarse el paso al continuo. Entre el origen y el final de cada rama la variación de la impedancia vendrá dada por integración de la correspondiente ecuación de Riccati con el intervalo y los coeficientes funcionales f, g propios de esta rama.

Nota 4.—Sobre los problemas de predicción y filtrado

En esta nota hemos adoptado como guía, más que la exposición del propio Wiener, la de Levinson, quien, recogiendo las ideas fundamentales del primero, ha sabido darles una forma particularmente sencilla y didáctica. También tenemos en cuenta el capítulo VI de la obra de James, Nichols y Phillips «Theory of Servomechanisms» y un trabajo muy reciente, «Una introducción a la teoría del filtrado y de la predicción», de A. Colino, quien nos ha honrado dándonoslo a conocer antes de su publicación y autorizado para citarlo.

Con objeto de establecer fórmulas viables en el cálculo práctico, plantearemos simultáneamente el problema considerando el mensaje o «imput» observado, ya sea como una función continua $f(t)$ dependiente de la variable tiempo t, ya como una serie discreta de valores f_n ordenados según el índice n indicador del número de intervalos de tiempo (regulares) transcurridos desde el origen, intervalos que adoptamos como unidad.

1. Reducción del problema a un sistema o a una ecuación integral.—El problema técnico que aquí se presenta es el de construir un sistema físico lineal (invariante respecto del origen de tiempos) capaz de transformar un mensaje perturbado f_n, $f(t)$ de tal modo que nos dé como respuesta una aproximación óptima del mensaje puro *actual* g_n, $g(t)$ (problema simple de *filtrado*) o del mensaje puro *futuro* al cabo de un tiempo h, g_{n+h}, $g(t+h)$ (problema de *filtrado y predicción*). Consideremos este último por su mayor generalidad, ya que abarca como casos particulares los problemas de simple filtrado ($h=0$) y de simple predicción ($f=g$).

Recordemos que la $\left\{ \begin{array}{l} \text{función } a(t) \\ \text{sucesión } a_n \end{array} \right\}$ (que llamaremos *característica*), respuesta del sistema a un impulso instantáneo unitario (Dirac) aplicado en el instante $t=0$, basta para caracterizar el sistema, ya que la respuesta del mismo a una entrada o «imput» cualquiera f_n, $f(t)$ podrá ser expresada en cada instante t sumando los valores en dicho instante de las respuestas a los impulsos sucesivos $f_{n-\nu}$, $f(t-\tau)d\tau$, que constituyen el pasado de f_n, $f(t)$; se trata, por tanto, de expresar

[1] g_{n+h} mediante una $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu f_{n-\nu}$ | $g(t+h)$ mediante una $\int_0^{\infty} a(\tau) f(t-\tau)\, d\tau$ [1']

del modo más *aproximado posible*, entendiendo por tal, siguiendo a Wiener, aquel que haga *mínimo* el *error cuadrático medio*. Es decir, hallaremos el sistema que tenga la función característica a_n, $a(t)$ capaz de hacer mínima la expresión

[2] $$E = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \left(g_{n+h} - \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu f_{n-\nu} \right)^2$$

$$E = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \left[g(t+h) - \int_0^{\infty} a(\tau) f(t-\tau) d\tau \right]^2 dt$$ [2']

Desarrollando los cuadrados e introduciendo las conocidas funciones de correlación (supuestos existentes los límites que las definen) R_f *autocorrelación* de f, R_g ídem de g, R_{fg} *intercorrelación* de f, g, definidas así:

$$[3] \quad R_f(k) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} f_n f_{n+k}$$

$$R_f(k) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t) f(t+k)\,dt \quad [3']$$

$$[4] \quad R_g(k) = \text{expresión análoga en } g$$

$$R_g(k) = \text{expresión análoga en } g \quad [4']$$

$$[5] \quad R_{fg}(k) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} f_n g_{n+k}$$

$$R_{fg}(k) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t) g(t+k)\,dt \quad [5']$$

la función que precisa hacer mínima se formulará de este modo:

$$[6] \quad E = R_g(0) - 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu R_{fg}(\nu+h) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\nu a_\mu R_f(\mu-\nu)$$

$$E = R_g(0) - 2 \int_0^{\infty} a(\tau) R_{fg}(\tau+h)\,d\tau + \int_0^{\infty} a(\tau_1)\,d\tau_1 \int_0^{\infty} a(\tau) R_f(\tau_1-\tau)\,d\tau \quad [6']$$

y expresando las condiciones de mínimo $\dfrac{\partial I}{\partial a_n} = 0$ resulta el sistema en a_ν

$$[7] \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu R_f(n-\nu) = R_{fg}(n+h) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$$

y aplicando el cálculo de variaciones, resulta la ecuación integral en $a(\tau)$

$$\int^{\infty} a(\tau) R_f(t-\tau)\,d\tau = R_{fg}(t+h) \quad [7']$$

Sabido es que las ecuaciones integrales se obtienen por paso al límite continuo en los sistemas lineales, de modo que la solución aproximada de la ecuación integral de la derecha conduce al sistema de la izquierda. Este sistema es de infinitas ecuaciones con infinitas incógnitas, pero en la práctica se sustituye por un sistema de gran número de ecuaciones y de incógnitas. Levinson estudia particularidades de la resolución de dicho sistema

$$\sum_{\nu=0}^{M} a_\nu R_f(n-\nu) = R_{fg}(n+h) \qquad [7 \text{ bis}]$$

y la convergencia del proceso al crecer M. A su trabajo (*) nos remitimos para quien desee más pormenores y detalles. Digamos, de paso, que la perturbación $f-g$ carece con frecuencia de toda correlación con el mensaje g, es decir, $R_{f-g,\,g}=0$, o sea $R_{fg}-R_g=0$, en cuyo caso el sistema se reducirá a

$$\sum_{\nu=0}^{M} a_\nu R_f(n-\nu) = R_g(n+h)$$

2. Consideraciones acerca de las funciones de correlación. Tesis ergódica.—Si recuerda el lector la formulación de los coeficientes de correlación entre dos series estadísticas, se dará cuenta de que la función R_f (o serie) de autocorrelación de $f(t)$ (o f_n) mide en cierto modo el enlace estocástico existente entre el pasado y el futuro de la función f, y análogamente R_{fg} mide el enlace entre el pasado de f y el futuro de g.

Tales funciones de correlación no han sido introducidas por mero capricho formal, sino por el hecho de poder conocerse sus valores sin el conocimiento completo de las funciones que los engendran. El conocimiento de tales valores radica en el hecho fundamental siguiente : En los proyectos de servomecanismos y de sistemas de comunicaciones no se consideran los mensajes o los «imputs» *aislados*, sino formando *conjuntos* con distribución estadística conocida, y en especial los conjuntos llamados «*estacionarios*», en los que tales funciones de correlación son independientes del instante inicial y prácticamente las mismas para todas las funciones o pares de funciones del grupo, por el hecho de transformarse unas en otras (al menos con cuanta aproximación se quiera) mediante corrimientos del origen de tiempos. Esta tesis, llamada «ergódica» (sólo rigurosamente demostrada en casos contados), es análoga a la que permite en mecánica estadística identificar la velocidad media de una molécula gaseosa en un recipiente a lo largo del tiempo con el promedio de las velocidades de todas las moléculas en un mismo instante. En general tales promedios estadísticos son los que aprecian los aparatos de medida en los fenómenos en que juegan simultáneamente gran número de causas, y la identificación de estos promedios, que pueden llamarse *espaciales*, con los promedios *temporales* de cada fenómeno del grupo en un intervalo infinito, constituye la tesis ergódica aludida.

(*) Ver los apéndices de la obra de Wiener: «Extrapolation, interpolation and smoothing».

3. Expresión del error.—Haciendo $\left\{\begin{array}{l} n=\mu \text{ en } (7) \\ t=\tau \text{ en } (7') \end{array}\right\}$ y sustituyendo en $\left\{\begin{array}{l} (6) \\ (6') \end{array}\right.$ resulta

$$[8] \quad E_{min} = R_g(0) - \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu R_{fg}(\nu + h) \qquad \Bigg| \qquad E_{min} = R_g(0) - \int_0^{\infty} a(\tau) R_{fg}(\tau + h) d\tau \quad [8']$$

Se comprende que el término segundo no puede ser positivo, pues en tal caso la solución $a_\nu = 0$, $a(\tau) = 0$, daría una E menor, incumpliéndose la condición de mínimo; luego E_{min} (procedente de una suma de cuadrados de errores) es nulo o positivo menor que $R_g(0)$.

$0 \leqslant E_{min} \leqslant R_g(0) =$ valor cuadrático de g.

El caso más favorable es, pues, aquel en que $E_{min} = 0$ y el más desfavorable aquel en que $E_{min} = R_g(0)$, es decir, $R_{fg} = 0$, en cuyo caso el mensaje perturbado sería estocásticamente independiente del mensaje puro, es decir, la perturbación borraría el mensaje sin posibilidad de reconstruir nada de él.

4. Empleo de la transformación de Laplace-Fourier.—El manejo matemático de los sistemas físicos lineales aludidos se simplifica aplicando a las funciones de entrada y salida, así como a la $a(t)$ característica del sistema, la transformación de Laplace-Fourier, que tiene un significado físico muy rico en sugestiones.

Definida la transformada Fourier de f_n, $f(t)$ mediante

$$[10] \quad \varphi(s) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_n e^{-jns} \qquad \Bigg| \qquad \varphi(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-jts} dt \quad [10']$$

podemos reconstruir la f dada la φ mediante multiplicación de ambos miembros por $e^{jms} ds$ o bien $e^{j\tau s} ds$ e integración entre $-\pi$, $+\pi$ en el caso de la izquierda (sucesiones), y entre $-\infty$ y $+\infty$ en el caso de la derecha. Resulta, según es bien sabido (análisis armónico, integral de Fourier),

$$[11] \quad f_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(s) e^{jms} ds \qquad \Bigg| \qquad f(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) e^{j\tau s} ds \quad [11']$$

Se comprueba ahora sin dificultad que si $a(t)$ es la función característica del sistema $\alpha(s)$ su transformada Fourier después de completarla con $a(t) = 0$ para $t < 0$, las transformadas $\xi(s)$, $\eta(s)$ de las funciones de entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ verifican

$$\eta(s) = \alpha(s) \xi(s) \qquad [12]$$

En efecto: Puesto que la transformación que define el sistema físico lineal es

[13] $y_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x_{n-\nu} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu x_{n-\nu}$ con $a_\nu = 0$ para $\nu < 0$	$y(t) = \int_0^{\infty} a(\tau) x(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\tau) x(t-\tau)\, d\tau$ 13'] con $a(\tau)=0$ para $\tau<0$

al aplicar a ambos miembros la transformada Fourier se obtiene (suponiendo convergentes las sumaciones)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-jns} y_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-jns} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu x_{n-\nu} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu e^{-j\nu s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{n-\nu} e^{-j(n-\nu)s}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jst} y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jst} \int_{-\infty}^{+\infty} a(\tau) x(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\tau) e^{-js\tau} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau) e^{-js(t-\tau)} d\tau$$

La segunda suma es igual a

$$\sum_{n-\nu=-\infty}^{\infty} x_{n-\nu} e^{-j(n-\nu)s} = \xi(\ )$$

para toda ν

$$\int_{t-\tau=-\infty}^{\infty} x(t-\tau) e^{-js(t-\tau)} d(t-\tau) = \xi(s)$$

para toda τ

por lo tanto. como queríamos demostrar

$$\eta(s) = \alpha(s)\, \xi(s)$$

Volveremos a insistir en que $\alpha(s)$ es la transformada Fourier de la función $\begin{Bmatrix} a(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$ para $\begin{Bmatrix} t \geqslant 0 \\ t < 0 \end{Bmatrix}$. Por otra parte esta relación no es más que el teorema llamado de la «Faltung» por los analistas alemanes.

En las redes eléctricas la naturaleza matemática de la función $\alpha(s)$, generalmente racional, permite deducir la estructura de la red capaz de realizar el sistema.

5. Transformadas Fourier de las funciones de correlación. Densidades espectrales. Invariancia de su cociente.—Las transformadas Fourier ρ_f, ρ_{fg} de las funciones de correlación R_f, R_{fg} definen la llamada *densidad espectral* de la función f o la mixta de las funciones

f y g, mejor dicho, las densidades espectrales de los conjuntos estocásticos a que tales funciones pertenecen, denominaciones que no nos detendremos en justificar y cuyo significado físico puede el lector penetrar en la bibliografía indicada.

Consignemos aquí solamente alguna de sus más elementales propiedades. Por ejemplo:

Las funciones de autocorrelación R_f *y sus transformadas Fourier* ρ_f *son funciones pares.*

El que $R_f(k)$ sea $= R_f(-k)$ se desprende de la misma definición (3) (3') permutando los factores f que en ella intervienen. De ello resulta (con $k' = -k$)

$$\rho_f = \int_{-\infty}^{0} e^{-jks} R_f(-k)\,dk + \int_0^{\infty} e^{-jks} R_f(k)\,dk =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{jk's} R_f(k')\,dk' + \int_0^{\infty} e^{-jks} R_f(k)\,dk$$

es decir,

$$\rho_f(s) = 2\int^{\infty} \cos ks\, R_f(k)\,dk$$

que prueba la paridad de $\rho_f(s)$, por lo que algunos autores la escriben $\rho_f(s^2)$.

