

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

SOLEMNE INAUGURACIÓN DEL CURSO ACADÉMICO 2006-2007
BAJO LA PRESIDENCIA DE SUS MAJESTADES LOS REYES DE ESPAÑA



Madrid, 4 de octubre de 2006

LAS MATEMÁTICAS, LA MÚSICA Y LA ESTADÍSTICA

Señor, Señora

1. Introducción



Es una costumbre bien establecida —que como todas, también tiene sus excepciones—, que cuando se lee el discurso de ingreso en esta Real Academia, el nuevo académico hable del estado actual de su especialidad científica y de sus contribuciones a la misma. Sin embargo, cuando le corresponde dictar la conferencia inaugural de un nuevo curso académico, no hay una tradición mayoritaria impuesta a la hora de elegir el tema, como puede comprobarse leyendo, o simplemente hojeando, los títulos de los discursos de los últimos años.

Dejándome llevar por esa libertad de elección, y también por las muchas relaciones que tiene con las ciencias que se cultivan en esta Academia, quiero hablar de una de mis aficiones, probablemente la mayor de ellas, que es la música, y de su relación con las matemáticas y con mi especialidad que es la estadística.

Mi interés por la música viene, como mi afición a las matemáticas, de mis años de juventud. Nunca he tenido una formación específica en música, salvo la que me ha proporcionado el haber dedicado muchas horas a lo largo de, también, muchos años a escuchar música en salas de conciertos y en grabaciones, y el haber pertenecido a la **Coral Santa María de la Victoria** de Málaga durante quince años, tiempo en el que he tenido ocasión de cantar música de diversos períodos y estilos.

Como anécdota personal de la relación que a veces, sin saberlo, puede haber entre las matemáticas y la música, quisiera relatar la siguiente. Cuando nos propusieron cantar la segunda sinfonía de Felix Mendelsohn, *Canto de alabanza*,



como clausura de la temporada musical en el Gran Teatro de Córdoba en junio de 2003, sinfonía con un largo final coral con ciertas reminiscencias de la novena sinfonía de Beethoven —obra que no conocía y que en pocas ocasiones se interpreta, al estar fuera del repertorio habitual—, consulté el *Diccionario Grove de la música y los músicos* y, para mi sorpresa, me enteré de que una de las hermanas del compositor, Rebekka, estuvo casada con el famoso matemático Pedro Gustavo Dirichlet, quien realizó contribuciones importantes a la teoría de números, al análisis matemático y a la mecánica, y fue nada menos que el sucesor de Gauss en su cátedra de la universidad de Göttingen.

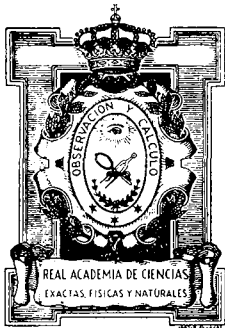
Antes de entrar de lleno en el tema del discurso, quiero aprovechar esta ocasión para recordar y, al mismo tiempo, rendir homenaje a D. Pedro Puig Adam, académico de la sección de Exactas de esta casa, hombre polifacético —componía música, pintaba y escribía versos— quien fuera tutor de Su Alteza Real D. Juan de Borbón y profesor de matemáticas de Su Majestad el Rey en el *Instituto San Isidro* cuando era príncipe de Asturias, y del que en el año 2000 se conmemoró en esta Academia el centenario de su nacimiento. Además de ser un muy brillante matemático, fue un músico notable que dejó compuestas un buen número de obras musicales, sobre todo para el piano. Del prólogo de la monografía que se publicó con motivo del centenario quisiera entresacar el siguiente párrafo que resume estos rasgos de la personalidad de D. Pedro:

Tenía sentido estético para la poesía, música y pintura. Vivía el ideal de aunar matemáticas y belleza. En la vida interna de la matemática veía arte, en la música, matemática sentida; y en la ciencia, matemática pensada.

2. La relación entre las matemáticas y la música

Tradicionalmente, en nuestra cultura occidental, debido a la enorme influencia de Boecio, basada a su vez en la de Pitágoras y Platón, la música estuvo ligada a la aritmética, la astronomía y la geometría, que juntas constituían el *quadrivium*, mientras que la gramática, la retórica y la lógica formaban el *trivium*, hasta bien pasada la Edad Media.

Hoy se considera a la música como una de las bellas artes y no como una ciencia, olvidándose de sus orígenes. En el período, que podemos situar a mediados del siglo XVII,



cuando la música se iba transformando lentamente de ciencia en arte —manteniéndose, no obstante, la relación entre ambas durante mucho tiempo—, también la ciencia dió el paso de ser algo puramente teórico a hacerse más práctica y, como consecuencia, a la aparición de una comunidad científica aglutinada en torno a las nuevas sociedades científicas como la *Royal Society* fundada en 1660 o la *Real Academia de Ciencias de París* fundada en 1666 por Colbert y reorganizada, posteriormente, por Luis XIV, a las que pronto seguirían muchas más en Europa.

De este período tan transcendente para ambas disciplinas, que abarca casi dos siglos, es del que quiero hablar aquí.

Vincenzo Galilei, teórico, compositor, tañedor del laúd, cantor y padre de Galileo fue quien lideró la corriente del revisionismo del pensamiento musical de la monodia retornando al ideal de los antiguos griegos de la unión entre la música y la poesía. El cambio musical de la polifonía (*prima pratica*) a la monodia con acompañamiento (*seconda pratica*) que entonces comenzaba, impulsó la experimentación musical acorde con el nuevo e incipiente empirismo científico; y así, durante sus últimos años realizó contribuciones importantes a la teoría de la acústica y se anticipó a varios de los descubrimientos de su hijo acerca de la generación de los sonidos.

