REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DISCURSO

LEÍDO EN EL ACTO DE SU RECEPCIÓN

POR EL

EXCMO. SR. D. FRANCISCO NAVARRO BORRÁS

Y

CONTESTACION

DEL

EXCMO. SR. D. JOSE MARIA TORROJA

EL DÍA 3 DE AGOSTO DE 1939 EN EL PALACIO
DE SAN TELMO, DE LA CIUDAD DE SAN SEBASTIAN

DOMICILIO DE LA CORPORACIÓN:
VALVERDE, 22, MADRID
Teléfono 12529
1942

DISCURSO

DEL

EXCMO. SR. D. FRANCISCO NAVARRO BORRÁS

TEMA:

ESTUDIO DE ALGUNOS TIPOS DE ECUACIONES
INTEGRALES SINGULARES

SEÑORES ACADÉMICOS; SEÑORAS Y SEÑORES:

HAY épocas de calma, de equilibrio o de somnolencia, que invitan a la pereza, al juicio superficial que aprecia las cosas por sus cualidades externas y busca en ellas brillo y reflejos, más que contenido, estructura y funciones. Desligada cada posición social de los vínculos que la solidarizan y de las tareas que la justifican, aparecen los cargos como frívolo resplandor de la exhibición más que como cauce de trabajo interior. Se ve el honor o el provecho que el cargo da, no las energías que exige.

Para gentes superficiales, las Academias tenían el carácter estático, brillante y estéril de una culminación sin exigencias, de una aristocracia sin funciones; tenían el prestigio heredado de una tradición, el aliciente de un título de sabiduría, la intrascendencia de un ornato nacional. Pero junto a este aspecto, apreciable por observadores muy externos, existe trabajo efectivo y callado, cultivo de la ciencia, de la literatura, del arte; servicio, en suma, de la cultura. Cualquiera que fuese el juicio que de nuestras Academias se tuviese, lo cierto es que una revolución viva, digna de alcanzar la dirección de un pueblo, si destruye, es porque rebasa, supera, endereza, enciende. La revolución anarco-comunista, por decreto de 15 de septiembre de 1936, supo disolver las Academias, pero no pudo plasmarlas en el Instituto Nacional con que proyectaba sustituirlas. Por el contrario, el Movimiento Nacional, vivo, acaudillado por Franco, convocó las Academias, las realzó, restaurando sus títulos de "Reales", las articuló y les encomendó la alta dirección de la vida científica nacional. Y al ser llamado en tal ocasión a formar parte de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, sólo pude ver en el honor de mi designación una invitación a permanecer al servicio de España desde las trincheras de la actividad intelectual. Algo que no podía rechazar, porque tenía la carga de un deber, ni podía aceptar sin el temor que brota de aquel sentimiento de responsabilidad que es, como ha dicho un pensador español, remordimiento anticipado de nuestros yerros futuros.

Y siento mucho más el peso de tal responsabilidad en este caso porque vengo a suceder a un coloso de la ciencia española, a D. Leonardo Torres Quevedo.

Bastaría una simple mención de las obras de ingeniería por él realizadas, fuera y dentro de nuestro país, que son a perpetuidad monumentos a su genio, para cumplir con la tradición que exige en estas solemnidades el homenaje a un ilustre antecesor.

Pero la relevante personalidad del sabio pide algo más que una exposición objetiva de sus méritos. Su vida, llena de enseñanzas, merece ser destacada, y esto, mejor que yo, que no tuve la dicha de tratarle, lo hará la persona que por esta Corporación ha sido designada para contestarme, que ha convivido treinta años con el maestro.

Yo me limitaré a pedir a Dios que con el tiempo avive mis modestas luces para hacerme tan digno de esta medalla que hoy recibo como lo fué el Excmo. Sr. D. Leonardo Torres Quevedo.

¡Descanse en paz!

* * *

Según Ernst Mach (*), el objeto primordial de la Ciencia es lograr una economía del pensamiento en el sentido de que a esfuerzos intelectuales análogos correspondan con sus progresos resultados cada vez más amplios.

La invención del cálculo infinitesimal en el siglo XVII fué un paso de gigante en el progreso de la Matemática. Se realizó con él de una manera notable esta misión de economía.

Antes de que el padre jesuíta Buenaventura Cavalieri, profesor en un gimnasio de Bolonia, publicase en 1635 su *Geometría de los indivisibles,* las Matemáticas carecían de la unidad característica de las grandes creaciones; cada problema, por trivial que fuese, requería sus propios métodos, a veces sumamente artificiosos, y las distintas ramas entonces conocidas, Aritmética, Geometría, Algebra, con pocas conexiones entre sí, eran campos cerrados donde sólo podían moverse y ejecutar sus proezas los virtuosos de la demostración.

Pero se crea entonces el Análisis infinitesimal, surgiendo con él nuevas operaciones y combinaciones de símbolos o perfeccionando la forma de las ya conocidas, y, sobre todo, con la introducción de los conceptos de función, derivada e integral, por los padres de nuestro cálculo, Fermat, Leibniz, Newton, así como con el descubrimiento de la Geometría Analítica por Renato Descartes, comienza una época en que del uso sistemático de las matemáticas resulta un método que dispensa de todos los conocimientos matemáticos anteriores, por-

(*) *Die Mechanik und ihre historische und kritische Entwicklung.*

que el nuevo instrumento realizando esa misión de economía del pensamiento no tan sólo suplanta los singulares procedimientos antiguos, sino que engendra otros de una potencia y universalidad tales, que, amplificando los resultados, llegan a revolucionar con su influencia los campos de toda otra ciencia que tenga alguna relación con el espacio, el tiempo, la materia o la energía.

Cultivada luego esta disciplina por los matemáticos del siglo XVIII, especialmente por Jean Le-Rond D'Alembert, las dos generaciones de los Bernouilli y, sobre todo, por el distinguido discípulo y sucesor de uno de éstos, Leonardo Euler, que reunió sus materias en un cuerpo de doctrina, codificó los métodos de sus predecesores, unificó la notación preparando la tarea particularmente a Lagrange y al barón de Cauchy, los cuales, extendiendo las investigaciones de los matemáticos del siglo XVIII, cuidaron también del rigor científico, de la depuración de los métodos, fijación de principios, y nos legaron el Análisis matemático, ya en el estado con que modernamente lo conocemos.

Pero si con Agustín Luis de Cauchy aparece el Cálculo infinitesimal con todo el esplendor que perdura a través del siglo pasado, no es menos cierto que este matemático introduce la crítica y con ella se dibujan las variantes de la decadencia en la doctrina.

La profusión de métodos particulares, ramificaciones y trabajos difundidos en miles y miles de monografías, que se amontonan ya desde el final del siglo pasado, impiden seguir la marcha de los descubrimientos matemáticos aun a aquellas personas que dedican a esto toda su actividad.

Ello hace presentir que nos hallamos respecto a la Matemática del porvenir en un estado parecido al que se encontraban en el siglo XVII los matemáticos anteriores al Cálculo infinitesimal.

Por una parte, esta necesidad de sintetizar que exige la misión de economía de la Ciencia, y por otra la precisión de dominar en poco tiempo los métodos matemáticos por físicos, técnicos e investigadores de otras ciencias, están pidiendo la creación de una disciplina nueva que, unificando y sintetizando todas las teorías de las diversas ramas actuales del Análisis matemático, originen nuevos métodos de los cuales los que hoy manejamos resulten ser casos particulares.

Y acontece que esta unificación de métodos se está realizando, al parecer, por una creación de nuestro tiempo: el Cálculo funcional.

La teoría de las ecuaciones integrales es un capítulo del Cálculo funcional, que surge accidentalmente en el siglo pasado con la resolución de algunos problemas de Física-Matemática y empieza a formar cuerpo de doctrina a fines de siglo y en los primeros años del actual con los notables trabajos de Fredholm, Poincaré, Volterra e Hilbert, entre otros.

¿Quién, entre los aficionados a estudios matemáticos, no recuerda el laboriosísimo método de Neumann-Swartz, clásico en nuestros cursos de Ecuaciones diferenciales para la resolución del famoso problema de contorno de Dirichlet?