En cambio al permutar los factores f, g en (5) (5') resulta

$$R_{fg}(k) = R_{gf}(-k)$$

de donde, análogamente,

$$\rho_{fg}(s) = \rho_{gf}(-s)$$

puesto que

$$\rho_{fg}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jks} R_{fg}(k)\,dk = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jk'(-s)} R_{gf}(k')\,dk' = \rho_{gf}(-s)$$

Y veamos, finalmente, la sencillez con que se transforman tales densidades espectrales al aplicar a las funciones una transformación lineal del tipo (13). Al tranformar una entrada $x(t)$ mediante

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} l(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau \quad \text{con} \quad l(\tau) = 0 \quad \text{para} \quad \tau < 0 \qquad [17]$$

la función de correlación de la respuesta $y(t)$ será

$$R_g(k) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} y(t)\, y(t+k)\, dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} dt \int_{-\infty}^{+\infty} l(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} l(\theta)\, x(t+k-\theta)\, d\theta$$

y su transformada $\rho_y(s)$ será

$$\rho_y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jks}\, dk \cdot$$

$$\cdot \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} dt \int_{-\infty}^{+\infty} l(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} l(\theta)\, x(t+k-\theta)\, d\theta$$

o sea, admitida la existencia de los límites y la posibilidad de transponer las integraciones

$$\rho_y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} l(\tau)\, e^{j\tau s}\, d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} l(\theta)\, e^{-j\theta s}\, d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(k+\tau-\theta)s}\, dk \,.$$

$$\cdot \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t-\tau)\, x(t+k-\theta)\, dt$$

y como el límite indicado en el segundo miembro es $R_x(k-\theta+\tau)$, al multiplicar por $e^{-j(k-\theta+\tau)}$ y por $dk = d(k-\theta+\tau)$ e integrar entre $-\infty$ y $+\infty$ obtendremos (para todos los valores de θ, τ) la transformada $\rho_x(s)$, de donde, en definitiva,

$$\rho_y(s) = \overline{\lambda(s)}\, \lambda(s)\, \rho_x(s) = |\lambda(s)|^2\, \rho_x(s)$$

Análogamente, si $y_1(t)$, $y_2(t)$ son transformadas lineales de $x_1(t)$, $x_2(t)$, mediante (17) un cálculo idéntico prueba que

$$\rho_{y_1 y_2}(s) = |\lambda(s)|^2\, \rho_{x_1 x_2}(s)$$

y lo mismo puede establecerse para las sucesiones temporales discretas.

De esta relación se desprende: *Los cocientes de dos densidades espectrales se conservan invariantes en toda transformación lineal del tipo* (17) o (13).

6. Los procesos estocásticos puros y su aplicación. Interpretación de la teoría según Colino.— Las funciones o procesos físicos en general, cuyo futuro está totalmente desvinculado del pasado, reciben el nombre de estocásticos puros [purely random processes (*)]. Son aquellas funciones o conjuntos de funciones f cuya autocorrelación $R_f(k)$ es nula excepto, en todo caso, para $k=0$, puesto que por definición

$$R_f(0) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{+N} f_n^2 \quad \text{o bien} \quad R_f(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f^2(t)\, dt$$

es decir, $R_f(0)$ es el promedio de los cuadrados de f. Las funciones estocásticas puras tienen, pues, funciones de correlación del tipo Dirac, cuyas transformadas Fourier son constantes.

Si a un sistema físico lineal de función característica $l(t)$ se aplica una entrada $x(t)$ estocástica pura, la respuesta $y(t)$ tendrá una autocorrelación cuya transformada Fourier será de la forma

$$\rho_y(s) = C\,\lambda(s)\,\overline{\lambda(s)}$$

en la que C puede reducirse a la unidad mediante elección de unidades convenientes. Recíprocamente: Dada una función $f(t)$ o serie temporal f_n, podemos considerarla como transformada lineal de una función estocástica pura según un sistema lineal, cuya función característica $l(t)$ vendrá dada por su transformada Fourier $\lambda(s)$, que ha de verificar

$$\rho_f(s) = \lambda(s)\,\overline{\lambda(s)}$$

con $l(t)=0$ para $t<0$, y por tanto $\lambda(s)$ analítica acotada en el semiplano superior. Pero éste es precisamente el problema llamado de la *factorización* en la teoría de Wiener, problema que adquiere así una interpretación muy sugerente debida a Colino.

Pasamos por alto los detalles de su prolija solución analítica, que el lector hallará en la bibliografía indicada. Una vez hallada la función $\lambda(s)$, podemos construir la función estocástica pura $x(t)$, causa real o virtual del fenómeno estudiado $f(t)$, sin más que invertir su transformada $\xi(s)=\varphi(s):\lambda(s)$ (φ transformada de f). Operando ahora con dicha causa $x(t)$, podemos ascender a la determinación de los valores futuros $f(t+h)$ del mensaje perturbado (problema de *predic-*

(*) Creemos preferible aplicar la denominación a los «procesos» como hace PHILLIPS, en vez de a las funciones como hace COLINO, por darse así a entender mejor que se trata de un carácter que afecta a los conjuntos de funciones estacionarios, con preferencia a las funciones aisladas.

ción simple) o a los presentes $g(t)$ o futuros $g(t+h)$ del mensaje puro g (problemas de *filtrado simple* o de *filtrado y predicción*) mediante formulación aproximada del tipo

$$g_{n+h} \cong \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x_{n-\nu} \qquad \text{o bien} \qquad g(t+h) \cong \int_0^{\infty} b(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

y hallando los coeficientes b_ν o la función $b(\tau)$ para que sea mínimo el error medio cuádrico, con la considerable ventaja, sobre el proceso de cálculo descrito en § 1, de ser ahora el sistema (7)

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu R_x(n-\nu) = R_{xg}(n+h) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$$

inmediatamente resoluble, toda vez que en cada ecuación se anulan todos los coeficientes $R_x(n-\nu)$, excepto el correspondiente a $\nu=n$ (por ser x estocástica pura), quedando una sola incógnita b_n en cada ecuación. Se obtiene así

$$b_n = \frac{R_{xg}(n+h)}{R_x(0)}$$

valores óptimos, cada uno de los cuales es independiente de los restantes y, por tanto, del número de sumandos considerados.

En el problema puro de predicción en que $f \equiv g$ se observa que es *exactamente*

$$f(n+h) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \lambda_\mu x_{n+h-\mu} = \sum_{\mu=0}^{h-1} \lambda_\mu x_{n+h-\mu} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_{\nu+h} x_{n-\nu}$$

pero el primer sumando es incalculable por afectar a valores *futuros* de x ($n+h-\mu>n$ si $\mu<h$) absolutamente desvinculados del pasado. Tomando, pues, como valor aproximado el segundo sumando

$$f(n+h) \cong \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_{\nu+h} x_{n-\nu}$$

los valores $\lambda_{\nu+h}$ seguirán siendo los valores óptimos, es decir, $b_\nu = \lambda_{\nu+h}$, y el error cometido será el referido primer sumando, interpretación del error de gran fuerza intuitiva (debido asimismo a Colino), pues hace ver que el error en la predicción de un fenómeno (no estocástico puro) no es otro, en definitiva, que el efecto desconocido que sobre el valor futuro buscado tendrán los valores de la *causa estocástica pura* intermedios entre dicho momento futuro y el presente. De esta interpretación deduce Colino, en el trabajo citado, formulaciones de los operadores de transformación entre f_n y f_{n+h} o entre f_n y g_{n+h}, que coinciden con los de Wiener.

Nota 5.—Sobre el concepto de cantidad de información

Hemos indicado en el texto del discurso el parentesco de problemas matemáticos que plantean las técnicas de la comunicación y del servomecanismo, el carácter estadístico de los mismos y la unidad de métodos que con ello puede alcanzar la recién nacida ciencia Cibernética. En la nota precedente acabamos de dar, en particular, una ligera idea de la técnica empleada por Wiener en la resolución de los problemas de filtrado y predicción. Nos proponemos en ésta penetrar asimismo, levemente, en algunos conceptos matemáticos fundamentales que utiliza la moderna técnica de la comunicación

La teoría matemática de la comunicación prescinde del aspecto conceptual de los mensajes, los cuales se reducen para el técnico a variaciones de ciertas magnitudes físicas que precisa reproducir o trasladar lo más fielmente posible. Estas variaciones obedecen en conjunto a ciertas leyes estadísticas, cuyo conocimiento permite ajustar a ellas el sistema de comunicación más conveniente.

Es fundamental en esta teoría el concepto de *cantidad de información*, tanto como pueda serlo el concepto de energía en los proyectos de líneas de alta tensión. A este concepto y a sus distintos aspectos y generalizaciones dedicamos principalmente esta nota, en la que seguimos en líneas generales las ideas expuestas por Shannon en sus dos fundamentales artículos publicados con el tíulo «Mathematical Theory of Communication», en *The Bell System Technical Journal*, julio-octubre 1948.

1. Cantidad de información. Entropía.— Empecemos por los mensajes de carácter discreto o discontinuo, constituídos por conjuntos de signos o señales bien diferenciados. En principio toda función monótona del número de signos o señales transmitidos por distintos sistemas permitirá graduar una escala de cantidades de información suministradas por los mismos. La función elegida dependerá del convenio que se adopte para la *suma*. Parece natural admitir que dos sistemas simultáneos son capaces de transmitir una cantidad de información suma de las que transmiten separadamente cada uno de ellos; pero como el número de señales que podemos obtener por combinación de las de uno y otro sistema es el producto de éstas, se comprende que la función adecuada es la logarítmica. De la base del sistema depende la unidad de medida. La unidad correspondiente a la base 2 es el *bit*. Así 2^n señales o signos corresponden a *n* bits. *Un bit es, pues, el informe del resultado de una selección binaria* (del tipo disyuntivo *si* o *no*).

Ejemplo: Una lámpara con dos estados, apagada o encendida, o un circuito abierto o cerrado, son las realizaciones físicas más sencillas de un *bit*. Como tales se usan en las calculadoras electrónicas con sistema binario de numeración. Un conjunto de 5 lámparas actuando *simultáneamente* permite formar 2^5 combinaciones y transmitir, por tanto, 2^5 señales distintas, es decir, $\log_2 \cdot 2^5 = 5$ bits.

Si de lo simultáneo pasamos a lo sucesivo, podemos decir, análogamente, que una sola lámpara variando 5 veces de estado por segundo permite transmitir 2^5 mensajes por segundo, es decir, 5 bits. Y *n* lámparas simultáneas $5n$ bits por segundo.

Estos sencillos ejemplos muestran que la cantidad de información así definida mide no el número de señales realmente transmitidas, sino el número de las que se podría transmitir en el sistema (por estados simultáneos o por segundo en caso de estados sucesivos, etc.) y, por tanto, mide el *grado de discriminación*, y en tal sentido la *cantidad de información*, que un estado del sistema o un segundo de información supone.

Es de notar la analogía de este concepto al de entropía termodinámica aunque con signo opuesto. Así, todo proceso que implique pérdida de discriminación de una fuente (promedios, empastes, perturbaciones, ruidos) supondrá disminución de información o entropía del sistema de comunicación. En adelante usaremos (de acuerdo con Shannon) el concepto de *entropía de una fuente* (por mensaje o por segundo) con preferencia al de *cantidad de información* (por mensaje o por segundo).

Aun siendo ambos conceptos equivalentes, la forma primera recuerda mejor su calidad referente a la fuente informativa más que al mensaje o episodio que de ella procede.

2. El idioma como fuente de información.— En el ejemplo anterior hemos evaluado la cantidad de información o entropía de una fuente de mensajes en bits por segundo suponiendo que todos los signos transmisibles son *de la misma duración*. Si ello no es así, bastará dividir el $\log N(T)$, del número de señales transmisibles en un intervalo muy largo T, por la duración del mismo, para tener un promedio estadístico de la cantidad de información transmitida por segundo. Es decir, la entropía vendría dada por $\lim_{T \to \infty} \frac{\log N(T)}{T}$. Y este mismo límite expresa la llamada *capacidad* de un *canal* (channel) o sistema de transmisión sustituyendo el número N(T) de signos combinatoriamente posibles por el de signos físicamente transmisibles por dicho canal en el tiempo T.

Interesa al ingeniero predecir estas cantidades estadísticas y aún proyectar un sistema de transmisión capaz de dar valores prefijados a dichas cantidades o de elevarlas al máximo posible. Ya sabemos que la predicción estadística se basa en sustituir frecuencias por probabilidades. La fórmula anterior supone esencialmente equiprobables todos los signos transmitidos; pero no suele ser así, ya que, por ejemplo, no son iguales las frecuencias de las letras ni de sus asociaciones binarias, ternarias, ... en los mensajes telegráficos. Se concibe, pues, la utilidad del conocimiento de estas frecuencias relativas para proyectar una codificación de señales telegráficas (formadas generalmente por pulsaciones cortas y largas) capaz de dar el máximo rendimiento de un canal, representando los signos más frecuentes por las señales más breves. Este estudio ha sido efectuado en el idioma inglés llegándose a publicar tablas que dan las frecuencias o probabilidades con que se presentan las letras y signos sueltos, así como sus combinaciones binarias, ternarias, ...

La variación de probabilidad de unos signos a otros complica notablemente la formulación de las cantidades antes definidas y, sobre todo, el hecho de que la probabilidad de la presencia de cada signo en un mensaje dependa de la secuencia de signos precedentes, lo que caracteriza estadísticamente tales mensajes como sucesiones estocásticas de Markoff, es decir, como procesos de probabilidades relacionadas en cadena.

3. Hipótesis ergódica.—Un proceso de tal índole se llama *ergódico* cuando al crecer infinitamente la secuencia de signos transmitidos las frecuencias simples, binarias, ternarias, ... y otras cantidades estocásticas análogas calculadas sobre cada secuencia tienden en probabilidad a límites *independientes de la secuencia considerada*. En tal caso las cantidades en cuestión, calculadas sobre el conjunto de mensajes posibles, se igualan en probabilidad a las obtenidas sobre un solo mensaje prolongado indefinidamente. Tal hipótesis puede admitirse en la comunicación telegráfica.

Para los mensajes continuos hay que modificar la definición, adaptando convenientemente la idea básica general.

Un conjunto aleatorio de mensajes continuos representado por $f_{\alpha}(t)$, t tiempo, α índice o parámetro característico de cada mensaje con distribución de frecuencia conocida, diremos que es *estacionario* cuando se transforma en sí mismo en toda traslación del origen de tiempos, es decir, cuando $f_{\alpha}(t+\tau)=f_{\beta}(t)$, siendo β otro parámetro con igual distribución de frecuencias o probabilidad que α. Diremos además que el conjunto es ergódico si no admite ningún subconjunto estacionario de probabilidad distinta de 0 ó 1. Así, el conjunto $f(t)=\operatorname{sen}(t+\theta)$ con θ uniformemente distribuído entre 0 y 2π es ergódico, pero no así el $f_{\theta,a}(t)=a \operatorname{sen}(t+\theta)$ con el nuevo parámetro a distribuído normalmente, ya que para cada valor (o intervalo) de a se obtiene un subconjunto estacionario.

En un conjunto ergódico cada función o mensaje puede considerarse como *representativo del conjunto*, puesto que al correr el tiempo va adquiriendo, con desfase variable, los valores de las demás funciones del conjunto y, por tanto, lo mismo dará promediar los valores estadísticos en el conjunto que a lo largo de un mensaje ideal representativo. No puede ya decirse lo mismo si el conjunto admite subconjuntos estacionarios, ya que al promediar a lo largo de un mensaje individual no obtendremos el promedio de todo el grupo sino sólo del subgrupo a que pertenece. La teoría de la comunicación supone ergódicos los conjuntos de mensajes que maneja, hipótesis que se justifica a posteriori por el ajuste de los resultados que proporciona a la realidad de los hechos.

