

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DISCURSO INAUGURAL

DEL AÑO ACADÉMICO 1957-1958

LEÍDO EN LA SESIÓN INAUGURAL CELEBRADA EL DÍA 13 DE NOVIEMBRE DE 1957
POR EL ACADÉMICO NUMERARIO

EXCMO. SR. D. MANUEL VELASCO DE PANDO



M A D R I D
DOMICILIO DE LA ACADEMIA
VALVERDE, 22.—TELEFONO 21-25-29
1 9 5 7

ABSTRACCION Y REALIDAD

PREÁMBULO

EXCMOS. SRES., SRAS. Y SRES. :

Altísimo honor significó para mí el acuerdo de la Academia, adoptado a propuesta de la Sección de Ciencias Exactas, en el que se me designaba para pronunciar el discurso inaugural del Año Académico 1957 a 58 ; pero este honor tuvo su contrapartida en las muchas perplejidades que se me originaron al pensar en la elección del tema y en la líneas generales de su desarrollo. Porque tal elección planteaba, a mi ver, un verdadero dilema. En efecto, puede el Profesor en su cátedra entrar en todas las dificultades que cada capítulo de su disciplina implique, ya que sus oyentes están obligados a seguirle o a renunciar a sus propósitos. Pero el público que asiste a estos actos académicos, aunque cultísimo, no está obligado a conocer todos los recovecos de cada materia científica, especialmente si se trata de las Ciencias Exactas, por lo que es evidente la conveniencia de un tema que pueda resultar aceptable, o tolerable al menos, para el mayor número de personas. Pero en cambio el respeto a la Academia, y esta es la otra premisa del dilema, obliga a tratar de algo que ofrezca interés científico.

Prolongadas mis perplejidades y ante el temor de que su insistencia viniese a secarme el cerebro como a Alonso Quijano El

Bueno, me decidí a seguir la línea de mínima resistencia, embo-
rronando cuartillas con las reflexiones que se me ocurrieron, imi-
tando un poco, aunque sin su gracejo, a Lope de Vega cuando
dijo :

Un soneto me manda hacer Violante
Que en mi vida me he visto en tal aprieto.
Catoce versos dicen que es soneto
Burla burlando van los tres delante
.....

con lo cual tenía la ventaja de que cuando me pareciese tener es-
critas número suficiente de cuartillas, me bastaba terminar con
algo como el terceto final de la misma composición :

Ya estoy en el segundo y aun sospecho
Que estoy los trece versos acabando
Contad sin son catorce y está hecho.

MATEMÁTICA PURA Y APLICADA

Cultiva la Sección de Ciencias Exactas de esta Academia dos
grandes ramas de la Matemática : la pura y la aplicada. Grosso
modo, todos sabemos lo que una y otra son : mientras la pura se
recrea en sí misma como el Narciso mitológico, la aplicada persi-
gue la resolución de problemas de la Física o de otra disciplina
atenta a la realidad, ajenos, por tanto, a la propia Matemática.
Así, pues, lo que caracteriza a la Matemática aplicada, es que
hay una correspondencia entre los entes considerados en el cálculo
y la configuración o relaciones que se les atribuyen, y ciertos en-
tes reales y su relativa configuración o relación. Por cierto, esta
correspondencia aparece casi siempre a primera vista como muy
grosera. Así, en Mecánica Celeste a un ente real tan complejo

como un planeta con cuanto encierra de conocido y desconocido; le hacemos corresponder un punto material, caracterizado por un número, la masa, y por dos vectores variables con el tiempo, la velocidad y la aceleración. A pesar de ello, los resultados son útiles, a causa de la pequeñez de las dimensiones de los planetas, y aún del Sol, en relación con las distancias que los separan. Algo análogo ocurre siempre en las aplicaciones en los demás casos.

A pesar de que la diferencia entre un cálculo matemático puro y otro aplicado estriba en que en este segundo existe una correspondencia con una realidad transcendente, y de que en verdad pudiera ocurrir que a una estructura abstracta libremente construída por la mente humana viniese algún día a encontrársele una correspondencia con una realidad, de lo que ciertamente hay muchos ejemplos en la historia de la ciencia, constituiría una ligereza deducir que, en sí misma, nada distingue a la Matemática pura de la aplicada. Pues por de pronto, existe entre una y otra una diferencia comparable a la *manera* de los artistas o al *estilo* de los literatos. En efecto, el matemático puro se preocupa ante todo del rigor, de la belleza intelectual y de la generalidad de sus teoremas, mientras en las aplicaciones preocupa primordialmente la resolución de problemas reales.

EL RIGOR DE LA MATEMÁTICA PURA Y APLICADA

Este aspecto del rigor es singularmente interesante: sin el más extremado, los matemáticos puros no construyen nada estable; en cambio, los físico-matemáticos, como se apoyan en postulados extraídos de la observación y como llegan a consecuencias que, en parte al menos, se comprueban experimentalmente, pueden aligerar su labor sin tantas preocupaciones; el laboratorio redime a veces los pecados del geómetra. Gauss, por ejemplo, dedujo la curva de campana para la ley de los errores accidentales

mediante un cálculo, admirable como técnica matemática, pero cuyos razonamientos han sido muy criticados ; Bertrand le acusó de haber confundido el valor más probable con el valor probable ; Poincaré, más modernamente, insistía en que lo único que sabemos de la media es que su valor es cada vez más probable a medida que aumenta el número de mediciones, propiedad, cosa curiosa, indicada ya por el propio Gauss ; pero antes de todo esto, Bessel comparó con gran paciencia los errores cometidos por miles de observadores en la medición de coordenadas celestes con las consecuencias de la ley de Gauss ; el acuerdo fué completo. Desde entonces muchos observadores se han apoyado con toda confianza y excelentes resultados en la curva de campana.

Podrán discutirse los razonamientos y los cálculos que llevaron a Einstein a establecer su célebre fórmula

$$E = m c^2$$

entre la energía aparecida E y la masa perdida m ; pero ahí están la bomba atómica y los reactores nucleares para acreditar la veracidad.

Cuenta Stendhal que Rossini, el gran compositor, se reía algunas veces con sus amigos de las letras que le llevaban sus poetas y con su gran vis cómica, señalaba los ripios y las vulgaridades de los versos ; pero, con orgullo que su fama justificaba, añadía : «Cuando yo le ponga a esto música, llorarán de emoción al oírlo todas las mujeres del mundo.»

Las Matemáticas pura y aplicada se pueden comparar también respectivamente con una obra maestra de la literatura y con la letra de una revista ; en ésta, la escenografía, la luminotecnia y los vestidos salvan la mediocridad de la letra.

Por el mentado apoyo de la experiencia, a las teorías de la Física Matemática les pasa como a Anteo, que cuando vencidas por la crítica de un momento tocan en tierra, resurgen con nuevos bríos y dan a la Ciencia días de mayor esplendor.

EL DESDÉN DE LOS MATEMÁTICOS PUROS POR LAS APLICACIONES

Tal vez la apuntada diferencia de rigor, sea la causa de cierto aristocrático desdén que muchos matemáticos puros sienten por las aplicaciones. Quizá este desdén se haya agravado en los últimos años porque el frondoso desarrollo de la Ciencia ha impuesto una especialización que antes no existía de manera tan acusada. Pero de todos modos, tal desdén es muy antiguo y algunas anécdotas o hechos pueden comprobarlo.

Se cuenta (*) que cierto día se presentó a Euclides un joven diciéndole que había pensado en estudiar Geometría, pero que antes quería saber qué provecho sacaría de tal estudio. Euclides, a quien la tradición atribuye un carácter bondadoso y paciente, aquella vez se mostró duro ; volviéndose hacia un esclavo, servidor de la Academia que por allí andaba, le dijo : «Da a este hombre las monedas que tengamos, puesto que lo que quiere es sacar provecho de la Geometría.»

Saltemos muchos siglos en la Historia para registrar otro hecho parecido. Sus amigos y protectores habían recomendado a Abel, el prodigioso y malogrado matemático noruego, que hiciese un viaje a Francia y Alemania para ponerse en contacto con los grandes matemáticos de la época, y para ello le consiguieron una modesta bolsa de viaje. Por desdicha, estos contactos fracasaron ; Gauss, a quien Abel envió como tarjeta de visita su trabajo *Sobre la imposibilidad de resolver la ecuación de 5.º grado*, interpretó mal el título, demasiado conciso, y exclamó : «He aquí otro horror de esos principiantes.» Realmente, Abel debía haber dicho «Sobre la imposibilidad de resolver *mediante radicales* la ecuación

(*) PATRICIO PEÑALVER: *Discurso de apertura de curso en la Universidad de Sevilla*. Sevilla, 1930.

genérica de 5.º grado» ; pero la impresión, hecha a su costa, salía cara y tuvo que ahorrar palabras.

Tampoco su visita a Cauchy produjo resultado ; el aristocrático barón no entendió bien lo que quería aquel joven no muy bien vestido y que se expresaba en un francés incorrecto (aunque tenemos cartas que nos prueban que, por escrito, Abel se expresaba muy flúidamente en el idioma galo). Comentando con sus amigos este fracaso de su visita a Cauchy, ya de vuelta a su país, Abel decía : «Y, sin embargo, Cauchy es el único gran matemático puro que tienen los franceses ; los demás son *mecanicistas*» (**).