Tuvo el gran acierto de dirigir los pasos de su hijo hacia la experimentación en lugar de las matemáticas puras. Así, Galileo, en su obra maestra, publicada en 1638, *Discursos y demostraciones matemáticas en torno a dos nuevas ciencias*, al final de la *primera jornada* hace hablar a Sagredo y Salviati de música, describiendo experimentos musicales que ponen de manifiesto la idea de caracterizar los intervalos musicales en términos de frecuencias, y ofrece una explicación del por qué unos sonidos son consonantes y otros disonantes, iniciando de este modo el camino que terminaría con las aportaciones fundamentales de Helmholtz en el siglo XIX. Comentando la impresión fisiológica que producen las *quintas*, Galileo se torna lírico y escribe: ... *que producen una titilación y un cosquilleo en la membrana del tímpano que, atemperando la dulzura con algunos matices amargos, da al mismo tiempo la impresión de un gentil beso y un mordisco.*

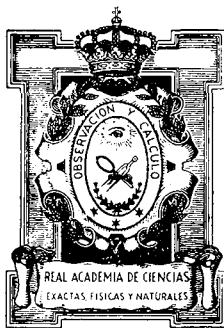
Johannes Kepler, astrónomo, matemático, filósofo y astrólogo también se interesó por la música. Su obra *Harmonices mundi* se gestó a partir de 1599 y, tras un período de acti-



vidad incesante en astronomía en el que descubrió las dos primeras leyes del movimiento planetario, reanudó su trabajo sobre música en 1618 con el libro V de *Harmonices mundi* publicado en Linz el año siguiente. Aunque el cuarto libro lo dedicó a la astrología, en el quinto, Kepler anunciaba de modo triunfalista su teoría de la armonía de las esferas y, al mismo tiempo, la tercera ley de los movimientos planetarios. Aunque el libro fue muy criticado tras su publicación, es un producto típico del Renacimiento, época en la que el neoplatonismo, el hermetismo, la cabalística, la alquimia y la magia eran objeto de estudios reconocidos. Al parecer, el joven Newton fue un lector estudioso de la obra musical de Kepler, ya que su único tratado sobre la música muestra signos de familiaridad con aquella.

Marin Mersenne es conocido, por los matemáticos, sobre todo como el inventor de los llamados números primos de Mersenne, números de la forma $2^p - 1$ donde p es un número primo, que fueron una aportación decisiva a la futura teoría de números y, por los musicólogos, como el autor de la famosa *Armonía universal* publicada en el bienio 1636–37, un libro indispensable en la historia de la música, en el que expone, desde una perspectiva científica, sus ideas sobre los aspectos teóricos y prácticos de la música. En esta obra se describen por vez primera las reglas matemáticas que gobiernan el comportamiento de las cuerdas vibrantes y los factores de los que depende el tono que éstas producen al vibrar, como son la longitud, el diámetro, la tensión y la masa de la cuerda; así como la importancia, la existencia y el papel de los armónicos en relación con la nota o tono fundamental. Hizo contribuciones importantísimas a la teoría de la afinación y del *temperamento igual* mediante una síntesis de los saberes anteriores, y abogó por el uso del *temperamento igual* para la construcción de ciertos instrumentos musicales.

Mersenne, en su correspondencia con el filósofo y matemático René Descartes, se planteó un tema que nunca se había tratado anteriormente como es el de saber cuáles son los factores psicológicos que actúan en el oyente a la hora de la comprensión del fenómeno musical, como puedan ser el que los sonidos sean agradables o produzcan en el oyente ciertas sensaciones o emociones. En este sentido, Mersenne sostenía que las consonancias eran la base de la composición, mientras que las disonancias tenían una función puramente ornamental. En relación con las reglas para la construcción de melodías recomendaba usar el arte combinatorio —la incipiente teoría



matemática, precursora del cálculo de probabilidades, debida originalmente a Cardano y perfeccionada por Pascal y Fermat en su correspondencia de 1654—.

La aplicación del arte combinatorio a la música continuó con la obra *Musurgia universalis* de Athanasius Kircher publicada en 1650. El abigarrado y barroco título completo de la obra reza así:

Arte universal musical, o el gran arte de la consonancia y disonancia, subdividido en diez libros, por el que la doctrina y filosofía completa de las notas y la teoría y práctica de la música se tratan con la mayor versatilidad. En él se revelan y prueban las maravillosas fuerzas y efectos de la consonancia y la disonancia en el mundo y por consiguiente en toda la naturaleza por una nueva y desconocida muestra de varios ejemplos. Y esto se realiza considerando no solamente las aplicaciones individuales sino casi todas las facultades, especialmente la filología, las matemáticas, la física, la mecánica, la medicina, la política, la metafísica y la teología.

Este libro recibió grandes elogios por parte de Leibniz en su *Disertación sobre el arte combinatorio* de 1696, obra en la que él también muestra su interés por el arte combinatorio aplicado a la música, interés que continuó hasta el siglo XVIII con unos escritos no publicados de Euler.

La aportación de Gottfried Wilhelm Leibniz a la historia y teoría de la música aún no está aclarada del todo. Las dos cartas que escribiera a Christoph Goldbach en 1712 demuestran un conocimiento profundo de las bases teóricas de la música. En la primera, define la música como *el ejercicio aritmético oculto de una mente que ignora que está calculando*. En la segunda, que trata del problema del temperamento musical, analiza su relación con el sistema desarrollado por Christiaan Huygens. Como resultado del pensamiento humanista imperante en su época, se le atribuye el haber rescatado, como lo había hecho Kepler con anterioridad, la antigua idea de la armonía del universo o armonía de las esferas de la escuela pitagórica y aceptada por la teología medieval, a pesar de la oposición de muchos pensadores de la época.

René Descartes escribió el *Compendium musicae*, su única obra sobre la música, en 1618, mientras estuvo estacionado en Breda con el ejército del Príncipe Mauricio de Nassau. Allí



trabó amistad con el matemático Isaac Beeckman a quien dedicó la obra. El tratado es muy valioso ya que constituye un primer intento sobre cómo abordar el estudio de la percepción sensorial de la música desde varios puntos de vista, a saber: el empírico, el deductivo y el científico. Se trata de uno de los primeros enfoques encaminados a definir la relación dual entre los fenómenos físicos y psicológicos de la música. Como Newton, nunca más volvió Descartes a tratar de temas musicales, salvo en su abundante correspondencia, sobre todo con Mersenne y con el humanista y científico Constantijn Huygens, padre del famoso matemático, astrónomo y físico Christiaan.

