REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

# IMPACTOS DEL ANÁLISIS ARMÓNICO

DISCURSO

LEIDO EN EL ACTO DE SU RECEPCION

POR EL

EXCMO. SR. D. MIGUEL DE GUZMAN OZAMIZ

Y

CONTESTACION

DEL

RVDO. P. ALBERTO DOU MASDEXEXAS, S. J.

EL DIA 23 DE MARZO DE 1983

MADRID
DOMICILIO DE LA ACADEMIA:
VALVERDE, 22.—TELEFONO 221-25-29
1983

DISCURSO

DEL

EXCMO. SR. D. Miguel de Guzmán Ozámiz

Tema:

IMPACTOS DEL ANALISIS ARMONICO

Excmo. Sr. Presidente,
Excmos. Sres. Académicos,
Señoras, Señores:

Quisiera dedicar en primer lugar unas breves palabras para expresaros, Sr. Presidente, Sres. Académicos, mi más profundo agradecimiento por haberme elegido para incorporarme entre vosotros. Agradecimiento tanto más hondo por cuanto que la circunstancia más clara que ha venido a colocarme en esta situación está en vosotros mismos. A mi parecer, con toda sinceridad, mi mérito más patente consiste en la gran fortuna de haber tenido, a lo largo de toda mi vida de interés por las matemáticas, los contactos humanos privilegiados de que he disfrutado, mis maestros, mis alumnos, mis compañeros de investigación, mis amigos matemáticos. Y entre vosotros se sientan una buena porción de mis maestros. El entorno humano que ha rodeado mi actividad matemática ha sido ciertamente privilegiado. Si hubiera de señalar los nombres de todas aquellas personas que desde mi infancia, comenzando por mis propios hermanos, me han ayudado a adentrarme en el mundo de las matemáticas y a gozar intensamente de ellas, tendría que presentar una lista interminable. Permitidme que mencione tan sólo los nombres de tres personas con quienes tengo un especial deber de gratitud: el profesor Alberto Dou, de la Universidad Complutense de Madrid, miembro numerario de esta Academia, el profesor Alberto P.Calderón, de la Universidad de Chicago y de la Universidad Nacional de Buenos Aires, miembro correspondiente de esta Academia y el profesor Antoni Zygmund, de la Universidad de Chicago, también miembro correspondiente de la Academia. Casi toda mi vida matemática ha transcurrido en compañía de estas tres personas a las que debo enseñanzas mucho más importantes que las que se refieren a la transmisión de las técnicas y al manejo de las herramientas del oficio. El contacto con ellos y con otros muchos matemáticos, maestros, compañeros, alumnos, me ha enseñado, sobre todo con su actitud vital, mucho más eficazmente que con sus palabras, principios que quisiera yo ver plasmados en mi vida tan claramente como los he visto en la de ellos.

Ellos me han enseñado que también en nuestra profesión y en nuestra vida de dedicación y cultivo de la ciencia, los valores humanos, la amistad profunda, la comprensión afable de situaciones ajenas, el sentido de servicio de nuestra actividad deben estar muy por encima de todas las metas puramente profesionales que nos podamos señalar, y que son estos valores los que proporcionan a nuestra forma peculiar de exploración y contemplación del universo una dimensión personal y un calor humano con los que nuestra tarea se convierte en una de las formas más sublimes y completas de la actividad humana.

A través de ellos he aprendido también que la sinceridad más honda debe iluminar nuestro quehacer científico. Sinceridad que se traduce, cuando la aplicamos a nosotros mismos, en sencillez que nos hace capaces de colocarnos en nuestro propio lugar, sin tratar de alcanzar crispadamente objetivos que caen fuera de nuestro alcance. Sinceridad que se convierte, al mirar a nuestro alrededor, en honradez intelectual que nos conduce a valorar justamente el esfuerzo y los resultados de los demás. Sinceridad que se convierte también en alegría plena al permitirnos reconocer y gozar intensamente de los logros científicos que otros, cercanos o lejanos a nosotros, han conseguido con su esfuerzo.

Por la actitud de mis maestros he entendido que en nuestro mundo científico la autoridad verdadera, la que realmente vale, no se consigue con el manejo de las estructuras de poder, sino a través del trabajo serio propio y de la capacidad de estimular y alentar constantemente a otros, dejando a la vez que cada uno sea verdaderamente él mismo y desarrolle sus propias capacidades sin imposiciones ni interferencias, con la convicción íntima de que el mayor éxito de un verdadero maestro consiste en haber estimulado a discípulos que sean capaces de aventajarle, cuanto más mejor, y de enseñarle nuevos mundos en aquel campo mismo donde él les introdujo y en otros muchos que él no conoció.

Por estas enseñanzas y por otras muchas que he ido acumulando en el contacto con mis maestros, compañeros y alumnos a lo largo de los años de trabajo, y que quisiera poner en práctica con el acierto de que sea capaz, quiero manifestar aquí mi más hondo agradecimiento. Y quisiera que ellos mismos me ayudasen a agradeceros a vosotros, Sr. Presidente, Sres. Académicos, la benevolencia que me habéis mostrado con vuestra elección.

***

Me habéis llamado para ocupar el lugar que dejó el P.Antonio Romañá hace poco más de un año. ¡Menos mal que el ocupar su puesto no me impone la obligación de alcanzar su categoría humana y científica! Yo no tuve la fortuna de conocerle personalmente, pero sí por terceras personas y a través de sus escritos. En la persona del P.Antonio Romañá, además de sus profundos valores científicos, debieron de brillar especialmente las cualidades que acabo de señalar. El profesor José María Torroja, secretario de esta Academia, ha descrito en su necrología cómo en él destacaron especialmente "su modestia, su exquisita delicadeza en cuantas cuestiones hubo de tratar, su afán de hacer el bien y de ayudar a cuantos se le acercaron con cualquier problema, su bondad sin límites que le llevaba a encontrar justificación para todo y para todos. Y una voluntad férrea para el trabajo".

El P.Romañá fue un hombre polifacético, capaz de emprender y llevar a cabo con éxito difíciles tareas de muy distinta índole. Se adentró hondamente en matemáticas, en filosofía, en astronomía, y supo integrar con notable éxito sus conocimientos, como se pone de manifiesto, por ejemplo, en su profundo discurso de ingreso en esta Academia en 1966, "Idea sobre el estado actual de la Cosmología". Su prestigio científico en el campo de la astronomía fue internacionalmente reconocido con múltiples distinciones. Fue un organizador extraordinariamente eficaz y un entusiasta colaborador en multitud de proyectos útiles, nacionales e internacionales, siempre dispuesto a prestar sus servicios allí donde se requirieran. La austeridad, sencillez, espíritu de servicio que de un modo tan especial brillaron en él, constituyeron simplemente la expresión del espíritu evangélico del que impregnó toda su vida. Su amplísima cultura, sus aficiones por la historia, el periodismo, el arte, el ajedrez, el bridge, daban a su trato una cercanía y un calor personal que resultan modélicos para todos nosotros. El secreto a voces de su vida fue su profunda fe religiosa. Como dice el jesuíta P.Antonio Blanch en su semblanza del P.Romañá (Razón y Fe, Noviembre 1981,500-505):"Los que tuvimos la suerte de conocer de cerca a este gran científico jesuíta... siempre recordaremos a Antonio Romañá... como a un hombre de ciencia y a un creyente profundo en quien se hizo realidad viva esa tarea, que para tantos de nosotros sigue siendo un ideal aunque tan difícil nos resulte conseguirlo: la feliz integración del ejercicio de la fe viva con el ejercicio libre y valiente de la inteligencia".¡Ojalá que en nuestro mundo científico vengan a abundar los hombres como el P.Romañá!

***

En mi discurso pretendo poner de manifiesto someramente algunas de las implicaciones que el análisis armónico ha tenido, a lo largo de la historia de la ciencia y de la tecnología, sobre el desarrollo de éstas, señalando en particular cómo una disciplina que en cierto modo se puede contar como una de las más abstractas de las matemáticas, presenta vertientes que han influenciado extraordinariamente no sólo el curso del pensamiento matemático, científico y tecnológico, sino incluso el del pensamiento filosófico.

## EL SUEÑO PITAGORICO.TODO ES ARMONIA Y NUMERO

Por la admiración, dice Aristóteles, comenzó el hombre a filosofar. La capacidad de admiración, esa prerrogativa del hombre sobre los animales, lleva al ser humano a inquirirlo todo, incluso el fenómeno más rutinario, una vez que adquiere la paz y la posibilidad de ocio necesarias para ello. ¿Cómo está constituída la tierra y el cielo? ¿Cómo giran los astros, Sol, Luna y estrellas? ¿Existe alguna ordenación de sus movimientos acompasados? ¿Qué tienen que ver nuestras estaciones y nuestro propio vivir con ellos? El volar de los pájaros, el transcurrir de las nubes, el tejer de las arañas, el crecer de los árboles, el fuego, el agua, ... desde todos los rincones a donde el hombre dirige su mirada surge una admiración primero y una interrogación después.

Durante mucho tiempo el hombre ha ido a buscar la respuesta a sus preguntas, sobre todo a sus preguntas más cercanas e ineludibles, las que envuelven su propia felicidad y su miseria, su vida y su muerte, en la magia y en la religión. Tales preguntas son, por supuesto, las más misteriosas, profundas y oscuras, puesto que involucran la raíz de su propio ser. Era un problema demasiado difícil para comenzar su tarea de pensador y por ello el contenido de su respuesta, que respuesta sí que tenía que dar perentoriamente, estuvo, está y estará, por fuerza, encarnado en la entraña misma del hombre, allí donde el elemento telúrico, visceral, se entrevera con los condicionamientos previos y con los elementos volitivos y racionales de su complicada estructura.

Pero llegó un momento en que el hombre pudo, y quiso, dirigir con intensidad su mirada y su interrogación hacia objetos más despegados de su preocupación existencial. Con ello se hizo capaz de buscar su respuesta en razones estables, sólidas, independientes del país, de la moda, del correr de los años, de su propio humor. Es probable que los primeros objetos en que este tipo de acuerdo universal se plasmó fueran la figura y el número. En ellos aprendió el hombre a razonar, es decir, a basar sus aserciones sobre aserciones previas aceptadas, deduciéndolas de ellas de un modo que no podía menos de suscitar la aprobación del interlocutor. No es que el hombre no hubiese razonado antes. Lo nuevo fue el poder elevarse, a través de peldaños sólidos, hasta afirmaciones incontrovertibles, a primera vista bien alejadas de los principios que les dieron nacimiento. Según parece el hombre que hizo de este ejercicio su modo de pensar fue Pitágoras en el siglo VI a. de C.. A esta actividad le llamó ἱστορία, exploración, y a su producto, μάθησις, enseñanza.

Es muy probable que los elementos dispersos de este sistema estuvieran ya en el ambiente culto de la Grecia jónica de Tales y Anaximandro, pero parece Pitágoras el responsable de haberlos convertido en método firmemente establecido. Nunca en la historia las ideas matemáticas ejercieron un influjo social tan importante como en un cierto fragmento de la sociedad de la ciudad de Crotona, en el sur de Italia, una vez convertido al pitagorismo. Pitágoras no fue un matemático descarnado. Había viajado mucho. Es posible que aprendiera de Tales de Mileto todo lo que este sabía de geometría. En Egipto había sido iniciado tal vez en astronomía y en los misterios religiosos. Es posible que visitara Babilonia y aprendiera de los sabios orientales sus métodos astronómicos. Con esta brillante aureola constituyó en Crotona su escuela. Su gran éxito social se debe probablemente a la integración armoniosa que logró con su saber. Los conocimientos matemáticos constituyeron el armazón esotérico destinado a los iniciados, los μάθηματικοι. Intimamente ligada a ellos y firmemente fundamentada en ellos estaba la doctrina especulativa. De los resultados de este conocimiento y del respeto reverencial hacia el maestro participaban los ἀκουσματικοι, los acusmáticos, los miembros del grupo no iniciados que recibían de oídas el credo de la secta. Todos ellos estaban hermanados en la creencia de doctrinas religiosas de naturaleza órfica, de la transmigración de las almas, en la práctica de prescripciones rituales de oscuro origen y de mandatos y ejercicios espirituales de una gran perfección.

La visión pitagórica fundamental, la base de su sitema, consistió en la persuasión profunda de la inteligibilidad del cosmos mediante el número. En uno de los pocos fragmentos que han llegado hasta nosotros de unos de los pitagóricos primitivos, Filolao, se encuentra el siguiente himno al número: *Grande, todopoderosa, todoperfeccionadora y divina es la fuerza del número, comienzo y regidor de la vida divina y humana, participante de todo. Sin el número todo carece de fronteras y todo es confuso y oscuro. Porque la naturaleza del número proporciona conocimiento y es guía y maestra para todos en todo lo que es dudoso o desconocido. Porque nada de las cosas nos sería claro ni en su mismo ser ni en sus relaciones mutuas si no existiera el número y su esencia. Este es quien armoniza en el alma las cosas con su percepción, haciéndolas cognoscibles y congruentes unas con otras según su naturaleza, proporcionándoles corporeidad.* (Diels, B.11).

¿Cuál pudo ser el camino intelectual de Pitágoras para llegar a esta idea tan profundamente moderna? Más de 21 siglos habrán de transcurrir para que, a partir del siglo XVI, tal doctrina quede firmemente establecida en el pensamiento de la humanidad.

Es en este itinerario mental donde tiene lugar el primer impacto notable del análisis armónico.

Los pitagóricos no escribían sus teoremas. Ni siquiera los dibujaban. Los construían con piedrecillas (ψῆφοι [2]). ¿Qué tipo de teoremas? Por ejemplo: $1+3=2^2$, $1+3+5=3^2$, $1+3+5+7=4^2$,..., es decir, la suma de los n primeros impares es igual al cuadrado de n.

La demostración del teorema es sencilla al ir construyendo con piedrecillas cuadrados sucesivos de dos, tres, cuatro piedrecillas en cada lado. Cuando éste y otros teoremas nada obvios sobre números surgían de la simple formación de figuras, debió de quedar claramente impresa en la mente de Pitágoras que una relación profunda tenía que existir entre aquellos dos objetos de naturaleza aparentemente tan distinta, la figura y el número.

Pero la observación fundamental que debió de provocar en Pitágoras su iluminación definitiva sobre la naturaleza aritmética del cosmos fue probablemente la de la armonía producida en el sonido de los instrumentos de cuerda. La cuerda de una cítara produce un sonido. Pisada en la mitad, 1/2, produce la octava superior, pisada en los 2/3 produce la quinta, pisada en los 3/4 produce la cuarta. ¡La música de una cítara está gobernada por las distintas proporciones entre los números! ¡Los números y sus proporciones dominan la figura, la geometría... y también la música! Y si mundos aparentemente tan inconexos están claramente regidos por el número... ¿por qué no el universo entero? Posiblemente en el número se encontraría la clave para entender el cosmos. Para el entusiasmo místico de Pitágoras las experiencias acumuladas a lo largo de sus años de viajes por los países de milenaria tradición como Egipto y Babilonia convergían con sus propias observaciones para constituir, más que una demostración, una auténtica evidencia directa. La aritmética, la música, la geometría y la astronomía constituirían el método para tratar de despegar al alma de la tumba (σῆμα) de este cuerpo (σῶμα) a fin de ayudarla a evadirse del círculo de reencarnaciones.

¡El número como método de pensamiento para desvelar los misterios del universo! Esta iluminación constituyó un verdadero giro en la historia del pensamiento. Implicaba cambiar radicalmente de oráculo en la búsqueda de respuesta a muchas de las infinitas preguntas del hombre. La naturaleza es regular, es decir, sigue unas reglas, unas pautas. Tiene un orden, una armonía, es decir, sus componentes están entrelazadas según unos cánones constantes, invariables. Nuestro pensamiento puede asir estas normas de actuación de la naturaleza. El número es la herramienta a su disposición para hacerse con ellas.

El primer impacto del análisis armónico, como vemos, está presente en la misma raíz del pensamiento filosófico y científico occidental, la inteligibilidad del universo a través de la razón, y precisamente de la razón cuantificadora y matematizante.