4. Entropía de una fuente de mensajes discretos.—En los sencillos ejemplos anteriores hemos formulado la entropía de una fuente de información en el supuesto de ser sus mensajes equiprobables y en número finito. Tomando simplemente el logaritmo del número N de mensajes trasmisibles teníamos la información o entropía de la fuente *por mensaje*, que es tanto como dividir por N el producto N log N.

Cuando los mensajes no sean equiprobables, agrupados en n grupos N_i de frecuencias o probabilidades $N_i : N = p_i$, parece natural generalizar tomando como entropía o cantidad de información por mensaje una expresión de la forma

$$H = -k \sum_{1}^{n} p_i \log p_i \qquad [1]$$

El signo — se añade para conseguir que sea $H>0$ toda vez que $\log p_i<0$. El coeficiente k depende de la unidad o del sistema de logaritmos elegido.

Se comprueba fácilmente que:

1.° Si $p_1=p_2=\ldots=p_n$, $H=-k\log\frac{1}{n}=k\log n$. Es el caso de máxima probabilidad correspondiente a n grupos de mensajes de probabilidades $1/n$.

2.° Si $H(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, abreviadamente $H(p)$, es la entropía de una fuente y $H(q_1, q_2, \ldots, q_m)$, abreviadamente $H(q)$, es la de otra de mensajes *independientes* de los anteriores, ambas constituyen conjuntamente una fuente de mensajes $H(p, q)$ cuya entropía vale, como es fácil demostrar,

$$H(p, q)=H(p)+H(q) \tag{2}$$

En resumen: La información de dos fuentes discretas de mensajes independientes es la suma de las informaciones de una y otra.

3.° Si las fuentes no son independientes, la relación es

$$H(p, q)=H(p)+H_p(q) \tag{3}$$

siendo $H_p(q)$ la llamada entropía condicional de la segunda fuente cuando es conocida la información de la primera. No nos detenemos en las demostraciones, que se apoyan en teoremas clásicos de probabilidades.

La expresión (1) supone todavía un número finito N de mensajes (cada uno de ellos definido mediante un número finito ν de signos o señales). Cuando el número de mensajes es infinito por serlo asimismo ν, como ocurre de ordinario, precisa retocar el concepto (1) sustituyéndolo por el de entropía *por signo* transmitido, que se define mediante

$$H=\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{\nu}\sum_i(-p_i\log p_i) \tag{4}$$

La demostración de existencia de dicho límite y otras definiciones del mismo pueden verse en el artículo primero de los antes citados de Shannon.

5. Aplicaciones de estos conceptos.—Estos conceptos se prestan a especulaciones interesantísimas en la técnica de la comunicación. Un idioma escrito es un sistema gráfico de comunicación que utiliza un determinado número de símbolos. La entropía o cantidad de información que con ellos se obtiene depende de la distribución de probabilidades en la aparición de tales símbolos. Toda desigualdad en esta distribución supone evidentemente una mutilación de combinaciones y, por tanto, de posibilidad informativa. La relación entre la entropía real del idioma y la que podría obtenerse con los mismos símbolos aprovechando íntegramente su poder combinatorio, es decir, con equidistribución de probabilidades, se llama *entropía relativa* del idioma o sistema de comunicación. Su complemento a uno mide la *redundancia,* que viene a ser un tanto por uno de derroche de signos del idioma.

En el idioma inglés la entropía relativa y su complemento, la redundancia, vienen a valer aproximadamente 0,50. Es decir, *la mitad* de las letras que se escriben vienen impuestas por la misma naturaleza del idioma o sistema de comunicación; la otra mitad es aleatoria. Una experiencia comprobadora puede ser: dar a reconstruir textos de los que se ha suprimido la mitad de las letras al azar.

No sé que se haya efectuado un estudio parecido para el castellano y creo que tendría no escaso interés.

Otra aplicación interesante la constituye el *problema de la codificación.* Codificar es, en definitiva, traducir los símbolos en estados físicos transmisibles; por ejemplo, los impulsos enviados por el telégrafo. El problema técnico matemático que tal codificación plantea es el aprovechamiento óptimo del canal, es decir, la transmisión del número máximo de símbolos por segundo.

Tal problema lo resuelve el siguiente teorema fundamental (ver Shannon, loc. cit.):

Dada una fuente de entropía H *bits por símbolo y un canal o sistema de señales de capacidad* C *bits por segundo, es posible hallar una codificación tal que el promedio de símbolos transmitidos por segundo se acerque cuanto se quiera al valor* C/H. *Este cociente da el máximo aprovechamiento posible del canal. No es posible hallar una codificación que permita transmitir mayor número de símbolos.*

Este fundamental resultado pone por sí solo de relieve la importancia técnica de los conceptos expuestos.

6. Entropía de una fuente de mensajes continuos.— Sea una fuente de mensajes continuos (funciones continuas del tiempo) dependientes de un parámetro aleatorio x según una ley de distribución $p(x)$. Pasando al límite la expresión [1] resulta como definición razonable de entropía o cantidad de información por mensaje

$$\mathrm{H}(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \log p(x)\, dx \qquad [5]$$

y si el conjunto de mensajes tiene n grados de libertad, es decir, depende de n parámetros aleatorios $x, y, z, \ldots, u$ con ley de distribución conocida $p(x, y, \ldots u)$ la entropía se definirá análogamente

$$\mathrm{H}(x, y, \ldots, u) = -\int\int \ldots \int p(x, y, \ldots, u) \log p(x, y, \ldots, u)\, dx\, dy, \ldots, du \quad [6]$$

integral n-múltiple extendida al espacio R_n definido por $x, y, \ldots, u$.

Los mensajes continuos reales (radio, televisión, ...) son funciones de un número de grados de libertad infinito. Admitiendo la hipótesis ergódica, tomando como representativo de la fuente un mensaje indefinidamente prolongado a partir de cualquier instante (la emisión de una estación, por ejemplo) y limitada la banda de frecuencias entre 0 y W ciclos/seg., es posible (v. Shannon) representar aproximadamente en un intervalo finito un mensaje $f(t)$ mediante un polinomio de la forma $\sum_1^n a_k \frac{\operatorname{sen} \pi(2\mathrm{W}t-k)}{\pi(2\mathrm{W}t-k)}$, donde $a_k = f\left(\frac{k}{2\mathrm{W}}\right)$.

El polinomio obtenido da los valores de $f(t)$ en los puntos de abscisa $k/2\mathrm{W}$ desde $k=1$ hasta $k=n$ como es fácil comprobar, es decir, hasta $t=\mathrm{T}=n/2\mathrm{W}$ (para $t=k'/2\mathrm{W}$, k' entero$>n$, todos los términos son nulos). Podemos, pues, adoptar este polinomio como representación aproximada de $f(t)$ entre 0 y $\mathrm{T}=n/2\mathrm{W}$ tanto más aproximado cuanto mayor sea $n=2\mathrm{WT}$. (Es en el fondo un desarrollo de $f(t)$ en cierto tipo de funciones ortogonales.) Las ordenadas a_k de $f(t)$ en los puntos de abscisas $k/2\mathrm{W}$ ($k=1, 2, \ldots n$) pueden ser consideradas como parámetros del mensaje, que tendrá así $n=2\mathrm{WT}$ grados de libertad. Al aumentar T aumenta n y precisa modificar la definición de entropía (6) sustituyéndola por el concepto de *entropía por grado de libertad* del mensaje, que se define así y constituye una variante natural de la fórmula (4)

$$\mathrm{H} = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int\int \ldots \int p(x, y, \ldots, u) \log p(x, y, \ldots, u)\, dx\, dy, \ldots, du \quad [7]$$

o por el de entropía H′ por segundo dividiendo por T en vez de n, con lo que resulta $\mathrm{H}'=2\mathrm{WH}$.

7. Propiedades de la entropía de comunicación.— La entropía de una fuente continua tiene propiedades análogas a las que hemos expuesto en el párrafo 4 para las fuentes discretas.

I. Cuando las fuentes son independientes, la entropía H o cantidad de información por mensaje del conjunto de varias fuentes de parámetros x, y, z es la suma de las cantidades de información de cada una

$$\mathrm{H}(x, y, z) = \mathrm{H}(x) + \mathrm{H}(y) + \mathrm{H}(z)$$

No me detengo en la demostración, que es muy sencilla, pero creo interesante reforzar el convenio definición (6) probando que, recíprocamente, la admisión de esta propiedad que el sentido común exige para toda cantidad que pretenda medir información, conduce a dicha fórmula. En efecto, supongamos para fijar las ideas, tres parámetros; la ley de probabilidad $P(x, y, z)$ resultante de la superposición de tres fuentes *independientes* cuyos mensajes individuales dependen de los parámetros x, y, z con leyes de distribución $p(x)$, $q(y)$, $r(z)$ será

$$P(x, y, z) = p(x) \cdot q(y) \cdot r(z)$$

Propongámonos definir la entropía mediante un operador de la forma $\iiint \Phi[P(x, y, z)]dx\, dy\, dz$, actuando sobre la distribución P del parámetro o parámetros, extendiendo la integral en todo el espacio que ellos definen, supuesta absolutamente convergente en él, y determinemos Φ para que se cumpla la ley de suma de entropías indicada, o sea

$$\iiint \Phi[P(x, y, z)]\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \int \Phi[p(x)]\, dx + \int \Phi[q(y)]\, dy + \int \Phi[r(z)]\, dz$$

Puesto que se verifica $\int p(x)\, dx = \int q(y)\, dy = \int r(z)\, dz = 1$, podemos multiplicar cada uno de los sumandos del segundo miembro por las integrales de las distribuciones p, q, r distintas de la que figura bajo el operador y resulta

$$\iiint \Phi[p(x) \cdot q(y) \cdot r(z)]\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint \{ q(y) r(z) \Phi[p(x)] + pr\, \Phi[q] + pq\, \Phi[r] \}\, dx\, dy\, dz$$

y como esta igualdad debe verificarse cualesquiera que sean las distribuciones p, q, r, se deberá tener

$$\Phi[p \cdot q \cdot r] = qr\, \Phi[p] + pr\, \Phi[q] + pq\, \Phi[r]$$

y por tanto

$$\frac{\Phi[p \cdot q \cdot r]}{p \cdot q \cdot r} = \frac{\Phi[p]}{p} + \frac{\Phi[q]}{q} + \frac{\Phi[r]}{r}$$

de donde llamando $\Phi[p] : p = \psi(p)$, la función ψ deberá satisfacer la ecuación funcional

$$\psi[p \cdot q \cdot r] = \psi(p) + \psi(q) + \psi(r)$$

de donde $\psi[p]=\log p$ y por tanto $\Phi[p]=p\log p$, como queríamos probar.

II. Cuando los parámetros aleatorios de que dependen los mensajes no son independientes, la relación es más complicada. Para el caso de dos parámetros es análoga a la indicada en el párrafo 4 para las fuentes discretas

$$\mathrm{H}(x, y) = \mathrm{H}(x) + \mathrm{H}_x(y) = \mathrm{H}(y) + \mathrm{H}_y(x)$$

siendo $\mathrm{H}_x(y)$ la entropía condicional de la segunda fuente, cuando se supone conocido el parámetro x de la primera y análogamente para $\mathrm{H}_y(x)$. Estas entropías condicionales se formulan fácilmente en función de las probabilidades simples y compuestas, pues siendo

$$p(x, y) = p(x)\cdot p_x(y), \qquad \text{de donde} \qquad p_x(y) = \frac{p(x, y)}{p(x)}$$

será

$$\mathrm{H}_x(y) = -\int p_x(y)\log p_x(y)\,dx$$

y multiplicando por $\int p(x)dx=1$ resulta

$$\mathrm{H}_x(y) = -\int\int p(x, y)\log\frac{p(x, y)}{p(x)}\,dx\,dy$$

De estas relaciones resulta en general por ser $\mathrm{H}_x(y)\leqslant\mathrm{H}(y)$

$$\mathrm{H}(x, y)\leqslant\mathrm{H}(x) + \mathrm{H}(y)$$

el signo = válido sólo para fuentes independientes.

III. La ley $p(x)$ de distribución que hace máxima la entropía

$$\mathrm{H}(x) = -\int p(x)\log p(x)\,dx$$

con las condiciones

$$\int p(x)\,dx = 1$$

$$\int p(x)\,x^2\,dx = \sigma^2 \quad \text{(desviación standard prefijada}=\sigma)$$

es la gaussiana

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

La demostración de esta propiedad se reduce a una simple aplicación del problema clásico de cálculo de variaciones con función extremal ligada.

Esta propiedad se generaliza al caso de varias variables.

El valor de la entropía correspondiente (v. Shannon) es

$$H(x) = \log \sqrt{2\pi e}\,\sigma$$

Cerramos aquí esta breve reseña de las distintas facetas y generalizaciones del concepto de cantidad de información en relación con la técnica de la comunicación, remitiendo al lector a los artículos citados de Shannon para el estudio de los teoremas de existencia que implican, así como para las interesantes aplicaciones a los casos de transmisión con perturbaciones (noise), problemas de rendimiento, fidelidad, capacidad de transmisión, etc. Puede también consultar el lector el artículo de A. Colino «Sobre la teoría de la Radiocomunicación» publicado en *Revista de Telecomunicación*, Junio 1949.

Nota epílogo.—PSICOLOGÍA Y CIBERNÉTICA

El escepticismo con que en el cuerpo del discurso acojo las teorías tendentes a explicar eléctricamente las funciones superiores del intelecto humano no es un escepticismo apriorístico sino de retorno, es decir, elaborado después de leer y de oír en el Coloquio de París las varias y audaces opiniones en torno al problema. Parece, pues, obligado cerrar estas notas matizando y razonando el referido escepticismo aun cuando sólo sea para no merecer la acusación de ignorancia. Pasemos breve revista a los puntales sobre los que tales teorías se apoyan (1).

Feed-back, aprendizaje y moral.—El cerebro tiene como función biólogica primordial mantener homeostáticamente las condiciones de vida del organismo mediante procesos retroactivos en feed-back con el mundo exterior. Esto es indiscutible, pero las generalizaciones y extrapolaciones que de esta función pretenden derivarse me parecen muy discutibles, cuando no francamente recusables.

