REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

DISCURSO

LEIDO EN EL ACTO DE SU RECEPCION
POR EL

EXCMO. SR. D. GERMAN ANCOCHEA QUEVEDO

Y

CONTESTACION

DEL

EXCMO. SR. D. FRANCISCO NAVARRO BORRAS

EL DIA 23 DE NOVIEMBRE DE 1966

MADRID
DOMICILIO DE LA ACADEMIA: VALVERDE, 22
TELEFONO 221-25-29
1966

Depósito Legal M. 15.674.—1966.

TALLERES GRÁFICOS VDA. DE C. BERMEJO.—J. GARCÍA MORATO, 122.—TEL. 233-06-19.— MADRID

DISCURSO

DEL

EXCMO. SR. D. GERMAN ANCOCHEA QUEVEDO

TEMA:

ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

Señores Académicos:

Señoras y Señores:

No son dictadas por convención protocolaria las palabras con que quiero comenzar mi discurso. Expresan con sinceridad cordial mi profundo reconocimiento a la Academia por el alto e inmerecido honor que me dispensa al admitirme en su seno para colaborar en sus tareas científicas, a las que, dentro de la limitación de mis modestas posibilidades, contribuiré con entusiasmo, y sobre todo con el sentimiento de responsabilidad que, freno y acicate, presta valor y eficacia a la actividad científica personal. Esta es mi promesa, que afirmo aquí junto con mi mayor gratitud para vosotros que quisisteis hacerme vuestro compañero.

Ha querido el destino que, en dos momentos capitales de mi vida académica, me haya correspondido el honor de suceder a mi más querido maestro: don José Gabriel Alvarez Ude. La razón administrativa de su jubilación, dio lugar a mi acceso a la cátedra de Geometría de la Universidad de Madrid, que don José regentó brillantemente hasta 1946. Sucesor en el puesto docente del maestro, el discípulo continuó recibiendo las generosas mercedes del saber y de la experiencia de aquél. Doce años después, la inapelable razón de la muerte hizo al discípulo, de nuevo, sucesor del maestro en el sillón que, con todo honor y con méritos evidentemente superiores a los míos, ocupaba él en esta Academia. A nadie extrañará, pues, que al evocar hoy la venerable figura del maestro, a quien debo lo mejor de mi formación científica y profesional, resuenen en mis palabras los ecos conmovidos que reflejan un sentimiento de orfandad.

Fue don José profesor mío de Análisis, en mis primeros años de Universidad, y luego de Geometría en los últimos de mi carrera. Guardo aún viva la impresión profunda que me causaron entonces sus explicaciones precisas y los sobrios comentarios, marcados a veces de benévola ironía, con los que nos estimulaba a seguirle y penetrar con él en el austero recinto del más riguroso pensamiento matemático. Recuerdo muy bien su rápido y certero discurrir ante cada cuestión. Dotado de aguda percepción, de extraordinaria capacidad y de conocimientos vastos y profundos, poseía un sentido crítico extremadamente fino, aunque injustamente riguroso para consigo mismo. En ese sentido crítico se encuentra la principal explicación de la parquedad de sus publicaciones. Algunas de ellas, en particular las que se refieren a las superficies alabeadas, poseen la nitidez y la belleza de las mejores exposiciones clásicas y hacen lamentar que exigencias excesivas hayan limitado la frecuencia de su comunicación por escrito con el mundo matemático. Limitación que, por otra parte, fue ampliamente compensada por la extensión y valía de su labor profesional dentro y fuera de la cátedra. Obra señera su labor didáctica, por el rigor y la elegancia de expresión y por su eficacia formativa e informativa, ha contribuido decisivamente a la mejora de la enseñanza y al encauzamiento de la investigación matemática en nuestro país. Fue, junto a Rey Pastor, uno de los maestros más influyentes en el grupo matemático formado hacia los años treinta y que cuenta, entre otros, nombres como Flores, Santaló, Ríos y San Juan. Grupo que, por vez primera en la historia matemática española, hizo frecuente su presencia con brillantez en las más exigentes revistas matemáticas de todo el mundo.

Cortés y bondadoso siempre, don José ofrecía al primer contacto esa nota dominante de timidez que enmascara, a menudo, con apariencia brusca o fría, un fondo emotivo y cordial de exquisita sensibilidad. Al rigor y sobriedad de su pensamiento científico respondió de modo natural la austeridad elegante de su vida pública y privada. Católico auténtico y profundamente liberal, aspiró siempre a un orden social equitativo, basado en una justicia sin falla. No dudó nunca en sacrificarse por el bien general. Cuando necesidades imperiosas le obligaron a procurar complementos económicos al sueldo de profesor universitario, siempre insuficiente para sostener con decoro una familia numerosa como la suya, aceptó un puesto en el Instituto Nacional de Previsión; pero lo hizo después de rehusar proposiciones mucho más tentadoras, en lo que a remuneración se refiere, procedentes de entidades particulares de seguros. Siento no poder juzgar con precisión la profundidad y la amplitud de sus conocimientos en la ciencia matemática del Seguro, ya que mi incompetencia en ese dominio me lo impide. Para relevarme a mí en este punto, habla de ellos con cumplida elocuencia la impresionante labor creadora y de organización llevada a cabo por él en los servicio actuariales del Instituto.

Paso ahora a ocuparme del tema de este discurso.

A comienzos de este siglo, las matemáticas se presentaban como una serie de disciplinas distintas, fundadas sobre nociones particulares y claramente diferenciadas. Como prueba explícita de este hecho, recordemos las partes de que constaba la gran «Enzyklopädie der Mathematischen Wissenchaften»: Aritmética, Algebra, Geometría, Análisis... Sin embargo, no faltaban entre ellas conexiones que, a veces, permitían interpretar los resultados de una disciplina mediante los de otra y aplicar métodos esencialmente idénticos para estudiar teorías propias de disciplinas diferentes.

La evolución posterior de la matemática, debida principalmente a una sistemática utilización del método axiomático, ha venido a mostrar que, bajo apariencias de diversidad, entre las distintas disciplinas existen relaciones íntimas que invalidan, por anacrónica, aquella clasificación.

Como es sabido, en el método axiomático se parte de unos objetos: *elementos primitivos*, que no se definen, entre los cuales se establecen relaciones que satisfacen unas ciertas condiciones: los *axiomas* de la teoría. La teoría matemática correspondiente está constituida por una cadena de proposiciones deducidas de los axiomas mediante las reglas de una lógica; esencialmente la lógica formal aristotélica adaptada a las exigencias particulares de la matemática. En el método axiomático no se presta atención al conocimiento de la naturaleza de los objetos estudiados; intencionadamente se desconoce tal naturaleza y sólo interesan las relaciones existentes entre dichos objetos. Estos quedan caracterizados por la condición de satisfacer exclusivamente las propiedades que imponen los axiomas. En este sentido, e invirtiendo el orden del punto de vista escolástico, los axiomas constituyen, como agudamente señaló Poincaré, definiciones disfrazadas de dichos objetos. Puede muy bien ocurrir entonces que objetos matemáticos particulares, estudiados en disciplinas diferentes o en teorías distintas de una misma disciplina, satisfagan los axiomas de una teoría axiomática dada. En tal caso, desde un punto de vista matemático, dichos objetos han de considerarse idénticos y, naturalmente, los resultados de esta teoría son aplicables a todos ellos. De este modo el método axiomático pone de relieve la razón íntima de las conexiones existentes entre teorías o disciplinas distintas y, más aún, permite destacar las ideas comunes que puedan presentarse y que frecuentemente se ocultan entre los detalles técnicos propios de cada disciplina.

Como consecuencia de la evolución ya indicada, en lugar de las disciplinas clásicas, que daban una clasificación artificial de las matemáticas, aparecen hoy las llamadas *estructuras* matemáticas. No vamos a dar una definición precisa de estructura matemática porque tal definición requeriría tecnicismos complicados de la teoría de conjuntos. En una primera aproximación podríamos decir que una estructura matemática es el conjunto de teorías matemáticas que corresponden a una axiomática común. Una vez establecido el concepto de estructura, a la división clásica de la matemática en disciplinas sucede la que considera los distintos tipos de estructuras. En el estado actual de las matemáticas, se distinguen tres tipos principales de estructuras: estructuras de orden, estructuras algebraicas y estructuras topológicas. A estos tipos hay que añadir otros, en particular los correspondientes a estructuras mixtas en las que intervienen simultáneamente relaciones de orden, algebraicas y topológicas [1].

Una de las notas diferenciales de las estructuras frente a las disciplinas de la matemática clásica es la de que, mientras éstas se ocupaban de objetos «concretos», tales como números y figuras, las estructuras, como consecuencia de su origen axiomático, consideran objetos de naturaleza no especificada. Debido a este hecho, aparte de la ventaja de dar una clasificación natural de las matemáticas, las estructuras constituyen instrumentos apropiados de trabajo. Si, estudiando un problema concreto, observamos que los objetos de que se trata en él están ligados por las relaciones y satisfacen los axiomas

---

[1] Aunque el concepto de estructura matemática, tal como lo entendemos hoy, se encuentra ya latente en trabajos y exposiciones del siglo pasado, al menos para estructuras simples como los grupos, es a N. Bourbaki y a su escuela a quien se debe el haber puesto de relieve su fundamental importancia y el haberlo situado en la posición central que ocupa hoy en la matemática. Especialmente, con la publicación, a partir de 1937, de su monumental tratado «Eléments de Mathématique», cuya primera parte está consagrada al estudio de las estructuras fundamentales. La influencia de los escritos de Bourbaki en la redacción del presente discurso es tan evidente que hace superflua toda ulterior referencia en el texto. (Ver la Bibliografía al final.)

de una estructura determinada, disponemos *ipso facto* de todos los resultados generales obtenidos para dicha estructura. Resultados que, en el caso considerado, deberían ser establecidos directamente por métodos probablemente más laboriosos debido a que la presencia, en muchos casos superflua, de hipótesis restrictivas puede entorpecer el tratamiento de problemas particulares. Otra de las ventajas de la introducción del concepto de estructura en matemáticas radica en que, por poseer cada una de ellas un lenguaje propio, son susceptibles de despertar intuiciones de aplicación general. Estas intuiciones, como acertadamente indica Bourbaki, no son necesariamente de carácter espacial o sensible, sino que corresponden a un conocimiento del modo de comportarse los entes matemáticos de la teoría axiomática correspondiente, ayudado por imágenes variadas y basado esencialmente en el trato habitual de dichos objetos.

Con las estructuras en matemáticas no sólo desaparece el orden tradicional en éstas, sino que algunas de las disciplinas de más abolengo pierden su autonomía para quedar incluidas en estructuras nacidas históricamente de otras disciplinas. Así, las geometrías clásicas, que Klein en su célebre Programa de Erlangen caracterizó como teorías de los invariantes de subgrupos del grupo lineal, quedan subordinadas a las estructuras algebraicas correspondientes a dichos subgrupos. De las geometrías permanece únicamente, como recuerdo, un lenguaje cómodo y adecuado para las aplicaciones a diversas teorías de la matemática actual, repleto de intuiciones en el sentido que hemos resaltado. El Algebra, en cambio, no sólo consolida su tradicional situación con el nuevo punto de vista, sino que acrecienta su importancia y sus dominios abarcando hoy toda una clase de estructuras fundamentales: las estructuras algebraicas. Nuestro discurso va a versar principalmente sobre éstas.

Hasta mediados del siglo pasado se consideró como tema fundamental del Algebra la resolución de las ecuaciones algebraicas, ecuaciones obtenidas por anulación de polinomios. Así, una autoridad como Serret, en su «Cours d'Algèbre supérieure» (1866), escribe: «El Algebra es, propiamente hablando, el Análisis de las ecuaciones». Resolver una ecuación, en Algebra clásica, consiste en obtener unos números, llamados raíces o soluciones, mediante operaciones con otros números dados. La cuestión supone, por tanto, disponer de un conjunto de elementos denominados números entre los cuales se han definido unas operaciones. Punto de partida para la formación de ese conjunto fueron los números naturales, enteros positivos, con las operaciones de adición y multiplicación. Pero ya en los primeros tiempos de la historia de las matemáticas se presentan problemas sin solución en el dominio de los números naturales. Para soslayar este inconveniente, los matemáticos introducen en primer lugar las fracciones, las cuales forman un conjunto que comprende al de los números naturales y en el que se definen una adición y una multiplicación que prolongan las operaciones del mismo nombre establecidas para los números naturales. Aunque las reglas de cálculo con las fracciones, que generalizan de modo natural las correspondientes a los números enteros, eran bien conocidas de los egipcios y babilonios, los matemáticos griegos de la época clásica no llaman números a las fracciones; el nombre de número era estrictamente reservado para los enteros. Tenemos que llegar a Diofanto, cuando la matemática griega clásica ha perdido ya su vigor, para que, después de vencidos escrúpulos de terminología, motivados más bien por razones de índole filosófica que matemática, las fracciones sean consideradas como números. El proceso de ampliación del concepto de número se repite varias veces a lo largo de la historia. Aparecen sucesivamente los irracionales positivos, originados por el problema de la medida de magnitudes geométricas; los números negativos, que hacen posible la sustracción cuando el minuendo es menor que el sustraendo; y, finalmente, los números complejos, introducidos por los algebristas italianos del siglo XVI para la resolución de la ecuación de tercer grado. Los números negativos y los complejos se presentan inicialmente sólo en etapas intermedias de sucesiones de operaciones en problemas en los que los datos y los resultados finales pertenecen a la clase de números considerados anteriormente. De ahí los nombres de números falsos, sordos, absurdos, imaginarios, etcétera, con los que son designados al comienzo. El hábito de su manejo y su comportamiento respecto de las operaciones, completamente análogo al de los considerados precedentemente, hacen que los nuevos entes sean, al fin, considerados como verdaderos números.

