rac.2025.113.1.org02
RACSG.2025;113(01):22-39
Recibido: 25/06/2024 | Aceptado: 31/07/2024

ORIGINAL

SOBRE ECONOMÍA Y LAS CIENCIAS MATEMÁTICAS, FÍSICAS Y NATURALES

ON ECONOMICS AND MATHEMATICAL, PHYSICAL AND NATURAL SCIENCES

Jose M. Vidal-Sanz[1]
1. Universidad Carlos III de Madrid

RESUMEN
El desarrollo de la matemática, la física y otras ciencias naturales ha influido significativamente en la economía como disciplina académica. En ocasiones, esta influencia ha sido bidireccional, especialmente en el campo de la matemática aplicada o la ingeniería. En este trabajo se examinan estas conexiones, a la par que se proporciona una breve introducción al análisis económico.

Palabras clave: Modelos de equilibrio; Microeconomía; Macroeconomía; Ciencia.

ABSTRACT
The development of mathematics, physics, and other natural sciences has significantly influenced economics as an academic discipline. Sometimes, this influence has been bidirectional, especially in the field of applied mathematics or engineering. This paper examines these connections, while also providing a brief introduction to economic analysis.

Keywords: Equilibrium models; Microeconomics; Macroeconomics; Science.

Correspondencia
Jose M. Vidal-Sanz
Universidad Carlos III de Madrid
E-mail: jvidal@emp.uc3m.es

SOBRE EL ORIGEN DE LA DISCIPLINA ECONÓMICA

La *economía* es una ciencia social que estudia cómo las sociedades gestionan y transforman los bienes (productos y servicios) de que disponen, que son limitados, y cómo los asignan a los consumidores para que puedan gratificar o satisfacer sus necesidades, mejorando el bienestar social. Si la publicación de los *Philosophiæ naturalis principia mathematica* de Sir Isaac Newton en el siglo XVI supuso una revolución en la forma de estudiar los fenómenos naturales por medio de modelos matemáticos axiomáticos, las ciencias sociales tardaron mucho más tiempo en adoptar enfoques analíticos comparables, siendo la *economía* la disciplina social que siguió estos pasos de forma más marcada.

Suele atribuirse el nacimiento de la economía como disciplina al pensador escocés Adam Smith (1759, 1776), cuyas ideas fueron complementadas por las contribuciones de múltiples intelectuales a lo largo de los siglos XVIII y XIX (por ejemplo, Jean-Baptiste Say, David Ricardo, Karl Marx, Thomas Malthus, William Petty, Jeremy Bentham, John Stuart Mill, entre otros). Se suele agrupar a estos autores bajo la etiqueta de economistas clásicos (Figura 1). Sus contribuciones son ricas en ideas e intuiciones, y por tanto han tenido una duradera influencia (no solo en la economía contemporánea sino incluso en nuestra concepción del funcionamiento de las sociedades). La aportación de estos

autores está fuertemente influida por el desarrollo del método científico, pero no utilizan modelos de análisis formales (véase Redman 1997). Adam Smith está aparentemente más influido por el trabajo experimental de Newton en *Opticks*, que por la modelización de los *Principia Mathematica*. La economía basada en modelos formales aún tardaría en desarrollarse, y lo haría inspirada en parte los desarrollos de la física y también de las matemáticas.

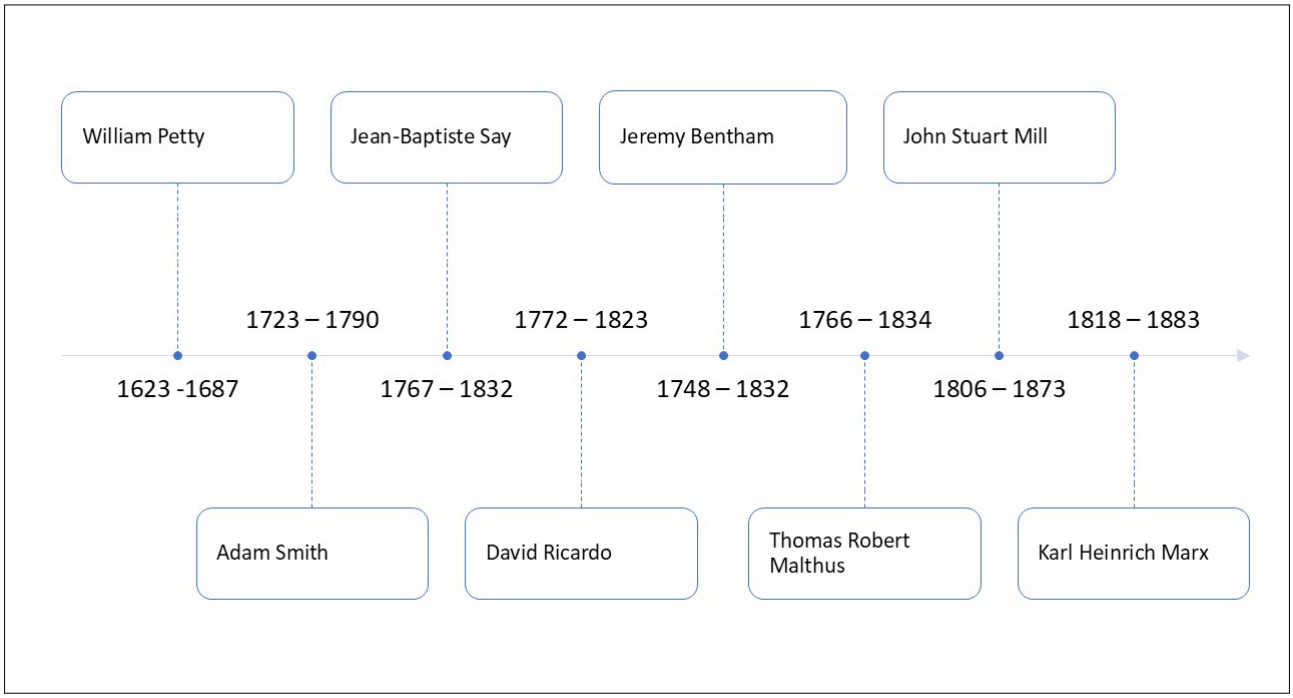

Figura 1. Principales economistas clásicos

¿Cómo se inicia la formalización del pensamiento económico clásico? A finales del siglo XIX, surge una nueva oleada de economistas neoclásicos que comienza a utilizar sistemáticamente ecuaciones matemáticas para reflejar el comportamiento de los agentes que operan en una economía (consumidores, empresas, estados), y el equilibrio que permite compatibilizar dichas fuerzas como la solución del sistema de ecuaciones. La mayoría de estos modelos no se centran tanto en describir el proceso por el que se alcanza el equilibrio, como en caracterizarlo analíticamente, y en estudiar cómo pequeños cambios en factores exógenos al sistema económico pueden afectar al equilibrio. Esta línea de trabajo se extiende hasta bien entrado el siglo XX (véase la Figura 2). Entre otros, cabe destacar la contribución al estudio de la decisión individual del consumidor de Carl Menger (Menger, 1871) y Francis Ysidro Edgeworth (Edgeworth, 1881), así como la de Alfred Marshall, quien desde la Universidad de Cambridge proporciona un gran empuje al uso del cálculo diferencial en economía (un enfoque conocido como *marginalismo*), y que en su tratado *Principios de Economía* (Marshall, 1890) populariza la representación gráfica de la oferta y la demanda como unas tijeras cuyo cruce determina el equilibrio competitivo (Figura 4). Dicha representación había sido introducida por Augustin Cournot (1838), e influyó de forma temprana en las escuelas de ingeniería (Jenking 1870, Dupuit 1844). También cabe destacar el trabajo de Leon Walras de la escuela de Lausana, que introduce la noción de equilibrio general de una economía competitiva en la que muchos agentes (consumidores y empresas) toman decisiones perfectamente racionales a partir de los precios que observan en el mercado, y usa sistemas de ecuaciones para determinar los precios de equilibrio que hacen compatibles todas las decisiones (Walras, 1874). Mientras que en el modelo de Walras los agentes toman los precios del mercado como dados, el

marginalista francés Antoine Augustin Cournot (1838) considera un mercado oligopolista con pocas empresas que se comportan estratégicamente tratando de influir en los precios. El precio de equilibrio de Cournot es un caso particular de *equilibrio de Nash* introducido por John Forbes Nash (1951) en el contexto de la *teoría de los juegos* no cooperativos. Bertrand (1883a, 1883b) critica el trabajo de Walras y Cournot, y propone otro modelo oligopolista con un tipo de equilibrio alternativo, que también es un caso particular de equilibrio de Nash. Vilfredo Federico Pareto (1896-1897) desarrolla el concepto de eficiencia de una asignación económica, y posteriormente estudia la distribución de la renta (Pareto, 1906). Veblen (1900) acuña el término de economistas neoclásicos para estos autores. Otro economista neoclásico relevante es Irving Fisher, que estudia conceptos dinámicos y financieros básicos para la disciplina (Fisher, 1906, 1907, 1930). Unos años más tarde Wassily Leontief explora la interrelación entre distintas empresas actuando a la vez como productoras y compradoras de bienes intermedios (Leontief 1936). El economista británico John Richard Hicks (1939) proporciona un gran empuje a la teoría del consumidor, basado en la noción de función de utilidad ordinal.

Desde la segunda mitad del siglo XX, la visión de un modelo económico deriva principalmente de la monografía *Principles of Economics* de Paul Samuelson (1947). Está basada en su propia tesis doctoral, y proporciona una perspective sintética de los anteriores modelos, teniendo una prolongada influencia a lo largo de múltiples ediciones. Samuelson es muy receptivo a la influencia de la física (de hecho, el propio nombre del texto, al igual que el de la monografía de Alfred Marshall, es una reminiscencia de los *principia mathematica* de Sir Isaac Newton).