Pues bien, el figurar hoy este método en nuestros programas no tendría más razón que el de una tradición discutible, porque utilizando los recursos de la teoría de las ecuaciones integrales se resuelven sistemáticamente con una sencillez y brevedad maravillosas todos los que de su tipo puedan presentarse. Los problemas de contorno de la Física-Matemática aparecen como aplicaciones particulares de este nuevo instrumento, a medida que, como sobre todo en esta última década, investigadores tan sagaces como Hammerstein (correspondiente de nuestra Academia), Lichstenstein, Inglisch, Carleman, etc., van profundizando en la teoría no lineal, su campo de influencia se va extendiendo.

Y entre los trabajos de estos investigadores, que han constituído la cantera de donde hemos extraído el tema de nuestro discurso, permítasenos señalar la teoría de Carleman (*), que, a nuestro juicio, ha superado los resultados de Volterra (**), Fredholm (***), Hilbert (****), Schmidt (*****).

Esta teoría representa, hoy por hoy, el punto culminante del estudio de las ecuaciones integrales, sobre todo por las fecundas aplicaciones logradas por su autor a los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y a la ecuación de Schrödinger, de las cuales no es preciso subrayar aquí su trascendencia.

Las investigaciones de Carleman permiten la resolución de ecuaciones integrales aun en el caso de que siendo el núcleo de cuadrado integrable no se cumpla esta condición en un conjunto de puntos que pueden incluso admitir uno de acumulación, o bien que no se cumpla la condición de Hilbert, de ser

$$\int_a^b \int_a^b \mathrm{K}(x, y)\, \varphi(x)\, \varphi(y)\, d\varphi\, dy \leq k^2 \int_a^b \varphi^2(x)\, d\varphi$$

siendo k independiente de $\varphi(x)$.

Y aun considera casos menos restrictivos cuyo estudio,

(*) *Sur les équations intégrales singulières* (Upsala, 1923).

"La th. des eq. intégrales singuliéres" *(Ann. de l'Institut Poincaré,* t. I).

"Application de la th. des eq. intégrales lineares aux siptèmes d'eq. differentieles non linèares" *(Acta Math.,* t. 59, pág. 63).

Carleman: "Sur la th. mathématique de l'eq. de Schrödinger" *(Arkiv für Mathematik,* t. 24, 1934).

(**) Véase la obra de Volterra-Pérès: *Th. général des fonctionnelles,* París, 1936.

(***) "Sur une classe d'équations fonctionnelles" *(Acta Math.,* t. 27).

(****) *Grundzüge einer allgemeine Th. der Integralgleichungen* (1912).

(*****) "Zur théorie der linearen und nicht-linearen Integralgleichungen" *(Math. Ann.,* t. 63, 64 y 65).

no terminado todavía, puede ser campo para futuros trabajos de investigación.

Asimismo, Trjitznsky (*) continúa los trabajos de Carleman al considerar núcleos que pueden obtenerse como límites de los del tipo de Carleman, que por aquél son llamados núcleos de tipo cero, y, análogamente a lo que se hace con las clases de Baire, define núcleos de tipos 1, 2, ... *n*, ... y transfinitos, para los cuales extiende la teoría de Carleman.

En fin, no es nuestro propósito el dar a conocer el estado actual de esta teoría, sino que, más modestamente, nos ocupamos en el presente trabajo de tres casos singulares de la teoría lineal.

Estudio de tres ecuaciones integrales, que siendo por su aspecto formal del tipo de Fredholm,

$$\varphi(x) + \lambda \int_a^b K(x, z)\, \varphi(z)\, dz + f(z) = 0$$

el núcleo, en vez de cumplir las condiciones de regularidad que se exigen para poder aplicar, ya sea el procedimiento de la serie Neumann, ya el de los determinantes infinitos de Fredholm o el método de Erhardt Schmidt, no las satisface, sino que, poseyendo un punto singular dentro o en los extremos del campo de integración, excluye la posibilidad de la aplicación sistemática de los mencionados métodos, y la ecuación se denomina entonces *ecuación integral singular*, comprendiéndose también bajo esta denominación aquellas ecuaciones integrales en que uno o los dos límites de la integral son impropios.

En realidad, ambos casos no son esencialmente distintos y a menudo es sencillo referir uno de ellos al otro.

(*) "General theory of singular integral equations with real kernels" *(Transactions of the American Mathematical Society*, t. 46).

Así, por ejemplo, si $G(x, z)$ representa una función regular en el intervalo (0,1) de sus variables, el núcleo

$$K(x, z) = \frac{G(x, z)}{|x - z|^{\alpha}} \quad \text{para } \alpha \geq 1$$

es singular (*).

Pues bien, con el cambio de variable

$$t = \frac{z}{1 - z}$$

se hace corresponder al intervalo $0 \leqslant z \leqslant 1$ de integración para z, el $0 \leqslant t \leqslant \infty$ de la nueva variable t.

Y lo mismo acontece con otros cambios de variable: el $t = -\log z$, por ejemplo.

Como introducción a nuestro trabajo, vamos a estudiar una ecuación singular que surge de una manera natural al aplicar el famoso teorema de la integral de Fourier (**) en la cual ocurre que a un valor propio corresponden infinitas funciones propias.

Si $f(x)$ es una función definida en todo el campo real, de modo que exista la integral impropia,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$$

se demuestra entonces que existen también las integrales

(*) Si es $\alpha = \frac{1}{2}$, la singularidad es evitable, puesto que en este caso el núcleo sería de cuadrado integrable. Lo mismo ocurriría en el caso de ser $\alpha < 1$, porque entonces al menos los núcleos de iteración serían de cuadrado integrable.

(**) Véase a este propósito el hermoso trabajo de recopilación que con el título de "Integrales de Fourier y de Stieltjes" constituyó la disertación inaugural del curso de 1930-31, leída por nuestro compañero Sr. Terradas en la Universidad de Madrid.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos x \, dx \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \operatorname{sen} x \, dx$$

y las

$$g(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos (x z) \, dx \, , \; h(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \operatorname{sen} (xz) \, dx \quad [1]$$

Pues bien, el teorema de la integral de Fourier dice que si la función $f(x)$ es de variación acotada (Jordán) en todo intervalo finito, puede a su vez $f(x)$ expresarse por medio de las funciones $g(z)$ y $h(z)$ según la igualdad (*).

$$f(u) = \int_{0}^{\infty} [g(z) \cos (uz) + h(z) \operatorname{sen} (uz)] \, dz \quad [2]$$

y si en ésta sustituímos las funciones $g(z)$ y $h(z)$ por las expresiones [1] de su definición, se obtiene la conocida fórmula de la integral de Fourier, que es

$$f(u) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos (u - x) \, z \, dx \, dz \quad [2']$$

fórmula que suele también expresarse de la siguiente manera. (Representando por R $\{\quad\}$ la parte real de la expresión escrita dentro del corchete.)

$$\begin{aligned} f(u) &= \mathrm{R} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, e^{iz(x-u)} \, dx \, dz \right\} = \\ &= \mathrm{R} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, e^{iz(x-u)} \, dx \, dz \right\} \end{aligned} \quad [3]$$

(*) Véase la demostración, por ejemplo, en la obra de Frank-Mises: *Die Diferentialund Integral gleichungen der Mechanik und Physik.*

o bien, si como también suele hacerse, se introduce la función

$$F(z) = g\,z + i\,h\,z = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{ixz}\,dx$$

podrá escribirse

$$f(u) = R\left\{\int_{0}^{\infty} F(z)\,e^{-iuz}\,dz\right\} \qquad [4]$$

Y observando que si las funciones $g(z)$ y $h(z)$, definidas por las fórmulas [1], son una función *par* la primera, e *impar* la segunda, ocurrirá que $f(u)$ no tan sólo coincidirá con la parte real de las [3] y [4], sino también con las expresiones íntegras encerradas en los corchetes. En efecto, en el desarrollo

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} F(z)\,e^{-iuz}\,dz = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} [g(z)\cos(uz) + h(z)\,\text{sen}\,(uz)]\,dz +$$
$$+\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} [h(z)\cos(uz) - g(z)\,\text{sen}\,(uz)]\,dz$$

desaparecen los términos imaginarios, por ser $g(z)$ sen (uz) una función impar y tenerse

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(z)\,\text{sen}\,(uz)\,dz = 0$$

lo mismo que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(z)\cos(uz)\,dz = 0$$

Por el contrario, la función

$$g(z)\cos(uz) + h(z)\,\text{sen}\,(uz)$$

es una función par y, por tanto, será

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(z)\, e^{-iuz}\, dz = 2\int_0^{\infty} [g(z)\cos(uz) + \\ + h(z)\,\mathrm{sen}\,(uz)]\, dz = 2f(u) \qquad [5]$$

como queríamos probar.

