REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

LA ESTRUCTURA DE LOS ESPACIOS RACIONALES Y SUS CONSECUENCIAS CRISTALOMORFICAS

DISCURSO

LEIDO EN EL ACTO DE SU RECEPCION

POR EL

EXCMO. SR. D. CLEMENTE SAENZ GARCIA

Y

CONTESTACION

DEL

EXCMO. SR. D. ALFONSO PEÑA BOEUF

EL DIA 27 DE FEBRERO DE 1963

DOMICILIO DE LA ACADEMIA:
VALVERDE, 22 - TELEFONO 221 25 29
MADRID, 1963

Depósito Legal M. 2.381 - 1963

TALLERES GRÁFICOS VDA. DE C. BERMEJO.—J. GARCÍA MORATO, 122.—MADRID

DISCURSO

DEL

EXCMO. SR. D. CLEMENTE SAENZ

TEMA:

LA ESTRUCTURA DE LOS ESPACIOS RACIONALES Y SUS CONSECUENCIAS CRISTALOMORFICAS

Excmos. señores; señoras, señores:

Si es verdad que la Historia obliga, fuerza es también que la Historia abrume con su peso cuando encarna un legado de titanes cuyo cumplimiento no se puede excusar. Colocado que estoy en este lugar por una serie de circunstancias fortuitas que no es momento de analizar, me ocurre en cierto modo lo que al alpinista incipiente o poco avezado que, después de haber escalado atolondradamente un cantil, vuelve la vista atrás y siente vértigo, imposibilitado ya de retroceder y asustado ante la posible caída.

Más de cien años de vida cuenta ya esta docta Corporación, y sobre la arista montañera que me ha sido designada veo marcadas las huellas de hasta cuatro atletas del científico saber que durante tal tiempo la escalaron, cuya abrazada excede con mucho a mis pobres facultades, sin que metas y señales dejen de ofrecérseme como estímulo y ejemplo.

De 1847 a 1867, y con carácter de fundador, lleva la medalla que la Real Academia ha tenido a bien consignarme el General de Artillería D. Francisco de Luxán y Miguel Romero, Presidente de la primera Comisión encargada de formar el Mapa Geológico de España, personaje muchas veces evocado en mi rebusca y hallazgo de nuevos yacimientos de la *Vicarya Lujani*, fósil infracretácico dedicado a su memoria por el geólogo descubridor de la especie y también ilustre académico, Vilanova. Buen comienzo es éste: patrocinio de hombres que se dedicaron a la exploración científica de nuestro suelo, y que colocaron los primeros jalones del conocimiento de su estructura; rasgan, con la poderosa linterna de su sapiencia, el velo negro de las tinieblas que envuelven a lo que debajo yace, y a su conjuro son legión los que acuden a disfrutar de la lectura de las páginas de la Historia geológica de nuestra Nación, inscrita en el libro de los estratos, con apasionantes ilustraciones de formas petrificadas. Se inaugura la brillante escuela de los geólogos españoles de la segunda mitad del siglo XIX, que íntegramente ha pasado por esta docta Casa, y de la que son segunda y tercera generación los del siglo xx, representación dignísima de los cuales toma también asiento en esta misma sala.

A la Geología sucede la Zoología. De 1867 a 1895 ocupa el sitial de la Academia D. Manuel María José de Galdo y López, autor de un excelente trabajo de aquella materia que todavía se consulta. Era Doctor en Ciencias y Medicina, y ostentando la cátedra de Historia Natural del Instituto del Cardenal Cisneros, fue nombrado director del mismo. Entre otros cargos que tuvo figuran los de Consejero de Instrucción Pública, Diputado y Senador del Reino, y miembro de diversas Sociedades científicas.

Entre 1895 y 1934 una estrella de primera magnitud refulge y deslumbra en el ambiente de esta Casa. El nombre y renombre de D. Santiago Ramón y Cajal, cuyo busto en piedra nos preside, lo dicen todo y me excusan de extenderme en rememoraciones. Jamás hasta él la ciencia española tuvo tan ecuménica penetración con sus trascendentales descubrimientos en los campos de la Biología, de la Neurología y de la Histología, y del Premio Nobel que en 1906 le fuera otorgado, fue en cierto modo partícipe la Patria que a tan gran patriota engendró, y cuyo amor lloraba en sus augurios pesimistas y en su estimulante literatura. Muchas fueron sus consignas: prevalecen entre otras las de la supremacía de la Ciencia pura sobre la aplicada, y la de la ambientación de toda especialidad en la universalidad del conocimiento humano. Porque según frase que le he oido atribuir, «el médico que no sabe sino Medicina, no es ni médico siquiera».

Y hete aquí cómo su discípulo y sucesor en la Academia (entre 1934 y 1960), D. Gregorio Marañón y Posadillo, ha cumplido sin vacilación el encargo del Maestro.

Por mor del deber, pero asimismo de la agradable voluntad, me toca extender en el panegírico de otro grande hombre recién desaparecido: nuevo empequeñecimiento mío al considerarme inadecuado juez e inadecuada medida de lo que me toca medir y apreciar, labor de la que, también y por fortuna, me salva el hecho de no tener que descubrir un nuevo Mediterráneo, que está a la vista de todos cuantos a su orilla estamos viviendo.

¡Qué voy a decir y qué no voy a decir de Marañón!

Los periódicos, las revistas, las conferencias, la radio han pretendido, en vano, agotar el tema de su biografía con motivo de su muerte. Desaparece con Marañón un eminente biólogo, un médico eminente, un eminente escritor, un eminente historiador, un amante hasta la eminencia de las Bellas Artes: todo en superlativo. ¡Y qué otro grande ejemplo! A los que libamos vagabundos de flor en flor por el primoroso jardín de la Ciencia, su figura, como la de Cajal, nos sirven de edificación; mas ¡qué sensación de anonadamiento nos domina al tener que mirar tan arriba para contemplar una talla de gigante! ¡Cómo quisiéramos tardíamente crecer para disminuir un poco el valor del ángulo con que el árbol de la selva domina al arbusto que a su sombra crece!

No es de este lugar, pero tampoco estorba en él, la recordación del Marañón literato y analista psicólogo que se descubre en su «Don Juan», en las biografías de Enrique IV, del Conde Duque de Olivares, de Tiberio, de Antonio Pérez y de otros muchos de sus trabajos y de ensayos, tesoros de definitiva exhumación histórica, en la que no se ha desdeñado el enfoque con éxito de la poderosa lente de los conocimientos científicos del escritor.

Si abandonando la parcela vocacional pasáramos a considerar la profesional de D. Gregorio, abocamos al inmenso campo de la Medicina, recorrido por él en infinitas direcciones con pasos bien marcados, pero cuyo seguimiento constituye, por su prodigalidad, laberinto. Libros, monografías, publicaciones de revistas, magistrales lecciones de cátedra, intervenciones casuísticas, consultas y diagnósticos imposibles por su número y circunstancias de recoger y recopilar, etc., etc. Quedan muchas de estas actuaciones dispersas en la gratitud de los pacientes y en el recuerdo, pero en la letra escrita y en la imprimación de una Escuela creada, permanece como hito la obra ingente de sus estudios acerca de Endocrinología, Fisiología y Patología de las glándulas de secreción interna, tan entrelazados con los de todas las ramas del funcionalismo biológico, seguidas también con interés por tan eminente médico.

Y el tal interés parece acrecentarse por cuanto el campo considerado de la Ciencia aplicada no tiene marcadas fronteras con el de la Ciencia pura y se nos antoja que es a éste, al de la Biología general, al que se sentía más atraído Marañón, por la elevación que tiene sobre las miserias de la tierra rasante. Las puertas de esta docta Casa le fueron franqueadas por esa vía y a ella accedió con su acostumbrada prodigalidad.

El que esta memoria lee hubo de tratar con D. Gregorio por las fechas de su designación como Académico, y le place recordar una faceta de la actividad del Doctor que le parece no haber sido recogida por sus múltiples biógrafos. Es la de su patrocinio a los estudios de las Ciencias de la Tierra.

En 13 de junio de 1932, por dimisión del Marqués de Selva-Alegre, D. Eloy Bullón, pasó Marañón a ocupar la presidencia de la Sociedad Geográfica nacional, a la que yo pertenecía y pertenezco, y cuya Secretaría perpetua ocupaba el también Secretario perpetuo de esta Academia, inolvidable José María Torroja y Miret.