Pero tal desdén de los matemáticos puros por las aplicaciones impuras de las Matemáticas, tenemos que cubrirlas los «impuros» por una verdadera cortina de humo. Pues si Gobiernos y mecenas se enteraran de que los matemáticos puros alardean de que sus teorías no sirven para nada, todavía disminuiría la escasa atención económica que a los estudios matemáticos se concede.

Y es que además no estamos conformes con ello. De la matemática pura, es decir, de las especulaciones más abstractas, se nutren las matemáticas aplicadas y en éstas se apoya la física, de la cual a su vez saca su jugo la Ingeniería, mejor dicho, el conjunto de actividades económicas que producen el desarrollo y el bienestar de un país. Consideramos como columna vertebral de la ciencia y del progreso de las actividades económicas, la tetralogía, matemática pura, matemática aplicada, física, aplicaciones económicas. Cuando la cadena que constituye los cuatro términos citados se rompe, el progreso se interrumpe o el país se hace feudatario de otros, tomando su desarrollo aspectos coloniales. Precisamente lo que yo echo de menos en España en el sentido del vulgo, es la falta de aprecio, o más aún, la falta de conocimiento, de aquella concatenación. Así la Prensa, que procura seguir siempre los de-

(**) N. H. ABEL: *Sa vie et son oeuvre*, par Ch. Lucas de Peslouan. París, 1906.

seos del público, habla muchísimo de las aplicaciones y de los inventos, siquiera a veces su valor científico sea escaso, pero apenas se interesa por los aspectos científicos puros. Sin tener en cuenta que no pueden existir aplicaciones vigorosas cuando no están respaldadas por una ciencia pura, espléndida también en sus actividades.

LA ARBITRARIEDAD DE LAS DEFINICIONES Y DE LOS AXIOMAS

Con el tema de las relaciones entre la matemática pura y la aplicada, tiene estrecho contacto la evolución que en los últimos cien años ha tenido, en su aspecto de aplicación efectiva, el principio de la arbitrariedad en las definiciones de los entes matemáticos.

Digo en su aplicación efectiva, porque claro está que en su aspecto teórico siempre se ha considerado como valedero tal principio, sustancial con el razonamiento deductivo, en este sentido, que el rigor de un teorema sólo puede examinarse atendiendo a la cadena de razonamientos que ligan la hipótesis con la tesis, salvo la comprobación de que no haya contradicción en los elementos implicados en la hipótesis; pero lo cierto es que hasta una época relativamente moderna sólo definían los matemáticos puros, entes que ya venían siendo considerados tradicionalmente y que habían nacido por abstracción y simplificación de alguna realidad. Parodiando una frase célebre, podemos decir que el principio de arbitrariedad de las definiciones, se acataba, pero no se cumplía. Conviene tener presente además que al hablar de las definiciones de los entes, tenemos que incluir en ellas los axiomas que respecto a aquéllos se admiten, ya que tales axiomas complementan las definiciones y, a veces, son toda la definición.

Pues bien, durante el siglo XIX, especialmente en su segunda mitad y durante lo que va transcurrido del XX, se realiza la evolu-

ción, en virtud de la cual vienen a intervenir en la Matemática entes arbitrariamente definidos, y, por otra parte, los axiomas varían fundamentalmente de concepto. Ya no son, como corresponde a la etimología de la palabra, verdades evidentes que no necesitan demostración, sino proposiciones que arbitrariamente aceptamos para completar las definiciones de los entes a que se refieren.

Para concretar en fechas esta evolución dentro de lo lentas y perezosas que siempre son estas actitudes de los círculos matemáticos, sírvanos de ejemplo el caso de la Geometría.

La correspondencia de Gauss con varios amigos, como Wachter, Schumacher y Taurinus y algunos apuntes encontrados entre sus papeles, no permiten dudar que desde 1813 estaba convencido de la imposibilidad de demostrar el postulado de las paralelas (el 5.º postulado de la enumeración de Euclides) y que había concebido el proyecto de una exposición de la Geometría no euclidiana. Mas como Taurinus especialmente le excitase a realizar este propósito y a publicarlo, le escribió en 1824 rogándole guardase secreto. De por entonces es su frase : « ¡ Temo los alaridos de los heocios ! »

Así, pues, un hombre de la autoridad de Gauss, no se atrevía a modificar la definición del ente *recta*, cambiando uno solo de los postulados admitidos por Euclides y cuyo abandono el propio geómetra griego había preparado por algunos matices de su texto y por el lugar en que lo introduce en sus razonamientos. ¡ Tal era en 1824 la fuerza de la tradición y el respeto a las definiciones consagradas ! En menos de cincuenta años va a producirse una profunda transformación. Entre 1826 y 1855 Lobatchewsky publica varias obras donde establece una Geometría que niega el quinto postulado de Euclides y admite el sexto ; en 1854 Riemann, uno de los sucesores de Gauss en Gottinga, lee una Memoria, años después publicada, en la que establece otra Geometría que admite el quinto postulado y niega el sexto ; de este modo,

quedan consideradas las tres Geometrías posibles si se conservan los cuatro primeros postulados de Euclides ; adviértase que el tercero no se refiere a la recta, sino a la existencia de circunferencias y que en todo esto me refiero a la transcripción de P. Barbarin, en *La Géométrie non euclidienne*, Scientia, París, 1907. Estos trabajos y otros muchos que sería prolijo citar, preparan el terreno para que en 1872 pueda Klein formular su célebre *Programa de Erlangen*. Klein va a definir así la Geometría general :

«Dado un conjunto de cualquier número de dimensiones, y un grupo de transformaciones entre sus elementos, llamamos Geometría al estudio de las propiedades de aquel conjunto que quedan invariantes para todas las transformaciones del citado grupo» (1).

Todo depende, pues, del grupo de transformaciones que arbitrariamente se elija ; ya no hay axiomas consagrados ; se pueden establecer así, por ejemplo, las Geometrías métrica, afin, proyectiva, birracional y de contacto.

Dadas la profundidad y la generalidad de la definición de Klein, podría creerse que va a quedar de modo perenne como principio unificador de todas las geometrías posibles. Pero no es así, y las cosas van a cambiar por un reflujó de las matemáticas aplicadas sobre las puras. En efecto, en 1916, Einstein publica su teoría general de la relatividad y en ella toma como principio fundamental de partida una idea que ya Riemann había lanzado en la segunda parte de la Memoria antes citada.

Partiendo del teorema pitagórico de que en una Geometría euclidiana tridimensional el cuadro del elemento de distancia es la suma de los cuadrados de las diferenciales de las tres variables cartesianas, Riemann generaliza esta relación diciendo que en una cierta Geometría el cuadrado del elemento lineal es igual a una forma cuadrática respecto a las diferenciales de las coordenadas cualesquiera que elijamos para estudiar los entes geométricos.

(1) J. REY PASTOR: *La Matemática superior*. Buenos Aires-Madrid, 1951.

Según los coeficientes que se acepten para esta forma, que, en general, serán funciones de las variables, resultan las diversas Geometrías posibles; tal forma cuadrática es el *invariante fundamental*. Riemann terminaba su Memoria con estas palabras que al principio parecieron enigmáticas y que luego resultaron proféticas: «Tal vez los coeficientes de la forma hayan de venir de la Física.» La enorme repercusión que tuvo la teoría de la relatividad hizo que la Memoria de Riemann fuese considerada de nuevo por todos los matemáticos.

Es claro que desde el punto de vista de la matemática pura no es aceptable que los coeficientes de la forma fundamental hayan de venir de la Física, sino que habrían de ser fijados arbitrariamente para constituir cada Geometría posible.

Pero la relatividad ofrece un cierto número de ejemplos de los diversos tipos de Geometría que pueden salir de la idea fundamental de Riemann, algo así como lo que nos enseña un museo de poliedros o de superficies; por ejemplo, a gran distancia de toda masa tenemos una Geometría euclidiana; en las proximidades del Sol, o de otra gran masa, la expresión del elemento de distancia de Schwarzschild nos permite fácilmente averiguar el género de Geometría que se establece; por ejemplo, la relación de la circunferencia al diámetro es menor que el valor que ordinariamente designamos por π (1). Habrá, pues, por continuidad, valores racionales de aquella relación y en los lugares correspondientes la cuadratura del círculo con regla y compás será posible; pero el viaje para comprobarlo es peligroso.

En resumen, con el principio unificador de Riemann como con el de Klein, la Geometría general se convierte en un conjunto de Geometrías abstractas.

Lo mismo ocurre en toda la matemática pura; deviene ésta

(1) J. HAAG: *Le problème de Schwarzschild, Mémorial des Sciences Mathématiques*. París, 1931.

una colección de estructuras abstractas, algunas de las cuales tienen correspondencia con ciertas realidades y pueden servir para las matemáticas aplicadas ; otras podrían tenerla algún día. Y el principio reductor de las estructuras, es el *isomorfismo*, que cuando se presenta, reduce varias, aparentemente muy distintas, a una sola efectiva.

Al isomorfismo en la matemática pura, corresponden en la aplicada las «analogías», es decir, fenómenos en apariencia muy dispares, pero que se rigen por las mismas ecuaciones. Sería interminable, por ejemplo, la enumeración de los fenómenos físicos gobernados por la ecuación de Laplace o por sus generalizaciones ; y como unos son más fácilmente accesibles que otros a la experiencia, resulta que aquéllos pueden servir para aclarar y medir a los otros. Parece como si la Naturaleza hubiera repetido mucho algunos moldes.