Establecido esto, vamos a hacer aplicación a una ecuación integral singular que formaremos empezando por suponer que $f(x)$ es una función impar.

Entonces de las fórmulas [1] se deduce

$$g(z) = 0 \quad , \quad h(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{sen}\,(xz)\, dx$$

y de éstas y la [2]

$$f(u) = \int_0^{\infty} h(z)\,\mathrm{sen}\,(uz)\, dz$$

o bien, introduciendo una función $k(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, h(z)$

$$f(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} k(z)\,\mathrm{sen}\,(uz)\, dz \qquad [6]$$

(Si hubiéramos hecho la hipótesis de la paridad de $f(x)$ se operaría con el coseno de la misma manera.)

Ahora bien, como de la definición de $k(z)$ resulta que

$$k(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{sen}\,(xz)\, dx \qquad [7]$$

nos encontramos que en presencia de dos funciones $f(u)$ y $k(z)$ ligadas por las expresiones [6] y [7], que son del tipo

$$f(u) = \lambda \int_a^b K(u, z)\, k(z)\, dz \quad , \quad k(z) = \lambda \int_a^b K(x, z) f(x)\, dx \qquad [8]$$

es decir, que f y k son dos funciones adjuntas respecto del núcleo K (u, z) y entonces $f(u)$ será una solución de la ecuación integral homogénea de segunda especie

$$\begin{aligned} f(u) &= \lambda^2 \int_a^b \int_a^b K(u, z)\, K(x, z) f(x)\, dx\, dz = \\ &= \lambda^2 \int_a^b K_2(u, x) f(x)\, dx \end{aligned} \qquad [9]$$

Ahora bien, en nuestro caso, para K (u, z) = sen $u\,z$ se observa que siendo infinitos los límites superiores de las integrales, los núcleos iterados K_n (u, x) a partir del segundo no tienen existencia, pues la integral impropia

$$K_2(u, x) = \int_0^\infty \text{sen}\,(u\,z)\, \text{sen}\,(x\,z)\, dz$$

no existe.

Se trata, pues, de un caso singular en el cual acontece, como vamos a ver, que al valor propio $\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ le corresponde una pléyade infinita de funciones propias (*).

Para ello, formemos la función $\varphi(u) = f(u) + k(u)$ y sumemos las [6] y [7] escritas de la siguiente manera:

$$f(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty k(z)\, \text{sen}\,(u\,z)\, dz$$

(*) Véase la obra de E. C. Tichtmarsh: *Introduction to Theory of Fourier Integrals.*

$$k(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(z) \operatorname{sen}(u\,z)\, dz$$

se tendrá con ello

$$\varphi(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \varphi(z) \operatorname{sen}(u\,z)\, dz$$

Esta ecuación integral permite ver fácilmente cómo al valor propio $\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ le corresponden infinitas funciones propias. Para formarlas se procede como sigue:

Se da una expresión para $k(z)$; sea, por ejemplo:

$$k\,z = e^{-az}$$

entonces, según [6], se encuentra para $f(u)$

$$f(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-az} \operatorname{sen}(u\,z)\, dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{u}{a^2 + u^2}$$

Así, pues, al valor propio $\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ le corresponden todas las funciones propias

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{x}{a^2 + x^2} + e^{-ax}$$

que resultan de dar al parámetro a valores arbitrarios.

Si $f(x)$ fuera una función par, se operaría de igual manera con el núcleo cos $(u z)$. Tal ocurriría, por ejemplo, tomando como $f(x) = e^{-ax^2}$, con la condición de ser $a > 0$.

Ecuación singular de Hilbert (*).

Pasemos a estudiar la ecuación integral

$$f(x) = \int_0^1 \operatorname{cotg} \pi (x - z) g(z) \, dz$$

en la que $g(z)$ es, por hipótesis, una función integrable en el sentido de Riemann. El núcleo cotg $\pi (x - z)$ es una función de período 1, que posee el punto singular $x = z$ y, por consiguiente, la integral debe ser definida como el límite siguiente:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_0^{x-\varepsilon} \operatorname{cotg} \pi (x - z) g(z) \, dz + \int_{x+\varepsilon}^1 \operatorname{cotg} \pi (x - z) g(z) \, dz \right\}$$

Por otra parte, no necesitando ser definida la función $g(z)$ más que en el intervalo (0,1), podrá también suponerse que lo mismo que el núcleo admite el período 1, es decir, que

$$g(z + 1) = g(z)$$

Con ello podrá escribirse

$$\int_0^1 \operatorname{cotg} \pi (x - z) g(z) \, dz = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} \operatorname{cotg} \pi (x - z) g(z) \, dz$$

(*) Kellog: *Matematische Annalen*, t. 58; Fritz Nöther: *Math. Annalen*, t. 82.

o bien, poniendo $u = x - z$

$$\int_0^1 \operatorname{cotg} \pi (x - z)\, g(z)\, dz = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \operatorname{cotg} \pi u\, g(x - u)\, du \quad (*)$$

Esta última integral es la expresión, cuando existe, del límite siguiente:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{-\frac{1}{2}}^{-\varepsilon} \operatorname{cotg} \pi u \,.\, g(x - u)\, du + \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \operatorname{cotg} \pi u \,.\, g(x - u)\, du \right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ -\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \operatorname{cotg} \pi u \,.\, g(x + u)\, du + \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \operatorname{cotg} \pi u \,.\, g(x - u)\, du \right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \operatorname{cotg} \pi u \,[g(x - u) - (x + u)]\, du \right\}$$

límite que existe siempre que la función $g(u)$ se satisfaga a la condición

$$g(x - u) - g(x + u) < M u^{\alpha}$$

siendo M una constante y α un número positivo menor que la unidad; puesto que entonces, poniendo la expresión en la forma

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} u^{\alpha} \,.\, \operatorname{cotg} \pi u \,.\, \frac{g(x - u) - g(x + u)}{u^{\alpha}}\, du$$

el último factor del integrando está acotado (según la hipó-

(*) Para $g(z) \equiv 1$ se obtiene $f(x) = 0$, puesto que $\operatorname{cotg} \pi u$ es una función impar.

tesis) y el primero u^α cotg π u tiende a cero con u (como se ve por la simple aplicación de la regla de L'Hôpital).

Establecida, pues, así una condición suficiente para la existencia de la integral que determina la ecuación, ensayemos la aplicación a ésta de los métodos corrientes de la teoría de las ecuaciones integrales.

El procedimiento de la serie de Neumann no nos sirve en este caso singular, porque ya, al formar el segundo de los núcleos de iteración, nos encontramos con la integral

$$K_2(x, u) = \int_0^1 \operatorname{cotg} \pi (x - z) \operatorname{cotg} \pi (u - z)\, dz$$

que si bien existe y es fácil de culcular para $x \neq u$, no existe, en cambio, para $x = u$ y, por tanto, el núcleo $K_2(x, u)$ es discontinuo.

Veamos qué nos dice el método de Schmidt.

Puesto que las funciones sen $2n\pi u$ (n entero) poseen, como el núcleo, un período 1 y forman un sistema cerrado (y, por tanto, completo) para desarrollo de toda función impar, desarrollemos según ellas nuestra función cotg πu.

Tomaremos como sistema fundamental para el desarrollo de Fourier el de las funciones $\sqrt{2}$ sen $2n\pi u$, puesto que la igualdad

$$\int_0^1 (\sqrt{2} \operatorname{sen} 2n\pi u)^2\, du = 1$$

nos muestra que este sistema está ya normalizado (*).

(*) Véase Courant-Hilbert: *Methoden der Math. Physik*, t. I.

Así, pues, los coeficientes del desarrollo serán (*):

$$a_u = \sqrt{2}\int_0^1 \operatorname{cotg} \pi u \operatorname{sen} 2n\pi u \, du =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^1 \frac{\cos \pi u \operatorname{sen} 2n\pi u + \operatorname{sen} \pi u \cos 2n\pi u}{\operatorname{sen} \pi n} du =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\pi u}{\operatorname{sen} \pi u} du =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^1 (1 + 2\cos 2\pi u + 4\cos 4\pi u + \ldots + 2n \cos 2n\pi u)\, du = \sqrt{2}$$

Todos los coeficientes a_n del desarrollo de cotg πu en serie de Fourier, de sistema fundamental $\sqrt{2}$ sen $2n\pi u$ valen, pues, $\sqrt{2}$.

