

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS  
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

---

# DISCURSO

LEÍDO EN EL ACTO DE SU RECEPCIÓN

POR EL SEÑOR

D. JOSÉ G. ALVAREZ UDE

Y

# CONTESTACIÓN

DEL SEÑOR

D. JULIO REY PASTOR

EL DÍA 31 DE MARZO DE 1928



MADRID  
TALLERES "VOLUNTAD"  
SERRANO, 48

1928

DISCURSO  
DEL SEÑOR  
D. JOSE G. ALVAREZ UDE

SEÑORES ACADÉMICOS :

**P**ERMITID que comience con un recuerdo personal insignificante. Hace muchos años, un catedrático, excelente persona, pero de no largos alcances, fué nombrado Gobernador civil de una provincia de tercer orden, y al tomar posesión del mando de su ínsula, todo asombrado de la altura en que se encontraba, decía a uno de sus íntimos: «¿Lo ves? ¡Pues aún no lo creo!» Tomábamos esto a broma los compañeros, entonces jóvenes; pero hoy, al venir aquí, siento como un remordimiento por lo injusto de nuestras vayas, al darme cuenta de la pesadumbre que debió de sentir el nuevo Gobernador al percibir las responsabilidades de su cargo, y si tan punzante es el remordimiento, que me obliga a publicarlo, es porque yo me encuentro ahora en una situación parecida, pero mucho más grave: no soy tan buena persona; tengo menos alcances, y recibo un honor incomparablemente más grande... ¡Qué he de hacer, pues, sino sentirme confundido al verme entre vosotros y aun persuadido de vuestra equivocación, conceder más fe a vuestro juicio que al mío propio — al fin sois sabios — y humildemente y con la natural torpeza de palabra que, si ya no me acompañase siempre, tendría en estos momentos, poco propicios a la elocuencia por exceso de emoción y efusión cordial, daros las más rendidas gracias y prometer hacer lo posible por que vuestra equivocación no aparezca demasiado patente! Y al cumplir

con esto, que es deber de conciencia más que obligada pleite-sía a una costumbre casi protocolaria, he de agregar algo en recuerdo de D. Eduardo Torroja, pues que a vosotros y a él debo esta distinción. Yo no dudo, porque la influencia que ejerció en mi formación y, por tanto, en mi vida toda es demasiado grande para que la duda quepa, que en mi elección han entrado por mucho vuestro deseo de ver prolongada todo lo posible su Escuela, que tan valiosos representantes tiene ya aquí, y una suerte de aval que atribuí a la inmerecida protección que me dispensó; sería, pues, ingrato, indisculpable, si al llegar en mi carrera científica a la cúspide, que nunca se me ocurrió pudiera alcanzar, no dedicase, como lo hago, con estas pobres palabras lo más puro y hondo de la satisfacción que siento, a la memoria del maestro inolvidable.

---

Decía yo hace un momento que me sentía confundido al verme entre vosotros, pero mi confusión aún aumenta al considerar que lo hago sustituyendo a D. Antonio Vela, cuya inteligencia, cuyo ingenio y cuya bondad tuvisteis ocasión de apreciar bien y no olvidaréis fácilmente. No porque la muerte señale la hora de las alabanzas, ni porque el tributarlas sea costumbre de estas solemnidades, he de recordar sus méritos: ninguna de ambas razones serían probablemente bastantes a torcer mi temperamento de cierta dureza en el juicio; pero soy esclavo de la justicia y a ella sirvo, y aun seguramente por defecto, con tales recuerdos.

Fué Vela hombre de gran inteligencia y no menor ingenio, que prodigó durante toda su vida, sin que fuera bastante a disminuirlo larga y cruel enfermedad que puso de relieve el recio temple de su alma. Dedicado desde muy

joven al cultivo de la Astronomía, en ella realizó investigaciones de gran interés, la mayor parte de las cuales han visto la luz en las publicaciones del Observatorio de Madrid, del que fué Director desde 1919 hasta su muerte. Fué también Profesor de la Facultad de Ciencias de esta Universidad, en la que, después de servir varios años como profesor auxiliar, desempeñó desde 1908, de la manera notable que a él correspondía, la cátedra de Astronomía física. Y a pesar de todos estos trabajos, aún halló su espíritu inquieto y vivo ocasión de ejercitar la pluma en la Prensa científica, y fueron muchos los artículos suyos en los que, junto a sus conocimientos profundos, aparecía constantemente el ingenio fácil y también, a veces, el formidable polemista, que con una frase mordaz o simplemente irónica acababa de inutilizar al adversario. Pero aun entonces se advertía en Vela al hombre noble y bueno que fué siempre y cuya vida, dedicada por entero al trabajo, podrá ofrecerse a todos de ejemplo, y para mí será siempre un vivo estímulo en esta Casa.

\* \* \*

Un precepto reglamentario me obliga a disertar ante vosotros acerca de un tema que tenga relación con las labores de la Academia; procuraré hacerlo brevemente, para no molestaros, que harto castigo tendréis en adelante con mi compañía para hacéroslo sentir desde el primer momento, diciendo algo acerca de los Seguros Sociales, especialmente en lo que a su Matemática se refiere, y acaso no vendrá mal que aquí, donde se han oído tan valiosas lucubraciones sobre temas de esa ciencia abstracta que se cierne sobre todas las alturas imaginables, sin influir en las cosas terrenas, ni dejarse influir por ellas, aparezca la Matemática humani-

zándose y contribuyendo a proporcionar el bienestar, a disminuir, al menos, el malestar de los económicamente débiles, que si su contribución vale algo en este sentido, bien se le podrán perdonar aquellos otros excesos.

Pero no habréis de extrañar que al hablar de la Matemática actuarial no lo haga desligándola completamente de los demás aspectos del seguro: la moda del especialismo aislador, (porque también la Ciencia, femenina al fin, gusta de modas), pasó ya. Una violenta reacción contra la cultura enciclopédica superficial condujo a un excesivo desarrollo de la especialización y a considerarse como ideal la formación científica del especialista, llegándose con lamentable frecuencia a atribuir este carácter al conocedor de un solo capítulo de la Ciencia. Yo no sé si tal cosa es siquiera posible: acaso lo sea en algunas especulaciones de tono muy abstracto, a cuyos investigadores no interesan las demás especialidades, sino, cuando más, como una herramienta útil para su trabajo; pero quienes hayan de aplicar sus actividades a ramas de lo que podría llamarse *ciencia viva*, nunca podrán ser especialistas en ese sentido restringido, sino en una cierta medida. Así, en la Ciencia del Seguro quedan aún quienes son exclusivamente juristas, o economistas, o matemáticos, etc., pero no deberían quedar: cada uno de ellos debería tener unos conocimientos generales suficientes para poder darse perfecta cuenta de los problemas que, dentro del Seguro, se presentan a los otros especialistas, y coadyuvar a su solución, que a veces le planteará cuestiones características de la propia especialidad. Por eso yo, reconociendo la defectuosa formación mía, consiguiente a la época del mito especialista en que he pasado lo mejor de mi vida, quizá huya hasta con exceso de permanecer en uno

de esos recintos demasiado pequeños e impenetrables donde no se puede ver y donde tampoco cabe ser visto.

\* \* \*

Ciencia muy moderna, como tal, la del Seguro, es natural que aún carezca de sistematización satisfactoria <sup>1</sup>; pero cualquiera que sea la clasificación adoptada, en ella aparecerá como rama de importancia superior a la de cualquiera otra el Seguro Social, bien que al definirlo no haya habido siempre unanimidad.

La conveniencia, si no necesidad, de fijar y delimitar de un modo preciso este concepto, hizo que alrededor de él hubiese una interesantísima discusión en el Sexto Congreso Internacional de Actuarios, celebrado en Viena en 1909, con ocasión de los temas <sup>2</sup> «Métodos de cálculo de las primas y reservas matemáticas en el Seguro social; en particular, condiciones de aplicación de primas medias» y «Relaciones económicas entre el Seguro social y el Seguro privado», sobre los cuales, actuarios y estadísticos de gran valía aportaron muy notables contribuciones. Se apreció entonces la desorientación, muy general, de los actuarios, cuyo campo general de acción había sido hasta entonces casi exclusivamente el Seguro privado, al tratar del social, cosa que se

---

<sup>1</sup> Un trabajo de gran mérito en este sentido, en el que se estudian los principales intentos realizados para la clasificación de los seguros, y se expone uno bastante completo, es debido al Prof. DORN, de la Technische Hochschule, de Munich, y ha aparecido en *Festgabe für Alfred Manes*, Berlín, Mittler und Sohn, 1927, páginas 1 a 47.

<sup>2</sup> *Gutachten, Denkschrift und Verhandlungen des sechsten internationalen Kongress für Versicherungswissenschaft*. tomo I, páginas 451 a 572 y 993 a 1166; tomo III, páginas 132 a 266. Wien. 1909.

advierde ya en la diversidad de denominaciones que, a veces, el mismo autor le aplicaba: Seguro social, Seguro público, Seguro nacional, Seguro obrero, etc.

La discusión, juzgada ahora, parece haber estado influenciada, seguramente sin querer que así fuera, por el equivocado temor del Seguro privado, mejor diríamos mercantil, de resultar gravemente perjudicado por la implantación de Seguros sociales <sup>1</sup>: sólo así se explica que hubiera quien, como el holandés V. Schevichaven, negase a éstos el carácter de Seguro, sosteniendo que se trata de instituciones de beneficencia, doctrina que responde a un concepto de previsión («Fürsorgetheorie») dado por una escuela alemana representada por Rosin, Laband y Weyl. Para Schevichaven sólo son razones políticas las que hacen que se designen como seguros, con el fin de que pueda aceptarse como un derecho lo que se da a título de limosna. Esta posición extremista no tuvo eco, sino que se reconoció al Seguro social el carácter de tal Seguro: para no reconocerlo hubiera sido preciso admitir lo equivocadamente defendido por Moldenhauer, que en el Seguro social no hubiera la equivalencia, fundamental en todo Seguro, entre los valores actuales de los cobros y los pagos previstos. Tal ecuación existe siempre: que las primas sean pagadas total o parcialmente por el asegurado, o que otro las abone por él, nada afecta a la condición del Seguro. El error de los que así piensan es, en el fondo, uno muy generalizado: el suponer que tal ecuación fundamental

---

<sup>1</sup> Lo que realmente ocurre es lo contrario, y así ha sido reconocido por actuarios eminentes y poderosas Compañías de Seguros. Véase, por ejemplo, MANES: *Ueber die Grenzen der Privat- und der Sozial-Versicherung* (*Zeitschrift für die gesamte Versicherungs-Wissenschaft*, Berlín, 1912, página 509 y sig.), en cuyo trabajo analiza con gran acierto desde el punto de vista económico los caracteres distintivos de ambos seguros.



se verifica aisladamente para cada caso en el Seguro privado, cuando lo que realmente se supone, por acomodarse a la realidad y porque sin ello no podría haber una institución aseguradora, es que se verifica la ecuación para una masa de asegurados, por lo cual nunca debería hablarse de igualdad entre valores de ingresos y pagos de un asegurado, sino de valores actuales de ingresos y pagos probables de masa asegurada.

La distinción entre uno y otro seguro fué prolijamente examinada: para Emminghaus lo característico es que el instrumento sea privado o público, con cuya definición jurídica formal se mostraba de acuerdo Zwiedineck, que, además, creía que sólo al Seguro público relativo a riesgos de personas, no de cosas, se le debe atribuir el carácter social, y aun entonces le imponía la obligatoriedad legal. Esta circunstancia fué impugnada por el italiano Magaldi, para quien lo característico es sólo el conjunto de las personas a que afecta, y, también, que los riesgos que cubren tienen una íntima conexión entre sí, lo cual explica la tendencia, muy generalizada, al Seguro integral. Como ocurre con frecuencia en Asambleas de gentes intelectualmente selectas, no se llegó a un acuerdo definitivo; pero la opinión general fué la recogida por el ponente Dr. Klang, coincidente con la que ha venido manifestándose durante mucho tiempo en el lenguaje ordinario: considerar como Seguro social, en sentido amplio, el llamado *Seguro obrero*, y en sentido restringido este mismo, pero sólo cuando es practicado por el Estado. Hay en esto, sin embargo, una inexactitud, acertadamente señalada por Manes, puesto que el Seguro social alcanza no sólo a los obreros, sino a otras clases sociales contiguas, formadas por pequeños patronos o propietarios, oficinistas, etc.

Hoy parece que la definición que mejor se acomoda al

carácter del Seguro social, para poder comprender las formas que toma en los diversos países, es la muy amplia dada por Manes <sup>1</sup>, colocándose en un punto de vista puramente económico y modificando ligeramente otra de Dersch <sup>2</sup>: «El Seguro social está constituido por todas las instituciones económicas basadas en la mutualidad y cuyo fin es atender a las necesidades valiables de capas sociales económicamente débiles.» De esta definición se deduce que el Seguro social podrá adoptar una de estas formas <sup>3</sup>:

- a) Seguro voluntario en Mutualidades de carácter privado.
- b) Seguro voluntario en organizaciones obreras.
- c) Seguro obligatorio en instituciones del Estado, que es, como queda dicho, el Seguro social, en sentido estricto, al que con pocas excepciones van reduciéndose los otros dos, y que de ordinario se conoce simplemente con el nombre de *Seguro social*.