A lo largo de este trabajo se introducen aspectos clave de la modelización económica, y se exploran sus conexiones con otras disciplinas científicas

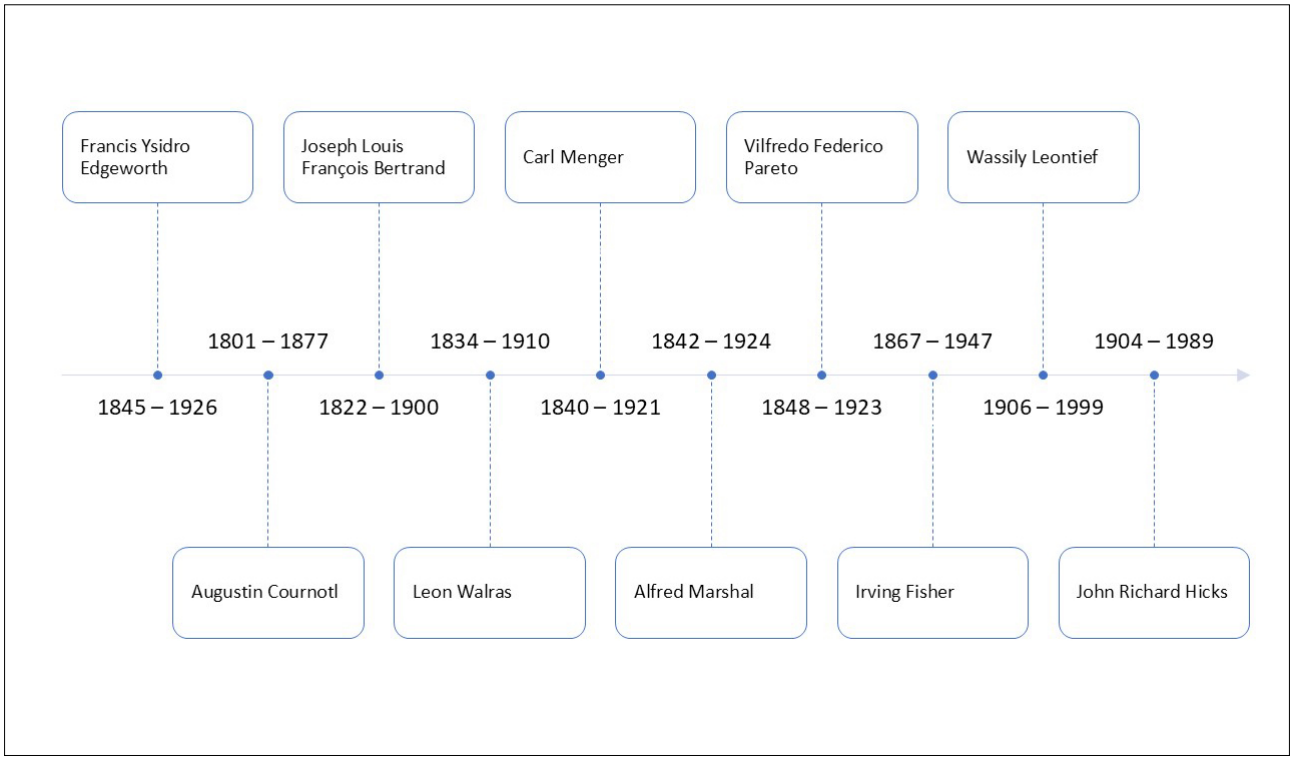

Figura 2. Economistas neoclásicos

LOS MODELOS ECONÓMICOS Y EL EQUILIBRIO

En esencia, un modelo económico considera un espacio vectorial para representar las posibles acciones de los agentes, y por tanto los posibles estados del sistema económico. Los modelos más sencillos utilizan un espacio vectorial Euclídeo, donde un vector y representa un número finito de variables económicas. Por ejemplo, las decisiones de consumo o producción de distintos bienes por parte de consumidores y empresas (que son los agentes económicos básicos). En economía se tratan las unidades de un mismo bien, pero disponibles en distintos periodos de tiempo o localizaciones como si bienes diferentes. Por ello, distintas coordenadas de y pueden utilizarse para decisiones sobre un producto en distintos lugares del espacio o el tiempo. También pueden incluirse en el vector y otras variables, como los precios a los que los bienes son intercambiados en el mercado. Pero trabajar en dimensión finita limita el tipo de análisis que se puede considerar. Los modelos más sofisticados consideran espacios vectoriales de dimensión infinita; por ejemplo, pueden ser espacios formados por sucesiones (para reflejar un plan de consumo o producción a lo largo de periodos temporales discretos) o espacios formados por funciones (si las decisiones se planifican en tiempo continuo), o espacios formados por procesos estocásticos (para incorporar la aleatoriedad inherente a muchas decisiones dinámicas).

Una vez fijado el espacio, el equilibrio y^* es un elemento que resuelve un sistema de ecuaciones $G(y) = 0$ (en algunos modelos G es una correspondencia, y el equilibrio se define requiriendo que $0 \in G(y)$, pero aquí no voy a enfatizar este caso). Normalmente, las distintas ecuaciones que forman parte de $G(y)$ describen el comportamiento de agentes económicos distintos. En equilibrio, el sistema de ecuaciones impone la compatibilidad de las decisiones de los distintos agentes. El sistema de ecuaciones normalmente es no lineal, y para demostrar que tiene al menos una solución se utiliza alguno de los teoremas matemáticos de punto fijo[1], y los requerimientos de este tipo de teoremas han influido en el diseño de los modelos que suelen construirse en economía. Un ejemplo temprano del uso de teoremas del punto fijo es el trabajo del matemático John von Neumann (1937) para demostrar la existencia de cierto tipo de equilibrios en *teoría de los juegos*, también resultados no publicados de Abraham Wald (Düppe y Weintraub, 2016). En modelos relativamente sencillos, a veces puede utilizarse otro tipo de herramientas más simples para probar la existencia (véase por ejemplo Wald, 1951, Greenberg, 1977, Barbolla and Corchón, 1989).

Normalmente, la resolución práctica del sistema de ecuaciones requiere el uso de técnicas computacionales numéricas, excepto para los modelos más simples que suelen tener objetivos pedagógicos. En el caso concreto es que $G(y)$ es continuamente diferenciable en y^* y el Jacobiano $\partial G(y^*)/\partial y$ tiene rango completo y^* es localmente único (en un entorno de dicho punto no hay ningún otro equilibrio), y puede utilizarse el algoritmo de *Newton-Raphson* para resolver el sistema numéricamente. Judd (1998) proporciona una panorámica de los principales métodos numéricos utilizados en economía.

Tipos de espacios vectoriales diferentes pueden requerir herramientas matemáticas distintas, por ejemplo, en un modelo en tiempo continuo el sistema de ecuaciones puede incluir ecuaciones diferenciales. Los modelos que se enseñan en cursos introductorios suelen ser relativamente sencillos, considerando un numero finito de decisiones en un contexto relativamente estático, y se trabaja en espacios vectoriales Euclídeos. Algunos modelos se centran en aspectos muy específicos de la economía, por ejemplo, una empresa o sector pequeño, o un grupo específico de consumidores. Los modelos que incluyen todos los mercados posibles (todos los agentes y todas sus decisiones) se denominan de *equilibrio general*, por contra modelos especializados en un pequeño mercado que consideran todas las otras decisiones como fijadas (por otras personas y comportamientos/ ecuaciones a las que no se prestará atención) se conocen como modelos de *equilibrio parcial*.

[1] ***Por ejemplo, el* teorema de punto *fijo de Brouwer establece que una función continua $f(y)$ definida desde un conjunto no vacío convexo y compacto sobre sí misma, tiene al menos un punto fijo $y^* = f(y^*)$, el nombre de punto fijo enfatiza que al aplicar f este punto no cambia. Tomando $f(y) = y - G(y)$ el teorema de punto fijo garantiza la existencia de una solución y^* a la ecuación $G(y) = 0$. No obstante, el equilibrio y^* puede no ser único.***

ESTÁTICA COMPARATIVA Y LA TERMODINÁMICA

Un sistema económico puede verse afectado por el estado de variables z^0 exógenas a la economía (o consideradas como fijadas en un subsistema económico externo, si estamos en un contexto de equilibrio parcial), y por tanto es conveniente modelar el equilibrio y^* como la solución de un sistema de ecuaciones

$$G(y, z^0) = 0,$$

que bajo condiciones adecuadas de regularidad tendrá soluciones localmente únicas. Bajo las condiciones del *teorema de la función implícita*, existe una una función $y(z)$ diferenciable en z^0, que pasa por el punto (y^*, z^0), y que proporciona el equilibrio $G(y(z), z) = 0$ para todo z en un entorno de z^0. El teorema permite estudiar el impacto de pequeños cambios en las variables exógenas z sobre el equilibrio. Concretamente, si consideramos un espacio Euclídeo, la aproximación diferencial vendría dada por

$$y(z) = y^* + \left[-\left(\frac{\partial}{\partial y}G(y^*, z^0)\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial z}G(y^*, z^0)\right]\cdot(z - z^0) + o(\|z - z^0\|).$$

(expresando el Jacobiano $\partial y(z^0)/\partial z$ dentro del corchete). En algunos casos podemos interpretar z como una variable que puede ser controlada por la autoridad económica para influir en el equilibrio, dirigiéndolo hacia valores preferibles respecto a algún criterio social. En este sentido, la derivada $\partial y(z)/\partial z$ se interpreta como un factor multiplicador del cambio $(z - z^0)$ implementado por la política económica. Es importante remarcar que la interpretación del multiplicador es adecuada solo si el modelo $G(y, z)$ recoge correctamente el cambio en el comportamiento de los agentes de la economía ante cambios de la variable z. Esta tarea no siempre es sencilla, depende del grado de racionalidad que posean, y la influencia puede ser distinta en el corto y el largo plazo. Si nos dejamos fuera del modelo aspectos relevantes, el modelo predecirá mal. Si metemos demasiados aspectos, el modelo será difícilmente aplicable. El grado de complejidad del modelo depende de los objetivos del analista.

Los modelos de equilibrio más utilizados no analizan en detalle el proceso por el que la economía se mueve hacia un equilibrio. Adam Smith describe literariamente este proceso de ajuste como la mano invisible de la economía refiriéndose a las múltiples acciones de todos los agentes, que actúan en la economía como un sistema que se autocorrige hacia su equilibrio. Si el interés del investigador se centra en mercados que suelen encontrarse en equilibrio, estos modelos son suficientes. Pero cuando aparecen desequilibrios frecuentes y tardan un largo periodo de tiempo en ajustarse, entonces es preferible considerar modelos que estudien el desequilibrio, y la estabilidad de los equilibrios locales en el sistema dinámico. Un ejemplo temprano es el modelo Cobweb o de telaraña (Ezekiel 1938, Samuelson 1941).