Durante la segunda mitad del siglo pasado y los primeros decenios del actual, la enseñanza del Algebra sigue centrada en torno a la teoría de ecuaciones; de modo que, para el gran público, esta teoría continúa constituyendo el objeto primordial del Algebra. Tan es así que un eminente matemático español, desaparecido hace pocos años, expresaba insistentemente su convicción de que el teorema de

Abel, que afirma la imposibilidad de resolver mediante radicales las ecuaciones generales de grado superior al 4.º, constituía la clave del bello y terminado edificio del Algebra. Sin embargo, precediendo a dichos períodos, la investigación acerca de cuestiones de Algebra aparece ya orientada hacia otros aspectos en los que la resolución de ecuaciones no desempeña un papel preponderante. La investigación se dirige más bien al estudio de conjuntos de elementos que no sólo no son números sino que, además, las operaciones que se definen entre ellos pueden gozar de propiedades que difieren esencialmente de las que tienen las definidas entre números. De ahí una imposibilidad para considerar los nuevos entes como verdaderos números. Conjuntos del tipo indicado aparecen ya alrededor de 1800. Recordemos algunos ejemplos, entre los más simples y comprensibles para el profano. a) La interpretación de la suma de los números complejos como suma de vectores del plano de Gauss, pone de relieve que la composición de vectores, utilizada en Mecánica ya desde fines del siglo XVII para la composición de fuerzas y velocidades, goza de las mismas propiedades formales que la adición de números. b) La teoría de sustituciones, originada por el problema de la resolución por radicales de las ecuaciones de grado superior al 4.º, utiliza una operación: el producto de sustituciones, que tiene algunas propiedades comunes con la multiplicación de números, pero que, contrariamente a esta última, no es conmutativa. c) El cálculo de conjuntos de G. Boole, el creador de la Lógica simbólica moderna, que permite establecer las reglas del cálculo de proposiciones, es otro ejemplo de conjuntos cuyos elementos, los subconjuntos de un conjunto dado, no son números y entre los cuales se definen dos operaciones: unión e intersección, de propiedades análogas pero no coincidentes con las de adición y multiplicación de números.

De los ejemplos precedentes y de otros de más complicada técnica matemática, va emergiendo la noción de estructura algebraica: ente matemático constituido por uno o varios conjuntos entre cuyos elementos se definen operaciones o leyes de composición que satisfacen ciertas propiedades. El estudio de estas estructuras algebraicas, que evidentemente engloban las del Algebra clásica, constituye el objeto del Algebra actual, llamada también Algebra abstracta.

Antes de entrar de lleno en nuestro tema, debemos hacer una observación. Resultaría muy difícil, por no decir imposible, hablar de la matemática actual utilizando únicamente la terminología clásica y refiriéndose a las ideas elementales incluidas hasta tiempos recientes en la formación matemática del público culto. A una matemática en la que la Aritmética desempeñaba un papel primordial, ha venido a suceder otra en la que la base está constituida por la teoría de Conjuntos. Los términos, los conceptos y las relaciones que se utilizan ahora con más frecuencia, seguramente más simples desde un punto de vista lógico, tienen en cambio los inconvenientes psicológicos que acompañan a las novedades en el saber. Tendremos que hablar forzosamente de subconjuntos, aplicaciones, funciones, correspondencias, productos cartesianos, morfismos, etc. Procuraremos dar, en cada caso, una definición lo más precisa posible dentro de los límites de espacio y tiempo de que disponemos; con la esperanza, y sobre todo con el deseo, de no aportar alimento a la leyenda del hermetismo de las ciencias matemáticas, tan enraizada en el sentir popular.

Una estructura algebraica está determinada por uno o varios conjuntos entre cuyos elementos se han definido *operaciones* o *leyes de composición* que satisfacen las condiciones impuestas por los axiomas de la estructura. El caso más simple es el de una estructura con un solo conjunto y una sola ley de composición. A él vamos a prestar atención especial, debido a que las particularidades que ofrece ilustran ampliamente lo que ocurre en el caso general.

Dado un conjunto C, una ley de composición en C es una función que hace corresponder a cada par ordenado (a, b) de elementos de C otro elemento c de C. Si designamos con el símbolo $*$ dicha ley, escribiremos $a * b = c$. El elemento c se llama el *compuesto*, o el *producto*, mediante $*$ de a y b. Para fijar las ideas sobre este concepto, pongamos algunos ejemplos. i) C es el conjunto de los números enteros y $*$ la adición ordinaria. ii) C es el conjunto de los puntos del espacio y $*$ la ley por la que al par de puntos (a, b) le corresponde el punto medio c del segmento $a\,b$. iii) C es el conjunto de los movimientos del plano y $*$ la ley de composición de movimientos; es decir, aquella que a dos movimientos a y b hace corresponder el movimiento obtenido aplicando primero a y luego b.

En términos de la teoría de conjuntos, una ley de composición en C es una aplicación del cuadrado cartesiano $C^2 = C \times C$, conjunto formado por los pares ordenados de elementos de C, en el mismo conjunto C; aplicación que está determinada por un subconjunto D del producto $C \times C \times C$, conjunto de ternas ordenadas de elementos de C, que satisfacen, entre otras, la condición de que, si dos ternas (a, b, c) y (a, b, d) pertenecen a D, se ha de tener $c = d$.

La estructura que vamos a estudiar estará determinada por el conjunto C, la operación $*$ y las condiciones que ha de satisfacer $*$. Dejamos para más adelante la consideración de estas últimas, que corresponden a los axiomas estrictamente algebraicos de la estructura, y pasamos a establecer algunos conceptos y resultados válidos cualesquiera que sean dichas condiciones. Supondremos únicamente que éstas son las mismas para todas las estructuras que estudiemos; hecho que expresaremos diciendo que se trata de estructuras de la misma *especie*. Con esta hipótesis designaremos habitualmente, y salvo indicación en contra, todas las operaciones con el mismo símbolo. Comencemos con el concepto de *isomorfismo*. Sean $(C, *)$ y $(C', *)$ dos estructuras de la misma especie. Un isomorfismo entre las dos es una correspondencia φ *biyectiva* entre C y C', es decir, una correspondencia entre C y C' en la que a cada elemento de C se le asigna un solo elemento de C', y cada elemento de C' corresponde a un solo elemento de C, de tal modo que se verifique

$$\varphi(a * b) = \varphi(a) * \varphi(b)$$

para todo par (a, b) de C. Esta igualdad puede expresarse verbalmente así: al compuesto de dos elementos de C le corresponde en C' el compuesto de los correspondientes a dichos elementos. Es trivial la comprobación de que un isomorfismo es una relación de equivalencia, esto es, que cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva características de toda equivalencia. Esta equivalencia refleja, en particular, el hecho esencial en el que hemos insistido al comienzo, en axiomática: la naturaleza de los objetos estudiados es indiferente para la teoría considerada.

Dadas dos estructuras $(C, *)$ y $(C', *')$ —¡por una vez designamos con símbolos distintos las dos operaciones!— diremos que la segunda es una *subestructura* de la primera si C' es un subconjunto de C y si, además, para todo par de elementos (a', b') de C' se cumple $a' *' b' = a' * b'$; en otro términos, si C' está contenido en C y la restricción de $*$ a C' coincide con $*'$. De la definición resulta que, dada $(C, *)$, la $(C', *')$ está unívocamente determinada por el subconjunto C' de C. Sin embargo, debemos hacer observar que no todo subconjunto C' de C corresponde a una subestructura; para que esto sea así, C' debe ser cerrado para la operación $*$, es decir, el compuesto de dos elementos cualesquiera de C' mediante $*$ ha de pertenecer a C'. Hecha esta advertencia prescindiremos en general en lo que sigue del símbolo $*$ de la ley de composición para representar una estructura $(C, *)$ y designaremos ésta simplemente con la letra C del conjunto correspondiente. En todo caso, el contexto indicará claramente si C designa el conjunto o la estructura. Dadas dos subestructuras C_1 y C_2 de C, la intersección de C_1 y C_2 será, por definición, la subestructura de C que corresponde al conjunto C_3 de elementos comunes a C_1 y C_2 que, como se ve fácilmente, es cerrado respecto de $*$. La intersección de un número cualquiera, finito o no, de subestructuras de C es una subestructura de C. Este hecho implica que las subestructuras de C constituyen lo que se llama un *sistema de clausura* en C.

El isomorfismo es un caso particular del concepto de *morfismo*, fundamental en la teoría de estructuras, y en tal grado que, si se pretende hablar con precisión, la matemática debe definirse como el estudio de las estructuras *junto con el* de los morfismos correspondientes. Incluso en un punto de máxima abstracción, la matemática podría reducirse al estudio de los morfismos. En el caso de las estructuras algebraicas, un morfismo de una estructura C en otra C' se define como una aplicación φ del conjunto C en el C', es decir una ley que asigna a cada elemento de C uno de C', tal que se verifique, como para los isomorfismos, $\varphi(a * b) = \varphi(a) * \varphi(b)$. La diferencia respecto de los isomorfismos consiste, por una parte, en que a elementos distintos de C puede corresponder el mismo elemento en C' y, por otra, en que pueden existir elementos de C' que no correspondan a ningún elemento de C. En términos técnicos, la aplicación de C en C' no es en general biyectiva. En todo caso, la imagen C'_1 de C por φ, conjunto de elementos de C' que corresponden a algún elemento de C, determina una subestructura de C', por ser C'_1 cerrado respecto de $*$, como se comprueba inmediatamente. Si φ es *inyectiva*, es decir, si aplica elementos distintos de C en elementos distintos de C', el morfismo se llama *monomorfismo* y se dice también que φ produce una *inmersión* de C en C'. Si φ es *suprayectiva (¡sit venia verbo!)*, esto es, si todo elemento de C' corresponde a un elemento de C, se dice que φ es un *epimorfismo* y que C' es una *estructura cociente* de C. De las definiciones resulta que un isomorfismo es simultáneamente un monomorfismo y un epimorfismo. Cuando C coincide con C', φ se denomina *endomorfismo*; un endomorfismo que sea isomorfismo se llama *automorfismo*.

Sea φ un morfismo de C en C' y sea φ' un morfismo de C' en C''; se define como morfismo producto $\varphi' . \varphi$ (primero φ y luego φ') el morfismo φ'' de C en C'' correspondiente a la aplicación $\varphi' . \varphi$ del conjunto C en el C''; aplicación tal que si es $\varphi(a) = a'$ y $\varphi'(a') = a''$ da $\varphi''(a) = a''$. El producto de morfismos es asociativo, es decir, satisface la igualdad $\varphi'' . (\varphi' . \varphi) = (\varphi'' . \varphi') . \varphi$. Para la multiplicación de morfismos, los automorfismos idénticos se comportan como elementos neutros.

Un morfismo φ de C en C' determina, de un modo natural, una equivalencia $\mathbf{k}$ en el conjunto C, que resulta de considerar como equivalentes dos elementos a y b de C cuyos transformados en C' coinciden, esto es $\varphi(a) = \varphi(b)$. A la equivalencia $\mathbf{k}$ se le llama el *núcleo* de φ. De dos elementos a_1 y a_2 equivalentes en $\mathbf{k}$ diremos que son *congruentes* módulo $\mathbf{k}$, o simplemente congruentes, y escribiremos $a_1 \equiv a_2$. De las propiedades de φ resulta que si es $a_1 \equiv a_2$ y $b_1 \equiv b_2$, se verifica $a_1 * b_1 \equiv a_2 * b_2$. Vemos así que el conjunto de las clases de equivalencia en C módulo $\mathbf{k}$ determina una estructura en la que se puede obtener la clase compuesta de dos componiendo un elemento cualquiera de la primera con otro cualquiera de la segunda. La estructura así obtenida es isomorfa con la imagen C'_1 de C en C'.

Recíprocamente, consideremos una estructura C y una equivalencia $\mathbf{k}$ en el conjunto C. Decimos que esta equivalencia es compatible con $*$, o también que $\mathbf{k}$ es una *congruencia* en la estructura C, si, con la notación precedente, $a_1 \equiv a_2$ y $b_1 \equiv b_2$ implica

$$a_1 * b_1 \equiv a_2 * b_2$$

Tenemos entonces el resultado siguiente: Toda congruencia en C es el núcleo de un morfismo de C. Con más precisión, dada una congruencia $\mathbf{k}$ en C, existe un epimorfismo de C en una estructura C', cuyo conjunto es el de las clases de equivalencia de C módulo $\mathbf{k}$, mientras que la ley de composición es la que se obtiene componiendo elementos de dichas clases mediante $*$; dicha estructura C' se designa con la notación $C/\mathbf{k}$. El morfismo que hace corresponder a cada elemento de C su clase de equivalencia en $C/\mathbf{k}$ lo llamaremos epimorfismo *natural*, y $C/\mathbf{k}$ se designa con el nombre de estructura cociente *canónica* de C modulo $\mathbf{k}$. De lo que precede resulta, sin más, que núcleo y congruencia son conceptos equivalentes.

Un morfismo $*$ de C en C' determina unívocamente la estructura cociente canónica $C/\mathbf{k}$, la estructura imagen C'_1 en C' y un isomorfismo entre las dos. Del siguiente diagrama

$$C \xrightarrow{\varphi_1} C/\mathbf{k} \xrightarrow{\varphi_2} C'_1 \xrightarrow{\varphi_3} C'$$

resulta entonces que φ se descompone en el producto de un epimorfismo natural φ_1, un isomorfismo φ_2 y una inmersión φ_3. Se obtiene así la llamada descomposición canónica de φ, $\varphi = \varphi_3 \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_1$, que expresa el contenido del *primer teorema de isomorfía*.

Sea C una estructura y φ un morfismo de C. En toda subestructura C_1 de C, φ induce de modo evidente un morfismo φ_1 y éste, a su vez, una congruencia $\mathbf{k}_1$. Sea, por otra parte, $\mathbf{k}\,(C_1)$ el subconjunto de C formado por todos los elementos que son congruentes módulo $\mathbf{k}$ con alguno de C_1. En $\mathbf{k}\,(C_1)$, que es una subestructura de C, $\mathbf{k}$ subordina una congruencia, que designaremos con la misma letra $\mathbf{k}$. Se tiene entonces el *segundo teorema de isomorfía*: Las estructuras cociente $C_1/\mathbf{k}_1$ y $\mathbf{k}\,(C_1)/\mathbf{k}$ son isomorfas.