Se planteó, por el entonces capitán Iglesias, un viaje de exploración del Amazonas que la Sociedad, con su presidente a la cabeza, hubo de acoger con júbilo. Los preparativos más importantes se tradujeron en la construcción de un pequeño buque, el «Artabro», que debía de llevar a cabo la aventura, y en conmemoración llegó a emitirse un sello de Correos, cuya posesión tiene hoy cierto interés para los filatélicos. La Geográfica tuvo su representación oficial en el acto de la colocación de la quilla en los astilleros, y se realizó una expedición de entrenamiento al Río Muni, en la que participaron algunos miembros de la Sociedad.

Los vaivenes de la política en los tiempos sucesivos hicieron abortar la empresa, y el «Artabro» fue hundido por los rojos en la bahía de Málaga en su fuga precipitada de la ciudad. Puesto de nuevo a flote se halla hoy, creo, en servicio del aprendizaje de la Marina de Guerra.

Mayor interés mostró todavía Marañón por otro intento que, aunque en los astronáuticos tiempos que corremos pueda parecer insignificante, tuvo en su día sonora repercusión. Fue el caso que, en mayo de 1931, el profesor belga Piccard ascendió por primera vez a la estratosfera en la cabina acorazada de un aerostato, hazaña que repitió el año siguiente, llamando la atención del mundo entero. Constituyó empeño de un compatriota nuestro, el teniente coronel Herrera, el acceso a tan elevadas altitudes «a la española», esto es, sin protección de cabina alguna. Las tres dificultades principales de la empresa: temperatura, falta de respiración y baja presión externa, se resolvían científicamente mediante pares termoeléctricos, una escafandra que era anticipo del invento de la de los actuales «hombres ranas», y una vestimenta inspirada en el personaje anuncio de los neumáticos Michelín, que impediría el estallido del explorador de las alturas.

Las reuniones de la «Geográfica» para tratar del tema recordaban un poco a las del Gun-Club de Julio Verne en su novela del «Viaje a la Luna». Marañón presidía y el Secretario, sin el garfio de Míster Maxton, levantaba acta minuciosa de todos los acuerdos con la simpática gravedad que todos recordamos. Se nos pedía colaboración económica a los consocios que supliera a la indiferencia estatal, y aunque algunos no hacíamos otra cosa más que comprobar lo desinflado de nuestros bolsillos, el mecenazgo del Presidente era lección y estímulo, y adelante íbamos con nuestros propósitos. La verdad yo creo que era la de un fondo de escepticismo en todos, con la salvedad del héroe futuro, acerca del resultado de nuestros esfuerzos.

Pero las cosas siguieron su marcha sin pérdida de rumbo: hubo cartas alentadoras de Piccard; un viaje de Herrera a Polonia, tras de una correspondencia, que nos fue leída, de dos aeronautas soviéticos sedicentes émulos del belga, viaje que acabó al recibir, como vulgarmente se dice, un «portazo en las narices» a la entrada de la aduana de Rusia; hubo, finalmente, el proyecto definitivo del globo sustentador con sus cálculos, y la oferta de construcción por una casa alemana especializada, con su presupuesto y convenio de plazo de entrega. Todos estuvimos palpando la muestra de guatepercha ofrecida por aquella casa, con lo que llegó el momento de tomar decisión. La cosa iba en serio.

Aún recuerdo la llamada a la reflexión de los consocios por parte de nuestro Presidente, puesta la mano en el pecho, sin desdeñar cortésmente las protestas de seguridad del presunto explorador del espacio cuya vida se jugaba.

Otras iniciativas fueron consideradas en el mismo período directivo de Marañón, entre ellas la del túnel bajo el estrecho de Gibraltar de Juvenois; la idea de un nuevo diccionario Madoz de D. Pedro Novo; la del mapa del Imperio romano de la UGI, etc., etc. Los avatares políticos de aquellas fechas no fueron muy propicios a su desarrollo, y en 1935 hubo de cesar D. Gregorio en el cargo presidencial.

La faceta humana de nuestro biografiado se muestra también patente en estas antedichas actuaciones, y culmina cuando, perpetuado en la persona de Calvo Sotelo el crimen de Estado sin precedentes que marcó el estallido de nuestra Guerra de Liberación, no se recató en apostrofar en público al Gobierno del Frente Popular, y se exila voluntariamente, para sustituir el frío «no es esto» que antes colectivamente formulara un fracasado intelectualismo utópico, por el cálido y eficiente «es esto otro», expresado en individual, concreta y simpática actuación familiar.

* * *

Paso a ocuparme del tema que ha de ser objeto central de esta conferencia, relativo a los fundamentos matemáticos de la Cristalografía geométrica, y que titulo:

LA ESTRUCTURA DE LOS ESPACIOS RACIONALES Y SUS CONSECUENCIAS CRISTALOMORFICAS

Introducción.

El carácter discreto y la distribución de las moléculas en las arquitecturas que considera la Cristalografía, coloca a dicha ciencia en íntima relación con la Teoría de los Números. Es disciplina, ésta de la Aritmética de los enteros, erizada de dificultades, que se allanan al pasar al Análisis del continuo, del cual, por otra parte, es hoy cosa sabida que dista mucho de representar la organización del mundo microfísico.

Entre el campo discreto de los números naturales y el continuo de los números reales, existe otro intermedio, semicontinuo diremos, que anega al primero y que está sumergido en el segundo. Se trata ahora del ámbito de los racionales, cuya consideración lima muchas veces las dificultades antes aludidas.

A la luz de sus propiedades, cobra la Cristalografía geométrica espectaculares reflejos que su ley de las modificaciones racionales hace ya prever ; se distinguen matices y circunstancias que los libros especializados dejan inadvertidos, y que resulta bello y entretenido mostrar. Varios años ha dedicado el que esto lee a su búsqueda, y son muchos los cientos de cuartillas que ha emborronado en su captación. El querer exponerlos todos en una sola conferencia fuera pretensiòn tan absurda como la de transportar la cabida de un cántaro en un vaso.

No puedo resistir, sin embargo, a la tentación de hacer, de un muy liviano bosquejo de sus resultados, el objeto del tema que hoy he de exponer, y que he escogido con amor de entre otras posibilidades. Ignoro si con el breve tiempo de que dispongo lograré siquiera parte de mi objetivo, pero, en todo caso, me ofrezco a desarrollar ampliamente las teorías que condenso, ante quien sienta curiosidad por ellas.

Grupos aditivos de comensurabilidad.

Antes de entrar en materia debo de exponer algunas ideas acerca de lo que llamaré grupos aditivos de comensurabilidad.

Dado un número abstracto, o una magnitud concreta α_1 provista de un coeficiente racional y variable g_1, el producto monomio $g_1\ \alpha_1$ define el conjunto o grupo de las magnitudes comensurables con α_1. Si se trata de números y α_1 es racional, se forma el conjunto de los números racionales, y si fuera irracional quedaría definido el de los irracionales comensurables con la base α_1.

Llamaré raíz elemental a la raíz cuadrada, bien de un número primo, bien del producto de dos o más primos diferentes, como $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, ..., $\sqrt{30}$, ..., etc.

La raíz cuadrada de un número racional distinto de cero (*) es siempre, y de forma única, descomponible en producto de un racional por una cierta raíz elemental. La raíz elemental de un número es la misma del inverso.

$$\sqrt{\frac{5}{12}} = \frac{1}{6}\sqrt{15} \quad ; \quad \sqrt{\frac{12}{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{15}\,.$$

Las raíces elementales pueden servir de base de unos grupos monomios, cuyo conjunto llamaremos de los números semirracionales o irracionales cuadráticos.

Dos números o magnitudes no comensurables α_1 y α_2, tomados como bases, definen, mediante los coeficientes racionales g_1 y g_2, el grupo binomio (bidimensional, bimodular)

$$\alpha = g_1\,\alpha_1 + g_2\,\alpha_2\ .$$

α no puede anularse si g_1 y g_2 no son cero.

(*) El cero puede considerarse lo mismo irracional que racional: en este último caso, su raíz cuadrada admite todas las elementales.