Un modelo económico normalmente no solo depende de variables exógenas z^0, también puede depender de ciertos parámetros θ que permiten ajustar el sistema a un conjunto de datos mejorando la precisión del análisis, por lo que podemos reformular el equilibrio como la solución de $G(y, z^0, \theta^0) = 0$ Incluso si suponemos que no hay cambios en las variables exógenas z^0, los agentes podrían ocasionalmente cambiar su comportamiento y si es así podemos considerar el equilibrio como una función implícita $y^*(\theta)$ en un entorno de θ^0 y estudiar la sensibilidad del equilibrio a cambios en los parámetros $\partial y^*(\theta)/\partial\theta$ y la aproximación diferencial, similarmente al caso de variables exógenas. Este tipo de análisis se conoce en economía como estática comparativa. porque se refiere a la comparación de equilibrios en situaciones contemporáneas diferentes, pero relativamente cercanas. El influyente economista Paul Samuelson introdujo y desarrolló en profundidad el uso de la estática comparativa inspirado en el principio de termodinámica de Le Châtelier (Samuelson 1941, 1960); para una discusión más detallada sobre dicha influencia, véase Kusumoto (1976) y Milgrom (2006). La idea es diferenciar la ecuación de equilibrio, $\frac{\partial}{\partial y}G(y, z^0)dy + \frac{\partial}{\partial z}G(y, z^0)dz = 0$, las perturbaciones en z generan movimientos tendentes a reestablecer el equilibro, como illustra la Figura 3.

Puede haber múltiples equilibrios localmente únicos, y para cada uno de ellos se puede analizar su comportamiento local. Una economía puede cambiar abruptamente entre ellos sin que sea necesaria una modificación en z^0 o θ^0, típicamente debido a algún aspecto no incluido en el modelo. Sin embargo, los cambios en el equilibrio a menudo se asocian a cambios en parámetros θ^0 (denominados cambios estructurales) o en los factores externos z^0. Estos cambios suelen ser moderados, y de ahí el interés de la estática comparativa.

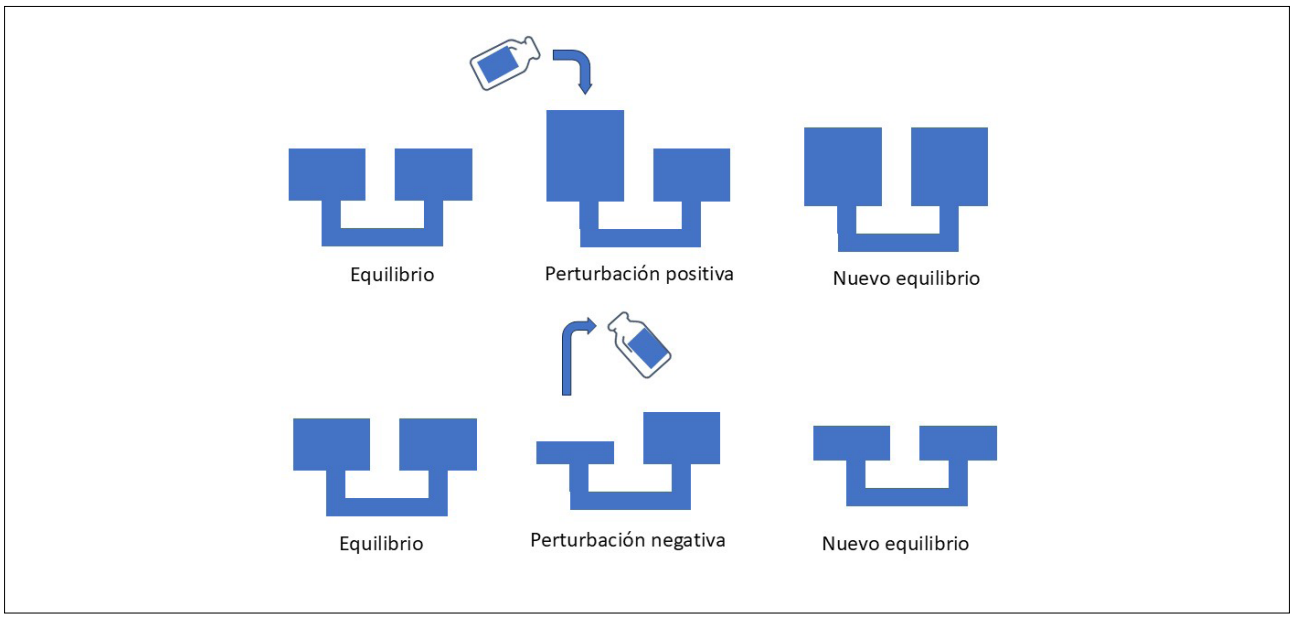

Figura 3. El principio de Le Chatelier ilustrado mediante vasos comunicantes.

ANÁLISIS EMPÍRICO

Anteriormente se ha descrito el equilibrio en un contexto esencialmente determinista. Pero las economías pueden verse afectadas por shocks exógenos aleatorios u inobservables e impredecibles (suelen tener media cero, condicionalemente en z), por lo que podemos considerar modelos donde el equilibrio resuelve un sistema de ecuaciones del tipo

$$G(y, z, \theta^0) = u.$$

que depende de parámetros θ^0 desconocidos. La *econometría* (rama de economía más cercana de la estadística) estudia como estimar el vector de parámetros θ^0 a partir de una muestra de observaciones de (y, z), para que el modelo ajuste óptimamente a los datos conforme a algún criterio estadístico. Es interesante hacer notar la relación temprana entre la economía y la estadística; por ejemplo, el economista escocés William Playfair suele considerarse como la primera persona en utilizar un histograma. Menos conocida es la contribución del economista Francis Ysidro Edgeworth, quien introduce el estimador de *máxima verosimilitud* (véase Neyman 1951, 1961, Pratt, 1976, Hald 1999). El matemático Carl Friedrich Gauss había introducido previamente algunos métodos relacionados. El estimador de máxima verosimiltud es una de las herramientas fundamentales de la estadística, popularizado por Sir Ronald A. Fisher (Fisher 1925a, 1925b, 1935).

Para estimar un modelo estructural usando máxima verosimilitud, suele suponerse una distribución de probabilidad condicional $f(u|z)$ para el error u, que normalmente satisface $E[u|z] = 0$ (dado que un buen modelo estructural no deja un elemento predecible en el error). Posiblemente u es estadísticamente independiente de z. Bajo condiciones de regularidad $G(y, z, \theta^0) = u$ define una función inversa $y = H(z, u, \theta^0)$ (que puede utilizarse en estudios de simulación para estudiar la probabilidad condicional $y|z$), y la función de densidad condicional de $y|z$ viene dada por

$$f(y|z, \theta^0) = f(G(y, z, \theta^0)|z) \left|\frac{\partial G(y, z, \theta^0)}{\partial y}\right|,$$

donde el último factor del lado derecho es el determinante de la matriz Jacobiana de $G(y, z, \theta)$. No obstante, para la estimación es importante que no haya un numero redundante de parámetros. El requisito es que haya un único vector θ^0 compatible con esta distribución (esto se conoce como *identificación*, y existen condiciones que lo garantizan y pueden chequearse en el modelo).

Si el modelo está identificado, dada una muestra $\{(y_t, z_t)\}_{t=1}^T$ de observaciones *idéntica e independientemente distribuidas* (i.i.d.) podemos maximizar (el logaritmo de) la *función de verosimilitud condicional*, es decir maximizar

$$l_T(\theta) = \sum_{t=1}^{T} ln\, f\,(y_t|z_t, \theta) = \sum_{t=1}^{T} ln \left|\frac{\partial G(y_t, z_t, \theta)}{\partial y}\right| + \sum_{t=1}^{T} ln\, f\,(G(y_t, z_t, \theta)|z_t).$$

Las condiciones i.i.d. pueden relajarse en muchos sentidos. El físico Jan Tinbergen contribuyó al desarrollo de modelos econométricos dinámicos. Bajo condiciones de regularidad, el estimador $\hat{\theta}_T$ (el argumento que maximiza la verosimilitud) es consistente respecto al vector de parámetros θ^0 y tiene una distribución asintótica normal. Alternativamente, pueden utilizarse métodos de estimación Bayesiana. Estos estimadores consideran una función de densidad $\pi(\theta)$ arbitraria, llamada distribución a priori. Si $\pi(\theta)$ es continua y $\pi(\theta^0) > 0$, bajo condiciones de regularidad la densidad a posteriori

$$\pi(\theta|\{(y_t, z_t)\}_{t=1}^T) = \frac{\pi(\theta)\prod_{t=1}^T f(y_t|z_t,\theta)}{\int \pi(\theta)\prod_{t=1}^T f(y_t|z_t,\theta)d\theta} = \frac{\pi(\theta)\ e^{l_T(\theta)}}{\int \pi(\theta)\ e^{l_T(\theta)}\ d\theta}$$

converge a una distribución degenerada en θ^0 cuando T tiende a infinito (la consistencia de los estimadores Bayesianos se conocen como teorema de von Mises-Doob). Por tanto, podemos tomar una realización de dicha distribución como estimador (cuando T es suficientemente grande). Además, estos estimadores tienen un comportamiento similar a máxima verosimilitud en grandes muestras (la normalidad asintótica de los estimadores Bayesianos se conoce como teorema de Bernstein-von Mises).

Otro tipo de metodología empírica relevante son los experimentos. Por ejemplo, existe literatura experimental donde los participantes simulan un mercado competitivos en un laboratorio, y se usan los datos para estudiar el equilibrio (por ejemplo, Smith 1962, 1989). Para testear efectos causales, se utilizan experimentos aleatorizados siguiendo el enfoque introducido por Sir Ronald A. Fisher (1926, 1935). Banerjee y Duflo (2017) presentan distintos ejemplos en tratamientos que tratan de aliviear la pobreza. Pero en muchos casos, es poco factible usar experimentos aleatorizados. La econometría ha desarrollado técnicas que tratan de corregir los sesgos derivados de la falta de aleatorización (véase, por ejemplo, Angrist y Pischke 2009, 2010, 2015); aunque se requieren hipótesis más fuertes sobre el sistema estudiado. Para una panorámica general sobre métodos de investigación en ciencias sociales, véase Esteban-Bravo y Vidal-Sanz (2021).