Las diferencias entre el Seguro privado y este social aparecen así perfectamente claras: el primero es de carácter voluntario; el asegurado tiene libertad absoluta para serlo o no, y en la elección de asegurador y éste la tiene en la elección de aquél; libremente convienen uno y otro la cuantía del seguro y las condiciones de pago de las primas, etc. No hay otros límites del contrato que los derivados de las leyes generales, y la institución aseguradora sólo tiene condicionada su libertad de movimientos por la necesitada inspección establecida por todos los países para garantizar

---

<sup>1</sup> MANES: *Versicherungswesen*, Leipzig, Teubner, 1924.

<sup>2</sup> DERSCH: *Die öffentliche rechtliche Zwangsversicherung auf der Grundlage der Berufsarbeit*.

<sup>3</sup> BRUCKER, MUTHESIUS, SUSS y RICHTER: *Die Sozialversicherung*, Berlin, Hobbing, 1928, páginas 73 y siguientes.

al asegurado el posible cumplimiento de las obligaciones contraídas por el asegurador. En el Seguro social, por el contrario, el Estado fija todas las condiciones, y a ellas ha de someterse, muchas veces contra su voluntad, el asegurado, porque la necesidad colectiva se impone a la conveniencia individual; no se habla ya de buenos o malos riesgos; desaparece la selección, tanto de parte del asegurado como del asegurador, posible en el Seguro privado, y la ecuación fundamental del Seguro no se establece considerando los valores de ingresos y pagos probables aislados, sino colectivos; los fuertes pagan por los débiles; la obra realizada pierde el matiz legítimamente egoísta que de una y otra parte se manifiesta en el Seguro privado, para ser una obra de solidaridad social, lo que autoriza al Estado para imponerse obligaciones e imponerlas a otros no asegurados en favor de éstos.

De la propia definición del Seguro social se deduce también que las necesidades a que ha de atender tienen como causa una de éstas:

Limitación o pérdida de la capacidad de producción (invalidez, edad, enfermedad, maternidad, accidentes del trabajo, muerte, viudedad y orfandad).

Imposibilidad de producción, no debida a incapacidad para el trabajo (paro forzoso).

Y así se originan otros tantos seguros. Lo corriente es considerar agrupados los de invalidez, edad y muerte, formando el Seguro de invalidez; los de enfermedad y maternidad, constituyendo el de enfermedad, y los de accidentes del trabajo y muerte debida a los mismos, y a cada uno de estos grupos se agrega el de las rentas de viudedad y orfandad correspondientes; y hoy hay un movimiento muy consistente en favor del *Seguro integral*, comprensivo de to-

dos ellos, que presenta indudables ventajas, sobre todo por la economía en la administración, pero tiene también inconvenientes no pequeños, lo que explica la dificultad de su implantación. Así, Alemania, el país donde han tenido su origen los Seguros sociales y donde mayor desarrollo han alcanzado, hasta el punto de que sólo en el Seguro de invalidez participan hoy 25.000.000 de personas, tiene separados los cuatro seguros: invalidez, enfermedad, accidentes del trabajo y paro forzoso, aun cuando para mayor economía y simplificación administrativas los una a ciertos efectos, y en Francia se está discutiendo en el Parlamento el proyecto de Seguro integral, y no hace mucho se ha desglosado de él lo relativo al paro forzoso, y aun con tal facilidad, sin el anuncio de próximas elecciones, probablemente no sería aprobado.

\* \* \*

Los fenómenos naturales, y los sociales más que cualquiera otro, tienen tal complejidad que la percepción de todos sus pormenores escapa a nuestras facultades de observación: aun los que se advierten son demasiados para estudiar las consecuencias de su conjunto simultáneo, y una y otra cosa obligan a no considerar sino aquellos que parecen tener carácter específico, con lo cual, en realidad, se opera sobre un ser ideal, grosera aproximación del real las más de las veces. En particular, si la investigación propuesta ha de tener carácter matemático, y éste es el caso de la Matemática actuarial, como el de la Física matemática, el de la Astronomía y, en general, el de toda la Matemática aplicada, cualquiera que sea la técnica en que se aplique, la existencia de esos objetos imaginarios y las relaciones fundamentales entre ellos se establecen por medio de axiomas y definicio-

nes cuyo conjunto ha de formar un sistema completo y no contradictorio. Sobre este sistema se construye la teoría, y sus resultados son siempre ciertos en el mundo ideal de la Axiomática establecida y se acomodarán a la realidad tanto más cuanto más se adapten a ella los axiomas y las definiciones de que se ha partido. Se comprende, pues, que la total coincidencia de teoría y práctica ha de ser puramente asintótica, y las discrepancias tanto menores cuanto más hábilmente se haya establecido la Axiomática y se haya seguido la investigación, y podrán considerarse como nulas y lograda la coincidencia apetecida cuando el orden de su magnitud sea más elevado que el de la aproximación que permitan los medios de medida o de realización de que se disponga. Para la aplicación esto es lo que importa, y por eso la *depuración* que significa una Axiomática rigurosa, llega siempre mucho después que las aplicaciones. En la Matemática actuarial hay un intento de Axiomática realizado por Bohlmann <sup>1</sup>, pensando, sobre todo, en el Seguro privado; no es, sin embargo, completo, y, como cualquiera otra Axiomática actuarial que se construya, puede ser muy discutido, pues todas llevarán incluidos los fundamentos del Cálculo de probabilidades. Se opera, pues, como siempre ha ocurrido en el período de juventud de las Ciencias, que es el más fecundo, con una Axiomática insegura y no muy consciente, pero la realidad ejerce un constante control, que sirve de norma para mantenerse en el camino seguido o apartarse de él.

Refiriéndonos de un modo más concreto a esta Matemá-

---

<sup>1</sup> BOHLMANN: *Enzyklopädie d. mathematischen Wissenschaften*, Leipzig, Teubner y París, Gauthier-Villars; ed. francesa, artículo redactado por POTERIN DE MOTEL, 1911, tomo I, volumen IV, páginas 496 y siguientes.

tica de los Seguros sociales, lo ya dicho permite ver que estará influida por la más antigua de los privados, pero tendrá algunas características propias, principalmente debidas a la calidad del asegurador, que siempre, de modo más o menos directo, es el Estado, y a la masa asegurada, que podría decirse que es una colectividad obligada, lo cual permitirá el establecimiento de primas medias y, junto con el carácter de vida indefinida atribuido al Estado, tomar en ciertos casos como base de los cálculos no los asegurados de una generación, es decir, de un período financiero, el año, por ejemplo, sino los de todas las generaciones presentes y futuras.

Cualquiera que sea el Seguro de que se trate, el problema fundamental que ha de resolverse es la determinación de los valores actuales de los pagos probables de asegurador y asegurado. Admitida la teoría del interés y suponiendo que el tipo de éste pueda conservarse en lo futuro <sup>1</sup>, la mayor dificultad, si no la única, es la de fijar la probabilidad de que tales pagos se realicen, lo cual se hace mediante las tablas de mortalidad, invalidez, nupcialidad, ... correspondientes, que vienen a ser así el fundamento de todos los cálculos y cuya importancia justifica el análisis y las discusiones de que son objeto los conceptos de las diversas probabilidades, la consiguiente determinación de éstas y su aplicación a la construcción de las tablas.

---

<sup>1</sup> Esta es circunstancia a la que no se concede el valor debido, porque la experiencia demuestra que el interés es función casi constantemente creciente del tiempo, y, por tanto, que dejando un pequeño margen de seguridad entre el interés supuesto y el corriente, podrá siempre admitirse como válido el primero; aun así, siempre será preciso que el mercado tenga capacidad de absorción suficiente para el capital formado. Por esto es absurdo el caso, no hace mucho publicado por la Prensa de todos los países, de legar un capital para que junto con los intereses acumulados en quinientos años valga para cancelar la deuda de un país.

Elegida o construída la tabla básica del Seguro de que se trate, aún queda otra cuestión — quizá tan importante como la primera en el Seguro social, porque sin su previa resolución no se puede plantear la ecuación fundamental — , que es lo que suele llamarse el *sistema financiero* del Seguro, que fija la manera de allegar los medios de que el asegurador (Estado o entidad delegada del mismo) satisfaga sus compromisos con el asegurado. Estos sistemas pueden ser muy variados y han sido materia de estudios muy interesantes <sup>1</sup>, entre los cuales merecen señalarse los de Bortkiewicz <sup>2</sup>, Schromm <sup>2</sup>, Blaschke <sup>3</sup>, Kaan <sup>3</sup> y Lorenz <sup>4</sup>, y los de los proyectos de leyes de Seguros alemán y austriaco.

Ambas cuestiones: determinación de probabilidades de riesgos y su aplicación a la construcción de tablas, y sistema financiero del Seguro constituyen el núcleo de la Matemática de los Seguros sociales, y acerca de una y otra diremos algo, con el intento de hacer ver las soluciones que pueden darse.

\*\*\*

Los sistemas financieros que pueden idearse para cualquier Seguro son muy variados, pero aun cuando en su

---

<sup>1</sup> Una exposición de carácter general puede verse en CZUBER: *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Leipzig, Teubner, 1921, tomo II, páginas 350 y siguientes; y en LOEWY: *Versicherungsmathematik*, Berlín, Springer, 1924, páginas 183 a 204.

<sup>2</sup> *Gutachten, etc., des VI. int. Kongress für Versicherungswissenschaft*, Wien, 1909; BORTKIEWICZ: *Die Deckungsmethoden der Sozialversicherung*, páginas 473 a 497; SCHROMM: *Methoden der Bemessung, etc.*, páginas 539 a 562.

<sup>3</sup> *Mitteilungen der öst-ungar. Verbandes der Privatversicherungsanstalten*, Wien, 1909, tomo V; BLASCHKE: *Die Prämien und Prämienreserven, etc.*, páginas 2 a 38; KAAAN: *Die Finanzsysteme, etc.*, páginas 63 a 107.

<sup>4</sup> LORENZ: *Die Finanzsysteme in der Personenversicherung*, Leipzig, 1915.

clasificación lleguen algunos a considerar hasta ocho <sup>1</sup>, en esencia pueden reducirse a tres:

- a) Prorrato de cargas constituidas, que suele llamarse simplemente *reparto*.
- b) Prorrato de cargas que se constituyen, que también se llama de *capitalización*; y
- c) Prima media.

El sistema de reparto es el más simple; al comenzar el año (y claro que la unidad de tiempo o período financiero podría ser otra), se evalúan las rentas y los capitales que será preciso abonar durante el curso del mismo <sup>2</sup>, y la suma total se prorratea en partes iguales entre los asegurados, o proporcionalmente a los haberes de éstos, obteniéndose como cociente la *prima por cabeza* o *por unidad de haber*, respectivamente.

Este es el procedimiento que suelen seguir los Estados que otorgan haberes pasivos a sus funcionarios; cada año, al redactar sus presupuestos, incluyen en ellos las cantidades que se suponen precisas para las atenciones pasivas. Es también procedimiento seguido en muchas Mutualidades y en algunos Seguros, por ejemplo, en el de accidentes de trabajo, en Alemania.

---

<sup>1</sup> RICHARD: *Théorie mathématique des assurances*, 2.<sup>a</sup> ed. París, Doin et Cie., 1922, tomo II, pág. 187.

<sup>2</sup> Naturalmente, la evaluación *a priori* corre el peligro de ser errónea y, por tanto, que los cobros sean en cantidad inferior a los pagos que deban hacerse, por lo cual, cuando las circunstancias políticas y sociales lo permiten, el reparto se hace *a posteriori* o, por cualquier procedimiento, se tiene constituido un fondo regulador que permite enjugar ese déficit y absorbe los también posibles superávits eventuales.