Una tercera magnitud α_3, homogénea con α_1 y α_2, si no pertenece al grupo α, no puede anular al trimonio

$$g_1\,\alpha_1 + b_2\,\alpha_2 + g_3\,\alpha_3$$

mediante una terna de coeficientes g_1, g_2 y g_3 que sean racionales. Las bases modulares α_1, α_2 y α_3 se dicen independientes, o no coplanarias, y el trinomio, mediante toda la posible variación racional de g_1, g_2 y g_3, nos crea lo que llamaremos un grupo o espacio racional trimodular (o tridimensional).

En general, el polinomio lineal y homogéneo de n términos,

$$\alpha = \Sigma\, g_i\, \alpha_i\,, \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

con las g racionales y espacialmente independientes, no puede anularse si ellas no se anulan todas simultáneamente, y define un grupo de racionalidad n- modular o n- espacial.

Si se toman como bases n elementos de ese conjunto, tales que

$$\begin{array}{l} \beta_1 = g_{11}\,\alpha_1 + g_{12}\,\alpha_2 + \cdots + g_{1n}\,\alpha_n \\ \dotfill \\ \beta_n = g_{n1}\,\alpha_1 + g_{n2}\,\alpha_2 + \cdots + g_{nn}\,\alpha_n \end{array}$$

y no es nulo el determinante $\| g_{rs} \|$, se edifica con ellas un grupo n-dimensional

$$\beta = \Sigma\, h_i\, \beta_i \qquad (i = 1, 2, ..., n)\ ,$$

que coincide en todo con el α.

Todo esto sentado podemos ya entrar en materia.

Figuras cristalomórficas planas.

Un punto P, perteneciente a la recta definida por el segmento A B (fig. 1), apellidará racional cuando la relación P A : P B sea un número de esta clase. Los restantes puntos que no posean esta cualidad serán calificados de irracionales.

Situando un origen de abscisas en A y un jalón unitario en B, los puntos racionales tienen abscisas racionales. El mismo conjunto de ellos se define escogiendo otros dos miembros de su pertenencia en lugar de A y de B, siempre que sean distintos entre sí.

La recta sustentadora de los puntos racionales, supuestas aligerada de los irracionales, constituye una figura discontinua y densa, que, entre otras muchas particularidades, goza la de coincidir con sus calcos tras de un corrimiento de valor racional.

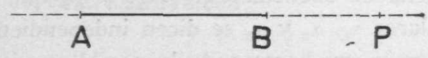

Fig. 1.

En un triángulo A B C (fig. 2), un punto P racional de la alineación A B, unido a otro racional N de la A C, determina una recta N P que corta a la tercera alineación B C en un punto M, necesariamente racional, según el teorema de Menelao. Tales rectas se llaman secantes racionales del triángulo y el conjunto de ellas constituye un complejo plano y reticular, dos veces infinitamente denso, anejo a la figura fundamental.

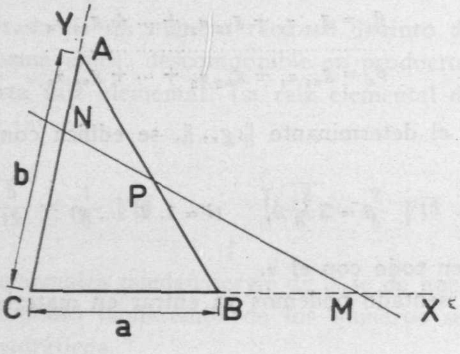

Fig. 2.

Cualquier sistema de tres de esas rectas, si no son concurrentes ni paralelas, limita un nuevo triángulo cuyo complejo de secantes es coincidente con el dado.

Tomando como ejes coordenados (oblicuos en general) las rectas C B y C A y marcando respectivamente esas magnitudes las unidades de las X y de las Y, la ecuación de una secante racional o «fibra» que no pase por el origen es de la forma

$$u\,x + v\,y = 1$$

con u y v racionales. Se considera también racional la paralela por el origen

$$u\,x + v\,y = 0.$$

A este sistema especial de coordenadas lo titularemos «milleriano».

Se llama punto racional o «nudo» del complejo al de intersección de dos rectas recionales: tiene racionales sus dos coordenadas millerianas x e y.

El conjunto de todos los infinitos nudos forma lo que llamaremos complejo racional y bidimensional de puntos, determinado, recíprocamente, por todas las parejas posibles de coordenadas racionales.

Los complejos racionales de puntos, y lo mismo los de rectas, son figuras que se pueden superponer a sus calcos por traslación paralela a base de que un punto racional pase a emplazarse en el puesto de otro de su misma clase.

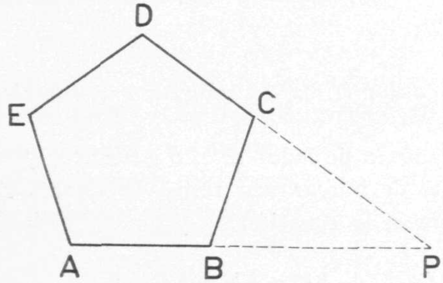

Fig. 3.

Se llaman figuras racionales planas, puntuales o lineales, a las entresacadas de un mismo complejo. Es por este motivo figura racional cualquier triángulo, ya que se entresaca de sí mismo, y cualquier polígono que se obtenga de él mediante recortes o adherencias racionales. Estos polígonos serán llamados también cristalomórficos.

Son cuadriláteros cristalomórficos aquéllos cuyas diagonales se cortan racionalmente, y, como casos particulares, todos los paralelógramos, y cuantos trapecios tengan sus dos lados no paralelos yendo a concurrir en un punto racional de uno de ellos.

Entre los polígonos regulares sólo son cristalogénicos el triángulo equilátero, el cuadrado y el exágono regular, éste último como derivado del primero por cortaduras que trisecan a los lados iguales que definen a aquél.

Si en un pentágono regular ordinario A B C D E (fig. 3), se prolongan dos lados no contiguos, A B y D C, éstos se han de encontrar en un punto P necesariamente irracional, desde el momento en que en la relación P A : P B interviene la $\sqrt{5}$. Incidencias parecidas tienen lugar con el eptágono, octógono y los demás polígonos regulares de mayor número de lados.

Todos los triángulos de un mismo complejo poseen áreas comensurables entre sí, es decir que la relación de ellas tiene valor racional. Lo mismo ocurre para cualquier pareja de polígonos procedente de un original común.

Otra figura interesante y muy simple, que cabe entresacar de un complejo plano, es el haz racional de rectas. Entre sus particularidades figura la de ser racionales los bicocientes de cuatro rayos escogidos al azar. Se ofrecen en ellos como especialidad las conjugaciones armónicas.

Clasificación cristalométrica de triángulos y complejos.

Dado un triángulo de lados a, b, c y normas a^2, b^2, c^2, cabe plantear el problema de buscar una terna de valores racionales g, h, k tales que se cumpla la ecuación

$$g\,a^2 + h\,b^2 + k\,c^2 = 0.$$

Puede, en primer lugar, ocurir que existan dos de esas ternas y que no sean proporcionales entre sí, en cuyo caso se encuentran infinitas otras en las mismas condiciones, demostrándose que las tres normas son mutuamente comensurables. Pueden ser expresables en forma monomia y con coeficientes racionales, a base de un mismo patrón de medida, geométricamente homogéneo con el cuadrado de una longitud. El triángulo se llama monomodular.

Puede, en segunda eventualidad, acontecer que no haya sino una terna (g, h, k) proporcionalmente única. Una norma cualquiera es por este motivo expresable en función lineal, homogénea y binomia con coeficientes racionales a base de las otras, y, en forma más general, todas tres a base de formas binomias de dos patrones superficiales incomensurables entre sí. El triángulo se llama entonces bimodular.

Por último, cabe también la imposibilidad de resolver la ecuación a base de coeficientes racionales. Las tres normas no sólo son mutuamente incomensurables, sino imposibles de expresar en forma *binomia* o *monomia* de *menos* de *tres parámetros racionalmente independientes*. Los triángulos son trimodulares.

Estudiando la formación de los complejos se llega presto a la conclusión de que todos los triángulos de uno de ellos pertenecen a la misma clase. Pero hay más aún.

En los triángulos de clase monomodular la relación de su área al cuadrado de un lado, o si se prefiere decir, la relación de una altura a su base, es un número, en general irracional cuadrático, que depende de una cierta raíz elemental. Esta raíz elemental constituye un parámetro que se conserva también en todo el complejo y lo caracteriza homotéticamente.

