VINDICACIÓN DE LOS INFINITÉSIMOS

Carlos Sánchez del Río

Introducción

El cálculo diferencial, ideado por Newton y Leibniz, es un instrumento para el estudio de los cambios de cantidades variables que dependen unas de otras. Se basa en el empleo de infinitésimos como indica claramente el título del primer libro que se escribió sobre el tema (Marquis Guillome de l´Hopital, *Analyse des infiniment petits*, 1696). La doctrina fue desarrollada hasta su plenitud por el gran Leonhard Euler (*Introductio in analysin infinitorum*, 1748 e *Institutiones calculi differentialis*, 1755) y aplicada con éxito para la resolución de toda clase de problemas mecánicos por todos los grandes matemáticos del siglo XVIII y parte del XIX.

A pesar de tantos triunfos, el cálculo con infinitésimos produjo inquietud y desazón desde el principio. El diferencial $\mathrm{d}x$ no vale nada si se añade a x pero si se escribe $\mathrm{d}y = 4\,\mathrm{d}x$, el diferencial de $\boldsymbol{y}$ vale cuatro veces el de x aunque ninguno de los dos valgan nada. Hay que reconocer alguna contradicción en el hecho de que se manipulan los diferenciales como si representasen números a sabiendas de que no lo son; podríamos decir que son aromas de números. Se superó la contradicción en las primeras décadas del siglo XIX cuando se eliminaron los infinitésimos y se fundamentó el cálculo diferencial en los conceptos de límite y derivada introducidos por Bolzano, Cauchy, Weierstrass y otros.

Sucedió, sin embargo, que por aquellos años la física matemática ya era una disciplina consolidada como lo prueba la obra de Joseph Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, 1822, a la cual se refería Sommerfeld como "la Biblia de la física matemática". Y tanto ese libro como los demás de aquellos años está escrito al viejo estilo y por eso los físicos seguimos pensando en infinitésimos aunque no utilicemos la palabra por discreción. Lo mismo hacen los ingenieros y los demás usuarios de la matemática. Y no es sólo por tradición sino porque nos resulta más intuitivo ver la velocidad o el campo eléctrico como cociente de diferenciales que como derivadas. Además algunas veces el sentido físico implica cantidades muy pequeñas. Es el caso de la definición de la entropía mediante $\mathrm{d}S = \delta q/T$ que sólo es válida para procesos cuasiestáticos. Por estos motivos no se puede decir que los infinitésimos hayan desaparecido.

De hecho, hace casi medio siglo que Abraham Robinson (*Non-Standard Analysis*, 1966) y otros matemáticos justificaron el uso de infinitésimos mediante la introducción de los números hiperreales que incluyen a los reales y a algunos infinitamente grandes o pequeños. El tratamiento es riguroso pero no se puede usar en la enseñanza porque se basa en técnicas de lógica formal que sólo conocen algunos especialistas. Quienes no somos capaces de seguir los razonamientos de tales expertos podemos interpretar sus admirables resultados como autorización para una enseñanza del cálculo diferencial más clara aunque menos rigurosa que la actual. Y es lo que me ha movido a escribir este documento para proponer que se acepte una pedagogía alternativa del cálculo diferencial.

La propuesta se basa en mi convicción de que las exigencias de rigor en las demostraciones no deben ser las mismas para futuros matemáticos de oficio que para los simples usuarios de tan poderoso e imprescindible instrumento como es la matemática. Y ello por dos razones. La primera es que los modestos usuarios normalmente sólo manejamos las funciones que Riemann llamaba “funciones naturales” que no suelen dar sorpresas. El segundo motivo es que no parece razonable exigir a los físicos, y otros usuarios, más rigor en matemáticas que el que es normal en su propia disciplina. Y en la física, por ejemplo, aceptamos un argumento plausible mientras no conduzca a algún resultado erróneo. Y no nos va mal.

Concretamente mi propuesta es que se acepte la enseñanza del cálculo diferencial mediante infinitésimos como una alternativa legítima al método actual. Y digo alternativa, que no sustitución, porque ambas pedagogías pueden coexistir sin que se siga ningún perjuicio. La mejor manera de convencer a los escépticos de las ventajas del método que propongo es exponer, en lenguaje moderno, unas ideas que podrían incluirse en las primeras lecciones de un curso de cálculo diferencial. Es lo que me propongo hacer seguidamente.

