REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

DISCURSO

LEÍDO EN EL ACTO DE SU RECEPCIÓN
EL DÍA 22 DE FEBRERO DE 1956

POR EL

EXCMO. SR. D. RICARDO SAN JUAN LLOSA

Y

CONTESTACIÓN

DEL

EXCMO. SR. D. JULIO REY PASTOR

MADRID
DOMICILIO DE LA ACADEMIA: VALVERDE, 22
TELÉFONO 21-25-29
1956

C. BERMEJO, IMPRESOR.—J. GARCÍA MORATO, 122.—TELÉFONO 33-06-19.—MADRID

DISCURSO

DEL

EXCMO. SR. D. RICARDO SAN JUAN LLOSÁ

LA ABSTRACCION MATEMATICA

SEÑORAS, SRES. ACADÉMICOS, SEÑORES:

La Real Academia de Ciencias me ha hecho el honor de elegirme y he aceptado el puesto sin análisis ni vacilación. Pero profundamente agradecido.

¡Qué difícil va a ser llenar la vacante de un hombre de tan extraordinaria actividad como D. José María Torroja y mucho más para quien carece de tan envidiable cualidad!

Eminencias de mucha categoría y mejor pluma han rendido el homenaje merecido a la memoria del que fué veinte años Secretario de esta Real Academia. Poco podríamos decir que no hayan expresado ya quienes vieron de cerca su labor.

Nuestro trato con D. José María fué siempre de subordinado a superior. Desempeñábamos nosotros una cátedra de la Fundación Conde de Cartagena y él era el Secretario de esta Real Academia. Sin embargo, nunca me hizo esperar. D. José María Torroja tenía respeto por el tiempo ajeno. Quizá porque sabía administrar el suyo con eficacia y oportunidad admirables.

Mi desconocimiento de la Fotogrametría, especialidad científica más y mejor cultivada por él, impide que comente sus trabajos con testimonio propio. Hemos recurrido por esto al ajeno, y hemos elegido el de los extranjeros, por lo que se le prefiere casi siempre, por considerarlo más imparcial, y tal vez un poco porque, como tantos españoles, no sabemos escapar todavía a un mito, frecuentemente, injustificado.

Su primer trabajo, *Los fundamentos teóricos de la Fototopografía*, fué una amplia Memoria publicada en la Revista de esta Real Academia (t. VI, 1907), al que siguió otro, *Le problème général de la Photogramétrie et de la Perspective en coordonnées projectives*, en el que se hace un bello estudio teórico. En ambas Memorias se ocupa de los trabajos del General de Brigada español A. Terrero, Profesor de Astronomía y Geodesia en la Escuela de Guerra del Estado Mayor, el cual, ya en 1862, había recomendado el método que en 1883 publicó von Hauck sobre identificación de puntos en los fotogramas. Así lo reconocen los austríacos, de acuerdo con Torroja, en su artículo *Sur une question de priorité à propos du Théorème de Hauck*, interesante para la historia de los principios de Fotogrametría, según la misma opinión de los austríacos, en su trabajo *Notes historiques sur la Photogramétrie en Espagne;* el cual contiene un resumen de la Memoria presentada por el coronel A. Laussedad a esta Real Academia en 1863. En estas notas demuestra Torroja que España comparte con Francia la prioridad del primer empleo práctico de la Fotogrametría. Y esto fué así gracias a él.

En el artículo necrológico publicado en la Revista del Instituto Geográfico austríaco, de donde hemos extraído las opiniones mencionadas se dice: «En él pierde España un famoso científico internacional y su más significado representante en el sector de la Fotogrametría». «Deseemos que la actividad fotogramétrica en España alcance rápida y nuevamente la altura correspondiente a su decoroso pasado, y que una Sociedad Española de Fotogrametría, nuevamente creada, mantenga el contacto con las otras naciones en el marco de la Sociedad Internacional, dentro de la cual y en conmemoración de su primer fundador podría llevar el nombre de «Sección Torroja».

* * *

Entre agotar la bibliografía sobre un tema de la especialidad o presentar a la Real Academia unas observaciones sobre los procesos de abstracción en la Matemática, hemos optado por esto, no por creerlo más interesante, sino porque las decisiones de nuestro libre albedrío no son tan libres como quisieran los fetichistas de la libertad, sino consecuencias más o menos conscientes del estado circunstancial de nuestra propia personalidad.