Por ejemplo, la experiencia de su homeostato induce a Ashby a afirmar que el cerebro puede por sí solo modificar los parámetros de

(1) Esta nota ha sido añadida con posterioridad a la entrega del discurso.

ajuste en los circuitos retroactivos primarios mediante otros secundarios de control de los primeros, y cuya búsqueda y hallazgo se confía simplemente al azar. La función de aprendizaje que tal reajuste de parámetros supone puede así ser conseguida sin dirección supramaterial. La inteligencia en este aspecto queda reducida a un simple cubileteo de feed-backs secundarios.

Otra extrapolación. Si toda nuestra conducta está regulada por simples procesos retroactivos no se necesitará más para explicar nuestro código moral. Toda la ética es pues también puro feed-back. He aquí la consecuencia a que viene a llegar en reciente escrito Walter, animado sin duda por el éxito de sus famosas tortugas electrónicas. (V. bibliografía.)

El problema de la memoria.—Cada una de nuestras acciones no es sólo respuesta a los agentes exteriores inmediatos que la motivan sino que en ella influyen agentes remotos registrados en nuestra memoria. En las modernas máquinas de cálculo electrónicas se registran también los datos mediante sucesiones de impulsos que quedan circulando en circuitos convenientemente realimentados en espera de que la máquina los envíe a los órganos calculadores en el momento oportuno. Metáfora: llamemos a estos circuitos «memorias» y a la máquina misma «cerebro» electrónico. Conversión de la metáfora en hipótesis: Nuestra memoria está asimismo realizada por circuitos.

Colocados en un plano estrictamente biofísico hay que reconocer que esta hipótesis parece más plausible que la que atribuye la memoria a huellas bioquímicas de carácter permanente, entre otras razones, por su condición no localizable y su conservación después de profundas heridas y resecciones de la masa encefálica. Pero, a su vez, esta hipótesis plantea varios problemas, como el de la conexión de dichos circuitos para el transporte de sus registros y, lo que es más importante aún, el problema de la naturaleza de lo registrado: memoria de formas, memoria de conceptos, etc. Empecemos ocupándonos de las conexiones.

Lógica y sinapsis.—Uno de los principios fundamentales en los fenómenos de excitación nerviosa es el principio llamado del «todo o nada», según el cual cada neurona sólo actúa cuando el impulso excitante (que puede ser exterior o el contacto sináptico de otra neurona) alcanza un cierto umbral. Rebasado éste, la neurona actúa íntegramente y de manera única, lo mismo que actúan los relés de los circuitos eléctricos en los referidos «cerebros» electrónicos. Para los biofísicos el cerebro no es más que una máquina con diez mil millones de neuronas actuando de relés, cuya variedad prácticamente infinita de interconexiones permite explicar la infinita variedad de nuestros procesos mentales. Mc. Culloch y Pitts han elaborado, a este respecto, todo un cálculo de transmisión de señales en relación con el cálculo lógico simbólico.

Por otra parte, el «todo o nada» con que actúan las neuronas, corresponde perfectamente a la unidad de información denominada «bit» en la nota precedente, y la función logarítmica que mide la cantidad de información tiene su pareja en las leyes de la sensación e incluso en la métrica de las capas corticales en las que se proyectan las sensaciones. Así, por ejemplo, los tonos de una gama de frecuencias en progresión geométrica se proyectan en lugares de la corteza equidistantes, es decir, cuyas coordenadas están en progresión aritmética.

Resumiendo: la lógica cibernética y el material informativo que maneja se resume en estas dos palabras: combinatoria y sinapsis.

Formas y universales. Encefalografía y scanning.— Wiener se pregunta si una máquina es capaz de reconocer formas y contesta afirmativamente recordando ciertas ingeniosas realizaciones que transforman formas auditivas verbales en formas visuales (Visible speech). Con tales aparatos los sordos «oyen» hablar por la vista. Exite análogamente un proyecto de Mc. Culloch para traducir a los ciegos las formas de imprenta en sensaciones auditivas o táctiles de características dependientes sólo de la forma de la letra, pero no de su tamaño. Ahora bien, es evidente que en estos ejemplos la máquina no hace más que transformar unas formas en otras de modalidad perceptible para los órganos sensoriales del sujeto receptor, y sólo es éste quien realiza el acto consciente de reconocimiento, acto carente de sentido para una máquina. Sigue, pues, en pie la interpretación biofísica de tales formas.

A esta cuestión han dado una contestación ingeniosísima Mc. Culloch y Pitts en su famoso trabajo «How we know universals. The perception of auditory and visual forms». En él se da, de pasada, una explicación de la función psicobiológica de las ondas de potencial en la corteza cerebral, ondas que registran, como es sabido, los encefalogramas. La importancia del tema y de su derivación encefalográfica merecen un especial comentario.

La encefalografía es, que yo sepa hasta el presente, la única técnica experimental que ha sido capaz de detectar eléctricamente la actividad genérica de nuestro pensamiento y es natural que hacia ella se dirija la atención de los cibernéticos. Iniciada hace unos veinte años, ha aportado ya una valiosa contribución al diagnóstico de ciertas perturbaciones, como epilepsia, tumores cerebrales, etc., que aparecen en los oscilogramas, acusadas por ondulaciones típicas; pero no ha tenido hasta el momento la misma fortuna en los intentos de correlacionar la estructura de dichos encefalogramas con las características temperamentales e intelectuales de los sujetos experimentados. Recientemente se han hecho estudios en este sentido, y el profesor Alejandro P. Arellano, a su paso por Madrid, ha referido recientemente los suyos ralizados en Boston, según los cuales parece ser característica en los encefalogramas de algunos matemáticos famosos una gran variedad y riqueza de ritmos. Pero la caracterización de la personalidad mediante tales encefalogramas, o los espectroencefalogramas que resultan de su análisis armónico, parece aún muy remota, y más remota todavía la posibilidad de acusar mediante estructuras encefalográficas específicas actos específicos de pensamiento.

Y ahora veamos las interpretaciones biofísicas de estas ondas, interpretaciones que, por cierto, no aclaran de modo satisfactorio el carácter paradógicamente negativo (de atenuación) que sobre ellas ejerce un esfuerzo de atención o de reflexión consciente. Para muchos de los biofísicos actuales las ondas encefalográficas son la manifestación de procesos de scanning o barrido efectuados en los órganos sensoriales o en su proyección cortical, análogos en cierto modo a los que emplea la televisión. Estos barridos permiten explicar la memoria, el reconocimiento de formas, etc., en términos de la mayor economía de estructura y de función (principio fundamental evolucionista). Según Walter parecen confirmar tal hipótesis las perturbaciones de carácter alucinatorio producidas en el sujeto experimentado cuando el campo visual se ilumina intermitentemente con frecuencia próxima a la del ritmo alfa, ritmo cuyo período corresponde sensiblemente a la duración de la permanencia de la imágen en la retina. Tales perturbaciones tienen carácter análogo a las que tendrían lugar en los receptores de televisión retransmitiendo una escena iluminada con intermitencias de frecuencia próxima a la de la onda de transmisión.

La explicación de Mc. Culloch y Pitts es, como hemos dicho, más audaz y profunda. Los ritmos encefalográficos son procesos de barrido que la mente efectúa para llegar a la génesis de universales, en particular al reconocimiento de formas visuales y auditivas.

tales como, por ejemplo, la percepción de una forma geométrica independiente del tamaño y posición, y la de un acorde o una melodía independiente de la altura de tono. El transporte de un acorde a distintos tonos puede asimilarse a una transformación matemática efectuada sobre la sucesión de notas del acorde consideradas, sea en forma de frecuencias (multiplicación de ellas por un factor) o ya en su representación cortical resonante (traslación). Si representamos el acorde por una función $\Phi(x)$ de la variable x localizadora del tono en la proyección cortical (de modo que sea $\Phi(x)=0$ para los sonidos ajenos al acorde) todo corrimiento del mismo a otro tono puede expresarse por una transformación del tipo $T\Phi(x)=\Phi(x+\xi)$, en la que ξ es el parámetro de corrimiento. Al variar este parámetro obtenemos un grupo de transformaciones, y todo invariante de este grupo es un ente matemático característico del acorde con independencia de su altura de tono. He aquí un universal, en este caso perteneciente a una *forma auditiva:* el acorde. Invariantes matemáticos de esta naturaleza pueden obtenerse cuantos se quieran integrando un funcional cualquiera $f(T\Phi)$ sobre todas las transformadas del grupo, y todo será cuestión de traducir biofísicamente tales procesos de integración. Interpretaciones análogas podemos dar para la génesis de *formas visuales* mediante invariantes en grupos de transformaciones más complejas (proyección sobre la corteza de movimientos, semejanzas, etc.).

Mc. Culloch llega a indicar esquemas de posibles procesos biofísicos capaces de realizar integraciones generadoras de invariantes, esquemas inspirados en la estructura histológica de la corteza cerebral y en los cuales las transformadas $T\Phi$ tienen su proyección en distintas capas de neuronas mediante aferentes específicos que las excitan diagonalmente (según tonos crecientes en el caso de la sensación sonora) al tiempo que un potencial liminar supletorio, suministrado por aferentes no específicos en forma de barrido o scanning, recorre el integrando provocando los impulsos elementales que las fibras eferentes se encargan de sumar. Estos barridos son los que se ponen de manifiesto en las ondas encefalográficas.

La hipótesis, como se ve, es tan ingeniosa como audaz y no deja de estar de acuerdo con la observancia antes apuntada de la existencia de gran riqueza y variedad de ritmos en mentes matemáticas de gran poder de abstracción y combinación. Pero es hipótesis que abre a su vez infinidad de interrogantes nuevos. ¿Cuántos invariantes van a ser precisos para caracterizar cada forma, cada universal? ¿Cuántas capas de neuronas necesitaremos para engendrarlos? ¿Dónde se recogen y en qué forma se conservan estos universales? ¿Cómo se estratificarán para formar a su vez por barrido en ellos universales de universales, es decir, conceptos de abstracción creciente? Y a todo eto, ¿qué agente es el que regula, ordena y mueve las agujas de esta complicada trama? La imaginación se pierde en tales barridos, pero al mismo tiempo el espíritu se subleva al sentirse reducido a una madeja de circuitos y conexiones en la que no hallan feed-back justificable, ni el ascetismo del santo, ni la pura curiosidad del estudioso.

Quiero explicarme por qué está corriendo ahora mi pluma sobre la cuartilla emborronando formas que sustentan conceptos y juicios elaborados sabe Dios a través de cuántos barridos, y quiero imaginarme mi cerebro, visto desde fuera, trabajando en su intrincada función. Lo primero que me asombra es su inconsecuencia al mantenerse despierto y activo en horas en que su estricta función conservadora debiera haberme conducido automáticamente al reposo. Trato de echar la culpa a mi yo inmaterial que le acucia y espolea, pero la biofísica me sale al paso: no hay tal yo metafísico; no soy más que una forma pasajera de energía; lo que escribo es tan sólo el «output» final de una maraña de circuitos en los que multitud de «inputs», que se extienden desde el más remoto pasado, han ido determinando este resultado al que no podría dar salida sin estar despierto. No soy observador de mi cerebro, soy simplemente mi cerebro mismo, el observador y el observado; y así en busca de la explicación de algo vengo a la postre a recaer en lo explicado...

No conozco en detalle la comedia de Karel Kapek, pero tengo noticia de que termina dramáticamente. Los robots creados por el hombre acaban insubordinándose. Quizá hubiese sido más divertido todavía terminar la comedia con una escena en la que los robots demostraron la inexistencia del hombre.

BIBLIOGRAFIA

N. WIENER: Cybernetics (J. Wiley, New-York; Hermann, Paris).

N. WIENER: Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series (Massachusetts Inst. of Technology).

A. COLINO: Teoría de los servomecanismos (Instituto de electrónica del C. S. I. C.).

A. COLINO: «Una introducción a la teoría del filtrado y de la predicción». (Rev. de Ciencia Aplicada. Año VI, fasc. I.)

JAMES, NICOLS, PHILIPS: Theory of servomechanisms (Massachusetts Inst. of Techn. Radiation Laboratory Series).

W. B. CANNON: La sabiduría del cuerpo. (Ed. Séneca, México.)

CH. SHERRINGTON: El hombre en su naturaleza. (Ed. Alhambra. Madrid.)

N. RASHEWSKY: Progresos y aplicaciones de la Biología matemática. (Espasa-Calpe.)

J. VAN DER WERFF: Biological Reactions caused by Electric Currents and by X-Rays. (Elsevier Publ. N. York. Amsterdam.)

F. J. MURRAY: The theory of Mathematical Machines. (King's Crowm Press. Nueva York.)

Harvard University: Proceedings of a Symposium on large-scale digital Calculating Machinery. (The Annals of the Computation Laboratory of Harvard University.)

C. E. SHANNON: A Mathematical Theory of Communication. (The Bell System Techn. Journal, 1948.)

R. LORENTE DE NO: Correlation of nerve activity with polarization phenomena. (The Harvey Lectures Series.)

R. LORENTE DE NO, LEVERETT DAVIES: Contribution to the Mathematical theory of the electrotonus. (Studies from the Rockefeller Institute for Medical Research. 1947, vol. 131.)

L. TORRES-QUEVEDO: Ensayo sobre Automática. (Rev. de la Real Ac. de Ciencias. Enero de 1914.)

W. S. MC CULLOCH: Une comparaison entre les Machines a Calculer et le Cerveau. (Coloquio de París, 1951.)

W. PITTS y W. S. MC CULLOCH: How we know universals. The perception of auditory and visual forms. (Bull. of Math. Biophysics, 1947.)

M. R. ASHBY: The homeostat. (Coloquio de París.)

M. R. ASHBY: The cerebral mecanism of inteligent action. (De la Colección «Perspectives in Neuropsychiatry», editada por Derek Richter.—Londres, 1951.)

W. G. WALTER: Features in the electro-physiology of mental mechanisms. De la misma Colección.)

W. G. WALTER: Realisation Mécanique de Modèles de Structure Cérébrale (Coloquio de París.)

POTTER, KOPP, GREEN: Visible speech (Van Nostrand.—New York, 1947).

P. PUIG ADAM: La transformación de Laplace en el tratamiento matemático de fenómenos físicos. (Rev. Mat. Hisp. Am., 4.ª Serie, Tomo XI, I, 2.)

P. PUIG ADAM: Les sythèmes rétroactifs en chaîne et les fractions continues. (Coloquio de París 1951 sobre «Les Machines a Calculer et Pensée humaine. Institut Blaise Pascal.)