Diferenciales y derivadas

La manera de introducir estos conceptos depende la mentalidad del profesor y del sentido crítico del grupo de alumnos a quienes pretende enseñar. Si se trata de adolescentes es probable que acepten que se llama diferencial de una variable x a un aumento infinitamente pequeño de la misma. Y que se representa por $\mathrm{d}x$ es decir, mediante el símbolo d (letra no cursiva) antes de la letra que representa la variable. Intuitivamente puede pensarse, con Leibniz, que $\mathrm{d}x = x/\mathrm{n}$ siendo n un número tan grande como se quiera pensar; su valor es “casi” nulo y por eso decía Newton que era un aumento naciente.

Los antiguos decían que el diferencial que hemos definido era un infinitésimo de primer orden porque podemos definir un diferencial de diferencial $\mathrm{dd}x$ que sería un infinitésimo de segundo orden, es decir "casi" nada respecto de $\mathrm{d}x$. El producto de dos diferenciales de la misma o distinta variable $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ es un infinitésimo de segundo orden. En cambio el cociente de dos diferenciales $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ no tiene porqué ser nulo.

De hecho es ese "cociente diferencial" lo que deseamos conocer cuando queremos averiguar como cambia una variable y dependiente de otra x. Esta dependencia se llama función y, en notación de Euler, se escribe

$$y = \mathrm{f}(x)$$

como es bien sabido. Si la función es analítica y efectuamos un proceso que denominamos diferenciación resulta

$$\mathrm{d}y = \mathrm{f}'(x)\,\mathrm{d}x$$

siendo $\mathrm{f}'(x)$ una nueva función que se llama derivada porque se deriva de la anterior según ciertas reglas que se exponen a continuación.

Reglas de diferenciación

Hay tres reglas de diferenciación evidentes porque ya son válidas para incrementos finitos de cualquier tamaño por pequeño que sea:

1. Si a es una constante, $\mathrm{d}a = 0$.
2. Si $z = x+y$ siendo x,y,z variables, $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x+\mathrm{d}y$.
3. Si $y = a\,x$ siendo a constante y x,y variables, $\mathrm{d}y = a\,\mathrm{d}x$.

No es evidente, en cambio, la regla para diferenciar el producto xy. Su diferencial $\mathrm{d}(xy)$ será la diferencia entre $(x+\mathrm{d}x)(y+\mathrm{d}y)$ y xy ignorando el término $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ por ser un infinitésimo de segundo orden. Resulta

$$\mathrm{d}(xy) = x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x.$$

Esta regla es el fundamento del cálculo diferencial y su importancia en el análisis matemático es comparable al teorema de Pitágoras en geometría.

El uso directo de esta última regla permite diferenciar las potencias de una variable muy fácilmente. He aquí unos ejemplos. Si ponemos $y=x$ en la regla tenemos el siguiente par de función y su diferencial:

$$z = x^2 \qquad\qquad \mathrm{d}z = 2x\,\mathrm{d}x.$$

Si escribimos ahora $y = x^2$ y recordamos el resultado anterior,

$$z = x^3 \qquad\qquad \mathrm{d}z = 3x^2\,\mathrm{d}x.$$

Más simple es l el caso de la función $y = 1/x$ porque implica que $xy = 1$ y basta aplicar la regla para tener

$$y = 1/x \qquad\qquad \mathrm{d}y = -\mathrm{d}x\,/\,x^2.$$

Con manipulaciones análogas se pueden también diferenciar potencias fraccionarias de una variable x . El resultado general es

$$y = x^m \qquad\qquad \mathrm{d}y = mx^{m-1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Este resultado es válido para cualquier número m racional y debe serlo también para todo número real si se definen tales números por límites de sucesiones o por cortaduras de Dedekind.

Funciones logarítmica, exponencial y trigonométrica fundamental

Veamos ahora como se pueden diferenciar otras funciones con nuestras reglas. Dividiendo la expresión de la regla de diferenciación del producto por $z = xy$ tenemos

$$\mathrm{d}z/z = \mathrm{d}y/y + \mathrm{d}x/x.$$

La comparación de esta fórmula con la propiedad de cualquier logaritmo

$$\log z = \log y + \log x$$

indica que el diferencial del logaritmo de cualquier variable (d log x) debe ser proporcional a $\mathrm{d}x/x$. Lo natural es tomar la unidad como constante de proporcionalidad y llamar naturales (símbolo ln) a los logaritmos cuyo diferencial viene dado por

$$\mathrm{d}\ln x = \mathrm{d}x/x.$$

Conocido el diferencial de la función logaritmo es trivial diferenciar la función x elevada a cualquier número real m con el resultado ya visto más arriba.