Christiaan Huygens perteneció al selecto club de los filósofos naturalistas del siglo XVII que sentaron las bases de la ciencia moderna. Fue nombrado miembro de la *Royal Society* de Londres en 1663 y presidente de la *Academia de Ciencias de París* por Luis XIV en 1666. Sus aportaciones a la música, recogidas en sus dos obras *Novus cyclus harmonicus* de 1661 y *Cosmotheros*, muestran el interés de Huygens no solamente por los aspectos teóricos de la música sino también por los prácticos. Su interés en el problema de las *commas* —pequeñas divisiones de los semitonos apenas discernibles por el oído— y de los *temperamentos mesotónicos*, le llevó a resolver con éxito el problema matemático de la división de la octava en 31 partes iguales. Este resultado teórico se tradujo, además, en la puesta en práctica de esta afinación como demostró Addrian Fokker, en 1950, al construir un órgano dotado de un teclado especial también construido a propósito con esta afinación.

En España, no podemos olvidar la temprana defensa del *temperamento igual* que hiciera el gran Francisco de Salinas, a quien fray Luis de León dedicaría su célebre oda —uno de los monumentos de la literatura española—. También, debemos recordar que en fechas similares a las de la publicación de las obras de Huygens, el matemático español Juan Caramuel y el también matemático y astrónomo José Zaragoza fueron de los primeros, al igual que Newton, en utilizar los logaritmos para calcular los intervalos musicales en la división de la octava en semitonos iguales.

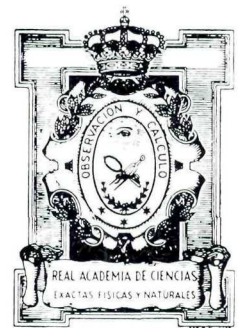
Leonard Euler contribuyó más que ninguna otra persona —matemático o no— a la teoría de la acústica tal como hoy la conocemos que, no lo olvidemos, fue uno de sus temas favoritos. Cuando contaba 19 años escribió la obra *Disertaciones sobre la teoría del sonido*; la lectura de los cuadernos de notas





de esa época muestra que planeaba escribir un tratado sobre todos los aspectos de la música que incluyera las *formas*, la *composición* así como la *acústica* y la *armonía*. Lo único que conocemos de este proyecto es su *Esbozo de una nueva teoría de la música* escrito en 1731, en la que presenta una teoría de la consonancia basada en leyes matemáticas, tomando como punto de partida las ideas de los antiguos griegos. En esta obra también incluyó el sistema más completo de *escalas* y *modos musicales* que nunca se haya publicado, así como una teoría de la *modulación*. La acústica le debe a Euler el haber formulado muchos de los problemas fundamentales de ésta como soluciones de *ecuaciones en derivadas parciales* —*ecuaciones de ondas*, como se las conoce hoy— tal y como se estudia actualmente esta disciplina.

Si dejamos aparte la monumental e histórica biografía de Philipp Spitta, en la reciente —y para muchos, definitiva— bio-

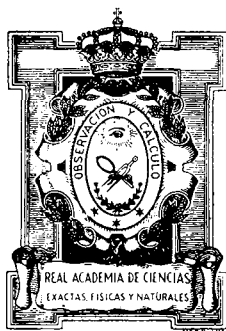


grafía de Christoph Wolff **Juan Sebastián Bach. El músico sabio**, y a diferencia de otras biografías del músico que no tratan este tema, se estudia con cierto detalle el paralelismo existente entre Isaac Newton y Juan Sebastián Bach que, al parecer, debe su origen a un comentario de Johann Friedrich Agricola escrito en agosto de 1750, apenas unos días tras la muerte de Bach, suscitado por la controversia entre éste y Filippo Finazzi —cantante de la ópera de Hamburgo— sobre el intrincado arte musical de Bach.

Pero aun asumiendo que las armonías [las estructuras musicales] de este gran hombre sean tan complejas que no siempre consigan el resultado previsto, éstas, no obstante, sirven al deleite del genuino conocedor. No toda persona instruida es capaz de entender a Newton, pero quienes han avanzado con suficiente profundidad en la ciencia pueden entenderlo y encontrar enorme gratificación y beneficios reales leyendo su obra.

Lo que Newton fue como filósofo [natural], lo fue Bach como músico. En otras palabras, así como Newton trajo cambios fundamentales y estableció nuevos principios en el mundo de la ciencia, Bach hizo lo mismo en el mundo de la música. Curiosamente, Newton nunca publicó sus investigaciones sobre la teoría de la música y, aunque su breve tratado titulado *Of music* circuló entre un reducido círculo de amistades, sus contribuciones más importantes sobre la música han permanecido desconocidas hasta hace relativamente poco tiempo. Newton comenzó a interesarse por la música en 1665, cuando contaba 23 años, justo en su etapa más fructífera como científico y matemático. Al parecer, en esa época, también se interesó por aprender a tocar el bajo de viola, lo que no debe extrañarnos, ya que todavía estaban de moda los famosos *Consortios de Violas* ingleses.

No sabemos por qué no profundizó más en sus estudios sobre la teoría y práctica de la música. Sí podemos deducir, del documento que se ha encontrado —un cuaderno de 17 páginas repletas de cálculos y tablas—, que se familiarizó con la teoría musical de la época griega y en particular con las teorías de Pitágoras y Aristóxenos, por lo que adoptó los métodos de cálculo de los griegos basados en longitudes de cuerda y medias proporcionales. Sin embargo, fue uno de los primeros en usar los logaritmos en estos cálculos y el primero en expresar las magnitudes de los intervalos musicales en notación logarítmica, tomando como unidad el semitono, abriendo el camino para lo

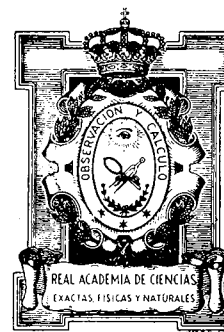


que más tarde se denominaría el *temperamento igual*. Y todo esto lo hizo cien años antes de que Johann Heinrich Lambert se atribuyese la invención de este método. Newton no volvió a interesarse más por la música y, en los últimos años de su vida, retornó al ideal pitagórico de que lo más excelso en el arte y en la naturaleza debería estar conforme con las simples proporciones de la escala pitagórica.