Son fáciles de apreciar las ventajas y los inconvenientes del sistema. La ventaja esencial es la sencillez; por ella los gastos de administración se reducen al mínimo; los conocimientos matemáticos que debía tener un niño al ingresar en la enseñanza secundaria, con arreglo a los planes anteriores al que hoy rige en España, serían suficientes para dirigir este servicio. No es preciso aparato estadístico, y los primeros años las cuotas son muy pequeñas, y ambas circunstancias facilitan la implantación de Seguros que, de otro modo, carecerían de base técnica, o gravarían de pronto al contribuyente, lo cual haría, en muchos casos, que por miedo al fracaso o al resultado de elecciones futuras, los Parla-mentos no se atreviesen a aprobar los Seguros proyectados. Los inconvenientes son muchos, y de gran importancia, cuando las obligaciones del Seguro, como ocurre en el de invalidez, consisten principalmente en el pago de rentas; basta fijarse en dos: de una parte, en que sólo existe la seguridad del cobro de la pensión en el año corriente, de tal modo, que si por cualquier razón se disolviese la Caja aseguradora, los derechos de todos los asegurados, pensionistas o no, se desvanecerían; por otra, el importe de las obligaciones crece de un año al siguiente incesantemente y puede llegar a cifras insostenibles antes de alcanzar el período estacionario. De la progresión de las cuotas por cabeza pueden dar idea estas cifras, relativas a Austria <sup>1</sup>:

1800	1891	1892	1893	1894	1895	1900	1910
0,76	2,25	3,17	4,13	5,20	5,17	16,07	18,35

---

<sup>1</sup> BRUCKER: *Die Sozialversicherung*, Berlín, 1928, pág. 89.

o estas otras de Alemania:

1886	1890	1895	1901	1905
4,62	10,48	13,75	16,03	17,99

Ambos inconvenientes son por sí solos suficientes para desechar este sistema en los Seguros de rentas, salvo circunstancias muy excepcionales, como las de Alemania al reconstruir su Seguro de invalidez el año 1927<sup>1</sup>, después de la bancarrota, que la han obligado a adoptar parcialmente este sistema de reparto<sup>2</sup>. La gran preocupación que las clases pasivas han supuesto siempre para nuestros hacendistas, y que seguirán suponiendo mientras no varíe

---

<sup>1</sup> La magnitud de la guerra de 1914-1918, y consiguientemente la de sus consecuencias económicas, escapaban a toda previsión, y, sin embargo, aunque no fuera pensando en la guerra, la hipótesis de algo semejante a lo ocurrido ya había sido formulada por el profesor Blaschke en el VII Congreso Internacional de Actuarios, celebrado en Amsterdam en 1912; en él preconizaba este ilustre profesor el sistema del reparto para las pensiones del Estado, y en la discusión (*Mémoires du VII. Congrès International d'Actuaires*, Amsterdam, 1912, tomo II, páginas 506 y siguientes) insistía, dando, entre otras razones de poco peso, ésta, que lo tiene grande, aparentemente al menos: que el Estado, en el caso de depreciación de la moneda, tiene la obligación de aumentar las pensiones, y no se comprende qué sistema actuarial de capitalización permitiría garantizar desde hoy una pensión de 2.400 a quien hasta ayer la disfrutó de 2.000.

Contra el argumento de Blaschke, de indudable fuerza lógica, está el hecho de que el Estado no eleva las pensiones cuando la moneda es depreciada, y si la depreciación llega a la práctica anulación, ni el sistema de reparto sería posible. La capitalización tendrá, en cambio, la ventaja de que si la inversión se ha hecho en valores poco influidos por el valor de la moneda, se podrán seguir pagando las pensiones con valor real casi igual al de épocas normales.

<sup>2</sup> DOBBERNACK: *Der finanzielle Stand der deutschen Sozialversicherung vor und nach der Weltkrieg. Zeitschrift für die gesamte Versicherungs-Wissenschaft*, Berlín, 1928. Heft 1.

esencialmente su régimen, es bien elocuente a estos efectos <sup>1</sup>.

Para estudiar la marcha de un Seguro, en éste como en cualquier otro sistema, es preciso fijar de antemano las leyes que se supone han de regular la constitución de la masa de asegurados y la cuantía de las cargas. Generalmente se parte de una generación, de distribución de edades arbitraria, y se supone luego:

1.º Que los grupos formados por los nuevos asegurados de cada año son homogéneos, es decir, se conserva en ellos la misma distribución de edades.

---

<sup>1</sup> Nuestro régimen de clases pasivas, tan equivocado que no permite conocer en ningún momento el valor de los compromisos contraídos por el Estado con sus funcionarios, ha sido imitado por la mayoría de los Montepíos municipales, provinciales y profesionales, los cuales, no teniendo las reservas ilimitadas con que parece suponerse cuenta el Erario público, llegan generalmente a situaciones apuradas, de las que son manifestación inequívoca las apremiantes instancias con que frecuentemente acuden pidiendo a entidades aseguradoras se encarguen del cumplimiento de sus compromisos, previa incautación de los fondos del Montepío; no sabemos, sin embargo, de ningún caso en que tales solicitudes hayan podido ser aceptadas, ni creemos que puedan serlo mientras subsistan cláusulas que tal margen dejan a la arbitrariedad, e impiden toda previsión en los cálculos, como las que establecen el carácter de regulador de haberes pasivos al mayor sueldo disfrutado durante un tiempo que no siempre se determina.

Desde el punto de vista actuarial, único admisible en estas cuestiones, tales Montepíos deberían ser objeto de una severa inspección, obligándoles a reorganizarse científicamente, imponiendo para ello el Estado su autoridad material, ya que en este punto le falte en gran parte la mora! por el carácter empírico de su régimen de clases pasivas, que se explica fácilmente sabiendo que hasta bien entrado 1927, después, por consiguiente, del Decreto-ley de 22 de octubre de 1926, no ha tenido actuario alguno la Dirección General de la Deuda y Clases Pasivas, ni ningún otro organismo del Ministerio de Hacienda; hoy ya tiene uno, y competentísimo, el ilustre miembro de esta Academia D. Augusto Krahe, y de esperar es de su gran autoridad científica que, si le facilitan medios, para un mañana, nunca muy próximo, pueda llevar las cosas por cauces más regulares que los hasta ahora seguidos.

2.º Que los nuevos asegurados están expresados por los términos de una progresión geométrica, cuya razón se fija experimentalmente, y puede rectificarse periódicamente; en Alemania, al implantarse el Seguro de invalidez, se tomó como valor de esta razón 1,013942 y luego se ha modificado tomando 1,02 para los varones y 1,014 para las hembras.

Dentro de estas hipótesis, representando por  $L_x^{(t)}$  el número de los asegurados de edad  $x$  que viven al comenzar el año  $t + 1$  del seguro; por  $\lambda_\xi^{(\tau)}$  el número de los nuevos asegurados de edad  $\xi$  al comenzar el año  $\tau + 1$ ; por  $c$  el coeficiente de crecimiento, razón de la progresión supuesta; por  ${}_{x-\xi}\bar{p}_\xi^{\bar{a}a}$  la probabilidad de que un asegurado de edad  $\xi$  cumpla la edad  $x$  dentro del Seguro; y suponiendo, como ocurre en el Régimen obligatorio del Retiro Obrero, en España, que la edad mínima de ingreso en el Seguro sea de diez y seis años, se tendrá:

$$L_x^{(t)} = \sum_{\xi=16}^x \lambda_\xi^{t+\xi-x} \cdot {}_{x-\xi}\bar{p}_\xi^{\bar{a}a} = \sum_{\xi=16}^x c^{t-1-x+\xi} \cdot \lambda_\xi^{(1)} \cdot {}_{x-\xi}\bar{p}_\xi^{\bar{a}a}$$

siempre que sea  $t - x + 15 > 0$ , y, por tanto, no figure ningún asegurado de la primera generación; de no ser así, no se llegaría al término

$$c^{t-x+15} \cdot \lambda_{16}^{(1)} \cdot {}_{x-16}\bar{p}_{16}^{\bar{a}a}$$

y será preciso agregar el término

$$\lambda_{x-t}^{(0)} \cdot {}_t\bar{p}_{x-t}^{\bar{a}a}$$

En cuanto al número total de asegurados, se obtendrá efectuando la suma de todos los valores de  $L_x^{(t)}$  desde la edad

mínima de afiliación hasta la fijada como forzosa para comenzar el disfrute de pensión.

Lo más interesante es considerar los períodos estacionarios del Seguro, que son dos: uno primero, que puede llamarse *inestable*, que se produce al desaparecer como miembros *activos* todos los asegurados de la primera generación, elemento perturbador por la inconveniente distribución de edades, y un segundo, ya *estable*, al desaparecer esta generación también de los pasivos. En España se llegará, por tanto, al primer período al cabo de  $65 - 16 = 49$  años, porque 65 es la edad de retiro, y 16 la mínima de ingreso; y se alcanzará el período estable, suponiendo que no hubiese ningún pensionista de edad superior a noventa y nueve años,  $99 - 65 = 34$  años después, es decir, al cumplirse los  $49 + 34 = 83$  años de existencia del Seguro.

Al producirse la estabilización, la fórmula encontrada para  $L_x^{(t)}$  demuestra que es  $L_x^{(t+1)} = cL_x^{(t)}$  y, por tanto,

$$\sum_{x=16}^{64} L_x^{(t+1)} = c \sum_{16}^{64} L_x^{(t)}$$

es decir, el número de asegurados crece en progresión geométrica de razón  $c$ , como debía ser, con arreglo a las hipótesis admitidas.

El número  $I_x^{(t)}$  de pensionistas de edad  $x$  al comenzar el  $(t + 1)$  —ésimo año del Seguro, será, designando por  ${}_{x-\xi}p_{\xi}^{\overline{ai}}$  la probabilidad de que un asegurado a la edad  $\xi$  adquiera el derecho al disfrute de pensión al cumplir la edad  $x$ :

$$I_x^{(t)} = \sum_{\xi=16}^x c^{t-x-\xi-1} \cdot \lambda_{\xi}^{(1)} \cdot {}_{x-\xi}p_{\xi}^{\overline{ai}}$$

suponiendo  $t - x > 15$ ; si fuese  $t - x < 15$  habrá que añadir el término perturbador

$$\lambda_{x-t}^{(o)} \cdot p^{\overline{at}}$$

Cuando se haya llegado al período estacionario estable será  $t \geq 84$ , y de allí en adelante

$$L_x^{(t+\tau)} = c^\tau L_x^{(t)}; \quad I_x^{(t+\tau)} = c^\tau I_x^{(t)}$$

por consiguiente, estabilizado el Seguro, el número de pensionistas crece en la misma razón que el de asegurados, y la prima por *cabeza* será constante, supuesta constante la pensión, al menos para los de la misma edad. Pero lo ordinario es que la pensión sea función del haber del asegurado— y suele expresarse en centésimas del mismo — y de su antigüedad en el Seguro, y entonces, para ver el desenvolvimiento de éste, hay que conocer la ley del crecimiento de haberes. Suele suponerse que también éstos crecen en progresión geométrica <sup>1</sup>; si la razón de la progresión es  $\gamma$  y

$$s_{\xi,1}^{(t)}, \quad s_{\xi,2}^{(t)}, \dots, \quad s_{\xi,h}^{(t)}$$

son todos los sueldos distintos que perciben los asegurados

$$L_{\xi,1}^{(t)}, \quad L_{\xi,2}^{(t)}, \dots, \quad L_{\xi,h}^{(t)}$$

que componen el grupo  $L_x^{(t)}$  al comenzar el año  $t + 1$  del seguro, la suma total de haberes será

$$\sum_{\xi=16}^{64} \sum_{i=1}^h L_{\xi,i}^{(t)} s_{\xi,i}^{(t)} = c^{t-1} \gamma^{t-1} \sum_{\xi=16}^{64} \sum_{i=1}^h L_{\xi,i}^{(1)} s_{\xi,i}^{(1)}$$

<sup>1</sup> Esta hipótesis da una gran sencillez al cálculo, pero no suele ser completamente exacta. Puede, sin embargo, ser admitida en profesiones bien organizadas, agrupando sueldos por categorías y atribuyendo a cada asegurado el sueldo medio correspondiente.

de modo que también la suma total de haberes crece en progresión geométrica, y la razón coeficiente de crecimiento es  $\gamma$ .

El cálculo del valor de las pensiones se hace descomponiendo cada grupo  $I_x^{(t)}$ , atendiendo al número de años en que estuvieron en situación activa en el Seguro  $v_a$ , y al que llevan disfrutando la pensión  $v_i$ ; con lo cual, designando este subgrupo por  $I_{x, v_a, v_i}^{(t)}$ , por  $v_a^{i_{x-v_a-v_i}}$  la probabilidad de que un asegurado a la edad  $x - v_a - v_i$  comience a disfrutar la pensión  $v_a$  años después, es decir, a la edad  $x - v_i$ ; por  $v_i p_{x-v_i}^i$  la probabilidad de que quien comenzó a ser pensionista a los  $x - v_i$  años viva  $v_i$  años después, es decir, cumpla siendo pensionista la edad  $x$ , será

$$I_{x, v_a, v_i}^{(t+1)} = c^{t+1-v_a-v_i-1} I_{x, v_a, v_i}^{(v_a+v_i+1)} = c I_{x, v_a, v_i}^{(t)}$$

de modo que — siempre en el período estable — también el número de pensionistas de cada subgrupo crece en la misma proporción que el grupo.

Por último, la suma total de pensiones,  $R^{(t)}$ , se obtendrá calculando las de cada subgrupo y efectuando la suma triple correspondiente a todos los valores posibles de  $x$ ,  $v_a$  y  $v_i$ .

Se obtiene así, designando por  $a_n S_x^{(t)}$  la pensión a que tiene derecho un asegurado de edad  $x$  que lleva  $n$  años afiliado y comienza a disfrutar la pensión al comenzar el  $t+1$  del seguro, y por  $\alpha_n$  un coeficiente numérico dependiente de  $n$ <sup>1</sup>,

$$R^{(t)} = \sum_{x=17}^{99} \sum_{v_a=1}^{49-x-16-v_a} \sum_{v_i=0}^{x-16-v_a} I_{x, v_a, v_i}^{(t)} \cdot \alpha_{v_i} \cdot \gamma^{t-v_i-1} S_{x-v_i}^{(t)}$$

<sup>1</sup> Por ejemplo, en nuestro régimen de Clases Pasivas para funcionarios civiles ingresados antes de 1919, sería

$\alpha_n = 0,40$  si  $20 \leq n < 25$ ;  $\alpha_n = 0,60$  si  $25 \leq n < 35$ ;  $\alpha_n = 0,80$  si  $n \leq 35$ .

y se ve que en el período estable a que venimos refiriéndonos es  $R^{(t+1)} = c \cdot \gamma \cdot R^{(t)}$ , es decir, que también las cargas anuales crecen en progresión geométrica de razón  $c\gamma$ .