MODELO ESTÁNDAR DE UNA ECONOMÍA COMPETITIVA

Este modelo refleja el planteamiento neoclásico. Un número elevado de agentes toman decisiones racionales sobre consumo o producción de bienes (productos y servicios) basándose en los precios que observan en el mercado (por ello se dice que son precio-aceptantes). Cuando se incluyen todos los mercados de la economía hablamos de modelos de equilibrio general, y el prototipo moderno vendría dado por la contribución de Arrow y Debreu (1954) y Debreu (1959). Dicho modelo no incluye la dinámica o los aspectos financieros de forma realista, y la literatura posterior ha desarrollado extensiones que cubren estos aspectos. Aquí se introduce una versión relativamente estándar, con un número finito de agentes económicos y de variables de decisión. En este contexto, podemos considerar I consumidores y J empresas, que toman respectivamente decisiones de consumo y producción sobre n bienes, donde $n = L \times E \times T \times S$ refleja L distintos productos y servicios (que se diferencian en sus atributos), en T distintos periodos de tiempo, en E localizaciones (una forma básica sería considerar países), bajo S posibles sucesos elementales de la naturaleza (donde solo uno sucederá de forma aleatoria, cada uno con cierta probabilidad).

LOS AGENTES ECONÓMICOS

Las empresas y los consumidores toman respectivamente decisiones racionales de producción y consumo para cada posible vector de precios $p \neq 0$, donde todos los precios son no negativos. A lo largo de esta sección, denotaremos por y_j los planes de producción de la empresa $j = 1.,,,,J$, y por x_i los planes de consumo del consumidor $i = 1,....I$, respectivamente. Obsérvese que, en las secciones previas, al tratar el equilibrio se había utilizado y como un vector genérico. No obstante, en el modelo competitivo estándar esta letra suele utilizarse para las decisiones de la empresa, y en lo sucesivo mantendremos este criterio.

A) Las empresas poseen una tecnología que les permite transformar unos bienes en otros. Las transformaciones posibles se representan por un

conjunto $\mathbb{Y}_j \subset \mathbb{R}^n$, donde las coordenadas negativas representan unidades de factores productivos utilizados (inputs), y las positivas unidades de bienes producidos (outputs). También se asume que $\mathbb{Y}_j$ es (estrictamente) convexo, satisface que $\mathbb{Y}_j \cap \mathbb{R}^n_+ \subset \{0\}$ (para indicar que es imposible producir un output sin usar un input), y contiene al zero, $0 \in \mathbb{Y}_j$ (lo que se conoce como posibilidad de inacción, y asegura que $\mathbb{Y}_j$ no es vacío), y también se asume $\mathbb{Y}_j - \mathbb{R}^n_+ \subset \mathbb{Y}_j$ (la posibilidad de eliminar libremente cualquier bien). Normalmente la tecnología se parametriza usando un conjunto de desigualdades como

$$\mathbb{Y}_j = \{y_j \ : \ F_j(y_j) \geq 0\},$$

donde las decisiones de producción eficientes están en la frontera (es decir, cumplen $F_j(y_j) = 0$). Por ejemplo, si $F_j(y_j) = A_j y_j - b_j$ el conjunto the producción estaría determinado por desigualdades lineales. Dada la tecnología disponible, si la empresa observa un vector de precios $p \geq 0$ con $p \neq 0$, se asume que el objetivo de la empresa es maximizar el beneficio $p \cdot y_j$ sujeto a la restricción tecnológica, es decir la empresa j escoger el plan de producción que resuelve el problema

$$\max_{y_j}\{p \cdot y_j \ : \ F_j(y_j) \geq 0\}$$

Bajo condiciones de regularidad, la solución puede caracterizarse mediante las condiciones necesarias de Karush-Kuhn-Tucker (Karush, 1939, Kuhn y Tucker 1951). Algunos modelos son muy realistas e incluyen múltiples restricciones en la definición de la tecnología, otros son más sencillos y utilizan una sola ecuación para representar la frontera eficiente, en tal caso la decisión óptima se satura (se cumple con igualdad, $F_j(y_j) = 0$) y bajo condiciones de regularidad pueden usarse las condiciones necesarias de Lagrange para problemas de optimización sujeta a una restricción de igualdad. A veces, estas ecuaciones pueden resolverse analíticamente, pero en muchos casos se requiere utilizar algoritmos numéricos. Con tecnologías lineales, esto es un problema de programación lineal. Pero en muchos modelos de equilibrio, la frontera de la tecnología se representa utilizando tecnologías que proporcionan una solución analítica.

La decisión que maximiza el beneficio varía con los precios, y se denota por $y_j(p)$. Bajo convexidad estricta, el *teorema del máximo* de Berge (1963) garantiza que si los precios son estrictamente positivos $y_j(p)$ es una función continua. En este contexto, las coordenadas de $y_j(p)$ son positivas para los outputs o bienes generados por la empresa (que pueden ser tanto productos y servicios finales usados por consumidores, como bienes intermedios utilizados por otras empresas). Cuando las coordenadas son negativas, indican inputs o factores de producción utilizados por la empresa en su proceso de producción. Son cero para los bienes que la empresa no utiliza ni produce.

En muchas tecnologías, un bien que se usa como input no puede ser usado como output, bajo tal *irreversibilidad* la tecnología puede expresarse como

$$Y_j = \{(-y_{j,1}, y_{j,2}) \ : \ y_{j,2} \leq f_j(y_{j,1}), \ y_{j,1}, y_{j,2} \geq 0\}$$

que establece y_{j1} como input, e y_{j2} como output de forma predeterminada. Bajo irreversibilidad de la producción, la maximización de beneficios se expresa como

$$\max_{y_{j,1}, y_{j,2}} \{(p_2 \cdot y_{j,2} - p_1 \cdot y_{j,1}) \ : \ y_{j,2} \leq f_j(y_{j,1}), y_{j,1}, y_{j,2} \geq 0\}.$$

La producción eficiente se produce en la frontera (cuando $y_{j_2} = f_j(y_{j1})$), sustituyendo esta restricción, el problema se expresa equivalentemente como

$$\max_{y_{j,1} \geq 0}(p_2 \cdot f_j(y_{j,1}) - p_1 \cdot y_{j,1}),$$

La solución supone aumentar el uso de factores de producción hasta que se satisfaga la condición necesaria $p_1 = p_2 \cdot \partial f_j(y_{j,1})/\partial y_{j,1}$, el valor marginal de añadir una unidad de un factor productivo iguala al precio p_1 de dicha unidad. Este problema puede ser reescrito equivalentemente utilizando una función de costes[1]. Si se utiliza este tipo de notación, la demanda de factores productivos $y_{j,1}(p)$ toma valores no negativos, y para calcular el equilibrio general habrá que cambiar el signo.

[1] ***En este caso, el problema de la empresa puede reformularse en dos etapas: primero computando la función de coste óptimo, (que proporciona el menor coste posible de producir y_{j2} cuando el precio de los factores es p_1), es decir***

$$\boldsymbol{C_j(y_{j2}, p_1) = \min_{y_{j1}}\{p_1 \cdot y_{j1} \ : \ y_{j2} \leq f_j(y_{j1}), \ y_{j1} \geq 0\}}.$$

Segundo, si el precio del output es p_2, la maximización de beneficio de la empresa puede expresarse como

$$\boldsymbol{\max_{y_{j2} \geq 0}\left(p_2 \cdot y_{j2} - C_j(y_{j2}, p_1)\right)}.$$

donde p_2 es el precio del output. Bajo condiciones de regularidad, la decisión optima satisface la condición necesaria

$$\boldsymbol{p_2 = \frac{\partial C_j(y_{j2}, p_1)}{\partial y_{j_2}}},$$

e invirtiendo esta función se obtiene la curva de oferta de la empresa $y_{j2}(p)$, y el argumento que minimiza el coste de producir dicha oferta es la demanda de factores $y_{j1}(p)$.

Sumando las curvas con las decisiones (ofertas de output y demandas de inputs) de las empresas, se obtiene la *oferta agregada* dada por

$$S(p) = \sum_{j=1}^{J} y_j(p).$$

Es posible que algunas ordenes de empresas se cancelen mutuamente (esto sucede en bienes intermedios, que fabrica una empresa para ser utilizado como un factor productivo por otros), o incluso que alguna coordenada de la oferta agregada sea cero. El valor neto $S(p)$ son los bienes y servicios ofertados/ demandados a los consumidores, dependiendo del signo (por ejemplo, las empresas generalmente demandan trabajo, que es un tipo de servicio que ofertan los consumidores).

B) los consumidores planifican su cesta de consumo. Para sobrevivir, el consumidor debe consumir una cesta de bienes en su conjunto de supervivencia $\mathbb{X}_i \subset \mathbb{R}^n$, que suele suponerse no vacío y convexo. El consumidor tiene un *preorden completo* de preferencias sobre sus posibles decisiones de consumo x_i en $\mathbb{X}_i$, representado por $\succcurlyeq_i$; en otras palabras, puede ordenar los planes de consumo, de forma que $x_i \succcurlyeq_i x_i'$ si y solo si el consumidor i considera que x_i es al menos tan bueno como x_i' (que sea un *preorden completo* significa que cumple las propiedades de ser reflexiva, transitiva, y que puede comparar todos los posibles pares x_i, x_i' de consumo). Bajo condiciones de regularidad, puede probarse la existencia de una función continua $U^i(x)$, conocida como función de utilidad, que caracteriza las preferencias, es decir tal que $x_i \succcurlyeq_i x_i'$ si, y solo si, $U^i(x_i) \geq U^i(x_i')$. Debreu (1954) utiliza argumentos topológicos para demostrar la existencia de esta representación. Aquí se está utilizando la utilidad como un concepto ordinal, que no es interpretable en términos absolutos (no podemos sumar utilidades como si fuera una medición lineal, esto sería la noción de *utilidad cardinal*, descartada hace tiempo). La función de *utilidad ordinal* es útil, porque dada una función de utilidad del consumidor, encontrar el plan de consumo preferido se reduce a maximizar la función de utilidad.