Si tenemos en C dos congruencias $\mathbf{k}$ y $\mathbf{h}$, diremos que $\mathbf{k}$ está contenida en $\mathbf{h}$ (con símbolos $\mathbf{k} \subseteq \mathbf{h}$) si de a congruente con b módulo $\mathbf{k}$ se sigue a congruente con b módulo $\mathbf{h}$. Si $\mathbf{k}$ está contenida en $\mathbf{h}$, ésta determina, de un modo natural, una congruencia en la estructura cociente $C/\mathbf{k}$, congruencia que denotaremos por $\mathbf{h}/\mathbf{k}$. Es válido entonces el *tercer teorema de isomorfía*, que afirma: Las estructuras cociente $C/\mathbf{k}$ y $(C/\mathbf{k})/(\mathbf{h}/\mathbf{k})$ son isomorfas.

Los tres teoremas de isomorfía desempeñan un papel fundamental en Algebra. Deducidos inicialmente para grupos, su importancia fue reconocida por Emmy Noether, por lo que se suelen designar con el nombre de esta ilustre algebrista cuya contribución creadora ha sido fundamental y decisiva para el desarrollo del Algebra abstracta.

El estudio completo de una estructura requiere la consideración del conjunto de sus subestructuras y el de la clase (¡que no es un conjunto!) [2] de sus estructuras cociente.

---

[2] Utilizamos en nuestra exposición la axiomática de Bernays-Gödel-von Neumann para la teoría de conjuntos. En ella son conceptos primitivos el de clase, el de «ser elemento de» (o «pertenecer a»). No toda clase es un conjunto; para que lo

Las subestructuras aparecen ordenadas de un modo natural cuando se considera la ordenación por inclusión de los conjuntos correspondientes. Para esta ordenación forman lo que se llama un retículo completo. Dado un subconjunto cualquiera X de C, llamaremos subestructura $S(X)$ generada por X en C a la subestructura mínima de C cuyo conjunto contenga a X. Como las subestructuras constituyen, según dijimos anteriormente, un sistema de clausura, resulta que $S(X)$ es la intersección de las subestructuras de C cuyo conjunto contiene a X. Para que el conjunto de $S(X)$ sea igual a X es necesario y suficiente que X sea cerrado respecto de $*$. En el caso en que $S(X) = C$, se dice que X es un sistema generador de C.

El símbolo S puede considerarse como un operador que hace corresponder a cada subconjunto X de C otro subconjunto $S(X)$ de C y posee las propiedades siguientes:

1.ª De $X \subseteq Y$, se sigue que $S(X) \subseteq S(Y)$

2.ª $X \subseteq S(X)$.

3.ª $S(S(X)) = S(X)$.

Es lo que se llama un *operador de clausura* en C. Para $S(X)$ es posible dar otra definición constructiva, que no vamos a detallar aquí, en virtud de la cual resulta que, para todo elemento a perteneciente a $S(X)$, existe un subconjunto X_1 de X, constituido por un número finito de elementos, tal que a pertenece ya a $S(X_1)$. Esta propiedad se expresa diciendo que S es un *operador de clausura algebraico*. Dicha propiedad implica que la ordenación por inclusión de los conjuntos $S(X)$ es inductiva, lo que lleva consigo la posibilidad de aplicar en su estudio el lema de Zorn, que al menos en Algebra es más cómodo de manejar que la inducción transfinita, a la cual es lógicamente equivalente, como es bien sabido.

El operador S permite definir entre los subconjuntos de C una *relación de dependencia*. Diremos que el subconjunto Y depende del subconjunto X si Y está contenido en $S(X)$. De la propiedad 2.ª de S resulta que X depende de X, y de la 3.ª se concluye que la dependencia es transitiva, es decir, que si Z depende de Y e Y depende de X, Z depende de X. La relación de dependencia determina, por tanto, una *preordenación* de los subconjuntos de C, indicando el pre-

---

sea, es necesario y basta que la clase sea elemento de otra clase. Con esta axiomática se evitan todas las paradojas de la teoría de conjuntos conocidas hasta la fecha; en particular, la de Bertrand Russell que se refiere al «conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos».

fijo *pre* que, si bien se cumplen las propiedades reflexiva y transitiva de toda ordenación, puede ocurrir que Y dependa de X y X dependa de Y sin que X e Y coincidan. De un subconjunto X de C diremos que es *independiente* si, para todo elemento a de X, a no depende del conjunto $X - a$ (conjunto obtenido suprimiendo a del conjunto X). Con las definiciones precedentes se puede establecer el importante concepto de *base*. Llamaremos base de C a un subconjunto B de C que sea independiente y que, al mismo tiempo, sea un sistema generador de C. Debemos observar que no toda estructura admite una base. Condición suficiente para que la admita es que se verifique el llamado *axioma de cambio* o *sustitución*, cuyo enunciado dice así: Si z no depende del conjunto X y depende, en cambio, del conjunto (X, y) obtenido agregando a X el elemento y, el elemento y depende del conjunto (X, z). Cuando se cumple este axioma, una base B está caracterizada por una cualquiera de las dos propiedades siguientes: a) B es un sistema generador mínimo; b) B es un sistema independiente máximo. A partir de la segunda propiedad, el lema de Zorn permite probar fácilmente la existencia de una base. Se puede demostrar un resultado más general, a saber: Si I es un sistema independiente y G un sistema generador, se puede completar I con elementos de G para formar una base. El número finito o infinito de elementos de una base se denomina *dimensión* de la estructura. Se prueba entonces, suponiendo siempre válido el axioma de cambio, que la dimensión es un invariante de la estructura; dicho de otro modo, dos bases distintas constan del mismo número de elementos. En todo caso, si B es una base de C, y C' una estructura de la misma especie que C, todo morfismo φ de C en C' está determinado unívocamente cuando se conoce la aplicación $\varphi(B)$ de la base B en C'.

La importante cuestión de la existencia de la llamada estructura libre generada por un conjunto arbitrario M, se halla íntimamente ligada con lo que precede. El problema se plantea en la forma siguiente: Sea M un conjunto cualquiera y E la especie de estructuras que venimos considerando. Se pide determinar una estructura L de dicha especie y una aplicación inyectiva ψ de M en L tales que, para toda estructura A de la especie E y toda aplicación φ de M en el conjunto A, exista un morfismo único f de L en A que verifique la igualdad $\varphi = f.\psi$. Si existe, L está unívocamente determinado, salvo un isomorfismo, y admite $\psi(M)$ como base. A L se le da el nombre de *estructura libre* de especie E generada por M. En el caso de las estructuras consideradas hasta ahora, se prueba que, si M contiene «bastantes» elementos, existe la estructura libre L generada por M; y, en ese caso, que toda estructura A de la especie E puede obtenerse como estructura cociente de la estructura libre generada por el conjunto A.

Dada una estructura C, si dos de sus estructuras cociente C' y C'' determinan el mismo núcleo $\mathbf{k}$ en C son isomorfas entre sí, por serlo ambas con la estructura cociente canónica $C/\mathbf{k}$. Si consideramos equivalentes dos estructuras cociente cuando determinan el mismo núcleo, las clases de equivalencia de dichas estructuras cociente de C forman un conjunto biyectivo con el de los núcleos de C. Por ser una equivalencia en C, cada uno de estos núcleos está caracterizado por un subconjunto del cuadrado cartesiano C^2 de C. La ordenación por inclusión de estos subconjuntos de C^2 da una ordenación para aquellas clases de equivalencia. Como la intersección de un número cualquiera de núcleos es un núcleo, según se comprobaría fácilmente, resulta que dicha ordenación da lugar a un retículo completo. Dado un subconjunto Y de C^2, llamaremos núcleo $N(Y)$ generado por Y al núcleo mínimo cuyo conjunto representativo en C^2 contiene a Y. Tenemos así un operador N definido para los subconjuntos de C^2 que hace corresponder al subconjunto Y el $N(Y)$ y posee propiedades análogas a las del operador $S(X)$ considerado anteriormente; en particular, se puede probar que $N(Y)$ es un operador de clausura algebraico.

Una estructura C se llama trivial cuando el conjunto C consta de un solo elemento; si e es dicho elemento, la ley de composición da forzosamente $e * e = e$. Para que una estructura C admita una subestructura trivial es necesario y suficiente, por tanto, que C contenga un elemento e tal que se verifique $e * e = e$. Un elemento de este tipo se denomina *idempotente*. En consecuencia, C admitirá tantas subestructuras triviales como elementos idempotentes existan en C.

Para una estructura cualquiera C, existen siempre dos estructuras cociente, una la propia estructura C y otra una estructura trivial correspondiente al núcleo en el que todos los elementos de C son equivalentes. Si C no admite más que esos dos núcleos, diremos que la estructura C es *simple*.

Dada en una estructura C una congruencia $\mathbf{k}$, si una de las clases de equivalencia C' de $\mathbf{k}$ es una subestructura de C, expresaremos este hecho diciendo que la sucesión de estructuras C', C, $C/\mathbf{k}$ es *exacta;* diremos también que C' es *distinguida* [3] en C.

Sea C una estructura y A una de sus subestructuras. Una *serie normal* entre C y A es una cadena de subestructuras de C

$$C = C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots \supseteq C_{n-1} \supseteq C_n = A$$

tal que cada C_{i+1} sea distinguida en C_i; lo que equivale a decir que en cada C_i existe una congruencia $\mathbf{k}_i$ para la cual C_{i+1} es una clase de elementos equivalentes, o también que la sucesión C_{i+1}, C_i, $(C_i/\mathbf{k}_i)$ es exacta. Las C_i son los *términos* y las estructuras cociente $C_i/\mathbf{k}_i$ los *factores* de la serie normal. Dada otra serie normal entre C y A, se dice que es *más fina* que la precedente cuando todos los términos de ésta forman parte de la nueva; si hay términos de la segunda que no figuran en la primera, diremos que la segunda es *estrictamente más fina* que la dada. Dos series normales entre C y A se llaman isomorfas si constan del mismo número de términos y si, además, es posible establecer una biyección entre los factores de una y otra de modo que cada dos factores homólogos sean isomorfos.

Sea C una estructura algebraica tal que, para ella y para sus subestructuras, *todas* las congruencias sean permutables [4]; es válido entonces el importante teorema de Schreier: Dadas dos series normales entre C y A, cada una de ellas admite otra más fina de modo que las dos nuevas series así obtenidas son isomorfas. Este teorema se demuestra mediante el lema de Zassenhaus el cual resulta, a su vez, de los teoremas de isomorfía, suponiendo siempre la permutabilidad de las congruencias. Si en una serie normal alguno de los factores es trivial, el término correspondiente de la serie coincide con el siguiente. Si ninguno de los factores es trivial, diremos que la serie carece de *repeticiones*. Una serie normal sin repeticiones que no admita otra estrictamente más fina sin repeticiones se denomina *serie de composición*. Para que una serie normal sea de composición es necesario y suficiente que carezca de repeticiones y que todos sus factores sean simples. Las

---

[3] Entre las subestructuras de una dada, las llamadas distinguidas son las que presentan verdadero interés y, por ello, son las únicas que suelen considerarse.

[4] Dadas dos relaciones R_1 y R_2 en un conjunto, se define su producto $R_2 . R_1 = R_3$ de la manera siguiente: Si entre los elementos a y b existe la relación R_1 y entre los b y c la relación R_2, entonces y sólo entonces existe entre a y c la relación R_3. En general, $R_2 . R_1$ y $R_1 . R_2$ son distintas; cuando estas dos relaciones coinciden, se dice que R_1 y R_2 son *permutables*.

series de composición, en el caso de congruencias permutables, satisfacen el clásico teorema de Jordan-Hölder: Dos series de composición entre C y A son siempre isomorfas. El caso particular más importante de los teoremas de Schreier y de Jordan-Hölder corresponde a aquel en el que la subestructura A de C es trivial; entonces se habla simplemente de serie normal o de serie de composición de C. Si una estructura C admite una serie de composición, toda estructura C' isomorfa con C admite una serie de composición isomorfa con la de ésta; sin embargo, el recíproco no es cierto. Dos estructuras pueden admitir series de composición isomorfas sin que dichas estructuras sean isomorfas entre sí. En general no existe serie de composición para una estructura o entre una estructura y una de sus subestructuras. La posibilidad de existencia se halla ligada a las llamadas condiciones de las cadenas, que desempeñan, por este hecho, un papel importantísimo en Algebra abstracta. Estas condiciones que aseguran la existencia de las series de composición se enuncian así: *Condición de mínimo* (Artin): Toda sucesión decreciente de subestructuras $G_1 \supseteq G_2 \supseteq \ldots$, tal que G_{i+1} sea distinguida en G_i, para todo i, debe ser estacionaria, es decir, a partir de un índice N todas las G_i son iguales. *Condición de máximo* (Noether): Toda sucesión creciente de subestructuras $H_1 \subseteq H_2 \subseteq \ldots$, tal que, para todo i, H_i sea distinguida en H_{i+1} debe ser estacionaria, esto es, todas las H_i deben ser iguales a partir de un índice N. En cierto sentido, los teoremas relativos a las series de composición generalizan los de la Aritmética elemental referentes a la descomposición de un número en producto de factores primos. Se trata en ambos casos de reducir el estudio de un objeto matemático al de otros más sencillos o irreducibles y se aspira a obtener un teorema de existencia de esa reducción y un teorema de unicidad. En el caso general, la unicidad ha de entenderse en sentido amplio, a saber: unicidad salvo un isomorfismo.

Si se tienen dos estructuras $(C_1, *)$ y $(C_2, *)$ de la misma especie, se define, como *producto directo* de las dos, una estructura $(C, *)$ cuyo conjunto C es el producto cartesiano $C_1 \times C_2$, conjunto de pares de elementos (a_1, a_2), a_1 de C_1 y a_2 de C_2, y cuya ley de composición $*$ está determinada por la igualdad

$$(a_1, a_2) * (b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 {}_* * b_2)$$

Las estructuras dadas son estructuras cociente del producto directo C, ya que, por ejemplo, la aplicación $\varphi(a_1, a_2) = a_1$ define un epimorfismo de C sobre C_1. En general no es posible sumergir C_1 en C; para que lo sea basta que C_2 admita una subestructura trivial. En efecto, si e_2 es un elemento idempotente de C_2, la aplicación $\psi_1(a_1) = (a_1, e_2)$ da un monomorfismo de C_1 en C. La definición de producto directo se extiende sin dificultad al caso de un número arbitrario, finito o no, de estructuras. Sea C_λ un conjunto cualquiera de estructuras de la misma especie, y C, su producto directo; para cada subíndice λ se tiene un epimorfismo φ_λ de C sobre C_λ. Los φ_λ satisfacen las dos condiciones siguientes: α) si a y b son dos elementos de C y para todo λ se verifica $\varphi_\lambda(a) = \varphi_\lambda(b)$, resulta $a = b$; y β) dado, para cada λ, un elemento a_λ en C_λ, existe un elemento único a en C tal que $\varphi_\lambda(a) = a_\lambda$. En el caso de un número finito de estructuras C_λ, los epimorfismos y las dos condiciones precedentes caracterizan a C, salvo un isomorfismo. En el caso general, sea C' una estructura y, para cada λ, sea φ'_λ un epimorfismo de C' sobre C_λ. Si se supone que los φ'_λ satisfacen la condición α), se demuestra que C' es isomorfa a una subestructura del producto directo C de las C_λ. Una subestructura de C que goce de las propiedades de C' se denomina producto *subdirecto* de las C_λ.