Comparando la variación de las cargas con la del número de asegurados y con la de suma de haberes, resulta, pues, que una vez estabilizado el Seguro, si el reparto es por unidad de haber, la prima será constante; pero si es por cabezas, la prima variará en progresión geométrica de razón  $\gamma$  y, por tanto, aumentará, permanecerá invariable o disminuirá según que, respectivamente, sea  $\gamma \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 1$  y, claro es que, como no será mucho el tiempo en que se mantengan invariables los sueldos o jornales, pues la tendencia es que  $\gamma > 1$ , la prima por cabeza aumenta, circunstancia que tiene su compensación en el mayor haber alcanzado. Parece no obstante, fuera de duda que es preferible el reparto por unidad de haber, aun cuando, naturalmente, al aumentar  $\gamma$  aumenta la prima de cada asegurado.

\* \* \*

El sistema de capitalización se reduce a formar cada período financiero, generalmente el año natural, el capital necesario para poder satisfacer en adelante las pensiones cuyo disfrute comienza en el mismo. De este modo, cada asegurado, una vez que pasa a la situación de pensionista, tiene garantizado para siempre el cobro de su pensión (suponiendo, naturalmente, en esto como en todo, circunstancias económicas normales), aun cuando cesase el Seguro, lo cual significa ya una muy considerable ventaja respecto del sistema de reparto; pero subsiste todavía el hecho de que los afiliados aún activos, al cesar el Seguro, no tendrán cons-



tituído medio alguno de formar su pensión. El sistema se más costoso que el del reparto, pero la mayor garantía que ofrece para el asegurado lo hace, en general, preferible.

La marcha del Seguro puede estudiarse de modo análogo al empleado en el sistema de reparto. Utilizando las mismas notaciones y suponiendo que se ha llegado a la estabilización, el valor de todas las pensiones constituídas durante el año, será:

$$R^{(t)} = \sum_{x=17}^{99} \sum_{v_a=1}^{49} \sum_{v_i=0}^{x-16-v_a} I_{x,v_a,v_i}^{(t)} S_{x-v_i}^{(1)} c^{v_i} v^{v_i}$$

y, por tanto, la prima media será:

$$\frac{R^{(t)}}{\sum_{16}^{64} L_x^{(t)} S_x^{(t)}} \quad \text{O} \quad \frac{R^{(t)}}{\sum_{16}^{64} L_x^{(t)}}$$

según que, respectivamente, sea por unidad de haber o por cabeza de asegurado. Los dos términos de ambas razones crecen en progresión geométrica: de razón  $c\gamma$  el numerador común y el denominador de la primera, y de razón  $c$  el denominador de la segunda; por consiguiente, una vez llegado a la estabilización, la prima por unidad de haber será constante, pero no lo será la prima por cabeza, sino que crecerá de un año a otro en la misma proporción que los haberes, y, por tanto, sólo sería constante si lo fueran éstos.

Comparando los dos sistemas, se ve que, en el período estable, la prima, tanto si se calcula por cabeza como por unidad de haber, en el sistema de reparto será mayor, igual o menor que en el de capitalización, según que sea

$$c\gamma v \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix}, \quad \text{es decir,} \quad i \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} c\gamma - 1$$

\* \* \*

Por último, el sistema llamado de la *prima media*<sup>1</sup> se basa en asegurar con una prima constante las obligaciones contraídas con todos los afiliados, de tal manera, por consiguiente, que aun disuelta la institución aseguradora, activos y pensionistas puedan, incorporando a otra institución los capitales constituídos para pago de sus pensiones futuras y actuales, continuar en el disfrute del Seguro, sin perjuicio para nadie.

El sistema admite dos modalidades:

- a) Formar un grupo con la masa de asegurados que ingresa cada año (más general, cada período financiero).
- b) Formar un solo grupo con todos los asegurados presentes y futuros.

La modalidad a), que a veces se llama también *capitalización*, no difiere en esencia del método seguido en el Seguro privado, sino por la aplicación de la prima media, imposible en este Seguro y de constante aplicación en los Seguros sociales. Se parte del conocimiento del número de asegurados y, sobre todo, de la distribución de sus edades, deducida de estadísticas, que deben ser muy concienzudas, para evitar cualquiera de estos dos peligros: que la prima calculada sea insuficiente, en cuyo caso fracasa el Seguro, o sea excesiva, lo cual sería una injusticia. Representando por  $L_{x_1}, L_{x_2}, \dots$  los números de afiliados de edades  $x_1, x_2, \dots$  al comenzar el seguro, y por  $K_{x_1}, K_{x_2}, \dots$  los valores actuales de las cantidades que deberán percibir, su-

<sup>1</sup> La denominación induce fácilmente a error, puesto que, de hecho, en todos los sistemas financieros de Seguros sociales se aplica la prima media; lo característico de este sistema es la consideración del grupo de todos los asegurados y el que cada uno tenga garantizado el cobro de la pensión a que tenga derecho, cualquiera que sea el momento considerado.

poniendo que sólo dependan de la edad  $x_1, x_2, \dots$  de ingreso, la prima será:

$$P = \frac{\sum_{x_i=16}^{64} L_{x_i} K_{x_i}}{\sum L_{x_i} a_{x_i}^{aa}}$$

Este es el sistema seguido en el Régimen Obligatorio de Retiro Obrero en España, en el cual el conjunto de todas las primas se distribuye después aplicando a cada afiliado la correspondiente a su edad.

Cuando la prima es una fracción  $0,0f$  del haber del asegurado, designando por  $a_{1,x}^{aa}$  el producto por 100 del valor actual del conjunto de las primas que ha de pagar un asegurado de edad  $x$ , se determina  $f$  por la fórmula:

$$f = \frac{\sum_{x_i=16}^{64} L_{x_i} K_{x_i}}{\sum L_{x_i} a_{1,x_i}^{aa}}$$

La modalidad *b*) se caracteriza por constituir un solo grupo todos los asegurados, tanto los fundadores como los nuevos afiliados, actuales y futuros, lo que ya indica que la duración del Seguro se supone eterna, y, en consecuencia, la prima depende, no solo de la cuantía de las pensiones, capitales de supervivencia, etc., sino también, y muy principalmente, de la ley que rija los ingresos de nuevos asegurados. Suponiendo sea la que venimos considerando, por ser bastante conforme con la realidad, y que la distribución de los ingresos en el Seguro sea uniforme, con lo cual puede admitirse que todos ingresan a mitad de año, si  $L_{x_1}, L_{x_2}, \dots$  son los afiliados el primer año, de edades  $x_1, x_2, \dots$  se podrán

suponer como ingresados al mediar el año  $(t + 1)$ -ésimo  $ctL_{x_1}, ctL_{x_2}, \dots$ ; el valor actual de las primas que habrá de abonar la primera generación, si  $P$  es la prima media anual, será

$$P \cdot \sum_{x=16}^{64} L_{x_i} \bar{a}_{x_i};$$

el de los futuros pagos a los asegurados,  $\sum_{x=16}^{64} L_{x_i} K_{x_i}$ , siendo  $K_{x_i}$  el valor actual de las cantidades que por todos conceptos podrá percibir un asegurado de edad  $x_i$ ; por consiguiente, los valores de los ingresos y de los pagos a todos los asegurados actuales y futuros serán

$$P \cdot \sum_{x=16}^{64} L_{x_i} \cdot \bar{a}_{x_i}^{aa} \cdot \left[ v^{\frac{1}{2}} + cv^{\frac{2}{2}} + c^2v^{\frac{3}{2}} + \dots \right] = \sum_{x=16}^{64} L_{x_i} K_{x_i} \left[ v^{\frac{1}{2}} + cv^{\frac{2}{2}} + c^2v^{\frac{3}{2}} + \dots \right]$$

y el valor de la prima,

$$P = \frac{\sum_{x=16}^{64} L_{x_i} K_{x_i}}{\sum_{x=16}^{64} L_{x_i} \bar{a}_{x_i}^{aa}}$$

La realidad no corresponde, sin embargo, a esta fórmula, porque la generación fundadora del Seguro tiene una distribución de edades y está formada por un número que ninguna relación tienen con los elementos análogos de las generaciones siguientes, únicas que se han considerado arriba; siendo  $L_{x_i}^{(o)}$  el número de los fundadores a la edad  $x_i$ , el total será  $\sum_{x=16}^{64} L_{x_i}^{(o)}$  y los valores de las primas que han de abonar, y de las cantidades que han de recibir, son

$$P \sum_{x=16}^{64} L_{x_i}^{(o)} \bar{a}_{x_i}^{aa} \quad \text{y} \quad \sum_{x=16}^{64} L_{x_i}^{(o)} K_{x_i},$$

de modo que la ecuación fundamental verdadera será:

$$P \cdot \sum_{16}^{64} L_{x_i} \cdot \bar{a}_{x_i} \sum_{n=0}^{\infty} c v^{\frac{n+1}{2}} + P \sum_{16}^{64} L_{x_i}^{(o)} \bar{a}_{x_i} = \sum_{16}^{64} L_{x_i} K_{x_i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c v^{\frac{n+1}{2}} + \sum_{16}^{64} L_{x_i}^{(o)} K_{x_i}$$

suponiendo  $cv < 1$ , es decir,  $c < 1 + i$ , pues, de otro modo, las dos series serían divergentes; y el valor de la prima:

$$P = \frac{\frac{1}{v^2} \sum_{16}^{64} L_{x_i} K_{x_i} + \sum_{16}^{64} L_{x_i}^{(o)} K_{x_i}}{\frac{1}{1 - vc} \sum_{16}^{64} L_{x_i} \bar{a}_{x_i} + \sum_{16}^{64} L_{x_i}^{(o)} \bar{a}_{x_i}}$$

análogamente cuando la prima se expresa en 0,0*f* del haber anual, se obtiene:

$$f = \frac{\frac{1}{v^2} \sum_{16}^{64} L_{x_i} K_{x_i} + \sum_{16}^{64} L_{x_i}^{(o)} K_{x_i}}{\frac{1}{1 - vc\gamma} \sum_{16}^{64} L_{x_i} \bar{a}_{x_i} + \sum_{16}^{64} L_{x_i}^{(o)} \bar{a}_{x_i}}$$

en cuya expresión todos los símbolos tienen la significación ya conocida, y es  $vc\gamma < 1$ .

La comparación de los tres sistemas expuestos hace ver que, según la naturaleza del Seguro y las circunstancias políticas y económicas del país en que se implante, deberá ser adoptado uno u otro. En términos generales, puede, sin embargo, afirmarse, desde luego, que el reparto sólo debe ser aplicado a los seguros en que las cargas no tengan la forma de pensiones y, por consiguiente, puedan ser liquida-

das cada período financiero, como ocurre con el Seguro de enfermedad; fuera de tales casos, únicamente es admisible cuando se implanta un Seguro para el cual no hay base estadística adecuada, o no está suficientemente bien dispuesto el pueblo, y cuando las circunstancias económicas son difíciles, porque entonces la pequeñez de las cargas iniciales facilita la implantación, acaso imposible de otro modo. Aun así será preferible, sin otra restricción que la de la imposibilidad económica, la capitalización, que, si bien algo más costosa que el reparto en los comienzos, es más barata después y, sobre todo, como queda dicho, al menos garantiza a los pensionistas el percibo de sus pensiones futuras.

En los casos de seguros de pensiones, por ejemplo, el de invalidez, aparte las circunstancias señaladas, el sistema financiero que mayores ventajas ofrece es el de la prima media, pues garantiza todos los intereses, y su estructura es mucho más social; la mayor objeción contra él formulada, la de que hace acumular grandes masas de capital, lo cual es peligroso, tiene más apariencias de fuerte que realidad; basta observar, para convencerse de ello, que si la entidad administradora del Seguro social es algo más que una fría institución oficial sin alma, y siente las necesidades sociales, colocará esas masas de capital en forma tal que, sin riesgo en las operaciones, quizá con mayor seguridad en ellas, beneficien a los asegurados antes ya de ser pensionistas, y aun extiendan los beneficios a clases sociales sin relación directa con el Seguro, o que a él contribuyen. Sin necesidad de acudir al Extranjero para ofrecer ejemplos, en nuestra Patria tenemos el del Instituto Nacional de Previsión, invirtiendo una buena parte de los fondos del Régimen Obli-

gatorio de Retiro Obrero <sup>1</sup> en préstamos sociales, que han permitido y permiten la construcción de escuelas, obras de saneamiento, Dispensarios, etc.

\* \* \*

Para decir algo del otro problema fundamental, cuya solución se traduce en la construcción de tablas de invalidez, mortalidad, nupcialidad, etc., fijémonos en uno de los seguros sociales típicos, el de invalidez, que también puede practicar el Seguro privado, y cuya Matemática tiene un gran interés, porque con simples cambios de palabras puede ser aplicada a casi todos los demás Seguros.