En una economía de competitiva existe la propiedad privada. Los consumidores poseen los recursos existentes, y la distribución de los mismos está dada a priori. El consumidor i posee cierta riqueza o dotación inicial w_i en el interior de $\mathbb{X}_i$ (el consumidor al menos dispone de tiempo que puede ofertar para trabajar, y posiblemente ciertas cantidades de otros bienes), y simplificando un poco supondremos que el consumidor posee una fracción $\theta_{i,j}$ de la empresa j lo que le genera acceso a esta fracción de sus beneficios (donde $\sum_{i=1}^{I} \theta_{i,j} = 1$ para cada empresa j). Dados los precios p, la riqueza del consumidor es

$$v_i = p \cdot w_i + \sum_{j=1}^{J} \theta_{i,j} \left(p \cdot y_j\right),$$

y por tanto consumidor tiene una restricción presupuestaria $p \cdot x \leq v_i$, y el problema del consumidor es maximizar la utilidad subjeto a dicha restricción, es decir:

$$\max_{x \in \mathbb{X}_i} \left\{ U^i(x) \ : \ p \cdot x \leq v_i \right\}.$$

Si la función de utilidad es monótona creciente, el caso más sencillo, la restricción presupuestaria se cumple con igualdad. La solución de este problema es un plan de consumo que es función del precio y la riqueza poseídos por el consumidor, podemos expresarlo como la función $x_i(p, v_i)$. Si la función de utilidad $U^i(x_i)$ es estrictamente cuasicóncava[1] la demanda es una función, que se conoce como la *demanda Marshalliana* del consumidor. Si relajamos este requerimiento, la demanda podría ser una correspondencia. Supondremos por simplicidad que $x_i(p, v_i)$ es una función, y que el *teorema del máximo* garantiza su continuidad. La diferencia $(x_i(p, v_i) - w_i)$ se interpreta como la demanda/oferta de bienes del consumidor i , dependiendo del signo. Demanda bienes en las coordenadas para las que $x_i(p, v_i) > w_i$ y oferta bienes para los que $x_i(p, v_i) < w_i$. El valor óptimo de la utilidad del consumidor se conoce como la *función indirecta de utilidad* $V^i(p, v_i) = U^i\left(x_i(p, v_i)\right)$. El problema del consumidor también puede considerarse utilizando la teoría de dualidad para optimización convexa, considerando el mínimo gasto para alcanzar un cierto nivel de utilidad, este tipo de resultados suele tratarse en los textos de economía.

[1] ***Esto significa que X_i es un conjunto convexo, y para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{X}_i$, con $x_1 \neq x_2$, y todo $a \in (0,1)$, se verifica que $U^i(ax_1 + (1-a)x_2) > min\{U^i(x_1), U^i(x_2)\}$.***

Dado que estamos interesados en el equilibrio, hay que tener en cuenta a todos los consumidores de la economía. La *demanda agregada Marshalliana* es la función

$$D^M(p) = \sum_{i=1}^{I} (x_i(p, v_i) - w_i),$$

que depende implícitamente de los niveles de riqueza v_i. Esta función de demanda neta de los consumidores es relevante para estudiar una pequeña industria, porque en este contexto los cambios de precios no afectan a la riqueza, por ello la demanda *Marshalliana* se utiliza en modelos de equilibrio parcial. Pero en contexto de *equilibrio general*, el cambio de los precios puede afectar al valor de la riqueza v_i, cuando esto se tiene en cuenta se considera la *demanda agregada Walrasiana*

$$D^W(p) = \sum_{i=1}^{I} \left(x_i \left(p, p \cdot w_i + \sum_{j=1}^{J} \theta_{i,j} \left(p \cdot y_j(p) \right) \right) - w_i \right),$$

interpretando como ofertas las coordenadas donde esta expresión es positiva (por ejemplo, los consumidores suelen ofertar horas de trabajo, materias primas, etc.). No solo depende del precio sino de la dotación w_i y los beneficios de las empresas. Nótese que v_i depende de p (aunque cuando sólo se considera un pequeño mercado, como en los modelos de equilibrio parcial, puede tomarse la riqueza v_i como constante). Simplificando un poco la notación, podemos escribir la *demanda agregada Walrasiana* como

$$D^W(p) = \sum_{i=1}^{I} \left(x_i \left(p, w_i, \{\theta_{i,j}\} \right) - w_i \right).$$

En algunos tipos de bienes (como el trabajo) el consumidor oferta, mientras que en bienes de consumo típicamente demanda para poder consumirlos. La continuidad de la demanda Walrasiana (así como las demandas de los consumidores individuales) requieren que w_i esté en el interior de $\mathbb{X}_i$, en caso contrario para algun nivel de precios podría darse alguna discontinuidad.

Conviene hacer notar que, por la estructura de la restricción presupuestaria, y los beneficios de la empresa, ni las decisiones de oferta ni las de demanda Walrasiana se modifican al re-escalar el vector de precios. Podemos dividir p por una constante, y las cantidades ofertadas o demandadas no cambian.

EL EQUILIBRIO COMPETITIVO

Tanto en modelos de equilibrio parcial como general, en el precio p^* de equilibrio todos los planes son compatibles, lo que significa que bajo los precios de equilibrio la funcion global de exceso de demanda, definida como $Z(p) = D(p) - S(p)$ es gual a zero. Es decir, se impone el vaciado del mercado.

El caso más relevante, que se utiliza cuando analizamos amplios sectores de una economía, son los modelos de *equilibrio general*, donde el precio de equilibrio resuelve el sistema de ecuaciones Walrasiano,

$$Z(p) = D^W(p) - S(p) = 0.$$

En el caso en que las decisiones de todos los consumidores satisfagan las respectivas restricciones presupuestarias con igualdad (este es el caso cuando las utilidades son monótonas crecientes, saturando estas restricciones), se satisface para cualquier precio $p \geq 0$ que $p \cdot Z(p) = 0$ (esto se obtiene al sumar todas las restricciones presupuestarias de los distintos consumidores) tal y como sugirió Leon Walras. Esto significa que, si todos los mercados menos uno están en equilibrio, este último también debe estar en equilibrio (es decir, podemos excluir una ecuación del sistema, que no tiene rango completo). Así mismo, sin pérdida de generalidad, podemos multiplicar el vector de precios por una constante sin que ello afecte a las decisiones de consumidores y empresas, por lo que podemos fijar el precio de un bien igual a 1 (de forma que todos los precios se expresen en unidades de dicho bien, al que se le llama bien *numerario*), o podemos normalizar p para que sus coordenadas sumen uno. En cualquier caso, el sistema Walrasiano de equilibrio se resuelve en el subespacio de dimensión $n - 1$. Este es el modelo base para describir las economías competitivas. La resolución práctica de $Z(p) = 0$, generalmente requiere el uso de métodos de computación numérica. Una formulación algo más general del equilibrio Walrasiano puede definirse como la solución p^* del sistema de desigualdades $Z(p) \leq 0$, $p \geq 0$, $p \cdot Z(p) = 0$, donde se permite que algunos bienes tengan precio cero.

Arrow y Debreu (1954) y Debreu (1959) formulan el modelo Walrasiano usando axiomas formales, y derivan teoremas de existencia de equilibrio. El *modelo Arrow-Debreu* se convirtió rápidamente en un

paradigma de rigor en el análisis económico. El modelo competitivo no entra en detalle respecto al proceso que lleva a la economía al precio de equilibrio, considerando implicitamente que se alcanza debido a la mano invisible del mercado. Diversos experimentos muestran como los precios a los que las personas intercambian, tienden a ajustarse hasta que se igualan ofertas y demandas, si bien el ajuste puede llevar algún tiempo. Esta es la razón por la que las economías reales pueden tener algunos sectores están en desequilibrio, esto es más probable cuando existen restricciones institucionales (por ejemplo, restricciones a los precios). No obstante, existen formalizaciones de la idea de un subastador artificial que mueve los precios hacia el equilibrio, usando un sistema dinámico convergente en un proceso descrito como *tâtonnement* (tanteo).

Es posible que en el precio de equilibrio p^* las empresas obtengan beneficios, en el sentido de que $p^* \cdot y_j(p^*) > 0$. A este tipo de beneficios se le denomina en ocasiones como beneficios extraordinarios (para enfatizar que estos beneficios son diferentes del pago de factores productivos de capital, como maquinaria o instalaciones). Cuando el número de empresas de la economía es muy elevado, y pueden entrar en todos los mercados que presenten este tipo de beneficios, la oferta agregada tiende a desplazarse al alza y los precios de equilibrio tienden a reducirse, disminuyendo los beneficios extraordinarios (que en el caso límite tenderían a cero), pero esto es probablemente poco realista y el modelo de equilibrio no lo requiere. No obstante, es razonable esperar que no existan grandes diferencias entre distintos mercados (a no ser que existan barreras legales o tecnológicas que impidan a las restantes empresas competir en los que ofrecen más rentabilidad).

Cuando se estudia un pequeño sector de la economía, el cambio en los precios no afecta apenas al valor de la riqueza de los consumidores (los valores v_i pueden interpretarse como constantes), y por tanto podemos usar un modelo de *equilibrio parcial*, resolviendo el sistema Marshalliano

$$D^M(p) = S(p).$$

Tal y como se ha indicado en la introducción, a menudo se representa gráficamente este sistema mediante el cruce de una curva de demanda Marshalliana y una de oferta, como si fueran unas tijeras (Figura 4). En este gráfico, el argumento se dibuja tradicionalmente en el eje vertical.

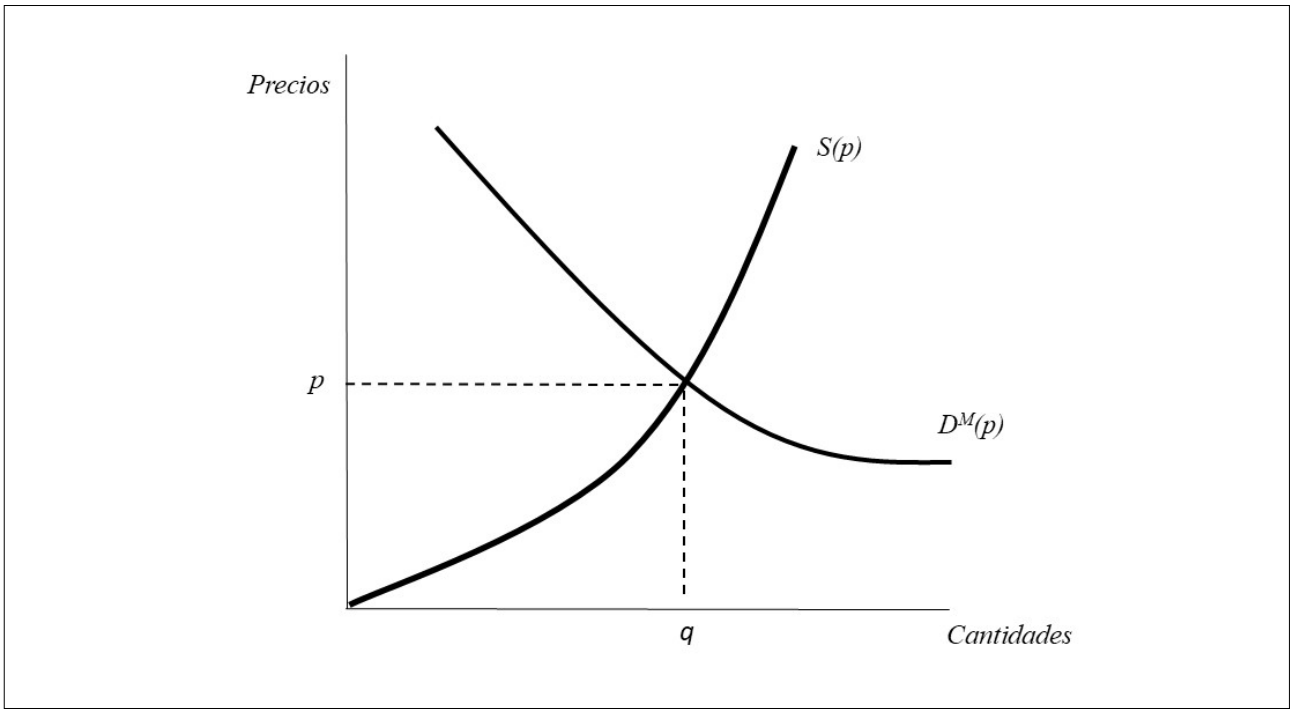

Figura 4. Equilibrio parcial como intersección de la curva de oferta y de demanda.