P. PUIG ADAM: Las fracciones continuas de cocientes incompletos diferenciales y sus aplicaciones. (Rev. Mat. H. A.)

CONTESTACION

DEL

EXCMO. SR. D. ANTONIO TORROJA MIRET

SEÑORES ACADÉMICOS:

Si no me lo impidiera el respeto debido a la tradición, que fija las normas por que han de regirse los actos académicos, yo me holgara de olvidar en estos momentos el carácter científico del que aquí nos reúne, para que mis palabras reflejaran sencillamente los sentimientos que en mí despierta. Porque son muchos los recuerdos y muy hondos los afectos renovados hoy en mí por los dos nombres que llenan esta ceremonia: Esteban Terradas y Pedro Puig Adam. El amigo cordial de toda la vida y el discípulo brillante y muy querido. El hombre cumbre que nos dejara en la plenitud de su saber, de su prestigio y de su actividad prodigiosa; y el matemático y maestro eximio, de amplia cultura y labor fecunda, digno de la medalla que va a recibir. Y ambos largamente adentrados en mi vida. No extrañaréis, pues, encontrar en mis palabras el eco repetido de recuerdos y de afectos que no he de ocultar, y a los cuales debo, sin duda, el honor preciado de llevar la voz de la Academia en esta solemnidad.

Esteban Terradas. Lejos de mí el propósito de esbozar siquiera un juicio sobre su personalidad egregia y su obra multiforme. Otros lo han hecho ya con la autoridad debida. Y el nuevo académico acaba de subrayar en su figura algunos rasgos sutiles, llenos de hondo significado. Pero fuera ingratitud notoria en mí no recordar en estos momentos con emoción sincera la cordial amistad que me dispensara desde los primeros años de mi juventud. Sin que el desnivel intelectual patente fuera parte para amenguarla. En ella influyó, sin duda, la circunstancia de haberme encontrado a su lado en los momentos más dolorosos quizá de su vida: pérdida de seres queridos, contrariedades profesionales, vejaciones políticas... Como si la Providencia hubiera querido darme ocasión de sondear toda la hondura de su sentir, pareja de la altura de su saber. Aún resuena en mis oídos la despedida punzante que en el momento supremo dirigiera a la primera de las hijas que perdió; y guarda mi retina la imagen de su andar inseguro al acompañar, como un sonámbulo, los restos de su primogénita, bruscamente arrancada a su cariño, pletórica de juventud, de belleza y de ilusión. Como no he olvidado aquella tarde de mayo de 1931, en que fué destituído de la Dirección General de la Compañía Telefónica, como pudiera despedir un conserje malhumorado a un botones interino. Duro golpe para su fina sensibilidad, propia de todo espíritu cultivado. Y mucho más allá en el tiempo, cuando aún estudiaba en Madrid, el día en que perdió a quien le hizo de padre en su temprana orfandad. Y tantos y tantos hechos compartidos, que estrecharon nuestra amistad y me hicieron conocer toda la vehemencia, excesiva a las veces, de su sentir profundo. Podían las normas de discreción, que la convivencia social impone, velar la expresión de sus sentimientos; y en los últimos años de su vida, una actividad febril, cada día más intensa, podía absorber de tal modo sus horas y sus minutos, que no le quedase apenas vagar para darse cuenta de su propio sentir. Pero en el recinto de la amistad, en el coloquio espontáneo con los amigos, afloraba fácilmente su emoción contenida. No fué Terradas pródigo de su amistad; pero ésta era en él honda y sin eclipses. Podían pasar los años, prolongarse las ausencias o cambiar la situación propia o la ajena; y la amistad que un día otorgara permanecía inalterada. ¡Cuántas veces pude observarlo ! La nuestra, hincada en el dolor compartido, no tuvo mengua a lo largo casi de medio siglo. Siempre que acudí a ella, la encontré cordial. Y hoy exigía de mí este recuerdo postrero.

Si Terradas fué para mí el maestro admirado antes de ser el amigo querido, Puig Adam fué el discípulo brillante que había de ser luego entrañable amigo. Y ello sucedió así. Había comenzado él sus estudios en la Escuela de Ingenieros Industriales de Barcelona, con ánimo de ejercer más tarde esta profesión, cuando quiso completar su formación matemática con las enseñanzas de la Facultad de Ciencias. En ella me encontraba yo de profesor ; y ello me brindó el placer de iniciarle en algunas ramas de la Geometría. Una inteligencia clarísima, una laboriosidad constante y una simpática modestia son los rasgos dominantes del recuerdo que de él guardo desde aquellos tiempos. Sin que el correr de los años haya hecho más que confirmar aquel juicio primero. Y es que pude ya entonces conocerle bien. Porque eran años aquéllos en que el número de alumnos en los últimos cursos de la Facultad era muy reducido ; hasta el punto de que Puig Adam estuvo solo una buena parte del curso. Y la clase consistía de ordinario en un sencillo coloquio entre alumno y profesor, en el cual se exponía y comentaba por ambos la materia objeto de la lección. Ello permitía, pues, conocer bien al alumno. De lo que no estoy ya tan seguro es de que tal coloquio resultara muy grato para éste. Porque mi añeja preocupación por lograr la debida formación intelectual de los alumnos, me llevaba a aprovechar avaramente el diálogo con este fin ; corrigiendo inexorablemente cualquier error que en él pudiera deslizarse, cualquier falta de precisión en los conceptos o de rigor en los razonamientos, e incluso cualquier incorrección de lenguaje que tuviera alguna repercusión matemática. El trastrueque de los artículos definido e indefinido, por ejemplo, o el empleo de una conjunción causal indebida eran faltas inexcusables. Claro es que el rigor lógico de la Matemática exige estos detalles de precisión, y la futura labor docente de los alumnos, si ha de ser acertada, los exige también; pero no es menos claro que para soportar día tras día esta corrección continua, a lo largo de dos cursos, se necesita una dosis de paciencia bien cumplida. Puig Adam la tuvo. E hizo más todavía. Porque, a través de aquella dura disciplina intelectual, supo percibir la belleza de la Matemática, cuyos aspectos diversos le mostraban las enseñanzas de la Facultad, y atraído por ella, abandonó la formación técnica que había sido el objeto primero de sus estudios, para dedicarse al cultivo de aquella ciencia. Consagróse, pues, de lleno a los estudios de la Facultad, que terminó con gran brillantez en Barcelona, y cursó el año siguiente el Doctorado en Madrid; coronando éste con una tesis sobre la «Resolución de algunos problemas elementales en Mecánica relativista restringida», que mereció la máxima calificación.

Por cierto que el calificativo «elementales» aplicado a los problemas estudiados en este trabajo y que nada, en verdad, exigía hacer constar en su título, es una muestra, entre tantas, de aquella cualidad que he señalado en nuestro nuevo compañero y que tan simpático me le hizo cuando estudiaba; su innata modestia. Y ello me recuerda un detalle de aquellos años, que quiero consignar aquí, ya que es de grata ejemplaridad.

Cursaba él la Geometría Proyectiva, primera que estudió conmigo, y lo hacía con el fruto que habían de dar forzosamente sus condiciones de inteligencia y voluntad. Era un alumno sobresaliente a no dudar. Imaginad, pues, mi sorpresa cuando allá, por el mes de abril, recibí la visita de su padre, que veía a su hijo estudiar con el ardor con que siempre lo había hecho; pero nervioso, preocupado y expresando a cada paso temor de no dominar debidamente aquella disciplina. Y deseaba, como buen padre, conocer mi juicio, para aconsejar a su hijo, en caso necesario, que renunciara a examinarse y volviera a estudiar aquella materia en el curso siguiente. Tal era el concepto que de sí tenía aquel alumno brillante, bien ajeno a los sentimientos de superioridad y suficiencia que a las veces se observan en alumnos destacados, e incluso en otros que no lo son. No necesito deciros cuál fué mi respuesta. Lo que sí quiero añadir, en honor del padre, es que el hijo no supo de aquella gestión ni de su resultado alentador hasta muchos años después.

Terminados los estudios del Doctorado, la actividad de Puig Adam se ha desarrollado casi por entero en Madrid y vosotros sois testigos de mayor excepción de su trayectoria y sus triunfos. Me limitaré, pues, a señalar sus hitos principales. Dos son, a mi entender, los hechos decisivos de su vida profesional. Es el uno el haber obtenido en 1926 una cátedra de Matemáticas en el Instituto de San Isidro de Madrid. Fué aquél un triunfo sonado. Ganar por oposición una cátedra de Madrid en plena juventud, a los cinco años de terminados sus estudios y en dura lucha con gran número de contrincantes, muchos de los cuales eran ya catedráticos, adornados con la experiencia docente y el prestigio profesional que ello implica, no es, en verdad, hecho frecuente. Este triunfo confirmó el cambio de rumbo iniciado durante los años de Facultad y fijó la trayectoria profesional de Puig Adam: la misión de su vida no sería el ejercicio de la Ingeniería, sino la enseñanza de la Matemática. El segundo hecho aludido es su adscripción, terminados los estudios de Ingeniero Industrial que antes abandonara, a las enseñanzas de la Matemática en la Escuela de Ingenieros Industriales de Madrid: como Profesor auxiliar, primero (1932-1945), y como Catedrático de «Extensión de Cálculo», más tarde (1946). Y este segundo hecho completó el primero, llevando a nuestro nuevo compañero a ocuparse de la Matemática superior en sus relaciones con la Técnica; misión que cumple con el celo de que es prueba patente su reciente y magnífico tratado sobre Cálculo infinitesimal. No han sido éstas las únicas actividades docentes desarrolladas por Puig Adam, claro está. Una auxiliaría de Geometría descriptiva y Geometría superior en la Facultad de Ciencias de Madrid (1923-1926), le permitió, a raíz de terminados sus estudios, continuar por algún tiempo en contacto con la Facultad, ampliando así su formación matemática superior. La enseñanza de Análisis matemático y Cálculo infinitesimal en el Instituto Católico de Artes e Industrias de Madrid (1923-1932), le inició en la experiencia docente de la Matemática aplicada a la Técnica. Y el cargo de Profesor de Cálculo en la Escuela Superior Aerotécnica durante cinco años (1931-1936), a propuesta precisamente de Terradas, le brindó la ocasión de desarrollar cursos de Matemática superior y realizar en ellos trabajos muy interesantes de investigación. Pero estas funciones, de elevado interés en sí mismas y concienzudamente desempeñadas por él, aparecen tan sólo como actividades esporádicas, en torno de las dos primordiales antes señaladas: Instituto de San Isidro y Escuela de Ingenieros Industriales.

A la cátedra del Instituto aportó Puig Adam, con su formación matemática, sólida y completa, una clara intuición pedagógica. Comprendió muy bien que la finalidad del estudio de la Matemática en la Enseñanza media no ha de ser meramente instrumental como en la primaria, ni profesional como en la superior, sino fundamentalmente educativa, con todo el amplio contenido que esta palabra encierra. Y que es un error buscar en la Matemática, en este grado de enseñanza sobre todo, como él mismo ha expuesto bellamente, el desarrollo tan sólo de la facultad de razonar, que proporciona el estudio riguroso de la Matemática abstracta, con sus conceptos estilizados y sus razonamientos impecables. Queda así esta ciencia desligada de la realidad sensible que envuelve al muchacho y ofrece menguado interés para él, como la ofrecerá para el hombre medio que ha de ser mañana. Es preciso huir de tal divorcio entre Matemática y realidad, y fomentar, con igual empeño que el puro razonar, las facultades de observación y de intuición, que permiten extraer de la realidad tangible y sus problemas el contenido matemático que encierran, reelaborando así con los alumnos los conceptos y los métodos matemáticos que han de conocer y que sólo de este modo adquieren para ellos contenido e interés. Sin olvidarse de proyectar después los resultados matemáticos obtenidos sobre la misma realidad de partida, interpretando y juzgando estos resultados a la luz del sentido común, que no ha de perderse nunca. Observación, raciocinio e intuición han de ser el fruto del estudio de la Matemática en la Enseñanza media. No es ello fácil de realizar, ciertamente; pero es necesario, si ésta ha de ser fundamentalmente educativa, como se pretende.

Consciente de ello Puig Adam, se lanzó desde el primer día a realizarlo con todo el entusiasmo envidiable de su juventud. Y fué su clase en todo momento un coloquio vivo y estimulante para los alumnos. Y en ella tuvieron éstos una participación personal y activa, que excitaba su interés y estimulaba sus facultades. Y manejaban datos concretos, hechos conocidos, problemas cotidianos, incidencias de sus juegos y sus afanes; y de ellos se elevaban poco a poco a conceptos abstractos y razonamientos lógicos. Y volcaban su energía latente y su necesidad de acción, nunca satisfecha, en las cuestiones y los problemas que ante ellos surgían. Y palpaban la estrecha conexión de la Matemática con los hechos de cada día. Y la clase era grata para ellos. Y abría surco profundo en sus espíritus juveniles y dejaba en ellos frutos duraderos de formación intelectual y de conocimientos básicos para la vida. Y es que Puig Adam es un maestro y su enseñanza hondamente educativa.

Estas mismas directrices son las que inspiraron las obras por él escritas, para la Enseñanza media, en colaboración con Julio Rey Pastor, nuestro eminente compañero. Aún recuerdo el placer con que, al recibirlos, hojeaba yo estos libros, que la bondad de sus autores me ofrecía. Porque en ellos la dificultad que ofrece la Matemática en este grado de enseñanza está allanada con la claridad en la exposición, la gradual y razonada introducción de los conceptos y la meditada dosificación de las materias. Y la aridez inherente a aquélla está suavizada hábilmente con datos concretos, problemas de la vida diaria, datos de interés general, curiosidades matemáticas, notas históricas, etc. Sin perjuicio todo ello de la precisión de lenguaje y el rigor lógico, más de fondo que de forma, que han de contribuir a la debida formación intelectual de los alumnos. Y avalorado, además, con una acusada originalidad en la exposición de diversas teorías; como la de equivalencia de superficies planas, por no citar más que una. Son obras que marcaron sin duda una orientación afortunada en la enseñanza de la Matemática en este grado de ella y que no son la menor aportación de sus autores a la cultura española.