No obstante, este desarrollo no nos sirve para resolver el problema, porque no siendo convergente la serie así obtenida no podemos igualarla al núcleo. Convendremos únicamente en expresar su equivalencia en la forma siguiente:

$$\operatorname{cotg} \pi u \backsim 2\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} 2n\pi u \qquad [3]$$

Desarrollemos también $f(x)$ en serie de Fourier

$$f(x) \backsim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \sqrt{2} \operatorname{sen} 2n\pi x + b_n \sqrt{2} \cos 2n\pi x\right) \qquad [3']$$

con $\quad a_0 = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 dx \int_0^1 \operatorname{cotg} \pi (x - z)\, g(z)\, dz$

(*) Puesto que

$$\int_0^1 \cos 2n\pi u \, du = -\frac{1}{2n\pi}\Big[\operatorname{sen} 2n\pi u\Big]_0^1 = 0$$

y admitiendo que sea posible la alteración del orden en las integrales, resulta

$$a_0 = \int_0^1 g(z)\, dz \int_0^1 \operatorname{cotg} \pi (x - z)\, dx = 0$$

Así, pues, con esta hipótesis el valor medio a_0 de $f(x)$ es nulo.

Admitiendo la permutabilidad en el orden de integración se obtienen análogamente los coeficientes a_n y b_n

$$a_n = \sqrt{2} \int_0^1 f(x) \operatorname{sen} 2n\pi x\, dx = \ldots\ldots = \sqrt{2} \int_0^1 g(z) \cos 2n\pi z\, dz \quad [4]$$

$$b_n = \sqrt{2} \int_0^1 f(x) \cos 2n\pi x\, dx = \ldots\ldots = -\sqrt{2} \int_0^1 g(z) \operatorname{sen} 2n\pi z\, dz \quad [5]$$

Las igualdades [4] y [5] muestran que el desarrollo de Fourier de $g(x)$ sería de la forma

$$g(x) \sim A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-b \sqrt{2} \operatorname{sen} 2n\pi x + a_n \sqrt{2} \cos 2n\pi x) \qquad [3'']$$

quedando el término independiente A_0 sin determinar.

Pero, puesto que los coeficientes a_n y b_n no se alteran con la adición de una constante a $g(x)$, conviene determinar ésta de tal modo que anule a la integral

$$\int_0^1 g(x)\, dx$$

con lo cual desaparece el término independiente A_0 de [3″].

Es de observar también que nada se ha dicho respecto a la convergencia de los desarrollos [3′] y [3″], por esto se han escrito estas expresiones con el simple signo de equivalencia. Como es sabido, si convergiera la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

serían también convergentes los desarrollos [3'] y [3''] y las equivalencias serían entonces verdaderas igualdades, que nos expresarían no tan sólo la respectiva existencia de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, sino también su forma; e inversamente podría probarse que si las [3] y [3'] fueran igualdades, las funciones $f(x)$ y $g(x)$ serían de cuadrado integrable.

También podemos preguntarnos igualmente si, puesto que $f(x)$ y $g(x)$ tienen respecto a sen $2n\pi x$ una cierta reciprocidad (compárese la forma de los desarrollos [3] y [3'']) y puesto que el núcleo cotg $\pi(x-z)$ admite un desarrollo en serie de senos, debe existir una equivalencia entre las expresiones

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 \operatorname{cotg} \pi (x - z)\, g(z)\, dz \\ \text{y} \quad g(z) &= \int_0^1 - \operatorname{cotg} \pi (z - u) f(u)\, du \end{aligned} \qquad [6]$$

es decir, que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones conjugadas, o, lo que es lo mismo, que $f(x)$ satisface a la ecuación integral

$$f(x) = -\int_0^1 \int_0^1 \operatorname{cotg} \pi (x - z) \operatorname{cotg} \pi (z - u) f(u)\, du\, dz \qquad [7]$$

Y se prueba (*) que esto sucede cuando $f(x)$ y $g(x)$ son de cuadrado integrable.

(*) Hellinger Toepliz, t. H. Artículo 10 de la Enciclopedia Teubner. "Dissertation von Plessner-Giessen" (1923).

Insistamos todavía sobre la existencia de $f(x)$ y sobre la posibilidad de permutar el orden de las integraciones.

Introduzcamos la función compleja

$$k(x) = g(x) + i f(x)$$

de modo que, teniendo en cuenta los desarrollos de $g(x)$ y $f(x)$, se podrá escribir:

$$h(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}\,(a_n + i\,b_n)\,e^{2\pi i x}$$

Y ahora con esta función compleja se pueden formar infinidad de soluciones de la ecuación integral homogénea de núcleo cotg $\pi\,(x - z)$, pues sumando las [6] escritas en esta forma:

$$i f(x) = i \int_0^1 \operatorname{cotg} \pi\,(x - z)\,g(z)\,dz$$

$$g(x) = \int_0^1 \operatorname{cotg} \pi\,(x - z)\,f(z)\,dz$$

resulta

$$h(x) = i \int_0^1 \operatorname{cotg} \pi\,(x - z)\,h(z)\,dz \qquad [8]$$

Así, pues, al único valor propio i del núcleo cotg $\pi\,(x - z)$ (también podría ser considerado el $-i$ como valor propio) corresponden como funciones propias las funciones complejas $h(x)$ formadas, como se ha dicho, a partir de las $f(x)$ y $g(x)$, teniendo en cuenta que la elección de una de ellas es en cierto modo arbitraria y la otra queda determinada por la primera.

Decimos que sólo es en cierta manera arbitraria porque según se ha visto con la [2], la existencia de $f(x)$ queda supeditada a la condición de ser

$$\Phi(x, u) = \frac{g(x-u) - g(x+u)}{u^{\alpha}} < M \quad \text{para} \quad 0 < \alpha \leq 1$$

y análogamente de la reciprocidad entre $f(x)$ y $g(x)$ se deduciría que, dada $f(x)$, la condición para la existencia de $g(x)$ está expresada por la desigualdad

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{(x - x_1)^{\alpha}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{cotg} \pi u \,.\, u^{\alpha} \, \frac{\Phi(x_1, u) - \Phi(x, u)}{(x - x)^{\alpha}} \, du < M$$

la cual implica la continuidad de $\Phi(x, u)$.

Se concluye de aquí que cuando $\Phi(x, u)$ sea una función regular existirán las $f(x)$ y $g(x)$, y a base de éstas se podrá construir toda función $h(x)$ que resuelva la ecuación integral [8].

En realidad $h(x)$ no es otra cosa que el valor de contorno de una función analítica $H(r, x)$ tal, que

$$H(r, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}\left(a_n + i b_n\right) r^u e^{2\pi n i x} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(r e^{2\pi n i x}\right)^u =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} C_n z^u \quad \text{con} \quad z = r e^{2\pi n i x}$$

siendo, por tanto, $|z| = r$, $\arg z = 2\pi x$. Serie convergente para $r < 1$ y que representa por esto una función analítica en el círculo de radio $r = 1$ sobre cuyo contorno coincide con la función $h(x)$ (*).

(*) La demostración puede también llevarse a cabo con los métodos de la teoría de funciones.

En este estudio se ha hecho la hipótesis de que el orden de las integraciones era permutable, pero ¿lo es realmente?

Las condiciones que deben imponerse para que el cambio del orden en las integraciones que hacen posibles las fórmulas [4] y [5] sea legítimo han sido precisadas por el profesor León Lichtenstein, de la Universidad de Leipzig, quien ha demostrado que (*) si en una integral

$$\int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} f.(x_1 y)\, dx$$

la integración respecto a x está tomada en el sentido de Riemann, y la que se efectúa sobre y en el de Lebesgue, el resultado de la operación puede depender del orden en que las integraciones se lleven a cabo. Y prueba también Lichtenstein que la permutabilidad es válida cuando las integrales consideradas son propias.

Para integrales impropias considera dicho matemático aquellas que son integrables en el sentido de La Vallée Poussin y encuentra que la alteración del orden es legítima cuando la integral que podríamos llamar interior se refiere al sentido de La Vallée Poussin y la exterior al de Lebesgue, ocurriendo que después del cambio de orden ambas integrales quedan en el sentido de Lebesgue.

Nuestro caso corresponde a éste siempre que sea integrable a la vez en el sentido de La Vallée Poussin y en el de Lebesgue, con lo cual quedan justificados los reparos de carácter crítico que habían surgido en el desarrollo del presente estudio.