El isomorfismo y las analogías demuestran cuánto yerran los que, desde hace años, vienen entonando en España un monótono treno, abogando por la especialización extremada en la formación de los científicos y de los técnicos de grado superior. Habría que proclamar que unos y otros necesitan un 70 por 100 de formación general y sólo un 30 por 100 de especialización.

Pero todavía existe en la matemática aplicada un principio especial al que no encuentro correspondencia en la pura : dos teorías físicas, que explican un mismo conjunto de hechos, son equivalentes cuando las diferencias entre los números a que conducen son siempre menores que los errores de observación.

Este principio de la equivalencia entre teorías está íntimamente ligado con el progreso de la ciencia, pues mientras dos teorías explican el mismo conjunto de hechos, no hay razón para preferir una a otra que no sea la sencillez ; pero cuando aumenta el conjunto explorado de hechos, entonces es preferible la que explique campo más extenso, y esta es la causa por la que vemos en la historia de la ciencia que unas teorías han ido sustituyendo a otras.

Comprobamos, pues, que era muy interesante para el tema de las relaciones entre la matemática pura y la aplicada, la aplicación efectiva del principio de arbitrariedad ; a éste se debe el aspecto actual de la matemática pura ; la aplicada queda limitada al estudio de aquellos entes que guardan correspondencia con entes reales.

Si en Marte hay habitantes y si son suficientemente inteligentes para haber creado matemáticas, las puras pueden ser muy distintas de las nuestras ; pero si en las aplicaciones consideran problemas iguales, los resultados han de coincidir aproximadamente. Por ejemplo, si han calculado la órbita de Saturno, hechos los oportunos cambios de notaciones y coordenadas, sus resultados coincidirán con los calculados por los astrónomos terrestres.

Hablábamos antes de que, en la matemática aplicada, la correspondencia entre los entes reales y los que se introducen en el cálculo es casi siempre muy grosera ; esto parece una falta de exactitud impuesta por la limitación de la inteligencia humana, y realmente lo es ; pero ya desde el punto de vista de las aplicaciones tiene ciertas ventajas, pues al sustituir el ente real por otro esquematizado, se descubren leyes esenciales interesantes ; movimiento elíptico de un planeta en comparación con las curvas, probablemente transcendentales, que resultan de la aplicación sucesiva de los métodos del problema de los tres cuerpos, gases o plásticos perfectos, elasticidad lineal, relatividad restringida, etc. Pero, además, desde el punto de vista más general, nos aparece como un primer estadio de abstracción que nos lleva a prescindir en el ente real de todas aquellas complicaciones que no importan gravemente para el problema en cuestión. En el segundo estadio de abstracción se consideran todos los entes que satisfacen a una axiomática ; en el tercero se juega con los axiomas para cambiarlos o sustituirlos y formar todas las estructuras posibles.

Si me permitís una imagen, el primer estadio puede corresponder a la comparación de una mujer bella con su retrato hecho por un gran pintor ; el segundo a un análisis psicológico-estético

del cuadro formulado por un crítico, y el tercero a una consideración abstracta sobre el eterno femenino.

EL IDEALISMO, EL INTUICIONISMO Y EL FORMALISMO

En la matemática pura las definiciones de los entes son, pues, arbitrarias ; pero ¿qué significa esto? Según el diccionario de la Academia de la Lengua, el «arbitrio» es la «facultad que tenemos de adoptar una resolución con preferencia a otra».

Esta definición se dirige especialmente a la acción ; pero aquí hemos de adaptarla a la elección puramente cerebral de definiciones y axiomas. Yel sujeto, sobreentendido en la definición académica, del verbo «tenemos» lo constituyen evidentemente, los «seres humanos», pues de todos los que hasta ahora hemos visto con nuestros ojos materiales, sólo los humanos son capaces de construir estructuras matemáticas. La conclusión es obvia : la matemática pura queda proclamada como una ciencia *humana, subjetiva* ; nada más lejos del carácter objetivo, al margen de toda discusión, que le atribuye el vulgo cuando dice de una afirmación : «eso es matemático».

Esto explica el nacimiento del *intuicionismo*. Para los intuicionistas sólo existen (claro que hablamos de existencia abstracta) los entes que han sido pensados por algún hombre. Así, mientras para los matemáticos idealistas, existe el infinito actual, no como un convenio o como una evolución de un número que crece superando toda cota, sino como un valor estático y terminado, existen todos los números reales o todos los entes, independientemente de los hombres, que sólo pueden definir algunos, para los intuicionistas sólo existen los que han sido mentalmente contruídos por algún hombre. Este concepto humanístico de los intuicionistas no existía, ni en germen, en la mente de los idealistas ; según éstos, el hombre *descubre* entes matemáticos ; según los intuicionistas, los *inventa*.

Las demostraciones en que se consideran infinitos tramos, con una elección en cada tramo, son rechazadas por los intuicionistas, a menos que se fije un criterio para cada elección, cosa no siempre posible. Las demostraciones por reducción al absurdo, basadas en el principio del *tertio excluso*, no les convencen : quieren una demostración constructiva. De lo cual se sigue la necesidad de una lógica de tres o más valores.

El nombre de «intuicionismo» es atribuible a que al principio de la parte afirmativa de su escuela, Brouwer, el holandés fundador del intuicionismo, coloca la «intuición original» de los números naturales, idea que con otra expresión había surgido ya en Kronecker (1823-1891).

Los ingenieros y los físicos, es decir, los matemáticos «impuros», como nos llaman los «puros», creo yo que nos inclinamos al idealismo cantoriano mejor que al intuicionismo de Brouwer y ello por una razón obvia. Nos resistimos a pensar que los entes matemáticos no existen hasta que los crea una mente humana, puesto que los que empleamos en nuestros cálculos tienen siempre una correspondencia, próxima o lejana, fina o grosera, con una cosa real. Así, por ejemplo, nos cuesta trabajo admitir que el potencial no haya existido hasta que lo definió algún matemático, pues oponemos lo que ocurriría si antes de la definición tocase alguien un cable de 500 voltios. Se dirá que en realidad el potencial newtoniano se descubrió antes de que la tierra estuviera cruzada de cables eléctricos ; pero es que todavía antes de que apareciera el hombre en la tierra ya existía el rayo, que también es una buena descarga.

Pero vienen a intervenir también en la liza los *formalistas*. Para éstos lo esencial de la cuestión lo constituyen las leyes del razonamiento matemático ; cuando se han penetrado esas leyes, se pueden, mediante ciertas reglas, sustituir unos entes por otros, con garantía de los resultados ; las estructuras son, pues, moldes vacíos.

Cuando se juega al ajedrez, dicen los formalistas, nadie se preocupa de lo que significan las figuras ; si sustituímos al rey por un presidente de república, con frac y chistera, y al caballo por una cebra, el juego será idéntico si se conservan las reglas.

Me parece que algunos ejemplos elementales pueden servir de inducción para comprender el formalismo. Sea el primero la *ley de permanencia de las reglas formales del cálculo* ; se extienden éstas sucesivamente a los números naturales, negativos, racionales, reales y complejos, y aún a los cuaternios, si se sacrifica la ley conmutativa de la multiplicación ; así, pues, los entes parecen lo de menos ; lo esencial está en las reglas formales. Otro ejemplo puede estar en la equivalencia entre los vectores n — dimensionales (con $n \rightarrow \infty$ siempre que las componentes formen una sucesión de cuadrado sumable) y las funciones reales sobre un segmento ; vista la equivalencia de la axiomática respectiva, las conclusiones son las mismas.

Es decir, el espacio de Hilbert de las funciones de cuadrado integrable, según Lebesgue, el de las sucesiones de cuadrado sumable y el de los vectores n — dimensionales (con $n \rightarrow \infty$ siendo la sucesión de componentes de cuadrado sumable) son isomorfos.

Alrededor de 1930 se produjo en artículos, libros y Congresos una lucha de epítetos entre intuicionistas y formalistas, que alguien ha comparado a la descrita en la Batracomiomaquia. Se comprende que los idealistas cantorianos quedasen al margen ; el gran Cantor había muerto en 1918, y los habitantes de la magnífica construcción cantoriana (teoría de las funciones reales) estaban demasiado convencidos de la belleza y comodidad de su edificio para que creyesen necesario contender con nadie. El viejo Hilbert (en 1930 tenía sesenta y ocho años), decía a los intuicionistas : «Con vuestra infundada crítica, queréis colocar al análisis en plan de naufragio y arrojar por la borda sus más preciadas conquistas.» Brouwer, más joven (tenía cuarenta y ocho años en 1930), no se amilanaba por la gran autoridad de su contrario :

«Vosotros—decía—, pasáis por alto faltas palpables de rigor, pero un crimen no deja de serlo porque los Tribunales no lo castiguen.» Y así como la escaramuza de la venta se agravó cuando en la pelea entre D. Quijote, Sancho, Maritornes y el arriero, vino a entrometerse el ventero, las cosas se pusieron serias para muchos cuando un hombre de la fama de Weyl se pasó con armas y bagajes al intuicionismo y en su libro *Das Kontinuum...* afirmó que el análisis de los formalistas estaba edificado sobre arena. Los físicos, vale decir, los matemáticos impuros, después de reírse un poco, se apartaron prudentemente, no les tocara alguna pedrada, si las cosas pasaban a mayores.