El análisis armónico, tal como lo entendemos hoy, consiste en un proceso matemático para explorar los fenómenos de naturaleza recurrente. Toda intelección, no sólo la matemática, está en realidad fuertemente ligada a la recurrencia, a la repetitividad o a la repetibilidad. Sin ella nuestro pensamiento no encontraría esquemas de referencia. La recurrencia es condición intrínseca de nuestro tipo de intelección. El caos, lo ininteligible, es la ausencia de recurrencias. Si cada animal que nos encontrásemos fuese totalmente diferente en su modo de locomoción, en sus órganos sensoriales, en su forma de alimentación, etc... ¿Podríamos tener una ciencia zoológica organizada? Si los astros todos llevasen trayectorias de diferentes tipos, si nuestros días y noches fuesen todos de diferente duración, sin las uniformidades que observamos, no tendríamos la ciencia astronómica que tenemos. Nuestra forma de entender referencial exige esquemas de recurrencia en los que encajar los nuevos fenómenos.

En el espíritu matemático la recurrencia motiva y estimula la noción misma de número. Con el número como instrumento se puede analizar más de cerca la recurrencia, entenderla más profundamente desde diversos ángulos, relacionando unas recurrencias con otras. Así aparece la proporción. Con este bagaje, al contemplar el universo llegamos al firme convencimiento de que el todo es un cosmos lleno de proporciones, de ritmos, de armonías antes insospechadas. ¿O tal vez son las categorías que proyectamos nosotros mismos para entender el universo a nuestro modo? En cualquier caso, para nosotros el mundo está lleno de orden y armonía y allí donde no lo encontramos a primera vista lo buscamos ansiosamente, porque sabemos que está escondido esperando ser desvelado.

La ubicuidad de la periodicidad en la naturaleza es patente y bien cercana. Nuestra vida está regida por la sucesión de días y noches, veranos, inviernos, años,... nuestro cuerpo está constantemente animado por ritmos fisiológicos, latidos, respiraciones. Nuestro espíritu también tiene sus ritmos anímicos. Nuestra actividad toda, nuestra música, nuestros juegos, nuestras máquinas están invadidas por la periodicidad.

Y esta es más importante, si cabe, si descendemos a los niveles más elementales de la materia, como veremos más adelante. Por todo ello no es de extrañar que el progreso del pensamiento humano en su exploración de la naturaleza haya sido fuertemente estimulado, como tendremos ocasión de resaltar después, por el análisis matemático de los procesos periódicos.

La influencia pitagórica a lo largo de los siglos ha sido inmensa. La antorcha pitagórica fué recogida dos siglos más tarde por Platón y transmitida con empuje a través de su escuela y de sus escritos. Platón no fue propiamente un matemático profesional. Sin embargo su veneración profunda ante el poder de las matemáticas y el estímulo que de él recibieron tantos matemáticos posteriores son motivo de que Platón tenga un lugar muy prominente en la historia de las matemáticas. También Aristóteles fue un profundo conocedor de las matemáticas, como buen discípulo de Platón. Posiblemente sólo Leibniz y Descartes, entre los filósofos le igualaron en el conocimiento profundo de la matemática contemporánea. Pero el talante intelectual de Aristóteles y su fuerte influencia en el pensamiento del final de la edad media tuvo otro sabor diferente. En Aristóteles dominó el espíritu clasificador, que estimula el estudio cualitativo de las relaciones entre las cosas (categorías), sobre el espíritu cuantificador, tan eminente en los pitagóricos, platónicos, neoplatónicos y neopitagóricos. Del espíritu clasificador surgen la filosofía y las ciencias de tipo más cualitativo (no en vano Aristóteles, hijo de un médico, sobresalió especialmente por sus observaciones en el terreno de la biología). Del espíritu cuantificador surgen las ciencias que se han llamado exactas. Naturalmente que todas las ciencias acuden a métodos cuantitativos y cualitátivos cuando lo necesitan para su progreso. La biología, desde siempre, ha recurrido a elementos cuantitativos en sus intentos explicativos y clasificatorios. Asímismo la matemática recurre al espíritu clasificador para lograr la unificación y ordenación cuando su ciencia se le dispersa (recuérdese el programa de Erlangen o los intentos de clasificación en la selva de métodos y resultados en la teoría de ecuaciones en derivadas parciales).

Los matemáticos de todos los tiempos se han identificado con el espíritu soñador de Pitágoras y Platón más que con el espíritu aristotélico. En la historia del análisis armónico se revela especialmente el maridaje, extraño para muchos, de matemáticas y misticismo que perdura en nuestros días en las elucubraciones de nuestros astrólogos de claro sabor cabalísitico y neopitagórico, sólo que con mucho menos soporte racional y mucha más supeficialidad que en buena parte de los antiguos.

En el siglo XVI aparece un nuevo Pitágoras, totalmente imbuído de la idea de que el universo es explicable mediante la armonía y proporciones numéricas, Johannes Kepler. En su Mysterium Cosmographicum (1596) se expresa del siguiente modo: *Yo me propongo demostrar que Dios, al crear el universo y al establecer el orden del cosmos, tuvo ante sus ojos los cinco sólidos regulares de la geometría conocidos desde los días de Pitágoras y Platón, y que El ha fijado de acuerdo con sus dimensiones el número de los astros, sus proporciones y las relaciones de sus movimientos*. En el sistema del misterio cosmográfico el Sol ocupaba el centro de una esfera en la que se movía Saturno. Si en ella se inscribía un cubo y en el cubo otra esfera, allí giraba Júpiter. En esta última esfera se inscribía un tetraedro y en él otra esfera. Allí se movía Marte,... Kepler era un místico respetuoso de los hechos. Estos desmintieron su teoría concreta de los cinco cuerpos regulares, pero nunca le hicieron abandonar la idea de la armonía matemática del cosmos. Esta confianza absoluta en el orden del universo le llevó en 1609 al hallazgo de sus dos primeras leyes sobre el movimiento planetario, habiendo de superar para ello nada menos que sus propios prejuicios sobre la preferencia de la naturaleza por el movimiento circular y por el movimiento uniforme, pensamientos tan platónicos y tan fuertemente enraizados en el ambiente. En 1619, en su obra De Harmonice Mundi, enuncia su tercera ley que venía a confirmar que aunque la armonía musical de las esferas de los pitagóricos no fuese una realidad física, era ciertamente una realidad asequible a los ojos y oídos del alma, mucho más profunda que la música de los sentidos. Kepler llegó incluso a idear una notación musical para representar el movimiento de los planetas. Bien se puede afirmar que el pitagorismo de Kepler, apoyado en su respeto extraordinario por los hechos y por las mediciones aportadas por Tycho Brahe, fue el elemento esencial que logró asentar la teoría copernicana en la mente de los astrónomos.

El primer análisis matemático de las ondas, en un sentido más cuantitativo, lo realizó otro gran místico matemático que se mantuvo oculto como tal durante toda su vida, Isaac Newton. En sus Principia (1687) estudia las ondas y gracias a este análisis calcula la elipticidad de la tierra con una exactitud que hoy nos asombra. La faceta esotérica de Newton, un ferviente seguidor del místico Jakob Böhme, ha permanecido en la sombra durante mucho tiempo. El hombre que públicamente "no forjaba hipótesis" se reservaba para sí mismo un gran banquete de ellas de la más variada naturaleza. Después de su muerte, al levantar la tapa del arcón en que Newton mantenía sus escritos esotéricos, el obispo Horsley quedó tan aterrado por los fantasmas de tales especulaciones heterodoxas de aquel padre de la patria que estaba enterrado junto a los reyes de la nación, que decidió que más valía cerrar rápidamente aquella caja de Pandora. El ejemplo de Newton podría ser devastador para las doctrinas establecidas.

## EL RETORNO DE LOS ARMONICOS

La Historia moderna del análisis armónico comienza como una nueva variación del tema pitagórico, esta vez con los instrumentos del análisis matemático del siglo XVIII. Entre los problemas propuestos por Brook Taylor en su Methodus incrementorum directa et inversa (1715) figuran los dos siguientes: *Problema 17. Determinar el movimiento de una cuerda tensa. Problema 18. Dada la longitud y el peso de la cuerda, así como la fuerza que la tensa, encontrar el tiempo de vibración.* Taylor obtiene en su lenguaje propio, un tanto distinto del nuestro, la ecuación dife-

rencial de la cuerda vibrante, es decir la ecuación de ondas unidimensional. Encontró que el movimiento de un punto arbitrario es el de un péndulo simple y determinó su tiempo de vibración, su período. Asímismo estableció que la forma de curva que toma la cuerda en un instante dado es sinusoidal.
El estudio matemático iniciado por Taylor de la cuerda vibrante dió lugar a una de las controversias más encendidas y más fructíferas en la historia de las matemáticas. Sin temor a equivocación se puede afirmar que el desarrollo del análisis matemático del siglo XIX tiene como hilo conductor el deseo de proporcionar respuestas satisfactorias a las muchas preguntas originadas en el estudio de la cuerda vibrante.

En 1727, doce años después del tratamiento de Taylor, Johan Bernoulli propone a su hijo Daniel que se ocupe del problema de la cuerda. Pero no puede esperar para hacer públicas sus propias ideas sobre el asunto y en 1728 publica sus Meditaciones sobre cuerdas vibrantes con pesos pequeños a distancias iguales, donde trata, con métodos muy diferentes, el mismo problema. Pero sus resultados no van mucho más lejos.

Una idea más original llega veinte años más tarde, en 1747, con el hallazgo, por D'Alembert, de la forma general de la solución de la ecuación de ondas, $y=f(t+s)+g(t-s)$. D'Alembert trata de demostrar "que existe una infinidad de curvas distintas de la sinusoidal" entre las posibles formas de la cuerda vibrante. Por la forma de la ecuación general, dice, "es fácil ver que esta ecuación encierra una infinidad de curvas". Estudia el caso particular de que la cuerda "esté en línea recta al comienzo de la vibración y luego, por un impulso adecuado, toma la forma de una curva sinusoidal muy alargada".

La deducción de D'Alembert en este artículo era un tanto tortuosa. Por otra parte no quedaba bien claro cómo se determinaban las funciones f y g ante un problema que claramente debía tener una respuesta bien determinada. Por ello Euler, en 1748, trató de aclarar estas cuestiones. Presentó otra demostración y determinó f y g supuestas conocidas las condiciones iniciales, posición y velocidad, de la cuerda. Para Euler esta posición y velocidad venían dadas por curvas "mecánicas" arbitrarias, por ejemplo, la curva inicial formada por la cuerda podía ser, al pisarla en su punto medio, una línea quebrada.

Algo había oscuro para D'Alembert en estas consideraciónes de Euler. El método partía de que la curva formada por la cuerda en cada instante se pudiese expresar "analíticamente" a partir de la abscisa y del tiempo. Así se expresa él mismo en 1750, enfrentándose a la concepción de Euler: *En cualquier otro caso, el problema no puede ser resuelto, al menos por mi método, y no estoy cierto de que no sobrepase la potencia del análisis conocido. En efecto, no se puede, me parece, expresar y analíticamente de una manera más general que suponiéndola función de t y de s, pero en este supuesto, no se encuentra la solución del problema más que para los casos en que las diferentes figuras de la cuerda vibrante puedan ser encerradas en una sola y misma ecuación.*

Para D'Alembert la curva "mecánica" de Euler no es tratable mediante los métodos del cálculo diferencial, no admite una expresión mediante "una sola y misma ecuación". Por ello no puede aceptar la solución de Euler.

En este momento interviene Daniel Bernoulli, con cuya entrada el asunto se embrolla todavía más. Bernoulli, en 1753, subraya un aparente conflicto entre las consideraciones de Taylor, por una parte, con sus soluciones sinusoidales, y la infinita variedad de soluciones, distintas de las sinusoidales, por parte de D'Alembert y Euler. Trata de reconciliar las dos consideraciones mediante una visión sintética de la naturaleza musical de las vibraciones....*un análisis abstracto que se acepta sin un examen sintético de la cuestión discutida nos puede posiblemente sorprender más que iluminar. Me parece que sólo tenemos que prestar atención a la naturaleza de las vibraciones simples de las cuerdas para prever sin cálculo todo lo que estos dos grandes geómetras han encontrado mediante los cálculos más espinosos y abstractos que la mente pueda realizar.* La cuerda admite unos cuantos modos simples de vibración natural que vienen dados por las soluciones de

Taylor. Por otra parte cualquier combinación lineal de estas soluciones simples es claramente una solución del problema....*Esto es cierto, si bien no lo tengo aún del todo claro: si existen aún otras curvas, entonces no sé en qué sentido puedan ser admitidas.* Lo que Bernoulli parecía conocer con claridad era que una respetable confusión reinaba sobre el tema.

La contestación de Euler en el mismo año 1753 no contribuyó mucho a aclarar la situación. Euler afirmaba que la solución de Bernoulli, necesariamente periódica no podía ser una solución general. Contra D'Alembert Euler simplemente reafirma la validez y la generalidad de su solución en todos los casos. *Yo creo que la solución que he dado no es limitada en ningún respecto; al menos yo no puedo descubrir ningún fallo en ella y nadie todavía ha demostrado su insuficiencia.*

La polémica quedó un tanto petrificada en este estado. Otros matemáticos, como Lagrange, Laplace, intervinieron en ella más adelante, pero en realidad la clarificación del tema sólo podía venir de una profundización en las raíces mismas del análisis.

A los matemáticos de hoy día nos resulta difícil pensar que una controversia semejante pudiera surgir en medio de nuestro análisis matemático. Para buscar un lugar de nuestra matemática en que algo parecido haya sucedido o esté sucediendo en nuestros tiempos tenemos que acudir a los puntos de los fundamentos en los que no hay claridad ni acuerdo universal.Son, en el fondo, los mismos enigmas que desde los tiempos de Zenón de Elea siguen constituyendo un desafío a nuestra potencia de racionalización del infinito.

Vista a distancia, la controversia de la cuerda vibrante nos parece hoy más superficial. Las discusiones de la polémica constituían en realidad las contracciones de la matemática por dar a luz una nueva noción de dependencia funcional. La concepción prevalente de función era fuertemente algebraica. La función tratable por los medios del análisis, lo hemos oído al propio D'Alembert, debe ser expresable mediante "una sola y misma ecuación". Euler mismo, a pesar de su noción de "curva mecánica" no parece concebir, frente a Daniel Bernoulli, que una expresión analítica, tal como la combinación lineal infinita en senos y cosenos, pueda coincidir, dentro de un cierto intervalo, con una de sus curvas mecánicas. La serie infinita no era, por su infinitud, preocupación importante para Euler que las trataba con una audacia bien temeraria. Por su parte Bernoulli mismo presentía la solución del problema, pero no parecía ver las cosas tan claras como para ser capaz de dar la razón profunda de sus afirmaciones.

Las escamas que cubrían los ojos de los matemáticos del tiempo eran su concepción de función, al modo de polinomio. ¡Y un polinomio queda perfectamente determinado para todos los valores una vez que se conocen sus valores en un intervalo por pequeño que sea! Este era el paradigma que había que romper.

¿Cómo se rompe un paradigma? El paradigma, en matemáticas, como en todas las ciencias, se suele romper con la paradoja, para dar lugar a un paradigma nuevo. La paradoja nos enfrenta con nuestras propias ideas y modos de proceder rutinarios, con nuestros paradigmas. Las herramientas que cotidianamente manejamos sin cuestionarlas en modo alguno, nos aparecen como iluminadas de un modo nuevo. El hombre primitivo que con su tosca maza quiso un día hacer un agujero en la piel del mamut que le atacaba, pronto tuvo que percibir que algo iba mal. Y yo ¿por qué manejo esta herramienta precisamente? ¿Y por qué precisamente así? Había inventado la lanza.