Para los triángulos de clase bimodular existe también un invariante que es la raíz elemental de la expresión

$$\Delta = -h\,k - k\,g - g\,h,$$

valor necesariamente positivo en los triángulos reales, y que se conserva en toda la extensión del complejo, sin llegar totalmente a caracterizarlo. Será denominado discriminante, o parámetro. Eventualmente dicha raíz puede ser la unidad.

Simetría de los complejos racionales planos.

El máximo interés del estudio de los complejos racionales planos reside en el conocimiento de sus posibilidades de simetría, tanto bilátera como rotacional. De esta última especie se presenta siempre la binaria: giro de 180° alrededor de cualquier nudo del retículo.

Tratándose de los complejos de clase trimodular, no existe ninguna otra capacidad de congruencia por desplazamiento angular aparte de la citada.

Los de clase bimodular con discriminante de raíz inexacta, ofrecen dos determinadas direcciones perpendiculares de ejes de simetría que convienen únicamente a los haces racionales, sin que ellas mismas puedan pertenecer a tales figuras. Para que, contrariamente, queden integrados dichos ejes en el retículo se precisa que el parámetro discriminante tenga su raíz cuadrada exacta, y entonces por cualquier nudo del complejo pasan dos ejes ortogonales de simetría bilátera, precisamente de esas direcciones privilegiadas, sobre las que cabe instalar referencias millerianas. No hay tampoco simetria rotatoria posible de orden superior al segundo.

Los complejos unimodulares admiten, por último, infinitas parejas perpendiculares de ejes de simetría concurrentes en todos sus nudos. A partir de una cualquiera de esas parejas se puede, como antes, establecer coordenadas millerianas rectángulas, relacionándose ahora las longitudes unitarias de las x y de las y a través de una raíz elemental $\sqrt{r}$, que es precisamente la del cociente de altura a base en cualquier triángulo.

Existen giros posibles alrededor de los nudos que permiten la congruencia consigo mismo del complejo. Así ocurre con el de valor Θ dado por

$$\Theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{2}{r-1} \sqrt{r} \; ,$$

giro que puede ser reiterado cuantas veces se desee. (Complejos cíclicos.)

Cuando r vale 1 hay comensurabilidad directa entre ordenadas y abscisas; la red cabe tomarla rectángula y Θ vale 90° (marco real). Cuando r es 3, $\Theta = 60^{\circ}$ y se tiene el tresbolillo.

Respectivamente, dichos giros cierran vuelta completa al cabo de 4 y de 6 reiteraciones: simetrías cuaternaria y senaria, ésta última conversible en ternaria (120°).

Hay posibilidad todavía de otros giros que no cierran vuelta por mucho que se repitan y así ocurre, dentro del caso $r = 1$, con los que corresponden a tangentes de argumento pitagoriano:

$$\frac{3}{4} \, , \; \frac{5}{12} \, , \; \frac{4}{3} \, , \text{ etc.}$$

Resultan simetrías de orden infinito.

Estas son siempre obligadas cuando r no vale ni 1 ni 3, limitando el número de polígonos regulares cristalográficos cerrados al cuadrado, al triángulo equilátero y al exágono regular, conforme ya sabemos.

Singonías planas.

Los que pudiéramos llamar sistemas cristalinos del plano quedarían, sin las consideraciones expuestas, reduciendo a cuatro, que llamaríamos sucesivamente cuadrático, exagonal (con hemilatería trigona), rómbico y asimétrico. Sus polígonos más representativos lo serían respectivamente el cuadrado, el exágono regular (con el triángulo equilátero), el rombo (o el rectángulo) y el romboide.

A través de la teoría de los complejos racionales planos la casuística se enriquece con dos eventualidades nuevas, distinguiendo el sistema rombal plurisimétrico o cíclico, del monosimétrico y, dentro de la asimetría, una protosimetría (que afecta sólo a haces), de la asimetría verdadera o absoluta.

Truncadura racional de los tetraedros.

Pasando ya al espacio tridimensional, consideraremos un tetraedro fundamental D A B C, sobre el que en adelante convendremos la notación siguiente para las arista (fig. 4):

$$B\,C = a, \quad C\,A = b, \quad A\,B = c,$$
$$D\,A = d, \quad D\,B = e, \quad D\,C = f,$$

siendo dos a dos opuestas las de la misma columna.

Tres aristas cualesquiera, por ejemplo las d, e y f, que concurren en el vértice D, pueden ser cortadas racionalmente por un plano (truncadura), y entonces se demuestra serlo las seis con igual carácter. El tal plano secante se apellida racional, y todos los posibles constituyen un complejo de ellos triplemente infinito, anexo al tetraedro.

Cada dos planos racionales no paralelos se cortan en una recta racional o fibra. Tres planos de dicha clase no paralelos forman, si concurren en una misma arista, un haz racional de su clase, y, si no lo hacen, tienen común un punto racional o nudo. Existen: el complejo de las fibras y el complejo de los nudos.

En general las figuras puntuales, rectilíneas o poliédricas se llamarán racionales si lo son sus elementos. Cuatro planos racionales no concurrentes ni paralelos cierran un tetraedro racional del complejo: cualquiera de esos tetraedros del complejo lo definen con la misma precisión que el inicial.

Todos los tetraedros y poliedros cerrados de un mismo complejo tienen volúmenes comensurables.

El tetraedro A B C D puede constituir la referencia de un sistema de coordenadas cartesianas con origen en D y ejes D A, D B y D C. Si estas tres magnitudes se toman como respectivas unidades en sus

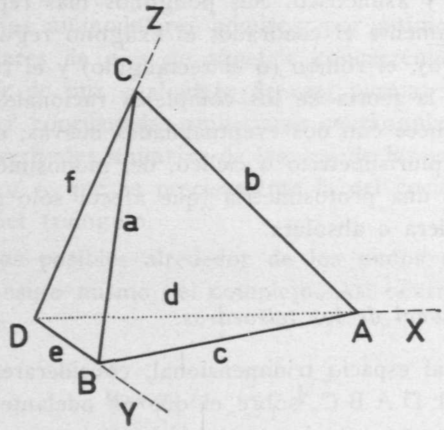

Fig. 4.

direcciones, el sistema de coordenadas se dice milleriano. Un punto racional o nudo se fija en él por tres coordenadas x, y, z de valor racional, y un plano del mismo calificativo por la ecuación

$$u\,x + v\,y + w\,z = 1\ .$$

siendo u, v y w tres valores racionales llamados coordenadas millerianas del dicho plano.

Cuando este último pase por el origen, el segundo miembro de la ecuación anterior es 0.

Clasificación de los complejos espaciales.

Los complejos racionales del espacio cabe inicialmente ser clasificados según que los seis cuadrados de las aristas del tetraedro fundamental sean, en cuanto a mensurabilidad, independientes entre sí (examodulares), o bien que puedan formarse de cinco, de cuatro, de tres, de dos o de una magnitudes de similar independencia y homogéneas con las normas o cuadrados de las aristas (dimesiones de superficies): complejos pentamodulares, tetramodulares, bimodulares y unimodulares.

Los pentamodulares satisfacen a una ecuación lineal y homogénea del tipo

$$g\,a^2 + h\,b^2 + k\,c^2 + l\,d^2 + m\,e^2 + n\,f^2 = 0$$

determinada por una sextena de valores racionales (g, h, k, l, m, n) que es, proporcionalmente hablando, única.

Las tetramodulares admiten dos sextenas distintas; las trimodulares, tres; las bimodulares, cuatro, y las unimodulares, cinco.

La matriz, cuyas filas son esas sextenas de valores g, h, k, l, m, n no debe de tener nulos todos los determinantes menores de orden máximo, si las normas a^2, b^2, etc., han de ser independientes.

Por último, conviene hacer notar que todos los tetraedros del complejo pertenecen a la misma clase de esas seis a que pertenezca el fundamental, sin lo cual no tendría interés la división establecida.

Simetría de los complejos. Asimetría de los examodulares.

Los complejos espaciales coinciden consigo mismos mediante traslaciones paralelas de nudo a nudo. Además todos estos puntos son centros de simetría que permiten una rotación de 180°.