Realmente, en el primer envite, los intuicionistas conservaban del análisis menos de lo que aceptaba años antes el rígido Kronecker. Un pormenor prueba el acartonamiento a que éste había llegado en sus últimos años. Cuando en 1882, Lindemann (1852-1939) obtuvo el importantísimo resultado de que π es trascendente, le dijo: «¿Porqué emplea usted tan bellos razonamientos en ocuparse de π ? Yo ya no creo ni siquiera que existan verdaderamente números irracionales.» Kronecker, que tan brillantes aportes hizo a la ciencia matemática, en materia de números vino al final a situarse con los pitagóricos, antes de que descubrieran el más importante teorema nacido de su escuela y del que surgían implacablemente los números irracionales.

A mi juicio, todo esto demuestra la gran vitalidad del análisis. La crítica y la moda del intuicionismo quizá pasen, pero habrá quedado algo de la tormenta y los analistas cuidarán todavía más aquellas de sus afirmaciones en que entra la palabra «todo», siempre peligrosas por expuestas a desagradables paradojas. Así ocurrió al propio Cantor, cuya teoría de las funciones reales he ensalzado antes, pero cuyos números *transfinitos*, en que se van desarrollando convenios de un modo sorprendente (1), tropezó en

(1) R. BAIRE: *Leçons sur les fonctions discontinues*, con la teoría de los números transfinitos. París, 1905.

1895 con la paradoja de los números ordinales : la sucesión de *todos* debe tener un número ordinal *mayor que todos ellos*, eo ipso, mayor que sí mismo. Sin duda por esto, Borel declaró que aunque los números transfinitos cantorianos pueden ser útiles como guía heurística para encontrar resultados, no sirven para demostrarlos. Pero tal vez todo esto resulte ya anacrónico : la cuestión es que se admita o no el axioma de libre elección. El matemático moderno no se plantea la cuestión de si sus resultados son verdaderos o falsos ; verdadero significa solamente para él que no hay contradicción con los axiomas admitidos, lo que quiere es, pues, dilucidar bien los axiomas en que se apoya. Como los romanos dividían los días en fastos y nefastos, se podría en las cátedras clasificar los días en zermelianos y antizermelianos o en intuicionistas y formalistas. Para mayor diversión podrían ser distintos los profesores y que se atacasen más o menos correctamente. Si Platón con su geometra eterno y Kant con sus verdades *a priori*, levantasen la cabeza, se volverían a morir del susto, según un dicho vulgar, si es que no se morían por otras cosas que viesan, aparte de las matemáticas.

Todo esto puede resultar sorprendente para algunos ; pero es consecuencia necesaria del proceso seguido : desaparecida la cosa por abstracción, carece de sentido el concepto de verdad, conformidad de la cosa con lo que de ella predicamos ; este concepto queda relegado a la Matemática aplicada y, casi siempre, en sentido de aproximación.

A propósito de la paradoja de Cantor, recuerdo un rasgo de humor que oí en 1923 cuando Einstein vino a España y se despertó en medios tan extensos como poco preparados una gran curiosidad por sus teorías. Lo contaba alguien que había pretendido estudiar la relatividad sin entender una palabra, y era un diálogo entre un padre y su hijo :

—Papá, ¿habrá alguien más sabio que Einstein?

—Sí, hijo, el que lo entienda.

Porque analizado este diálogo, define una clase, la de los más sabios que Einstein, cuya diferencia específica era que lo entendían, y como es evidente que el gran físico se entendía a sí mismo, también resultaba como en la paradoja cantoriana, Einstein más sabio que el mismo Einstein.

LOS LOGICISTAS

Todavía falta por mencionar, en la discusión de los fundamentos, una cuarta escuela : la de los logicistas, para los cuales apenas existe frontera entre la lógica y la matemática, estimando que aquélla es anterior a ésta.

Como es sabido, un célebre logicista fué Peano (1858-1932), fino matemático que, aparte de la lógica matemática, estableció la axiomática de los números naturales e ideó las curvas que llenan un área, ingenioso ejemplo que viene a justificar la necesidad de postular la correspondencia biunívoca en la definición de la curva sin puntos dobles. A la celebridad de Peano han contribuido también precisamente los ataques de Poincaré a la lógica simbólica, es decir, al intento, empezado en 1888, de reducir toda la matemática a un simbolismo preciso, intento que, ayudado por varios italianos, logró hacia 1895 refundir gran parte de la matemática con su nuevo simbolismo. Los ataques de Poincaré consistían en presentar ciertos ejemplos de nociones muy sencillas, que el matemático emplea al vuelo cada día, y oponerles su complicada representación simbólica, según Peano ; pero esto era inevitable en una ideografía que había de registrar cada paso del razonamiento.

Con la ideografía de Peano, podría escribirse un libro de matemáticas sin otras palabras de un idioma vulgar que la significación de los símbolos y aún sin ésta, si ya estaba establecida en diccionarios especiales. Después de todo, la cosa formalmente no

es nueva, pues ya ocurre en las tablas de logaritmos o de otras funciones. Pero los browerianos, en cambio, dicen que los matices del intuicionismo sólo se expresan y se comprenden bien en holandés; la afirmación es excesiva; estarían más en su punto si dijeran que «ellos» los expresan mejor en holandés, porque esto nos pasa a todos, que tenemos más facilidad para hablar y comprender nuestro idioma materno que otro cualquiera, aunque a veces nos surja una palabra de otro idioma como más adecuada o significativa; así me ocurre a mí en este momento si digo que los intuicionistas tienen algo de «pose».

Antes de Peano, había aparecido G. Boole (1815-1864) con su álgebra de las clases, que en 1854 publicó su *Laws of Thought* primer paso hacia el álgebra abstracta; después, es Russell (1872) el representante de la escuela. Russell no se muerde la lengua: citaré más adelante un «piropo» que dirige a los probabilistas (*); a los filósofos, en general, les ha dedicado la siguiente «indirecta»: «La filosofía de las Matemáticas ha sido hasta ahora tan propia para la controversia, tan oscura y tan poco progresiva como las otras ramas de la filosofía».

Conviene señalar que Norteamérica es uno de los países donde ha tenido más exuberante desarrollo la lógica matemática, como, en general, lo ha tenido muy brillante, desde fines del siglo XIX, toda la matemática pura y aplicada. Esto no ha dejado de constituir cierta sorpresa para los europeos; yo recuerdo que los hombres de mi generación, cuando nos formábamos en la ciencia, escuchábamos una larga teoría de nombres alemanes, ingleses, franceses..., cuando de pronto en los primeros años de este siglo surgió el nombre de Willard Gibbs (1839-1903) porque su maravillosa Memoria sobre el equilibrio de los sistemas heteogéneos perdida desde 1876 en los Anales de la Academia de Conecti-

(*) Empleo esta palabra en el sentido de cultivador de la teoría de las probabilidades.

cut, con su fundamental ley de las fases y su genial introducción del potencial químico, se puso de moda en toda Europa, a consecuencia de los estudios de la Escuela de Van'T Hoff. Después nos fuimos enterando todos los europeos de la importante contribución que los cultivadores norteamericanos de la ciencia iban haciendo, incluso en sus ramas más puras. Lo importante de esto es la actitud social que revela, en un pueblo tenido por pragmático, para sostener tales estudios. Como es sabido, no hace mucho que algunos espléndidos donantes consideraron allí que Facultades y escuelas técnicas ya había muchas, y crearon el Instituto de estudios superiores de Pasadena, donde, entre otros europeos, encontró refugio Einstein, cuando por razones políticas, fué perseguido en Alemania. Entonces dijeron las agencias informativas que el gobierno alemán había puesto precio a la cabeza de Einstein; yo publiqué un comentario diciendo que, si la noticia era cierta, el precio era bajo, cualquiera que fuese la cifra. Cuando llegó a Pasadena, le preguntaron qué aparatos o qué laboratorio necesitaba: Einstein contestó: «Mi laboratorio me lo he traído de Europa debajo del sombrero».

—¿Pues qué hace usted para investigar?

—*Pensar*, fué la respuesta del sabio físico.

A los logicistas les parece bien que los entes se definan arbitrariamente, pero exigen que la definición se ajuste estrictamente al canon aristotélico: separar de un género G por una diferencia específica D . Y reglas inflexibles: que el género esté bien determinado y que lo definido no entre en la definición. Cuando estas reglas se infringen, dicen que la definición no es predicativa o que contiene una «petición de principio».

Es curioso que pueden señalarse ya en la parte más elemental de la matemática, definiciones no predicativas; por ejemplo, la definición de una función implícita, o, más sencillamente, de las raíces de una ecuación. Cuando escribimos

$$f(x) = 0$$

pretendemos definir x por el cumplimiento de esta ecuación y es obvio que lo definido, x , entra en la definición y que no sabemos de qué género se segregan estas raíces. Pero yo no creo que casos como este preocupen a ningún matemático que conozca su oficio, siempre que esté establecido el correspondiente «teorema de existencia». Por ejemplo, al definir los ceros de los polinomios, o sea, las raíces de las ecuaciones algébricas, el género próximo es el conjunto de los números complejos y la existencia está asegurada por el teorema fundamental del Álgebra.

Según Spengler, en *La decadencia de Occidente*, esta cuestión caracteriza a la cultura faústica, en su período juvenil; el hombre faústico, a diferencia del antiguo, ha empezado por la condición D y ha imaginado luego un conjunto G de entes entre los cuales haya elementos que satisfagan a D ; así han nacido las extensiones sucesivas del concepto de número. Y ello porque siente el impulso vital de conquistar la naturaleza y, por tanto, sus representaciones.