Muy otras son, naturalmente, las características de la enseñanza de Puig Adam en la Escuela de Ingenieros Industriales; pero en ella se acusan, como en la del Instituto, su dominio de la materia, su seriedad científica y su clara intuición pedagógica. La finalidad del estudio de la Matemática en este grado de enseñanza, como antes he recordado, es la profesional; es decir, la preparación para el ejercicio de una profesión determinada, en este caso técnica; pero ello envuelve, por una parte, la adecuada formación intelectual del alumno, para que sepa interpretar los problemas técnicos que su profesión le plantee, extraer de ellos el fenómeno teórico que encierran y formular éste en términos matemáticos; y por otra, el conocimiento de los recursos matemáticos necesarios para resolver el problema así formulado. Lo primero requiere el estudio riguroso y detenido de conceptos y teorías fundamentales; lo segundo el conocimiento práctico de métodos y recursos matemáticos, cuyo número aumenta de día en día. Aquéllo es cuestión de profundidad; esto lo es de extensión. Y el reunir ambas cosas en la debida proporción es el difícil problema de la enseñanza de la Matemática en las escuelas técnicas superiores. Del acierto con que lo resuelve Puig Adam dan idea las dos obras fundamentales por él escritas a este fin: el «Curso de Geometría métrica» y el «Curso teórico práctico de Cálculo integral y de Ecuaciones diferenciales».

En el primero, destinado a los alumnos que se disponen para ingresar en la Escuela, se atiende sobre todo, a diferencia de otras obras a ellos dedicadas, a su formación intelectual, lograda mediante el estudio riguroso de las teorías geométricas expuestas. Comienza, para ello, la obra estableciendo un sistema de postulados, original del autor en varios puntos, que toma *como concepto primitivo el de movimiento*, núcleo primario, según Poincaré, de nuestros conceptos geométricos y el más adecuado para los espíritus orientados hacia la Técnica. Y a partir de él se desarrollan rigurosamente las diversas teorías que integran la Geometría métrica; discutiendo y precisando cuidadosamente los puntos delicados que en tal desarrollo se encuentran. E incluso la elección de ejercicios y problemas que acompañan a cada teoría, para la mejor inteligencia de ésta y facilitar a los alumnos su preparación para las eventuales pruebas de examen, está orientada hacia la formación básica de éstos, mediante la exposición razonada y sistemática de los métodos generales de resolución de problemas. La misma finalidad fundamental domina en el segundo volumen, que comprende la Trigonometría y unos capítulos de Geometría proyectiva, y en él se advierten igualmente las condiciones de claridad, precisión y rigor que aquella finalidad exige. Pero este objetivo fundamental no es óbice para que en este volumen se inicie ya el estudio de aplicaciones concretas a la Astronomía, Perspectiva, Mecánica, etc., sugestivas sin duda para los futuros ingenieros. Ni el afán de rigor es obstáculo para que el autor utilice los resultados de Geometría métrica establecidos en el volumen primero para construir en éste, con mayor facilidad, los capítulos de Geometría proyectiva que contiene. Podrá no ser ello perfecto desde el punto de vista de la Axiomática; pero no implica falta ninguna de rigor lógico y evita el fatigoso e innecesario trabajo de establecer nuevamente las primeras proposiciones. La obra constituye, pues, en el fondo, un tratado riguroso de Geometría abstracta, pero en estrecho contacto en todo momento con el espacio intuitivo y sus propiedades; y es doblemente educador, por tanto, por serlo del raciocinio y de la intuición conjuntamente.

El Curso de Cálculo integral y de Ecuaciones diferenciales fué redactado como guía para los alumnos que cursan en la Escuela estas disciplinas; pero es indudable que constituye también una magnífica obra de consulta para los ingenieros en el ejercicio de su profesión. La finalidad escolar de la obra, como corresponde a los alumnos a los cuales está destinada, es ya plenamente profesional, en su doble aspecto de formación intelectual de aquéllos, para que puedan analizar más tarde y expresar en forma matemática los problemas técnicos que se les ofrezcan, y de enseñanza de los recursos matemáticos aplicables a la resolución de éstos. Por lo que toca al primer aspecto, se atiende en ella cuidadosamente a las cualidades de claridad y precisión que éste exige; y a tal fin se construyen rigurosamente todas las teorías que contiene, omitiendo las demostraciones excesivamente complicadas, pero advirtiéndolo así expresamente y sin sustituirlas por otras incorrectas y engañosas. Y las teorías así expuestas van acompañadas de un gran número de ejemplos, resueltos los unos y propuestos los otros, de aplicación de aquéllas a problemas prácticos, tomados de las distintas ramas de la Técnica y más o menos esquematizados ; problemas que, por el acierto de su elección, la claridad de su exposición y la abundancia y variedad que ofrecen, constituyen, a no dudar, una muy eficaz iniciación de los alumnos en sus futuras tareas profesionales. En cuanto al valor de la obra como recopilación razonada y sistemática de métodos de resolución de los problemas matemáticos que la Técnica plantea, basta hojear su índice para advertir la amplitud y altura de su contenido: desde métodos aproximados, numéricos, gráficos y mecánicos, que son la tabla de salvación del técnico en tantos problemas prácticos, hasta recursos de Matemática pura, como la representación conforme y el problema de Dirichlet ; desde los problemas clásicos y siempre fundamentales de vibraciones o pandeo hasta las ecuaciones integrales y la transformación de Laplace, de aplicación creciente de día en día. Claro es que el campo, cada vez más extenso, de teorías matemáticas que la Técnica utiliza hace imposible abarcarlas todas en una obra ; pero es indudable que la de nuestro compañero es una de las más completas entre las consagradas a exponerlas y constituye un valioso instrumento de trabajo para los técnicos españoles.

Pero no es sólo en el campo de la enseñanza donde ha realizado Puig Adam una fructífera labor. También en orden a la investigación ha sido su aportación nutrida y valiosa. No he de cansaros con la reseña completa de sus trabajos, cuya lista aparece como apéndice de estas páginas. Me limitaré a recordar brevemente algunos de ellos.

Un día el inolvidable Juan de La Cierva, que tenía en construcción un modelo de autogiro para velocidades mayores que las ya ensayadas, propuso a los matemáticos el estudio de la estabilidad del movimiento de las palas de aquél, expresado por una ecuación diferencial lineal, homogénea y de coeficientes periódicos. Puig Adam resolvió el problema en su estudio «Sobre la estabilidad del movimiento de las palas del autogiro»; en el cual, previa la discusión de los trabajos relativos a problemas similares a éste, y con la colaboración de sus alumnos de la Escuela Superior Aerotécnica, aplicó los fatigosos métodos de Runge y de Meissner, numérico el uno y gráfico el otro, encontrando resultados que confirmaban plenamente las intuiciones del ilustre inventor.

Otro día es llamado a colaborar en una mutualidad profesional, y los problemas que en ella se plantean dan origen a dos trabajos: «Curvas teóricas de distribución por edades de los individuos de una colectividad profesional» y «Ensayos de una teoría matemática de escalafones cerrados y sus aplicaciones a problemas de Hacienda y Previsión». Ambos títulos dan idea suficiente del objeto de los trabajos; pero lo que en ellos no se advierte es la grave dificultad, y los conocimientos y el ingenio necesarios para vencerla, que para la aplicación de los métodos estadísticos a los escalafones estudiados supone la perturbación que en el ingreso en ellos introducen las alteraciones esporádicas de las disposiciones legales que lo regulan.

Pero no son las cuestiones de inmediata aplicación las únicas que atraen la atención de Puig Adam. Dos trabajos, sencillos en apariencia, pero que revelan la finura de análisis lógico del autor, se refieren al teorema y la curva de Jordan. En el uno: «De los axiomas de ordenación al teorema de Jordan para recintos poligonales», se expone una interesante demostración de este teorema para recintos planos limitados por polígonos simples, convexos o no, apoyada en los axiomas de incidencia y ordenación, sin utilizar axioma ninguno de continuidad. En el otro: «Sobre la individualización de los sentidos en las curvas cerradas planas de Jordan», se demuestra la existencia de dos sentidos en toda curva de esta naturaleza y se establece rigurosamente una norma para caracterizar intrínsecamente cada uno de los dos, con independencia de la correspondencia utilizada para definir la curva y de modo que puedan compararse, con carácter transitivo, los sentidos en curvas coplanarias.

Muy notorio interés ofrece también el trabajo intitulado «Revisión crítica de la teoría de equivalencia de polígonos»; en el cual se somete a examen crítico la teoría de equivalencia de polígonos establecida por Hilbert en sus famosos «Grundlagen der Geometrie». Se hacen notar los defectos lógicos que tal teoría presenta y que no parecen fáciles de eliminar en ella; y se propone una nueva definición de equivalencia, por adición y sustracción; se demuestra que la relación de equivalencia así establecida es reflexiva, transitiva y aditiva; y se hace ver cómo permite obtener fácilmente, sin utilizar el postulado de Arquímedes, el rectangulo equivalente a un triángulo dado.

El curso de seis conferencias dado por Puig Adam en la Escuela de Ingenieros Industriales y recogido en el pequeño volumen, denso de contenido, «La Matemática en la transmisión de la energía eléctrica», es una preciosa introducción al cálculo de líneas eléctricas. Comienza estableciendo la llamada ecuación de los telegrafistas en línea trifásica y, a partir de ella, estudia detenidamente, en una primera parte, las integrales particulares que corresponden al régimen permanente en aquellas líneas, la teoría general del cuadripolo y sus aplicaciones al trazado de gráficos de la transmisión; y en una segunda, las integrales correspondientes al régimen transitorio y el cálculo de éste, y expone los fundamentos del cálculo simbólico y unas indicaciones sobre la transformación de Laplace y sus aplicaciones. Todo ello avalorado, como es habitual en el autor, con detalles de acusada originalidad en la exposición; observaciones sagaces sobre la razón profunda de algunas analogías formales entre fenómenos dispares, explotadas por los técnicos, y de ciertos métodos audaces de trabajo; y digresiones sugestivas y llenas de contenido, que dan a la exposición un interés doblado.

Y aquí voy a permitirme una observación, en mi deseo de esbozar debidamente la figura del nuevo académico. En las conferencias que acabo de recordar se muestra claramente su competencia en las difíciles cuestiones de Electrotecnia que en ellas se estudian. Como prueban su dominio de otras ramas de la Ingeniería las varias aplicaciones técnicas expuestas, como iniciación profesional acertadísima, en su Curso de Cálculo integral y Ecuaciones diferenciales. Y, sin embargo, yo me atrevo a decir que, en medio de tantas cuestiones técnicas, Puig Adam sigue siendo en el fondo un matemático. Se mueve con plena competencia y aguda intuición entre resultados experimentales, curvas empíricas, datos numéricos y problemas técnicos; y la mayor parte de sus trabajos de investigación a cuestiones tales se refieren. Pero no puede acallar su afán, esencialmente matemático y aun filosófico, de buscar siempre las razones últimas de las cosas, que tan agudas observaciones le sugiere, en aquellas conferencias, sobre analogías formales, problemas de redes, o concepto y forma en la Matemática. Qué difícil es que él se aviniera nunca a aplicar, como Heaviside, un método nuevo de trabajo, sin analizar antes cuidadosamente los principios en que se funda y los problemas a los cuales puede aplicarse.

Por eso, cuando sus trabajos le han llevado a utilizar reiteradamente la transformación de Laplace, no ha podido menos de investigar personalmente la raíz de su eficacia, la razón esencial por la cual esta transformación (y sólo ella, según se desprende de cierta caracterización establecida por Ricardo San Juan) permite estudiar algebraicamente gran número de fenómenos físicos; y delimitar con precisión el grupo de fenómenos en que ello es posible. Y esto es lo que hace en su nota «La transformación de Laplace en el tratamiento matemático de fenómenos físicos» ; en la cual pone de relieve, con la claridad y el vigor en él habituales, las características de esta transformación, y demuestra que los fenómenos físicos que mediante ella pueden ser estudiados algebraicamente son los que se rigen por los tres principios de superposición, continuidad y homogeneidad respecto del tiempo, cuyas relaciones funcionales se convierten así en el grupo isomorfo de las proporcionalidades funcionales.

Quiero recordar todavía dos interesantes trabajos presentados por Puig Adam al coloquio celebrado recientemente en París sobre «Las máquinas de calcular y el pensamiento humano», y que se refieren ya de lleno a las cuestiones que actualmente ocupan de modo especial su atención. Titúlase el primero «Les systèmes linéaires rétroactifs en chaîne et les fractions continues» ; y en él aplica al estudio matemático de estos sistemas el algoritmo de las fracciones continuas, las cuales surgen al tomar como función de transformación el cociente de la función estímulo por la función respuesta, en lugar de su inversa. Expone la simplificación que este instrumento analítico puede introducir en la determinación de la estabilidad del sistema mediante el diagrama de Nyquist, con observaciones prácticas del mayor interés. Y sugiere la conveniencia de abordar el estudio de ciertos fenómenos fisiológicos por camino inverso del acostumbrado, a saber, comenzando por analizar directamente las transformadas Laplace de las curvas experimentales que representan dichos fenómenos, en lugar de intentar la formación *a priori* de un esquema físico que los represente. Así lo hizo él mismo al interpretar las reacciones de los nervios al paso de impulsiones eléctricas, estudiadas por Lorente de No ; obteniendo resultados cuyo interés fué vivamente subrayado por Monnier, por haberse llegado de este modo a resultados teóricos que concuerdan con los experimentales obtenidos por éste y confirman el acierto de la orientación propuesta por Puig Adam.

Con este último punto se relaciona el otro de los dos trabajos aludidos. Porque la obtención de la transformada Laplace de una función dada analíticamente es problema muy estudiado o incluso condensado en tablas de funciones con sus transformadas; pero cuando la función primitiva está obtenida experimentalmente, el problema presenta nuevas dificultades. A él consagra Puig Adam el indicado trabajo: «Transformées de Laplace des fonctions empiriquement données». En él estudia y compara diversos métodos prácticos para la determinación de la transformada Laplace de una función dada experimentalmente, analizando los errores resultantes de las aproximaciones bajo el signo integral y de la sustitución del intervalo infinito de integración por uno finito. Para representar la función de partida, utiliza polinomios enteros, en particular los de aproximación mínima de Tchebychef, polinomios exponenciales y aproximaciones en media cuadrática. Y propone dos métodos gráfico-mecánicos para el caso de que la función esté dada por su representación gráfica, experimentalmente obtenida.