Pueden ya no existir otras congruencias, pero puede también haberlas. La más sencilla de todas es la de una orientación de planos racionales que ofrezcan simetría propia, bien perfecta o imperfecta (esto es, de figuras planas o simplemente de haces de rectas). Como ello liga mediante una o dos ternas racionales a las normas de los triángulos en dichos planos contenidos, y como esas ternas no son sino sextenas con elementos nulos de tetraedros que tienen por caras a los referidos triángulos, viene a resultar que las más elementales simetrías requieren, por lo menos, pentamodularidad en el complejo espacial.

En consecuencia, los tetraedros de los complejos examodulares son asimétricos, y sus paralelepípedos siempre romboidales (no rombales).

Estudio de los complejos pentamodulares.

Con los coeficientes que constituyen la sextena proporcionalmente única de un complejo pentamodular, se puede formar un determinante de cuarto orden, idénticamente nulo, de gran interés. Es el siguiente:

$$\begin{vmatrix} -h-k-l & k & h & l \\ k & -k-g-m & g & m \\ h & g & -g-h-n & n \\ l & m & n & -l-m-n \end{vmatrix}.$$

Todos sus adjuntos de tercer orden son iguales. Tomaremos como tipo el

$$\rho = \begin{vmatrix} -h-k-l & k & h \\ k & -k-g-m & g \\ h & g & -g-h-n \end{vmatrix}.$$

Al multiplicar la sextena por un número racional p, este determinante queda multiplicado por p^3. Al pasar de un tetraedro a otro del complejo, ρ queda multiplicado por el cuadrado de un número racio-
En todo caso si ρ fuera nulo, nulo seguiría siendo con ambas alteraciones.

Esta eventualidad de anularse ρ se demuestra que tiene lugar precisamente cuando existe en el complejo un plano, o mejor, una orientación directora de planos paralelos, en los que reina una simetría perfecta o imperfecta, con sus dos ejes correspondientes, y constituye una condición necesaria y suficiente para ello.

Conviene, cuando se verifica, considerar los seis menores principales binarios de la matriz de cuarto orden:

$$G = \begin{vmatrix} -k-g-m & g \\ g & -g-h-n \end{vmatrix}; \; H = \begin{vmatrix} -h-k-l & h \\ h & -g-h-n \end{vmatrix}; \; K = \ldots$$

$$L = \begin{vmatrix} -h-k-l & l \\ l & -l-m-n \end{vmatrix}: \; M = \ldots \qquad ; N = \ldots$$

Se demuestra que, si ρ es cero, todos seis son negativos, y las raíces elementales de ellos, previamente cambiados de signo, son una misma

$$\sqrt{-G} = \lambda \sqrt{r}\,.\ (*)$$

Esta raíz de r es además un parámetro que se conserva en todo el complejo, constituyendo su más importante característica.

La simetría es perfecta cuando r vale 1 y hay entonces, dentro de los planos de orientación especial, dos direcciones perpendiculares de fibras.

Es imperfecta la simetría en todos los otros casos, resultando imposible la perpendicularidad de fibras. El parámetro r es el mismo que se estudió en análoga eventualidad de la Cristalomorfía bidimensional.

La ecuación de la orientación de los planos directores del complejo se consigue igualando a cero la matriz de ρ, en la que previamente se ha sustituido una fila o columna por los variables x, y, z. Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ k & -k-g-m & g \\ h & g & -g-h-n \end{vmatrix} = 0\,.$$

No es difícil situar, dentro de este plano, los ejes.

En resumen, los complejos pentarracionales se clasifican en tres grupos: presimétricos, si ρ no es cero; protosimétricos, cuando ρ es cero y r no vale 1; y clinosimétricos, cuando $\rho = 0$ y $r = 1$. En este último caso existen paralelepípedos oblicuos con bases rombales y con bases rectangulares.

Complejos tetramodulares.

Las seis normas de los tetraedros incluidos en un complejo tetramodular admiten dos sextenas independientes de coeficientes racionales, tales como

$$\mathcal{S}_1\,(g_1\ h_1\ k_1\ l_1\ m_1\ n_1) \quad \text{y} \quad \mathcal{S}_2\,(g_2\ h_2\ k_2\ l_2\ m_2\ n_2)$$

(*) No constituye excepción de esta regla el hecho de que algunos de los radicandos sea cero.

y todas las $\mathcal{S} = u \ \mathcal{S}_1 + v \ \mathcal{S}_2$ que resultan de componerlas linealmente tras de aplicarlas dos multiplicadores racionales arbitrarios, u y v.

En su estudio hay que considerar los dos sistemas de menores

$$G_1, H_1, ..., N_1 \quad \text{y} \quad G_2, H_2, ..., N_2$$

definidos en la forma que se hizo anteriormente, y cuatro nuevos valores que se forman a partir de aquéllos y de los g, h, etc., y que son, a saber:

$$\begin{aligned} F_0 &= -L_1 g_1 - M_1 h_1 - N k_1 - G_1 l_1 - H_1 m_1 - K_1 n_1 = -\Sigma L_1 g_1 , \\ F_1 &= -L_1 g_2 - M_1 h_2 - \dots\dots\dots\dots = -\Sigma L_1 g_2 , \\ F_2 &= -L_2 g_1 - M_2 h_1 - \dots\dots\dots\dots = -\Sigma L_2 g_1 , \\ F_3 &= -L_2 g_2 - M_2 h_2 - \dots\dots\dots\dots = -\Sigma L_2 g_2 . \end{aligned}$$

A base de estos últimos coeficientes, que son números racionales, se puede escribir la siguiente ecuación homogénea de tercer grado en las incógnitas p y q

$$F_0 p^3 + 3 F_1 p^2 q + 3 F_2 p q^2 + F_3 q^3 = 0$$

que apellidaremos característica.

Esta ecuación, con toda la variedad de casos a que se prestan las de su grado, puede, o no, tener soluciones racionales, y, si las tiene, p y q resultan ser los multiplicadores idóneos para obtener sextenas $\mathcal{S}$ con el parámetro ternario, ρ, nulo. Es decir, para que haya, al menos, protosimetría y plano director.

Pasamos en esta breve exposición por alto la mucha riqueza específica posible, creadora de sendas modalidades de singonías que la Cristalografía común no considera, para fijar exclusiva atención en los tres casos más interesantes.

1.º Uno es el de que se encuentren tres soluciones de la característica reales y diferentes, dando lugar a tres planos directores constitutivos de un triedro al que llamaremos director. Si además las simetrías correspondientes son perfectas, es posible conseguir tres vectores no coplanarios de igual longitud, y paralelepípedos de caras rombales diferentes.

Los otros dos casos tienen de común el poseer la característica indeterminada, por anulación simultánea de las cuatro F, lo que indica ya infinitud de soluciones (p, q).

Dentro de esto puede ocurrir:

2.º G_1, H_1 y K_1 *son proporcionales* a G_2, H_2 y K_2.

Se trata entonces de una multisimetría plana, esto es, que existe un sistema de planos paralelos dentro de los cuales se dan cuadrados, o exágonos regulares, o simplemente rectángulos de normas comensurables, *pero sin producirse espacialmente en ningún momento una* simetría bilátera especular. Clinosimetría cíclica tan sólo. Hay los prismas oblicuos correspondientes.

3.º G_1, H_1 y K_1 no son proporcionales a G_2, H_2 y K_2. Hace su primera entrada en nuestro escenario geométrico la simetría espacial bilátera con respecto a un plano de reflexión u ortosimetria, todavía, y contrariamente al subcaso anterior, sin complicación alguna en otro horizonte diferente.

La ortosimetría tetramodular es, pues, la más pura y simple manifestación de la singonía monoclínica, la del sistema monosimétrico de la Ciencia cristalográfica con sus prismas oblicuos y homoláteros de bases rombales o rectángulas.

Existen, en cuanto a orientación y dirección se refiere, el antedicho plano reflejante y el eje perpendicular de simetría rotatoria binaria. Claro es que, en el complejo, todos los planos racionales y fibras paralelos gozan de la misma propiedad.

No hay otros ángulos rectos que los del referido eje con las infinitas rectas racionales del tan citado espejo: otros perfeccionamientos implican nuevas sextenas, y se pasa ya a complejos de modularidad más reducida.

Complejos trimodulares.

Las últimas consideraciones permiten ya otear la complicacion casuística de los complejos trimodulares. Tales estructuras pueden edificarse a base de tetraedros con tres sextenas independientes de coeficientes cuadráticos; esto es, adaptabls a sus normas,

$$\mathcal{S}_i(g_i, h_i, k_i, l_i, m_i, n_i) \quad ; \quad i = 1, 2, 3$$

no siendo nula, en la matriz de 6 × 3 elementos que con sus coeficientes se forma, la totalidad de los determinantes menores ternarios allí contenidos.