LAS PROBABILIDADES

Pero hay otros casos más graves, por ejemplo, la definición de probabilidades: relación entre el número de casos favorables a la producción de un acontecimiento y el total de casos posibles, *siempre que estos sean igualmente probables*. La infracción es flagrante: lo definido entra en la definición. Y como siempre que una de estas no es predicativa, la infracción puede ponerse de manifiesto en forma de paradoja. D'Alembert lo hizo muy ingeniosamente: «Todas las probabilidades valen $1/2$ porque siempre hay dos casos posibles, que el acontecimiento acaezca o que no tenga lugar, y uno sólo es favorable».

Si de una baraja española de 40 cartas, yo saco una sin mirar, la probabilidad de que saque un rey es $4/40 = 0,1$; pero si un prestidigitador hace lo mismo, después de que un espectador

le haya pedido el rey de espadas, la probabilidad vale $1 - z$, siendo z la muy pequeña de que le falle el truco.

Desde que en 1654, hace ya tres siglos, y esto sin mencionar a Galileo, que ya resolvió un problema del juego de dados (1), Pascal y Fermat, resolviendo los problemas de juego que propuso al primero el caballero de Méré, iniciaron el Cálculo de las Probabilidades, grandes capacidades han tratado de encontrar una definición satisfactoria de la probabilidad matemática; el intento ha venido mucho tiempo estrellándose contra el enigma, aunque en estos años recientes se encuentre en vías de resolución. Los primeros intentos afortunados condujeron a encontrar categorías de problemas en que se consigue de algún modo, la unicidad, que falla en la definición si se prescinde de la condición de que los casos posibles sean igualmente probables. Así, Poincaré (1854-1912) estableció el método de las funciones arbitrarias iniciales, que no influyen en el resultado final y aplicable a los casos de una causa crítica o de la concurrencia de muchas causas muy complejas; Markoff (1856-1922) definió las probabilidades en cadena; Fréchet (1878-) aplicó sus espacios abstractos y Von Mises (1883-) empleó las sucesiones de números dados por la experiencia, es decir, los colectivos.

A pesar de estos intentos, Russell, el severo logicista, todavía dijo en 1929 que «la probabilidad es el concepto más importante de la ciencia moderna, especialmente porque nadie sabe lo que significa».

No obstante esta humorística condenación de Russell, es evidente que hoy tenemos bases muy sólidas para la Teoría de la Probabilidad. La primera es la estadística, en que en resumen suponemos hecho ya un conjunto de experiencias y de ellas sacamos previsiones. La segunda es la admisión de un concepto primario intuitivo como el de «A es más probable que B», esta pro-

(1) VELASCO DE PANDO: *Cálculo de las Probabilidades*, cap. I, núm. 4. Madrid, 1920.

posición considerada con su contraria, «B es más probable que A» conducen a una frontera de coexistencia límite, que es la igualdad de probabilidad, de donde pasamos ya sin dificultad a la definición clásica. Otros autores, como Hadamard en su *Cours d'Analyse*, aceptan directamente como noción primaria esta de casos equivalentes o igualmente probables. Por cierto que esta admisión de un concepto primario se parece a la «intuición original» ya mentada de los browerianos, pero con ventaja respecto a la generalidad en la especie humana, pues si a la intuición original de los números naturales se ha objetado que algunas tribus salvajes sólo tienen en su idioma palabras para designar el uno y el dos, y ya luego dicen «muchos», es en cambio seguro que un hombre de tal tribu al cruzar la selva sabe escoger el camino donde sea menos probable que aparezca agachapada una fiera. Pero todavía hay una tercer solución y es la *axiomática*, establecida por H. Jeffreys en su *Theory of Probability* (1939) y que creo tan interesante que la voy a transcribir.

AXIOMÁTICA DE LA PROBABILIDAD

Probabilidad de un suceso futuro, A, que en condiciones bien determinadas pueda producirse o no, es un número $p(A)$ asociado al suceso que satisface a los tres axiomas siguientes :

1.º *Axioma de unicidad y limitación* : Toda probabilidad p es un número real determinado tal que siempre $0 \leq p \leq 1$.

2.º *Axioma de la probabilidad total o de la suma de probabilidades* : Si varios sucesos A, B, C, ..., son excluyentes, es decir, que en la prueba a realizar sólo puede producirse uno de ellos con exclusión de los demás, la probabilidad de que se presente uno cualquiera de ellos es igual a la suma de las probabilidades correspondientes a cada uno, lo que se expresa por

$$p(A \text{ o } B \text{ o } C \dots) = p(A) + p(B) + p(C) + \dots;$$

en particular este principio se aplica al caso de que un suceso pueda presentarse de varias maneras excluyentes.

3.º *Axioma de la probabilidad compuesta o del producto de probabilidades* : Considerados varios sucesos A, B, C, ..., la probabilidad de que se presenten todos ellos, es igual, cuando se trata de sucesos independiente, al producto de las probabilidades de cada uno, o sea :

$$p(A \text{ y } B \text{ y } C \dots) = p(A) \cdot p(B) \cdot p(C) \dots$$

y cuando se trata de sucesos relacionados entre sí, la probabilidad de que se presenten todos es igual a la probabilidad del primero multiplicada por la del segundo cuando se sabe que se ha presentado el primero, por la del tercero, cuando se sabe que se han presentado el primero y el segundo, etc.

Se cumple la ley *conmutativa*, es decir, que el producto que se obtiene para la probabilidad de un suceso compuesto de varios, es independiente del orden en que se toman los sucesos para formar el producto ; en particular

$$\begin{aligned} p(A \text{ y } B \text{ y } C \dots) &= p(A) \cdot p(B \text{ si } A) \cdot p(C \text{ si } A \text{ y } B) \dots = \\ &= p(B) \cdot p(A \text{ si } B) \cdot p(C \text{ si } B \text{ y } A) \dots \end{aligned}$$

Es sencillísimo demostrar que esta axiomática conduce al mismo resultado que la definición clásica, cuando ésta tiene sentido. Supongamos que se va a hacer un ensayo del que pueden resultar en total n casos posibles, excluyentes, supuestos igualmente probables. Si llamamos p_0 a la probabilidad de uno de los casos posibles, por el axioma segundo tendremos $n p_0 = 1$, $p_0 = 1/n$. Si de los n casos posibles, son m favorables al suceso cuya probabilidad p se quiere calcular, tendremos por nueva aplicación del axioma segundo

$$p = p_0 + p_0 + \dots + p_0$$

con m sumandos en el segundo miembro, o sea :

$$p = m p_0 = m/n$$

Algunos autores, como Uspensky (1) creen que la forma axiomática no es interesante para la Teoría de las Probabilidades, porque dicen que no es propia de matemáticas aplicadas y que no dará lugar a ningún resultado nuevo. En mi opinión, la axiomática es la forma perfecta de toda teoría matemática ya pura, ya aplicada ; y si no conduce a ningún resultado nuevo, la claridad que introduce en los conocidos, es suficiente para recomendar su aceptación.

Con todo, ha de tenerse presente que la ascensión al estudio de la Probabilidad presenta dos vertientes, la racional y la empírica y que la forma axiomática es más adecuada para el método racional. Sobre la distinción entre éste y el empírico, hizo consideraciones de gran peso el Académico Sr. Artigas en su discurso de ingreso en esta Corporación, ya elogiado por mí con la admiración que se merece en otra solemne ocasión.

LAS LUCUBRACIONES DE BOREL

Cuando el número de casos posibles es infinito, la probabilidad cero representa la imposibilidad ; pero cuando los casos posibles forman un conjunto infinito, ello resulta incompatible con el axioma o principio de la probabilidad total. En efecto, la suma de las probabilidades asignadas a todos los casos posibles ha de ser la unidad ; y como las probabilidades son siempre positivas, podrá asignarse un valor no nulo a un número finito de ellos, pero no a los demás ; si, pues, se presenta uno de estos casos posibles, considerado como de probabilidad nula, tendremos producido un suceso al que se asignaba probabilidad cero.

Conviene aclarar que hablamos aquí de casos posibles en general, sin presuponer necesariamente que sean igualmente probables; así, la relación entre las probabilidades de dos casos posibles, supuestas nulas, será un cociente $\frac{0}{0}$ que, en estos problemas, presenta siempre un verdadero valor.

En resumen, el solo enunciado de considerar problemas en que los casos *posibles* forman un conjunto infinito, implica que puedan ocurrir, por ser posibles, casos a los que tenemos que asignar probabilidad nula.

Como tipo de problemas de esta clase, consideremos el siguiente: un ensayo aleatorio nos determina un punto de un segmento dado; ¿cuál es la probabilidad de que el punto cumpla cierta condición? En virtud de la dualidad punto-número, tal problema equivale a este otro: Por cierto procedimiento, en que juega el azar, determinamos un número real x de un intervalo (a, b) dado; ¿cuál es la probabilidad de que x cumpla determinada condición? Hay muchos mecanismos que pueden tomarse como representación real del tipo de problema abstracto indicado: la bola que rueda sobre una canal, partiendo con cierto impulso inicial y acabando por pararse a causa del frotamiento, que determina una distancia entre el punto de salida y el centro de la bola; la ruleta si consideramos la longitud del arco recorrido por la punta de la aguja, el error de una medición proyectada y muchísimos más.