Lambert, que llegó a ser miembro de la Academia de Ciencias de Berlín en 1765, fue uno de aquellos científicos universales tan característicos de los siglos XVII y XVIII y figura importante de su época en muchas disciplinas, sobre todo en aquellas relacionadas con la física y, en particular, con las matemáticas y la estadística. A él le debemos la demostración de la irracionalidad de los números π y e , publicada en 1768, el desarrollo sistemático de las funciones hiperbólicas, la teoría de los errores e importantes estudios sobre las teorías del calor y de la luz. Se adelantó, en más de doscientos años, a la teoría de las probabilidades no aditivas que hoy conocemos como *funciones de credibilidad*. Su contribución a la teoría musical se debe a la reinención del método de Newton, a la extensión de ciertos resultados sobre la teoría de la música de Euler y —lo más sorprendente y anecdótico— a la invención de un instrumento musical denominado *solitario musical* con el cual una persona podía disfrutar de la música a través de sus dientes sin molestar ni despertar a los vecinos. ¡No hace falta recordar que en esa época no había auriculares!

La música de Bach estableció nuevos criterios de composición y nuevos cánones de perfección técnica. Después de Bach, la música no volvió a ser como antes. Se había producido un cambio de paradigma y fue imponiéndose gradualmente en un proceso comparable con lo ocurrido en el terreno de la filosofía natural como resultado de la obra de Newton. Ambos alcanzaron cimas de tipo muy diferente, pero ambos vivieron, pensaron y trabajaron en el mismo clima intelectual del descubrimiento científico y de la experimentación empírica de los principios fundamentales de sus ramas del saber.

Para Bach, formado en el pensamiento del siglo XVII, la idea de que la música constituye una rama de las artes liberales —del *quadrivium*—, era aún tan válida como lo había sido para Kepler, promotor de la opinión de que la música refleja la armonía del universo. La música, así, con este tradicional refuerzo de la matemática, ofrecía un campo de operaciones especialmente rico a un compositor cada vez más contagiado



por la curiosidad científica, completamente desentendido de los *secos ejercicios de artesanía [musical]*, pero comprometido a fondo en avanzar hacia la *música verdadera*, definida por Bach como una música cuyo *objetivo primordial y última meta [...] es honrar a Dios y recrear su espíritu*.

Lorenz Mizler —médico y matemático—, discípulo de Bach, fue una figura importante de la historia de la música germana del siglo XVIII. A pesar de que fuera un compositor *amateur*, su amplitud de conocimientos sobre música, matemáticas, filosofía, teología, derecho y ciencias naturales le llevó al convencimiento de que era necesario establecer una ciencia musical basada en las matemáticas y la filosofía. En 1738 creó la *Academia de Ciencias Musicales*, que contaba con 20 miembros, todos correspondientes, entre los que figuraban, además de Bach que ocupaba el puesto décimocuarto¹, lo más granado de la música de la época como Telemann, Händel, Graun y en el lugar vigésimo, Leopoldo Mozart quien al parecer rehusó la invitación a ser miembro de la Sociedad. Su objetivo era hacer circular por correo entre los académicos artículos teóricos sobre diversos aspectos de la ciencia musical a fin de promover y estimular ésta con las discusiones y comentarios que aquellos artículos produjeran. Bach, que ingresó en la Academia en 1747, envió tres trabajos.

Los dos primeros, en 1747, eran un *Canon triple a seis voces*, obra que puede verse en el retrato pintado por Haussmann en 1746, y una copia de *La Ofrenda Musical*. Posteriormente, Bach remitió las Variaciones canónicas sobre el tema *Vom Himmel hoch*. Según Mizler, Bach habría hecho mucho más por la Academia si la brevedad del tiempo antes de su muerte no se lo hubiera impedido. Al parecer, Bach tenía pensamiento de enviar la obra *El Arte de la Fuga* cuando la tuviera definitivamente terminada.

El Arte de la Fuga consta de 14 fugas, que curiosamente Bach denomina con el nombre de *contrapunctus*, y



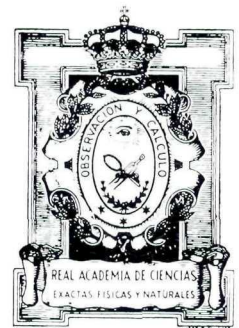
¹ En la numerología relativa a Juan Sebastián Bach, el número 14 se asocia a su apellido de la siguiente manera: Asignando números naturales a las letras del abecedario por su orden lexicográfico, se tiene que $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$, ..., $H = 8$, ..., con lo que resulta que el número asociado al apellido *BACH* es el 14, ya que $B + A + C + H = 2 + 1 + 3 + 8 = 14$. También, en las *Variaciones Goldberg* y en la *Misa en si menor* se pueden encontrar indicios y pruebas de la existencia de ciertos aspectos numéricos, a los que tan aficionado era Bach.



Figura 1a. Retrato de J. S. Bach, por Elías Gottlob Haussmann (1746).

4 cánones. La última fuga, que acaba de forma brusca al estar incompleta, es una impresionante y prodigiosa fuga cuádruple². En apariencia, *El Arte de la Fuga* da la impre-

² No solamente consta *El Arte de la Fuga* de 14 fugas sino que además, en la fuga inconclusa —la décimocuarta—, aparece la firma musical de Bach. En la notación musical alemana, las notas correspondientes a las letras del apellido Bach son: *B* que representa el *si bemol*, *A* el *la natural*, *C* el *do natural* y *H* el *si natural*. El tercer tema de la fuga décimocuarta, que aparece precisamente al final de la misma, está basado en el apellido musical de Bach. También, en el final del *ricercar* a 6 de *La Ofrenda Musical*, Bach deja deslizarse su firma musical dentro del tejido sonoro de esta admirable fuga a seis voces.