Las revoluciones científicas se gestan a menudo por la aparición de fenómenos paradójicos que no encajan en los paradigmas del momento. En el armonioso sistema de las proporciones pitagóricas apareció, era inevitable, el ἄλογος , el monstruo, el número irracional. Los μαθηματικοί , los iniciados, guardaron el secreto por algún tiempo. No convenía que los acusmáticos supieran de su existencia. Según cuenta Proclo, Hipaso de Metaponto pereció en un naufragio como castigo por la divulgación del secreto. Las paradojas de Zenón, en particular la del estadio, parece haber ido encaminada a establecer la inconsistencia del atomismo numérico de los pitagóricos. Las paradojas de los infinitesimales, esos "fantasmas de las cantidades difuntas", puestas de manifiesto por Berkeley, a propósito de los nacientes paradigmas del cálculo infinitesimal, estimularon fuertemente la búsqueda de un apoyo sólido para el cálculo.

Para la emergencia y consolidación de nuevos paradigmas cuando los antiguos van quedando inservibles se deben dar condiciones favorables. La paradoja del irracional vino a minar el maridaje fecundo que los pitagóricos habían concertado entre el número y la figura. Eudoxo construyó una perfectísima técnica para solucionar las desavenencias surgidas, el método de exhausción. Sin embargo el método debió de parecer a los matemáticos contemporáneos demasiado complicado. El precio que había que pagar por conservar la armonía entre proporción y figura era excesivo. La consecuencia fue la dedicación de los griegos a una geometría más desligada del número. Las ideas de Eudoxo hubieron de esperar hasta el siglo XIX. Si para los griegos hubiera sido más importante conservar y continuar por el camino pitagórico puro, el transcurso de la matemática hubiera sido bien distinto probablemente.

En el caso de los infinitesimales, los productos tan valiosos que salían desde el principio del oscuro castillo del cálculo de fluxiones, densamente poblado por los "fantasmas de las cantidades difuntas" no dejaban lugar a dudas sobre el valor práctico de los nuevos paradigmas. "¡Adelante, que la fe ya os llegará!", era el consejo de D'Alembert. Y los matemáticos continuaron trabajando con fe, aunque no muy fundamentada hasta bien finalizado el siglo XIX. En realidad, la fundamentación del análisis corre pareja con la solución de las dificultades en torno a la cuerda vibrante.

## LA VISION DE FOURIER:INCLUSO EL FUEGO ES REGIDO POR LOS NUMEROS

El asentamiento definitivo del nuevo concepto de función hubo de esperar algún tiempo. Quien dió los pasos decisivos para lograrlo fue Fourier.

Fourier se manifiesta también profundamente pitagórico en el interesante discurso preliminar de su obra fundamental, Teoría analítica del calor, publicada en 1822.*Las ecuaciones analíticas .. no se restringen a las propiedades de las figuras y a las que son objeto de la mecánica racional; se extienden a todos los fenómenos generales. No puede haber un lenguaje más universal ni más simple, más exento de errores y de oscuridades, es decir más digno de expresar las relaciones invariables de los seres naturales. Considerado bajo este punto de vista, el análisis matemático es tan extenso como la naturaleza misma; define todas las relaciones sensibles, mide el tiempo, los espacios, las fuerzas, las temperaturas;... su atributo principal es la claridad; no tiene en absoluto signos para expresar nociones confusas. Relaciona los fenómenos más diversos y descubre las analogías secretas que los une. Si la materia se nos evade, por su extrema tenuidad, como la del aire y de la luz, si los cuerpos están situados lejos de nosotros, en la inmensidad del espacio, si el hombre quiere conocer el espectáculo de los cielos en épocas sucesivas que un gran número de siglos separa, si las acciones de la gravedad y del calor se ejercen en el interior del globo sólido a profundidades que nos serán siempre inaccesibles, el análisis matemático puede, con todo, dominar las leyes de estos fenómenos. El nos los hace presentes y parece ser una facultad de la razón humana destinada a suplir la brevedad de la vida y la imperfección de los sentidos; y, lo que es aún más notable, sigue el mismo camino en el estudio de todos los fenómenos; los interpreta con el mismo lenguaje como para atestiguar la unidad y la simplicidad del plan del universo, y hacer aún más patente este orden inmutable que preside en todas las causas naturales.*

A la cabeza del capítulo primero de este gran "poema matemático", como Maxwell llamó a la Teoría analítica del calor figura en latín una cita de Platón que resume el pensamiento básico de Fourier sobre la aplicabilidad universal del análisis matemático: ET IGNEM REGUNT NUMERI (incluso el fuego está gobernado por los números). Fourier llevó adelante esta persuasión con tenacidad. En su actitud matemática significó en particular no poner ninguna barrera al tipo de dependencia funcional manejable mediante el análisis.

*Si se propone una función $f(x)$ cuyo valor está representado, en un intervalo determinado, desde $x=o$ hasta $x=X$, por la ordenada de una curva trazada arbitrariamente, se podrá desarrollar esta función en una serie que no contendrá más que los senos y cosenos de los arcos múltiples... Estas series trigonométricas, ordenadas según los cosenos o los senos del arco, pertenecen al análisis elemental como las series cuyos términos contienen las potencias sucesivas de la variable. Los coeficientes de las series trigonométricas son áreas definidas, y los de las series de potencias son funciones dadas por diferenciación y en las cuales se atribuye también a la variable un valor definido. (Ch.III, Sect.VI).*

En esta última comparación de la serie trigonométrica, que hoy llamamos serie de Fourier, con la serie de potencias, se encierra el paso fundamental hacia el nuevo paradigma sobre el concepto de función. Los coeficientes de la serie de Fourier surgen como áreas a partir de la interpretación geométrica de la función, que ahora puede ser representada por una curva mecánica sin ninguna dificultad. Los de las series de potencias surgen de la manipulación de la función interpretada algebraicamente. En nuestros términos más actuales, la gran diferencia entre la serie trigonométrica de Fourier y la serie de potencias de Taylor estriba en que la de Taylor, allí donde representa la función de la que proviene es una función analítica, en nuestros términos, de modo que toda ella está determinada por su comportamiento en cualquier pequeño intervalo, mientras que la serie de Fourier, que puede provenir efectivamente de una función mucho más general, tiene un carácter local, es decir, el valor de la serie en un entorno no contiene ninguna información sobre el valor de la serie en otro entorno disjunto del anterior.

Esta diferencia radical de comportamiento entre una y otra serie, cuya naturaleza aún no se entendía nada bien, constituyó en el fondo la causa principal de la oposición decidida que las ideas de Fourier tuvieron que afrontar al principio. Ya en 1807 Fourier tenía bien organizadas sus ideas sobre la propagación del calor en las que aparecía la posibilidad de representar una función totalmente arbitraria, incluso una función discontinua, mediante una serie trigonométrica. Presentó su trabajo a la Academia de Ciencias y se encontró con la oposición de Lagrange. Laplace y Legendre fueron los otros dos miembros de la Academia que hubieron de juzgar el trabajo de Fourier. Laplace no debió de ser tan desfavorable al trabajo. La monografía no fue admitida para su publicación, pero la Academia deseó estimular a Fourier a desarrollar sus ideas y estableció un premio, que se debería otorgar cuatro años después, en 1812, al mejor trabajo matemático sobre la propagación del calor. Fourier presentó de nuevo sus ideas en 1811 con una revisión de su trabajo de 1807. Ganó el premio, pero el tribunal, en el que de nuevo estaban presentes Lagrange, Laplace y Legendre, decidió que carecía del rigor suficiente para ser publicado en las Memorias de la Academia. No debió de agradar nada a Fourier este resultado. Comenzó a trabajar en una tercera versión de sus ideas para publicarlas en forma de libro que por fin salió a la luz pública en 1822, la Teoría analítica del calor, uno de los grandes clásicos de la matemática y de la física matemática, que traía consigo el germen de una verdadera revolución científica. Los desarrollos matemáticos de Fourier sobre un problema como el del calor, de un interés enorme en los círculos científicos contemporáneos (Sadi Carnot publicaría en 1824 sus Reflexiones sobre la potencia motriz del fuego, fundando la termodinámica con ellas) se presentaban como una clave para entender y aclarar fenómenos que, por otra parte, eran comprobables y medibles. El nuevo paradigma no estaba exento de oscuridades, pero para la mayor parte de los científicos era claro que valía la pena aceptarlo y explorarlo. Dos años después, en 1824, Fourier era Secretario de la Academia y, siendo por naturaleza insistente, logró que su trabajo de 1811 fuese también publicado en su forma original en las Memorias de la Academia en 1824 y 1826.

Los trabajos de Fourier contienen ciertamente muchas afirmaciones audaces que justifican en buena parte los escrúpulos de Lagrange y de otros muchos matemáticos de su tiempo. En realidad, gran parte de los intentos de fundamentación, y muchas de las nuevas herramientas del análisis matemático del siglo XIX fueron motivados para poder establecerlos con el rigor y claridad que Fourier mismo reclamaba para el análisis. Para empezar, la noción de límite de una serie no estaba aún del todo clarificada. Se operaba con series divergentes con una audacia ilimitada, como si fuesen sumas finitas, aunque muchos matemáticos de la época, entre ellos Euler, parecían gozar de una percepción extramatemática para llegar con ellas a conclusiones correctas. Abel escribe en una carta a su maestro Holmboë en 1826: *Las series divergentes son una invención del diablo... Usándolas se puede llegar a cualquier conclusión y es así como estas series han dado lugar a tantas falacias y paradojas... Con la excepción de la serie geométrica no existe en toda la matemática una sola serie infinita cuya suma haya sido determinada rigurosamente. En otras palabras, las cosas más importantes en matemáticas son las que tienen un fundamento más débil... El que muchos resultados sean correctos a pesar de ello es extraordinariamente sorprendente. Yo estoy tratando de encontrar una razón para ello; es una cuestión profundamente interesante.*

La convergencia era un problema importante que oscurecía los resultados de Fourier. En los años 1820 Poisson y Cauchy tratarían de dar demostraciones, ambas tan poco rigurosas como las del mismo Fourier. Pero había otro problema más básico. La determinación de los coeficientes de la serie de Fourier se realizaba, lo hemos oído en palabras del mismo Fourier, mediante el cálculo de un área. Este cálculo, para un área limitada por una curva definida por un polinomio o por otra función sencilla se podía realizar mediante la regla de Barrow. Pero para una curva arbitraria, dejando aparte la significación geométrica, que mientras la curva no fuese muy estrafalaria podría estar más o menos clara, ¿cómo se podía llegar a tal cálculo? Y si la función a representar en serie era verdaderamente extraña, se podría uno incluso cuestionar el significado de tal área. En otros términos, ¿qué era y cómo se había de calcular la integral de una función arbitraria? Los sucesivos refinamientos de la teoría por Cauchy, Riemann, Lebesgue,... estuvieron fuertemente motivados por el deseo de clarificar este punto importante del análisis de Fourier, así como los manejos un tanto indiscriminados de la sumación, integración, derivación bajo el signo integral...

Y a pesar del grado de oscuridad de tales cuestiones fundamentales del análisis, Fourier afirma, sin otro fundamento que la seguridad que le inspiraba la congruencia de su doctrina: *Las series ordenadas según los cosenos o los senos de los arcos múltiples son siempre convergentes. (Ch. III, Sect. VI)*

Como había sucedido con los infinitesimales y como sucedería más tarde con el cálculo operacional de Heaviside y de Dirac, la potencia de las series de Fourier para resolver problemas interesantes de la física contemporánea estimuló a los matemáticos a tratar de iluminar sus oscuridades, más bien que a proponerlas como objeción, a fin de darles franca entrada en el mundo de los entes matemáticos bien establecidos. En 1829 Dirichlet publicó un artículo con el que comenzaba este proceso clarificador. En él se proponía el primer criterio de suficiencia rigurosamente establecido para la convergencia de una serie de Fourier: Supongamos que una función (a) es periódica de período $2\pi$ ,(b) no presenta un número infinito de máximos y mínimos, y (c) si es discontinua en un punto, entonces toma en dicho punto el valor medio de los límites finitos a la izquierda y a la derecha de tal punto. Entonces la serie de Fourier de esta función converge al valor de la función en cada punto.

El trabajo de Dirichlet marca un hito en la historia de la fundamentación del análisis, pues constituye un verdadero modelo de rigor. Como ejemplo de una función que no satisface sus condiciones propuso la que hoy llamamos función de Dirichlet, que toma el valor constante c para cada número racional y otro diferente d para cada irracional. Dirichlet era claramente consciente de la necesidad de discutir más ampliamente los principios fundamentales del análisis infinitesimal. Señala incluso la posibilidad y la conveniencia de ampliar la noción de integral. Dirichlet comprendió que a fin de definir la integral de una función no era necesario que esta fuese continua ni que tuviese a lo sumo un número finito de discontinuidades. En su artículo de 1829 no intentó justificar esta afirmación que, dice, *requiere algunos detalles relacionados con los principios fundamentales del análisis infinitesimal que serán presentados en otra nota...* Absorbido sobre todo por sus investigaciones en teoría de números nunca llegó a realizar este proyecto, pero transmitió su interés por él a quien había de sucederle en 1859 en la cátedra de Göttingen en la que él mismo había sucedido a Gauss hacía tan sólo cuatro años.

Se ha llegado a afirmar que la historia del análisis matemático en el último tercio del siglo XIX ha sido en gran parte la historia de la solución de problemas propuestos por Riemann con técnicas introducidas por Weierstrass. Una de las fuentes principales de estos problemas de Riemann, algunos aún sin resolver, se encuentra en el escrito de Habilitación (Habilitationsschrift) presentado por Riemann en 1854 ante los profesores de la Universidad de Göttingen como prueba de su capacitación para enseñar. No fue publicado hasta 1867, en que después de su muerte su amigo y colega Dedekind decidió hacerlo, *tanto por el interés considerable de la materia en cuestión como por la manera en que se tratan los principios más importantes del análisis.* El escrito estuvo sin duda motivado por las conversaciones y trabajos de Dirichlet. En él se contiene primero una breve historia de los trabajos relativos a la representación en serie trigonométrica de una función arbitrariamente dada, luego una extensión de la noción de integral en donde en pocas páginas aparece lo que hoy llamamos integral de Riemann y finalmente la aplicación de las nociones anteriores al problema de la representación en serie trigonométrica *sin hacer hipótesis particulares sobre la naturaleza de la función.*

La originalidad de la visión de Riemann se manifiesta de forma extraordinariamente clara en los tres trabajos que hubo de realizar para demostrar su talento matemático. Es posible que, de no haber sido por el estrujamiento intelectual que el sistema alemán imponía a aquellos que deseaban que se les permitiese enseñar en sus Universidades, la matemática actual sería tres veces más pobre, sin tres de las contribuciones más importantes de Riemann. En 1851 había presentado su tesis doctoral Principios fundamentales para una teoría general de las funciones de una variable compleja. Tres años después, en 1854, presentó como discurso de Habilitación (Habilitationsvortrag) su trabajo Sobre las hipótesis que sirven de fundamento a la geometría y como escrito de Habilitación la memoria que nos ocupa Sobre la representación de una función mediante una serie trigonométrica. Con sus trabajos de Habilitación Riemann conseguía que se le nombrase Privatdozent, es decir que se le permitiese enseñar, sin sueldo, en Göttingen a los estudiantes que quisieran matricularse en su curso. Sus honorarios serían las matrículas de sus estudiantes. Cualquiera de los tres trabajos citados de Riemann hubiera bastado por sí solo para ganarle un puesto eminente en la historia del desarrollo de las matemáticas.

En su trabajo sobre series trigonométricas, aparte de llevar a cabo, con su teoría de la integral, el proyecto de Dirichlet sobre la integración de funciones con infinitas discontinuidades, inició un nuevo camino en el estudio de las series trigonométricas, tratando de obtener condiciones necesarias y suficientes para que una serie trigonométrica general, no necesariamente obtenida a partir de una función al modo de Fourier, fuese convergente. En su artículo no sólo demostró el que hoy llamamos teorema de Riemann-Lebesgue sobre la convergencia hacia cero de los coeficientes de una serie de Fourier, y el teorema de localización (incluso en una forma más general) según el cual la convergencia de una serie de Fourier en un punto depende del comportamiento de la función en un entorno de dicho punto, sino que su visión original suscitó una serie de problemas nuevos extraordinariamente sutiles y estimulantes. Entre ellos se cuenta el problema sobre el conjunto de unicidad de una serie trigonométrica que, como veremos, incitará más adelante a Cantor a la creación de su original teoría de conjuntos. El estudio, iniciado por Riemann de los problemas que presentan las series trigonométricas arbitrarias, es decir, cuyos coeficientes no son necesariamente los coeficientes de Fourier de una función dada, es uno de los temas del análisis armónico que, después de más de un siglo y cuarto, presenta aún más cuestiones.