La base de todos los cálculos es, como queda dicho, la determinación de las probabilidades de los diferentes riesgos que comprende; cuando se han determinado, el cálculo de rentas y de capitales no ofrece dificultad, y nada hemos de decir de él. Hemos de hablar, en cambio, de aquellas probabilidades y de las tablas que las contienen, porque en ellas está el núcleo de la cuestión y, naturalmente, lo que caracteriza el Seguro.

El procedimiento natural, el que primero ocurre a todos y primero se ha utilizado, consiste en observar una masa y registrar los casos de invalidez, mortalidad, reactividad <sup>2</sup>, etcétera; de la comparación de estos casos con aquella masa, deducir las probabilidades ordinarias respectivas, y con ellas, siguiendo el mismo procedimiento que en las tablas corrientes de mortalidad, construir las de pérdida de

---

<sup>1</sup> *Las inversiones de los fondos de previsión*, por Inocencio Jiménez. (Publicaciones del Instituto Nacional de Previsión, Madrid, 1927.)

<sup>2</sup> Siguiendo denominaciones corrientes extranjeras, empleamos la palabra *actividad* en oposición a la de *invalidez*, para significar la época y condición de capacidad para el trabajo, y la de *reactividad* para indicar la época y condición en que nuevamente se disfruta de esta capacidad.

invalidez y pérdida de actividad <sup>1</sup>, con todos sus casos particulares. Pero al hacerlo así, en este caso como en todos aquellos en que se considera una colectividad y han de ser registrados los números de personas que dejan de pertenecer a ella, o que en ella ingresan, por causas diferentes, la usual determinación de la probabilidad de cada uno de tales fenómenos está afectada de un error, puesto que, por ejemplo, en la probabilidad de invalidez, no se tiene debidamente en cuenta el número de los muertos en el estado de actividad, y de ahí la necesidad de la formación de otro concepto, el de *probabilidad independiente*, introducido por Karup <sup>2</sup>, y uno de los más discutidos por los matemáticos estadísticos <sup>3</sup>, que puede definirse como la probabilidad que se

<sup>1</sup> Parecen preferibles estas denominaciones a las usuales de tablas de mortalidad de inválidos y de invalidez, que responden a un criterio más restringido, al no considerar las primeras otra causa de pérdida de invalidez que la muerte, ni las últimas otro origen de pérdida de actividad que la invalidez, a pesar de registrar también como causa la muerte.

<sup>2</sup> KARUP expuso esta noción el año 1875 en un informe solicitado por el Canciller alemán (*Gutachten der Gothaer Lebensversicherungsbank über Invaliden- und Wittwenpensionenverhältnisse, verfasst im Auftrage der Reichsverwaltung*), que hoy es imposible de encontrar, pero cuya doctrina se conoce bien por la discusión mantenida en revistas técnicas entre Karup y sus impugnadores.

En cierto modo, puede considerarse predecesor en el concepto KANNER (*Journal des Kollegiums für Lebensversicherungswissenschaft*, tomo II, páginas 38 a 51; *Deutsche Versicherungszeitung*, 1870, núm. 15); pero aparte notables defectos de exposición, no vió el alcance del concepto ni la posibilidad de obtener las probabilidades independientes por medio de la experiencia.

<sup>3</sup> DIENGER (*Rundschau der Versicherung*, 1875, páginas 455 a 459; 1876, páginas 46 a 48 y 190 a 111; 1878, páginas 157, 195 y 298) y ZIMMERMANN (*Ueber Dienstunfähigkeits- und Sterbeverhältnisse*, 1886, páginas 7 y siguientes; 1887, páginas 404 a 453) combatieron el concepto y la teoría matemática; BEHM (*Statistik der Mortalitäts-, Invaliditäts- und Morbiditätsverhältnisse bei dem Beamtenpersonal der deutschen Eisenbahnverwaltungen*, 1876, páginas 25 y 26 y 47 a 60; *Rundschau der Versicherung*, 1878, páginas 151 a 167) y HEYM (*Deutsche Versicherungszeitung*, 1876, números 3 y 61) admitían el concepto, pero no su fundamento matemático ni su importancia.

Las objeciones a Karup fueron contestadas por éste (*Rundschau der Ver-*



obtendría, si no existiesen las demás causas de exclusión, lo cual equivale a que cada vez que una persona deja de pertenecer a la colectividad por una de las causas de eliminación distinta de aquella a la cual se refiere la probabilidad, sea inmediatamente sustituida por otra.

Este concepto está ligado íntimamente con el de *intensidad de salida* o *exclusión*<sup>1</sup>, y uno y otro pueden ser definidos analíticamente así<sup>2</sup>:

Consideremos como colectividad observada un conjunto

---

*sicherung*, 1876, páginas 21 a 29, 141 a 145 y 437 a 451; 1877, páginas 17 a 26; 1878, páginas 219 a 238, y *Die Finanzlage der Gothaischen Staatsdiener-Wittwen-Societät am 31. Dezember 1890*, Dresden, 1893, páginas 42 a 47) y KÜTTNER (*Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 1880, páginas 11 a 24; 1886, páginas 246 a 251). Mérito particular de este último autor es, a juicio de Bortkiewicz, negado por Spangenberg, haber puesto de manifiesto el papel que desempeña el Cálculo infinitesimal en las cuestiones estadísticas en que intervienen causas distintas de exclusión, por ejemplo, mortalidad e invalidez.

Una exposición circunstanciada de la teoría de Karup y algunas de sus aplicaciones, con muy copiosa información histórica y bibliográfica, es la de SPANGENBERG: *Die Karupsche Theorie der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten* (*Veröffentlichungen des Deutschen Vereins für Versicherungs-Wissenschaft*, Heft XX. Berlín, 1911); son también dignos de señalar los trabajos de CANTELLI y MESSINA (*Bolletino di notizie sul credito e sulla previdenza*, 1914 y 1915); los de BÖHMER, RISSER, ROSMANTH, VAN DER BELT y DU PASQUIER (*Mém. du VII. Congrès int. d'Actuaires*, Amsterdam, 1912, tomo II, páginas 327 a 435) y el de LOEWY: *Zur Theorie und Anwendung der Intensitäten in der Versicherungsmathematik*, *Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften*, 1917. Estos dos últimos y la *Mathematische Theorie der Invaliditätsversicherung*, de DU PASQUIER (*Mitteilungen der Vereinigung schweizerischen Versicherungsmathematiker*, Heft VIII. Berna, 1913) son particularmente interesantes.

<sup>1</sup> La denominación de *intensidad* fué la primitivamente usada por los ingleses, aplicándola a la mortalidad; la llamaron también *Instantaneous Rate*, y hoy la denominan *Force of Mortality*; los alemanes han traducido estas dos locuciones, y así usan corrientemente las de *Sterbe-Intensität* y *Sterbe-Kraft*; alguno la llama *Dichtigkeit der Sterbenswahrscheinlichkeit*; los franceses la designan como *taux instantané de mortalité*.

<sup>2</sup> BÖHMER, loc. cit., páginas 332 a 335. La notación de las probabilidades independientes que usamos es la misma de Loewy, modificación ligera de la utilizada por Böhrer.

medible, de la potencia del continuo, que varía de un modo continuo con el tiempo. Tomando 1 como medida en el estado inicial, y suponiendo que hacemos las observaciones dentro del intervalo de tiempo unidad, por ejemplo, un año, el estado del conjunto en el momento  $t$ , ( $0 < t \leq 1$ ) viene dado por un cierto número  $\rho$ . Análogamente, el conjunto de los excluidos por una causa  $E_h$  estará expresado por  $\rho_h$ , y el  $\bar{E}$  de los que ingresan por  $\bar{\rho}$ ; admitiendo que  $\rho$ ,  $\rho_h$  y  $\bar{\rho}$  sean funciones derivables, siempre diferentes de cero, las derivadas logarítmicas

$$\mu_h = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}, \quad \bar{\mu} = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dt}$$

definen las *intensidades de salida por la causa  $E_h$  y de renovación* del conjunto, respectivamente, y

$$q^{(h)} = 1 - e^{-\int_0^1 \mu_h dt}, \quad \bar{q} = 1 - e^{-\int_0^1 \bar{\mu} dt}$$

son las *probabilidades independientes* respectivas. Se define, además, la *intensidad total de salida*

$$\mu = \sum_{i=1}^k \mu_i,$$

siendo  $k$  el número de causas de exclusión de la colectividad, y de la condición

$$\rho + \sum_{i=1}^k \rho_i - \bar{\rho} = 1,$$

a que deben satisfacer las funciones  $\rho$ ,  $\rho_h$ ,  $\bar{\rho}$  se deduce la *intensidad de la variación del estado*

$$\mu - \bar{\mu} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$$

Estos mismos conceptos se aplican a colectividades finitas; suponiendo que se trate de una cerrada, es decir, que no varía por nuevos ingresos, y está formada por  $l_{[x]}$  personas de edad  $x$ , y que  $l_{[x]+\xi}$  es función derivable de  $\xi$ , la intensidad en el momento  $x + \xi$  relativa a la primera causa de salida es:

$$\mu_{[x]+\xi}^{(1)} = - \frac{1}{l_{[x]+\xi}} \frac{dl_{[x]+\xi}}{d\xi}$$

y la probabilidad independiente que le corresponde en el intervalo  $(x + \xi, x + \xi + h)$ :

$${}_h q_{[x]+\xi}^{(1)} = \frac{l_{[x]+\xi} - l_{[x]+\xi+h}}{l_{[x]+\xi}} = 1 - \frac{l_{[x]+\xi+h}}{l_{[x]+\xi}}$$

de cuyas expresiones se deduce:

$$l_{[x]+\xi} = l_{[x]} \cdot e^{-\int_0^\xi \mu_{[x]+t}^{(1)} dt}; \quad {}_h q_{[x]+\xi}^{(1)} = 1 - e^{-\int_0^h \mu_{[x]+\xi+t}^{(1)} dt}$$

La *probabilidad de permanencia*, diferencia entre la unidad y la probabilidad de salida, se expresa en forma de producto en función de las probabilidades independientes de salida, y en forma de diferencia en función de las probabilidades ordinarias, que, en oposición a las primeras, pueden llamarse *probabilidades dependientes*:

$${}_h p_{[x]+\xi} = \prod_{i=1}^k (1 - {}_h q_{[x]+\xi}^{(i)}) = 1 - \sum_{i=1}^k q_{[x]+\xi}^{(i)}$$

La consideración de estas y otras análogas probabilidades presenta grandes ventajas, alguna de las cuales ha sido ya apuntada: permiten la aplicación del teorema sobre las

probabilidades compuestas, con lo cual muchas investigaciones estadísticas ganan en sencillez y claridad; expresando la influencia de una sola causa de exclusión de la colectividad, simplifican todas las investigaciones relativas a relaciones con las otras probabilidades; facilitan, por último, en la máxima medida posible, el estudio analítico de las relaciones entre los hechos observados y las condiciones de su observación, que es, en último término, el fin de la Estadística. El estudio de cualquier proceso en que haya causas de variación de estado en una colectividad exigirá el uso de las probabilidades independientes, que pondrán de relieve la influencia real de cada causa, lo que no ocurrirá con las probabilidades ordinarias. Hay, además, como justamente observa Du Pasquier <sup>1</sup>, una necesidad teórica ineludible de su uso, pues cuando por medio de una integración, partiendo de una intensidad dada cualquiera, se pasa a un intervalo finito de tiempo, se llega a una probabilidad independiente.

El conocimiento de las probabilidades independientes conduce al de las dependientes por medio de una cuadratura; se ve fácilmente que si las causas de exclusión son en número de  $k$ , la probabilidad dependiente relativa a la primera causa en el intervalo  $(x + \xi, x + \xi + h)$  es:

$${}^h q_{[x] + \xi}^{(1)} = \int_0^h (1 - {}^h A_{[x] + \xi}^{(2)}) (1 - {}^h A_{[x] + \xi}^{(3)}) \cdots (1 - {}^h A_{[x] + \xi}^{(k)}) \frac{d {}^h q_{[x] + \xi}^{(1)}}{dt} dt$$

y fórmulas análogas dan las demás.