(*) *Ueber die Integration eines bestimmten Integrales auf eines Parameter.* Göttingen Nachrichten, 1910.

Ecuación integral de Picard (*).

Ocupémonos ahora de un ejemplo propuesto por el matemático francés profesor Emilio Picard.

Tal es el de la ecuación integral completa con núcleo simétrico:

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\infty e^{-|x-z|} \varphi(z)\, dz + f(x) \qquad [1]$$

Si en ella hacemos las hipótesis de que o bien es $\varphi(x)$ acotada en el campo real positivo, o que crece de tal manera que la integral de la ecuación queda acotada en dicho campo, entonces la ecuación anterior podrá ser escrita en la forma siguiente:

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x e^{-x+z} \varphi(z)\, dz + \lambda \int_0^\infty e^{-z+x} \varphi(z)\, dz + f(x)$$

o sea

$$\varphi(x) = \lambda\, e^{-x} \int_0^x e^z \varphi(z)\, dz + \lambda\, e^x \int_x^\infty e^{-z} \varphi(z)\, dz + f(x)$$

Además, suponemos también que la función dada $f(x)$ es continua y al menos dos veces derivable, con lo cual, puesto que las integrales son continuas, debe serlo $\varphi(x)$, y sus derivadas primera y segunda tendrán la forma

$$\varphi'(x) = -\lambda\, e^{-x} \int_0^z e^z \varphi(z)\, dz + \lambda\, e^0 \varphi(x) + \lambda\, e^x \int_x^\infty e^{-z} \varphi(z)\, dz -$$
$$- \lambda\, e^0 \varphi(x) + f'(x)$$
$$\varphi''(x) = \varphi(x) - f(x) - 2\lambda\, \varphi(x) + f''(x)$$

(*) Véase Goursat: *Cours d'Analyse Mathematique*, t. III, págs. 438 y sucesivas. Id. Tichmarsh: *ob. cit.*, pág. 309.

de donde

$$\varphi''(x) - [1 - 2\lambda]\,\varphi(x) = f''(x) - f(x) \qquad [2]$$

resultando importante que nos permita reducir la ecuación integral [1] a una ecuación diferencial lineal de segundo orden.

Concretándonos al caso en que la ecuación [1] sea homogénea, es decir, al caso en que sea $f(x) = 0$, la [2] será

$$\varphi''(x) - (1 - 2\lambda)\,\varphi(x) = 0$$

y designando por μ^2 al coeficiente $1 - 2\lambda$ (cantidades que pueden ser complejas), su solución vendrá dada por

$$\varphi(x) = A\,e^{\mu x} + B\,e^{-\mu x} \quad \text{con} \quad \mu = \pm\sqrt{1 - 2\lambda}$$

Convendremos en asignarle el signo $+$ a aquel de los dos valores $\pm\sqrt{1-2\lambda}$ de μ cuya parte real sea positiva o nula; es decir, que será:

$$R(+\mu) \geq 0$$

Al sustituir el valor de φ dado por la [3] en la ecuación integral, deberá tenerse una identidad

$$A\,e^{\mu x} + B\,e^{-\mu x} = \lambda \left\{ \int_0^x e^{-x+z}\,(A\,e^{\mu z} + B\,e^{-\mu z})\,dz + \right. \qquad [4]$$
$$\left. + \int_x^\infty e^{x-z}\,(A\,e^{\mu z} + B\,e^{-\mu z})\,dz \right\}$$

Y puesto que las hipótesis hechas sobre $\varphi(x)$ dejan bien establecida la existencia de las dos grandes integrales precedentes, esto exige que al crecer z tiendan a cero las exponenciales

$$e^{(\mu - 1) z} \qquad e^{-(\mu + 1) z}$$

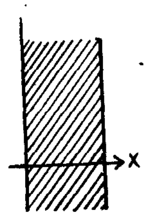
condición que se cumple evidentemente en la segunda, puesto que μ tiene una parte real no negativa. Así, pues, para que se cumpla también en la primera deberá tenerse que

$$R(+\mu) < 1.$$

De aquí resulta que son valores propios de la ecuación propuesta todos los de μ que satisfacen a las desiguales

$$0 \leq R(\mu) < 1$$

Existe, pues, un continuo de valores propios, que son todos los puntos de la región comprendida entre el eje y y su

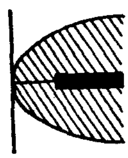


paralela trazada por el punto de abscisa 1 con exclusión de los puntos de esta recta.

Si mediante la transformación conforme

$$\mu^2 = 1 - 2\lambda$$

que enlaza las dos variables complejas λ y μ hacemos la representación del recinto de los valores propios μ en el plano complejo λ encontramos que al contorno $x = 0$ de aquél le corresponde en el plano λ, la porción de eje de las x comprendida entre el punto de abscisa $x = \frac{1}{2}$ y el de abscisa $x = +\infty$ y a la segunda recta de contorno $x = 1$ le corresponde una



parábola de eje $0x$ y vértice en el origen. El recinto rayado comprendido entre las transformadas de ambos contornos es el dominio de los valores propios λ de la ecuación propuesta.

Por otra parte, el cálculo de las integrales de la identidad [4] suministra la relación

$$B = -\frac{1-\mu}{1+\mu} A$$

de modo que las funciones propias deben ser de la forma

$$\varphi(x) = A\left[(1+\mu)\, e^{\mu x} - (1-\mu)\, e^{-\mu x}\right] \qquad (5)$$

En particular, si es nula la parte real de μ, es decir, si éste es de la forma $\mu = i\,\sigma$, el valor propio λ valdrá $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{\sigma^2}{2}$ y la correspondiente función propia

$$\varphi(x) = \operatorname{sen} \sigma x + \sigma \cos \sigma x$$

constituye la única solución acotada, pues en las [5] la parte real de $+\mu$ corresponde a términos exponenciales que siempre se hacen infinitos con x.

El estudio precedente se hubiera podido llevar a cabo transformando la ecuación dada en una ecuación con núcleo singular y campo de integración finito, por medio de un cambio de variables adecuado, como ya se ha indicado al principio, y así, por ejemplo, si las variables x, z se sustituyen por otras dos t y u, respectivamente, ligadas a las antiguas por las relaciones

$$x = -\log_e t \quad , \quad z = -\log_e u \quad , \quad dz = -\frac{du}{u}$$

poniendo

$$\varphi(x) = \varphi(-\log t) = y(t)$$

la ecuación dada (pero homogénea), se transformará en la

$$y(t) = \lambda \int_0^1 K(t, u)\, y(u)\, du$$

siendo

$$K(t, u) = \begin{cases} \dfrac{t}{u^2} & \text{para} \quad t \leq u \\ \dfrac{1}{t} & \text{»} \quad t \geq u \end{cases}$$

A primera vista el núcleo así transformado no es singular,

pues tiene la forma indicada en el adjunto esquema; pero examinándolo más detenidamente se encuentra que se hace infinito para $u = 0$, y además no es de cuadrado integrable (*).

Y digamos también dos palabras sobre la particularidad que ofrece la ecuación estudiada al hacer infinito el límite inferior de su integral

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-z|} \varphi(z)\, dz$$

A ella se aplican todas las consideraciones hechas para la de Picard, hasta llegar a hacer depender su solución de la ecuación diferencial

$$\varphi'' - \mu^2 \varphi = 0 \qquad \text{con} \qquad \mu^2 = 1 - 2\lambda;$$

pero a partir de este punto ya no observan ambas ninguna analogía. Así, la relación entre A y B que allí se encontraba, aquí no aparece, sino que de la resolución de las integrales en la identidad correspondiente resulta la relación conocida

$$2\lambda = 1 + \mu^2.$$

(*) Para el estudio de las ecuaciones integrales cuyos núcleos dependen de $z - x$, de las cuales los ejemplos expuestos son casos particulares, se recomiendan los trabajos siguientes:

Bôchner: *Sitzungs-Berichte der Preusische Akad, der Wissenschaft*, 1930.

Hopf: *Sitzungs-Berichte der Preusische Akad, der Wissenschaft*, 1931.

E. Schmidt: *Math. Annalen*, t. 70, 1911.

En estrecha relación con esta parte de la teoría se encuentra el estudio de la transformación de Laplace

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-xz} \varphi(z)\, dz$$

sobre la cual existe un abundante literatura que puede verse en la obra de Doetsch: *Theorie und Anwendung der Laplacesche Transformationen* (Berlín, 1937). El caso de la integral de Laplace-Stieltjes ha sido profusamente estudiado en varias memorias por Wilder (*Transactions of the Ann. Math. Society*, 1929, 1931, 1933). En su obra consigue Doetsch una fundamentación rigurosa del cálculo operacional de Heaviside, tan importante en la técnica.