Tres multiplicadores racionales indeterminados, p, q y r, proporcionan la sextena más general

$$\mathcal{S} = p\,\mathcal{S}_1 + q\,\mathcal{S}_2 + r\,\mathcal{S}_3$$

aplicable al complejo.

No tenemos tiempo de esbozar el complicado método de búsqueda de los planos directores que pasan por un nudo (el origen por ejemplo). Conduce a la resolución en valores racionales de una ecuación característica homogénea de tercer grado en las incógnitas p, q y r.

Resulta, si se logra, una familia entera de planos directores, cuyos paralelos pasando por un punto envuelven en general un cono: el cono director que llamaremos.

Las especialidades más significadas de los complejos trimodulares se refieren, unas a triedros directores, y otras a ortosimetrías.

En el primer grupo interviene, además del triedro director, un plano también director, como consecuencia de la tercera sextena racional. Se presentan tres casos posibles según que ese plano tenga orientación truncante de las aristas del triedro, sea paralelo a una, o sea paralelo a dos.

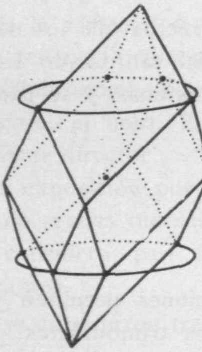

Fig. 5.

En el primer supuesto, además de los tres vectores de normas comensurables que definen el triedro, aparece, en las mismas condiciones, un cuarto vector, y existen orientaciones planas con cuadriláteros inscriptibles en un círculo. Se puede construir un dodecaedro romboidal (fig. 5), de unas caras aparejadas por paralelismo y congruencia, cuyos lados responden a las seis combinaciones binarias de los cuatro vectores.

En el caso muy especializado de que las tres aristas del triedro sean iguales, puede tomarse también igual el cuarto vector, y el dodecaedro romboidal pasa a ser rombal: los seis rombos fundamentales difieren unos de otros, no en los lados, sino en las diagonales.

Respecto a la segunda eventualidad apuntada, relativa a la presencia de un plano director representante de la tercera sextena racional, paralelo a una de las aristas del triedro y sin aparición del cuarto vector, acaece que dicho plano tiene simetría interna propia con dos ejes perpendiculares, uno de los cuales es la arista referida. Son dables prismas oblicuos de base rectangular y comensurabilidad de las normas de uno de los lados de esa base con las de las aristas laterales.

La tercera eventualidad produce prismas oblicuos con simetria rotatoria plana en las bases y comensurabilidad total de normas.

En cuanto a la ortosimetría trimétrica, además del plano de reflexión y del eje binario perpendicular a él, que con canon del sistema monoclínico de la Cristalografía ya se daban en ciertos complejos dimétricos, hay que señalar la aparición de un cono director de segundo grado, al que son tangentes los planos directores comunes según generatrices racionales.

La ortoedría (sistema rómbico), que aparece por primera vez, se da cuando son racionales las cuatro generatrices principales del cono. Hay entonces tres ejes de simetría binaria mutuamente perpendiculares, y tres planos, también perpendiculares, de reflexión. Los cuadrados de las longitudes de los ejes son, en trimetría, forzosamente incomensurables entre sí dos a dos.

Complejos bimodulares.

Los complejos tetrarracionales, es decir aquellos cuyos tetraedros admiten en sus normas hasta cuatro sextenas independientes de coeficientes racionales, son bimodulares o dimétricos. Quiere esto decir que el cuadrado de la longitud de todos sus vectores puede expresarse en forma binómica y racional a partir de dos cualesquiera de esas normas que se prefijen, sin otra condición que la de ser incomensurables entre sí.

La propiedad más importante de los complejos bimodulares es la de que todos sus planos sin excepción admiten terna para los triángulos que soportan. En dichos planos hay pues al menos protosimetría (o sea, simetría de haces): en algunos llega a ser total con dos ejes perpendiculares de reflexión.

Otra propiedad interesante de los complejos en cuestión es la de poder ser estructurados, alrededor de cualquier nudo considerado como vértice, según conos cuyas aristas racionales tienen normas comensurables. Hay, pues, una doble infinidad de triedros directores.

Las especialidades se refieren ahora a ortosimetrías unas veces romboidales y otras rombales u ortoédricas. En ambos casos cabe todavía la posibilidad de la existencia de un plano cíclico, esto es, de simetría interna múltiple (cuadrangular, exagonal o de orden infinito).

En los prismas rectos dimétricos de base romboidal (monoclínicos), las normas de las alturas son forma binomia de las normas de los lados de la base, y cabe que no admitan ningún plano cíclico o que admitan dos orientaciones múltiples, que mutuamente se reflejan en la cara basal.

En los prismas rectos dimétricos de sección rombal (rómbicos u ortoédricos por lo menos) la norma de la altura es incomensurable con la norma del lado de la sección. Puede, como antes, no tener corte cíclico, o tener dos en reflejo.

Pero puede también, y esto es lo importante, tener uno solo localizado en la dirección de la base o especular. La simetría espacial se hace entonces rotatoria múltiple alrededor de un eje (de una dirección más propiamente hablando) cuyo orden es tetragonal, exagonal o infinito. He aquí la surgencia de dos conocidos sistemas cristalográficos y una nueva: la del último caso.

Complejos unimodulares.

Cinco sextenas independientes. Todas las normas de todos los vectores son comensurables. Todos los planos son cíclicos. Todas las rectas son ejes de rotación de uno u otro orden.

Existen los siguientes casos particulares:

1.° Todas las rectas son ejes de simetría rotatoria de orden infinito.

2.° Hay ejes (direcciones axiles) principales de orden rotacional senario y no los hay cuaternarios.

3.° Hay ejes (direcciones axiles) principales de orden cuaternario y no los hay del senario.

4.º Existen triedros trirrectángulos formados en mixtura por ejes de ambas clases.

5.º Existen triedros trirrectángulos formados por ejes cuaternarios. Y como secuela hay ejes senarios.

Los complejos del primer grupo representan la clase unimodular todavía rómbica (ortoédrica).

Los del segundo y tercer grupo constituyen respectivamente las clases exagonal y tetragonal de tipo unimodular.

El quinto grupo es de la máxima especialización. Son los complejos teserales o regulares. Y ha de notarse en ellos que, a diferencia de las formas cristalográficas concretas incluibles, se habla aquí de simetría senaria y no simplemente de la trigonal, que tiene por ejemplo el cubo aisladamente.

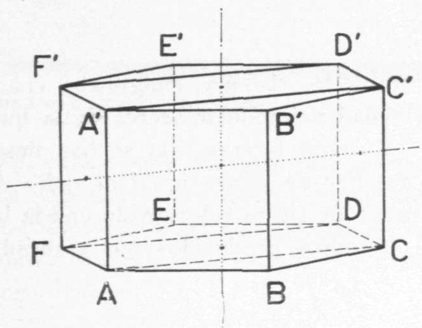

Fig. 6.

El grupo más curioso es el cuarto, que aparece como novedad. De él pueden destacarse figuras concretas con simetría senaria o cuaternaria, pero nunca simultáneamente las dos. Un prisma recto exagonal y regular, A B C D E F — A′ B′ C′ D′ E′ F′ (fig. 6), de altura igual al radio o lado de la base, tiene manifiesto un eje de rotación senario; si al mismo cuerpo se le mutilan los diedros B B′ y E E′ dejándolo reducido al prisma A C D F — A′ C′ D′ F′, aparece explícito un eje cuaternario, que une los centros de las caras cuadradas A F F′ A′ y C D D′ C′.

Sistemas y singonías.

Del estudio de los complejos espaciales resultan, como no podía menos de ocurrir, los seis sistemas cristalográficos, sin distinción entre holoedrías y hemiedrías, que se refieren en la Naturaleza, o a formas externas, o a arquitecturas atómicas íntimas.

Como singonías consideramos los subsistemas: relaciones modulares y goniométricas específicas.

Sistema regular.