Un problema de gran importancia en Algebra es el de la *extensión* de una estructura C_1 por otra C_2. Se trata en él de determinar una estructura C de modo que: i) exista una inmersión ψ_1 de C_1 en C; y ii) C_2 sea una estructura cociente de C con un núcleo $\mathbf{k}$ en el que una de las clases de congruencia sea $\psi_1(C_1)$. Se ha de tener, por tanto, que la sucesión $\psi_1(C_1)$, C, $C/\mathbf{k}$ ha de ser exacta y $C/\mathbf{k}$ isomorfo con C_2. Si C_2 contiene un idempotente, el producto directo de C_1 por C_2 da una solución del problema, que muy bien puede admitir otras. Cuando esto ocurre se establece entre las soluciones una relación de equivalencia mediante la siguiente definición: Dos extensiones C y C' de C_1 por C_2 son equivalentes cuando existe entre C y C' un isomorfismo f que cumple las condiciones: a) Si ψ y ψ' son los monomorfismos de inmersión de C_1 en C y en C', respectivamente, se ha de tener $f \,.\, \psi = \psi'$; b) si φ y φ' son los epimorfismo de C y C' sobre C_2, se ha de verificar $\varphi = \varphi' \,.\, f$. El problema de extensión de estructuras fue considerado primeramente por Schreier en el caso de los grupos; su desarrollo ulterior se sitúa en los orígenes de una floreciente rama de la matemática actual conocida con el nombre de Algebra homológica.

La unión de un número C cualquiera de subestructuras de una dada C, es la subestructura mínima de C que contiene a todas las

C_λ; la denotaremos con el símbolo $\cup C_\lambda$. Un sistema de subestructuras de C se llamará *sistema local* si su unión coincide con C.

Un conjunto de congruencias $\mathbf{k}_\mu$ de C se denomina *separante*, cuando, para todo par de elementos a y b distintos de C, existe una $\mathbf{k}_\mu$ tal que a y b no son equivalentes.

Con las definiciones precedentes, se consideran los siguientes tipos de propiedades de una estructura algebraica. Una propiedad P de una estructura C se llama *abstracta*, cuando toda estructura C' isomorfa con C goza de dicha propiedad. El ser estructura cociente de una estructura dada es una propiedad abstracta; en cambio, no lo es la de ser subestructura de otra estructura. Una propiedad P se llama *local* para una estructura C, cuando el hecho de que todas las subestructuras de un sistema local de C gocen de la propiedad P implica que C tiene la propiedad P. Finalmente, una propiedad P se denomina *residual* para C si de que las estructuras cociente correspondientes a un sistema separante de núcleos satisfagan la propiedad P se concluye que C goza de dicha propiedad. En correspondencia con estos tipos de propiedades se tiene una clasificación de las estructuras algebraicas.

Examinemos ahora algunos de los axiomas o condiciones que puede satisfacer una ley de composición $*$ en una estructura C. Si en C existe un elemento e tal que, para todo a de C, se tiene $e * a = a$ y $a * e = a$, se dice que e es un *elemento* neutro para $*$ y que la estructura posee elemento neutro. En los ejemplos del comienzo, i) y iii) poseen elemento neutro, mientras que ii) no lo admite. Si e y e' son elementos neutros para $*$, de $e = e * e' = e'$ resulta que dichos elementos coinciden; queda, por tanto, justificado hablar *del* elemento neutro de C.

De una estructura $(C, *)$ se deduce otra $(C, *')$, con el mismo conjunto C, definiendo $*'$ mediante la igualdad $a *' b = b * a$, para todo par (a, b) de C. La estructura $(C, *')$ así obtenida se llama *opuesta* de la $(C, *)$; la relación de oposición es evidentemente simétrica. Si dos estructuras opuestas coinciden, esto es, si para a y b cualesquiera se verifica $a * b = b * a$, se dice que $*$ es *conmutativa*. La adición de números es conmutativa, en tanto que no lo es la composición de movimientos en el plano.

Para tres elementos cualesquiera a_1, a_2, a_3 de C, definimos el compuesto de la terna ordenada (a_1, a_2, a_3), componiendo primero a_1 con a_2 y luego este resultado con a_3. Con más precisión, si es

$a_1 * a_2 = b$ y $b * a_3 = c$, se define $a_1 * a_2 * a_3 = c$. Si, cualesquiera que sean a_1, a_2, a_3, poniendo $a_2 * a_3 = b'$, se verifica $a * b' = c$, con el mismo c anterior, diremos que $*$ es *asociativa*. Utilizando paréntesis, la propiedad asociativa se escribe así:

$$(a_1 * a_2) * a_3 = a_1 * (a_2 * a_3)$$

La adición de números es asociativa, en cambio no lo es la ley de composición dada para el ejemplo ii). Una estructura $(C, *)$ con $*$ asociativa se denomina *semigrupo*. Operando sucesivamente, $*$ puede extenderse a toda sucesión finita $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y se define así: $a_1 * a_2 * \ldots * a_n$. En el caso de un semigrupo las propiedades relativas a la introducción y supresión de paréntesis se demuestran por recurrencia, como en Algebra elemental.

Cuando $*$ admite elemento neutro e, se dice que un elemento a' es *simétrico* de otro a si se tiene $a * a' = a' * a = e$. En la adición de enteros, positivos y negativos, el 0 es el elemento neutro y el simétrico del entero a es el $-a$. Para la multiplicación de enteros, el elemento neutro es el 1 y solamente 1 y -1 admiten elemento simétrico. Si C es un semigrupo, y a' y a'' son dos simétricos de a, las igualdades

$$a' = a' * e = a' * (a * a'') = (a' * a) * a'' = e * a'' = a''$$

prueban que a' y a'' coinciden. Frecuentemente el simétrico de a se designa con el símbolo a^{-1}. Un semigrupo en el que todos los elementos admiten simétrico se llama *grupo*. Los grupos constituyen una de las estructuras algebraicas más importantes. Los grupos conmutativos se denominan *abelianos*, en memoria del célebre y malogrado matemático noruego Abel. Como símbolo para la ley de composición de los grupos abelianos se utiliza el signo $+$ de la adición de números, y el elemento neutro recibe el nombre de cero o *elemento nulo* del grupo. Si un grupo no es conmutativo se usa como símbolo de la ley de composición el punto ortográfico utilizado para la multiplicación de números; el elemento neutro se llama entonces *elemento unidad* del grupo.

Si en una estructura C, dados un elemento fijo a y otro b arbitrario, de $a * b = a * b'$ se sigue que $b = b'$, y de $b * a = b'' * a$ se concluye que $b = b''$, diremos que a es un elemento *regular* de C. En otros términos, decir que a es regular equivale a la posibilidad de simplificar por a, cuando este elemento aparece en los dos miembros de una igualdad operando en ambos al mismo lado. En un semi grupo todo elemento que admite simétrico es regular; en particular, todos los elementos de un grupo son regulares. Sea φ un morfismo de un grupo G en otro G'; se ve inmediatamente que φ aplica el elemento neutro de G en el de G', y que a dos elementos simétricos de G corresponden dos elementos simétricos de G'. Es fácil ver que la imagen G' de G por φ es un subgrupo de G'. En el núcleo de φ, la clase de congruencia del elemento neutro es un subgrupo N de G y el núcleo queda completamente determinado por dicho subgrupo N. En efecto, la clase de congruencia de un elemento a de G es el subconjunto $a \,.\, N$ constituido por los elementos de G que se obtienen componiendo a con cada uno de los elementos de N. Esta es la razón por la que, en teoría de grupos, es más bien N quien viene designado con el nombre de núcleo. No todo subgrupo de G puede ser núcleo de un morfismo; para que un subgrupo N' lo sea, es necesario que los dos subconjuntos de G, $a.N'$ y $N'.a$, coincidan para todo a de G, y cuando esto ocurre, el grupo N' se llama subgrupo *distinguido* o también subgrupo *normal* de G [5]. Se ve sin dificultad que para dos núcleos N y N' cualesquiera, las congruencias correspondientes en G son permutables; en consecuencia, los grupos son estructuras para las cuales son válidos los teoremas de Schreier y de Jordan-Hölder. Precisamente, dichos teoremas fueron establecidos por vez primera para los grupos.

En teoría de grupos se plantea el problema de inmersión siguiente: Dado un semigrupo S, ¿existirá un grupo G que admita S como subestructura? O, en lenguaje más cómodo pero menos preciso: Dado un semigrupo S, ¿existirá un grupo G que lo contenga? Como para los elementos de S han de coincidir las operaciones en G y en S y como, por otra parte, todos los elementos de G son regulares, una condición necesaria para que el problema tenga solución es que todos los elementos de S sean regulares. El matemático ruso Malcev probó (1937) con un contraejemplo que dicha condición no es suficiente. Hay, sin embargo, un caso general muy importante, en especial desde un punto de vista histórico, para el cual dicha condición

[5] En un grupo abeliano todo subgrupo es distinguido. Esta es una de las propiedades más importantes de dichos grupos; sin embargo, no es característica de ellos, ya que existen grupos no abelianos, llamados hamiltonianos, para los cuales todo subgrupo es distinguido.

es suficiente, a saber, aquel en el que S es conmutativo. Tenemos entonces el siguiente teorema de existencia y unicidad: Si S es conmutativo, existe un grupo G que lo contiene y está generado por S; el grupo G queda determinado unívocamente, salvo un isomorfismo. Ejemplos clásicos de este problema son: a) S es el semigrupo de los números naturales, enteros positivos, respecto de la multiplicación; en este caso G es el grupo multiplicativo de las fracciones positivas. b) S es el semigrupo de los números naturales respecto de la adición y el grupo G que se obtiene es el aditivo de los números enteros positivos y negativos. Es sabido que las fracciones aparecen ya en los primeros tiempos de la historia de las matemáticas, mientras que los números negativos no se presentan hasta la alta Edad Media en la matemática india. Los dos ejemplos de inmersión que acabamos de considerar muestran que, desde un punto de vista estrictamente algebraico, el paso de los números naturales a las fracciones o a los números relativos son dos problemas análogos y del mismo grado de dificultad. Por esta razón, en la enseñanza media no existe inconveniente lógico alguno en invertir el orden histórico introduciendo primero los números negativos y luego los fraccionarios.

Trataremos ahora de estructuras con más de una operación. Por ser suficiente para nuestros propósitos, nos limitaremos en general al caso de estructuras $(C, *_1, *_2)$ con dos operaciones. Ejemplos inmediatos de estas estructuras los proporcionan las distintas clases de números con la adición y la multiplicación como operaciones. Otro ejemplo bien conocido es el de la estructura cuyos elementos son los subconjuntos de un conjunto dado con las operaciones de unión e intersección. Los conceptos de morfismo, de subestructura y de estructura cociente se establecen de manera análoga a como se hizo en el caso de una sola operación. También se extienden de manera natural los conceptos de núcleo de un morfismo y de congruencia en una estructura.

En una estructura $(C, *_1, *_2)$, se dice que $*_1$ es *distributiva* respecto de $*_2$ cuando, para a, b y c cualesquiera en C, se verifican las igualdades

$$a *_1 (b *_2 c) = (a *_1 b) *_2 (a *_1 c) \quad \text{y} \quad (b *_2 c) *_1 a = (b *_1 a) *_2 (c *_1 a)$$

Las más importantes entre las estructuras con dos operaciones son las llamadas *anillos*. Un anillo es una estructura con dos operaciones que indicaremos con los signos $+$ y $\times$ y designaremos con los nombres de adición y multiplicación. Ambas operaciones satisfacen las condiciones siguientes: a) respecto de la adición, la estructura es un grupo abeliano; b) la estructura es un semigrupo respecto de la multiplicación; y c) las dos operaciones están ligadas por la propiedad de que la multiplicación es distributiva respecto de la adición. Los números enteros, positivos y negativos, con la adición y multiplicación ordinarias, presentan el ejemplo más conocido de anillo. Respecto de este anillo, tomado como tipo, los anillos generales pueden diferir en varias propiedades, entre las cuales vamos a destacar algunas. 1) El conjunto de los enteros es infinito; en cambio, existen anillos cuyo conjunto base es finito. Un ejemplo muy simple y muy importante por sus aplicaciones es el siguiente. C es el conjunto de dos elementos que llamaremos par e impar. La suma de dos iguales es par y la de dos desiguales es impar. Si uno de los factores es par el producto es par, mientras que el producto de dos impares es impar. Se ve fácilmente que las operaciones así definidas satisfacen las condiciones exigidas para las de un anillo; por tanto, se tiene así un anillo con dos elementos. 2) En el anillo de los enteros existe elemento neutro para la multiplicación, el 1; en cambio, con las operaciones ordinarias, los enteros pares forman un anillo para el cual la multiplicación carece de elemento neutro. 3) Los enteros forman, respecto de la multiplicación, un semigrupo conmutativo; mientras que es fácil citar ejemplos de anillos para los cuales la multiplicación no es conmutativa. 4) Para que el producto de dos números enteros sea 0 es necesario que al menos uno de ellos sea 0. Veamos, en cambio, un ejemplo de un anillo en el que el producto de dos elementos es cero sin que ninguno de ellos lo sea. Los restos de dividir los números enteros por 6 forman un anillo con 6 elementos: 0, 1, 2, 3, 4 y 5, si se define como suma el resto de la suma y como producto el resto del producto. En este anillo, el 2 y el 3 son distintos de 0, mientras que su producto, que es el resto de 6, es 0.