Generalmente se atacan estos problemas postulando una *función* de densidad de la probabilidad, es decir, una función $\varphi(x)$ tal que

$$\varphi(x) \cdot dx$$

(1) J. V. USPENSKY: *Introduction to mathematical probability*. Standaford, 1937. Traducción castellana, Buenos Aires, 1954.

representa la probabilidad de que la variable estocástica venga a estar entre

$$x \text{ y } x + dx$$

Equivale esto a decir que la probabilidad de la condición $x < t$ es

$$\int_a^t \varphi(x) \cdot dx$$

En los casos más sencillos se trata aquí de una integral según Riemann; pero la apropiada para los casos más complicados y generales, es la integral de Stieltjes, que tiene la ventaja de reunir en un solo símbolo los supuestos de casos posibles en número finito, infinito numerable o continuo.

Un ejemplo de función de densidad es el de la teoría de los errores en que $\varphi(x)$ corresponde a la ley de Gauss; suele llamarse a esta la distribución *normal* por ser muchos los problemas en que aparece. Pero otro ejemplo muy importante es la distribución uniforme en que $\varphi(x)$ se reduce a una constante; se llega entonces a que la probabilidad tiene por denominador la *medida* (en sentido de Lebesgue) de los casos posibles y por numerador, la *medida* de los casos favorables. El valor cero de la probabilidad sólo indica que los casos favorables son de medida nula. Por ejemplo, si los casos posibles son los puntos de un segmento (a, b) , considerando un segmento (c, d) inferior a (a, b) , o sea,

$$a \leq c < d \leq b$$

la probabilidad de que x caiga en (c, d) será

$$p = \frac{d - c}{b - a}$$

Partiendo de esto, se demuestra que *si consideramos el desarrollo decimal indefinido de un número, la probabilidad de que no aparezca una cierta cifra, el 5, por ejemplo, es nula*. Pero es más, si en lugar de una cifra consideramos un conjunto de m cifras (m , finito), también es nula la probabilidad de que en un número real, escogido al azar, no aparezca el conjunto m en algún lugar de su desarrollo decimal.

Borel (1) ha estudiado el tema muy detenidamente, llegando a resultados sumamente curiosos. Consideremos un número real x y escribamos sus n primeras cifras decimales; contemos el número n_0 de veces que aparece el cero entre ellas, las veces n_1 que aparece el 1, etc. Los cocientes n_0/n , n_1/n , etc., miden las respectivas *frecuencias relativas* de las cifras 0, 1, ...

Si al tender n a ∞ , estas frecuencias tienden a límites, se llama a éstos frecuencia total de cada cifra. Cuando esto ocurre para cada cifra y las frecuencias totales son iguales, con lo cual por el principio de la probabilidad total valdrá $1/10$ cada una, Borel dice que el número es *normal* y demuestra entonces lo siguiente:

Dado un número real al azar, la probabilidad de que no sea normal es nula.

Ya sabemos que esto no significa que no existan números no normales: $\frac{1}{3} = 0,3333\dots$, por ejemplo, no lo es; significa que los números no normales son de medida nula.

Así, pues, dado un cierto conjunto de m cifras (por ejemplo, las 9 cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) *la probabilidad de que no aparezca tal conjunto en algún lugar del desarrollo decimal de un número normal es nula*.

Es interesante este resultado, porque precisamente la proposición

Cierto conjunto dado de m cifras forma parte de la expresión

(1) BOREL: *Filosofía de las probabilidades*, 1939.

decimal de π , ha sido tomada como piedra de toque para distinguir los criterios entre idealistas e intuicionistas. Para aquéllos, la proposición o es verdadera o es falsa, porque ellos imaginan el número π *escrito totalmente* en la esfera de las abstracciones; para los browerianos, tal proposición no es ni cierta ni falsa, puesto que no hay posibilidad humana de comprobarlo; sólo aceptarían una demostración constructiva de que el conjunto de cifras propuesto está efectivamente en π o de que no lo está.

Pero volvamos a Borel, el cual observa que un número normal en el sistema de base 10 puede no serlo en otro sistema de numeración y llama *absolutamente normales*, a los que son normales en cualquier sistema de numeración. Entonces demuestra todavía que la probabilidad de que un número real dado al azar no sea absolutamente normal, es nula.

De aquí saca la siguiente consecuencia: supongamos que para escribir el Quijote se necesitan, entre mayúsculas, minúsculas y signos de puntuación, cien signos. El Quijote quedará escrito si ponemos las cifras correspondientes en el sistema de base cien en el mismo orden en que aparecen en la obra más célebre del Príncipe de los Ingenios españoles. Formaremos así un conjunto de m cifras; y según lo dicho, este conjunto aparecerá en la expresión de un número absolutamente normal, puesto que es nula la probabilidad de que no ocurra así; ello sólo puede fallar excepcionalmente en casos de medida nula.

Después del Quijote, podrán venir las obras completas de Victor Hugo, que es el ejemplo que pone Borel, y así todas las obras imaginables e incluso las que se escriban en el futuro.

A propósito de esta sorprendente aparición del Quijote o de Biblia en la expresión centesimal de un número absolutamente normal, recuerdo una anécdota que hace tiempo leí. Se refería a cierto escribano llamado a formar el inventario de los bienes de una opulenta marquesa recién fallecida, el cual, acompañado de un amanuense y ampliamente provisto de papel sellado, des-

pués de estampar con minucia todos los requisitos y preliminares del caso, hizo escribir : «Me persono para iniciar el inventario en la biblioteca de la Sra. Marquesa y cojo el primer libro, que resulta ser un ejemplar de la Sagrada Biblia, que copiado a la letra dice así».

Con lo cual es de presumir, aunque la anécdota es ya vieja, que el minucioso escribano esté todavía con el inventario de los libros de la fallecida Marquesa.

Conviene decir que el convenio de que la probabilidad nula no implica la imposibilidad, exige que la probabilidad uno no signifique la certeza. En efecto, sean A y B dos sucesos mutuamente excluyentes y tales que uno de ellos ha de presentarse en cada ensayo. Por el axioma o principio de la probabilidad total, si $p(A)$ y $p(B)$ son las probabilidades respectivas, hemos de tener

$$p(A) + p(B) = 1.$$

Si $p(B) = 0$, resulta $p(A) = 1$; pero si $p(B) = 0$ no significa la imposibilidad, tantas veces como B excepcionalmente se presente, no se presentará A, a pesar de valer 1 su probabilidad.

La cuestión se presenta también cuando los casos posibles, forman un conjunto infinito, pero resulta este numerable, en lugar de formar un continuo. Como ejemplo, tomemos el siguiente problema : un cierto procedimiento aleatorio nos determina un número entero, siendo todos ellos igualmente probables. ¿Cuál es la probabilidad de que el determinado resulte primo?

Tomemos primeramente n enteros (1, 2, 3, ..., n), con n muy grande ; el número de primos inferiores a n está representado asintóticamente (1) por

$$n/\lg n$$

(1) VELASCO DE PANDO: *Repertorio de funciones*, núms. 250 y 254. Madrid. 1949.

luego la probabilidad será

$$\frac{n}{\lg n} \frac{1}{n} = \frac{1}{\lg n}$$

y tiende a cero para $n \rightarrow \infty$. Así, pues, escogido al azar un número entre todos los enteros, la probabilidad de que sea primo es nula. Y, sin embargo, hay números primos y éstos forman un conjunto ilimitado.

También esta cuestión se relaciona con las discusiones entre idealistas e intuicionistas. Formulemos la siguiente pregunta : ¿El número cósmico, o, si se prefiere un ejemplo más concreto, el número

$$10^{10^{10}} + 1$$

es primo o es compuesto? Los idealistas creen que la pregunta está bien formulada, pero que no pueden, por ahora, contestarla ; los intuicionistas afirman que la pregunta carece de sentido y que tal número ni es primo ni es compuesto ; los probabilistas son los más concretos : la probabilidad de que sea primo es cero, pero este cero no implica la imposibilidad absoluta. Si jugásemos m partidas apostando en cada una la cantidad C a que algún número de ese orden es compuesto, ganaríamos casi siempre, y nuestra esperanza matemática sería $m C$; pero, ¿quién podría ser el juez de las partidas?

Pero toda la discusión sobre los fundamentos no ha impedido el desarrollo frondoso del Cálculo de las Probabilidades, uno de cuyos capítulos, la Estadística, se ha convertido hoy en ciencia especial con importante aparejo matemático, que alumbra, no ya sólo los seguros, la psicotecnia y la biometría sino el 90 por 100 de la Física, salida así, por fuerza, del molde estrecho determinista que le imprimieron sus fundadores.

LOS DOS PRIMEROS TRATADOS SOBRE TEORÍA DE LAS PROBABILIDADES

Antes de dejar el Cálculo de las Probabilidades, bueno será decir que si el primer Tratado sobre la materia, titulado *De ratiociniis in ludo aleae*, lo escribió en 1656 el célebre matemático y físico holandés Cristian Huygens, nacido y muerto en La Haya (1629-1695), quien es seguro que conoció los trabajos de Fermat y Pascal, el segundo Tratado sobre Probabilidad, de que hay noticia, se debió a la pluma del no menos célebre fraile español y, por cierto madrileño, Juan Caramuel y Loblokowitz, Obispo de Königratz y Arzobispo de Otranto (1606-1682) que en su *Mathesis Biceps, Vetus et Nova*, obra en folio con unas 1.700 páginas, cuya segunda edición es de 1670 y que sobre otras ramas de la Matemática, como los logaritmos, ya contienen ideas originales, aunque no hayan prevalecido, dedicó a las Probabilidades extenso capítulo ; así lo reconoce el alemán Wieleitner, en su *Historia de las Matemáticas*.