Tal vez sea este el lugar más adecuado para tratar de analizar con perspectiva algunos aspectos que llaman la atención ante la emergencia del análisis armónico. Pronto, a partir de Riemann, los problemas interesantes se sucederán incesantemente. Serán muchas las personas y escuelas trabajando en muy diferentes aspectos del análisis armónico, tanto desde el punto de vista de la matemática fundamental como desde las aplicaciones. Lo que comenzó como una tenue raíz se habrá hecho a fines del siglo XIX tronco robusto y se ramificará extraordinariamente invadiendo una gran parte del espacio científico del siglo XX. ¿Dónde radica la pertinencia, la oportunidad de la herramienta de Fourier que motiva su éxito? ¿Cuál es el secreto de la ubicuidad del análisis armónico en el mundo de la matemática aplicada?

Nuestro mundo está en perpetuo flujo. El intento racionalizador para entender cuantitativamente este movimiento y crecimiento da lugar de modo natural, si bien el pensamiento humano necesitó unos cuantos siglos para percatarse de ello, a las nociones básicas del cálculo infinitesimal, la derivada y la integral. No en vano lo llamó Newton "cálculo de fluxiones". Al mismo tiempo el flujo de los fenómenos naturales se nos presenta, como hemos visto antes, de modo fundamentalmente recurrente. El flujo de las cosas se puede racionalizar cuantitativamente mediante una función. El intento de entender cuantitativamente las recurrencias que pueda presentar esta función, sus periodicidades, condujo a Daniel Bernoulli, lo hemos visto,en el caso particular de la cuerda vibrante, a la descomposición de la función que define su movimiento en una suma de funciones, movimientos simples, lo que hace la estructura del movimiento compuesto diáfana y transparente desde el punto de vista matemático. Fourier extendió este proceso con audacia a cualquier función. Al descomponerla de este modo la hacía asequible al tratamiento matemático. La rueda de los acontecimientos había llevado a Fourier a ocuparse de problemas en los que la descomposición en senos y cosenos era profundamente significativa. Si se trata simplemente de representar una función periódica como suma de otras funciones simples existen muchas alternativas. Es verdad que las funciones trigonométricas, las más simples entre las funciones periódicas, eran un candidato natural para este análisis. Pero hay otra razón más profunda de la conveniencia del uso de estas funciones. Las funciones trigonométricas tienen propiedades muy especiales con respecto a la operación básica de la derivación. La derivada del seno es el coseno y la del coseno el seno cambiado de signo. En términos modernos, las funciones trigonométricas son autofunciones de los distintos operadores de derivación. Los problemas de la cuerda vibrante y de la propagación del calor se expresan analíticamente mediante ecuaciones diferenciales particularmente simples. Las autofunciones de los operadores de derivación, combinadas linealmente de modo adecuado conducen efectivamente a la solución de cualquier problema particular razonable relacionado con tales ecuaciones. Este es el secreto del éxito inicial del análisis de Fourier en su sorprendente aplicabilidad al estudio de los fenómenos naturales. Multitud de fenómenos interesantes se rigen de acuerdo con ecuaciones semejantes a las de la cuerda vibrante y de la propagación del calor. Piénsese en la ubicuidad del laplaciano en la física matemática que tiene su razón de ser profunda en la presencia constante de la simetría en las leyes naturales. Los mismos procesos matemáticos que han sido señalados conducen a una expresión fácil de las soluciones de los problemas relacionados con tales fenómenos naturales.

Pero la importancia de la herramienta de Fourier puede explicarse también de otro modo interesante. El sistema de la cuerda vibrante puede contemplarse matemáticamente como una máquina que nos transforma una función, la que representa la situación inicial de la cuerda, en otra función, la que representa la situación de la cuerda, por ejemplo, después de diez segundos. En el problema de propagación del calor en una barra homogénea, se tiene una función, que representa la distribución inicial de temperaturas en diversos puntos de la barra. Al cabo de diez segundos el sistema nos proporciona otra función, otra distribución de temperaturas. En términos matemáticos, el sistema viene determinado por un operador que transforma una función en otra. Muchos de los fenómenos naturales tienen las dos características siguientes. Primero, el sistema presenta una cierta invariancia respecto del tiempo. La cuerda vibrante, en su modo de actuar, no se entera de la hora que es, es decir que las mismas condiciones iniciales producen la misma situación de la cuerda después de diez segundos a las 8 de la mañana que a las 4 de la tarde. Por otra parte, muchos sistemas naturales suelen ser lineales, es decir, ante un estímulo que es suma de otros estímulos presenta una respuesta que es suma de las respuestas correspondientes a éstos. Es decir, los operadores matemáticos correspondientes a muchos fenómenos naturales son <u>invariantes frente al tiempo y lineales</u>, y cuando en realidad los fenómenos no son exactamente así, se procura interpretarlos en un primer estudio mediante tales operadores lineales. Es fácil ver que un operador de estas características se comporta de modo especialmente simple ante un estímulo representable mediante una función trigonométrica como el seno o el coseno. La respuesta es una función trigonométrica del mismo período aunque de amplitud y fase posiblemente diferentes. Por ello, una vez conocida la respuesta a estímulos elementales se obtiene de modo sencillo la respuesta a un estímulo cualquiera. Se expresa este estímulo en el código de las funciones trigonométricas (serie de Fourier) y la respuesta viene dada en el mismo código como suma de las respuestas correspondientes a los estímulos trigonométricos elementales.

Estas consideraciones explican la versatilidad y ubicuidad del análisis armónico en el intento de explicar los fenómenos naturales. Más adelante examinaremos con algún detenimiento estas aplicaciones. La influencia profunda del análisis armónico en el interior del cuerpo mismo de las matemáticas se explica por su carácter de banco de prueba de las nociones básicas y fundamentales del análisis matemático, derivada, integral, convergencia,... Por otra parte en el análisis armónico, como veremos a continuación, se forjaron conceptos y teorías que han dado lugar a una buena porción de lo que la matemática es actualmente.

## LA INSPIRACION DEL ANALISIS ARMONICO

La riqueza y complejidad conceptual de las fecundas herramientas del análisis armónico inicial, la serie en integral de Fourier, estimularon efectivamente el desarrollo de la matemática desde el momento mismo de su firme aceptación. Las preguntas que surgen de modo natural ante el carácter paradójico de muchos aspectos de su estructura obligaron a afilar los instrumentos del análisis matemático y a crear otros nuevos. Ya hemos podido observar cómo la noción de función hubo de ser revisada hasta que alcanzó de modo nítido con Dirichlet su forma actual. Una de las cuestiones que inicialmente intrigó más a los matemáticos y que surge de modo espontáneo es la siguiente. ¿Cómo es que una serie de términos continuos, sin saltos, senos y cosenos, es capaz de representar una función con un salto en un punto? Durante mucho tiempo fue un teorema, incluso para Cauchy, que una serie de términos continuos es una función continua. Incluso después del artículo de Dirichlet en 1829 siguió siendo un teorema, obviamente falso. Los diferentes modos de convergencia de una serie de funciones emergieron poco a poco hasta aparecer nítidos, con su significado e importancia bien claramente expresados, en la obra de Weierstrass y de su escuela, en particular la noción de convergencia uniforme y su importancia especial en los procesos de cambio de orden en la teoría de límites y en las operaciones del cálculo infinitesimal.

Ya hemos visto cómo Riemann se ve precisado a crear su integral y cómo su busqueda de condiciones necesarias y suficientes para la convergencia de una serie trigonométrica le llevan al diseño de nuevas técnicas.

Otra pregunta interesante y natural que surgió muy pronto y cuya respuesta fue curiosamente olvidada durante más de 50 años fue la siguiente. Puesto que, por ejemplo, la función representada por un segmento rectilíneo a distancia $\pi/4$ sobre el intervalo

$(-\pi/2, \pi/2)$ del eje x y por otros dos segmentos a distancia $-\pi/4$ sobre el resto del intervalo $(-\pi, \pi)$ es representable por la serie y=cosx-1/3 cos3x+1/5cos5x-... ¿cómo se van pegando las sumas parciales, funciones continuas, a la función límite en el entorno de los puntos de salto? La forma natural que a cualquiera se le ocurriría es la siguiente. Si se traza un segmento a distancia $\pi/4 + \varepsilon$ sobre el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ y otros dos a distancia $-\pi/4 - \varepsilon$ sobre el resto del intervalo $(-\pi, \pi)$, entonces las curvas continuas que representan las sumas parciales acaban por situarse por debajo del primer segmento y por encima de los segundos por pequeño que sea $\varepsilon$. Que esta conjetura es falsa lo demostró impecablemente en 1848 Wilbraham. Tal vez el hecho de que su artículo fuera publicado en Dublin contribuyó a su permanencia en la sombra. El fenómeno, que aparece en la representación de cualquier función con un salto semejante, se llama hoy fenómeno de Gibbs, quien lo redescubrió en 1898. En realidad, quien volvió a descubrir el hecho bruto fue el físico Michelson. Junto con Stratton había diseñado un analizador armónico capaz de obtener de modo automático los 80 primeros coeficientes de la serie de Fourier de una función. Al tratar de reproducir con ellos la gráfica de una función sencilla como la anterior observó una separación extraña en las cercanías del salto que no desaparecía al tomar más términos de la aproximación. Lo atribuyó a algún fallo de su mecanismo y lo consultó a Gibbs, quien publicó su explicación.

La naturaleza de las funciones representables por medio de su serie de Fourier siguió siendo por mucho tiempo un problema central en la teoría. En 1864 Lipschitz, y más tarde en 1878 Dini, publicaron nuevos criterios de representabilidad. Du Bois Reymond en 1876 construyó, para refutar una conjetura de Dirichlet, una función continua cuya serie de Fourier divergía en un punto.

Gran parte del desarrollo y fundamentación riguros del análisis en el final del siglo XIX se debe a Weierstrass y sus discípulos. Du Bois Reymond fue uno de ellos. Otro importante fue Heine quien comenzó a atacar el llamado problema de unicidad de las series trigonométricas. El problema consiste en lo siguiente: Si una función arbitraria es representable por una serie trigonométrica ¿es esta representación única o pueden existir varias series trigonométricas de coeficientes distintos que convergen a la misma función? El problema es interesante en sí mismo, pero aparte de su interés intrínseco, uno estaría tentado a afirmar, aun sin fundamento objetivo aparente, que debe tener un no sé qué especial para potenciar la teoría de conjuntos. Como veremos enseguida, Cantor tuvo este problema como ocasión para la creación de la teoría de conjuntos. Y 80 años más tarde Paul Cohen, que bajo la dirección de Zygmund había realizado su tesis en la Universidad de Chicago sobre este mismo problema, logró, con la demostración de la independencia de la hipótesis del continuo en 1963, dar un paso de gigante en los estudios sobre los fundamentos de la matemática.

Heine, profesor en la Universidad de Halle, estimuló a Cantor, en 1869, recién llegado allí como Privatdozent, a trabajar en el problema de unicidad. Cantor, para atacar este problema, construyó inicialmente una fundamentación original de los números reales con un método que ya hace barruntar algunos procesos transfinitos de su posterior teoría de conjuntos. Asímismo para elaborar su teorema de unicidad de la serie trigonométrica introdujo la noción de conjunto derivado de un conjunto de puntos de la recta. Esta será una de las nociones básicas de la moderna topología conjuntista. Dado un conjunto P, el punto a será punto límite de P si cada entorno de a contiene infinitos puntos de P. El conjunto P' de todos los puntos límite de P constituye el conjunto derivado de P. Se puede considerar el conjunto P'', derivado del P', y así sucesivamente. Si un conjunto P es tal que su n-ésimo derivado es un conjunto finito de puntos, entonces se dice que P es de primera especie. Si para todo n el n-ésimo derivado de P es un conjunto infinito, el conjunto P se llama de segunda especie.

Cantor demostró que si P es de primera especie, entonces P es un conjunto de unicidad, es decir si dos series trigonométricas coinciden en todo punto salvo tal vez en los de P, entonces las dos series son idénticas y así coinciden en todos los puntos. Al preguntarse Cantor por la naturaleza y caracterización de los conjuntos de unicidad, forzosamente debía considerar los conjuntos de segunda especie y estos conducen claramente a la noción de número transfinito. Por otra parte estas consideraciones condujeron a Cantor a tratar de diferenciar las distintas maneras en que un conjunto puede ser infinito. No tardaría en establecer la no numerabilidad de los números reales, la igual cardinalidad de la recta y el plano, y tantos otros resultados con sabor a paradoja que abrieron un mundo nuevo por explorar.

Es necesario apuntar que la caracterización de los conjuntos de unicidad es todavía un problema abierto en la teoría de series trigonométricas. Existen resultados modernos que indican claramente que la estructura aritmética del conjunto, y no sólo su tamaño, ha de ser un elemento esencial de tal caracterización, pero aún no sabemos cómo obtener mediante ella la caracterización buscada.

La integral de Riemann fue considerada durante algún tiempo como un instrumento perfecto del análisis, entre otros por el mismo Weierstrass. A fines del siglo XIX se iba preparando sin embargo un movimiento, en Francia y Alemania, que hacía prever que pronto la noción de integral sufriría un nuevo cambio substancial, otra vez mediante una visión más geométrica. Ciertos resultados de Dini (1878), Darboux y Volterra, hacían barruntar que la integral de Riemann presentaba fenómenos indeseables, en particular desde el punto de vista más apetecido en el tratamiento de los problemas de análisis armónico: el cambio de orden en los procesos de límite. Para asegurarse, por ejemplo,de que la integral del límite de una sucesión de funciones es el límite de la integral, había que imponer condiciones restrictivas enojosas. Esto embarazaba notablemente el uso de esta herramienta en muchos problemas. La idea nueva puede interpretarse del modo siguiente. Puesto que la integral es un área, tratemos de abordar la medición del área por consideraciones geométricas directamente. Las búsquedas de Jordan, Baire, Borel y otros recibieron finalmente en Henri Lebesgue la forma definitiva que aún hoy utilizamos. Una de las diferencias fundamentales entre la concepción de Lebesgue y la de Riemann la ha explicado Lebesgue mismo del modo siguiente. Sobre el mantel cuadriculado de nuestra mesa tenemos un montón de monedas, unas de una peseta, otras de cinco, otras de veinticinco, otras de cincuenta y otras de cien. Deseamos contar el dinero que allí tenemos. En el método de Riemann iríamos contando el dinero total en cada cuadrícula del mantel y luego sumaríamos el de todas las cuadrículas. En el método de Lebesgue amontonaríamos primero las monedas de cien pesetas, sin tener en cuenta dónde están, luego las de cincuenta,etc... Se contaría cada montón y se sumarían las cantidades de todos ellos. Una de las virtudes principales de la integral de Lebesgue consistió en la facilidad y sencillez con que se podía operar con ella en los procesos de límite. El análisis de Fourier fue de nuevo el banco de pruebas para comprobar la idoneidad del nuevo instrumento. Lebesgue mismo escribió en 1905 un artículo importante sobre series trigonométricas. La historia del análisis armónico tiene dos etapas bien diferenciadas, antes y después de Lebesgue. Los teoremas anteriores se hicieron más generales, más simples, más fáciles. Se obtuvieron resultados nuevos mucho más profundos. Se iniciaron investigaciones muy estimulantes. Al principio la integral de Lebesgue fue considerada como un instrumento de precisión para especialistas. Hoy la integral de Lebesgue es el instrumento de trabajo cuyas propiedades maneja el estudiante al modo como utiliza las propiedades de los números reales aun sin conocer las sutilezas de su fundamentación.