Se llama conmutativo un anillo si su semigrupo multiplicativo es conmutativo. El elemento neutro para la adición en un anillo recibe el nombre de cero del anillo, y el elemento neutro de la multiplicación, cuando existe, se denomina el uno del anillo. Se ve de modo inmediato que, en todo anillo, el producto del 0 por un elemento cualquiera es siempre 0. Si en un anillo el producto de dos elementos a y b distintos de 0 es 0, se dice que a y b son divisores de 0. En el ejemplo 4) anterior, el 2 y el 3 son *divisores de* 0. En un anillo los elementos que conmutan con todos los demás para la multiplicación forman un subanillo que recibe el nombre de *centro* del anillo dado.

El 0 pertenece siempre al centro; lo mismo ocurre con el 1, en el caso en que este elemento existe en el anillo.

En todo morfismo de un anillo C en otro C', al 0 de C le corresponde el 0 de C'. Si en C y en C' existe el 1, puede muy bien ocurrir que al 1 de C no le corresponda el 1 de C'. El núcleo del morfismo está determinado por la clase N de elementos de C que se representan en el 0 de C'; por este motivo N se suele designar como núcleo del morfismo. El núcleo N constituye, como se ve fácilmente, un subanillo de C; es un subanillo de tipo especial, ya que, no sólo el producto de dos elementos de N pertenece a N, sino que el producto de un elemento cualquiera de C por uno cualquiera de N pertenece también a N. Los subanillos de este tipo se llaman *ideales* de C. Tenemos entonces que en todo morfismo el núcleo es un ideal. Y, recíprocamente, se prueba que todo ideal de C es núcleo de un morfismo. La teoría de ideales ocupa un lugar destacado en Algebra, en Teoría de Números y en Geometría algebraica. En todo anillo hay siempre dos ideales triviales, el 0 y el anillo total. Si el anillo tiene elemento 1, todo ideal que contenga a este elemento coincide con el anillo total; por lo cual, al ideal anillo total se le suele llamar *ideal unidad*.

Se dice que un anillo es un *cuerpo*, si el conjunto de elementos distintos de 0 forma un grupo respecto de la multiplicación. Los números racionales, los números reales y los números complejos son ejemplos de cuerpos. El anillo de los restos de dividir los números enteros por un número primo p es un cuerpo con p elementos. En particular, para el caso $p = 2$, se obtiene un cuerpo que es precisamente el anillo formado por el par y el impar que consideramos antes. Existen cuerpos no conmutativos; el más conocido, por sus aplicaciones a la Cinemática del espacio euclídeo de tres dimensiones, es el cuerpo llamado de los cuaternios o cuaterniones de Hamilton. Por otra parte, se demuestra que todo cuerpo con un número finito de elementos es siempre conmutativo (teorema de Wedderburn).

En un cuerpo no puede haber divisores de 0. En efecto, de $a \times b = 0$, si es $a \neq 0$, se deduce

$$b = 1 \times b = (a^{-1} \times a) \times b = a^{-1} \times (a \times b) = a^{-1} \times 0 = 0;$$

es decir, que si el producto es 0 y el primer factor es distinto de cero, el segundo factor es 0. Lo mismo se vería cambiando el orden de los factores.

Para los anillos, de modo análogo que para los semigrupos, se presenta el problema de inmersión. A saber: dado un anillo A, ¿existirá un cuerpo K que lo contenga? La posibilidad de solución requiere como condición necesaria que no haya en A divisores de 0. Esta condición no es suficiente, como resulta de un contraejemplo de Malcev. Una condición suficiente, aparte de la de carecer de divisores de 0, es la de que A sea conmutativo. Un anillo I conmutativo y sin divisores de 0, se denomina *dominio de integridad*. Los enteros forman un dominio de integridad; de ahí esta denominación. Para un dominio de integridad I se prueba el siguiente teorema de existencia y unicidad: Existe un cuerpo K que contiene a I, generado por este anillo. Cualquier otro cuerpo K' que satisfaga esas dos condiciones es isomorfo con K. El cuerpo K así determinado, salvo un isomorfismo, se llama cuerpo de fracciones de I.

En todo cuerpo no existen más ideales que los dos triviales: el ideal 0 y el ideal unidad. En consecuencia, todo morfismo de un cuerpo es o un monomorfismo, y entonces el cuerpo es isomorfo con su imagen, o la imagen se reduce al 0.

Se definen para los cuerpos unos *morfismos generalizados* o *lugares*, completando el cuerpo imagen K' con un elemento ∞ para formar una estructura (K', ∞) para la cual se extiende de la manera siguiente la definición de las operaciones: Para todo a' de K' se define $a' \pm \infty = \infty$; si $a' \neq 0$, $a' \times \infty = \infty$. Por otra parte, definimos $\infty \times \infty = \infty$, $1/0 = \infty$ y $1/\infty = 0$. No se definen las expresiones $\infty \pm \infty$, $0 \times \infty$, $0/0$ y ∞/∞. Un *lugar* χ del cuerpo K en el cuerpo K' es una aplicación χ de K en $\{K', \infty\}$, que satisface las reglas de un morfismo

$$\chi(a + b) = \chi(a) + \chi(b), \qquad \chi(a \times b) = \chi(a) \times \chi(b),$$

siempre que las fórmulas del segundo miembro estén definidas en $\{K', \chi\}$, y tal que $\chi(1) = 1$. Los lugares desempeñan un papel fundamental en Geometría algebraica.

Para simplificar la exposición, en las estructuras algebraicas tratadas hasta ahora, suponíamos implícitas algunas condiciones restrictivas, entre las cuales merecen destacarse: a) Considerábamos estructuras con un solo conjunto; b) Suponíamos que las operaciones estaban definidas para todos los pares de elementos del conjunto base; y c) Estudiábamos únicamente operaciones binarias, esto es, operaciones en las que intervienen dos elementos. Con el fin de alcanzar mayor generalidad consideraremos en lo que sigue estructuras que no estarán sujetas a algunas de dichas restricciones.

En el caso más general de una operación binaria se tienen no uno, sino tres conjuntos A, B y C. La ley de composición binaria es *entonces una aplicación del producto cartesiano* $A \times B$ en C. Esto es, una ley que, a cada par de elementos (a, b), el primero perteneciente a A y el segundo a B, hace corresponder un elemento c de C. En el caso que hemos venido considerando hasta aquí, los tres conjuntos A, B y C coinciden; por este motivo se habla entonces de ley de composición *interna*. Es, sin duda, el caso más importante porque, según veremos más adelante, los demás se pueden reducir a él mediante artificios adecuados. Le sigue en importancia el caso en el que B y C coinciden, siendo distintos de A. La estructura queda entonces determinada por la terna $(A, C, *)$, formada por los dos conjuntos A y C, y por la ley de composición $*$ que da la aplicación de $A \times C$ en C. El conjunto A se designa con el nombre de conjunto de *operadores*, y el C se llama conjunto *base*; de $*$ se dice que es una ley de composición *externa*. Un ejemplo bien conocido de estructura de esta especie es aquel en el que C es el conjunto de vectores del espacio, A el de los números reales y $*$ la multiplicación de un número por un vector.

En una estructura $(A, C, *)$, si es c' el elemento de C que corresponde por $*$ al par (a, c) de $A \times C$, escribiremos $a * c = c'$ y diremos que c' es el compuesto de a y c por $*$. Un morfismo φ de la estructura $(A, C, *)$ en la $(A', C', *)$ de su misma especie, se define como un par de aplicaciones, una φ_1 de A en A' y otra φ_2 de C en C', tales que se tenga la igualdad $\varphi(a * c) = \varphi_1(a) * \varphi_2(c)$, para todo par (a, c) de $A \times C$. Se dice que $(A', C', *')$ es una subestructura de $(A, C, *)$, si A' es un subconjunto de A, C' un subconjunto de C y la restricción de $*$ a $A' \times C$ coincide con $*'$. Se extienden sin dificultad al presente caso los conceptos de estructura cociente, núcleo, elemento neutro, etc. Los casos más interesantes de las estructuras que estamos estudiando son aquellos en los que en A, en C o en ambos conjuntos se definen operaciones internas ligadas con la operación externa por ciertas relaciones. Como casos típicos, vamos a ocuparnos de los *grupos de transformaciones* y de los *espacios vectoriales*. Son estructuras fundamentales por sus múltiples aplicaciones matemáticas y físicas.

Un grupo de transformaciones es una estructura $(G, E, *)$, con una ley de composición externa $*$, en la que se cumplen además las condiciones siguientes: a) el conjunto de operadores G es un grupo, cuyos elementos llamaremos *transformaciones*; b) la ley $*$ de composición externa y la de composición en G están ligadas por las relaciones: i) $(a \,.\, b) * p = a * (b * p)$, para todo par (a, b) de transformaciones y todo elemento p de E; y ii) el elemento neutro e de G es también neutro para $*$, es decir, $e * p = p$, para todo p de E. El conjunto base E se llama *espacio* y sus elementos *puntos*. Los espacios de las geometrías clásicas con sus grupos correspondientes son ejemplos de grupos de transformaciones. De las condiciones impuestas, se deduce fácilmente que toda transformación aplica puntos distintos en puntos distintos y que todo punto del espacio es homólogo de otro para dicha transformación; en consecuencia, las transformaciones son aplicaciones biyectivas del espacio en sí mismo. Un grupo de transformaciones se llama *transitivo* si, dados dos puntos cualesquiera del espacio, existe una transformación que cambia uno de ellos en el otro; si G es transitivo, se dice que el espacio E es *homogéneo*. Los transformados de un punto por todas las operaciones de G constituyen la *órbita* de dicho punto; si el espacio es homogéneo, la órbita de uno cualquiera de sus puntos llena todo el espacio E. En todo caso, la órbita de un punto cualquiera forma un subespacio homogéneo de E. Los movimientos del espacio ordinario de tres dimensiones constituyen un ejemplo de grupo transitivo y, por tanto, el espacio es homogéneo para ese grupo. En cambio, las rotaciones alrededor de un punto fijo O forman un grupo que no es transitivo; las distintas órbitas están constituidas por las superficies esféricas de centro en O. En el caso general, dado un punto cualquiera p_1, las transformaciones de G que lo aplican en sí mismo o, como se dice brevemente, que lo dejan invariante constituyen un subgrupo G_1 de G llamado grupo de estabilidad de p_1. Fijado p_1 se puede establecer una relación de equivalencia entre las operaciones de G, considerando como equivalentes dos transformaciones que aplican p_1 en el mismo punto. Si E es homogéneo, se tiene así una correspondencia biyectiva entre los puntos de E y las clases de equivalencia en G. La clase de equivalencia de una transformación a está formada por los elementos de G de la forma $a \,.\, G_1$, donde G_1 es el subgrupo de estabilidad de p_1. Si G_1 se reduce al elemento neutro, cada clase consta de una sola transformación, y el espacio E y el grupo están entonces en correspondencia biyectiva: a E se le llama en este caso *espacio* *del grupo G*. Los espacios homogéneos, que son los más importantes, aparecen así formados por elementos que son clases de equivalencia del espacio del grupo.

Los espacios vectoriales son estructuras que corresponden y generalizan las propiedades algebraicas de las operaciones elementales, clásicas en Mecánica y en Geometría, definidas para los llamados vectores libres. En nuestra terminología, un espacio vectorial es una estructura $(K, V, *)$ con una ley de composición externa $*$, y en la que K, V y $*$ satisfacen además las condiciones siguientes: a) el conjunto de operadores K es un cuerpo, cuyos elementos llamaremos *escalares*; b) el conjunto base V es un grupo abeliano, cuya ley de composición indicaremos con el signo $+$ y cuyos elementos se llamarán *vectores*; y c) las operaciones de K, la operación de V y la ley de composición externa están ligadas por las relaciones:

1.ª	$a . (b * v) = (a . b) * v$	propiedad asociativa para la multiplicación en K.
2.ª	$(a + b) * v = a * v + b * v$	propiedad distributiva para la suma en K.
3.ª	$a * (v_1 + v_2) = a * v_1 + a * v_2$	propiedad distributiva para la suma en V.

donde a y b son escalares arbitrarios, y v, v_1 y v_2, vectores cualesquiera. De las condiciones impuestas se deducen sin dificultad todas las propiedades elementales conocidas, por cuya razón no vamos a detenernos en ese punto. Dos espacios vectoriales son de la misma especie cuando tienen el mismo cuerpo de escalares; como subestructuras de un espacio vectorial se consideran sólo las que conservan el cuerpo de escalares. Las subestructuras se designan con los nombres de subespacios vectoriales o espacios lineales de acuerdo con las aplicaciones a la geometría. Los morfismos entre espacios vectoriales de la misma especie que inducen la identidad en el cuerpo de escalares se denominan *aplicaciones lineales;* en el caso en que, en vez de la identidad para K, se tiene un automorfismo cualquiera de K se habla de *aplicaciones semilineales*. Para los morfismos entre espacios vectoriales, análogamente a lo que se hace en el caso de grupos, se suele designar como núcleo la clase de equivalencia del elemento nulo de V, ya que esta clase determina unívocamente lo que hemos llamado núcleo en el caso general. El núcleo es un espacio lineal y, recíprocamente, todo espacio lineal de un espacio vectorial es núcleo de un morfismo. La teoría de la dependencia abstracta que consideramos anteriormente se aplica a los espacios vectoriales, y, por ser válido en este caso el axioma de cambio, se obtiene la existencia de base y la invariancia de la dimensión [6]. Los espacios lineales de dimensión 1 se llaman *rectas*, los de dimensión 2 *planos* y, si el espacio es de dimensión n, los espacios lineales de dimensión $n - 1$ se denominan *hiperplanos*. En toda aplicación lineal, la dimensión del espacio inicial es igual a la suma de las dimensiones del núcleo y de la imagen. Dados dos espacios lineales V_1 y V_2 de un espacio vectorial, si designamos con $V_1 \cup V_2$ su unión, es decir, el espacio mínimo que los contiene, y con $V_1 \cap V_2$ su intersección, esto es el espacio lineal constituido por los vectores comunes a ambos, se verifica la importante relación

$$\text{dim. } V_1 + \text{dim. } V_2 = \text{dim. } (V_1 \cup V_2) + \text{dim. } (V_1 \cap V_2)$$

El cuerpo K de escalares en un espacio vectorial puede no ser conmutativo; cuando esto ocurre, los espacios vectoriales que hemos definido se llaman *espacios vectoriales a la izquierda*, con el fin de distinguirlos de los *espacios vectoriales a la derecha*, para los cuales, en el producto de un vector por un escalar, el vector es el primer factor y el escalar el segundo. Por motivos de sencillez, supondremos en lo que sigue que K es conmutativo; en este caso, la conmutatividad del producto en K hace que desaparezca la distinción entre espacios a la derecha y espacios a la izquierda.