Hay dos procesos intelectuales opuestos llamados *abstracción* y *especulación* (*). La abstracción consiste en apreciar analogías prescindiendo de las diferencias, y la especulación en lo contrario: en apreciar las diferencias prescindiendo de las analogías. En la primera se apoya la Ciencia, y en la segunda, el Comercio, según la opinión de un autor inglés, cuyo nombre conocía Terradas; pero que, como tantas otras cosas que el coloso sabía, se hundieron con él en el sepulcro; porque ni entre todos sus discípulos juntos fuimos capaces de aprenderlas. Según el profesor inglés, cuando ante dos objetos un hombre reacciona apreciando sus analogías, tiene aptitud para la Ciencia; pero si percibe antes las diferencias, debe dedicarse al Comercio. Quizá por esto los científicos sean malos comerciantes.

La abstracción se presenta en la Matemática, como todos sabemos, desde la noción de número entero y positivo. El proceso es indudablemente inconsciente, porque el concepto de número natural es primitivo en el hombre civilizado, y, desde luego, previo a toda noción matemática, pese a la subversión histórica y psicológica de la colosal obra de N. Bourbaki *Él éments de mathématique.* (París. Hermann), que no los introduce hasta el final del vol. I. La cosa cambia, al

(*) No damos a esta palabra el significado peyorativo usual, ni el de especulaciones cientificas, ni ningun otro, sino sólo el definido en el texto. Se podria usar *discriminación;* pero preferimos conservar la nomenclatura que nos dió Terradas verbalmente.

parecer, en el hombre salvaje. En algunas tribus del Amazonas saben contar sólo hasta dos; probablemente padre y madre, pero confundiendo en la vaga expresión de «muchos» a todos los números mayores. Esto lo cuenta E. T. Bell en su *Historia de las Matemáticas,* indicando de paso que estos salvajes están tan adelantados en Matemáticas como una gata que no protestó cuando se le quitaron dos de sus seis gatitos, pero se enfureció al privarla de tres. Sería interesante estudiar la noción de número que puedan tener los perros, monos y otros animales superiores, para ver si la abstracción es específica de la raza humana.

Del cálculo con números se pasa al cálculo con letras que representan indistintamente cualquier número. Esto, que hoy conocen los chicos del colegio, se llamó abstracción de abstracciones. ¡Qué lejos estaba quien lo calificó tan pomposamente de sospechar dónde había de llevar la carrera emprendida! Con letras y números se forman las expresiones algebraicas, cuando sólo se emplean las operaciones aritméticas y sus inversas. Pero si se introduce el paso al límite, se llega al concepto general de función como correspondencia entre conjuntos numéricos, según explicó sugestivamente por primera vez en España nuestro maestro Rey Pastor en sus conferencias del Ateneo el año 1916. Nueva abstracción es esta, en que se ha prescindido de la expresión algorítmica de la correspondencia. Expresión que ya no se emplea en las demostraciones generales, sino que se basan éstas en condiciones intrínsecas impuestas a la correspondencia. El campo de las variables sigue, sin embargo, siendo aún numérico. Es a principios de este siglo cuando Fréchet, en una transcendental Nota brevísima presentada a la Academia de Ciencias de París en el año 1902, señala la posibilidad de considerar variables que representen entes cualesquiera sometidas a ciertas relaciones, hábilmente elegidas, para que las propiedades esenciales de las funciones puedan demostrarse con la misma o mayor sencillez que cuando se trataba de conjuntos numéricos. Nuevamente se ha desechado lo superfluo, para conservar lo esencial en genial abstracción. Las funciones de línea o funcionales de Volterra, por ejemplo, pierden su intrincada notación, porque es innecesaria, y se manejan con la misma sencillez que las viejas funciones de variable real. El campo de la variable es un espacio métrico o topológico según la índole de las conclusiones; y al estudiar la magistral obra de Hahn, *Reellen Funktionen* (Leipzig, 1932), donde se desarrolla sistemáticamente esta bella Teoría de funciones, uno llega a olvidarse de la enorme generalidad de las conclusiones obtenidas con elegancia suma y sin prolijos cálculos. Aún puede variar la función en un espacio abstracto y se tienen las «aplicaciones» con la terminología de Bourbaki, que por su depurada selección acabará imponiéndose en todo el Mundo.