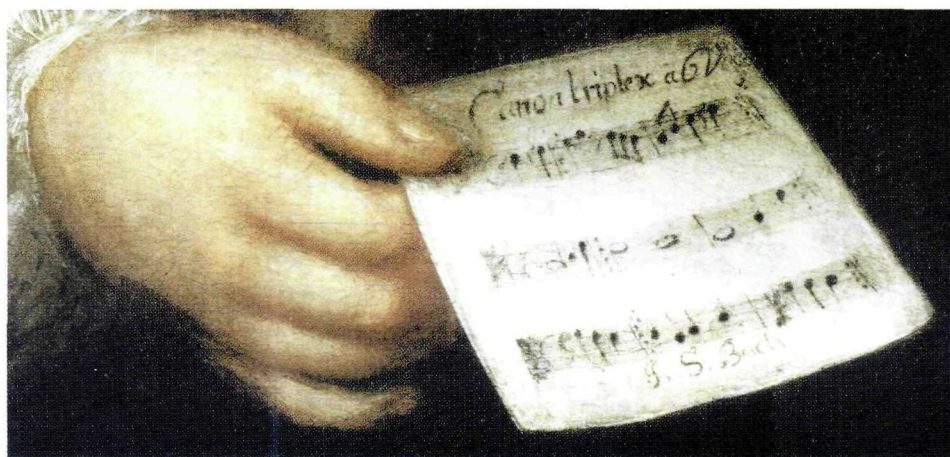


Figura 1b. Detalle del *Canon triplex a sei voci*.

sión de ser un mero ejercicio de erudición musical sobre como se puede desarrollar un único tema, en este caso un simple tema de cuatro compases, en una única tonalidad —re menor— lo que, a priori, parecería presagiar una música plana, monótona y enormemente aburrida.



Figura 2. Tema de *El Arte de la Fuga*

Sin embargo, Bach aplica todo su saber y su genio, sometiendo al tema a toda suerte de artificios contrapuntísticos como la inversión, la disminución, la aumentación, los efectos especulares, los movimientos retrógrados, y combinaciones de estos, que —recordemos— son simples transformaciones matemáticas aplicadas al tema principal, para obtener una de las cumbres musicales de todos los tiempos; una obra tan perfecta y hermosa que toca los resortes más recónditos del corazón y de la mente cuando se estudia o —simplemente— se escucha. En mi caso, y probablemente por mi (de)formación matemática, la audición activa y reiterada de esta obra, de apariencia tan abstracta, es una de las experiencias intelectuales y emocionales mayores que la música me haya proporcionado.



Federico el Grande de Prusia atrajo a la corte de Sanssouci —en Potsdam— a celebridades de la época como los filósofos Voltaire y La Mettrie, y matemáticos como Euler, quien pasó allí veinticinco años. Juan Sebastián Bach, por invitación real, realizó una breve visita a la corte en mayo de 1747, con el pretexto de mostrar al Rey sus habilidades como improvi-

sador y para examinar y probar la colección de *pianofortes* —instrumento inventado algunos años antes por el italiano Cristofori—, encargados por el Rey al famoso constructor de órganos Gottfried Silbermann.

Cuenta la crónica que el Rey quedó entusiasmado y admirado por la forma en que Bach improvisó, sin preparación alguna, una fuga a tres voces sobre el tema que Su Majestad le dió y que, desde entonces, se conoce como *tema regio*: ocho compases en la tonalidad de do menor de un tema bastante complejo, de ritmo irregular y muy cromático, que posteriormente constituyó el germen de la *Ofrenda musical*. Toda la obra está basada en el tema regio a excepción de uno de los movimientos de la sonata a trio para flauta, violín y continuo que se encuentra entre los *ricercares* —como Bach denomina a las fugas de esta obra— y los *cánones*.



Figura 3. Tema regio de *La Ofrenda Musical*.

El *canon per tonos* lleva la siguiente indicación dirigida al monarca: *y que con cada modulación ascendente se eleve la gloria del Rey*. Lo más sorprendente del canon, y el que explica la dedicatoria, es que en cada reiteración el canon termina un tono más agudo de como empieza y así los ejecutantes se ven obligados a seguir transportando un tono en cada repetición hasta terminar en la misma tonalidad como se empezó, pero una octava más alta. Esta idea de retorno infinito, de volver al punto de partida de este canon de *La Ofrenda Musical* es precisamente —como nos recordó recientemente el Prof. Bombal en su discurso de ingreso en esta Academia—, con la que Douglas Hofstadter comienza su famoso libro titulado ***Gödel, Escher, Bach: un Eterno y Grácil Bucle*** e introduce la idea del *bucle extraño* a través de su relación con las enigmáticas y sorprendentes obras pictóricas de Maurits Cornelius Escher y con el famoso teorema de Kurt Gödel sobre *las proposiciones formalmente indecidibles de los «Principia Mathematica» de Russell y Whitehead*, publicado en 1931, que socavó no solo los cimientos de la matemática del siglo XX sino de la ciencia, al igual que ocurrió con otras revoluciones de principios del siglo pasado como la teoría de la relatividad y la mecánica cuántica.



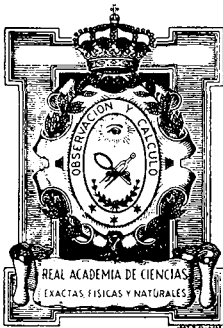
De los comentarios de Jordi Savall, recogidos en el artículo *El testamento musical de J. S. Bach*, escrito con motivo de su grabación de *La Ofrenda Musical* y *El Arte de la Fuga*, entresaco lo siguiente:

Incluso pasados más de 250 años, el misterioso río que es el genio de Bach continuará arrastrándonos hasta las profundidades del alma y, como diferentes espejos encantados, estos ricercares, sonatas, cánones, fugas y contrapuntos serán las fuentes inagotables de un viaje espiritual y estético que ha de conducirnos a unos confines únicos, en los que el ser humano y su dimensión divina se interpelan y, a veces, se unen armoniosamente.