El sistema, o singonía única del sistema llamado regular, es harto conocido. Puede definirse a partir del cubo, del tetraedro regular, o del tetraedro de tres caras rectángulas e isósceles y la cuarta equilátera. Puede arrancarse también de un prisma exagonal regular, en que la relación de altura a lado de base tenga la $\sqrt{2}$ como factor elemental. Asimismo de un ortoedro de lados comensurables.

Sistema dimórfico.

Es singonía mixta de los sistemas exagonal y cuadrático. Se trata de la cuarta especialidad unimodular acerca de la que anteriormente ya se ha hablado. Y como figuras tipo se han descrito un prisma recto exagonal y regular de altura igual al radio de la base, y el prisma recto cuadrático de altura relacionado con la base por la $\sqrt{3}$. Hay también los tetraedros producidos por truncadura racional de estos prismas.

Sistema exagonal.

Figuras derivables de un prisma recto exagonal o trigonal, o de una pirámide triangular regular. Existen las siguientes singonias:

1.ª Unimodular. Derivable de un prisma exagonal regular cuya relación de altura a base es un número racional, o un semirracional de raíz elemental distinta de $\sqrt{2}$ o de $\sqrt{6}$.

2.ª Bimodular. Derivable de un prisma exagonal análogo para el que las normas de altura y radio de base son incomensurables.

Sistema cuadrático.

Puede partirse de un prisma recto de base cuadrada. Dos singonías:

1.ª Unimodular. La relación de altura o lado de base es un semirracional cuya raíz elemental no es $\sqrt{2}$, ni $\sqrt{3}$, ni $\sqrt{6}$.

2.ª Bimodular. La relación indicada no es racional ni semirracional.

Sistema rómbico u ortoédrico.

Deriva de prismas rectos de base rombal, y mejor, de ortoedros de dimensiones d, e y f. Las singonías son:

1.° Unimodular o policíclica. Las referidas dimensiones se relacionan semirracionalmente, y los cocientes $d:f$ y $e:f$ dependen de dos raices elementales cuyo producto no es comensurable con las antes indicadas. 2.° Bimodular dicíclica. 3.° Bimodular monocíclica. 4.° Bimodular acíclica. Según el número de orientaciones con simetría rotatoria plana. 5.° Trimodular de normas d^2, e^2 y f^2 mutuamente incomensurables. Los planos de reflexión tienen orientaciones fijas. Es una singonía acíclica.

Sistema monoclínico o monosimétrico.

Planos de reflexión y ejes binarios perpendiculares de una sola orientación y una sola dirección comunes y fijas. Prismas rombales o rectangulares con simetría bilateral. Singonías diversas con estructuras tetramodulares, trimodulares y hasta bimodulares, alguna de las últimas con planos cíclicos.

Sistemas clinosimétrico y asimétrico.

En el sistema triclínico de los libros de Cristalografía hay que distinguir en rigor: los casos de una absoluta asimetría, de la posibilidad de simetrías planas (clinosimetrías) con existencia de rombos y triángulos isósceles.

En los complejos, el sistema verdaderamente asimétrico recoje las estructuras pentamodulares o irracionales, y casos de los tetramodulares y trimodulares que se han citado y en los que las simetrías planas son de haces racionales y no de polígonos.

En la clinosimetría caben, además de los prismas oblicuos de base rombal, otros de base cuadrada, exagonal regular, y en general de tipo cíclico.

Con esto damos por terminado este conato ennumerativo de las estructuras racionales o complejos del espacio tridimensional común.

Cristalomorfía y complejos hiperespaciales.

Pero cabe generalizar las pautas y esbozar lo que serían, en el espacio de cuatro dimensiones y en los de más, los hipercomplejos y la Hipercristalografía.

A las figuras elementales que son el punto o monovértice adimensional, el segmento o bivértice monodimensional, el triángulo o trivértice bidimensional y el tetraedro o tetravértice tridimensional, sucede con naturalidad el pentacelio o pentavértice tetradimensional. Reside en el hiperespacio, y está limitado por cinco tetraedros, con diez caras triangulares, diez aristas y los cinco vértices citados.

En cada vértice concurren cuatro aristas que no están en el mismo hiperplano o espacio tridimensional. Tomando uno de esos vértices E como origen y los otros cuatro A, B, C, D como jalones unitarios se define un sistema de coordenadas milleriano x, y, z, t para un punto P. El punto P, es racional cuando aquéllas coordenadas lo son, y los puntos racionales constituyen un complejo racional de cuatro dimensiones. Hay además rectas, planos e hiperplanos racionales. Estos últimos pueden encerrar policelios (o sea hiperpoliedros) racionales, figuras que constituirían al objeto de una Cristalomorfía tetradimensional.

En esta disciplina, según que las normas de las diez aristas sean comensurables entre sí, o se puedan expresar bajo una forma polinomia con coeficientes racionales de dos, de tres, de cuatro, etc., y hasta de diez parámetros inconmensurables dos a dos, se tienen hasta diez clases de complejos y estilos de figuras.

Es de notar que, de los seis policelios o hiperpoliedros regulares que existen, solo cuatro, por ley de racionalidad, resultan figuras cristalomórficas, incluibles en la clase monoparamétrica o unimodular. Son el hipercubo, y el pentacelio, exadecacelio e icositetracelio regulares. Pero aquí, lo mismo que ocurría en el espacio bidimensional, donde el triángulo equilátero y el cuadrado eran racionalmente incompatibles, hay también dos sistemas diferentes: el del pentacelio y el de las otras regularidades o teseral. Esto frente a lo que ocurre en el espacio tridimensional común, donde el sistema cúbico es el único calificable de regular.

Es muestra particular de la diferencia de comportamientos que tienen los hiperespacios de orden par y los de orden impar. Todo ello se podría patentizar estudiando cristalomorfías de cinco, de seis y de más dimensiones, y son éstos temas que, con alguna mayor extensión, hemos publicado en otra monografía nuestra (*).

Quiero acabar dando espuelas a la fantasía, e imaginando unos complejos espacio-temporales reticulados, en general con tres unidades o módulos de longitud y una cuarta o ritmo de tiempo, traducible también en distancia imaginaria mediante la ecuación de equivalencia de Minkowski.

Ignoro lo que daría de sí una relación sustentadora, sobre semejantes estructuras, de las de los cuerpos cristalinos reales, si el ritmo indicado se acompasa también a los ciclos de rotación electrónicos.

Llegamos con tal interrogante al portillo frontero del poco ameno campo que he escogido como base de esta conferencia, que va ya resultando larga y aburrida, y no he de desperdiciar la ocasión propicia que aquél me brinda para darla remate. Sepan perdonarme los que la han oído, la molestia impuesta de escucharla.

(*) *Pequeñas dosis de Cristalografía hiperespacial.* «Las Ciencias», año XXV, pp. 321-334 y 571-588. Madrid, 1960.

DISCURSO DE CONTESTACION

POR EL PRESIDENTE DE LA ACADEMIA

EXCMO. SR. D. ALFONSO PEÑA BOEUF

Señores Académicos; señoras y señores:

Acabamos de oir el discurso de ingreso en esta Real Academia de Don Clemente Sáenz, quien ha leído una magnífica disertación sobre «La estructura de los espacios racionales y sus consecuencias cristalomórficas», que constituye un modo especial de exponer la doctrina base de la cristalografía geométrica, por su íntima relación con la teoría de los números.

El nuevo Académico, que todavía puede considerarse joven, pues nació cuando estaba terminando el siglo pasado, tuvo su primera formación en su tierra natal de Soria con los cursos del Colegio que entonces existía de los Hermanos Maristas, antes de ingresar en el Instituto de la localidad matriculado oficialmente.

Ya por entonces sintió inquietudes de carácter matemático y conserva aún las apuntaciones redactadas personalmente para ver la posibilidad de encontrar una fórmula sobre el polígono regular de nueve vértices, cuando ignoraba todavía la dificultad que entrañaba el problema, por no haber llegado a las ecuaciones de grado superior y la solución que con ellas se ofrece a este respecto.

Empezó en los primeros años de bachillerato su afición a la geología a través de la espeleología que de un modo natural practicaba en las cavernas de la localidad. Cita con este motivo en ciertas notas personales sus pintorescas excursiones para exploración de los agujeros de las calizas cretáceas de la región y los peligros a que se sometió por la presencia de los buitres que habitaban aquellas oquedades, haciendo mención de la labor del monje de Silos, padre Saturio González, sobre las extracciones de cráneos en la cueva del Asno, donde se encontraban objetos prehistóricos y que despertaron tempranamente su curiosidad natural, aparte de hallazgos casuales de fósiles en correrías por los cerros del Mirón y los serrijones sorianos.