En cuanto a las intensidades, se demuestra que tienen

---

<sup>1</sup> DU PASQUIER: *Neue mathematische Theorie der partiellen Wahrscheinlichkeiten...*, *Mém. du VII. Congrès int. d'Actuaires*, Amsterdam, 1912, tomo II, página 430.

la misma expresión formal en función de las probabilidades independientes que en función de las dependientes, y de aquí su inmediata aplicación a la construcción de tablas. Es de advertir, sin embargo, que al hacerlo se llega a sistemas de ecuaciones diferenciales simultáneas no integrables, en general, por medio de cuadraturas <sup>1</sup>. Así, por ejemplo, considerando <sup>2</sup> una colectividad formada en su estado inicial por personas de edad  $x$ , del mismo sexo, activas, casadas y de la misma profesión, y como causas de salida la mortalidad, la invalidez y la viudedad, y como causas de ingresos la reactividad y el matrimonio, intervendrán doce intensidades, a saber: cuatro de mortalidad: de activos casados  $\mu_x^{aa\bar{\gamma}}$ ; de inválidos casados  $\mu_x^{ii\bar{\gamma}}$ ; de activos no casados  $\mu_x^{aa\bar{\lambda}}$ ; de inválidos no casados  $\mu_x^{ii\bar{\lambda}}$ ; dos de invalidez: de casados,  $\nu_x^{\bar{\gamma}}$ , y de no casados,  $\nu_x^{\bar{\lambda}}$ ; dos de reactividad: de casados,  $\rho_x^{\bar{\gamma}}$ , y de no casados,  $\rho_x^{\bar{\lambda}}$ ; dos de nupcialidad: de activos,  $\gamma_x^{aa}$ , y de inválidos,  $\gamma_x^{ii}$ ; y, por último, dos de viudedad: de activos,  $\chi_x^{aa}$ , y de inválidos,  $\chi_x^{ii}$ ; y las funciones  $\bar{l}_x^{aa\bar{\lambda}}$ ,  $\bar{l}_x^{aa\bar{\lambda}}$ ,  $\bar{l}_x^{ii\bar{\gamma}}$ ,  $\bar{l}_x^{ii\bar{\lambda}}$  están ligadas con aquellas intensidades por las cuatro ecuaciones diferenciales simultáneas que forman un sistema resoluble por cuadraturas en algunos casos particulares de importancia práctica <sup>3</sup>:

$$\frac{d\bar{l}_x^{aa\bar{\lambda}}}{dx} = \chi_x^{aa} \cdot \bar{l}_x^{aa\bar{\gamma}} + \rho_x^{\bar{\lambda}} \cdot \bar{l}_x^{ii\bar{\lambda}} - \left( \mu_x^{aa\bar{\lambda}} + \nu_x^{aa} + \nu_x^{\bar{\lambda}} \right) \cdot \bar{l}_x^{aa\bar{\lambda}}$$

<sup>1</sup> SPANGENBERG, loc. cit., páginas 132 a 136, ha dado algunas fórmulas que permiten obtener soluciones de aproximación suficiente en el estudio de estas ecuaciones.

<sup>2</sup> V. DU PASQUIER, loc. cit., páginas 416 y 417.

<sup>3</sup> Véanse los trabajos de DU PASQUIER en el *Bulletin de l'Association des Actuaives suisses*, 1912 y 1913.

$$\frac{d\bar{l}_x^{aa\bar{\gamma}}}{dx} = \bar{\rho}_x^{\bar{\gamma}} \cdot \bar{l}_x^{ii\bar{\gamma}} + \bar{\gamma}_x^{aa} \cdot \bar{l}_x^{aa\bar{\lambda}} - \left( \bar{\mu}_x^{aa\bar{\gamma}} + \bar{\nu}_x^{\bar{\gamma}} + \bar{\chi}_x^{aa} \right) \cdot \bar{l}_x^{aa\bar{\gamma}}$$

$$\frac{d\bar{l}_x^{ii\bar{\gamma}}}{dx} = \bar{\gamma}_x^{ii} \cdot \bar{l}_x^{ii\bar{\lambda}} + \bar{\nu}_x^{\bar{\gamma}} \cdot \bar{l}_x^{aa\bar{\gamma}} - \left( \bar{\mu}_x^{ii\bar{\gamma}} + \bar{\chi}_x^{ii} + \bar{\rho}_x^{\bar{\gamma}} \right) \cdot \bar{l}_x^{ii\bar{\gamma}}$$

$$\frac{d\bar{l}_x^{ii\bar{\lambda}}}{dx} = \bar{\nu}_x^{\bar{\lambda}} \cdot \bar{l}_x^{aa\bar{\lambda}} + \bar{\chi}_x^{ii} \cdot \bar{l}_x^{ii\bar{\gamma}} - \left( \bar{\mu}_x^{ii\bar{\lambda}} + \bar{\rho}_x^{\bar{\lambda}} + \bar{\gamma}_x^{ii} \right) \cdot \bar{l}_x^{ii\bar{\lambda}}$$

Utilizando estas ecuaciones y otras análogas <sup>1</sup>, pueden construirse las tablas de pérdida de invalidez y de pérdida de actividad, pero lo más corriente ha sido usar las fórmulas de Heym <sup>2</sup>, Wittstein <sup>3</sup>, Zeuner <sup>4</sup>, Küttner <sup>5</sup>, Behm <sup>6</sup> y otras parecidas <sup>7</sup> aproximadas, o seguir los métodos ingleses, esencialmente prácticos.

Todas las tablas parten de una masa hipotética y contienen para cada valor entero de  $x$ , comprendido entre ciertos límites, el número  $\bar{l}_x^{aa}$  de activos de edad  $x$ ; el  $\bar{d}_x^{aa}$  de los que mueren, en situación de activos, entre la edad  $x$  y la  $x + 1$ ; el  $I_x$  de los que se invalidan en el intervalo  $(x, x + 1)$ ; la probabilidad  $\bar{p}_x^{aa}$  de permanencia en actividad al cumplir los  $x + 1$  años, de un activo a la edad  $x$ ;

<sup>1</sup> Véanse los trabajos citados de LOEWY y SPANGENBERG, y también SCHARTLIN: *Zur mathematischen Theorie der Invaliditätsversicherung*, Bern, 1907.

<sup>2</sup> *Die Kranken- und Invalidenversicherung*, Leipzig, 1863; *Ueber Invaliden-Pensionen (Rundschau der Versicherung)*, tomos V, VI y VII).

<sup>3</sup> *Archiv für Mathematik und Physik*, tomo XXXIX.

<sup>4</sup> *Abhandlungen aus der mathematischen Statistik*, Leipzig, 1869.

<sup>5</sup> *Statistik der Mortalitäts-, Invaliditäts- und Morbilitätsverhältnisse bei dem Personal der deutschen Eisenbahnverwaltungen*, 1876.

<sup>6</sup> *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 1880, páginas 18 y siguientes.

<sup>7</sup> SPANGENBERG, loc. cit.; RIEDEL, *Dienstunfähigkeit und Ausscheidens-tafel für Bureaubeamte (Assekuranzjahrbuch)*, tomo XXVIII, Viena, 1907, páginas 175 a 238).

a estos números se agregan en algunas tablas las probabilidades de que un inválido recobre su actividad en el tiempo  $(x, x + 1)$  y la cifra de los reactivos correspondientes.

En las tablas más antiguas se considera la edad como la única variable de la cual dependen todas las demás magnitudes que figuran en las tablas; más tarde, el cotejo constante de éstas con los resultados de la experiencia permitió observar un fenómeno análogo, pero en sentido contrario, al advertido en las tablas de mortalidad al compararlas con las experiencias de las Compañías de Seguros de vida <sup>1</sup>. En éstas, como consecuencia de la selección derivada del reconocimiento médico, principalmente, entre los asegurados para caso de muerte, y de la autoselección en los que compran rentas vitalicias, la mortalidad es notablemente inferior a la normal en los primeros años de asegurados, para aumentar

---

<sup>1</sup> Parece que quien primero notó la influencia de la duración de la invalidez en la pérdida de la misma fué ya SELLING en 1879 (*Untersuchung der Leistungsfähigkeit des Pensionsfonds für technische Lehrer in Oberbayern*), pero su observación pasó inadvertida hasta que Zimmermann reconoció su importancia al comparar las experiencias con las tablas construídas hasta 1886, lo cual le llevó a considerar dos grupos, que llamaba de invalidez aun no consolidada («noch nicht gekräftigte») y consolidada («gekräftigte»), comprendiendo en el primero aquellos cuya invalidez no hacía más de dos años que se había producido, y en el segundo todos los demás. Nada se hizo, sin embargo, después en este sentido hasta los estudios realizados por el Departamento de Seguros alemán (*Drucksachen des Reichstags*, núm. 93, año 1898), y más tarde en 1901 (*Das Ausscheiden der Invalidenrentenempfänger aus dem Rentengenuss, Amtliche Nachrichten des Reichsversicherungsamts*, 1902), en que, aprovechando las experiencias de 1891 a 1897 con 274.814 pensionistas y 78.121 que dejaron de serlo (74.735 por muerte, 2.885 por reactividad y 501 por otras causas), se han determinado directamente las probabilidades para  $[x] + 1$ ,  $[x] + 2$ , ...,  $[x] + 7$  y por vía teórica para  $[x] + 8$ ,  $[x] + 9$  y  $[x] + 10$ , desde  $x = 20$ ; y se ha comprobado que, después de diez años, la mortalidad de inválidos no difiere de la de activos y que, independientemente de la edad en que se produjo la invalidez, es decir, entre los que llevan el mismo tiempo de inválidos, la mortalidad decrece al aumentar la edad, contrariamente a lo que había creído Zimmermann. Además, se ha visto que también influye el sexo, y así en las publicaciones alemanas ya se consideran separadamente varones y hembras.

después, llegando a ser mayor que la advertida en el conjunto de todos los asegurados, prescindiendo de la época de contratación del Seguro, hasta que al cabo de algunos años que constituyen el llamado *período de selección*, la mortalidad parece independiente de la antigüedad en el Seguro. En el caso de la invalidez, por el contrario, el número de los que el primer año dejan de ser inválidos, ya por reactividad, ya por muerte, es considerable; el segundo año, estos números, todavía grandes, son algo menores, y al cabo de un período, que las experiencias oficiales alemanas fijan en diez años, la pérdida de invalidez sólo se produce por muerte y es función exclusivamente de la edad.

La mayoría de las tablas de invalidez son alemanas y austriacas, y están basadas principalmente en observaciones hechas sobre los funcionarios y obreros de ferrocarriles y sobre mineros, y algunas de ellas, las de Zimmermann y Bentzien <sup>1</sup>, son de uso general en todos los países, aun

---

<sup>1</sup> Una exposición muy completa de las Tablas de invalidez construídas en Alemania es la del DR. EGGENBERG: *Eine Uebersicht der bisher hergestellten Invaliditätstafeln, Assekuranzjahrbuch*, tomo XXVI. Viena, 1905, páginas 114 a 127. En ella se incluyen las Tablas de Heym (1863); dos de Behm (1876); Gerkrath (1881); ocho de Zimmermann, de las que dos son de accidentes del trabajo (1886 a 1888 y 1889); Bentzien (1894); Küttner (1882); Caron (1882); Morgenbesser (1882); cinco de Kann (1890); Meyer (1903); Beckmann (1903); Eggenberg (1903); Zillmer (1884); Wolff (1889); Ley de Seguros de 1905 referidas a 1895.

La de HEYM (*Die Krankenkassen-und Invalidenversicherung*, Leipzig, 1863) es hipotética, construída tomando como valor de probabilidad de invalidez  $i_{20+x} = 0,001 + 0,00002 q^x$ , ( $q^{50} = 50.000$ ,  $x = 0, 1, \dots, 59$ ), expresión que adoptó Wiegand tomando  $q^{70} = 50.000$ , pero sin construir nuevas Tablas, por creer que no disponía de experiencias suficientes, a pesar de que con las que tenía estableció una Tabla de mortalidad de inválidos (*Die Sterblichkeits-, Invaliditäts- und Krankheitsverhältnisse bei Eisenbahnbeamten in dem Jahren 1868 und 1869*, Berlín, 1871; *Die Morbilitäts- und Invaliditäts-Statistik bei Eisenbahnbeamten*, Halle a. S., 1869). Las primeras Tablas deducidas de experiencias son las de Behm, que utilizó datos del personal de ferrocarriles alema-



cuando también se han calculado en algunos distintos de Alemania y Austria <sup>1</sup>.

El cálculo de pensiones, capitales de supervivencia, etc., se realiza como para cualquier otro seguro, haciendo uso de los números descontados contenidos en las tablas de invalidez.

\* \* \*

El último punto en que puede haber algo de carácter matemático particular en los Seguros sociales es la formación de los balances técnicos, bien conocida de todos. Contra la eficacia de estos balances, para juzgar de la marcha de una institución aseguradora, se han formulado numerosas objeciones; pero, cualquiera que sea el medio ideado para sustituirlos, no estará exento de impugnaciones razonadas, ya que se sabe, cuando se sabe, lo que ha pasado y lo que pasa; pero eso, con ser mucho, no es bastante para afirmar lo que pasará. Mas, aun no siendo suficiente, el balance es necesario para asegurador y asegurado, y en el Seguro social esta necesidad no es menor que en el privado y la dificultad de formación del balance es mucho mayor, lo que ha hecho recurrir a nuevos conceptos y artificios; mi deseo de no alargar este trabajo hace que me limite ahora a recor-

---

nes, lo mismo que Zimmermann y Bentzien. Las de Küttner tienen como base las experiencias en mineros de carbón de Prusia; también se refieren a mineros las de Caron, Morgenbesser, Kaan, Meyer, Beckmann y Eggenberg. Con datos de otras profesiones sólo hay tres: las de Zillmer, de metalúrgicos; las de Wolff, de personal de teatros, y las del Reichsversicherungsamt, con experiencias de la aplicación de la Ley de Seguros.