La función exponencial

$$y = \exp(x)$$

es la inversa de la función logarítmica de modo que la fórmula anterior es equivalente a

$$x = \ln(y)$$

y como, en este caso, $dx = dy/y$ es evidente que la función exponencial satisface a la curiosa ecuación

$$dy/dx = y$$

y tiene por tanto la singular propiedad de que su función derivada es igual a la propia función. Es fácil comprobar, derivando término a término, la serie

$$1+ x+ x^2/2! + x^3/3! + \dots$$

que resulta la misma y es por ello un desarrollo en serie de la función exponencial. Como $\exp(1) = e$ que es la base de los logaritmos naturales, basta poner $x = 1$ en la serie y sumar unos pocos términos para calcular las primeras cifras del famoso número $e = 2.7182\dots$

La función trigonométrica fundamental es

$$y = \exp(ix)$$

siendo i la unidad imaginaria ($i^2 = -1$). Es obviamente una función no real sino compleja que podemos escribir en la forma

$$\exp(ix)= a(x) + ib(x).$$

Para cualquier valor de x la función es de módulo unidad porque

$$\mathrm{Rxp}\ (ix) \exp(-ix) = 1$$

y podemos afirmar que

$$a^2(x) + b^2(x) = 1.$$

En una representación gráfica de esta función compleja sólo se cumplen las condiciones anteriores si a y b son las funciones trigonométricas coseno y seno respectivamente. En definitiva

$$y = \exp(ix) = \cos(x) + i \operatorname{sen}(x)$$

que es la famosa formula Euler. Para derivar la exponencial con respecto a la variable x hay que recurrir a una variable auxiliar $z = ix$ y calcular

$$(\mathrm{d}y/\mathrm{d}z)(\mathrm{d}z/\mathrm{d}x).$$

Cualquier estudiante conoce esta regla y si la menciono es porque, si los diferenciales son infinitésimos, es evidente y no necesita demostración. El resultado es que, en este caso, la derivación es equivalente a multiplicar la función por i con lo que resulta

$$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -\operatorname{sen}(x) + i\cos(x)$$

de donde se deduce que la derivada del seno es el coseno y la de éste es el seno cambiado de signo.

Con esto quedan completas las reglas para derivar cualquier función que se pueda expresar como combinación o serie de las funciones elementales.

Derivadas segundas

Del mismo modo que a partir de una función

$$y = \mathrm{f}(x)$$

se obtiene

$$\mathrm{d}y = \mathrm{f}'(x)\,\mathrm{d}x$$

por diferenciación, podemos volver a diferenciar esta expresión para obtener la derivada de la derivada que llamamos derivada segunda. Basta aplicar la regla de diferenciación de un producto para escribir

$$\mathrm{dd}y = \mathrm{f}''(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x + \mathrm{f}'(x)\,\mathrm{dd}x$$

donde $\mathrm{f}''(\mathrm{x})$ es la función que se obtiene de $\mathrm{f}'(x)$ con las mismas reglas con las que ésta se obtuvo de $\mathrm{f}(x)$. Dividiendo por $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x$ los dos miembros de la fórmula de $\mathrm{dd}y$, el último término desaparece porque $\mathrm{d}x/\mathrm{d}x = 1$ y la derivada de un número es nula. Resulta la derivada segunda que ahora escribimos en la forma

$$\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 = f''(x).$$

Como se ve el resultado previsto aparece de forma natural sin necesidad de argumentos dudosos. Además la fórmula de $\mathrm{dd}y$ permite el cálculo de la derivada segunda inversa; en efecto, si dividimos por $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}y$ desaparece ahora el primer miembro de la ecuación y encontramos

$$\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}y^2 = -f''(x)/f'(x)^3$$

que es una fórmula más difícil de obtener de otra manera. La derivada primera inversa en cambio es sencillamente $\mathrm{d}x/\mathrm{d}y = 1/f'(x)$.

Conclusión

La exposición precedente muestra, en mi modesta opinión, que el método clásico de introducir el cálculo diferencial es más sencillo que el que se emplea habitualmente cuyo objeto es reducir dicho cálculo a la aritmética. Esto estaría justificado si el fundamento de la aritmética fuese cosa trivial que no lo es. Y a pesar de ello nadie pone reparo a que los niños aprendan “las cuatro reglas” para manejarse en la vida. Por eso no entiendo que se pongan reparos a que se enseñe la matemática de uso de la manera más sencilla posible.

Otra objeción al método tradicional de introducir el cálculo mediante límites y derivadas es que oculta la relación

$$\mathrm{d}(xy) = x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x$$

que me parece una ofensa a la cultura porque es la idea matemática más genial desde el tiempo de los griegos.