Volvamos, sin embargo, después de esta incursión fugaz en el campo analítico, al origen de los entes abstractos; es decir, a los criterios de equivalencia o igualdad. Cada igualdad, o sea, cada relación idéntica, recíproca y transitiva, da origen a un concepto abstracto, cuando se prescinde de lo que no es común a los entes iguales. Esto, que lo aprendimos en el Análisis algebraico de Rey Pastor, es la clave de todo proceso de abstracción. Por otra parte, cada grupo de transformaciones o correspondencias define una igualdad de cada objeto y sus transformados. Los tres postulados del grupo no son ni más ni menos que los tres caracteres de la igualdad. Y recíprocamente, cada igualdad define un grupo de transformaciones o correspondencias asignando a un objeto otro de sus iguales. Los entes nacidos del criterio de igualdad son los invariantes en las transformaciones del grupo. Una ciencia puede así definirse como el estudio de los entes nacidos de un criterio de igualdad o de los invariantes en las operaciones de un grupo.

Así definió Klein la Geometría del espacio intuitivo. Cuanto más amplio sea el criterio de igualdad; esto es, cuanto menos exija a los entes iguales, más abstracta es la ciencia, y cuanto más restringido aquél, más concreto el sistema, más próximo a la realidad. El grupo más sencillo es el formado por la operación unidad. El criterio de equivalencia es la igualdad absoluta o identidad entre una cosa y ella misma. Invariantes son todos los atributos del individuo. La ciencia es entonces el estudio específico integral del ser elegido, como entidad indivisible. Es el que el buen clínico hace del enfermo. Este caso límite para un espacio no es el estudio de sus figuras que Klein propuso en su definición de Geometría, sino el del espacio total, de su métrica o su topología, sin sumergimientos; es justamente el que Klein no podía considerar, porque, cuando dió su famoso Programa de Erlangen, no se conocían aún los espacios abstractos, sino solamente el espacio intuitivo (euclidiano o no) y el estudio de éste como entidad indivisible pertenece a la Filosofía y no a la Geometría.

En Matemáticas, el más amplio criterio de igualdad es la correspondencia biunívoca entre conjuntos, que da origen a conceptos, de número para los finitos y de potencia para los infinitos. Por esto la Aritmética finita o transfinita es la más abstracta de las Matemáticas.

Sigue el isomorfismo o igualdad algebraica, correspondencia que conserva ciertas relaciones u operaciones, o sea que al resultado de una operación entre algunos elementos de un conjunto hace corresponder el resultado de la misma entre sus homólogos. El isomorfismo más sencillo es la semejanza de conjuntos ordenados, que define los números ordinales finitos o infinitos. En cambio, la clásica correspondencia biunívoca de Cantor, entre los puntos de un segmento y un cuadrado, es biunívoca, pero no isomórfica; es aritmética, pero no algebraica; y menos, naturalmente, topológica o continua.

Los teoremas de unicidad del Algebra se enuncian así, salvo isomorfismo, pues desde el punto de vista algebraico dos sistemas isomorfos son equivalentes, y, a fuerza de manejar esta equivalencia, se identifican los elementos homólogos en el isomorfismo.

Por esto H. Weyl, que era profesor de Análisis, decía que vector n-dimensional es un conjunto ordenado de n números y los físicos opinaban algunas veces que Weyl era oscuro.

Los criterios de igualdad en la Física son, en efecto, más restringidos que el isomorfismo y agregan al concepto numérico indicado de vector cualidades, abstractas todavía, pero extrañas a la noción algebraica de Weyl, o a la más amplia de elemento de un espacio E_n sobre un anillo. Sin embargo, estos mismos físicos que repudiaban por abstracta tan elemental noción, no se paraban frente a identificaciones mucho más atrevidas; por ejemplo, la de gravedad con curvatura de un espacio, cuando éste no es sino un diagrama *genialmente adecuado;* es decir, un modelo geométrico isomorfo de la realidad.