A partir de los comienzos del siglo actual, el análisis armónico se desarrolla extraordinariamente en múltiples direcciones. Nuevas escuelas, como la rusa (Lusin, Menchov, Privalov, Fatou,...), la polaca (Rachjman, Zygmund, Marcinkiewicz,...) y la británica (Hardy, Littlewood, Paley,...) primero, y más tarde la norteamericana (Zygmund, Calderón, Stein,...) y la sueca (M. Riesz, Carleson,...) entran con fuerza en este terreno que durante el siglo XIX había estado en buena parte monopolizado por franceses y alemanes. Métodos nuevos diferentes se cultivan con preponderancia en cada una de estas escuelas. Se estudian viejos problemas con nuevo esfuerzo y con nuevas ideas. Ante la dificultad del problema de la convergencia, Fejer, en 1905, idea un tratamiento distinto de las sumas parciales de la serie de Fourier para recuperar la función. La sucesión de las medias aritméticas de las sumas parciales de la serie de Fourier de una función integrable converge en casi todo punto a la función. Comienza así el estudio de los métodos de sumabilidad. En 1926 Kolmogorov demuestra la existencia de una función integrable cuya serie de Fourier diverge en todo punto. Pero el problema de la convergencia ha recibido una respuesta muy satisfactoria en el teorema de Carleson (1966), que afirma que la serie de Fourier de una función de cuadrado integrable converge en casi todo punto a la función. El problema de la unicidad de una serie trigonométrica se estudia con esfuerzo y se obtienen resultados parciales de interés, tales como el de Salem y Zygmund que afirma que si r es mayor que 1, el conjunto construído al modo del conjunto ternario de Cantor substituyendo 3 por r es un conjunto de unicidad exactamente cuando r es un número algebraico tal que el polinomio irreducible del que r es un cero tiene todas sus restantes raíces de módulo menor que 1. Pero aún parece que estamos lejos de la solución final.

Sería improcedente tratar de dar aquí una visión de conjunto de las múltiples ramificaciones del análisis armónico actual y de los nuevos problemas que se están tratando. Pero quisiera señalar, al menos con unas pocas palabras, algunos desarrollos que han involucrado más de cerca a una gran parte de los matemáticos españoles que trabajamos en análisis armónico.

En 1952 el análisis armónico experimentó un cambio de rumbo a partir de la publicación de un famoso artículo de Calderón y Zygmund sobre integrales singulares. Hasta entonces, y tal vez a impulsos de la escuela rusa, muchos de los problemas importantes se habían tratado acudiendo a profundos resultados de la teoría de funciones de una variable compleja. Esta teoría estaba muy desarrollada desde los tiempos de Riemann y Weirstrass, y tanto sus profundos resultados como sus métodos tenían un fuerte sabor unidimensional.

Consecuentemente muchos de los teoremas importantes en análisis armónico obtenidos mediante el apoyo en la teoría de variable compleja participaban de esta restricción fundamental. Eran eminentemente unidimensionales. Ya en la escuela británica se había comenzado a tratar de obtener ner los mismos resultados por procedimientos de variable real, especialmente por Besicovitch y, en parte, por Hardy y Littlewood. Pero fueron Calderón y Zygmund quienes produjeron el impulso decisivo. Sus resultados sobre operadores integrales singulares, generalizando por métodos de variable real a varias dimensiones las propiedades de la transformada de Hilbert, pronto recibieron aplicaciones sorprendentes en ecuaciones en derivadas parciales e incluso en campos aparentemente alejados de gran actualidad como la teoría del índice. El papel de los operadores integrales singulares y de sus generalizaciones posteriores, operadores pseudodiferenciales, operadores integrales de Fourier, etc. en el análisis actual es verdaderamente central. Los métodos introducidos por Calderón y Zygmund han dado lugar a la formación de una verdadera escuela, la escuela de Chicago, cuyos componentes llevan adelante una buena parte del desarrollo actual del análisis armónico. Es en esta escuela donde muchos de los matemáticos españoles que nos ocupamos del análisis armónico estamos entroncados. De Calderón y Zygmund, ambos miembros correspondientes de esta Academia, hemos recibido las herramientas mismas con que trabajamos y, lo que es más importante, el estímulo y el apoyo humano que nunca nos han escatimado.

Antes de pasar a describir los impactos del análisis armónico sobre otros temas de la ciencia y de la tecnología, quiero dejar señalado que, dentro del terreno mismo de las matemáticas, el análisis armónico ha motivado y estimulado el desarrollo de muchos otros campos que hoy constituyen especialidades autónomas dentro de ellas, además de los que ya he señalado, teoría de conjuntos, teoría de la medida. Indicaré brevemente algunos de tales desarrollos.

En 1836 y 1837 Sturm y Liouville inician el estudio de la propagación del calor en una barra no homogénea. Como hemos visto anteriormente, para una barra homogénea las autofunciones pertinentes del operador correspondientes a la difusión del calor son los senos y cosenos, y en ello estriba el éxito en este problema del desarrollo en serie de Fourier. Para una barra no homogénea surgen autofunciones más generales y con ello aparece la generalización de la serie de Fourier que constituye el germen de la teoría espectral de operadores, que alcanzará más adelante su pleno desarrollo y su importancia en la física reciente. La teoría de ecuaciones integrales, la teoría de Fredholm-Riesz-Schauder, el espacio de Hilbert, son variaciones que van surgiendo relacionadas con este proceso de evolución de las ideas matemáticas.

La teoría de distribuciones, tal como aparece de forma definitiva en Schwartz (1950-51), tiene como uno de sus temas centrales el posibilitamiento de la utilización de la transformada de Fourier en condiciones mucho más amplias que las permitidas hasta entonces. Con la teoría de funciones generalizadas se repite en cierto modo el proceso de generalización de la noción de función que hizo posible el desarrollo del análisis de Fourier. Una visión geométrica rompió las trabas que imponía una visión algebraica de la función. Con la aplicación de una técnica operativa, que nació entre los físicos Heaviside, van der Pol, Dirac y otros, se disuelven ahora los impedimentos que los residuos de la visión geométrica aún comportaba. Una función generalizada es algo mucho más difícil de intuir que una función ordinaria, pero mucho más fácil de manejar. El mundo de las funciones generalizadas es casi el paraíso del cálculo en que todas las series son convergentes, toda función es derivable, se puede cambiar siempre derivación y sumación,etc... Las distribuciones han venido, por otra parte, a poner más de manifiesto el papel central de la convolución en el análisis armónico y en sus conexiones con las ecuaciones en derivadas parciales. Ya desde Fourier y Dirichlet los coeficientes de la serie de Fourier se habían calculado mediante la convolución con un cierto núcleo, lo que facilitó grandemente el análisis. La transformada de Fourier de una convolución de dos funciones es el producto ordinario de las transformadas de Fourier de las dos funciones. La transformada de Fourier de la función que resulta de aplicar un operador diferencial lineal de coeficientes constantes a una función es el producto ordinario de la transfromada de Fourier de la función por el polinomio característico de tal operador diferencial. De este modo se ha conseguido convertir una buena parte de la teoría de ecuaciones diferenciales en un simple cálculo algebraico. Se ha llegado con ello a una cierta algebraización del análisis.

El análisis armónico se ha extendido con gran fruto a la teoría de grupos. En 1933 Haar, con la introducción de una medida en ciertos grupos topológicos compactos, hizo posible la traslación de los resultados del análisis armónico a tales grupos. Con esta luz el análisis armónico clásico aparecía tan sólo como un ejemplo muy particular de todo un universo mucho más amplio. El álgebra se enriqueció y el análisis también. Entre otras nuevas perspectivas, la teoría de funciones especiales logró una notable unificación, al poder observarse cómo estas resultan como autofunciones de ciertos operadores sobre grupos especiales.

El acercamiento, realizado a partir de los años 30, principalmente por Levy, de las técnicas propias de la teoría de la probabilidad y de las del análisis armónico ha beneficiado también profundamente a ambas teorías.

Como puede verse, el "poema matemático" de Fourier ha constituído una fecunda fuente de inspiración en esta epopeya del espíritu humano que es el desarrollo del pensamiento matemático.

## EXPLORANDO LAS ONDAS DEL UNIVERSO

Si hay algún elemento que se pueda considerar dominante en los diversos campos de la ciencia y tecnología modernas es sin duda la exploración y explotación de la vibración y de la onda. En realidad la utilización de las ondas es tan antigua como el hombre mismo. Los dos sentidos más importantes del hombre, la vista y el oído, que constituyen sus medios de comunicación principales con la naturaleza entera y con sus congéneres, son en realidad dos perfectísimos sistemas de análisis espectral, es decir de análisis de las ondas que reciben. De alguna manera lo intuyó el hombre muy pronto respecto del oído con sus primeros análisis de la música. El teórico pitagórico de la música Aristoxeno de Tarento construyó una teoría musical muy desarrollada del ritmo y de la armonía ya en el siglo IV a.de C. Las vibraciones del aire son analizadas en nuestro sistema auditivo que recoge y ordena una cantidad de información contenida en las ondas sonoras verdaderamente sorprendente. El poder de separación, es decir el poder de distinción entre las diferentes componentes armónicas que llegan a nuestro oído le hace capaz de reconocer entre miles la voz de una persona conocida después de cuatro o cinco palabras, y esto incluso en medio de la contaminación con que llegan a través de nuestros hilos telefónicos. La perfección de nuestro sistema auditivo como analizador armónico parece ir mucho más allá de lo que la mera necesidad del hombre hubiera requerido para su supervivencia. La redundancia de información que es capaz de absorber y analizar con su percepción tan exacta del tono sobrepasa con mucho sus necesidades primarias de comunicación. Pero gracias a ello tenemos en nuestra voz y en nuestra música un vehículo de información que es capaz de transmitir todo un mundo interior de vivencias y sentimientos. Para nuestra comunicación, incluso para una comunicación racional, un sistema primitivo de captación de la intensidad del ruido y un lenguaje de tipo Morse hubieran bastado. Pero nuestra música no existiría en absoluto. Basta para convencerse de ello tratar de reconocer una tonadilla a la que se le suprime el tono y se le deja sólo el ritmo.

Nuestra vista, con su percepción de los colores, es capaz asímismo de distinguir las diferentes longitudes de onda que recibe con una exactitud extraordinaria, sobre todo en la zona del color verde. Una diferencia profunda entre la información auditiva y la visual consiste en que mientras las ondas sonoras son fáciles de producir y manejar a nuestro arbitrio, las ondas luminosas están ahí, no las cambiamos tan fácilmente a nuestro antojo, no las podemos estructurar con el tiempo ni mezclar a nuestro gusto, como hacemos con las ondas sonoras construyendo nuestros ritmos, armonías, melodías. Tal vez llegará algún día en que el hombre desarrolle un arte nuevo con el que goce de la armonía y el ritmo de la sucesión temporal de colores en un concierto puramente visual.

La manipulabilidad del sonido constituyó la ocasión para el desarrollo temprano de la música y acústica. La luz, en cambio, no fue analizada hasta 1664 en que Newton, con su prisma, obtuvo lo que él llamó el espectro de la luz solar, la descomposición en colores. La interpretación corpuscular de Newton de la naturaleza de la luz no permitía fácilmente dar con la explicación correcta del espectro, pero con su descubrimiento Newton comenzó a abrir una rendija en el amplio ventanal que constituye hoy día la exploración de todos los componentes del universo, grandes como las galaxias o pequeños como el átomo, por medio del análisis de las ondas con que cada uno de forma característica emite o interacciona. Las ondas propias de cada sistema del cosmos constituyen la voz con la que hoy día nos manifiesta su propia estructura. Los jalones más importantes del análisis de las ondas luminosas tuvieron que esperar siglo y medio después del descubrimiento del espectro. Herschel, en 1800, descubrió los rayos infrarrojos midiendo la temperatura en las zonas del espectro más allá del rojo. En 1801 Ritter descubre los rayos ultravioleta estudiando la acción quimica del espectro solar más allá del violeta. En 1802 Thomas Young da un salto cualitativo importante en los estudios espectroscópicos al reemplazar la teoría corpuscular por la teoría ondulatoria. Por fin los métodos de difracción de Fraunhofer permiten en 1814 una medición más exacta de la longitud de las ondas luminosas. Las leyes principales de la espectroscopía serían porpuestas en 1859 por Kirchhof y en 1861 Kirchhof y Bunsen realizarían el primer análisis de la atmósfera solar. La fecundidad de la espectroscopía se hizo manifiesta en campos muy diversos. En la investigación química primero, no sólo con el análisis espectroquímico, sino también con la exploración de la estructura fina y cuantitativa del átomo. La espectroscopía astronómica nos permite obtener una gran cantidad de información sobre la estructura y composición de las diferentes estrellas y galaxias.

Pero una vez abierto el camino y una vez comprobada su utilidad, la idea de la aplicabilidad del método en otras circunstancias surge espontáneamente. La estructura de un sistema nos es cognoscible a través de su forma de comportarse en la interacción con un cierto tipo de ondas que el sistema mismo emite o absorbe. El problema consiste en dar con las ondas adecuadas con las que el sistema es capaz de dialogar, que suelen ser vibraciones de una longitud de onda comparable con el tamaño de las componentes del sistema con las que las ondas de algún modo interaccionan. El descubrimiento por Röntgen en 1895 de los rayos X, de longitudes de onda muy pequeñas, entre 1 Å y 100 Å, y la observación en 1912 por Max von Laue de que las radiaciones de rayos X son difractadas por cristales naturales dieron origen al nacimiento de la espectroscopía por rayos X que permite explorar el mundo de otra escala diferente, y extraer otro tipo de información del mundo al que se aplica.

El dominio de las ondas electromagnéticas corre en gran parte paralelo en el tiempo con los descubrimientos que dieron lugar al desarrollo de la espectroscopía. En 1845 Faraday observó la rotación del eje de polarización de un rayo de luz polarizada a su paso por un fuerte campo magnético. Con ello se empezaba a desvelar la conexión profunda entre luz, electricidad y magnetismo. Las ecuaciones de Maxwell, publicadas en 1864, constituyen uno de esos monumentos en que la razón matemática ha sido capaz de adelantarse a la experimentación física. La invasión de nuestro espacio por las ondas electromagnéticas ha homogeneizado extraordinariamente nuestra civilización.

Estos que hemos enumerado son algunos de los campos en los que la exploración de las ondas ha mostrado su profunda influencia en la evolución de nuestro modo de ser y de actuar. Una enumeración exhaustiva de todos los campos científicos y prácticos donde el dominio de las ondas haya producido un impacto considerable sería un catálogo de una gran parte de la ciencia y la tecnología contemporáneas.

¿Cuál es el papel de los desarrollos que los matemáticos van realizando con su análisis armónico frente a esta multitud de aplicaciones prácticas? Es cierto que muchas de sus investigaciones, probablemente las que los matemáticos corporativamente más estiman, vienen estimuladas y dirgidas por la dinámica interna de la misma teoría, por el interés en entender más profundamente las herramientas que se van creando enfrentándolas a problemas internos cada vez más difíciles y también, por qué no decirlo, por las modas impuestas por los grupos más activos y numerosos, que, naturalmente, no siempre coinciden con los problemas más apropiados para fomentar el desarrollo de la teoría y de sus aplicaciones. Pero la producción matemática, al menos colectivamente, no ha resultado a la larga narcisística ni puramente endogámica. Siempre han ido surgiendo matemáticos dotados de una sensibilidad especial para ir reconduciendo el cauce primario del desarrollo matemático por caminos que, más pronto o más tarde, han resultado extraordinariamente fecundos en el esfuerzo del hombre por entender un poco más profundamente su propio universo. Y para ello, al tiempo que se han ido sirviendo de muchos de los instrumentos tradicionales, han ido creando otros nuevos y han sabido también aprovecharse a fondo de las ventajas que la interacción con otras ciencias les podría proporcionar.