Ocurre también que el único valor propio admisible que posee es el de $\mu = 0$, o sea el de $\lambda = \frac{1}{2}$ al cual corresponde como función propia la

$$\varphi(x) = A + B x$$

cualesquiera que sean A y B.

La imagen de uno y otro caso no puede ser, pues, más diferente, en contra de lo que a primera vista hubiérase podido creer de la analogía que presentan en la forma y de la multitud de consideraciones preliminares comunes que se hacen en ambos casos.

Veamos, finalmente, un ejemplo muy sencillo del campo de las funciones analíticas.

Supongamos que la función $f(z)$ sea analítica, regular en un dominio G. En virtud de la fórmula de Cauchy es

$$f(\zeta) = \frac{2\pi i}{1} \oint \frac{f(z)\,dz}{z - \zeta}$$

para todo punto ζ interior a su contorno L. Pero si ζ es un punto de L en el cual suponemos que existe tangente a este contorno, entonces es

$$\frac{1}{2} f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)\,dz}{z - \zeta}$$

tomando para la integral el valor principal de Cauchy.

Y, ciertamente, esta última igualdad es una ecuación integral singular cuyo núcleo es $\frac{1}{z - \zeta}$ y en ella corresponden al valor propio $\frac{1}{2\pi i}$ todas las funciones analíticas del dominio G.

Y voy a terminar, señores Académicos, porque ya he molestado bastante vuestra atención, pero antes quiero expresar la inmensa gratitud que os debo por haberme dispensado el alto honor de acogerme en vuestra docta Corporación, a pesar de mis escasos méritos. Sobre todo, al Excmo. Sr. D. Alfonso Peña Boeuf, quien en enero de 1938 me propuso para la vacante de que hoy tomo posesión, y al Excmo. Sr. D. José M.ª Torroja Miret, a cuyo impulso, actividad, inteligencia y celo tanto debe nuestra Academia. Y quisiera también en esta ocasión, tan significativa para mi vida, que no faltase mi homenaje, mi recuerdo cariñoso para aquel compañero vuestro, que fué el mejor de mis maestros, D. José M.ª Plans y Freyre. Si él viviese, sonreiría paternalmente ante mi turbación en este instante en que se inicia, con la mejor voluntad por parte mía, la más ferviente colaboración con vosotros en la obra del resurgimiento espiritual de nuestra Patria.

HE DICHO.

DISCURSO DE CONTESTACION

DE

D. JOSE MARIA TORROJA Y MIRET

SEÑORES ACADÉMICOS; SEÑORAS Y SEÑORES:

UNA vez más recibo del Presidente de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales el encargo, siempre honroso, de llevar la voz de la misma en un acto solemne de recepción. Y lo es hoy para mí de modo muy especial, por permitirme enlazar la memoria de D. Leonardo Torres Quevedo, mi maestro durante más de un cuarto de siglo, con la de D. Francisco Navarro Borrás, que viene a sustituirle y que fué, por una parte, discípulo de mi hermano Antonio en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Barcelona, y, por otra, profesor en la de Madrid de dos de mis hijos, uno de los cuales voló, hace tres años, a montar la guardia junto a su lucero, por Dios y por España.

* * *

Amablemente, y suponiendo que podría yo desempeñarla con mayor facilidad, mè ha cedido el recipiendario la misión, a la vez penosa y grata, de recordar ante vosotros la vida y los trabajos del que en la última recepción de la Academia era aún su Presidente de honor, muchos años antes su Presidente efectivo y durante treinta y cinco, uno de sus miembros más ilustres.

Plegue a Dios que yo pueda corresponder a estas dos confianzas, de la Presidencia de la Corporación y del nuevo académico, sin menoscabo de lo que la justicia y la amistad exige de mí al hablar hoy de las dos figuras que han de constituir el objeto, pasivo el uno y el otro activo, de la presente sesión.

Nació Torres Quevedo en Santa Cruz de Iguña (Santander) el día 28 de diciembre de 1852, siendo hijo del distinguido Ingeniero de Caminos D. Luis Torres Vildósola. A esta circunstancia se debió el que siguiera la misma carrera, pero sólo por corto tiempo hubo de prestar servicio en las Obras Públicas, porque desde su juventud sintió decidida vocación por la Mecánica Aplicada, por cuya senda había de alcanzar renombre universal y en la que laboró casi simultáneamente en tres distintas direcciones, igualmente afortunadas: La Mecánica propiamente dicha, ideando y construyendo el *transbordador funicular,* el *telekino* y el *dirigible semi-rígido;* las máquinas de calcular, de las que las más notables fueron la *máquina de resolver ecuaciones* y el *aritmómetro electro-mecánico,* y el *automatismo,* con varios proyectos, de los que puede considerarse representativo el *ajedrecista.*

La idea fundamental del transbordador, que, tras algunos ensayos previos en Portolín (1880-1890), realizó primero entre el monte Ulía y la peña del Aguila, en San Sebastián, con una luz de 280 metros, y más tarde en Canadá, salvando un espacio de 550 sobre un recodo del río, próximo a las grandiosas cataratas del Niágara, no puede ser más sencilla. Se reduce a suspender el transbordador de varios cables cuyas tensiones, gracias al contrapeso que cada uno lleva en un extremo, son independientes del peso de aquél, no pudiendo constituir peligro alguno la rotura de uno de ellos, ya que los restantes no ven por ello aumentado su trabajo.

En los primeros años del presente siglo, las personas que discurrían por las orillas del estanque grande de la Casa de Campo, de Madrid, pudieron observar atónitos cómo un pequeño bote, sin tripulante alguno, avanzaba en una u otra dirección, cambiaba de velocidad y se paraba, siguiendo dócilmente las órdenes que a su motor y a su timón enviaba desde la orilla un puesto de mando, que para ello utilizaba por vez primera las ondas hertzianas. Este aparato fué presentado por su autor a la Academia de Ciencias de París, en sesión de 3 de agosto de 1903, obteniendo un informe tan laudatorio que constituyó para él el *espaldarazo de la fama,* ese momento en que los españoles que le alcanzan ven trocada súbitamente la indiferencia de sus compatriotas por la admiración sin límites, que no es sino el reflejo de la que llega del otro lado de los Pirineos. Hay que hacer a nuestra Real Academia de Ciencias la justicia de recordar que más de tres años antes de la indicada fecha había reconocido el valer de nuestro llorado compañero, eligiéndole numerario suyo, cargo de que tomó solemne posesión, en acto análogo al de hoy, el 19 de mayo de 1901, leyendo un discurso sobre las *máquinas algébricas,* al que contestó con otro, sustancioso y galano, como suyo, el Secretario perpetuo D. Francisco de P. Arrillaga.

Un tercer problema técnico abordó con éxito nuestro ausente compañero: el de los globos dirigibles, que hasta entonces exigían necesariamente un armazón rígido, cuyo peso y fragilidad ofrecían por muchos motivos serios inconvenientes. Torres Quevedo sustituyó las vigas metálicas rígidas de los antiguos tipos por tres cables longitudinales que, convenientemente triangulados, lograban la rigidez de la envolvente del dirigible por la presión del gas que contiene, creando así el tipo Astra-Torres, del que los ejércitos inglés y francés utilizaron con éxito cierto número durante la guerra europea.

Pero quizá donde el talento, a la vez especulativo y práctico de Torres Quevedo alcanzó mayores vuelos fué en el estudio de máquinas algébricas.

Nuestro ilustre compañero se propuso hallar una solución teórica general y práctica del problema de la construcción de las relaciones algébricas y trascendentes. Y logró, tras algunos años de tanteos que poco a poco le iban acercando a su meta, construir, como primera etapa, una máquina que resolvía las ecuaciones algébricas de cualquier grado, aunque para no aumentar indefinidamente el peso y el coste del aparato la limitó al décimo en el modelo que hubo de construir en su laboratorio.

El elemento fundamental de este aparato, invento de nuestro ilustre compañero, es el husillo sin fin, destinado a sumar la construcción de un monomio con la de otro, ejecutando automáticamente el cálculo de logaritmos aditivos de Gauss, y realizando la fórmula $Y = \log (10^x + 1)$.