Un caso particularmente curioso de la relación entre música y matemáticas es el de Joseph-Louis Lagrange. Con motivo de su fallecimiento en 1813, Jean-Baptiste-Joseph Delambre, a la sazón secretario perpetuo de la Sección de Exactas del **Instituto de Francia**, siguiendo la tradición de la Academia de Ciencias no tanto de glosar los logros científicos de un académico sino de dar una semblanza de lo que debería ser un gran científico, comentaba, no exento de cierta malicia, una confidencia que le había hecho el mismo Lagrange referida a sus gustos musicales: *Me gusta la música porque me permite estar solo; escucho los tres primeros compases y, a continuación, ya no oigo nada del cuarto. Es entonces cuando me entrego a mis propias reflexiones; nada interrumpe mi pensamiento. Y ésta es la manera en la que resuelvo más de un problema difícil.*

De esta manera Lagrange justificaba lo que muchas veces se ha dicho de los matemáticos —y todavía se sigue diciendo—: que prefieren *su música* a la de otros. Por eso, no es de extrañar que en cierta ocasión, en un salón dieciochesco, una de las glorias de estos salones, el matemático y protector de Lagrange, Jean le Rond d'Alembert maliciosamente se quejó de Lagrange a Voltaire diciéndole: *Es una persona muy aburrida, pero ¡qué gran geómetra!*

Sin embargo, la realidad fue otra ya que Lagrange estuvo muy interesado por la teoría de los instrumentos de viento desde su juventud e incluso llegó a escribir una breve historia del papel que las matemáticas habían tenido en la música. Sus *Investigaciones sobre la naturaleza y propagación del sonido* de 1759 son una extensión de un trabajo previo de Euler sobre



acústica. Al parecer, Lagrange era el único matemático de su tiempo capaz de asimilar inmediatamente los descubrimientos y métodos de Euler, de modo que podía generalizar y extender sus resultados.

Ya que ha aparecido d'Alembert en escena, recordemos que no solamente fue filósofo, hombre de letras y matemático —impulsor y creador, junto con Voltaire, de la famosa *Encyclopedie* que comenzó a publicarse en 1751—, sino que, además, realizó contribuciones muy importantes a la música.

Aunque es más conocido por su participación en la génesis y los comienzos de la Enciclopedia, no podemos olvidar que fue un famoso matemático, nombrado miembro de la Academia de Ciencias de París con solo 23 años y de la Academia francesa en 1772 de la que fue secretario perpetuo, y autor del *Traité de dynamique* obra de la mayor importancia en este campo, en la que aparece el famoso principio de d'Alembert, como posteriormente se llamó a su descubrimiento. Más adelante, desarrolló la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales que aplicó al problema musical de la cuerda vibrante en 1747, formalizó el cálculo integral, y encontró la explicación al fenómeno de la precesión de los equinoccios y de la nutación del eje terrestre, entre otros logros.

En relación con la música, recordemos que, aparte de los más de 30 artículos de la *Encyclopedie* sobre temas y conceptos musicales, su obra *Eléments de musique théorique et pratique suivant les principes de Monsieur Rameau* fue considerada como un libro fuera de lo común, cuyo contenido estuvo vigente durante más de 50 años tras su publicación. Su ensayo *De la liberté de la musique* también ejerció mucha influencia en su tiempo. Sin embargo, aunque las ideas musicales de d'Alembert estaban muy marcadas por el racionalismo del siglo XVIII, en sus *Réflexions sur la musique en général* afirma que la música es un lenguaje hecho para producir sentimientos en el alma. Del mismo modo, en el celeberrimo discurso preliminar de la Enciclopedia, se lee que la música es el arte de la imitación y que la música que no describe ni dibuja la naturaleza es solamente ruido.

3. La estadística y la música

Como ejemplo tardío de la aplicación del *arte combinatorio*, en 1793, diez años después de la muerte de Euler y



dos tras la muerte de Mozart, Johannes Hummel, padre del famoso pianista y compositor Juan Nepomuceno y amigo de los Mozart, publicó una obra de título *Juego de dados musical: Instrucciones para componer vales con dos dados, sin saber música ni conocer las reglas de la composición musical*, cuya autoría atribuía a Wolfgang Amadeus Mozart. Al parecer, es bastante probable que fuese el propio Mozart quién compusiera el juego en 1787. De hecho, aparece como un apéndice en el catálogo de Köchel de sus obras.

El juego consiste en componer un vals bipartito de ocho compases. Cada compás de cada una de las dos partes se elige, de un total de 176 compases, según sea el valor de la suma de los puntos que resulta de lanzar dos dados y, el proceso, se repite en ocho ocasiones.

Primer pentagrama									Segundo pentagrama								
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	96	22	141	41	105	122	11	30	2	70	121	26	9	112	49	109	14
3	32	6	128	63	146	46	134	81	3	117	39	126	56	174	18	116	83
4	69	95	158	13	153	55	110	24	4	66	139	15	132	73	58	145	79
5	40	17	113	85	161	2	159	100	5	90	176	7	34	67	160	52	170
6	148	74	163	45	80	97	36	107	6	25	143	64	125	76	136	1	93
7	104	157	27	167	154	68	118	91	7	138	71	150	29	101	162	23	151
8	152	60	171	53	99	133	21	127	8	16	155	57	175	43	168	89	172
9	119	84	114	50	140	86	169	94	9	120	88	48	166	51	115	72	111
10	98	142	42	156	75	129	62	123	10	65	77	19	82	137	38	149	8
11	3	87	165	61	135	47	147	33	11	102	4	31	164	144	59	173	78
12	54	130	10	103	28	37	106	5	12	35	20	108	92	12	124	44	131

Tabla 1. Distribución de los 176 compases en dos matrices de 11 filas por 8 columnas, una para cada parte del vals.

La Tabla 1 ilustra la disposición de los compases dentro de cada matriz. La elección del compás m -simo —que aparece en números romanos en las matrices—, para cada uno de los $m = 1, \dots, 8$ lanzamientos, se realiza eligiendo simultáneamente el elemento a_{nm} de cada matriz, donde n representa la suma de los puntos resultante del lanzamiento de los dados, que aparece en cursiva.