La situación actual del análisis armónico aplicado puede explicarse simplificadamente como sigue. Se trata de estudiar una característica medible de un fenómeno natural que viene expresada como una función $y(t)$ del tiempo. Tal fenómeno puede ser físico, químico, biológico, económico o incluso social. A fin de analizar esta característica del fenómeno podemos tratar de expresarla como combinación lineal de otras características del fenómeno, $x_i(t)$, con coeficientes constantes $a_i$, es decir,

$$y(t)=\sum a_i x_i(t)$$

Esperamos con ello que la distribución y magnitud de los coeficientes $a_i$ pueda proporcionarnos alguna información útil sobre la característica del fenómeno que estudiamos. Los coeficientes $a_i$ constituyen el espectro de $y(t)$ respecto de las funciones $x_i(t)$. El estudio del espectro de un ecocardiograma puede informar al médico sobre la salud del corazón del paciente que produce tal espectro. El análisis del espectro del ruido producido por un motor puede informar al ingeniero de su estado de funcionamiento. Un análisis espectral adecuado de las variaciones de la cotización de la bolsa podría proporcionar una información bien rentable, pero nadie parece haber dado todavía con los elementos adecuados para ello.

De la misma descripción del método general propuesto se desprenden los tres problemas que hay que afrontar en su utilización. Primero hemos de realizar una elección adecuada de las características elementales $x_i(t)$ del fenómeno. Segundo hemos de calcular el espectro, los coeficientes $a_i$. Tercero, hemos de interpretar el espectro, es decir extraer la información útil que de él se puede desprender.

La adecuación de las funciones elementales $x_i(t)$ consiste, claramente, en que se ajusten de modo natural a la estructura misma del fenómeno que estudiamos. Como hemos visto, la aplicabilidad sorprendente del método de Fourier se debió a la elección de senos y cosenos en sus problemas. Muchas veces no hay razones obvias para preferir unas funciones más bien que otras. La utilización del desarrollo clásico en serie de Fourier se debe en muchos casos únicamente a la ignorancia, a la inercia y al hecho de que sea este tipo de análisis el más desarrollado y estudiado, pero bien se puede pensar que para el estudio de muchos otros fenómenos, sistemas de funciones tales como el de Walsh u otros análogos sean más satisfactorios.

En los métodos de cálculo del espectro ha influído poderosamente el desarrollo reciente de los computadores. De los métodos analógicos, iniciados con el analizador armónico de Michelson y Stratton en 1898 y de los múltiples métodos de cálculo de los coeficientes, gráficos, mecánicos, eléctricos, ópticos,... se ha pasado al dominio casi absoluto de los métodos digitales, ampliamente simplificados mediante la introducción de la transformada rápida de Fourier por Cooley y Tukey en 1965 y por otros métodos contemporáneos como el método de máxima entropía introducido por Burg en 1967.

La interpretación del espectro es un problema que, como la elección del tipo de espectro, depende en buena parte del fenómeno mismo que se estudia. Tal vez sea aquí donde algunos de los desarrollos más sutiles que los matemáticos del análisis armónico realizan en la actualidad tengan mayor importancia en el futuro. En biología, por ejemplo, la determinación de una estructura tridimensional a partir del conocimiento parcial que pueden proporcionar los métodos de obtención del espectro por rayos X constituye un problema interesante que requiere instrumentos matemáticos muy elaborados.

Los métodos del análisis armónico han sido aplicados con éxito a fenómenos no periódicos. En el problema de filtrado de series temporales, de gran importancia en la ingeniería de comunicaciones, se trata de purificar una señal que se recibe perturbada por otra señal o contaminada por el ruido. En la teoría de predicción se pretende, a través del análisis del pasado de un fenómeno, predecir con el menor error posible la marcha futura del fenómeno. Los métodos utilizados para ello por Wiener en 1942, originados en el análisis armónico, han dado lugar a resultados muy satisfactorios. Kolmogorov, en 1941, atacó problemas semejantes, obteniendo resultados que en parte se solapan con los de Wiener.

Las ondas parecen estar presentes de una forma u otra en todos los aspectos de nuestra existencia. Pero su presencia nos aparece aún más dominante hoy día si dirigimos nuestra mirada hacia la estructura elemental de nuestro universo. La concepción corpuscular de la materia, por bastante tiempo preponderante, ha debido ser substituída por una explicación pragmática dual. Las estructuras elementales de la materia se manifiestan a veces como si fuesen partículas y otras muchas como si fuesen ondas, vibraciones transmisoras de energía.Es de esperar que el enigma presente detrás de estas apariencias sea resuelto algún día, aunque sea para dar paso a enigmas de niveles más profundos. Algunos físicos se inclinan a pensar que el paradigma de la onda es más potente para explicar satisfactoriamente los fenómenos y que tal vez se pueda uno pensar las partículas, como lo expresó Schrödinger en 1952, *como estructuras más o menos pasajeras dentro del campo de ondas, pero cuya forma y variedad estructural, en el sentido más amplio* *de la palabra, está determinado por las leyes de las ondas de manera tan clara, exacta y recurrente en la misma forma, que muchas veces se manifiestan como si fueran entidades duraderas substanciales.*

Es muy interesante observar que en 1925, en el mismo año en que de Broglie propusiera las ideas fundamentales sobre la concepción ondulatoria de la materia que había de dar lugar a la forma moderna de la teoría cuántica, Whitehead, en una serie de conferencias, recogidas más tarde en su obra Ciencia en el mundo moderno, proponía su teoría orgánica de la materia, en la que el elemento básico es la vibración en sus dos formas radicalmente diferentes, *la locomoción vibratoria de un esquema dado y el cambio vibratorio de esquema.*

La discusión y los intentos de aclaración en círculos físicos y filosóficos de los problemas que el estudio de la estructura elemental de la materia ha suscitado están hoy día muy lejos de llegar a su fin. Pero sí podemos estar de acuerdo con esta reflexión de Whitehead, con la que quiero concluir mi trabajo.

Después de tantos siglos, *al fin hemos vuelto a una versión de la doctrina del viejo Pitágoras, del cual se originó la matemática y la física matemática. El descubrió la importancia de ocuparse de las abstracciones y en particular dirigió su atención al número como caracterizador de las periodicidades de las notas musicales... En el siglo XVI el nacimiento de la ciencia moderna requirió una nueva matemática, más plenamente equipada para analizar las características de la existencia vibratoria. Y ahora en el siglo XX encontramos a los físicos ocupados en gran parte en analizar las periodicidades de los átomos. Verdaderamente Pitágoras, con su fundación de la filosofía europea y de la matemática europea, la dotó con la más afortunada de las conjeturas, ¿o acaso fue un resplandor de genio divino que penetró hasta la naturaleza más íntima de las cosas?*

BIBLIOGRAFIA

BARY, N.K., A treatise on trigonometric series (Pergamon Press, Oxford, 1964)
BECKER,O.,Grundlagen der Mathematik in geschitlicher Entwicklung (Karl, Alberg, Freiburg, 1964)
BECKER,O.,(editor), Zur Geschichte der griechischen Mathematik (Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1965)
BIRKHOFF,G., A source book in classical analysis (Harvard Univ. Press, Cambridge, 1973)
BOURBAKI,N., Elementos de historia de las matemáticas (Alianza, Madrid, 1972)
BRACEWELL, R.N., The Fourier transform and its applications(McGraw-Hill-Kogakusha, Tokyo, 1978)
BURG, J.P., Maximum entropy spectral analysis, Paper presented at the 37th Annual Int. SEG Meeting, Oklahoma,1967)
COOLEY,J.W. and TUKEY,J.W., An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series, Math. Comp. 19 (1965), 297-301.
DIEUDONNE,J. y otros, Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900 (Hermann, Paris, 1978)
ENRIQUES,F. e SANTILLANA,G.,Storia del pensiero scientifico (Zanichelli, Bologna, 1932)
FOURIER,J.B., Oeuvres (publiées par G.Darboux) (Gauthier-Villars, Paris, 1888)
GRATTAN-GUINNESS,I.(editor), From the calculus to set theory 1630-1910 (Duckworth, London, 1980)
HEATH, T.L., A manual of Greek mathematics (Dover, New York, 1963)(1ª edición 1931)
HOBSON, E.W., The theory of functions of a real variable (Dover, New York, 1957)(1ª edición 1907)
KEYNES, J.M., Newton, the man. En: The world of mathematics (Editor J.R.Newman) (Simon and Schuster, New York, 1956) vol.I, 277-285.
KLINE, M., Mathematical thought from ancient to modern

times (Oxford Univ. Press, New York, 1972)
KUHN, T.S., The structure of scientific revolutions (The Univ. of Chicago Press, Chicago, 1962)
LANCZOS, C.,Applied analysis (Pitman, London, 1957)
LANCZOS, C., Discourse on Fourier series (Oliver and Boyd, Edinburgh, 1966)
LANGER, R.E., Fourier series, Slaught Memorial Paper Amer. Math. Monthly 54 (1947) Supplement.
PAPOULIS, A., The Fourier integral and its applications (McGraw-Hill, New York, 1962)
SARTON,G., A history of science (Harvard Univ. Press, Cambridge, 1952)
SCHRODINGER, E. Unsere Vorstellung von der Materie.En: L'homme devant la science (Editions de la Baconnière, Neuchatel, 1953)
SNEDDON, I.N., Fourier transforms (MacGraw-Hill, New York, 1951)
STRUIK, D.J., A source book in mathematics 1200-1800 (Harvard Univ. Press, Cambridge, 1969)
WHITEHEAD, A.N., Science and the modern world (The Free Press, New York, 1967) (1ª edición 1925)
WIENER, N., Time series (The MIT Press, Cambridge, 1949)
WIENER, N., The Fourier integral and some of its applications (Dover, New York, 1958) (1ª edición 1933)
YUEN, C.K. and FRASER, D., Digital spectral analysis (Pitman, London, 1979)
ZYGMUND, A., Trigonometrical series (Dover, New York, 1955) (1ª edición 1935)
ZYGMUND, A.,Trigonometric series (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1959)
ZYGMUND, A., Notes on the history of Fourier series. En: Studies in harmonic analysis (editor M.Ash) (The Math. Assoc. of Amer.,Washington, 1976)

DISCURSO DE CONTESTACION

DEL

RVDO. P. Alberto Dou Masdexexás, S.J.

Excmo. Sr. Presidente,
Excmos. Sres. Académicos,
Señoras, Señores:

Al contestar a vuestro discurso en nombre de la Academia, cúmpleme ante todo daros una cordial bienvenida y expresar la satisfacción de esta Corporación por contaros entre sus miembros.

Siguiendo una laudable costumbre tengo que exponer el *curriculum vitae* del recipiendario con el fin de presentarlo al público y a la sociedad.

Miguel de Guzmán Ozámiz nació en Cartagena (Murcia) en 1936 en una familia de amplia tradición marinera en sus dos ramas, Guzmán y Ozámiz. Sus primeros años transcurrieron en Bilbao donde inició sus estudios secundarios en el Colegio de Indauchu, de los jesuítas, terminándolos en Madrid en el Colegio de Ntra. Sra. del Carmen para huérfanos de la Armada. Sus intereses intelectuales han sido múltiples y muy diversificados, como muestra el siguiente esbozo de su vida académica.

En 1952, después de concluído el bachillerato con el examen de Estado, comienza los estudios de Ingeniería Industrial, concluyendo con éxito los exámenes de ingreso en la Escuela Especial de Ingenieros Industriales de Bilbao en 1954. Por varios años se dedica a estudios de Literatura y Humanidades en el Colegio Jesuítico de Ntra. Sra. de la Antigua (Orduña, Vizcaya). Inicia sus estudios de filosofía en la Facultad de Loyola (Azpeitia, Guipúzcoa). En Alemania, después de dos años más de estudios filosóficos, recibe la licenciatura en Filosofía en 1961 (Philosophische Hochschule Berchmanskolleg, Pullach b. München). De 1961 a 1965 realiza estudios de Matemáticas en la Universidad de Madrid. En su tercer año fué el alumno más brillante en mi curso de Análisis Matemático Tercero. En 1965 recibe la Licenciatura de Matemáticas con Premio Extraordinario. Asímismo en 1965 recibe la Licenciatura en Filosofía por la

Universidad de Madrid, realizando una tesis de Licenciatura sobre el neopositivismo lógico, dirigida por el profesor Roberto Saumells.
En 1965, recién acabada la Licenciatura, animado por el profesor Pedro Abellanas y por mí mismo, y financiado por la Universidad de Chicago, se traslada a este Centro, uno de los focos más prestigiosos del mundo en análisis armónico, por la presencia allí de los profesores Antoni Zygmund y Alberto P. Calderón entre otros. En Chicago realizó, bajo la dirección del profesor Calderón, a lo largo de tres años, sus estudios de doctorado, concluyendo en 1968 con una tesis doctoral sobre operadores integrales singulares, con la que obtiene el título de Philosophy Doctor in Mathematics. El mismo año obtiene también el título de Doctor en Ciencias por la Universidad de Madrid, también con Premio Extraordinario.

En 1967 es contratado como profesor por la De Paul University, en Chicago. Durante el curso 68-69 es Assistant Professor de la Washington University en St. Louis, Missouri, donde permanece por un año integrado en el equipo de trabajo en análisis armónico con los profesores Guido Weiss, R.Coifman,M. Taibleson, Hirschman,...

En 1969 regresa a Madrid donde comienza su actividad en la Universidad Complutense como profesor agregado del Departamento de Ecuaciones Funcionales. En 1971 se traslada por un trimestre al Instituto Mittag-Leffler, en Djursholm, junto a Estocolmo, enseña por otro trimestre en Washington University, St. Louis, y por un semestre más, en 1972, en la PUC, Pontificia Universidad Católica de Rio de Janeiro. En 1972 vuelve a Madrid, integrándose más establemente en la Universidad Complutense. En 1975 pasa un trimestre en Princeton, invitado por la Universidad. En 1982 se traslada a la Universidad Autónoma de Madrid donde permanece en la actualidad.

Desde que comenzó su actividad docente en Madrid, a su vuelta de Estados Unidos en 1969, Miguel de Guzmán se ha preocupado por varios objetivos fundamentales. El primero ha consistido en ir atrayendo al fecundo campo del análisis de Fourier a alumnos brillantes a los que, una vez iniciados en Madrid mediante cursos especiales y lecturas adecuadas, ha orientado hacia los centros más importantes de Estados Unidos para completar sus estudios en este campo. Han sido muchos, más de una docena, los que han seguido esta vía, acabando su formación en Universidades muy prestigiosas como la de Chicago, Washington University, Princeton,... Otro objetivo importante para el profesor Guzmán consistió desde el principio en organizar cursos monográficos trayendo a Madrid, con los recursos disponibles, a los científicos más importantes en el campo del análisis armónico de Europa y de Estados Unidos. Es así como visitan el Departamento de Ecuaciones Funcionales de la Universidad Complutense entre otros muchos los profesores A.P. Calderón, A. Zygmund, L. Carleson, J.P. Kahane, Y.Meyer, C.Fefferman,... Con ello se van creando lazos de gran solidez y permanencia. Los contactos con las universidades de Chicago, Washington University (St.Louis), Orsay, Princeton, Minnesota, han sido constantes a lo largo de estos años, con gran fluidez en las visitas de profesores y alumnos.

Por su parte, desde el año 1970, el profesor Guzmán va consolidando en Madrid un grupo de trabajo dedicado en principio a la teoría de diferenciación de integrales, una rama de la teoría de la medida y variable real, estrechamente relacionada con el análisis de Fourier. Se organiza así un seminario en el seno del cual es gestada una obra en gran parte responsable de un verdadero renacimiento del interés de los analistas armónicos por problemas geométricos de la teoría clásica de la medida de Lebesgue. Se trata de la obra Differentiation of Integrals in $R^n$, inicialmente, en 1974, editada por la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense y luego, publicada como libro por la editorial Springer, en Alemania. La obra alcanzó gran divulgación internacionalmente y en 1978 apareció su traducción al ruso editada por la editorial MIR (Moscú) en su serie Novedades internacionales dirigida por los profesore Kolmogorov y Nobikov.

Entre 1976 y 1981, en este mismo seminario sobre análisis de Fourier, el interés se centra sobre el estudio y explotación más intensos de los diferentes métodos que en los últimos años han ido apareciendo en el análisis de Fourier. Fruto de este trabajo ha sido la obra publicada por el profesor Guzmán, primero en una versión inicial como notas de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense y luego, una vez perfeccionadas y completadas, como libro por la editorial North-Holland (Amsterdam) bajo el título Real Variable Methods in Fourier Analysis (1981). En ella se incorporan muchos de los resultados recientes aparecidos en los últimos años, del autor mismo, del grupo español que trabaja en el campo y de los muchos matemáticos de todo el mundo que dedican su actividad al análisis armónico.