<sup>1</sup> Véase WEBER: *Etude sur les tables de mortalité d'invalides et sur les tables d'invalité*, *Bulletin de l'Institut des Actuares français*, 1897; FUSTER: *Statistique internationale de l'invalité*, *Bulletin des Assurances Sociales*, 1912; DOTT. MARIA CASTELLANI: *Sulla frequenza della invalidità*, publicación de la Cassa Nazionale per le Assicurazioni Sociali de Italia.

dar lo hecho en nuestro país en el Instituto Nacional de Previsión y que la práctica viene reputando como bueno. El procedimiento, debido a M. Lefrancq <sup>1</sup>, Secretario del Comité permanente de los Congresos nacionales de Actuarios y Asesor actuario de aquel Instituto, se reduce a comparar el activo real, no con el valor actual de las futuras obligaciones, sino con el *activo hipotético*, que puede definirse de cualquiera de estos dos modos: como el total de las reservas matemáticas, según las bases de las tarifas, para todos los contratos que, con arreglo a las tablas utilizadas, deberían estar en vigor; o también, como el excedente de los ingresos, capitalizados al interés previsto en las tarifas, sobre el valor, adquirido al mismo interés, de todos los pagos que, según la tabla básica, deberían haberse efectuado. La expresión del activo hipotético,  $A_1$ , al final de un ejercicio, en función del  $A_0$  correspondiente al ejercicio anterior, del valor a fin de año de los pagos,  $P$ , que hubieran debido efectuarse, si la mortalidad real coincidiese con la prevista, y del total,  $V$ , de las primas puras, supuesto su cobro también a fin de año, es:

$$A_1 = A_0(1 + i) - P + V,$$

estando constituido  $P$  para el año  $n$ -ésimo en que los afiliados han adquirido rentas inmediatas  $R_{[x]}$ , rentas diferidas para la edad  $x$ ,  $R_{[x]}^x$  y se han asegurado para caso de muerte por  $C_{[x]}$ , por los siguientes elementos:  $\frac{R_{[x]}}{l_{[x]}} \cdot l_{[x]} + n$  para las inmediatas;  $\frac{R_{[x]}^x}{l_{[x]}} \cdot l_{[x]} + n$  para las diferidas cuyo

---

<sup>1</sup> *Rapports, etc., du VII. Congrès International des Actuaires*, tomo I, Amsterdam, 1912, páginas 861 a 882. Además de lo que propiamente se refiere al Balance, contiene la Comunicación de M. Lefrancq interesantes observaciones sobre la conveniencia de estudiar la mortalidad de los asegurados, no por la edad de afiliación, sino atendiendo al pago de primas.

pago ha comenzado a efectuarse (las demás no intervienen, evidentemente); y  $\frac{C_{[x]}}{l_{[x]}} d_{[x] + n - 1}$  para los capitales reservados.

Se comprende la facilidad de estos cálculos, y su comparación con las dificultades que ofrecería la simple adquisición de los datos necesarios para formular un balance técnico exacto, pone bien de manifiesto la bondad del sistema, que aun ofrece otras ventajas de importancia.

\* \* \*

En cuanto llevo dicho he procurado limitarme a considerar el aspecto matemático de los Seguros sociales, y sin referirme concretamente, si no ha sido de un modo incidental, a nuestro país; convendría, sin embargo, hablar de los progresos ya realizados y de las posibilidades próximas y remotas que en el campo de estos seguros se advierten en España y publicar con el debido encomio los esfuerzos que hombres beneméritos, a cuya cabeza figuran el general Marvá y D. José Maluquer y Salvador, han dedicado y dedican a obra que tan directamente beneficia a todos. El tema es sugestivo y debe ser tratado en extenso y por quien para ello tenga mejores condiciones que yo; pero hay en él un punto que no quiero dejar de notar, por ser esencial y entrar de lleno en la materia objeto de este mal hilvanado discurso; me refiero a las normas científicas a que deben ajustarse todos los Seguros sociales.

Muy pronto hará veinte años que el ilustre Ingeniero Sr. Garcini, de grata memoria, en ocasión análoga a la presente, manifestaba esta preocupación, común a todos los hombres de buena ciencia y buena fe: estaba entonces some-

tido a deliberación en el Parlamento el proyecto de Ley creando el Instituto Nacional de Previsión, que años más tarde había de ser declarado órgano oficial de los Seguros sociales en España, y el Sr. Garcini <sup>1</sup> mostraba su satisfacción por ver iniciada la atención de los Poderes públicos a las necesidades de los desvalidos, pero también sus temores, que reputaba muy fundados, de que la reglamentación y el desarrollo de la institución proyectada se hiciesen prescindiendo de todo lo que la Ciencia exige, porque ello acarrearía el fracaso del Seguro, con todas sus lamentables consecuencias. Felizmente, los temores del Sr. Garcini no se han confirmado; antes bien la realidad ha sido la que él deseaba. El Instituto Nacional de Previsión no ha querido saber nunca de empirismos, ni tener relación con quienes los utilizan, y en los Seguros que administra, y en la preparación y propaganda de los que han de venir, a lo primero que atiende es al asesoramiento técnico, no sólo en lo social, en lo médico y en lo jurídico, sino también, y muy principalmente, en lo actuarial. Es mérito muy grande del Sr. Maluquer y Salvador, que todos debemos agradecer, el haber comprendido su necesidad y haber impuesto esta manera de proceder desde el primer momento, porque con ello se realiza una gran obra educadora y se tiene y se comunica a todos la certeza que en lo humano cabe, de poder cumplir los compromisos, más sagrados por lo mismo que han de favorecer a los humildes. Para quienes en uno u otro campo cultivamos la Ciencia, constituyen, además, estos frutos una de

---

<sup>1</sup> Discursos leídos ante la Real Academia de Ciencias exactas, físicas y naturales, en la recepción pública del Sr. D. Vicente de Garcini y Pastor (Madrid, 1908).

las satisfacciones más legítimas que podemos sentir, que si la Ciencia es útil y agradable cuando resuelve los problemas de la vida diaria, y más grande y bella cuando se eleva a las altas especulaciones en que el espíritu se esparce sin pensar en lo material, nunca es tan grata y amable como al realizar el bien.

CONTESTACIÓN  
DEL SEÑOR  
D. JULIO REY PASTOR

SEÑORES:

**L**A sabiduría oriental ha logrado condensar en breve apotegma el mecanismo sentimental de la vida: «Vivimos de esperanzas cuando todavía carecemos de recuerdos; y vivimos de recuerdos cuando ya carecemos de esperanzas.»

Recuerdos y esperanzas son la trama y la urdimbre que forman el tejido de la vida; la cual no alcanza su plenitud si éstas no se entretajan en ponderada proporción. Tal sucede en este momento solemne de mi vida, que viene a rememorar en mí todo un mundo de recuerdos, matizado de alegres esperanzas.

Pláceme recordar aquellos inolvidables días de estudiante, vividos en la Facultad de Ciencias de Zaragoza; de cuyo profesorado, competente y entusiasta, que le ha dado merecido renombre entre todas las de España, destacan dos figuras con singular relieve en el mundo de mis recuerdos gratos.

Eran el más antiguo y el más moderno de aquel claustro; famoso uno por su copiosísima producción, admirable y admirada por la vastedad de sus planes, más que por la perfección de su desarrollo minucioso; bien al contrario del otro, tan cuidadoso de los pormenores como del fondo de los problemas; frente a la visión telescópica de la Ciencia, que complacía al viejo maestro, contrastaba la exposición del joven profesor, toda rigor, claridad y exactitud; en oposición a la fiebre editora del primero, la parquedad de las publicaciones del segundo, cuyos trabajos, algunos muy notables, parecían víctimas de la autocrítica de su creador, y sólo por amistosa coacción llegaban algunos a ver la luz pública.

Uno todo expansión y el otro todo concentración; aquél, pródigo de sus ideas, que lanzaba copiosamente al ambiente vacío; mientras su colega, por el contrario, impregnado de santo horror a la publicidad, las emitía con medida, con parsimonia, casi con avaricia.

Y no era ciertamente falta de vocación; pues a nadie encontré nunca más abierto a todas las consultas, ni que se encariñase más con los nuevos problemas; y nadie me ayudó como él con su colaboración y su consejo en las cuestiones matemáticas más arduas, en las que rápidamente formaba certero juicio, con aquella penetrante sagacidad sólo dada a las inteligencias profundas, que logran llegar a la médula de los conceptos.

En él encontré algo más que un buen profesor: un maestro, y algo todavía mejor: un amigo. El me estimuló a visitar las propias fuentes donde la ciencia nace; como él mismo, predicando con el ejemplo, y a pesar de los lazos que a tantos profesores han impedido salir a renovarse en medios más propicios, no pierde ocasión de buscar contacto con los grandes centros de la cultura científica.

Allí fuí, por primera vez, un tanto desorientado, y allí aclaré una duda que me atormentaba, de la cual me acuso ahora públicamente, esperando así merecer indulgencia

Para mí el prestigio de D. Zoel García de Galdeano estaba sólidamente cimentado en su libro de texto, cuyas páginas se contaban por millares; pero, ¿cómo explicarse que el joven profesor, admirable en la clase y fuera de ella, por la extensión, profundidad y nitidez de sus conocimientos y por la penetración de su ingenio, careciera de propio texto, que yo, con mi criterio estudiantil, consideraba como obligada ejecutoria de la sabiduría de cada profesor?



Porque la costumbre de tantos años de estudios de ciencia extranjera en libros españoles había arraigado en mí la convicción de que la Providencia distribuía el trabajo científico, encomendando a otros pueblos su producción, y a España la confección de libros didácticos, en que aquélla se reflejara límpida y transparente.

Y había para mí algo todavía más inexplicable: este profesor que ni siquiera tenía unos apuntes remediavagos, y que nos recomendaba libros extranjeros para completar los muy originales de Torroja (consejo que me parecía altamente anti-patriótico), había tenido la osadía de dar en la *Revista Trimestral de Matemáticas* una solución a cierto problema, que discrepaba de la publicada por el matemático francés Barisien, el cual obtenía una curva de 4.º orden, que el Sr. Alvarez Ude sostenía era de 2.º; y después de intervenir M. Brocard, autor del problema, en apoyo de su compatriota, deduciendo la cuártica por otro método, este profesor español tenía el atrevimiento de seguir sosteniendo su deducción y hasta de señalar el invisible factor extraño que desorientaba a aquellos colaboradores franceses. Admitir que un español pudiera corregir a publicistas extranjeros, parecíame cosa tan insólita, que llegué a creerlo solamente cuando aquéllos y el italiano Retali le dieron, convencidos, la razón.

Muy arraigado ha estado, sin duda, este prejuicio, que todavía perdura, cuando ya en el siglo XVIII, el inquieto doctor D. Diego de Torres y Villarreal lamentaba esta persuasión en que viven los españoles, de «que el hacer pronósticos, fabricar mapas, erigir figuras y plantar épocas, eran dificultades invencibles; y que sólo en la Italia y en otras naciones extranjeras se reservaban las llaves con que se abrían los secretos arcones de estos graciosos artificios».

No conocía yo, por entonces, las obras de este buen truhán ochocentista, y me habría indignado sobremanera la clasificación que hace de todos los libros, en tres grandes grupos: buenos, malos e inútiles, incluyendo en este último «los más de todas las que se llaman facultades». «Para instruirse en el idioma de una ciencia y comer sus aforismos, basta un curso cualquiera, y pasan de doce mil los que hay impresos, sin más novedad que repetirse, trasladarse y maldecirse los unos a los otros».

Aquella duda de la que me he acusado contrito, engendrada por el simplista criterio juvenil de medir la ciencia de cada uno por el número de sus páginas impresas, quedó desvanecida cuando observé, atónito, que los más grandes sabios no suelen publicar libros didácticos; y que pueblos productores de alta Matemática, como Alemania, habían carecido de ellos durante mucho tiempo, por considerar esta labor de interés muy secundario.

Me refiero, claro es, a los libros faltos de originalidad, a los que no siguen el movimiento de la época, a los que presentan la ciencia en bloque tan terminado y perfecto, que no dejan resquicios donde pueda penetrar el espíritu original del lector; por el contrario, son altamente beneficiosos, sobre todo en nuestro ambiente, tan necesitado de orientación, los libros abiertos a las auras traspirenaicas, los que dejan entrever horizontes, e invitan al estudio de las monografías magistrales.

Me parece muy hábil esta salvedad, por si acaso algún malicioso pregunta por qué he mutilado el párrafo que antes copié de Villarroel, omitiendo su segunda parte, que dice: «Yo confieso que para mí perdieron el crédito y la estimación los libros, después que vi que se vendían y apreciaban los míos...» Y oportuna me parece también esta larga digresión sobre los

libros de texto, para preparar una ofensiva, que luego concretaré en ataque a fondo, contra mi enemigo, ahora indefenso y sin réplica posible.

Discípulo predilecto de nuestro gran Torroja, ha sabido honrar la memoria del maestro de la manera como el filósofo Gorgias deseaba ser honrado, y que a él mismo habría sido más grata: «viendo donde él no vió, poniendo el pie más adelante de su última huella y la mente más en lo claro y espacioso».

Más claros y espaciosos horizontes que los de Staudt son los descubiertos posteriormente por Klein, Hilbert y tantos otros; y esta reorganización rigurosa no debió de representar gran esfuerzo para nuestro nuevo compañero; pues si quisiéramos caracterizarlo con una sola palabra, ésta sería: *rigor*.

Rigor y exactitud en las demostraciones matemáticas; rigor y purismo gramatical en sus escritos; rigor crítico en el juicio de trabajos propios y ajenos; rigor también en su moral austera.