El grupo aditivo del cuerpo K, se puede considerar como un espacio vectorial de dimensión 1 sobre el cuerpo de escalares K, siendo la operación externa la multiplicación en K. Al espacio así considerado lo designaremos con la letra K. Para un espacio vectorial V sobre K, las aplicaciones lineales de V en el espacio K se llaman *formas lineales* sobre V. El conjunto de formas lineales sobre V puede dotarse de una estructura de espacio vectorial sobre K procediendo de la manera siguiente: definimos como producto de una forma lineal φ por un escalar a la forma φ' que, para todo vector v de V satisface la igualdad $\varphi'(v) = a \cdot \varphi(v)$; y, dadas dos formas φ_1 y φ_2, la suma φ_3 de ambas viene definida por la igualdad $\varphi_3(v) = \varphi_1(v) + \varphi_2(v)$, válida para todo v de V. Se prueba fácilmente que se obtiene así un espacio vectorial sobre K, que llamaremos *espacio dual* del V y designaremos con la notación $\overline{V}$. En el caso en que V es de dimensión finita, su dual $\overline{V}$ tiene la misma dimensión; siendo, por tanto, iso-

[6] En realidad, la teoría de la dependencia abstracta se dedujo por «abstracción» de la teoría de la dependencia lineal para espacios vectoriales y de la dependencia algebraica para las extensiones de un cuerpo conmutativo.

morfo con él, aunque no exista isomorfismo canónico entre los dos. Si V es de dimensión infinita, la dimensión de $\overline{V}$ es mayor que la de V y, en consecuencia, no son isomorfos. Dados dos espacios vectoriales V y V' de la misma especie, a toda aplicación lineal de V en V' le corresponde de manera unívoca una aplicación lineal del dual de V' en el dual de V; esta aplicación se llama *aplicación transpuesta* de la dada. El estudio completo de un espacio vectorial requiere el estudio simultáneo de su espacio dual. Aunque la consideración del espacio dual de un espacio vectorial data de más de un siglo, ya que, por ejemplo, las variables cogredientes y contragredientes del cálculo vectorial clásico son un aspecto de tal cuestión, la distinción neta entre un espacio y su dual es relativamente reciente y el estudio de sus relaciones recíprocas es uno de los puntos esenciales del Algebra.

Aunque de gran importancia en Algebra y en sus aplicaciones, no vamos a detenernos en establecer el concepto de producto tensorial de espacios vectoriales. En el cálculo vectorial clásico se procedía para ello tomando en cada espacio una base, por lo que la definición correspondiente no era de carácter intrínseco. Es posible, sin embargo, dar una definición intrínseca aplicable a casos mucho más generales, en particular a los correspondientes a estructuras en las que no exista una base, pero la exposición de los detalles técnicos nos ocuparían demasiado. Queremos únicamente hacer observar que dicha posibilidad permite desarrollar la teoría correspondiente sin necesidad de utilizar la orgía de índices que oscurecía la exposición en su primitiva forma, hecho que tanto ha contribuido a hacer impenetrables muchos de los trabajos de los matemáticos relativistas.

Si, en la estructura de espacio vectorial, se sustituye el cuerpo de escalares K por un anillo A se obtiene una estructura algebraica conocida con el nombre de *módulo*. Los módulos constituyen así una generalización de los espacios vectoriales. Entre las propiedades que se pierden al pasar a los módulos recordaremos las que siguen. En los módulos puede ocurrir que no haya ningún escalar que sea elemento neutro; cuando existe se dice que el módulo es unitario. El producto de un escalar por un vector puede ser nulo sin que lo sea ninguno de los dos elementos. Un módulo general no admite bases. El producto tensorial de módulos presenta diferencias esenciales con el de espacio vectoriales. Por su gran generalidad, los módulos desempeñan en las aplicaciones del Algebra a otros dominios de las matemáticas un papel de esencial importancia.

En una estructura algebraica general, dotada de una ley de composición binaria, puede ocurrir que la operación no esté definida para todos los pares de elementos. Así, por ejemplo, en un cuerpo la división de un elemento por otro no está definida si el segundo es cero. En el caso general, esto entraña que una ley de composición binaria de dos conjuntos A y B en un tercero C deberá definirse como una aplicación no de todo el producto cartesiano $A \times B$ en C, sino sólo de un subconjunto *parcial* de $A \times B$ en C. Con esta generalización han de modificarse, por una parte, algunas de las definiciones anteriores y, por otra, varias de las propiedades establecidas pueden dejar de ser válidas. Por ejemplo, en el caso de estructuras con un solo conjunto y una ley de composición interna $*$, un morfismo de C en C' será una aplicación φ de C en C' tal que *si $*$ está definida para dos elementos a y b de C, $*$ ha de estarlo también para $\varphi(a)$ y $\varphi(b)$ en C'* y se ha de verificar que $\varphi(a * b) = \varphi(a) * \varphi(b)$. De este modo, un morfismo puede ser en el caso general monomorfismo y epimorfismo sin ser un isomorfismo, ya que $*$ puede estar definida para $\varphi(a)$ y $\varphi(b)$ en C' y no estarlo para a y b en C. La descomposición de un morfismo en forma canónica no es posible en general; asimismo no existen siempre estructuras libres, etc.

Señalábamos anteriormente que toda estructura algebraica se puede reducir a otra equivalente en la que no intervenga más que un solo conjunto. La reducción es posible admitiendo operaciones que no estén definidas para todos los pares de elementos. Indiquemos como puede procederse en el caso de una estructura con tres conjuntos A, B y C y una ley de composición $*$, determinada por una aplicación del producto cartesiano $A \times B$ en C. La aplicación $*$ puede caracterizarse mediante un subconjunto D del producto cartesiano $A \times B \times C$, el conjunto D está formado por ternas (a, b, c), con a en A, b en B y c en C, que cumplen la condición de que, si (a, b, c) y (a, b, c') pertenecen a D, c ha de ser igual a c'. Formemos el conjunto $C' = A \cup B \cup C$, unión de A, B y C y consideremos el producto $C'^3 = C' \times C' \times C'$. El conjunto D es un subconjunto de C'^3 y subordina en C' una ley de composición interna $*'$. Resulta inmediato que las estructuras $(A, B, C, *)$ y $(C', *')$ se determinan recíprocamente y cabe considerarlas, por tanto, como equivalentes.

Hemos fijado hasta ahora nuestra atención exclusivamente en las operaciones llamadas binarias, que hacen intervenir sólo dos elementos. Por una parte, lo hacíamos para mayor sencillez de nuestro razonar y, por otra, porque ya en ese caso se presentan los hechos más importantes que aparecen en el caso de operaciones con cualquier número finito de elementos. Vamos a tratar ahora brevemente algunas operaciones no binarias. Un ejemplo simple de operación ternaria se obtiene haciendo corresponder a tres puntos del espacio de la geometría elemental el centro del círculo circunscrito a dichos puntos; se observará que la operación está definida sólo si los tres puntos no están alineados. Como ejemplo de operación unaria consideremos la que hace corresponder en el conjunto de los números enteros a un número a su opuesto $-a$; en este caso la operación aparece definida para todos los números. Para todo número natural n, una ley de composición n-aria o de orden n en un conjunto C será una aplicación de una parte de C^n, potencia cartesiana n-ésima de C, en C; o lo que es lo mismo, una ley que a ciertas n-uplas ordenadas de elementos de C hace corresponder otro elemento de C. Se definen también operaciones de orden cero son aquellas por las cuales se fija un elemento determinado en el conjunto C.

Al hablar de la propiedad asociativa de una operación, hemos visto cómo a partir de una ley de composición binaria se podía definir por recurrencia una operación con n elementos, para todo número natural n mayor que 2; las operaciones n-arias así obtenidas forman parte de las llamadas *operaciones derivadas* de la operación binaria inicial. De modo análogo, para toda operación n-aria y para todo número natural h, se puede definir una operación derivada de orden $n+(n-1).h$. Por otra parte, si en una operación n-aria fijamos $h \leqslant n$ elementos, al variar los $n-h$ restantes se obtiene una operación de orden $n-h$. Por ejemplo, si en una operación binaria fijamos el segundo elemento se obtiene una operación unaria y, si fijamos los dos, una operación de orden cero. Las operaciones deducidas de este modo, a partir de una dada, cuentan entre las operaciones *derivadas* de ésta. Finalmente, si tenemos dos operaciones, una de orden n y otra de orden m, se obtiene de modo natural una operación de orden $n.m$ que llamaremos asimismo *derivada* de las dos operaciones en cuestión. De un sistema de operaciones definidas en un conjunto C, diremos que forman un *sistema cerrado* si, tomadas r operaciones cualesquiera del sistema, éste contiene todas las operaciones derivadas de dichas r mediante los procesos que acabamos de indicar. En el estudio de una estructura algebraica intervienen de modo natural todas las operaciones derivadas de las establecidas para la estructura; en consecuencia, la estructura algebraica más general estará constituida por un conjunto C y un sistema cerrado de operaciones en él. Salvo casos triviales, el sistema de operaciones será infinito; lo único que se exige es que en cada operación no intervenga más que un número finito de elementos, esto es que cada operación sea una operación n-aria para n finito. Si todas las operaciones que definen una estructura son de orden 0 ó 1, todas las del sistema cerrado correspondiente son de uno de estos dos órdenes. En cambio, si interviene alguna de orden superior, se demuestra que el sistema cerrado que se obtiene puede considerarse como el conjunto de operaciones derivadas de un sistema de operaciones binarias; éste es otro de los motivos por los que, en lo que precede, nos hemos detenido especialmente en el estudio de las operaciones de orden 2.

Los inconvenientes que surgen al admitir operaciones no definidas para todos los elementos, y que se traducen en excepciones para los resultados obtenidos cuando no se presentan esas operaciones, pueden obviarse ampliando el concepto de estructura algebraica hasta englobar estructuras en las que, además de operaciones o leyes de composición, intervienen relaciones. Resultan así estructuras más generales, que incluyen como casos particulares a las algebraicas y también a las de orden. Vamos a ocuparnos de esta cuestión sin entrar en detalles. Dado un conjunto C, una relación n-aria R en él es un subconjunto D de la potencia n-ésima cartesiana C^n de C, es decir un conjunto de n-uplas ordenadas de elementos de C. Decir que una n-upla ordenada $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de elementos de C satisface la relación R equivale a afirmar que dicha n-upla pertenece a D. Vimos anteriormente que una operación binaria en un conjunto C estaba caracterizada por un subconjunto de la tercera potencia cartesiana C^3 de C; en consecuencia, una operación binaria es un caso particular de relación ternaria. Análogamente, una operación n-aria en C es un caso particular de relación R de orden $(n+1)$ en C, la sucesión, de orden $n+1$, $(a_1, a_2, \ldots, c)$ de elementos de C satisface a R si c es el resultado de aplicar a la n-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ la operación dada. Que las operaciones n-arias no dan lugar a las relaciones de orden $n+1$ más generales resulta del hecho de que si dos sucesiones de orden $n+1$, $(a_1, a_2, \ldots, a_n, c)$ y $(a_1, a_2, \ldots, a_n, c')$, con sus n primeros elementos comunes, satisfacen la relación de orden $n+1$ correspondiente a una operación n-aria, se ha de verificar que c y c' coinciden, condición que no se cumplirá en el caso de una relación general. Una *estructura con relaciones* estará determinada por un conjunto C y un sistema de relaciones en C. Los conceptos de subestructura, morfismo, estructura cociente, relaciones derivadas, etcétera, se deducen fácilmente por extensión de los conceptos correspondientes de las estructuras algebraicas. Por ejemplo, tomando el caso más simple de dos estructuras de la misma especie (C, R_n) y (C', R'_n) con una sola relación de orden n, un morfismo de la primera en la segunda será una aplicación φ de C en C' tal que, si la sucesión, de orden n, $(a_1, a_2, ..., a_n)$ de elementos de C satisface la relación R_n, la sucesión transformada $(\varphi(a_1), \varphi(a_2), ..., \varphi(a_n))$ de elementos de C' debe satisfacer la relación R'_n.

Llegamos así al fin de nuestro discurso en el que, si bien hemos tocado los puntos esenciales de la teoría de estructuras algebraicas, dejamos de tratar, por falta de espacio o por razones de orden técnico que hubieran sobrecargado aún más nuestra exposición, partes tan importantes como la teoría de álgebras, las conexiones de Galois, el problema de las palabras, los límites inductivos y proyectivos, la dependencia y clausura algebraica, etc. Tampoco hemos mencionado siquiera la última, y posiblemente la más importante, entre las teorías con que se han enriquecido recientemente las matemáticas: la teoría de categorías y funtores. Teoría de marcado sabor algebraico en la que encuentran inmediata aplicación los conceptos y propiedades de las estructuras objeto de nuestro discurso y que establece conexiones entre estructuras de distinta especie e incluso de distinto tipo fundamental. Estas conexiones constituyen, de una parte, un potente principio de unificación entre las distintas teorías matemáticas y encauzan, por otra, la aplicación de los resultados obtenidos para cualquier tipo de estructuras a las diversas partes de nuestra ciencia. A propósito de la posibilidad de estas aplicaciones, queremos poner de relieve que, en muchos aspectos, el Algebra abstracta representa dentro de la Matemática un papel análogo al que ésta viene desempeñando para la Mecánica y la Física. De este hecho resulta como certeramente señala Chevalley, otra fuente de vitalidad para el Algebra, rama pujante y viva por tener planteados problemas propios de extraordinario interés y por su capacidad para tratar y resolver problemas originados en otros dominios de la matemática.