Esta especial atención que dedicaba a las investigaciones, no sólo de aquella región sino de otras, le llevaron a contemplar también con interés las excavaciones oficiales de Numancia y a sus estudios sobre historia, arqueología y paleontología, cuyas actividades no ha abandonado nunca, empezando desde entonces a formar colecciones que guardaba con gran cuidado, hasta que posteriormente fueron, como tantas cosas en España, objeto de expoliación cuando la guerra.

Como, por otra parte, no abandonaba Clemente Sáenz su entusiasmo por la matemática, dedicó una atención muy intensa a la lectura de los libros clásicos antes de empezar el estudio de las matemáticas formales para el ingreso en la Escuela de Ingenieros de Caminos, donde entró con brillantez en solo un año después de acabar el bachillerato.

Cuando, ya ingresado en la Escuela, empezó a seguir los cursos normales, en los seis años que entonces se requerían tras los de la preparación, pudo ya bien poner su destacada atención al llegar a la asignatura de geología, que ha sido la base de los muchos e interesantes estudios que luego ha practicado.

Siendo alumno de la Escuela, dedicaba los veranos a largas excursiones estratigráficas, descubriendo por primera vez restos de reptiles fósiles del terreno secundario en su provincia natal. Pero, independientemente de eso, siguió su erudición matemática con meditación acerca de las leyes fundamentales de la física, y redactó algunos escritos cuando comenzó el primer curso de electrotecnia, realizando originales comentarios que le hicieron ya incluso formular hipótesis del tipo de las entelequias actuales sobre la antimateria y que, por via natural, no tardaron en ponerle en relación con las teorías relativistas que entonces estaban muy en boga por los estudios de Einstein.

Cuando terminó la carrera fue a parar a la construcción del Salto de Villalba, en Cuenca, teniendo por maestro a un distinguido Ingeniero, el Sr. Lorenzo Pardo, que tomó parte muy activa en todos aquellos trabajos.

En tres años que estuvo en la provincia de Cuenca llegó a conocer la geología y topografía de aquella región de un modo tan completo que sirvió de guía muy documentado de la serranía cuando las visitas de Calvo Sotelo y del príncipe Adalberto de Baviera a la Ciudad Encantada.

En el año 1925, la Diputación Provincial de Soria le nombró Director de Vías y Obras y le encargó la formación de su plan de los caminos vecinales, durante no mucho tiempo, pues que fue de nuevo requerido por Lorenzo Pardo, cuando se creó la Confederación Hidrográfica del Ebro, para que realizara estudios muy importantes, que fueron después seguidos de la dirección de las obras iniciales del que entonces se consideraba como el hiperembalse de mayor tamaño de España, en la cabecera del Ebro.

El Conde de Guadalhorce, que tuvo buen conocimiento de Clemente Sáenz, le nombró asesor geológico en la formación de los planes de Obras Públicas que aquél realizaba, autorizándole además para que continuara en Reinosa al frente de la obra del pantano del Ebro.

Todo esto iba acompañado de diversas investigaciones de campo, habiendo publicado las que efectuó sobre el terreno cretáceo del sur de Santander y norte de Burgos y Palencia, que fueron impresas por la Sociedad Española de Historia Natural, por cuya publicación se cita con prioridad su nombre sobre los trabajos locales del francés Ciry y el alemán Karremberg.

En 1930 fue llamado para pertenecer al claustro de la Escuela de Caminos y durante muchos años, y todavía en la actualidad, sigue siendo el indiscutible profesor de Geología, y, desde luego, en aquel estudio, muy completo, que hizo por entonces Lorenzo Pardo de las obras hidráulicas españolas, la parte geológica se debe a este autor.

Fueron muchos los viajes que realizó al extranjero con motivo de Congresos y Asambleas, por virtud de los cuales tuvo ocasiones de conocer y comentar la interesante estratigrafía del Ródano, del Jura francés y formación geológica de los terrenos de Polonia, Portugal y regiones polares del Norte, y más recientemente de Méjico, norte de Africa y cercano Oriente.

Han sido muchas las publicaciones y trabajos, en los que puede indicar su extraordinaria erudición sobre estos asuntos, en la Sociedad Española de Historia Natural, en la revista de la Asociación para el Progreso de las Ciencias y en otras varias, incluidas las de esta Academia y las del Consejo Superior de Investigaciones Científicas.

Actualmente ocupa la presidencia de la sección de Hidrologia Científica de la Comisión Nacional de Geodesia y Geofísica, siendo miembro directivo de distintas corporaciones dedicadas a las disciplinas del saber y del Consejo de Investigaciones Científicas. Le fue otorgada una medalla de oro por la confección de un avance bibliográfico de la estratigrafía española y portuguesa.

Muchas han sido las conferencias pronunciadas por el señor Sáenz y los trabajos en materia de matemáticas, física, geología y arqueología que dan testimonio concreto de la gran erudición durante tanto tiempo desarrollada.

Es el ingeniero que ha intervenido en más informes acerca de la ubicación de grandes obras hidráulicas. Pasa de doscientas el número de estas consultas y en más de una ocasión ha llevado a cabo descubrimientos de zonas de embalse, por la sola consideración de la cartografía geológica. Ejemplos son el pantano de Mansilla y el aún no iniciado del Valladar, siendo su propuesta decisiva en casos, como Barrios de Luna y Linares del Arroyo, de intuición similar sobre terreno. Y es también autor de la clasificación en cuatro tramos de los perfiles de los ríos españoles, en lugar de los tres que ordinariamente se venía considerando.

* * *

Parecía natural que, siendo el nuevo Académico esencialmente geólogo y sus trabajos más destacados en relación con la geología de nuestro país y de sus obras públicas, hubiera elegido como tema para su discurso cualquiera de sus múltiples actividades que ha tenido, acerca de la interesante historia del mundo y la formación de los terrenos en nuestra patria. Pero la inquietud de este ilustre profesor, no sólo en la materia propia de su actividad directa, sino que también en los muchos ensayos que ha hecho en relación con las ciencias física y matemática, le han llevado a elegir un tema indudablemente de gran dificultad, como es una personal exposición de las bases de la cristalografía, considerando la íntima relación de esa ciencia con la teoría de los números. Y dentro de estas graves dificultades, se ha movido, para redactar el discurso presente, con una cierta originalidad en la manera de exponerlo, con un carácter de gran generalidad y de porvenir en la didáctica de las leyes de aquel conocimiento.

Ha explicado el profesor Clemente Sáenz los grupos de conmensurabilidad y, empezando primero por las figuras cristalográficas, planas, continúa un estudio muy interesante de clasificación métrica de triángulos y complejos, que, con los complementos establecidos posteriormente para el espacio y el hiperespacio, da unas formas nuevas de exposición muy general y completa de la cristalografía geométrica en sus leyes de formación.

El problema, en realidad, es tan complejo que resulta muy difícil de exponer como tema en una conferencia, pues hay base y maneras de poder hacer desarrollos que pueden ser muy instructivos y concluyentes, razón por la que no es de extrañar el temor que manifiesta el autor de que pueda resultar excesivamente comprimido el tema general de su conferencia.

Nos hacermos cargo de esta dificultad expuesta por el mismo y, en realidad, consideramos como un esfuerzo extraordinario el que ha realizado para llegar a resumir las formas posibles en compendio tan estrecho.

* * *

Ocupará Don Clemente Sáenz la vacante que tristemente ocurrió por fallecimiento del sabio doctor Marañón, del que tan grato recuerdo conservamos en esta Academia y además en algunas otras a las que también perteneció, pero del mismo modo que ese sabio doctor tenía una amplia base que le hacía polifacético en su actuación científica, de un modo análogo el profesor Clemente Sáenz sigue una norma parecida, ya que este discurso forma una manera ocasional de exponer un problema particular y extenso, pero que presupone suficiente base para poder ahondar en el conjunto de las ciencias físicas y naturales, que son materia bien adecuada por su propia esencia en la formación de esta Academia.

Nuestra enhorabuena y al mismo tiempo la que transmitimos a la Corporación por el nuevo miembro numerario que de ella forma parte.