Aunque se ha presentado el modelo típico de una economía competitiva, existen múltiples aspectos complementarios que pueden considerarse. Por ejemplo, tanto funciones de utilidad como tecnologías pueden ser influidas por factores externos observables z , y también por perturbaciones aleatorias exógenas u, tal y como se discutió en la sección previa, por lo que el modelo puede ser usado para estudiar estática comparativa y simular el impacto de shocks exógenos. Además, utilidades y tecnologías dependen de parámetros θ^0 cuyo valor se estima ajustando el modelo a los datos existentes, y también se puede estudiar la sensibilidad del equilibrio con respecto a cambios en los parámetros usando a la estática comparativa, o mediante simulaciones numéricas.

Como ya se ha mencionado, en el modelo competitivo se consideran economías con un gran número de consumidores y empresas que toman decisiones racionales asumiendo su propia incapacidad para influir directamente en el precio. No obstante, en muchas situaciones el número de agentes es limitado, lo que les confiere poder para tratar de influir en el mismo. Por ejemplo, en mercados oligopolistas, donde el comportamiento estratégico de las empresas puede ser muy diferente. La idea ya había sido sugerida por Cournot. La *teoría de los juegos* facilitó el desarrollo de la *economía industrial* donde las empresas adoptan decisiones estratégicas.

Una ventaja importante del equilibrio competitivo es su descentralización, son las acciones de los agentes las que llevan la economía al equilibrio (el vaciado de mercados), sin necesidad de un organismo centralizado que gestione toda la información desde/hacia los agentes económicos y planifique las asignaciones.

Otra propiedad deseable para una asignación económica es la denominada *eficiencia en el sentido de Pareto* (es decir, que no puede alcanzarse una asignación mejor para alguien sin que otro consumidor sea perjudicado; o en otras palabras que no existe una asignación unánimemente preferible). Existen dos *teoremas de bienestar* que se utilizan para justificar la deseabilidad de los mercados competitivos: el primero establece que bajo condiciones de regularidad, todo equilibrio competitivo es Pareto-eficiente. El segundo, que si se redistribuye la riqueza adecuadamente, cualquier asignación Pareto-eficiente es alcanzable como el equilibrio del mercado. La demostración puede consultarse, por ejemplo, en Mas-Colell, Whinston y Green (1995). La eficiencia del equilibrio falla en economías donde unas pocas empresas o consumidores tienen *poder de mercado*, o cuando existen *no convexidades*. También falla cuando existen *externalidades*, es decir las acciones de un agente económico afectan directamente las preferencias o la tecnología de otro. No obstante, la eficiencia Paretiana es compatible con una fuerte desigualdad. Pareto introduce la distribución de su nombre para estudiar la distribución de la riqueza.

Los modelos que he descrito previamente consideran cada tipo de producto o servicio de forma individual; es decir, cada bien se estudia dentro de un mercado con su propia oferta y demanda. Sin embargo, a veces interesa construir modelos que analizan el comportamiento global de una economía de forma sintética. Estos modelos suelen considerar productos artificiales (índices agregados de bienes) y precios artificiales (índices agregados de precios) de la economía, y se modeliza el equilibrio de este tipo de variables artificiales, a partir del comportamiento de agentes genéricos. La *macroeconomía* es la rama de la economía basada en modelos con productos y precios agregados que tratan de explicar los patrones a gran escala de la actividad económica; surge a partir de los modelos informales de Keynes (1936). Para una introducción a la *macroeconomía* moderna véase Blanchard y Fischer (1989). En contraste, el término *microeconómia* se utiliza para los modelos desagregados. Para una revisión general de los modelos de microeconomía contemporánea, véase Varian (1992), Kreps (2013, 2023), Jehle and Reny (2011), y especialmente Mas-Colell, Whinston y Green (1995).

INCOMPLETITUD DE MERCADOS

Un reto relevante es que, en la realidad, a menudo no existe mercados donde puedan intercambiase todo tipo de bienes posibles. Distintos grupos de consumidores y empresas pueden operar en países distintos con sus propios mercados desconectados, tampoco se intercambian ofertas-demandas entre todos los escenarios posibles de la naturaleza, ni para todos los periodos. En general, es posible partir la economía en submercados independientes no conectados. Cuando esto sucede decimos que los mercados están incompletos. No obstante, es posible que en cada mercado exista algún bien especial, un activo financiero, que puede utilizarse para intercambiar valor dentro de

dicho mercado. Si hay un mercado de activos financieros, entonces el mercado de bienes en su conjunto podría ser completado. La clave es que el sistema financiero sea lo suficientemente rico para que se puedan alcanzar los mismos intercambios que suceden en un mercado donde cualquier intercambio de bienes es posible a priori.

A continuación, se proporciona un ejemplo sencillo. Consideremos una economía arcaica sin empresas, y supongamos que la economía está partida en R mercados (por ejemplo, países), así que los consumidores pueden comprar bienes en cada uno de ellos, pero de forma separada, resolviendo el problema de optimización

$$\begin{aligned} &\max_{x} && U^i(x_1,\ldots,x_R) \\ &sujeto\ a && p_r\cdot\left(x_r-w_r^i\right)=0,\quad r=1,\ldots,R. \end{aligned}$$

El vaciado de mercado, $Z_r(p_r)=\sum_{i=1}^{I}\left(x_r(p_r)-w_r^i\right)=0$, determina el precio en cada mercado. Pero la asignación suele ser Pareto-ineficiente; es posible que en unos mercados r un producto sea poco demandado respecto a la oferta y su precio de equilibrio sea bajo, mientras que en otra nación r' haya una gran escasez de ese mismo producto y que tenga un alto precio (y que haya consumidores insatisfechos que no pueden comprarlo). Por contra, si hubiera un mercado común donde todo pudiera intercambiarse, algunos consumidores podrían mejorar sin que el resto estuviera peor. El origen de esta ineficiencia es la *incompletitud* de mercados.

Introduzcamos ahora para cada país r un activo financiero dinero μ_r , y supongamos que se crea también un mercado financiero adicional donde se intercambian estas monedas (divisas) a precio q_r, de forma que el tipo de cambio entre dos países r,r' está dado por el ratio $q_r/q_{r'}$. Supongamos que para cada país $r=1,,,.R$, el gobierno crea la oferta de dinero a la que denotamos por M_r respectivamente. Ahora, el consumidor resuelve

$$\begin{aligned} &\max_{x,\mu} && U^i(x_1,\ldots,x_R) \\ &sujeto\ a && p_r\cdot\left(x_r-w_r^i\right)=\mu_r^i,\quad r=1,\ldots,R \\ &\square && \sum_{r=1}^{R} q_r\mu_r^i=0. \end{aligned}$$

La ecuación inferior indica que el consumidor no crea valor de la nada a través de operaciones cambiarias, pero puede intercambiar las distintas divisas. Gracias a que puede comprar moneda en un país y cambiarla por moneda de otro en el mercado financiero, ahora puede trasladar valor de una nación a otra. En este contexto, tenemos una demanda de bienes y de dinero, y los precios de equilibrio p_r,q_r de todos los países se obtienen cuando $\sum_{i=1}^{I}\left(x_r(p,q)-w_r^i\right)=0$, y $\sum_{i=1}^{I}\left(\mu_r^i(p,q)-M_r\right)=0$ para cada r. Obsérvese que los gobiernos pueden intervenir en la economía cambiando la oferta monetaria, lo que a su vez influye en los precios, generando un incremento o reducción acorde al sentido de la intervención. Esto, en teoría no afecta al consumo y producción de equilibrio (ya que los precios relativos no varían), pero en la práctica los consumidores pueden verse afectados por diversos sesgos cognitivos, por lo que las intervenciones monetarias pueden tener efectos a corto plazo conforme la economía se ajusta al equilibrio, pero en el largo plazo sin embargo la intervención sería inefectiva en términos reales (a no ser que generase cambios de un equilibrio local a otro). Las intervenciones monetarias que tratan de influir en la economía en el corto plazo manipulando la oferta monetaria y los mercados financieros conforman la *política monetaria* de una economía, y las implementan principalmente los bancos centrales.

El modelo competitivo que se ha introducido en esta sección es esencialmente estático, (aunque los bienes considerados en los vectores x,y pueden incluir distintos periodos). Pero en muchos casos, el enfoque del modelo se centra en un periodo concreto. Esto tiene sentido cuando nos interesa estudiar decisiones a muy corto plazo, pero también cuando el equilibrio a largo plazo es un *steady state* (no cambia). Pero este no es el caso habitual en la mayoría de las economías. Las sendas de equilibrio suelen fluctuar. Por ejemplo, los precios de uno o varios bienes pueden aumentar/bajar de forma sostenida en el tiempo (*inflación/deflación*, respectivamente), y la producción y consumo de la senda equilibrio también pueden cambiar. En tal caso, puede interesar el análisis de la tendencia secular de estas variables (que se estudia con modelos de *crecimiento económico*, y también estudiar la existencia de oscilaciones cíclicas entorno a la tendencia (lo que se conoce como ciclos de negocio o *business cycles*). También es relevante estudiar las posibles perturbaciones aleatorias que impacten en la economía. En contexto dinámico, los agentes pueden desarrollar expectativas sobre aspectos inciertos, y actuar en consecuencia. Por ejemplo, aunque las manchas solares no incidan directamente en el la tecnología (al menos no en la mayor parte de ellas), si los agentes económicos creen que incidirán, su propio comportamiento puede dar lugar a una profecía autocumplida. En otras palabras, las expectativas juegan un papel relevante en los procesos dinámicos bajo incertidumbre.