Veinte años hace, construyó un aparato cuyo elemento visible era una máquina de escribir provista de los números 0 a 9, y los signos de igualdad y de las cuatro operaciones fundamentales de la Aritmética. Bastaba escribir la operación deseada y tras ella el signo de igualdad, para que el aparato, tras unos minutos de misterioso trabajo, durante los cuales se oía la ruidosa labor de su metálico cerebro, escribiera por sí sólo el resultado. Los avances y retrocesos de las ruedas metálicas y el vaivén de las palancas, que cerraban y abrían los circuitos eléctricos, bastaban para realizar el milagro.

Un poco más y Torres construye un aparato que, movido por la energía eléctrica, *piensa* lo suficiente para usar sus diferentes miembros, que actúan según las sensaciones que les hacían llegar otros órganos mediante los cuales podía tener una relación con el exterior. Tal fué el ajedrecista automático, que hace ya un cuarto de siglo vencía inexorablemente a los mejores jugadores, que intentaban defender su rey negro con los movimientos que su voluntad les daba y que acababan por perderle ante el mate dado por el rey y la torre blancos de su mágico contrincante.

En campo muy alejado del que habitualmente cultivaba, tuvo Torres Quevedo una iniciativa feliz, a cuya realización cooperó con entusiasmo durante muchos años: me refiero a la idea de la Unión Internacional Hispano-Americana de Bibliografía y Tecnología Científicas, cuya primera idea lanzó en el Congreso Científico Internacional de Buenos Aires de 1910, al que acudió como representante de España, acompañando a S. A. R. la Infanta Doña Isabel (q. e. p. d.).

Acogida la idea con entusiasmo por el Congreso, las inevitables rémoras de algunos órganos de la Administración hicieron qué la moción por éste presentada al Gobierno español a su regreso de América dormitara, en un lento rodar de uno a otro departamento y de una mesa a la adyacente, hasta que la necesidad de elegir un tema para su discurso de ingreso en la Real Academia Española le sugiriera la idea de resucitarla en buena hora.

Bajo el patrocinio de esta Corporación, la Junta pudo constituirse y comenzar su primera obra: el *Diccionario Tecnológico Hispano-Americano,* del que llegó a publicarse el primer volumen.

Años después, la desaparición de algunos de los colaboradores más destacados y la edad avanzada y delicado estado de salud de otros, hicieron que la Junta Hispano-Americana de Bibliografía y Tecnología Científicas fuera poco a poco disminuyendo la intensidad de su labor.

Llegó un momento, allá por el año 1934, en que sus más destacados supervivientes, D. Leonardo Torres Quevedo, el Marqués de Magaz y D. Ricardo Spottorno, convencidos del escasísimo rendimiento que su labor personal había de producir en la continuación de este trabajo, decidieron poner la obra en manos del Ministerio de Instrucción Pública, para que éste proveyera a la continuación de la labor comenzada, sugiriendo ellos mismos la idea de que fuera confiada a la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

Así se hizo por el Gobierno algunos meses después por un Decreto, fecha 27 de abril de 1935.

Nuestra Corporación aceptó el honroso encargo que se le confiaba, mediante las siguientes condiciones, que el Gobierno hubo de aceptar:

1.ª Constituirán, provisionalmente, la nueva Comisión los siguientes elementos:

A) Los que, habiendo formado la antigua Junta, desearan seguir perteneciendo a ella.

B) Los Académicos numerarios de las seis Reales Academias y de las corresponsales de éstas en América que desearan colaborar en la obra del *Diccionario Tecnológico;* y

C) Todas aquellas personas que, con carácter de colaboradores, fueran designadas por los dos grupos anteriormente citados.

2.ª Serán Presidente y Secretario de la Junta: el Presidente y Secretario general, respectivamente, de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, designándose de entre los numerarios de ésta un Vicepresidente y un Vicesecretario.

3.ª La Junta así constituída determinará el plan científico y técnico con arreglo al cual habrá de seguirse la redacción del *Diccionario,* así como cualquier otra actividad relacionada con éste que la Junta hubiera de desarrollar, teniendo en cuenta las posibilidades económicas que a su disposición pusieran los Gobiernos de España y de las Repúblicas hispanoamericanas.

La inestabilidad política de los últimos tiempos de la República hicieron que la nueva etapa no pudiera comenzar de modo eficaz.

Esperemos que la nueva España preste al asunto el interés que merece, tanto desde los puntos de vista científico, técnico y literario como del de la aproximación de nuestros hombres de Ciencia a sus hermanos de Ultramar en obra que tanto a unos como a otros interesa.

Ningún homenaje mejor podríamos rendir a la memoria de Torres Quevedo que continuar su obra inacabada.

En rápido desfile han pasado ante vuestra vista los principales trabajos del que fué Presidente de Honor de esta Academia, numerario de la Española, Inspector honorario del Cuerpo de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos; Director, durante un cuarto de siglo, del que primero se llamó Centro de Ensayos de Aeronáutica y luego Laboratorio de Mecánica Aplicada; miembro asociado de la Academia de Ciencias de París, Gran Cruz de Carlos III y de la Orden Civil de Alfonso XII, Comendador de la Legión de Honor de Francia, etc.

Y antes de todo esto, y sobre todo ello, un español bueno y sabio, cuya valía llevaba más allá de sus fronteras el nombre de su patria. Rehuyó cargos políticos, que otros apetecen, y en ningún caso hizo sentir sobre los demás su indiscutible superioridad. En las reuniones hacía más uso del oído que de los labios. Amante de su familia, en la que dejó herederos de su talento, en medio de ella se extinguió dulcemente su vida, en un ambiente callejero de odios y de crímenes marxistas, el día 18 de diciembre de 1936.

Descanse en paz.

* * *

Al anciano venerable cuya vida se deslizó dedicada a la resolución de arduos problemas científicos, que a sí mismo se negaba la categoría de sabio, llamándose modestamente en una ocasión "guerrillero de la Ciencia", sucede hoy en esta Real Academia un hombre joven, que lleva varios años dedicado a la enseñanza universitaria, simultaneando con ella el ejercicio de la profesión de Arquitecto.

Nacido en Reus, en 1905, el profesor D. Francisco de Asís Navarro Borrás obtuvo en esta ciudad el grado de Bachiller, con calificación de sobresaliente y premio extraordinario. En 1924 se licenció en Ciencias Químicas en la Universidad de Zaragoza, y dos años más tarde en la Sección de Exactas, en la de Barcelona, obteniendo ambos títulos con idéntico galardón.

En 1929 alcanzaba en la Universidad de Madrid el título de Doctor en Ciencias Exactas, también con premio extraordinario, y en 1931 obtuvo el de Arquitecto en la Escuela Superior de San Fernando, de Madrid.

Después de haber desempeñado brillantemente una auxiliaría de Geometría analítica y de Ecuaciones diferenciales en la Facultad de Ciencias de la Universidad barcelonesa, gana en 1930, por oposición, la cátedra de Mecánica Racional con nociones de Mecánica Celeste, de la de Madrid.

Además de esta disciplina, ha explicado desde entonces en el mismo centro docente los dos cursos de Matemáticas para químicos, la Ampliación de Matemáticas para farmacéuticos, y en 1934, a la muerte de nuestro sabio compañero D. José M.ª Plans, la de Mecánica Celeste del Doctorado.

Simultaneando con esta labor docente, Navarro Borrás efectuó, en los años de 1931 y 32, estudios sobre diversos puntos de las Matemáticas en la Universidad de Barcelona y en la Escuela Politécnica Superior de Charlottemburgo, vertiendo parte de ellos en el curso sobre Ecuaciones Integrales y especialmente sobre la teoría de Hilbert-Schmidt, que explicó en la Universidad de Madrid.

En 1933 obtiene, por concurso, una cátedra de la Escuela Superior de Aerotecnia, de Madrid (Cuatro Vientos), donde varios cursos tuvo a su cargo, además de la asignatura de Mecánica Racional, conferencias sobre Mecánica de los Flúidos, Mecánica Elástica y Teoría del Potencial.

En octubre del mismo año, y a propuesta unánime del Claustro de la Escuela Superior de Arquitectura, de Madrid, fué nombrado profesor agregado de la misma, habiendo estado encargado de las asignaturas de Mecánica General, Cálculo Integral y Topografía con nociones de Geodesia.

Pertenece a varias corporaciones científicas, españolas y extranjeras, y colabora en prestigiosas revistas científicas de ambos grupos, entre ellas el *Jahrbuch ueber die Fortschritte der Matematik,* en la que tiene a su cargo las recensiones de los trabajos de investigación matemática publicados en lengua española.