Y ahora, al pediros disculpa por el abuso que de vuestra benevolencia he hecho tratando de un tema cuya aridez, en parte insoslayable, ha sido seguramente aumentada por mis propias limitaciones, quisiera terminar indicando que mi deseo fue, parafraseando a Fontenelle, el de «tratar el Algebra en forma que no fuera ni demasiado seca para el profano ni demasiado ligera para el especialista».

He dicho.

BIBLIOGRAFIA

ARTIN, E.: *Contents and methods of an Algebra cours.* «Report of the second conference on mathematical education». Bombay, 1960.

BOURBAKI, N.: *Eléments de Mathématique. Livre I. Théorie des ensembles. Livre II. Algèbre.* «Actualités Scientifiques et Industrielles». Hermann. Paris.

BOURBAKI, N.: *L'architecture des Mathématiques. Les grands courants de la pensée mathématique présentés par F. Le Lionnais.* Albert Blanchard. Paris.

CHEVALLEY, C.: *Fundamental concepts of Algebra.* «Academic Press». New York, 1956.

COHN, P. M.: *Universal Algebra.* «Harper's Series in Modern Mathematics». New York, London, 1965.

DIEUDONNÉ, J.: *L'abstraction en mathématiques et l'évolution de l'algèbre.* «L'enseignement des mathématiques». Melachaux et Niestlé. Paris, 1955.

GODEMENT, R.: *Cours d'Algèbre.* Hermann. Paris, 1963.

HASSE, H.: *Höhere Algebra.* 2 vols. Walter de Gruyter (Sammlung Göschen). Berlin, 1926.

KUROSH, A. G.: *Lectures on general algebra.* «Chelsea Publishing Comp.». New York, 1963.

VAN DER WAERDEN, B. L.: *Moderne Algebra.* 2 vols. Springer. Berlin, 1930.

DISCURSO DE CONTESTACION

POR EL

EXCMO. SR. D. FRANCISCO NAVARRO BORRAS

Señores Académicos:

Señoras y Señores:

En tres ocasiones he podido valorar en toda su amplitud la personalidad y la labor científica del Profesor Ancochea. Coinciden con tres momentos culminantes de su vida: Presidí el Tribunal que le otorgó su cátedra de Madrid; fui asimismo Presidente de la Comisión que le concedió la Ayuda para la investigación de la Fundación «Juan March», y ahora he sido designado para darle la bienvenida en nombre de la Corporación en el Acto solemne que hoy celebramos.

Sucede Ancochea al Excmo. Sr. D. José Alvarez Ude en la posesión de la medalla número 36. De su predecesor acabáis de oir sentidos y justísimos elogios. Me complacería insistir en ellos porque a mi admiración por sus dotes intelectuales y morales se sumaba una gran amistad y un sincero afecto. Fui compañero suyo en el Claustro Universitario de la Facultad de Ciencias y en esta Real Academia; gocé de su confianza y le acompañé en momentos felices de su vida y también en las pruebas a las que Dios, como a tantos de sus elegidos, quiso someterle. Sin embargo, no me detendré más en este punto para no prolongar demasiado mi discurso. Por otra parte, sería difícil añadir nada esencialmente nuevo a la cálida y acabada semblanza de Alvarez Ude presentada por el Secretario Perpetuo de nuestra Academia en la memoria del curso 1958-59.

No es mera coincidencia el que Ancochea venga a ocupar el sillón de su maestro. El detenido análisis de su labor científica, fruto de una mente privilegiada, que hube de realizar en las ocasiones mencionadas, me condujo a la conclusión de que entre maestro y discípulo existían numerosos puntos de afinidad. Desde hace años, el prestigio de Germán Ancochea en el mundo matemático le señaló como brillante representante de la matemática española en Congresos y Reuniones científicas. Justo y natural es que esta Real Academia quisiera contarle entre sus miembros. Y así lo hizo llamándolo para suceder a Alvarez Ude, de quien fue uno de los más preclaros discípulos.

Me propongo ahora daros una breve y esquemática descripción de la personalidad y de la obra de Ancochea seguro de poder mostrar cuán justificado es el destacado puesto que ocupa entre los matemáticos actuales. Lo haré con absoluta objetividad, dejando al margen los dictados de la amistad. Para corroborar mis juicios, podría apelar a testimonios de todo el mundo. Una ojeada a la correspondencia que sostiene con los matemáticos más destacados deja sentir, a través de frecuentes elogios, la gran estima que su labor les merece.

Su «curriculum vitae» nos muestra las realizaciones magníficas que jalonan una vida fecunda de trabajo en la que siempre ha permanecido fiel a una profunda vocación científica. Nació en 1908, en la ciudad de Córdoba de la Argentina, hijo de padres españoles procedentes de Galicia. A los cuatro años, la muerte de su padre motiva que su madre regrese a su tierra de origen junto con sus tres hijos. En Puebla de Trives cursa la Primera Enseñanza con los Hermanos de las Escuelas Cristianas, en un Colegio fundado por un tío suyo. Sigue los estudios del Bachillerato en el Instituto de Orense y, obtenido el título, viene a Madrid. En nuestra Facultad de Ciencias obra su brillante expediente académico que culmina, en 1929, con el Premio Extraordinario en la Licenciatura de la Sección de Exactas. Al año siguiente oposita a la Auxiliaría de Geometría Analítica y Geometría Proyectiva de dicha Facultad de Ciencias. Tuvo como contrincante un Auxiliar numerario procedente de otra Universidad. Este, al conocerse el resultado de la oposición, se dolía con amargura de haber sido vencido, a pesar de su experiencia y conocimientos, por un joven que aún no contaba 22 años. En ese mismo año de 1930 tuvo lugar mi incorporación como Catedrático a la Universidad de Madrid y de esa fecha data una gran amistad con Ancochea.

En 1933 fue pensionado por la Junta de la Ciudad Universitaria para estudiar en París, bajo la dirección de Elie Cartan, cuestiones de Geometría Diferencial. En París siguió además cursos de Frechet, Juliá, Montel y Drach.

En 1935 defiende su Tesis doctoral ante la Sección de Exactas, obteniendo la calificación de Sobresaliente. Luego, ante un tribunal del que yo formaba parte, obtuvo, mediante oposición, el Premio Extraordinario del Doctorado.

En 1936 obtiene la Cátedra de Geometría Analítica de la Universidad de La Laguna. Pocos meses después pasa, por concurso, a la Universidad de Salamanca como titular de Análisis matemático. Permanece en Salamanca hasta 1948, año en que gana, por oposición, la Cátedra de Geometría que desempeña actualmente en Madrid.

Sus publicaciones se inician en 1934 con dos trabajos aparecidos en la «Revista Matemática Hispano-Americana» (véase la lista de publicaciones inserta al final). La guerra de Liberación marca un paréntesis en su producción científica, motivado por su incorporación a filas. A partir de 1940 su trabajo cobra nuevos ímpetus. En la quietud de la bella Salamanca, aparte de una intensa labor de cátedra, reanuda con firme propósito sus investigaciones. Sus artículos fueron desde entonces auténticos heraldos de la presencia española en la Matemática mundial. Por su prestigio es invitado a formar parte del Comité Internacional de Redacción de la prestigiosa revista «*Compositio Mathematica*» de Amsterdam, en el que figuran destacados matemáticos de todo el mundo, siendo de notar que la invitación partía de profesores a los que Ancochea no conocía personalmente.

En 1942, el célebre algebrista Hasse, ahora ilustre Miembro correspondiente de esta Academia, le abre las puertas del «Journal für die reine und angewandte Mathematik» (Journal de Crelle), la más prestigiosa de todas las revistas matemáticas del mundo, por ser la más antigua y por la talla de sus colaboradores: Abel, Jacobi, Riemann... En su trabajo del Crelle introduce Ancochea el concepto de *semi-homomorfismo:* correspondencia entre anillos en la cual, a diferencia del homomorfismo, que hace corresponder al producto $a \, . \, b$ el $a' \, . \, b'$, se pide únicamente que a la suma $a \, . \, b + b \, . \, a$ le corresponda $a' \, . \, b' + b' \, . \, a'$. Demuestra entonces que, para los cuaternios, todo semi-automorfismo es un automorfismo directo o un automorfismo inverso (en éste a $a \, . \, b$ le corresponde $b' \, . \, a'$). Más tarde extendió este resultado a las álgebras con división. Cuando escribo estas líneas tengo delante una larga y elogiosa carta de von Neumann proponiendo a Ancochea la publicación de su trabajo sobre Algebras con división en los «Annals of Mathematics» de Princeton, como así se hizo. J. von Neumann y el célebre matemático y físico Pascual Jordan se habían ocupado de cuestiones relacionadas con el tema de Ancochea; von Neumann, absorbido entonces (1946) por su labor en el puesto preeminente de la dirección de los trabajos sobre energía nuclear en los EE. UU., encontró tiempo para conocer el trabajo de Ancochea y escribirle detalladamente sobre él. Estos trabajos han sido citados con gran encomio por los especialistas, en particular por Jacobson (*Representation Theory for Jordan Rings*, «International Congress of Mathematicians», 1950; *Structure of Rings*, «Amer. Math. Soc. Colloquium Publications», 1956), por Dieudonné (*Automorphisms of the Classical Groups*, «Memoirs Amer. Math. Soc.», núm. 2, 1951; *La géométrie des Groupes classiques*, «Ergeb. der Math.», núm. 5, Springer, 1955), así como en numerosos estudios concernientes a las álgebras de Jordan. El resultado fundamental de Ancochea fue extendido, al caso de cuerpos no conmutativos cualesquiera, por el matemático chino Hua y hoy es conocido con el nombre de teorema de Ancochea-Hua.

De su época de Salamanca es también su memoria *Curvas algebraicas sobre cuerpos de característica prima*. Enviada en 1943 a van der Waerden, éste la retuvo inmediatamente para su publicación en los «Mathematische Annales» según carta, que he leído, en la que felicita a Ancochea por haber dado una solución elegante y completa de la interesante cuestión estudiada. Una segunda parte de este estudio fue aceptada para su publicación en el Crelle. El desarrollo de la guerra mundial impidió ambas publicaciones en las revistas citadas; reunidas en un tomo constituyeron el cuaderno núm. 1 de la Sección Matemática de las «Acta Salmanticensia», Sección que fundó Ancochea y para la que consiguió la colaboración internacional de figuras como Severi, Hasse, Krull y van der Waerden. Presentado al concurso de 1945 de esta Real Academia, obtuvo el Premio correspondiente. Los resultados de este trabajo fueron utilizados por el ilustre geómetra Lefschetz, hoy miembro correspondiente de esta Academia, en sus cursos de la Universidad de Princeton. Permitidme que ceda a la tentación de transcribir la traducción de una de sus cartas (julio 1946):

«He leído con grandísimo interés su opúsculo *Curvas algebraicas*... Pienso dar un nuevo curso sobre Geometría Algebraica y desearía que algunos de mis jóvenes estudiantes y colegas leyeran su obra. Usted me facilitaría mucho la tarea si me pudiera enviar algunos ejemplares de la misma. En el futuro, cuando Vd. tenga trabajos que publicar, recuerde la existencia de los "Annals of Mathematics". En ellos publicamos artículos en inglés, alemán, francés e italiano.

y aunque todavía no lo hemos hecho en español, esto no constituiría motivo de exclusión...» *.

Esta publicación ha sido citada en el texto de todas las ediciones del famoso tratado de Algebra de van der Waerden aparecidas después de 1950. Es mencionado también en numerosas memorias y obras relacionadas con cuestiones de Algebra y de Geometría Algebraica.

Para no sobrecargar con tecnicismos mi contestación, no voy a entrar en detalles en lo que concierne a otros escritos científicos de Ancochea; la lista de ellos que acompañan su discurso es bastante elocuente. Algunos aparecidos en este mismo año (1966) señalan que la actividad investigadora de nuestro nuevo colega no ha decrecido con los años. Quiero, no obstante, hacer constar la satisfacción con la que Ancochea gusta de destacar, cuando la ocasión se presenta, la aportación española a la investigación matemática. Y así, con motivo del Centenario del nacimiento de don Eduardo Torroja Caballé, maestro de la escuela geométrica española, precursor de la investigación matemática en España y titular que fue de la cátedra de la que lo es hoy el Recipiendario, publicó en la revista de nuestra Academia (1947) un trabajo titulado *Sobre los correlativos de los teoremas de Meusnier y Euler.* En él Ancochea recaba para Torroja la prioridad del enunciado y demostración de uno de dichos teoremas. Torroja, con la parvedad de medios propia de los métodos sintéticos utilizados en su época, consigue una demostración llena de ingenio que no había de ser mejorada hasta muchos años después haciendo uso de potentes medios analíticos.

Y ya es momento de que pase a tratar del tema de su discurso. Incidentalmente ya lo he hecho al comentar dos de los trabajos de Ancochea; la palabra morfismo con distintos prefijos hube de señalarla varias veces. Quiero ahora considerar la magistral lección de Ancochea desde el punto de vista de un matemático que no es un algebrista profesional. Los conocimientos de Algebra que adquirí en la Universidad concernían a lo que hoy llamaríamos Algebra clásica, frente al Algebra moderna o abstracta; procedían, más o menos di rectamente, de las obras consagradas de Serret y de Weber. Se oía

---

* Por invitación personal del Profesor Lafschetz, Ancochea tomó parte, llevando además la representación de la Universidad de Salamanca, en la Reunión Internacional de Matemáticos celebrada, en 1946, con motivo del bicentenario de la Universidad de Princeton.

hablar entonces de la teoría de Galois, pero no era materia que se explicara en los cursos universitarios. Había una exposición escrita de uno de nuestros ilustres Presidentes, Echegaray, de la que en justicia ha de decirse que a pesar del gran talento del autor, era de difícil lectura. Con la curiosidad de la juventud pude aprender por mi cuenta unos rudimentos de la teoría, en la introducción elemental que contiene el libro de Florian Cajori. Dedicado yo especialmente a Mecánica Analítica, rama avanzada de la Matemática, el seísmo de la renovación completa de los fundamentos de la Matemática y, en particular, del Algebra producido a comienzos de siglo no tuvo repercusiones esenciales en mis dominios, al menos hasta que las complicadas teorías atómicas lo reflejaron. Sin embargo, hacia el final de los años 20 y por recomendación de Terradas, tuvo ocasión de estudiar esa verdadera joya que es el librito *Höhere Algebra* de Hasse, obra en la que Ancochea inició sus primeros estudios de Algebra abstracta y en la que, más tarde, ha visto con legítimo orgullo cómo el autor incorporaba en sus últimas ediciones, con cita encomiástica especial en el prólogo, un problema propuesto por aquél. La nítida claridad de la exposición y la impresión de belleza que produce en todo matemático la sencillez lógica del método axiomático hicieron que durante algún tiempo el opúsculo de Hasse fuera mi libro de cabecera. Luego estudié el libro de Schreier-Sperner, clásico hoy del Algebra abstracta y notable por su rigurosa exposición algebraica de las Geometrías Métrica y Proyectiva. Desgraciadamente para mí, pronto tuve que abandonar estos estudios, pues necesidades, en las que no voy a entrar, me señalaron la conveniencia de dirigir mis esfuerzos al estudio de la disciplina de la que soy titular, a la que, por otra parte, me conducía de modo natural la profesión técnica que ejerzo. Pido disculpa por todas estas explicaciones previas encaminadas a justificar las lagunas que podáis encontrar en mi comentario al discurso de nuestro nuevo colega.