En muchos modelos las variables de decisión son procesos estocásticos. Esencialmente, basta considerar que x, y toman valores en un espacio vectorial de dimensión infinita, y considerar los precios como operadores lineales $\langle p, x \rangle$. En este tipo de espacios, la herramienta matemática se vuelve más sofisticada, véase por ejemplo Zame (1987), Mas-Colell y Zame (1991). Dependiendo del tipo de modelo dinámico (determinista o estocástico, tiempo continuo o tiempo discreto), pueden utilizarse diferentes herramientas matemáticas para resolver los problemas de la empresa o el consumidor (como el *cálculo de variaciones*, el *control óptimo*, o la *programación dinámica*). Esto hace que los modelos utilicen conceptos habituales en física e ingeniería, como Hamiltonianos, ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman, ecuaciones de Euler, etc.

En la sección previa se introdujo la incompletitud de mercados en el contexto de distintos países. La incompletitud de mercados es habitual también en contextos dinámicos y/o de incertidumbre. Introduciendo activos financieros suficientemente variados y complejos, es posible completar los mercados facilitando la tarea de transmitir valor en el tiempo (esencial para el ahorro y la inversión) y redistribuir riesgos (como en los mercados de seguros). La *economía financiera* se centra en el análisis de este tipo de mercados. El matemático Louis Bachelier (1900) introdujo el movimiento Browniano para estudiar la especulación. Black and Scholes (1973) predicen el precio de derivados financieros con la ecuación del calor. Los aspectos financieros también afectan al gasto público. El estado puede endeudarse unos periodos (necesita financiación), y ahorrar en otros. La reducción de impuestos y el aumento de gasto público (generando deficit en el estado) se utiliza para incentivar la actividad económica cuando el ciclo está en una fase recesiva, por el contrario, el superávit (asociado a mayores impuestos y menos gasto) suele darse cuando la economía está en una fase expansiva que genera tensiones inflacionarias. La deuda pública puede crecer en ciertos periodos siempre y cuando no lo haga a un ritmo más elevado del crecimiento de la economía a la hora de facilitar el pago futuro. Este tipo de decisiones forman parte de lo que se conoce como *política fiscal*.

Otro aspecto relevante en economías dinámicas es el cambio en la estructura de la población. Un ejemplo son los *modelos de generaciones solapadas* (Balasko y Shell 1980, 1981, Geanakoplos 1989, Galor 1992).

OTRAS APORTACIONES DE LAS CIENCIAS

En este trabajo se ha examinado la influencia histórica de las ciencias exactas y naturales en los modelos de economía. Sin embargo, este flujo todavía se mantiene. En la actualidad, algunos físicos se interesan por la economía y exploran modelos que examinan aspectos económicos. Por ejemplo, la *econofísica* utiliza teoría de sistemas complejos para estudiar aspectos económicos evitando el concepto de equilibrio (para una introducción véase, por ejemplo, Sinha y otros 2010), y la *termoeconomía* usa la entropía y las leyes de termodinámica para estudiar procesos económicos (véase Georgescu-Roegen, 1986; Stanislaw y Salamon. 1990). Estas escuelas tienden a adoptan postulados bastante alejados de la teoría económica estándar. Existen otras influencias de distintas ciencias naturales, como sugiere Hirshleifer (1977). Existen modelos evolutivos que tratan de incorporar la revolución Darwinista (Veblen 1898, Nelson y Winter 1982, Bowles 2009). También hay grupos que utilizan técnicas de neuroimagen (Rustichini, 2009). Algunos modelos económicos incluyen aspectos ecológicos, véase Georgescu-Roegen (1971), Nordhaus y Tobin (1972), Nordhaus (1992, 1994). Tasoff y otros (2015) interpretan intercambios microbiales usando economía. Franklin (1983) discute algunos problemas de economía bajo el punto de vista de un matemático.

La ingeniería también ha establecido algunas conexiones interesantes con la economía. El economista neozelandés A. William H. Phillips diseñó un sistema hidráulico para representar y calcular el equilibrio del sistema económico del Reino Unido en 1949. El nombre formal de la también conocida como máquina de Phillips era *Monetary National Income Analogue Computer* (MONIAC). Se construyeron diversos prototipos del MONIAC, y todavía se conservan algunos en diversos museos e instituciones (como la *London School of Economics*, cuyo ejemplar se exhibe en el museo de la ciencia en Londres). La Figura 5 muestra al autor con su máquina[1]. La microeconomía también ha influido

[1] ***Véase una demostración en https://www.youtube.com/watch?v=gkNaZJmii28***

notablemente en la ingenería industrial. Cabe señalar el temprano trabajo de Claude-Louis Marie Henri Navier en la *Échole de Ponts et Chaussées* que utilizo de forma temprana el análisis coste-beneficio de obra pública, cuyo trabajo fue continuado por Joseph Minard (véase Ekelund Jr y Hébert, 1978).

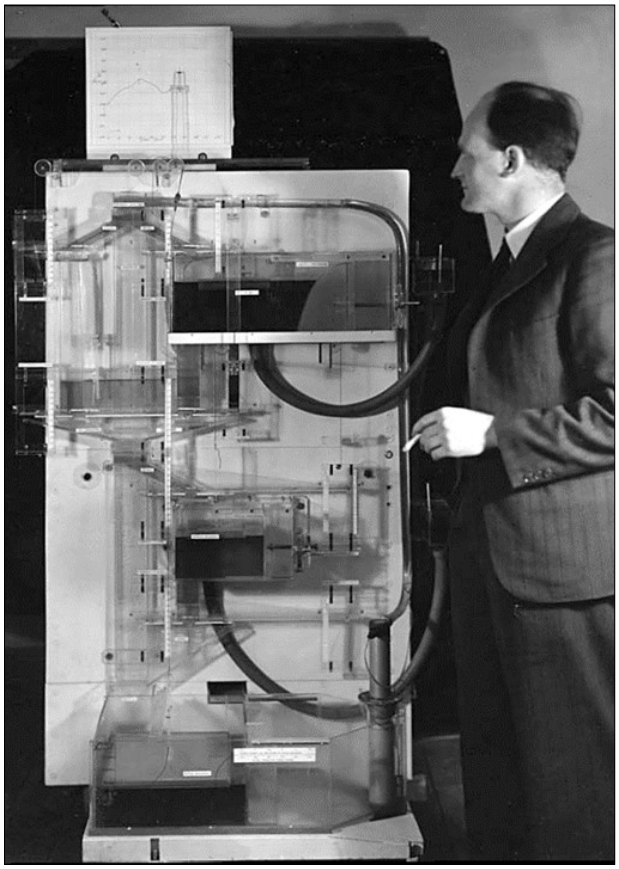

Figura 5. Profesor Phillips con su máquina de cómputo MONIAC. (Fuente: LSE Library).

En todas las ramas de la ciencia, la obtención de datos (mediante sistemas de medición precisos y la observación de nuevas facetas de la realidad) es esencial para el avance del conocimiento, especialmente cuando los datos contradicen algunas predicciones de los modelos existentes. Esto estimula a los investigadores para enriquecer el modelo, volviéndolo más realista y robusto. Pero, aunque lo requieran los datos, el diseño de nuevos modelos no siempre es sencillo. A menudo se necesita un enfoque interdisciplinar. La incorporación de nuevas perspectivas es una forma magnífica de enriquecer el conocimiento. Al final, todas las ciencias son una, y todas ellas tienen un fin común: entender mejor el universo que nos ocupa en sus múltiples y diversas escalas, respondiendo con ello tanto a la curiosidad de la humanidad como a sus necesidades, y esperanzadoramente mejorar el bienestar de todos.

CONFLICTO DE INTERESES

El autor/a de este artículo declara no tener ningún tipo de conflicto de intereses respecto a lo expuesto en el presente trabajo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Angrist, J. D., & Pischke, J. S. (2009). Mostly harmless econometrics: An empiricist's companion. Princeton University Press.

2. Angrist, J. D., & Pischke, J. S. (2010). The credibility revolution in empirical economics: How better research design is taking the con out of econometrics. Journal of economic perspectives, 24(2), 3-30.

3. Angrist, J. D., & Pischke, J. S. (2015). Mastering Metrics: The Path from Cause to Effect. Princeton University Press.

4. Arrow, K. J.; & G. Debreu (1954). Existence of an equilibrium for a competitive economy. Econometrica, 22 (3), 265-290.

5. Bachelier, L. (1900). Théorie de la spéculation. Annales scientifiques de l'École normale supérieure, 17, 21-86.

6. Banerjee, A. V., & Duflo, E. (eds.) (2017). Handbook of field experiments, vol 1 and 2. North-Holland Publishing Company.

7. Balasko, Y., and K. Shell (1980). The Overlapping-Generations Model, I: The Case of Pure Exchange Without Money. Journal of Economic Theory , 23, 281-306.

8. Balasko, Y., and Shell, K. (1981). The Overlapping-Generations Model. II. The Case of Pure Exchange with Money. Journal of Economic Theory , 24, 112-142.

9. Barbolla, R., & Corchón, L. C. (1989). An elementary proof of the existence of a competitive equilibrium in a special case. The Quarterly Journal of Economics, 104(2), 385-389.

10. Berge, C. (1963). Topological spaces, including a treatment of multi-valued functions, vector spaces and convexity, London: Oliver and Boyd. (Traducción al ingllés de: Espaces topologiques: fonctions multivoques, Paris, Dunod, 1959).

11. Bertrand, J. L. F. (1883a). Théorie des Richesses: revue de Thé ories mathématiques de la richesse sociale par Léon Walras. Journal des Savants.

12. Bertrand, J. L. F. (1883b). Recherches sur les principes mathé matiques de la théorie des richesses par Augustin Cournot. Journal des Savants.

13. Black, F.; M. Scholes (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. Journal of Political Economy, 81(3), 637-654.