He recogido hasta aquí, en síntesis, algunas notas destacadas de la labor docente e investigadora del nuevo académico. Y ahora, como remate y confirmación de ella, ahí está el discurso que acaba de leer. Pero respecto de éste, ¿qué os podría yo decir? ¿Ni qué necesidad tenéis de mi comentario, si habéis podido juzgarlo por vosotros mismos? La belleza de forma, la densidad de contenido y el interés apasionante del tema no necesitan ser subrayados para su justa ponderación. Que el discurso es cifra y compendio de los afanes actuales del autor, la vibración contenida que en sus palabras aflora basta para mostrarlo. Las aportaciones originales diversas que sus anejos con-tienen, sería prolijo el aquilatarlas. La tradición académica me impone, sin embargo, un comentario y no he de hurtarme a tal deber. Permitidme, pues, que lo cumpla brevemente, subrayando tan sólo dos de los puntos en él contenidos. Pero antes considero de interés, en mi deseo de esbozar fielmente la personalidad del nuevo académico, señalar otra de sus cualidades más acusadas y que este discurso pone de manifiesto, por la actualidad del tema en él expuesto y la amplia diversidad de los capítulos que lo integran. Me refiero a su curiosidad intelectual siempre despierta. Porque aquella curiosidad intelectual insaciable de Terradas, cuyo exceso fué quizás un defecto en él, al impedir el pleno rendimiento de sus facultades creadoras, acucia igualmente a Puig Adam, digno sucesor de aquél. Afán de descubrir siempre nuevos horizontes, de abordar nuevas teorías. Es esa ansia de conocer la que, desde la Escuela de Ingenieros Industriales le llevó, estudiante todavía, a la Facultad de Ciencias, para completar su formación matemática. Es la misma que, catedrático ya del Instituto de San Isidro, lo llevó de nuevo a la Escuela de Ingenieros para terminar sus estudios en ella; no para ejercer tal profesión, sino para ampliar su formación intelectual y comprender mejor la Matemática pura al penetrar sus conexiones, de origen y de aplicación, con la realidad física. Es la que le ha dado la amplia cultura que posee y que en la diversidad de sus trabajos se revela. Es la que le lleva ahora a apasionarse por las cuestiones que en su discurso recoge.

Y, en verdad, que la Cibernética merece tal interés. Porque, por un lado, su rápida expansión: servomecanismos, controles automáticos de máquinas y de procesos enteros de fabricación, calculadoras electrónicas, etc., señala, en frase de Terradas recogida por Puig Adam, el comienzo de una nueva era en el esfuerzo constante del hombre por dominar al mundo material y ponerlo a su servicio; y por otro, las aportaciones insospechadas de la nueva ciencia a la Fisiología plantean problemas y esbozan soluciones de un interés alucinante. Y de la Fisiología a la Psicología el paso es tentador. Y surgen las famosas tortugas de Walter, que van y vienen, reaccionando a los estímulos exteriores; que en ausencia de éstos se diría que otean el horizonte para actuar, y que, en ciertos momentos, parecen recordar, y reflexionar, y tantear, y rectificar, antes de adoptar una resolución. Ciertas analogías impresionantes entre algunas operaciones intelectuales y el proceder de máquinas construídas *ad hoc*, sugieren posibles interpretaciones físicas de los procesos fisiológicos que aquellas operaciones implican. Y el interés aumenta y la fantasía se desborda. Y se llama cerebros electrónicos a las modernas máquinas calculadoras. Y se dan explicaciones físicas de la memoria. Y se sugieren procesos de construcción de los conceptos intelectuales que hacen radicar las reglas de la lógica en la estructura de los circuitos nerviosos cerebrales. Y se intenta reducir las funciones de la inteligencia a un conjunto de automatismos. Y se acepta la idea, combatida por los biólogos, ello es cierto, de una posible conciencia en las máquinas. Pero el abismo entre máquina y cerebro se mantiene abrumador. Aun en el orden puramente material. El mismo Walter ha calculado que para suministrar una experiencia distinta cada décima de segundo a lo largo de toda una vida humana, bastarían seis elementos, con sus posibles conexiones; compárese con los diez mil millones de neuronas que contiene el cerebro humano. H. Gastaut pone de relieve la diferencia, la oposición entre máquina y cerebro que procede de la casi infalibilidal de la primera y la banda, amplia y continua, de error posible en el segundo; y señala como diferencia esencial entre una y otro, la estéril lógica impecable de aquélla y el fructífero margen de error de éste, que permite su adaptación y su evolución. Y Fessard, a su vez, subraya, como diferencia decisiva respecto de la máquina, el defectuoso aislamiento entre los elementos del cerebro, que al permitir abundantes interacciones difusas entre las neuronas próximas, es la base de los procesos de sincronización y de autoritmicidad. Enorme complejidad, de cantidad y de modo, del cerebro humano, capaz de desmoralizar a los fisiólogos, en frase del mismo Walter. Y sobre todo ello está la vida, que pone su impronta decisiva en todo cuanto anima. Y luego está el espíritu. No sin razón se retrae Puig Adam de terreno tan apasionante como difícil y resbaladizo, para centrarse en el experimental y técnico. Pero al hacerlo y como reacción natural, sin duda, ante aquellos excesos, se pasa quizá del justo medio, al referirse con un deje de escepticismo a la profunda introspección con que escudriña la inteligencia humana sus propias operaciones. Introspección fundamental en la Filosofía e incluso en la Matemática, y que ha de encontrar sin duda poderoso auxiliar en las sugestivas y peligrosas aportaciones de la Cibernética.

Limitándome, pues, al terreno técnico y dejando de lado tantas sugestivas cuestiones matemáticas, estadísticas e incluso filosóficas, que surgen en la técnica de la comunicación, voy a subrayar tan sólo el anejo 2.° del discurso, que es el que encierra en mi sentir una más original aportación del autor. En él parte ya del nuevo algoritmo de fracciones continuas, introducido en uno de sus trabajos antes recordados. Y señala que al aplicar tal algoritmo al estudio de fenómenos cuyas características varían de modo continuo, por ejemplo, líneas eléctricas con constantes no uniformemente distribuídas a lo largo de ellas, se presentan, como instrumento de trabajo, fracciones continuas cuyos cocientes incompletos son infinitesimales. Pero, ¿qué significado y qué valor tiene entonces una tal expresión? Un técnico puro no hubiera tenido acaso reparo en utilizarla sin más, basándose en que la realidad del fenómeno por ella representado garantiza la existencia y la validez del valor que con ella pueda obtenerse. ¡Cuántos procesos de iteración se utilizan en la Técnica, sin más garantía de su convergencia que la uniformidad de variación de los resultados sucesivos, y de su aproximación que la magnitud de las diferencias que éstos presentan! Pero Puig Adam es un técnico injerto en un matemático y no puede menos de aquilatar previamente los instrumentos de cálculo que se propone emplear. Y eso es lo que hace en el anejo indicado, en el cual justifica el paso al límite que tales fracciones continuas constituyen. No parece ello fácil; pero Puig Adam lo hace hábilmente. Considera, para ello, la fracción continua cuyos cocientes incompletos son los incrementos finitos de las dos funciones que en ella introduce, correspondientes a los intervalos parciales en que ha sido dividido un intervalo dado, y demuestra, en una serie de teoremas concatenados y para condiciones muy amplias de las funciones consideradas, que los valores de la fracción continua, para cualesquiera particiones del intervalo dado, forman un conjunto acotado superior e inferiormente; que al subidividir los intervalos parciales, si estos son suficientemente pequeños, el valor de la fracción disminuye; y como éste está acotado, haciendo tender a cero los intervalos parciales por medio de subdivisiones escalonadas el valor de la fracción tiende a un límite; demostrando, finalmente, que éste es independiente de la sucesión de particiones realizada. Demostrada así la existencia y unicidad del límite, es lícito ya admitir las fracciones continuas de coeficientes infinitesimales y aplicarlas al estudio de fenómenos que varían de modo continuo; utilizando para su cálculo la conocida ecuación de Riccati, cuya relación con ellas se expone también en este anejo. El autor indica su aplicación al estudio de las líneas eléctricas de impedancia y admitancia variables a lo largo de ellas, estudio para el cual parecen especialmente adecuadas; pero su utilidad ha de extenderse igualmente a otras ramas de la Técnica, en las cuales se presentan fenómenos de análogas condiciones. Puig Adam, sin embargo, no está satisfecho todavía y ya nos anuncia la generalización al campo complejo de las fracciones continuas por él definidas; generalización que ha de ampliar aún más el campo de sus aplicaciones.

La segunda indicación que deseo hacer se refiere a un punto que Puig Adam toca brevemente en su discurso; a saber, la influencia de las maravillosas calculadoras electrónicas en la investigación técnica, pero limitándome a su influencia en la formación de los técnicos superiores. Incítame a ocuparme en ello, a más de mi interés por tales cuestiones, la circunstancia de haber sido aprobada por aclamación en el Coloquio Internacional de París antes mencionado, una conclusión presentada por Mauro Picone, Director del Instituto Nacional para las Aplicaciones del Cálculo, en Roma. En dicha conclusión se propugna «la creación de una comisión internacional, encargada de estudiar y proponer a los países miembros, las reformas oportunas en la enseñanza superior fundamental de la Matemática, para dar a los futuros ingenieros y físicos una mentalidad abierta a los métodos numéricos y al empleo de las máquinas de calcular». Veamos algunas observaciones en torno de esta conclusión. Dos son, a mi entender, las premisas de que parte. La una es el conocimiento de los nuevos y muy poderosos instrumentos de trabajo que la mecanización del cálculo brinda a la Física y a la Técnica. Y la otra el temor de que los técnicos y los físicos se resistan, por rutina o pereza mental, a la plena utilización de tales recursos. En cuanto a lo primero, es un hecho innegable. Puig Adam alude a ello, señalando, como ejemplo, problemas matemáticos de contorno que antes eran totalmente inabordables y ahora son resueltos en pocos minutos. Ello supone la posibilidad de atacar y resolver directa y rápidamente problemas de la Técnica que, sin tales recursos, sólo podrían ser estudiados por aproximaciones dudosas, tanteos interminables o costosa experimentación. Sentado esto, es evidente que los técnicos deben recibir una formación profesional en consonancia con la nueva situación creada por dichos recursos. Y esto es lo que la conclusión mencionada propugna. Pero, ¿en qué forma ha de hacerse?

Desde luego, es impracticable la idea de que sean los mismos técnicos, ni aun los consagrados a la más alta investigación, quienes apliquen por sí mismos los recursos aludidos. Todo lo más a que puede aspirarse hoy día es a que exista en cada país un número reducido de centros, acaso uno solo, que disponga de los elementos materiales que tales métodos de cálculo exigen. Y que sea este centro el que resuelva los problemas matemáticos planteados por la Técnica que requieran la aplicación de estos métodos. Tampoco parece necesario ni aun conveniente, obligar a los técnicos a conocer, en teoría al menos, el mecanismo de aplicación de tales métodos, ya que la enorme extensión de los conocimientos básicos que la Técnica exige hoy día, hace poco aconsejable recargar la formación de aquellos con nuevos conocimientos que no han de utilizar. ¿Qué es, pues, lo que habrá de dárseles en relación con los nuevos recursos que ofrece la mecanización del cálculo? A mi entender, el conocimiento claro de los nuevos problemas matemáticos que con ellos pueden resolverse, para que no retrocedan ante su planteamiento, cuándo la Técnica lo requiera; y después, el saber interpretar técnicamente la solución de los problemas matemáticos así obtenida; pero no el mecanismo práctico de resolución de estos problemas en sí. A esto aspira probablemente la conclusión aprobada en el Coloquio de París. A esto y a otra cosa quizá, a la cual alude también Puig Adam en su discurso y que es acaso el fondo de dicha conclusión, dada la personalidad de quien la presentó. A saber, la conveniencia de inclinar a los técnicos investigadores hacia una mayor estima de los métodos aproximados y de tanteo: numéricos, gráficos y mecánicos, supuesta siempre la debida garantía de su aproximación suficiente. Estos métodos son muchas veces la única solución posible; y en ocasiones sugieren incluso nuevas orientaciones valiosas en el campo teórico, que mejoran la teoría y de rechazo simplifican la resolución del problema. Couffignal refiere un caso de construcción de ábacos destinados a aplicar el criterio de Routh a la estabilidad de sistemas oscilantes con tres grados de libertad. En teoría, dichos ábacos habían de estar formados por curvas de 6.° orden ; pero su construcción por puntos sugirió, y la teoría confirmó después, que dicho orden se reducía a 3 y la curva además, se descomponía en rectas, con la simplificación que ello supone en los polinomios de Routh. Y como éste, podrían citarse muchos casos.

En resumen, la influencia de los nuevos instrumentos de mecanización del cálculo en la formación de los técnicos superiores parece ser la de imponer como necesaria, en este campo de trabajo al menos, la orientación que me permití señalar cuando, hace cuatro años, tuve el honor de ocupar vuestra atención con estas cuestiones. La formación del técnico, decía entonces, ha de hacerle capaz de analizar el problema técnico real que se le ofrece, extraer de él el fenómeno teórico que encierra y plantear éste en términos matemáticos ; y después, interpretar técnicamente los resultados de la resolución del problema matemático así planteado ; pero no es necesario que sepa resolver éste efectivamente. Ello es misión del matemático que junto al técnico ha de trabajar. Pues bien, lo que hacen los nuevos métodos de cálculo mecánico, por la gran complejidad que presentan y los dispendios que suponen, es hacer forzosa dicha orientación, al menos en el campo de aplicación de tales métodos. Es un caso más de la división del trabajo o del trabajo en equipo, que se impone cada día más en múltiples campos de la humana actividad.