No podemos estar seguros de si Mozart era consciente de que la distribución de la suma de los puntos resultante de lanzar dos dados no es *uniforme* sino *triangular*, con lo que algunos de los vales que resultan del juego musical son mucho más probables que otros. Así, por ejemplo, es 6 veces



más probable elegir un compás de la fila $n = 7$ que de las filas $n = 2$ ó $n = 12$.

Obsérvese que los dados sustituyen el carácter subjetivo de la elección de un cierto compás aunque, evidentemente, el vals también podría componerse sin ayuda de los dados mediante una determinada elección subjetiva.

A partir de la segunda mitad del siglo XVIII apareció un nuevo tipo de músico, el músico-artista, cuyas composiciones musicales en absoluto tenían que ver con las matemáticas ni, por supuesto, dependían de éstas. Es en este período cuando asistimos al comienzo del divorcio entre las matemáticas y la música, empezando por la decadencia y, posteriormente, la total desaparición del arte combinatorio en las composiciones musicales hasta bien entrado el siglo XX, cuando reapareció de nuevo. A las composiciones mecánicas de Kircher³ se las consideraba como *antikuada álgebra sonora*. Sin embargo, éstas recuerdan ciertas composiciones de John Cage y de otros compositores del siglo XX que tratan de eliminar toda influencia subjetiva en la composición musical. La música serial de la escuela de Viena apunta hacia la búsqueda de una novedad radical que rechaza la herencia posromántica y, de nuevo, su sintaxis vuelve a ser de naturaleza combinatoria. También, la denominada música estocástica o aleatoria del siglo XX demanda el control estadístico de los parámetros musicales de los modelos matemáticos en los que se basa. El caso más conocido es, sin duda, el de Xenakis, que aplicó durante muchos años modelos estadísticos muy conocidos, como el de Poisson, y la teoría de los procesos de Markov en sus composiciones.

El poeta francés Paul Valéry resumió el conflicto entre objetividad y subjetividad de la creación artística en general, y de la musical en particular, de esta manera tan clara: *El secreto de la elección no es de menor importancia que el secreto de la invención*.

Con esta breve introducción quiero hablar, de forma muy sucinta, de lo que actualmente el cálculo de probabilidades y la estadística pueden contribuir a la música —concretamente a la musicología—, planteando la siguiente cuestión:

³ Kircher, siempre fascinado por todos los aspectos de la mecánica, creó una máquina de composición musical que denominó *arca musarithmica*, que permitía la composición automática de música.



¿Se puede describir o, al menos, explicar, aunque sea de modo parcial, la música en términos cuantitativos? Recordemos que Leibniz llamaba sucintamente a la música la *aritmética del alma*. Es una afirmación filosófica de muy profundo calado, pero difícil de formular de modo preciso.

La diferencia entre *música* y *ruido* estriba en la organización o estructura interna de los sonidos que escuchamos. Además, la música está relacionada con la percepción, las emociones y la fisiología del oído, por lo que el estudio científico del fenómeno musical trasciende el ámbito de la física y las matemáticas; lo que hace necesario, para su mejor entendimiento, combinar un número de ciencias diversas —además de la física y las matemáticas— como la psicología, la fisiología, la historia, la estadística, las ciencias de la computación, la semiótica y, por supuesto, la musicología.

Los músicos son capaces de *oir* la música mirando a la partitura —recuérdese el caso de Beethoven, aquejado de sordera total en sus últimos años— y reconocer su estructura interna. Sin embargo, la audiencia puede o no reconocer o emocionarse con dicha estructura, independientemente de las intenciones del compositor, ya que la estructura de la música, por si sola, no nos da pistas para su comprensión. De aquí se sigue que cualquier aproximación al fenómeno musical es, necesariamente, incompleta. No obstante, el poder cuantificar de alguna forma los datos aportados por la música, podría ayudarnos a desentrañar parte de esa estructura subyacente.

Todo lo anterior, a lo que habría que añadir la ausencia o falta de datos, ha impedido, hasta hace poco, el desarrollo de métodos cuantitativos en la musicología, aunque esta situación ha cambiado enormemente en los últimos diez años. Entre todas las disciplinas que hemos mencionado, la estadística está llamada a jugar un papel importante en la musicología por la razones siguientes:

- 1.^a Los métodos estadísticos actuales están diseñados para descubrir la estructura subyacente de casi cualquier conjunto de datos, no solamente los cuantitativos.
- 2.^a Los métodos estadísticos constituyen una herramienta interdisciplinar ideal para unificar las distintas disciplinas científicas que se ven involucradas en los fenómenos musicales.



- 3.^a Las bases de datos que resultan de los fenómenos musicales son muy grandes y complejas, y por consiguiente inútiles, a no ser que se disponga de modelos estadísticos apropiados para extraer de ellas sus elementos esenciales.

Entre las aplicaciones recientes de la estadística a la musicología mencionamos, entre otras, la comparación de interpretaciones de una misma obra por distintos intérpretes —aunque nunca se podrá decir cuál es la mejor, al no haber una *regla de oro* para medir la bondad de ésta—; el caracterizar estilos de composición musical de diversas épocas o, dentro de la misma época, de diversos compositores; la caracterización del estilo musical de un autor; y el poder atribuir la autoría de una obra musical de autor incierto a un determinado músico.

Como ejemplo de la aplicación de técnicas estadísticas muy recientes a la interpretación musical de la obrita para piano de Robert Schumann *Träumerei* (ensueño), op. 15/7, una de las 13 piezas cortas que constituyen el album *Kinderszenen* (Canciones infantiles), escrita en 1838, quisiera mencionar el proyecto fin de carrera de D. Josué Almansa Ortiz, titulado *Análisis de datos musicales mediante componentes principales funcionales: estudio interpretativo de la obra 'Träumerei'*, dirigido por el profesor Dr. Pedro Delicado, de la Universidad Politécnica de Barcelona, en 2005.