Las reseñas que de estas dos obras se hacen en las revistas internacionales son notablemente laudatorias por su modernidad, claridad, actualidad y cantidad de problemas abiertos, interesantes y profundos que plantea. (Cf.H.G.Feichtinger en International Mathematical News (1981); M.S.P.Eastham en Zentralblatt (1981); R.Fefferman en Bulletin of the AMS (1977),etc., aparte de numerosas cartas particulares de importantes especialistas en la materia). En resumen, esta obra (1975) "es una contribución importante al campo [del Análisis de Fourier], que debe ser bien recibida por todos los que se ocupan en esta hermosa área de las Matemáticas (Fefferman, o.c.)".

Guzmán ha publicado otros varios textos de los que mencionamos sólo su valioso y rico texto de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y su bellísima obrita Mirar y ver. Son también de alta calidad los numerosos trabajos de investigación que ha publicado. Digamos que también se ha ocupado, con evidente competencia como demuestra el discurso que acabamos de oir, de cuestiones de Filosofía, Historia y Didáctica de las Matemáticas.

Hay que destacar también la actividad del profesor Guzmán realizada desde la joven Asociación Matemática Española. En 1978, en Segovia, una treintena de matemáticos españoles decidieron constituir la Asociación Matemática Española, entre cuyas finalidades ocupa el principal lugar la de fomentar y organizar reuniones matemáticas de tipo monográfico de nivel internacional, nacional o más local, que estimulen el desarrollo de la investigación matemática en el ámbito español. El profesor Guzmán, uno de los promotores de tal idea, fué elegido Presidente de esta Asociación que, a pesar de los escasos medios con que cuenta y del poco tiempo de existencia, ha sido muy eficaz en la finalidad que persigue.

En 1979 el profesor Guzmán y el profesor Ireneo Peral fueron encargados por la Asociación Matemática Española de organizar un congreso sobre Análisis de Fourier, que tuvo lugar en El Escorial, en junio de 1979. Con motivo de tal Congreso, seis de los máximos exponentes del desarrollo del análisis de Fourier actual (Zygmund, Calderón, Stein, Wainger, Coifman, Meyer) escribieron a los organizadores declarando que esta reunión junto con la de Williamstown de la American Mathematical Society de 1978 habían sido las reuniones más importantes en el área en los últimos años y se congratulaban del "notable florecimiento que el análisis de Fourier estaba manifestando en España".

Por el estímulo inicial de la Asociación Matemática Española han surgido otras iniciativas semejantes, entre ellas varios Congresos Internacionales sobre Ecuaciones en Derivadas Parciales y los Congresos de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones (CEDYA) que se viene celebrando anualmente.

En 1982 fueron encargados por la Asociación Matemática el profesor Guzmán, el profesor José Luis Rubio de Francia y el profesor Carlos Benítez de la realización de una idea nueva en nuestro país, la de llevar a cabo cursos intensivos de introducción a diferentes temas de investigación destinados a jóvenes licenciados que habrían de recibir con ellos una cierta orientación que posiblemente les condujese hacia la elaboración por ellos mismos de algún trabajo serio de investigación. Con el apoyo y colaboración de la Universidad de Extremadura (ICE), la Asociación Matemática Española organizó en el verano de 1982 cuatro cursos en distintas áreas matemáticas con gran afluencia de alumnos y, al parecer, con gran aprovechamiento de muchos. La repetición y continuidad de experiencias semejantes ayudarán ciertamente a elevar rápidamente el nivel de la investigación matemática entre nosotros.

De la actividad del profesor Guzmán en materias de docencia e investigación cabe asímismo destacar las 12 tesis doctorales presentdas durante los últimos doce años, y los contactos realizados con diversos centros de Europa, USA, Canadá, Brasil, Argentina (más de cuatro años de estancia en USA y más de 30 visitas a diversas universidades como profesor invitado y conferenciante). Con estas estancias más o menos duraderas, suyas y de otros muchos miembros del grupo de análisis armónico español, se ha logrado que el grupo de trabajo esté al corriente de los avances internacionales y que fuera de nuestro país sea tenido en cuenta fuertemente en la investigación y desarrollo del campo.

El profesor Guzmán desempeña en la actualidad los cargos de Presidente de la Asociación Matemática Española y de Vicepresidente (Madrid) de la Real Sociedad Matemática Española.

***

1.Siguiendo la misma laudable costumbre, a la que me he referido al comienzo de mis palabras, paso a comentar brevemente el discurso del recipiendario.

¡Espléndida exposición, Señoras y Señores, la que hemos escuchado de nuestro nuevo recipiendario!

Hemos asistido al apasionante desarrollo del Análisis Armónico desde los místicos pitagóricos hasta los seguidores, numerosos y variados, de Juan Bautista José Fourier, para quien, como para Platón, "Et ignem regunt numeri". Guzmán nos ha dado una imagen viva de este progreso, haciéndonos patente tanto la dinámica interna propia de la historia de las teorías matemáticas,como los momentos creativos de los grandes autores de la teoría, entre los que descuellan Pitágoras y Fourier, pero a los que hay que añadir otros muchos importantes matemáticos modernos. El recipiendario menciona más de treinta famosos matemáticos que han contribuído al Análisis de Fourier, y entre ellos se encuentran figuras tales como Dirichlet, Cauchy, Riemann, Weierstrass, Zygmund, Calderón, Kolmogorof, Carleson, L.Schwartz, etc.; y asimismo pone de manifiesto la estrecha relación del Análisis armónico con otras numerosas, importantes y variadas teorías matemáticas; y finalmente nos sorprende con una extensa gama de profundas e imprevisibles aplicaciones del Análisis de Fourier.

2. Mis palabras van a limitarse a un comentario sobre uno de estos momentos creativos en la historia de las Matemáticas; van a ceñirse concretamente a la contribución de Euler al desarrollo del concepto de función.

Guzmán da cuenta de la larga polémica acerca de la ecuación de ondas, y en particular de la que tuvo lugar entre D'Alembert y Euler; la cual fue muy viva durante algunos años, pero luego cayó en el olvido. El desacuerdo se centraba en cuál de las dos soluciones que propugnaban los dos matemáticos debía ser admitida como la más general. En términos modernos, la discusión era sobre cuál era la clase de curvas o funciones que podían ser admitidas como datos iniciales. Según Guzmán, "la clarificación del tema sólo podría venir de una profundización en las raíces mismas del análisis". Y un poco más adelante añade: "Las discusiones de la polémica constituían en realidad las contracciones de la matemática para dar a luz una nueva noción de dependencia funcional. La concepción prevalente de función era fuertemente algebraica. La función tratable por los medios del análisis, lo hemos oído al propio D'Alembert, debe ser expresable mediante 'una sola y misma ecuación'". El comentario que sigue confirma, me parece, completamente estas apreciaciones del recipiendario.

2.1.Permitidme que empiece con un esbozo del concepto de función y de su desarrollo histórico, pues me parece que ello ayuda a confirmar la conclusión a que llegaré.

El concepto genérico de función incluye el concepto de una cantidad que varía libremente o variable independiente, el de una cantidad que varía dependiendo de la variable independiente, o sea una variable dependiente, y el concepto de correspondencia o dependencia funcional de la segunda variable dependiente respecto de la primera variable independiente. Actualmente con la palabra función se designa propiamente la correspondencia de cada uno de los elementos del conjunto origen o dominio D con uno y sólo uno de los elementos del conjunto terminal T, y se representa F: D ⟶ T. Aunque también a veces se identifica la función con la variable dependiente; así a veces escribimos y=F(x), y hablamos indistintamente (y por consiguiente confusamente) de la función y o de la función F como si fueran la misma cosa. Es también obvia, por lo menos en general, la equivalencia entre el concepto de función y el concepto de curva en un plano. Para ello se dota al plano de una estructura o "sistema de referencia", que permite que cada punto de la curva establezca la conexión entre un valor de la variable independiente y el correspondiente valor de la variable dependiente; y de modo que se hagan patentes el dominio de la variable independiente y el conjunto donde toma valores la variable dependiente. Si tenemos una función y disponemos de un plano con un sistema de referencia, entonces podemos "representar" la función por una curva; inversamente, si tenemos una curva en un plano con un sistema de referencia, ésta define una función.

Es claro que en este sentido la noción de función se encuentra ya entre los griegos, pues basta considerar la trisectriz del sofista Hippias de Elis en la segunda mitad del siglo V a. de C. Pero hay que aguardar hasta el siglo XIV para que alguien, Nicole Oresme (1323?-1382), se ocupe el primero de la representación gráfica de funciones. Galileo (1546-1642) estudia la relación cuadrática entre el espacio recorrido por un grave en caída libre y el tiempo transcurrido; en la proposición IV de la Jornada Segunda de los Diálogos sobre dos nuevas ciencias (1638) demuestra una relación cúbica;y en esta misma Jornada describe dos métodos pràcticos para dibujar una parábola, aunque el segundo es equivocado, pues dibujaría una catenaria en lugar de una parábola.

Descartes (1596-1650) al comienzo del Libro Segundo de su Geometría arguye que las curvas algebraicas deben ser admitidas en la Geometría, porque se pueden trazar exactamente y la Geometría es una ciencia exacta; pero rechaza las curvas mecánicas como la cuadratriz (idéntica con la trisectriz de Hippias de Elis), porque al ser definidas mediante movimiento pertenecen a la Mecánica y la Mecánica (para Descartes) no es una ciencia exacta. Esta generalización del concepto de curva admisible es importante; pero todavía lo es mucho más el hecho de que, aprovechándose del desarrollo que había alcanzado el Algebra, elige convenientemente el sistema de referencia no ya para una mera representación de una función algebraica, sino para estudiar las propiedades de la curva o función que representa; más aún, refiere simultáneamente varias curvas a un mismo sistema de referencia. De este modo consigue resolver el problema geométrico de Pappus por un método algebraico. Descartes es consciente de la especificidad, novedad y potencia de este método y ello le convierte en el creador de la Geometría Analítica.

Nótese que, entre los griegos, ya Dinostrato, estudiando la trisectriz, había logrado la cuadratura del círculo. Pero no parece que se pueda decir sin exageración que ya los griegos crearon,por tanto, la Geometría Analítica, pues no llegaron a establecer este procedimiento como método general y sistemático.

Newton introduce las fluxiones, Leibniz introduce la palabra función, Euler introduce primero la notación $y=F:x$ y luego $y=F(x)$. El paso más importante en los tiempos modernos para la generalización del concepto de función es debido a Fourier; y en 1829 Dirichlet introduce el concepto actual de función. Todavía, después de G.Cantor, la función se define como una relación binaria que se identifica con un cierto subconjunto del conjunto producto cartesiano del conjunto origen por el conjunto terminal.

2.2. En adelante me ocuparé exclusivamente de la contribución de Euler a la generalización del concepto de función.

En su celebérrima obra Introductio in Analysin infinitorum (1748) Euler encabeza el primer capítulo del primer libro con el título "De functionibus in genere", o sea "De las funciones en general". En el número 4 define: "4. Functio quantitatis variabilis, est expressio analytica quomodocumque composita ex illa quantitate variabili, et numeris seu quantitatibus constantibus" (Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de una manera arbitraria de aquella cantidad variable y de números o sea de cantidades constantes).

A continuación, en el número 6. especifica que lo que diferencia unas funciones de otras depende de cómo se mezclan las operaciones que componen la expresión analítica. Estas operaciones pueden ser algebraicas, a saber suma y resta, multiplicación y división, elevación a potencias y extracción de raíces en las que también hay que incluir la resolución de ecuaciones; y pueden ser también transcendentes como exponenciales, logarítmicas y otras innumerables que proporciona el Cálculo integral.

Estas definiciones, así como las otras muchas que da en este capítulo, son probablemente el resultado de una elaboración cuidadosa y lo más precisa posible de lo que Euler ha recibido y considera vigente en su tiempo, y cuyo origen se remonta probablemente a Leibniz en lo esencial. Es evidente que hay una superación importante del punto de vista de Descartes.

En el capítulo 4. Euler se ocupa del desarrollo de funciones en series infinitas de potencias de la variable independiente, y de este modo unifica el tratamiento de las funciones algebraicas y transcendentes. Afirma que cualquier función de $\underline{z}$ puede desarrollarse en serie infinita

$$Az^{\alpha}+Bz^{\beta}+Cz^{\gamma}+Dz^{\delta}+\dots,$$

donde los exponentes $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ pueden ser números cualesquiera. Dada la manipulación arbitraria que hace de las series parece que tácitamente admite el paso al límite, o sea la suma infinita, como operación válida para formar funciones transcendentes. Si ello fuera así, se tendría, por ejemplo, la siguiente antinomia: Por un lado la función f(x),

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(x^2)+1, \quad \text{para } |x| \leq 1 \\ f(x) &= x^2 \quad\quad\quad\quad\;\, , \quad \text{para } |x| \geq 1, \end{aligned}$$

empalme de una función algebraica con otra transcendente, no parece que pudiera admitirse como función, pues no cae dentro de la definición dada; por otra parte esta misma función podría definirse mediante la expresión (¿analítica?)

$$f(x)= \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2(n+1)}+\log(x^2)+1}{x^{2n}+1}$$

2.3. En lo que resta me ocuparé únicamente de la disertación de Euler titulada: De usu functionum discontinuarum in Analysi (Sobre el uso de las funciones discontinuas en el Análisis)[en Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae 11 (1765), 1767, pp.67-102 con un resumen en las pp.5-7. También en Opera Omnia, (1), 23, pp.74-91, que es el texto que citaré]. La disertación va precedida de un Resumen, cuyo autor es probablemente el editor de los Novi Commentarii; el autor no es Euler, pues figura en tercera persona, mientras que en el texto de la disertación escribe en primera persona.

Este escrito de Euler es sin duda la obra de un matemático maduro , está cuidadosamente redactado y contiene una tesis bien definida y bien defendida: En el Análisis deben admitirse las funciones discontinuas, que representan una generalización de las funciones continuas, únicas admitidas hasta entonces. Euler tuvo la disertación el año 1765 (?), o sea más de doce años después del momento álgido de la polémica sobre la ecuación de ondas entre D'Alembert, Euler y Daniel Bernouilli; así Euler se refiere a la sentencia expresada por D'Alembert "poco después" (Cf. 2.32) de que Euler hubiese publicado su solución en 1748 y 1753. La tesis de Euler en esta disertación está estrechamente vinculada y parece que se origina precisamente a propósito de la controversia sobre la ecuación de ondas.

La disertación de Euler puede dividirse en seis secciones, que paso a reseñar.

2.3.1. En la primera sección (nn. 1-3) define muy sucintamente las funciones que había ya definido prolijamente en la Introductio in Analysin Infinitorum, como hemos visto; sólo que ahora las llama funciones "continuas" y en la terminología actual parece que todas ellas serían funciones analíticas (n.1.). Luego explica su continuidad (n.2). Luego define las funciones discontinuas (n.3).

He aquí algunos textos tomados de esta Sección:

"1. Lo que en Análisis se suele tratar sobre las funciones, o sea cantidades determinadas por una variable, se restringe a aquellas funciones que llamamos continuas y cuya formación se rige por una ley determinada. Esto se ilustra muy bien mediante la teoría de líneas curvas, donde las ordenadas en cuanto son determinadas por las abscisas, se comportan como funciones, de modo que la índole de todas las funciones puede representarse aptísimamente mediante líneas curvas. (...) También recíprocamente, dada una línea curva cualquiera, sus ordenadas representan determinadas funciones, cuya naturaleza está contenida en la naturaleza misma de la línea curva..."