El libro de Hasse, primera exposición didáctica del Algebra abstracta, sigue poniendo su centro de gravedad en la resolución de ecuaciones. Contiene, en especial, una magnífica exposición de la teoría de sistemas de ecuaciones lineales sin determinantes, lo que hace posible el estudio del caso de infinitas ecuaciones con infinitas incógnitas, con la natural aplicación a las ecuaciones integrales, a las que dediqué mi actividad como obra de juventud. La teoría de Galois aparece ilustrada con unos diagramas, llamados hoy diagramas de Hasse, de gran poder intuitivo en el sentido de Bourbaki. En Algebra yo llegué hasta allí; su desarrollo ulterior tal como nos lo ha descrito Ancochea ocurrió cuando yo estaba sumergido en otras actividades. De aquí que la lectura de la enjundiosa exposición de Ancochea, aparte de ser para mí una revelación en muchos aspectos, me haya hecho meditar seriamente sobre las nuevas orientaciones de nuestra Ciencia. La ordenación de las matemáticas a partir del concepto de estructura contribuye eficazmente a hacer desaparecer la sensación de «invertebrada», para expresarse en términos orteguianos, que daba la matemática clásica. Cuando Ancochea recuerda que, a comienzos de siglo, las matemáticas se presentaban como una serie de disciplinas distintas, fundadas sobre nociones particulares, trae a mi memoria el pasaje de mi discurso, al ingresar en esta Corporación hace veintisiete años, en el que decía textualmente: «La profusión de métodos particulares, ramificaciones y trabajos difundidos en miles y miles de monografías que se amontonan desde fines del siglo pasado, impide seguir la marcha de los descubrimientos matemáticos aun a aquellas personas que dedican a ello toda su actividad.» Ante tal situación dramática, se impone una tarea de economía, en el sentido de Mach, al objeto de que a esfuerzos intelectuales de análoga raíz correspondan resultados comunes cada vez más amplios y generales. Esa labor de economía la realiza de modo natural la introducción del concepto de estructura. Y seguramente es en Algebra donde tal concepto tuvo su punto de partida. La generalización del concepto clásico de número hasta llegar al de elemento de una estructura algebraica marca con énfasis el paso de lo «concreto» a lo «abstracto», tomados estos términos en sentido muy amplio. La naturaleza de los nuevos entes nos es indiferente y ésta es una de las notas características de los elementos primitivos de una teoría axiomática. Decía Cantor: «La esencia de las Matemáticas está en su libertad». ¿Qué mayor libertad podemos pedir que la que nos permite la introducción de esos elementos primitivos? Anillos, cuerpos, grupos, estructuras algebraicas son bellas creaciones de la mente humana. Siente uno, con Dedekind, que «somos una raza divina y poseemos el poder de crear». A la Matemática concierne el estudio de leyes muy generales que se aplican a conjuntos de elementos que ya no son necesariamente números o puntos. Por otra parte, los axiomas son en cierto modo arbitrarios, sujetos únicamente a la condición de no ser contradictorios. Y así parece justificarse la tan conocida definición de Bertrand Russel: «Las matemáticas son una Ciencias en la cual no se sabe nunca de lo que se habla, ni si lo que se dice es cierto». En esta definición, en la que se refleja el acerado humor del ilustre matemático y filósofo, la apariencia de modestia encierra en realidad el justificado orgullo del que sabe que, cuando en las aplicaciones de la matemática a otras ciencias, se toman «razonablemente» las correspondencias entre elementos primitivos y sus imágenes en la ciencia aplicada y entre los axiomas y las propiedades de dichas imágenes: «La Matemática es la única ciencia humana en la cual se sabe siempre exactamente de lo que se habla y en la que se está siempre seguro de que lo que se dice es cierto».

Me hubiera complacido que Ancochea hubiera insistido más en el aspecto del Algebra como disciplina auxiliar de otras ramas de la Matemática. El espíritu pragmático con el que yo estoy habituado a manejar ésta me hubiera guiado eficazmente para una contestación adecuada. Lo de que una disciplina de nuestra Ciencia preste auxilio a otras ramas distintas dentro de la Matemática es cosa antigua. Recordemos cómo la Geometría Analítica permite estudiar con métodos del Análisis problemas geométricos, y recíprocamente. En este recíprocamente estriba la diferencia esencial respecto del Algebra como instrumento para el estudio de otras disciplinas matemáticas. En Geometría Analítica, un problema geométrico y su correspondiente en Análisis son equivalentes; son dos formas distintas de expresar la misma cosa. En la nomenclatura actual se diría que son isomorfos. Consideremos, en cambio, un caso típico de aplicación del Algebra a un problema de Topología: A todo espacio topológico, y para cada valor de n, le hace corresponder un grupo H_n (grupo de homología de dimensión n). Si dos espacios son topológicamente equivalentes, lo que en términos técnicos se expresa diciendo que son homeomorfos, los grupos de homología son isomorfos. El problema de equivalencia de dos espacios conduce así a un problema algebraico de isomorfismo entre grupos. Pero ahora, en contraposición a lo que ocurría en el caso de la Geometría Analítica, puede ocurrir que los grupos sean isomorfos sin que los espacios sean equivalentes. Dicho de otro modo, la isomorfía entre los grupos de homología es condición necesaria, pero no suficiente, para el homeomorfismo de los espacios. Así pues, el problema topológico y su correspondiente algebraico no son equivalentes. La teoría algebraica capta algunos aspectos de la topológica, pero no todos. Esto que de seguro es un inconveniente tiene como contrapartida el hecho de que el problema de Algebra es, en general, mucho más sencillo que el problema topológico. Junto a los grupos de homología se pueden considerar otras estructuras algebraicas ligadas con los espacios topológicos: grupos de homotopía, anillos de cohomología, etc., cada una de las cuales suministra condiciones necesarias para el problema de la equivalencia.

El método seguido recordará seguramente a los que estudian Ciencias a las que se aplica la Matemática, por ejemplo a los físicos, el procedimiento que ellos emplean al examinar matemáticamente uno de sus problemas. Se pide, en cada caso, que el esquema matemático refleje alguno o algunos de los aspectos de la cuestión estudiada. Esquemas distintos de un mismo problema son como fotografías diferentes de un mismo objeto y, a veces, de un número reducido de esquemas se puede deducir, por una inducción correcta en la ciencia aplicada, la caracterización matemática del problema en cuestión.

Cuestiones de espacio han hecho que Ancochea haya sido también muy parco en lo que concierne al Algebra tensorial, en la que por razones de oficio pisaría yo terreno más firme. Aunque, he de confesarlo, mi formación en ese aspecto utiliza la orgía de índices que Ancochea reprocha, con mucha justicia, al Cálculo tensorial clásico.

Ancochea, como su maestro Alvarez Ude, dosifica casi siempre la seriedad con la ironía. Sus observaciones en la discusión o en el coloquio contienen siempre una nota de humor. Hoy, dentro de su rigurosa exposición, ágil y llena de conceptos abstractos, se ha referido a Bourbaki como si se tratara de un matemático. Los conocedores saben que este nombre designa un ente policéfalo, constituido por matemáticos jóvenes de una escuela matemática, de fuerte sabor hilbertiano, a la que la matemática francesa actual debe gran parte de su brillante prestigio. Se ve que el sentido del humor entre los matemáticos alcanza todos los países. Quizá en la referencia seguida por Ancochea, universal en el ambiente matemático, haya influido no sólo el sentido del humor, sino también el temor de que —como ocurrió a un colega norteamericano— los bourbakistas hagan circular como represalia el rumor de que Ancochea no designa un matemático, sino que es la sigla de un grupo de matemáticos españoles. Ancochea tiene siempre la réplica inmediata; se produce con frase aguda y de una manera tan espontánea que parece vivir la armonía entre la inspiración y la horaciana «mens divina». El ingenio que derrocha en la conversación privada y en el comercio amistoso de las ideas determina, a veces, que algunos que no le conocen bien puedan reprocharle su ironía, sin caer en la cuenta de que la seriedad constante es, frecuentemente, arrogancia de la insuficiencia, cómoda para ocultar cortedad de alma.

Después de esta digresión, hecha con ánimo de perfilar la silueta moral de nuestro nuevo colega, y para terminar, volvamos al capítulo de sus méritos y éxitos científicos. Ha sido invitado con frecuencia por las Universidades y Seminarios matemáticos más famoso del mundo. Ha dado conferencias en Princeton y Urbana (1947); en Gotinga, Kiel, Hamburgo y Bonn (1951); en Copenhague, Lund, Estocolmo y Oslo (1955); en la Sorbona (1947); en Frankfort, Heidelberg, Hamburgo, Friburgo y Münster (1965); en Roma (1965). Durante el curso 1959-60 profesó en la Universidad Central de Venezuela (Caracas), al iniciarse en ésta los cursos específicos de la licenciatura en Matemáticas. Desde 1949 es colaborador del «Zentralblatt für Mathematik», en el que lleva publicadas más de 200 referata.

Al contemplar la fecundidad científica y la calidad de la obra de Ancochea, así como sus condiciones humanas, se tiene la certeza de que la Academia se enriquece al contarle entre sus miembros. Conoce muy bien la matemática clásica y domina la matemática moderna; por la extensión de sus conocimientos puede rendir servicios inapreciables a nuestra Comunidad. Al felicitarle y darle la cordial bienvenida en nombre de esta Corporación, puedo asegurarle que en nuestra Casa encontrará clima propicio para ejercer las privilegiadas facultades que Dios ha querido concederle.

He dicho.

LISTA DE PUBLICACIONES
DE
GERMAN ANCOCHEA

1. *Derivaciones covariantes e identidades de Ricci en los espacios de Finsler.* «Rev. Mat. Hisp.-Amer.». Madrid (1934).
2. *Invariantes de un hilado triple.* «Rev. Mat. Hisp.-Amer.». Madrid (1934).
3. *Sobre el teorema fundamental de la Geometría proyectiva.* «Rev. Mat. Hisp.-Amer.». Madrid (1941).
4. *Le théorème de von Staudt en géométrie projective quaternionienne.* «Journal f. d. reine u. angewandte Math.», v. **184**. Berlín (1942).
5. *Sur quelques théorèmes de la théorie algébrique des corps.* «Portugaliae Math.». Lisboa (1943).
6. *Corps hyperelliptiques de caractéristique 2.* «Portugaliae Math.». Lisboa (1943).
7. *Sur l'équivalence de trois propositions de la théorie analytique des polynomes.* «Compt. Rend. Acad. Sciences». París, v. **220** (1945).
8. *Sur les polynomes dont les zéros sont symétriques par rapport à une circonférence.* «Compt. Rend. Acad. Sciences». París (1945).
9. *Courbes algébriques sur corps fermés de caractéristique quelconque.* «Acta Salmanticensia. Ciencias Matemáticas», núm. 1. Salamanca (1946).
10. *Curvas algébricas sobre cuerpos de característica prima.* Memoria premiada por la Real Academia de Ciencias de Madrid (1946).
11. *Sobre los correlativos de los teoremas de Meusnier y Euler.* «Rev. R. Acad. Ciencias», Madrid, v. 41 (1946).
12. *On semi-automorphisms of division algebras.* «Annals of Math.». Princeton, v. 48 (1947).
13. *Sobre el Nullstellensatz de Hilbert.* «Annali di Mat.». Roma, s. IV, t. 29 (1949).
14. *Affine und projektive Differentialgeometrie der singulären Kurvenelemente.* «Abhandl. Math. Seminar Hamburg.», v. 18 (1952).
15. *Géométrie différentielle des singularités des courbes de l espace profectif.* «Rend. Circolo Mat. di Palermo», s. II, t. 1 (1952).
16. *Sur les formes différentielles quadratiques dégénérées.* «Compt. Rend. Acad. Sciences». París, v. 236 (1953).
17. *Zeros of self-inversive polynomials.* «Proceedings Amer. Math. Society». U. S. A., v. 4 (1953).

18. *Interpretación geométrica de la curvatura proyectiva de una curva plana.* «Abhandl. Math. Seminar Hamburg Universität», v. 20 (1955).
19. *Sur la représentation des éléments différentiels.* «Vortragauszüge». LV Osterr. Math. Kongress. Viena (1956).
20. *Sur la représentation des éléments différentiels de l'espace projectif.* «Annali di Mat.». Roma, s. IV, t. 65 (1964).
21. *Automorphismes des extensions algébriques d'un corps.* «Mathematische Annalen». Berlín, v. 157 (1964).
22. *Points proches en Géométrie algébrique.* «Mathematische Annalen». Berlín, v. 164 (1966).
23. *Algebres associatives unitaires de dimension finie sur un corps commutatif.* «Journal f. d. reine u. amgewandte Math.», v. 222. Berlín (1966).
24. *Punti prossimi in Geometria algebrica.* «Annali di Mat.». Roma, s. IV, t. 72 (1966).

Como colaborador del «Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete», ha publicado más de 200 referatas sobre cuestiones de Algebra, Geometría diferencial y Geometría algebraica.