Dejando de lado los aspectos técnicos del proyecto que, por otra parte, son muy importantes a la hora de analizar y comparar las diversas interpretaciones de la obra a partir de los datos obtenidos de las grabaciones de veinticuatro pianistas —algunas, incluso, realizadas por el mismo pianista en más de una ocasión, como es el caso de Alfred Cortot y Vladimir Horowitz, con tres grabaciones distintas de cada uno—, me ha llamado la atención lo enormemente positivo que para el futuro ingeniero parece haber resultado su incursión y aproximación a un aspecto de la música clásica desde la perspectiva de un estadístico aplicado. Del prólogo del proyecto me he permitido entresacar el último párrafo que reza así:

Hoy en día, la música ha sucumbido a la cultura de *usar y tirar* y a la tentación de la búsqueda de grandes beneficios económicos a muy corto plazo, pero destinada a convertirse en nada poco después, quedando el verdadero concepto de arte y el esfuerzo de ser constructivo en un muy segundo plano. Mi trabajo en



este proyecto ha acabado siendo un acercamiento a esta vertiente más culta de la música, el cual no producirá un aumento en la liquidez de mi cuenta bancaria —más bien lo contrario—, pero la formación, madurez y sabiduría adquiridas a través de este trabajo no tienen precio —son la mejor inversión.

Con esta reflexión sobre el papel beneficioso que la música, en general —y la educación musical, en particular— puede ejercer sobre las personas a través de su contacto con ella, independientemente de cual haya sido el motivo o el camino que les haya conducido hacia la música, quiero dar por finalizado mi discurso, dándoles las gracias por su atención.

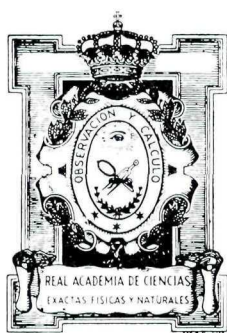
4. Epílogo

En la versión leída de este discurso, cerca ya de su final, tras haber comentado muy de pasada la relación que existe entre la música y la estadística, y con la finalidad de aligerar los aspectos más serios de esa relación, se dio lectura a los datos de la tabla estadística que aparece a continuación (Tabla 2), dejando en suspenso la procedencia de estos datos, salvo el saber que se han obtenido de una composición musical, y proporcionando como única pista que del autor de la obra se conmemora en el año 2006 un aniversario. La primera columna de la tabla contiene los nombres de cinco países, mientras que en la segunda columna aparecen los valores de una cierta *variable estadística discreta* cuyo significado —que tampoco se desveló en la versión leída— aclaro a continuación.

Países	¿ ?
Italia	640
Alemania	231
Francia	100
Turquía	91
España	1003

Tabla 2. Tabla estadística

La génesis de la tabla —de la que se sigue el significado de la *variable estadística discreta*— es la siguiente: La colaboración entre el poeta y libretista Lorenzo Da Ponte y el compositor Wolfgang Amadeus Mozart produjo, en el breve espacio



de poco más de tres años, tres grandes óperas. Los datos de la tabla están tomados del libreto de la segunda ópera, *Il dissoluto punito, ossia Il Don Giovanni*, concretamente de la famosa *aria del catálogo: Madamina, il catalogo e questo*, de la quinta escena del primer acto, que canta Leporello —el criado o escudero de Don Juan— a Doña Elvira como consuelo por los muchos engaños de éste. El aria enumera, en una cínica estadística que aviva la indignación de Doña Elvira, las conquistas de Don Juan en los cinco países que aparecen en la tabla; e, incluso, categoriza algunas de éstas por su condición social: aldeanas, criadas y de la nobleza; su edad: jóvenes y viejas; su tamaño: gruesas y delgadas, altas y bajas, y por el color de su pelo: rubias, morenas y pálidas, aunque éstos datos no están cuantificados en el libreto.

Apéndice: Aria del catálogo de *Don Giovanni* (W. A. Mozart)

ARIA

LEPORELLO

Madamina, il catalogo e questo
Delle belle che amò il padron mio:
Un catalogo egli è che ho fatt'io;
Osservate, leggete con me.
In Italia seicentocuaranta,
In Almagna duecentotretuna,
Cento in Francia, in Turchia novantuna,
Ma in Ispagna son già mille e tre.
V'han fra queste contadine,
Cameriere, cittadine,
V'han contesse, baronesse,
Marchesine, principesse.
E v'han donne d'ogni grado,
D'ogni forma, d'ogni età.
Nella bionda egli ha l'usanza
Di lodar la gentilezza,
Nella bruna la costanza,
Nella bianca la dolcezza.
Vuol d'inverno la grassotta,
Vuol d'estate la magrotta;
È la grande maestosa,
La piccina e ognor vezzosa.
Delle vecchie fa conquista
Pel piacer di porle in lista;
Sua passion predominante
È la giovin principiante.
Non si picca se sia ricca,
Se sia brutta, se sia bella;
Purché porti la gonnella,
Voi sapete quel che fa.

ARIA

LEPORELLO

Joven dama, he aquí la relación
De las bellas que mi señor ha amado:
Un catálogo hecho por mi;
Observad, leed conmigo.
En Italia seiscientas cuarenta;
En Alemania doscientas treinta y una.
Cien en Francia, en Turquía, noventa y una.
Mas en España son ya mil tres.
Hay entre ellas aldeanas,
Criadas y mujeres de la ciudad,
Hay también condesas y baronesas,
Marquesitas y princesas.
Son mujeres de todos los estados,
De todas clases y de toda edad.
Si son rubias suele
Alabar la gentileza
Si son morenas, la constancia;
Si son pálidas, la dulzura.
En invierno le agradan las gruesas
Y en verano prefiere las delgadas.
La alta le resulta majestuosa
Y la pequeña es siempre deliciosa.
Sólo conquista a las mayores
Para ampliar la relación;
Pero su mas fuerte pasión
Es la jovencita que empieza a vivir.
Le da lo mismo que sea rica,
Que sea fea, o hermosa;
En tanto que lleve faldas,
Ya sabéis lo que hace.

FRANCISCO JAVIER GIRÓN GONZÁLEZ-TORRE
Académico Numerario de la Real Academia de Ciencias