"2. Ahora bien, es bien sabido que en la Geometría superior no se suelen considerar otras curvas que aquellas cuya naturaleza se defina por una determinada relación entre las coordenadas, expresada por alguna ecuación, de modo que todos sus puntos se determinen por una misma ecuación como ley. Puesto que se estima que esta ley contiene en sí el principio de continuidad, pues por ella todas las partes de la curva están ligadas entre sí por un vínculo estrechísimo de modo que en ellas salvando el nexo de continuidad no puede darse mutación alguna, por esta razón estas líneas curvas se llaman continuas; y no importa si la ecuación que contiene su naturaleza sea algebraica o transcendente, conocida o incluso desconocida, con tal que entendamos que hay una ecuación que expresa la naturaleza de tales líneas curvas. Aquí no se mira la continuidad del trazo a lo largo del cual las ramas de la curva se prolongan; así las dos ramas conjugadas de una hipérbola constituyen una línea curva continua igual que una parábola o elipse, a pesar de que las dos ramas están completamente separadas. Precisamente la causa por la que se atribuye continuidad a las dos ramas de la hipérbola es que ambas están contenidas en una misma ecuación, a partir de la cual se pueden construir".

Esta noción de continuidad, que supongo se remonta a Leibniz, es vaga y tiene un carácter global, y ahora se nos hace extraña; este carácter global se parece al que tienen las actuales funciones analíticas.

"3. Establecido el criterio de continuidad es obvio lo que es una función discontinua o carente de ley de continuidad. Así aquellas líneas curvas que no están determinadas por ecuación alguna, como las que suelen dibujarse por un trazo libre de la mano, procuran tales funciones discontinuas, ya que en ellas no se pueden definir mediante ley alguna los valores de las ordenadas por las abscisas. Tales líneas curvas, en cuanto contradicen al superior género de continuidad definido por ley, se llaman vulgarmente mecánicas, pero más propiamente discontinuas, o sea carentes de ley de continuidad, y ello no porque sus partes no estén ligadas entre sí, sino porque no están determinadas por ecuación alguna. Así, cualesquiera trazos dibujados libremente con la mano sobre el papel, aunque prosigan con continuidad, según esta definición deben ser considerados como discontinuos, ya que ciertamente nunca sucederá que tales trazos estén contenidos en una determinada ecuación. También es conveniente incluir aquí las líneas llamadas vulgarmente mixtas, [obtenidas] cuando se unen partes tomadas de diversas líneas curvas o también cuando se unen de otro modo diversas partes de una misma línea. Así el perímetro de un polígono..."

2.3.2.Hasta aquí, en los tres primeros números, Euler ha definido función continua, continuidad y función discontinua. Ahora da la razón por la que D'Alembert rechaza las funciones discontinuas, que a su vez es la razón por la que rechaza la solución general de la ecuación de ondas, dada por Euler mediante las dos funciones arbitrarias que determinan la posición y velocidad iniciales (n.4). Naturalmente, esta discrepancia plantea una cuestión gravísima sobre los contenidos del Análisis y Euler enuncia su solución y las razones de la misma (nn. 5 y 6).

"4. Ahora bien, es manifiesto que tales líneas y funciones discontinuas no encuentran su lugar en el Análisis, pues toda esta especulación se ocupa en investigar las propiedades de las curvas que se consideran, la cual ocupación no puede asumirse a menos que la naturaleza de estas líneas esté determinada por alguna ley y ecuación. De ahí que la mayor parte de los geómetras, llevados por esta razón, no hayan dudado en proscribir enteramente tanto de la Geometría como de todo el Análisis todas las líneas y funciones discontinuas, y colocar éstas entre los objetos de los que el Análisis se aparta. No hay duda de que el Celeb. |érrimo| D'Alembert ha defendido abiertamente esta sentencia, cuando yo había determinado el movimiento de las cuerdas vibrantes de modo tan general, que la solución se adaptaba a todos los movimientos [velocidades] y figuras [posición] que hubiesen sido impresas a la cuerda en el momento inicial. Pues, poco después, este Varón excelentísimo me objetó que no podía definirse ningún movimiento a menos que la figura [posición] impresa a la cuerda en el instante inicial fuese continua y comprendida por una ley determinada, y que si por el contrario sucedía que la figura de la cuerda fuera inicialmente discontinua, entonces la determinación del movimiento que tenía que seguirse de ninguna manera pertenecía al Análisis, y era por ello ilícito querer investigarla. A cuya objeción cierto respondí suficientemente, y hace poco el Cel.[ebérrimo] La Grange en las Actas Taurinicenses propugnó tan sólidamente mi solución que ya a nadie le puede quedar duda".

La objeción de D'Alembert recuerda a la que se puso a la definición de función dada por Dirichlet en 1829. Este dijo que una función era una variable (dependiente) que dependía de otra variable (independiente), y que la dependencia podía fijarse de una manera totalmente arbitraria. A esta definición se objetó, que era inútil,pues supuesta tal arbitrariedad nada podría decirse de las funciones. La actitud de D'Alembert ha sido frecuente en la historia de las matemáticas, pero también lo ha sido la de Euler superando tales actitudes. La actitud de D'Alembert de aferrarse a un concepto restringido es correcta, si no queda compensada la introducción de un concepto generalizado, es decir, si la generalización carece de aplicaciones o de interés. Por eso la tarea de Euler será mostrar que efectivamente encuentra aplicaciones interesantes para este nuevo concepto más general de función.

Euler prosigue:

"5.Aquí surge, pues, una cuestión muy importante:¿Cómo hay que juzgar de las funciones discontinuas,..., y puede concedérseles un lugar en el Análisis y cuál?" Arguye Euler que en el problema de la ecuación de ondas ciertamente tiene sentido hablar de funciones discontinuas; y que su solución pertenece al Análisis y a la ciencia del movimiento, tanto si sabemos resolverla como en caso contrario. En todo caso el problema es siempre digno de nuestra atención; ni importa aquí, hasta dónde llegue nuestra sagacidad, pues apenas habrá Geómetra que no haya trabajado duramente en problemas que superaban sus fuerzas. Con todo, Euler reconoce que el problema de la ecuación de ondas pertenece a una parte del Análisis que hasta ahora ha sido poco estudiado.

"6.En orden a resolver este litigio observo que las funciones discontinuas no pueden admitirse ni en el Algebra ni en aquella parte del Análisis que todavía ahora se trata principalmente. Pero el Análisis es mucho más extenso y hay que estimar que incluye partes, que no sólo no excluyen las funciones discontinuas, sino que hasta tal punto por su misma naturaleza las exigen, que ningún problema que les pertenezca puede considerarse debidamente resuelto, si no se introducen en su solución funciones completamente arbitrarias, y por tanto también las discontinuas. Cierto que estas partes del Análisis todavía ahora son poco cultivadas...."

En lo que resta de su disertación Euler justificará la existencia de tales partes del Análisis y de cómo en efecto exigen un concepto más general de función.

2.3.3. Euler dedica la tercera Sección de su disertación (nn.7-9) a la división del Análisis. Lo divide partiendo del concepto de función y por tanto en dos partes: la que se ocupa de funciones de una sola variable independiente y la que se ocupa de funciones de dos o más variables independientes.

En la Sección cuarta (nn.10-14) se ocupa de la Primera Parte del Análisis o sea de las funciones de una variable independiente y en primer lugar (nn.10-12) establece los fundamentos del cálculo diferencial, "de modo que todas las controversias,que en otro tiempo tuvieron lugar acerca de las diferenciales de todos los órdenes y de su naturaleza, espontáneamente se derrumban". A continuación (nn.13-14) define el cálculo integral,que incluye la resolución de ecuaciones diferenciales, y pone de manifiesto que la integración completamente satisfactoria de una ecuación de orden n ha de contener n constantes arbitrarias.

En la quinta Sección se ocupa de la Segunda Parte del Análisis (nn.15-19) o sea de las funciones de dos o más variables independientes. Muestra cómo la fundamentación de los conceptos de diferencial y de derivada parcial se reducen al caso de una variable independiente (nn.15-16). A continuación se ocupa del Cálculo integral cuando hay derivadas parciales. Dice que difiere notablemente del Cálculo integral en el caso de una variable independiente y que esta parte del Análisis ha sido todavía poco estudiada "hasta tal punto que apenas sus primeros elementos han sido suficientemente desarrollados" (n.17).

2.3.4. El Cálculo integral concerniente a funciones de varias variables independientes incluye o se identifica con la resolución de ecuaciones en derivadas parciales. Este es el tema al que evidentemente Euler quería llegar. La Secciones tercera, cuarta y primera mitad de esta quinta estaban orientadas al tema de la resolución de Ecuaciones en derivadas parciales. Aquí encuentra Euler la justificación, la necesidad de admitir las funciones discontinuas y consiguientemente también la justificación de su solución general de la ecuación de ondas en términos de dos funciones arbitrarias, y por tanto posiblemente discontinuas, que representan los datos iniciales.

He aquí algunos textos de Euler:

"18. El vigor y el casi propio carácter de este nuevo Cálculo [integral] hasta ahora ha sido mínimamente considerado. Así como el vigor del cálculo integral corriente consiste en que en cualquier integración se introduzca una cantidad constante a nuestro arbitrio; así en esta parte que se ocupa de funciones de dos variables, en cada integración entra en el cálculo no sólo una nueva constante, sino una nueva función de alguna variable, función completamente indeterminada, que de tal manera depende de nuestro arbitrio, que en su lugar también las funciones discontinuas pueden ser asumidas. Por tanto el uso de las funciones discontinuas, en este casi nuevo género del cálculo, no sólo no se excluye, sino que hay que estimar que pertenece casi esencialmente a su naturaleza; y ninguna integración en este Cálculo debe ser considerada como completa y perfecta, si en la ecuación integral no se introduce tal función absolutamente arbitraria"."Y cuando se trata de funciones de tres variables, toda integración introduce en el Cálculo una función arbitraria de dos variables".

Y estas afirmaciones no son mera especulación o pedantería, "sino que más bien tienen su máximo fundamento en la naturaleza de las cosas y son bellísimamente coherentes con la concatenación de las verdades" (n.19).

Euler no deja de repetir también aquí que "un eximio ejemplo de ello se manifiesta en el problema de las cuerdas vibrantes".

2.3.5. Por si todo lo dicho no fuera bastante, Euler, en una sexta y última Sección, quiere remachar su tesis con la resolución de una ecuación no lineal en derivadas parciales de primer orden, "para que no quede ninguna duda" (n.20).

En efecto, en esta sexta Sección (nn.20 hasta el último 23) Euler se plantea y resuelve el problema de hallar todas las superficies tales que las normales en todos sus puntos sean iguales a una cantidad $\underline{a}$.

Sea $z=z(x,y)$ una solución. Es obvio que una solución muy particular es la esfera de radio $\underline{a}$ y centro en un punto del plano de las variables x, y. Otra solución más general es un cilindro de revolución de radio $\underline{a}$ y cuyo eje sea una línea recta que yace en el plano x,y. Pero la solución más general será, dice Euler de manera intuitiva, aquella superficie que se obtenga trazando en el plano x,y "una curva cualquiera sea continua o discontinua" (n.20) y tal que sus secciones por un plano ortogonal a la curva sean semicírculos de radio $\underline{a}$ con centro en la misma curva.

Después de esta introducción intuitiva (n.20), Euler plantea la ecuación de tales superficies, que es

$$z(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}=a,$$

y la resuelve matemáticamente por un elegante método, y demuestra así que la solución matemática coincide con la que intuitivamente había previsto.

Lo importante aquí es lo siguiente: que suponer una curva arbitraria dada en el plano x,y es completamente natural y absolutamente necesario para dar una solución general. Euler da además un método geométrico para construir, partiendo de la curva dada, la superficie solución correspondiente a esta curva dada, la cual obviamente puede ser tanto continua como discontinua.

En realidad, es casi una repetición del mismo argumento dado ya para la solución de la ecuación de ondas, pero así muestra Euler con otro ejemplo su carácter general.

Euler termina su disertación repitiendo que las funciones discontinuas en el Análisis superior "de tal modo hay que considerar que pertenecen a la esencia del Cálculo, que ninguna integración puede tenerse por completa y perfecta, si al mismo tiempo no se introduce en el cálculo una función máxime indefinida, y por tanto también discontinua".

3. Voy a terminar con unas consideraciones que intentan resumir y esclarecer la contribución de Euler al concepto de función. Ya hemos dado una idea general de la evolución de este concepto desde el siglo XIV hasta nuestros días (Cf. 2.1.) para que, juntamente con la descripción que nos ha hecho Guzmán en su discurso, podamos situar convenientemente la aportación de Euler.

3.1. La razón principal y exclusiva de Euler es que las funciones discontinuas son necesarias para la resolución completa de las ecuaciones en derivadas parciales;y aduce como ejemplo la misma ecuación de ondas en litigio y la ecuación de las superficies cuya normal sea constante. Es notable que esta razón se basa en una aplicación de la existencia global de las funciones discontinuas, y no en lo interesante que podría ser el mismo estudio de las funciones discontinuas y de sus propiedades. Es más, parece que el mismo Euler, cediendo a la crítica de D'Alembert, excluye este posible interés por las funciones discontinuas, pues las excluye del Análisis de las funciones de una sola variable independiente. El interés de Euler por las funciones discontinuas no radica en ellas por sí mismas, sino en cuanto son globalmente necesarias para resolver otro problema.

Pese a las numerosas objeciones de D'Alembert (Véase por ejemplo en Lagrange:Oeuvres, (1867), I, pp.158-180 y 319-331 de 1760-1761), la razón de Euler me parece suficientemente válida, como confirma Lagrange en el texto que acabamos de citar. El rechazo de la introducción de las funciones discontinuas en bloque por parte de D'Alembert no está justificado.

3.2.Actualmente hablamos de las funciones de clase n, $C^n(\Omega)$, para significar el conjunto de funciones con n derivadas continuas en $\Omega$, donde "continua" tiene el significado moderno y no el derivado de la ley de continuidad de Leibniz. Me parece que es Cauchy el primero que habla de la clase de las funciones continuas en el sentido moderno de esta palabra "continua", y en el sentido moderno introducido por Dirichlet de la palabra "función". Además, hoy tenemos muchos teoremas que caracterizan propiedades de estas clases funcionales con independencia de sus aplicaciones. ¿Hasta qué punto puede decirse que Euler sea un precursor de este concepto de espacio funcional $C^n(\Omega)$?

Me parece obvio que Euler supone que sus funciones discontinuas son continuas en el sentido moderno. Más aún: me parece que tácitamente supone que estas funciones discontinuas tienen todas las derivadas continuas que hagan falta para que puedan ser consideradas soluciones con pleno sentido de las ecuaciones en derivadas parciales que resuelven; y en este sentido hay una objeción de D'Alembert que intenta ser contestada por Lagrange. Con todo, me parece que hay que decir que a Euler se le escapa esta temática de la clase $C^n(\Omega)$. A lo sumo cabría distinguir en Euler las funciones discontinuas llamadas vulgarmente mixtas, que sí podrían ser consideradas formando una clase y las funciones de trazo continuo que carecen de ecuación que las determine (Cf.n.3 en 2.31). Hablando desde un punto de vista moderno, a Euler se le escapa que lo importante para el concepto de función no es la ecuación que determina la correspondencia entre variable independiente y variable dependiente, sino la correspondencia misma; y que ésta queda establecida cuando se traza una curva en el plano, aunque no pueda expresarse por una ecuación o "expresión analítica" en términos de ciertas limitadas operaciones admitidas.

3.3. Merece observarse finalmente que esta generalización euleriana del concepto de función tuvo una importancia extraordinaria para el desarrollo del Análisis Matemático. Las nuevas funciones discontinuas, definitivamente confirmadas por Lagrange, plantean variados e interesantes nuevos problemas de integración, de sumación de series, del carácter local de las funciones, y otros.

Todo esto está bellamente expuesto por el recipiendario en su discurso a propósito de la contribución extraordinaria de Fourier al concepto de función y a la creación del Análisis armónico. Guzmán nos habla de diversas razones profundas, por ejemplo la simplicidad de las funciones trigonométricas; y luego de nuevo otras razones más profundas, como el hecho de que sean autofunciones, etc..Todo ello con una concatenación de ideas, fluída y lógica, que suscita la admiración.

No me resta, sino dar de nuevo a Miguel de Guzmán la bienvenida a esta Corporación, que desde hoy se honra de contarle entre sus miebros. He dicho.