Por cierto que Caramuel, cuando la ocasión llegó, hizo honor a su sangre española, sabiendo ceñirse la espada del guerrero sobre el hábito del Cister, contribuyendo con tanto valor, energía y saber a la defensa de Praga, contra los suecos, que el Emperador le premió con valioso collar de oro ; fué el referido un episodio de la complicada guerra de los treinta años, aquella respecto a la cual revelaba pasmoso espíritu profético, el personaje de cierta obra teatral, que al verse desdeñado por su dama, decía con énfasis, inmediatamente antes de caer el telón : «Parto para la guerra de los treinta años».

FINAL DE LA DISCUSIÓN SOBRE LOS FUNDAMENTOS

En toda la discusión sobre los fundamentos de la Matemática, entre las cuatro escuelas precitadas, hay también una cosa prometedora : los matemáticos de ambas ramas, pura y aplicada, siguen trabajando y llegando a resultados nuevos ; mientras los técnicos discuten sobre la seguridad de los cimientos, los albañiles continúan con toda tranquilidad en lo más alto del edificio, acabando de poner las tejas ; sin esta conclusión optimista, las discusiones entre las escuelas no serían «aptas para menores» como algunas películas.

LA EVOLUCIÓN EN ESPAÑA

Si quisiésemos estudiar la evolución en España de las matemáticas pura y aplicada en los últimos cien años, cosa que por no poder entrar a fondo en ello no puede formar parte de nuestros propósitos, creo yo que tendríamos que dividir el tiempo expresado en dos períodos :

El primero, desde la creación de esta Academia de Ciencias en 1847, hasta la primera década de este siglo ; el segundo, comprendería, naturalmente, los años restantes hasta nuestros días. El progreso comienza por cierto muy lento y va sucesivamente acelerándose ; en el primer período tendríamos que hablar de un progreso de los españoles en la matemática ; en el segundo podríamos ya mencionar progresos de la matemática en España. En el primer período aparecen hombres heroicos, verdaderos pioneros, que auto-formándose con grandes trabajos, venciendo enormes dificultades de documentación y moviéndose en un medio agriado por las luchas civiles y políticas y cuya indiferencia para estas dis-

ciplinas raya en la hostilidad, llegan algunos a resultados brillantes ; no queremos citar ningún nombre, porque cualquiera de ellos que acuda a la memoria, exigiría por equidad y por proporcionalidad que citásemos otros muchos. En el segundo período el progreso está ya manifiesto : se han formado y surgen verdaderos maestros que, a su vez, facilitan la formación acelerada de otros cultivadores. En la transición del primero al segundo período, de que puedo hablar por recuerdos personales, es cuando nos encontramos muchos que sentimos el complejo de que no haya en España una investigación matemática comparable a la de otros países, y esto nos lleva precisamente a convertirnos en aficionados, románticamente enamorados de esta ciencia y dispuestos a aplaudir e impulsar cuanto aparezca de brillante. Sin entrar, como ya he dicho, en el examen de esta evolución, lo que sí me parece adecuado es reseñar aquí el estado actual, limitándome a señalar trabajos interesantes publicados durante los últimos diez años, no pudiendo esta relación ser exhaustiva ; por el contrario, seguramente tendrá lagunas, porque de una manera subjetiva voy a limitarme a señalar aquellos estudios que han llegado a mi conocimiento y que me han producido impresión digna de ser consignada.

Del maestro D. Julio Rey Pastor señalaré dos magníficas obras : la primera, la que lleva por título *Los problemas lineales de la física*, publicada en Madrid en 1955, y en la que hace un estudio a fondo de todos los algoritmos empleados en la física moderna, siempre que se admita la linealidad. A pesar de su título, la obra no es interesante solamente para el físico matemático, sino que también ofrece perspectivas de rica inspiración para el matemático puro. La segunda obra a que me refiero es la *Historia de la Matemática*, publicada en 1952 en la Argentina, en colaboración con el Sr. Babini, obra en que de modo magistral se va siguiendo la evolución del pensamiento matemático desde los tiempos más antiguos de que se conserva noticia hasta nuestros

días. Señalemos todavía el valioso trabajo *La matemática abstracta del siglo XX*, publicado en la Revista «Las Ciencias», de 1951.

Nuestro compañero Puig Adam sigue dedicado en estos tiempos con gran asiduidad al tema de la pedagogía matemática, cuestión que a mi ver reviste en España en estos momentos una importancia verdaderamente social. En efecto, es fácil comprender que el número de jóvenes que en España han de recibir formación matemática hasta un cierto grado, crece considerablemente, porque es el producto de dos factores, cada uno de los cuales experimenta notable crecimiento, pues de una parte aumenta la población y, de otra, crece el coeficiente de frecuencia o de proporcionalidad, porque el aumento de la industrialización, la mecanización del campo, el perfeccionamiento de los métodos agrícolas y la evolución del tecnicismo en muchas cuestiones, implican la señalada formación matemática en una proporción mayor.

La importante labor de Puig Adam, repercutirá en dos vertientes : de una parte facilitando el trabajo de los que han de aprender y, de otra, haciendo más ligera la labor para los que han de enseñar.

A la línea expresada corresponde también el discurso inaugural *La evolución de la didáctica matemática en nuestra generación*, publicado en la Revista «Las Ciencias», del año 1954, y en otro orden de investigaciones señalaremos el trabajo de nuestro referido compañero : *Reducidas ascendentes y reducidas descendentes en el algoritmo de las fracciones continuas de elementos diferenciales*, publicado en la Revista de la Academia de 1954, y también su memoria *Sobre algunas propiedades de las fracciones continuas de elementos diferenciales*, publicado en la Revista «Las Ciencias», en el año 1955.

En el Instituto Técnico de la Construcción y del Cemento, que dirige nuestro compañero D. Eduardo Torroja, se ha logrado por sus colaboradores un resultado de gran interés : representar con notable aproximación las propiedades tensión-defor-

mación del hormigón, considerando a éste como agregado o compuesto ideal de un elemento elástico, otro plástico perfecto y un tercero viscoso. Estos compuestos ideales, que ya consideró Prager (*), no tienen, claro está, nada que ver con la composición en el sentido físico químico ordinario.

Nuestro compañero D. Alfonso Peña Boeuf se ha dedicado estos últimos tiempos al estudio de un proyecto de extraordinario interés y notoriedad, cual es el de un puente a través del Estrecho de Gibraltar. Aunque no se trate de un trabajo estrictamente matemático, bien vale la pena de dejar aquí constancia de tan audaz estudio, siquiera por los complicados cálculos numéricos que implica. Pero la atención a tan magno proyecto no le ha impedido publicar en la Revista «Las Ciencias», de 1956, un valioso trabajo sobre *Vibraciones de las estructuras*.

Nuestro compañero D. Ricardo San Juan, valor de vanguardia entre nuestros matemáticos puros y que también se asomó con éxito a algunas aplicaciones, publicó en la Revista de esta Academia de 1948 un interesantísimo trabajo sobre los teoremas clásicos de la teoría de Galois, con demostraciones originales o simplificadas respecto a los expuestos en los tratados. Muy importante es también su estudio sobre los fundamentos de un teoría general de las series divergentes, publicado en la Revista de esta Academia en los años 50, 51 y 52. En la Revista «Las Ciencias», de 1952, publicó su *Generalización de un teorema de Steinhauß sobre funciones lineales*, y en colaboración con el Sr. Rodríguez Salinas, hace en la Revista de la Academia de 1953 una brillante exposición de algunos teoremas conocidos y otros nuevos sobre convergencia ordinaria y uniforme de la integral de Fourier. Interesantísimo es también su trabajo *Un tipo especial de polinomios*, publicado en la revista «Las Ciencias», del año 1954.

(*) PRAGER (W): *Mécanique des solides isotropes au delà du domaine élastique*. M. des S. M., Paris, 1937.

También debemos mencionar el importante trabajo del Académico electo D. Antonio Colino *Un estudio de la excitación de ondas*, publicado en la Revista de la Academia de 1949.

En Barcelona la actividad matemática es también digna de atención; bien se nota la presencia allí de un maestro como el Académico Numerario D. Antonio Torroja. Señalaremos los siguientes trabajos de D. José María Orts: *Sobre el pentágono inscriptible*, «Revista Matemática Elemental» 4.ª serie, tomo VIII, 1948; *La obra matemática de E. Lindelöf*, «Revista Hispano-Americana», 4.ª serie, tomo VIII, 1948; *Series recurrentes de polinomios de Legendre*, Seminario Matemático de Barcelona, año 1950; *Sobre la estructura de ciertas series de polinomios*, Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona, año 1950; *Variaciones del valor medio cuadrático del módulo de una función analítica en un recinto limitado por una elipse*, Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona, año 1951; *Sobre una ecuación diofántica*, «Revista Matemática Hispano-Americana», 4.ª serie, tomo XII, núm. 1; *Nota sobre la convergencia de algunas sucesiones* «Gaceta Matemática», 1.ª serie, tomo V, núms. 7 y 8, año 1953; *Sobre el recinto de convergencia de las series de Legendre*, Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona, año 1953; *Aportación al problema de la prolongación analítica de las series de Legendre*, Seminario Matemático de Barcelona, año 1954; *Sobre algunas transformaciones de las series de Legendre*, «Revista Matemática Hispano-Americana», 4.ª serie, tomo XIV, 4 y 5, año 1954; *Sobre algunas relaciones recurrentes no lineales*, «Revista Matemática Hispano-Americana» 4.ª serie, tomo XV, números 3 y 4, año 1955; *Areas de algunos recintos*, «Gaceta Matemática», 1.ª serie, tomo VII, núms. 5 y 6, año 1955; *Estudio de algunos casos elementales de representación conforme*, «Gaceta Matemática», 1.ª serie, tomo IX, núms. 4 y 5, año 1956; *Series recurrentes de polinomios de Tchebycheff*, Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona, año 1956.