14. Blanchard, O. J., & S. Fischer (1989). Lectures on macroeconomics. Cambridge, MA: The MIT Press.

15. Bowles, S. (2009). Microeconomics: behavior, institutions, and evolution. Princeton NJ: Princeton University Press.

16. Cournot, A.-A. (1838). Recherches sur les principes mathé matiques de la théorie des richesses. Paris: L. Hachette.

17. Debreu, G. (1954). Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function. (Thrall, M., Davis, R.C. and Coombs, C.H., Eds.), Decision Processes, New York: John Wiley and Sons; pp. 159-165.

18. Debreu, G. (1959), Theory of value: An axiomatic analysis of economic equilibrium. N 17, Cowles Foundation Monographs. New Haven: Yale University Press.

19. Düppe, T., and Weintraub, E. R. (2016). Losing Equilibrium: On the Existence of Abraham Wald's Fixed-Point Proof of 1935. History of Political Economy, 48 (4), 635-655.

20. Dupuit, J. (1844). On the measurement of the utility of public works. International Economic Papers, 2 (1952), 83-110.

21. Edgeworth, F. Y. (1881), Mathematical psychics: An essay on the application of mathematics to the moral sciences, London: C. Kegan Paul and Co.

22. Ekelund Jr, R. B., & Hébert, R. F. (1978). French engineers, welfare economics, and public finance in the nineteenth century. History of Political Economy, 10(4), 636-668.

23. Esteban-Bravo, M.; and J. M. Vidal-Sanz (2021). Marketing Research Methods: Quantitative and Qualitative Approaches. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

24. Ezekiel, M. (1938). The cobweb theorem. The Quarterly Journal of Economics, 52(2), 255-280.

25. Felipe, J. and Fisher, F. M. (2003). Aggregation in Production Functions: What Applied Economists Should Know. Metroeconomica 54, (2 & 3), 208-262.

26. Fisher, I. (1906). The Nature of Capital and Income, New York: Macmillan.

27. Fisher, I. (1907). The Rate of Interest: Its nature, determination and relation to economic phenomena. New York: Macmillan.

28. Fisher, I. (1930). The Theory of Interest: As determined by impatience to spend income and opportunity to invest it. New York: The Macmillan Company; (1954 reprint, New York: Kelley and Millman).

29. Fisher, R. A. (1925a). Statistical Methods for Research Workers . Edinburgh: Oliver and Boyd

30. Fisher, R. A. (1925b). Theory of statistical estimation. Proc. Cambridge Philosophical Society, 22, 700–725.

31. Fisher, R. A. (1926). The Arrangement of Field Experiments. Journal of the Ministry of Agriculture, 33, 503-513.

32. Fisher, R. A. (1935). The Design of Experiments. Edinburgh: Oliver and Boyd, (9th ed. in Macmillan, 1971).

33. Franklin, J. (1983). Mathematical methods of economics. The American Mathematical Monthly, 90 (4), 229-244.

34. Galor, O. (1992). A Two-Sector Overlapping-Generations Model: A Global Characterization of the Dynamical System. Econometrica, 60 (6), 1351-1386.

35. Geanakoplos, J. (1989). Overlapping generations model of general equilibrium. (Eatwell, J.; M. Milgate, and P. Newman, eds.) General Equilibrium. London: Palgrave Macmillan (pp. 205-233).

36. Georgescu-Roegen, N. (1971). The Entropy Law and the Economic Process. Cambridge, MA: Harvard University Press.

37. Georgescu-Roegen, N. (1986). The entropy law and the economic process in retrospect. Eastern Economic Journal, 12(1), 3-25.

38. Greenberg, J. (1977). An elementary proof of the existence of a competitive equilibrium with weak gross substitutes. The Quarterly Journal of Economics, 91(3), 513-516.

39. Hald, A. (1999). On the History of Maximum Likelihood in Relation to Inverse Probability and Least Squares. Statistical Science, Vol. 14(2), 214-222.

40. Hicks, J. R. (1939, 2nd ed. 1946). Value and Capital: An Inquiry into Some Fundamental Principles of Economic Theory. Oxford: Clarendon Press.

41. Jehle, G. A. and Reny, P. J. (2011), Advanced Microeconomic Theory (Third Edition), Prentice Hall.

42. Jenkin, H. C. F. (1870). The Graphical Representation of the Laws of Supply and Demand, and their Application to Labour. (Sir. Alexander Grant, ed.) Recess Studies. Edinburgh: Edmonton and Doublas (Ch. IV, pp. 151-185).

43. Judd, K. L. (1998). Numerical methods in economics. Cambridge, MA: The MIT Press.

44. Kuhn, H. W. & Tucker, A. W. (1951). Proceedings of 2nd Berkeley Symposium, Nonlinear programming. Berkeley: University of California Press.

45. Karush, W. (1939). Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Constraints. M.Sc. Dissertation, Dept. of Mathematics, University of Chicago.

46. Keynes, J. M. (1936). The General Theory of Employment, Interest, and Money. London: Mcmillan.

47. Kreps, D. M. (2013). Microeconomic foundations I: choice and competitive markets. Princeton, NJ: Princeton University Press.

48. Kreps, D. M. (2023). Microeconomic foundations II: Imperfect competition, information, and strategic interaction. Princeton, NJ: Princeton University Press.

49. Kusumoto, S. I. (1976). Extensions of the Le Chatelier-Samuelson principle and their Application to Analytical Economics–constraints and economic analysis. Econometrica, 44(3), 509-535.

50. Leontief, W. W. (1936). Quantitative input and output relations in the economic system of the United States. The Review of Economics and Statistics, 18 (3), 105-125.

51. Marshall, Alfred (1890), Principles of Economics, Macmillan.

52. Mas-Colell, A.; Whinston, M. D.; & Green, J. R. (1995), Microeconomic theory, New York: Oxford university press.

53. Mas-Colell, A., & Zame, W. R. (1991). Equilibrium theory in infinite dimensional spaces. Handbook of mathematical economics, Vol. 4, North-Holland. (pp 1835-18984).

54. Menger, Carl (1871), Grundsätze der Volkswirtschaftslehre (Principles of Eonomics), Austria, Braumüller.

55. Milgrom, Paul (2006). Multipliers and the LeChatelier principle. (Michael Szenberg, Lall Ramrattan, and Aron A. Gottesman; eds) Samuelsonian Economics and the twenty-first Century, Oxford University Press, (pp. 303-10).

56. Nash, J. (1951). Non-cooperative games. Annals of mathematics, 54(2), 286-295.

57. Nelson, R.; & Winter, S. (1982). An Evolutionary Theory of Economic Change. Cambridge, MA: Belknap Press of Harvard University.

58. Neyman, J. (1951). Review of Contributions to Mathematical Statistics by R. A. Fisher. Scientific Monthly, 72, 406-408.

59. Neyman, J. (1961). Discussion of Rao (1961). Bulletin of the International Statistical Institute, 38(1), 193-200.

60. Nordhaus, W. D. (1992). The "dice" model: Background and structure of a dynamic integrated climate-economy model of the economics of global warming. Discussion Paper No. 1009; Cowles Foundation for Research in Economics, Yale University.

61. Nordhaus, W. D. (1994). Managing the Global Commons: The Economics of Climate Change. Cambridge, MA.: MIT Press.

62. Nordhaus, W. D. & Tobin, J. (1972), Economic Research: Retrospect and Prospect, Volume 5, Economic Growth. NBER Books.

63. Pareto, V. F. (1896-1897). Cours d'économie politique profess é à l'Université de Lausanne, tome premier et tome second. Lausanne: F. Rouge.

64. Pareto, V. F. (1906). Manuel d'e ' conomie politique. Milano: Societa' Editrice Libraria; (French edition; Manuel d'e ' conomie politique. Paris: Giard et Brie're, 1909).

65. Pratt, J. W. (1976). F. Y. Edgeworth and R. A. Fisher on the Efficiency of Maximum Likelihood Estimation. Annals of Statistics, Vol. 4 (3), 501-514.

66. Redman, D. A. (1997). The Rise of Political Economy as a Science: Methodology and the Classical Economists, Cambridge, MA: MIT Press.

67. Rustichini A (2009). Neuroeconomics: What have we found, and what should we search for? Current Opinion in Neurobiology, 19 (6), 672-677.

68. Samuelson, P. A. (1941). The stability of equilibrium: comparative statics and dynamics. Econometrica, 9(2), 97-120.

69. Samuelson, P. A. (1947). Foundations of Economic Analysis. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

70. Samuelson, P. A. (1960). An extension of the LeChatelier principle. Econometrica, 28(2), 368-379.

71. Sinha, S.; Chatterjee, A.; Chakraborti, A.; & Chakrabarti, B. K. (2010), Econophysics: an introduction. New York: John Wiley & Sons.

72. Smith, V. L. (1962). An experimental study of competitive market behavior. Journal of Political Economy, 70(2), 111-137.

73. Smith, V. L. (1989). Theory, experiment and economics. Journal of Economic Perspectives, 3(1), 151-169.

74. Stanislaw, S. & Salamon, P. (eds.) (1990). Finite-Time Thermodynamics and Thermoeconomics. Taylor & Francis.

75. Tasoff, J., Mee, M. T., & Wang, H. H. (2015). An economic framework of microbial trade. PloS one, 10(7), e0132907.

76. Varian, H. R. (1992). Microeconomic analysis (third edition). WW Norton and Company.

77. Veblen, T. (1898). Why is economics not an evolutionary science? The Quarterly Journal of Economics, 12(4), 373-397.

78. Veblen, T. (1900). The preconceptions of economic science. The Quarterly Journal of Economics, 14 (2), 240-269.

79. von Neumann, J. (1937). A Model of General Economic Equilibrium. (K. Menger, editor), Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, 1935-36. 1945 Translation, Review of Economic Studies, 13 (1),1-9.

80. von Neumann, J.; & Morgenstern, O. (1947), Theory of games and economic behavior (2nd ed), Princeton, N. J., Princeton University Press, (first edition from 1944).

81. Wald, A. (1951). On some systems of equations of mathematical economics. Econometrica, 19 (4) 368-403.

82. Walras, L. (1874). Éléments d'économie politique pure, ou théorie de la richesse sociale, Paris et Lausanne; (definitive edition 1926, English translation by Jaffé, W., 1954. Elements of Pure Economics, or, the theory of Social Choice, Allen and Unwin).

83. Zame, W. R. (1987). Competitive equilibria in production economies with an infinite-dimensional commodity space. Econometrica, 55(5),1075-1108.

Si desea citar nuestro artículo:

Vidal-Sanz JM. Sobre Economía y las Ciencias Matemáticas, Físicas y Naturales. RACSG.2025;113(01):22-39. rac.2025.113.1.org02