Pero hoy, al cabo de cuatro años de aquella indicación, he de decir que la orientación entonces señalada ha sido francamente superada en Norteamérica, acentuando aún más la división del trabajo indicada. Y no en centros especiales de alta investigación, sino en todo el amplísimo ámbito del American Institut of Electrical Engineering. Hace poco más de un año, en efecto, se fundó en este Instituto un Comité de Matemáticas aplicadas con este fin. Comenzó por solicitar la colaboración de buen número de matemáticos eminentes de todo el país, el 70 % de los cuales aceptó gustoso la invitación; encontrándose entre éstos figuras como Wiener, Birkhoff, Von Neumann, Pollard, etcétera. Obtenida esta colaboración, el Comité propuso a los miembros del Instituto el siguiente plan de trabajo: Cuando uno de éstos encuentre en su labor un problema técnico de interés que exija el empleo de Matemáticas, es de suponer que superiores, lo enviará al Comité. Este lo planteará en términos matemáticos y lo someterá después a uno de los matemáticos colaboradores de aquél. Resuelto por éste el problema matemático, el Comité trasladará la solución obtenida al lenguaje técnico y la enviará al ingeniero consultante. He aquí, pues, descargado el técnico, no sólo de la resolución efectiva del problema matemático, sino también de lo que yo consideraba y sigo considerando como fundamental en él: el planteamiento del problema matemático y la interpretación técnica de su solución. ¿A qué se debe, pues, esta nueva y tan acusada división del trabajo y cuál será su eficacia en la práctica? Difícil es decirlo desde aquí; pero acaso convenga no olvidar, al juzgarlo, el nivel científico medio de quienes ostentan en aquel país el título de ingeniero electricista. Entre nosotros, la colaboración de matemáticos y técnicos, que hace cuatro años indicaba, parece muy conveniente, en beneficio de unos y de otros; pero separar la observación del problema técnico de su planteamiento matemático, a más del riesgo que ofrece de caer fácilmente en errores de interpretación, tiene, a mi entender, el grave inconveniente de privar al técnico de los elementos de juicio que nacen siempre del cuidadoso análisis del fenómeno real a que obliga su formulación matemática, y del análisis, igualmente delicado.

que requiere la interpretación técnica de los resultados matemáticos. Enhorabuena que se extreme la división del trabajo en la parte de mecanismo de cálculo, aunque ésta sea resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales o requiera el empleo de una calculadora electrónica; pero entre el matemático y el técnico debe subsistir la zona común de interpretación matemática del fenómeno técnico y de interpretación técnica de los resultados matemáticos. Precisamente es Wiener el fundador de la Cibernética, uno de los que con más energía sostienen la necesidad de un intercambio constante de ideas entre los hombres de ciencia especializados en campos diversos, para que la Ciencia pueda realizar avances esenciales. Y tal intercambio es imposible sin una zona común de conocimientos básicos entre unos y otros. En el prólogo de su obra fundamental, concreta Wiener la debida relación entre ellos con el siguiente ejemplo: El matemático no necesita tener la habilidad que exige la realización de un experimento fisiológico; pero ha de ser capaz de entenderlo, discutirlo y sugerirlo. El fisiólogo no es preciso que sea capaz de demostrar un cierto teorema matemático; pero es necesario que pueda captar su interpretación fisiológica y exponer al matemático lo que de él necesita. Que es justamente la relación entre matemáticos y técnicos antes señalada como más conveniente para su común y fructífera actuación y que la iniciativa del A. I. E. E. parece cortar.

Unas palabras todavía. Porque esbozada la personalidad científica del nuevo académico, hay algo que me resisto a dejar en la sombra, aunque la discreción me salga al paso con el dedo ante los labios. Es el hombre que tras el científico se oculta. Pero, ¿cómo llegar hasta él? Y ¿cómo mostrarlo aquí, sin que la discreción se oponga? Dos datos podrán acaso guiarnos para ello; dos datos de su misma vida profesional, que no puede la discrección rechazar. Es el uno un pequeño cuaderno, que reúne algunos aires populares. Es un cuaderno modesto, sin relieve exterior alguno; un sencillo recuerdo escolar, que evocaba en un muchacho unas horas de grato solaz en su vida de estudiante. Pero sencillo como es, puede ese cuaderno decirnos algo para nuestro objeto. Porque los aires populares que contiene están bellamente armonizados y graciosamente ilustrados, y la armonización que los realza y las viñetas que los ilustran son obra de Pedro Puig Adam. Nuestro compañero gusta, pues, de armonizar unas melodías y de trazar unas gráciles siluetas para solaz de sus alumnos. No es el sabio, abstraído y adusto, que sólo sabe de su ciencia. No es inteligencia y trabajo tan sólo, como los datos científicos pudieran hacer creer. Es también intuición y es, sobre todo, profunda sensibilidad. Podíamos haberlo adivinado; porque no sería maestro si esto no fuera, y él lo es plenamente. Pero aquel pequeño cuaderno es la prueba tangible de ello. Sí. Puig Adam cultiva el Dibujo y la Pintura y, sobre todo, el arte divino de la Música, que no ha dudado en emplear como instrumento poderoso para la educación integral de sus alumnos. Y lo cultiva sencillamente, intuitivamente, como descanso y antídoto del trabajo de cada día; sin otro objetivo que dar expansión a su sensibilidad exquisita, que en la Música se vuelca en interpretaciones hondamente sentidas y en composiciones propias, deliciosamente inspiradas.

El otro dato aludido lo forman escritos y conferencias varios, en que se ha vertido igualmente su fina sensibilidad; escritos y conferencias que podrían llamarse charlas por su espontaneidad y sencillez, y en los cuales destacan por igual el interés de los conceptos y la finura de los sentimientos. Aquella sugestiva conferencia del Instituto Francés sobre «La Matemática y la Belleza». Aquella «Apología de la Inutilidad», en que el ingenio disfraza con los atavíos de la paradoja los temores y desengaños que en ella palpitan. Aquella necrología de Terradas en la revista «Dyna», donde el afecto, que se desborda, inspira finos matices de interpretación del sentir del ausente. Aquellos deliciosos «Mensajes de despedida» a los alumnos del Instituto que, al terminar sus estudios, se dispersan por el mundo; en los cuales la experiencia de la vida, amarga y triste de suyo, está matizada por la delicadeza y el afecto del maestro, para mostrar a los muchachos la dura realidad que les espera, sin apagar la llama de su ilusión ni secar las fuentes de generosidad y de optimismo que encierra la juventud. Ese es el hombre, profundamente afectivo y delicado que tras el científico está.

Y esta misma delicadeza suya es la que le ha llevado a desear que fuera su viejo maestro quien le diera en estos momentos la bienvenida en esta casa, faro y morada de una larga tradición de trabajo y de saber. No podía negarse a tal deseo el viejo maestro y con honda emoción baja del faro y se llega a la puerta, cabe la cual atraca el marino su nave, cargada con los tesoros recogidos en su constante navegar. Marino de agua mansa se ha llamado a sí mismo. ¿Por qué no, si también los océanos la tienen en sus días claros? Pero marino que ha surcado infatigable los mares profundos y serenos de la Matemática y las corrientes impetuosas de la Técnica, en constante renovación; y que ahora nos llega salpicado por las aguas hirvientes de la Cibernética, fascinadoras con la promesa de las riquezas que en ellas se adivinan. Al verle llegar, curtido navegante, recuerda el viejo maestro los días ya lejanos en que era joven grumete a su lado, y con un abrazo, en que pone toda el alma, le acompaña, le recibe y le introduce en la sala de trabajo, donde los torreros mantienen, con su saber y su esfuerzo, el fulgor perenne del faro. Y le invita a sentarse entre ellos y a trabajar a su lado en la común tarea; sin presunción, que nubla el juicio, ni cortedad, que enerva el esfuerzo. Al verle así incorporado a la alta misión que le espera, siente el viejo maestro, en la penumbra de una vida que ya declina, la más pura alegría que puede un maestro sentir: la de contemplar el triunfo merecido de quien él formó. Y cumplida su misión, se retira gozoso, seguro de que el ágil grumete de otros días, hoy experto capitán, ha de realizar en el futuro, con el favor de Dios, travesías aún más fecundas que en el pasado, aportando al brillo del faro que hoy le recibe, nuevos y vivos destellos de trabajo, de saber y de bondad.

RELACION DE PUBLICACIONES Y TRABAJOS CIENTIFICOS Y DIDACTICOS DE D. PEDRO PUIG ADAM

OBRAS

«Curso de Geometría Métrica». Tomo I. Fundamentos.—Tomo II. Complementos.

«Curso teórico-práctico de Cálculo integral, aplicado a la Física y Técnica».

«Curso teórico-práctico de Ecuaciones diferenciales, aplicado a la Física y Técnica».

«La Matemática en la Transmisión de la Energía eléctrica». (Publicaciones de la Escuela Especial de Ingenieros Industriales.)

«Elementos de Aritmética intuitiva» (en colaboración con D. Julio Rey Pastor).

«Elementos de Geometría intuitiva» (en colaboración con D. Julio Rey Pastor).

«Lecciones de Aritmética y Geometría».

«Elementos de Aritmética racional» (en colaboración con D. Julio Rey Pastor).

«Elementos de Geometría racional», 2 tomos (en colaboración con D. Julio Rey Pastor).

«Algebra y Trigonometría» (en colaboración con D. Julio Rey Pastor).

«Complementos de Aritmética y Algebra» (en colaboración con D. Julio Rey Pastor).

Colección completa de obras de texto para los seis cursos de Bachillerato del plan 1934 (en colaboración con D. Julio Rey Pastor).

Colección completa de obras de texto para los siete cursos de Bachillerato del plan 1938 (los cinco primeros en colaboración con D. Julio Rey Pastor).

«Metodología de la Matemática elemental» (en colaboración con D. Julio Rey Pastor).

TRABAJOS DE MATEMATICA PURA Y APLICADA

«Sobre algunas propiedades de las redes armónicas» (*Rev. Mat. Hisp. Am.*, 1922).

«Resolución de algunos problemas elementales en Mecánica relativista restringida» (tesis doctoral publicada en la *Revista de la Real Academia de Ciencias* y en las publicaciones del Laboratorio y Seminario Matemático, 1923).

«Construcciones métricas en proyección estereográfica» (*R. M. H. A.*, 1925).

«Algunos problemas de mínimo en la catenaria» (*Anales de la Asociación de Ingenieros del I.C.A.I.*, 1925).

«Sobre las catenarias de tensión mínima» (Asociación Española para el Progreso de las Ciencias. Congreso de Coimbra, 1925).

«Sobre la representación cartesiana de las funciones homogéneas de dos variables» (*R. M. H. A.*, 1928).

«Oscilogramas de inducción y de torsión en materiales ferromagnéticos» (*Anales de la Asociación de Ingenieros del I.C.A.I.*, 1930).

«Sobre la estabilidad del movimiento de las palas del autogiro» (*Revista de Aeronáutica*, 1934).

«Nota sobre la determinación de órbitas de estrellas dobles» (*Revista del Centro de Estudios Científicos de San Sebastián*, 1934).

«Contribución al estudio matemático de la absorción de la energía cósmica por la atmósfera» (*R. M. H. A.*, 1935).

«Demostración simplificada de la fórmula de de Moivre-Stirling y acotación gráfica del error» (*R. M. H. A.*, 1939).

«Curvas teóricas de distribución por edades de una colectividad profesional» (Asociación Española para el Progreso de las Ciencias, Congreso de Zaragoza, 1941).

«Ensayo de una teoría matemática de escalafones cerrados y sus aplicaciones a problemas de Hacienda y Previsión» (*R. M. H. A.*, 1941).

«De los axiomas de ordenación al teorema de Jordan para recintos poligonales» (*R. M. H. A.*, 1945).

«Sobre la individualización de los sentidos en las curvas planas cerradas de Jordan» (*R. M. H. A.*, 1945).

«Revisión crítica de la teoría de la equivalencia de polígonos» (*R. M. H. A.*, 1947).

«Un teorema general sobre integrales de funciones compuestas y sus aplicaciones geométricas y físicas» (*R. M. H. A.*, 1949).

«La transformación de Laplace en el tratamiento matemático de fenómenos físicos» (*R. M. H. A.*, 1951).

«Las fracciones continuas de cocientes incompletos diferenciales y sus aplicaciones» (*R. M. H. A.*, 1951).

«Les systèmes lineaires retroactifs en chaîne et les fractions continues» (Coloquio de París sobre «Les Machines a Calculer et la pensée humaine», 1951).

«Transformées de Laplace des fonctions empiriquement données» (Coloquio de París).

TRABAJOS DE CARACTER PEDAGOGICO Y DIDACTICO

«Series divergentes cuyo término general tiende a cero» (*R. M. H. A.*, 1924).

«Sobre el problema inverso del cálculo aproximado» (*R. M. H. A.*, 1926).

«Dos palabras acerca de la pedagogía matemática en la Segunda Enseñanza» (*Rev. de Seg. Ens.*, 1926).

«Klein, el Instituto y la Universidad» (leído en sesión de homenaje al prof. Klein y publicado en la *Rev. de Seg. Ens.*, 1927).

«Interpretación gráfica del error en el método de análisis indirecto» (*R. M. H. A.*, año 1928).

«Notas sobre pedagogía matemática» (*R. M. H. A.*, 1929).

«Los conceptos de derivada e integral en la Segunda Enseñanza» (Rev. *El Instituto*, número 1).

«Construcción de una regla de cálculo didáctica» (Rev. *El Instituto*).

«Demostración intuitiva de la regla de la raíz cuadrada» (*Mat. Elem.*, enero 1932).

Tres conferencias sobre didáctica matemática a los maestros cursillistas de 1933.

«La Matemática en la primera exposición de trabajos prácticos de los Institutos de Enseñanza Media» (reseña publicada en *Mat. Elem.*, año 1943).

Ponencia sobre formación y selección del profesorado de Enseñanza Media (Primera Semana de Enseñanza Media Oficial, 1942).

Cursillos de Aritmética para obreros en la Escuela Especial de Ingenieros Industriales (1943 a 1945).

«Orientación, selección y deformación» (*Rev. de Psicología General y Aplicada*, año 1947).

«El valor formativo de las Matemáticas en la Enseñanza Media» (conferencia leída en la sesión inaugural de la XIX Semana de la F. A. E. y publicada en *Atenas*, Revista de Información y Orientación Pedagógica, marzo 1951).

OTROS TRABAJOS, CONFERENCIAS Y ENSAYOS

Artículos científicos varios de la Enciclopedia Espasa: «Geometría no euclídea». «Gravedad», «Gravitación» «Polaridad», «Polos» (Movimiento de los), «Real» (Número), etc.

«Don José María Plans y Freyre» (nota necrológica en colaboración con D. Fernando Peña, publicada en *R. M. H. A.*, 1934).

Discurso necrológico en memoria del mismo (publicado en la Revista *Las Ciencias*, año II, núm. 2).

«La Matemática como Ciencia aplicada» (conferencia dada en el Instituto de Ingenieros Civiles, 1934).

Colaboraciones varias en la *R. M. H. A.* desde 1924 a 36. Propuesta y resolución de problemas, críticas de libros, etc.

«La Matemática y la Belleza» (conferencia leída en el Instituto Francés de Madrid y publicada en la Rev. *Mat. Elem.*, 1941).

Mensajes de despedida a los bachilleres del Instituto de San Isidro (años 1945 y 1947).

«Apología de la inutilidad» (discurso leído en la Escuela Especial de Ingenieros Industriales de Madrid en la sesión de entrega de títulos a la Promoción de Ingenieros de 1946).

«En memoria de D. Esteban Terradas» (*Dyna*, junio de 1950).

Prólogos de las obras: «Problemas de Matemática especial», de D. Antonio Moreno Torres, y «Tratado de Matemáticas superiores para Ingenieros y Físicos», de Bernhard Baule (trad. española de Ed. Labor).

«Sobre Cibernética. Génesis y problemas» (*Rev. de Psicología General y Aplicada*, año 1952).