Muy interesante es la *Teoría de las series de Fourier*, completada por D. Sixto Ríos en la Revista de esta Academia de 1948, que comprende, no sólo el estudio de las series de Fourier propiamente dichas, sino de las de funciones ortogonales, con empleo de la integral de Lebesgue y demostración del teorema de Riesx-Fischer. Muy notable es también su trabajo *Algunas leyes de probabilidad y procesos estocásticos, deducidos de una integral de Laplace-Stieltjes*, publicado en la Revista de esta Academia de 1952.

En la Revista de esta Real Academia, de 1948, publicó don Baltasar Rodríguez Salinas dos interesantes trabajos, el uno sobre la inversión en el orden de la derivación, el otro sobre la teoría de la medida.

Y en la misma Revista, estudió con acierto D. Antonio Plans y Sanz de Bremond los operadores lineales en el espacio de Hilbert.

Otros trabajos muy dignos de mención :

Sobre la prolongación analítica de las series de Dirichlet, por don Antonio de Castro Brzezicki (Revista de la Academia, de 1949). Del Sr. J. Martínez Salas, *Estadística de los cuerpos sin trabajo interno* (Revista de la Academia, de 1949). En la Revista de la Academia de 1950 : D. Alfredo Páez Balaca, Ingeniero de Caminos : estudio interesantísimo sobre *Variables de probabilidad*.

En la Revista de la Academia, de 1951 : *Dinámica del punto de masa variable*, por A. de Castro Brzezicki, presentado por el Académico Numerario Sr. Navarro Borrás ; comprende la relatividad restringida. Del mismo Sr. Castro, *Sobre el comportamiento asintótico de las integrales de las ecuaciones diferenciales lineales*.

En la Revista «Las Ciencias», de 1951 : *Integrador eléctrico de la ecuación de Poisson*, por D. Mariano Fernández Bello ; *Consideraciones geométricas acerca de los números pitagóricos*,

por D. Clemente Sáenz García ; *Sobre el teorema de Lane*, por don Enrique Gullón ; *Generalización de la geometría analítica ordinaria*, por D. Arturo Fraile ; *Sobre estructuras en lámina delgada*, por D. Vicente Roglá Altec.

En la Revista de la Academia, de 1952 : D. R. Ortiz Fornaguera, sobre *La variancia de las magnitudes en el formalismo canónico* ; D. Antonio Plans Sanz de Bremond, *Algunas propiedades lineales de las matrices acotadas*. Considera las matrices acotadas como un conjunto algebraico que se puede construir axiomáticamente al margen de toda consideración métrica. Don Antonio Plans, *Sobre la aproximación dimensional en el espacio de Kuratowsky* ; D. Emilio Pajares, *Sobre un problema en la determinación de órbitas de estrellas dobles* ; el Sr. Ortiz Fornaguera, *El análisis funcional con relación al formalismo de Dirac para sistemas dinámicos localizables* ; Sr. Azorín, *Sobre la distribución t no central*.

Revista «Las Ciencias», de 1952 : *Sobre una generalización de las curvas de Pearson*, por D. Sebastián Navarro ; *Método de cálculo para enlaces elásticos entre estructuras planas*, por don Vicente Roglá.

Revista de la Academia, de 1953 : D. Clemente Sáenz García, *Nuevo ensayo acerca de unidades físicas* ; D. Antonio Plans, *Aportación al estudio de los grupos de homología de los recubrimientos cíclicos ramificados correspondientes a un nudo*.

Revista «Las Ciencias», año 1953 : *Nuevos métodos nomográficos*, por el Sr. Belgrano Brémard.

Revista de la Academia, de 1954 : Notabilísimo el trabajo del Sr. Cuesta presentado por el Académico Sr. Alvarez Ude, *Algebra ordinal*. El Sr. Cuesta se viene dedicando con especial asiduidad a la matemática del orden, y sus trabajos son citados por autores extranjeros.

D. Procopio Zoroa Terol : *Determinación de la probabilidad interior de un recinto mediante la función de distribución en el*

contorno. Demuestra que es suficiente conocer la función de distribución en una banda arbitrariamente estrecha que contenga en su interior a una curva de Jordan cerrada y rectificable para conocer la masa situada en el interior del recinto que tiene por contorno a dicha curva ; D. Carlos Calvo Carbonell : *Serie que da la raíz de una ecuación algebraica o trascendente* ; D. José María Rebollo : *Determinación de la escala de recurrencia de una serie*. Se dan criterios sencillos para sumar series recurrentes de determinados tipos que son casos particulares del problema de Hadamard.

Revista «Las Ciencias» de 1954 : *Una sucesión aritmética de orden infinito*, por D. Francisco Javier Rubio Vidal ; *Contornos de ángulos rectilíneos. Equivalencia de ecuaciones de la forma $|f(x, y)| + \varphi(x, y) = 0$* , por D. Vicente Fraile.

Revista de la Academia, 1955 : D. Ernesto Corominas Vigneaux : *Sobre la caracterización de las derivadas definidas como límites de diferencias divididas* ; D. Baltasar R. Salinas : *Funciones con momentos nulos*.

Revista «Las Ciencias», de 1955 : *Algoritmos finitos para gráficas periódicas*, por D. Vicente Fraile ; *Particularidades del sistema de numeración binario*, por D. Clemente Sáenz García ; *Calculador eléctrico de estructuras reticulares*, por D. M. García Ortega ; *Crítica de los actuales métodos de cálculo de las bóvedas cilíndricas delgadas*, por D. Ramón Vidal de Artaza.

Revista de la Academia, de 1956 : D. Juan Arregui Fernández : *Estudio aritmético de la Geometría sobre una curva algebraica*, presentado por el Académico Numerario, D. Francisco Navarro Borrás. D. Antonio Rodríguez Sanjuán : *Reducción dentro del campo real de las integrales elípticas a formas canónicas. Los problemas de unicidad en la teoría de series asintóticas, expresión de funciones semianalíticas mediante los algoritmos de Borel y Stieltjes*, por D. Baltasar R. Salinas. D. Darío Maravall Casesnoves : *Nuevos tipos de ecuaciones diferenciales e in-*

tegradiferenciales. Nuevos fenómenos de oscilación. D. A. G. Azpeitia : *Un método para el cálculo de la matriz inversa.* D. Carlos Ibáñez García : *Estudio de los polinomios del Profesor R. San Juan.*

Revista «Las Ciencias», año 1956 : *Nota sobre el último teorema de Fermat*, por D. Eduardo de Fraga Torrejón ; *Sobre el último teorema de Fermat*, por D. E. G.-Rodeja F.

Revista «Las Ciencias», de 1957 : *Integrales oscilantes de las ecuaciones diferenciales lineales con segundo miembro*, por don A. de Castro Brzezicki ; *Sobre funciones de interpolación para los coeficientes de una serie de potencias convergente*, por don A. G. Azpeitia.

Los nombres y los trabajos transcritos nos permiten formular una esperanza muy prometedora sobre el porvenir de la Matemática en España ; tenemos ya grandes talentos ; los genios los manda Dios ; pero como en cierta ocasión oí decir al gran Carracido, en las soluciones saturadas es donde con mayor probabilidad surgen los cristales.

Por mi parte he contribuído al movimiento indicado en esta década con algunos trabajos ; pero no vale la pena de citarlos ante la importancia de los que quedan reseñados. En lo que no cedo a nadie es en amor y afición a esta ciencia milenaria, misteriosa con los pitagóricos, que convierten sus descubrimientos en secretos de secta ; clara y luminosa con Euclides ; precursora de métodos modernos con Arquímedes ; convertida su historia en terrible tragedia cuando la furiosa muchedumbre de Alejandría da bárbara muerte a la hija de Teon, la bella e inteligente Hipatia, la comentadora de Apolonio, convirtiendo su cuerpo, digno del mármol pentélico, en horrible despojo ; poética con los árabes andaluces que cultivan el álgebra, traducen con Juan de Sevilla a los antiguos y propagan las cifras hindúes ; lanzada por caminos potentísimos por Descartes y Newton ; pirotecnia de cálculos formales con Euler ; rigorista con Cauchy y Abel, que colo-

can arcángel con espada flamígera para expulsar del paraíso del análisis todo algoritmo sospechoso como las series divergentes, hoy reivindicadas ; magistral con Gauss ; intuitiva con Riemann ; sistemática con Klein ; profunda con Poincaré ; penetrante con Cantor en un más allá de infinitos sobre infinitos ; convertida en formalista por Hilbert por evaporación de la sustancia mediante la más completa generalización ; dominadora de la naturaleza con Einstein ; reveladora en fin, a cada paso fundamental, de nuevos e insospechados horizontes que implican sublimes armonías en que vienen a encuadrarse de modo maravilloso los hechos antiguos y modernos.

HE DICHO.