En este rigor autocrítico hay que buscar la causa del escaso volumen de su producción, a la par que su perfección lógica.

Suele inspirarnos antipatía quien tiene nuestros mismos defectos, porque nos parece que los pone en evidencia y los desacredita; en cambio, nos complace señalar los defectos opuestos a los propios; y considerando defecto lo que no es sino escrupulosidad excesiva e infundado temor de que el escarpelo del lector esté tan afilado como el suyo, complázcome en exponerlo a la pública verecundia, para que la coacción de muchos logre que emprenda al fin la publicación de su *Tratado de Geometría descriptiva*, hace años terminado y per-

fecto; al cual no quiero elogiar, porque sería el modo seguro de no conseguir lo que todos ansiamos.

Y como quien calla otorga, queda solemnemente asegurada la publicación de obra tan necesaria para los estudiosos de esta disciplina.

No es, pues, logofobia la cualidad característica de quien, además de sus artículos, notas y conferencias, bien conocidas y debidamente estimadas por su solidez y originalidad, tiene una importante labor inédita, y otra muy copiosa, publicada anónimamente, en la *Revista Trimestral de Matemáticas*, en los *Anales de la Facultad de Ciencias de Zaragoza*, en la *Revista Matemática Hispanoamericana*, etc.; es solamente horror a la exhibición, que responde a una de las dos concepciones antagónicas de la Ciencia, y a la vez normas de vida, que pueden llamarse *centrífuga* y *centrípeta*.

La una siente la necesidad de expansión, busca la satisfacción externa de la publicidad, que engendra la admiración y conquista la fama, y con frecuencia viene acompañada, aun sin solicitarlo, de honores y ventajas para sí y para los suyos. La otra se conforma con la satisfacción interior de la curiosidad colmada y de la alegría creadora, ama la vida oscura y sin estruendo y rehuye medrosamente la exposición ante el monstruo de innúmeras cabezas y opiniones también innumerables.

Meticulosidad en el sentido estricto y en el vulgar de la palabra, esto es: sano rigor científico; justa apreciación crítica de los quilates de sabiduría y novedad de algunas de las publicaciones que la inconsciencia del vulgo, con noble sed de prestigio universal para nuestra ciencia, eleva en el altar de su veneración; temor de descubrir cosas viejísimas y conciencia de la gran dificultad de encontrar novedades interesantes en las ciencias de razonamiento puro; esa conciencia y

ese temor que sólo se adquieren con el amplísimo conocimiento bibliográfico que él tiene de la producción mundial y que convida a adoptar como prudente norma el *pauca sed madura*, que caracteriza su producción.

Pero ese rigor, que distingue a nuestro nuevo compañero de tareas, no es aquel exclusivismo lógico que cierra los ojos a la luz de la intuición y camina a pequeños pasos de silogismo, por carecer de alas para volar; no es el *espíritu geométrico* estrecho, que Pascal presenta en oposición al *esprit de finesse*; es, por el contrario, una faceta de este mismo espíritu, que podemos llamar *comprensivo*, capaz de enfocar cada cuestión desde el punto de vista que le corresponde; y sólo así se explica que haya podido cultivar fructuosamente disciplinas tan variadas, y derivar su actividad por cauces tan distantes, hasta llegar a un campo, como es la Ciencia actuarial, en que el rigor y la exactitud no tienen cabida.

Y cumplido este deber de conciencia, más que de costumbre reglamentaria, ya que mi temperamento es tan poco académico como el de quien tan poca impaciencia ha demostrado en llegar a serlo, debería entrar en el fondo de su magnífica monografía, si no me creyera dispensado de hacerlo por fuero especial. Porque, si el Sr. Presidente me ha encomendado esta contestación, no ha sido, seguramente, por creer en mis conocimientos de ciencia actuarial, de la que me declaro ignorante, mientras que hay compañeros versados en ella, y muy especialmente el patriarca de la previsión en España, cuyo nombre está en todos los labios. Ni tampoco ha sido por mérito de antigüedad en la Academia, con la que estoy muy desvinculado por largas ausencias. Solamente los lazos científicos y afectivos que me unen al recipiendario pueden justificar esta elección del Sr. Presidente, a quien debo gratitud, por depararme tal satisfacción,

y además por haberme puesto en el trance de asomarme a un campo de estudios por los que nunca me había interesado.

\* \* \*

La parte más noble de la civilización es, quizá, la eterna lucha del hombre contra las fuerzas adversas de la Naturaleza, encauzándolas y utilizándolas para procurar un bienestar colectivo, por medios materiales y espirituales.

Pero la posesión de aquel mínimo de bienes indispensables para cada clase de vida, está de continuo amenazada por ese conjuro de fuerzas naturales que contrarían el egoísmo de la especie, descargando sus golpes inesperadamente y que en nuestra concepción egocéntrica del Universo y hedónica de la vida, llamamos *adversidad*.

Sabido es también cómo ha logrado el hombre encauzar esas fuerzas adversas, distribuyendo proporcionadamente sus efectos entre la colectividad, como un descuento natural impuesto a la osada insignificancia humana en el cosmos; y bien podríamos definir la Ciencia actuarial como conjunto de métodos ideados para eliminar el azar de la vida.

Ciencia de método matemático, pero de fundamentos empíricos, que, a base de hipótesis arriesgadas y de datos estadísticos no menos aleatorios e inseguros, si no deduce del *cómo es el cómo será*, logra conjeturar el porvenir, con resultados bastante satisfactorios.

La *conjetura* frente a la *deducción*; he aquí el nuevo momento filosófico que Bernoulli planteó con su *Ars coniectandi*; y bien calificada está como arte de conjeturar esta disciplina gigante, coloso con pies de barro.

En efecto; el Cálculo de Probabilidades es una ciencia fecundísima, edificada sobre un círculo vicioso. Suele defi-

nirse la probabilidad de un suceso como cociente del número de casos favorables y posibles, suponiendo que todos ellos sean *igualmente probables*; y dicho así, claramente y sin disimulo, aparece el definido dentro de la definición.

Abramos cualquier tratado de esta ciencia, y encontramos: un estudio muy amplio de las probabilidades mal llamadas discontinuas; otro muy breve sobre las continuas, con las inevitables paradojas de Bertrand, para hacer visible la profunda diversidad del problema, y después una reseña somera de la teoría de Poincaré, con sus funciones arbitrarias, etc. Todos tres presentados como mundos independientes, sin conexión; y ocurre preguntar: ¿no habrá, quizá, íntimo parentesco y quizá una superior unidad entre ellos?

Atrévome a predecir que la solución se encontrará en la Teoría de los conjuntos, llamada a aclarar los fundamentos de este cálculo, como antes aclaró los del infinitesimal.

La probabilidad no es sino una *función aditiva de conjunto*, y creo que esta definición (cuyo grado de novedad ignoro, por no disponer de bibliografía suficiente en las pocas horas en que ha sido redactado este discurso) encierra todo el Cálculo de probabilidades, tanto continuas como discontinuas, sean numerables o finitas.

Las famosas paradojas que se presentan en las probabilidades continuas han preocupado a los matemáticos de todos los tiempos, dando explicaciones tan distintas, que su misma diversidad las invalida.

La dificultad reside en el paso al límite de la medida de los conjuntos discretos a los continuos; entendiendo por *medida* toda función aditiva de conjunto; cada conjunto parcial de otro, que se adopta como unidad, tiene, pues, infinitas determinaciones de su probabilidad, tantas como

sistemas de medida; y esto es lo mismo en los conjuntos infinitos y en los finitos. ¿Por qué no aparecen paradojas en éstos y sí en aquéllos? Porque a cada elemento le asignamos igual medida, postulando la equiprobabilidad de todos ellos, y porque la medida de cada conjunto finito, es decir, su número cardinal, es invariante en las transformaciones biunívocas, cosa que no acaece en los infinitos, resultando que la probabilidad de un conjunto depende de la clase de coordenadas que se adopten para determinar sus elementos.

Ocurre pensar si será posible llegar a un concepto topológico de medida, es decir, invariante relativo en el grupo de las deformaciones, de tal modo que la razón de medidas en dos conjuntos homogéneos sea invariante absoluto; pero fácilmente se ve la imposibilidad de tal invariante y hay que renunciar a la unicidad de resultados; su diversidad está impuesta, no sólo por el modo de elegir cada objeto (idea ya admitida modernamente), sino también por la distribución o densidad de estos objetos o sucesos en el continuo; idea que carece de sentido en la concepción del continuo como infinito actual; pero lo tiene, y muy sencillo, si se parte de su concepción genética. Se impone, pues, la necesidad de introducir el concepto de *densidad relativa* de dos conjuntos.

Definir, como se hace corrientemente, la probabilidad de un segmento parcial por el cociente al segmento total, olvidando la densidad, es tan inadmisibile como lo sería calcular la probabilidad de que un individuo de una colectividad sea sexagenario como cociente del intervalo aritmético superior a 60 por el de vida máxima; pues sabido es que dicha probabilidad es mucho menor, aun tomando todos los habitantes de una nación, y casi nula si sólo se considera un



ejército; y, en cambio, sería bastante considerable en una Academia.

Es que la densidad del conjunto de seres humanos vivos es función de la edad; función bien estudiada por las tablas de supervivencia para cada país, y que varía para cada colectividad, exigiendo especial determinación.

Todo ello, tan trivial y sabido, parece ser olvidado, sin embargo, al llegar al campo de los conjuntos infinitos, continuos o discontinuos, hasta el punto de que la teoría de las probabilidades numerables está casi toda por hacer.

En ellas no interesa el número trasfinito de casos favorables y posibles, sino solamente la densidad. Imaginemos, por ejemplo, una ruleta, donde esté inscrito cada número natural una sola vez; puesto que el conjunto de los pares es coordinable con el de los impares, ¿tendrán ambos la misma probabilidad? Nada puede asegurarse sin conocer antes la función densidad de unos y otros; pero si un jugador avisado observa, por ejemplo, en la serie de números inscritos en la ruleta, que siempre hay dos pares seguidos alternando con un impar, poco le interesará que en la serie infinita haya tantos de unos como de otros, ni siquiera le preocupará el saber que hay infinitos pares no inscritos, y es seguro que preferirá los pares para arriesgar su dinero, por estimar doble su probabilidad.

Esta densidad es aquí una función discontinua, mientras que es continua en las probabilidades geométricas; pero la esencia es la misma.

Si se quiere, por ejemplo, calcular la probabilidad de que un punto esté en un segmento parcial de otro, habrá que estudiar la ley de selección; si ésta se efectúa por una puntería, la densidad de esta selección vendrá dada por la ley de Gauss, y combinada con la densidad de distribución de los

puntos en el segmento, que será distinta en cada caso, dará la probabilidad que corresponda.

Este concepto de densidad aclara perfectamente los tres resultados distintos obtenidos por Bertrand en su célebre paradoja, y pueden obtenerse otros infinitos variando el método de selección de la cuerda.

Parece inevitable introducir estas complicaciones si se quiere hacer riguroso y de segura aplicación el Cálculo de probabilidades; y si bien la Ciencia actuarial está libre de ellas, pues ya utiliza en cierto modo ese concepto de densidad, también ésta se va complicando, pues se ha visto la necesidad de hacerla variar, de tal modo, que ya no sirve una tabla de mortalidad, sino varias construídas en épocas diversas.

Y quizá me animara a trasponer los umbrales de la Ciencia actuarial, diciendo algo sobre este problema, que ya ha llegado a interesarme (y aun es posible que lograra aparentar suficiencia), si la previa declaración que hice de mi ignorancia en tales cuestiones no me cerrara las puertas de vuestro crédito.

Señores Académicos: un elevado y ecuánime espíritu, abierto a toda idea nueva y capacitado para toda clase de problemas, gana hoy, para sus tareas, esta docta Corporación; la cual, al poner en contacto frecuente y familiar a los cultivadores de las ciencias puras y aplicadas, sin distinción de frontera de cuerpo, realiza una labor de acercamiento que, por sí sola, bastaría para justificar su existencia.

Pero, al dar la bienvenida al fraternal amigo, que tan dignamente viene a ocupar el puesto del inolvidable Vela, reforzando la brillante representación que la Universidad tiene en estos estrados, no puedo olvidar este fuerte lazo

profesional que a él me une; y así como nuestros queridos compañeros de Academia cultivan fervorosamente ese espíritu de cuerpo, que es fecundo en cuanto significa noble emulación, y es santo mientras representa amor filial a sus progenitores intelectuales, yo también me complazco en proclamar mi orgullo de pertenecer a un glorioso organismo donde hay inquietudes, donde se oyen quejas y censuras, donde se exhiben las propias lacras con propósitos de curación, donde existe, por fortuna, ese espíritu autocrítico, signo de perdurable juventud. Indicios son todos ellos de haber puesto la mirada en modelos más altos, con ansias de renovación, para poder algún día alternar dignamente con las instituciones hermanas de otros pueblos más afortunados, que no han sufrido crisis históricas tan hondas; y como el humo del orgullo—según decía Feijoo—no nubla nuestra vista, impidiéndonos toda serena comparación, es de esperar el triunfo, ya que todos los males son curables, menos la inconsciencia, que es la muerte del espíritu.

HE DICHO