Ha publicado buen número de trabajos de investigación y didácticos, de los que al final de estas páginas pueden verse los títulos.

Habréis visto que la obra del profesor Navarro Borrás es considerable, en cantidad y calidad, y aun le quedan espacio y energía para realizar proyectos y obras de arquitectura, entre otros, los del Servicio Nacional de Prisiones.

* * *

Como ha dicho el nuevo Académico, entre la multitud de trabajos monográficos que definen un progreso notable en los métodos matemáticos de estos tiempos, se perfila con vigoroso trazo la trayectoria marcada por la teoría de las ecuaciones integrales, que alcanza en esta última década un exuberante desarrollo.

Aun cuando Henrik Niels Abel y otros matemáticos ochocentistas habrían ya operado con expresiones que eran propiamente ecuaciones integrales, esta denominación no aparece hasta 1887, en un trabajo del profesor de la Universidad de Berlín, Paul Du Bois Reymond (1), en el cual, con visión aquilina, su autor encarece la importancia de la teoría de estas ecuaciones, que aun está por hacer, con las siguientes palabras:

"Me he encontrado las ecuaciones integrales con tanta frecuencia, desde 1852, en la teoría de las ecuaciones entre derivadas parciales, que estoy convencido de que los progresos de esta teoría están ligados al manejo de las ecuaciones integrales, sobre las cuales nada conocemos."

Y, efectivamente, el profesor Fredholm, de la Universidad de Estocolmo, inspirado algunos años más tarde en un trabajo de Poincaré sobre el laboriosísimo método de Neumann-Schwarz para la resolución del problema de Dirichlet, hace un elegante empleo de una ecuación integral, que en lo

(1) "Bemerkungen ueber $\Delta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. 103).

sucesivo llevará su nombre, para la solución de dicho problema (2); procedimiento que él mismo generaliza en 1903 (3) y que, más tarde, Plemelj emplea con éxito para la resolución de otros dos problemas de contorno de la teoría del potencial (problema de Neumann y problema mixto).

A partir de este momento puede decirse que nace con el siglo la teoría de las ecuaciones integrales, ya que sigue a los trabajos de Fredholm una verdadera pléyade de monografías, debidas principalmente, además de aquel autor y de Neumann, a los matemáticos italianos Volterra, Arzela, Levi-Civita y otros, la cual culmina principalmente en dos métodos de resolución: el método de iteración, llamado indistintamente de Volterra y de Neumann, y el método de los determinantes infinitos de Fredholm.

Pero lo que realmente marca un importante jalón en esta teoría son los trabajos que Hilbert publicó en el transcurso de los años que van de 1904 a 1910 (4) y en cierto modo los de la misma época debidos a Erhardt Schmidt, actual profesor de la Universidad de Berlín, que hicieron posible el manejo sistemático de las ecuaciones integrales lineales, con la misma sencillez que se opera con las ecuaciones diferenciales lineales.

David Hilbert, profesor de la famosa Universidad de Gottinga, en su primer trabajo, revisa los atrevidos pasos al límite que se encuentran en los escritos de Fredholm, introduce los valores y funciones propias, aplicándolos a la resolución de algunos problemas de contorno de la teoría de ecuaciones diferenciales y, haciendo empleo de transformaciones

---

(2) "Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet" *(Ofverzigt af Kongl. vet. Akd. Fork. Stokholm, 1900).*

(3) "Sur une classe d'equations fonctionnelles" *(Acta Math., t. 27).*

(4) "Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen" *(Göttingen Nachrichten, 1904 y sucesivos).*

octogonales, funda su ya clásica teoría, que en seguida es generalizada por su discípulo Erhardt Schmidt (5), y es objeto de ampliaciones y notables estudios por parte de matemáticos tan eminentes como Piccard, Kneser, Bôcher, Dicson, Hilb, Fréchet, etc.

El punto de partida de los notables trabajos de Lichtenstein (6), Sommerfeld (7) y Weyl (8) sobre problemas de contorno de la Física Matemática, es la segunda de las mencionadas monografías de Hilbert, en la que se somete por primera vez, haciendo uso de la función de Green correspondiente al del laplaciano de la incógnita, los problemas de contorno de la ecuación lineal entre derivadas de segundo orden de tipo elíptico.

En el tercer trabajo se ocupa Hilbert de algunos problemas de contorno de la teoría de funciones.

Un nuevo punto de vista ofrece Hilbert en sus cuarta y quinta monografías al relacionar las ecuaciones integrales con las teorías de las ecuaciones lineales con infinitas variables y con las de infinitas formas cuadráticas, y con él están vinculadas multitud de publicaciones importantes de Helge von Koch, Perron, Remark, entre otros, y especialmente la de Hellinger y Toplitz, que en su artículo de la Enciclopedia Teubner han conseguido la difícil tarea de reunir en una síntesis feliz todos los resultados.

La transformación de ecuaciones diferenciales en integrales, y viceversa, así como la aplicación de éstas a determina-

---

(5) "Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen" *(Math. Annalen,* t. 63, 64 y 65).

(6) "Zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter ordnung des elliptischen Typus" *(Math. Annalen,* t. 67 y otros posteriores).

(7) *Jahresbericht der deutschen Math.-Vereinigung,* 1913.

(8) "Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearen partieller Differential-gleichungen" *(Math. Annalen,* t. 71 y otros).

dos problemas geométricos de gran interés en la Física, constituyen el objeto del último trabajo de esta notable serie.

A partir de Hilbert, puede decirse que la teoría lineal ha alcanzado su edad de oro. Lauricella, Pincherle, Piccard, entre otros muchos, y particularmente el profesor rumano Lalesco, enriquecen el cuerpo de doctrina con valiosísimas aportaciones.

El senador Vito Volterra, creador (además del tipo de ecuaciones que llevan su nombre y que son en cierto modo un caso particular de las de Fredholm) de las ecuaciones que él llamó íntegro-diferenciales (9), es invitado a dar unos cursos sobre la materia en Barcelona y Madrid, algunos años después de la terminación de la guerra europea, y estas conferencias son recogidas por el joven y ya famoso matemático y distinguido profesor italiano Luiggi Fantapié, y traducidas al castellano por nuestro compañero, fallecido hace pocos años, D. Luis Octavio de Toledo, con el título de *Lecciones sobre algunas funcionales analíticas,* que constituyen un interesantísimo panorama del análisis funcional.

Aunque Erhardt Schmidt ya trató en 1908 de generalizar algunos resultados de Hilbert a las ecuaciones integrales no lineales, puede decirse que la creación de la teoría no lineal data de la última década transcurrida, y entre sus principales investigadores figura el eminente profesor de la Universidad de Kiel, correspondiente de nuestra Academia, Adolf Hammerstein. Sus principales trabajos sobre la teoría de ecuaciones no lineales son: *Nichtlineare Integralgleichungen und direckte Methoden der Variationsrechnung* (10), así como otros posteriores publicados, respectivamente, en *Acta Math.,*

(9) "Sur les equations integro-differentielles et leurs applications" *(Acta Math.,* 1912).

(10) *Sitzungsbericht der Berliner Math. Gesellschaft,* 1927.

1931 y *Jahresbericht der deutsche Mathematikervereinigung*, 1929.

El profesor Navarro Borrás, discípulo que ha sido de Hammerstein y de Georg Hamel (profesor de la Thechnische Hochchule de Charlottenburgo), es uno de los más distinguidos cultivadores de esta rama de la Matemática en nuestra Patria. En el curso de 1932-33 dió en Madrid, con mucho éxito, una serie de conferencias de iniciación sobre la teoría de Hilbert-Schmidt, a las que asistieron, entre otros que no recordamos, los profesores Plans, Terradas, Fernando Peña, Mataix, Puig-Adam, Calvo, San Juan y otros muchos distinguidos matemáticos.

En el reciente Congreso de Santander, de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias (1938), cuya Sección de Matemáticas presidió, hubo de presentar también un trabajo de aplicación de la teoría de ecuaciones integrales no lineales, titulado: *Empleo de las ecuaciones integrales no lineales e íntegro-diferenciales en la resolución de algunos problemas de contorno de la Física Matemática*, que se halla en prensa.

Y, finalmente, el tema de su discurso de hoy es una nueva aportación de nuestro compañero, que viene a incorporarse a la ya muy numerosa literatura de este capítulo del Análisis Funcional.

HE DICHO.