Hemos subrayado genialmente adecuado, porque ni la ecuación $(x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2)$, que expresa la independencia de la velocidad c de la luz respecto del sistema coordenado de referencia, ni otras de mayor peso, conducen inevitablemente al sistema apropiado. Es la oportunidad en la elección; es el saber siempre dónde van; es el llegar con métodos imperfectos a resultados verdaderos; todo ello revela un talento en los físicos que suple con ventaja el retraso de los algoritmos matemáticos; es como el ojo clínico de los médicos, que no podrán suplir jamás los datos del laboratorio, por numerosos y minuciosos que éstos sean. Por muchas coordenadas que se acumulen, el fenómeno biológico necesita más y un proceso humano más aún. Solamente los métodos de la Estadística y el Cálculo de probabilidades serán capaces de suministrar soluciones en medida con olvido del caso individual, y a esta renunciación hace ya tiempo que se llegó en Física.

Los criterios de igualdad de la Física dan origen a las magnitudes, cuando además se define la suma. Con la aritmetización del Análisis dejaron de nombrarse las magnitudes y sólo se manejaron números; únicamente en alguna literatura, particularmente en la francesa, se conserva la denominación por elegancia; pero sobrentendiendo que ha de referirse siempre a las medidas. Nueva abstracción hizo prescindir de los números, para considerar entes cualesquiera que cumplan ciertas condiciones, y las magnitudes vuelven a aparecer, pero con otro nombre. Son los elementos de un grupo aditivo abeliano, normado y completo. La caracterización dentro de éstos de las magnitudes absolutas escalares continuas, o sea, medibles mediante los números reales, exige condiciones más restringidas que presenta en forma sencilla el Análisis algebraico de Rey Pastor y con terminología abstracta el Bourbaki (Libro III, Cap. V. § 2). No es mal ejercicio para los fanáticos de la abstracción a ultranza sopesar de vez en cuando la generalidad lograda y ver si el plato que desecharon en el comienzo del festín, no se lo ha servido de nuevo un hábil cocinero, con apetitosa guarnición, para que se lo traguen deslumbrados por brillante rótulo.

La teoría de las clases de restos con que Kronecker logró la descomposición factorial de un polinomio, sin axiomas de continuidad ni la adjunción explícita de la unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$, no es en el fondo sino una generalización de la desechada teoría de los números complejos, donde literalmente se decía que dos expresiones complejas se consideraban como equivalentes cuando diferían en un múltiplo de $i^2 + 1$. La adjunción de la raíz de $i^2 + 1 = 0$ quedaba así hecha, y la continuidad o discontinuidad era la que tuviese el campo de los coeficientes.

Otro ejemplo sencillo. La moderna teoría de las ecuaciones lineales sobre pseudo-cuerpos, no conmutativos, que ha de excluir, por tanto, el empleo de los determinantes, no es sino el método clásico de resolución de sistemas por sustitución, y el procedimiento para obtener las formas lineales independientes es el injustamente desechado de las constantes indeterminadas. Precisamente el teorema central de la independencia sobre un pseudo-cuerpo ha tomado el nombre de teorema de sustitución de Steinitz, por su método de demostración. Oportuna generalización es, en cambio, no deducir las conclusiones de la definición clásica de la independencia lineal, sino de tres lemas claramente señalados en la ya clásica obra de van der Waerden, *Moderne Algebra*, porque estos lemas y no aquella definición son verificados por los elementos algebraicos respecto de un cuerpo, a los que así pueden aplicarse sin reparos las conclusiones de este fundamental capítulo del Algebra abstracta.

La noción de clases de restos parece que procede de Gauss, que introdujo la notación $a \equiv b \pmod{m}$. Como prueba de la importancia que puede tener una adecuada notación, se han atribuído a esta de Gauss virtudes heurísticas, incluso para el descubrimiento de los sistemas de característica p, donde las ecuaciones de congruencia $(\mathrm{mod}\ p)$ son ecuaciones ordinarias. Más bien sería al contrario: que Gauss tuviese clara idea de la analogía entre ambos tipos de ecuaciones y eligiese por esto la notación.

En Matemáticas, como en Música, el simbolismo es fundamental, pero mejor para exponer que para descubrir. El compositor concibe la melodía por inspiración y después la escribe en el pentágrama para que el instrumentista pueda reproducirla. Los conceptos y relaciones de la Matemática se conciben generalmente antes de expresarlos en cálculos; precisamente esta labor resulta casi siempre desagradable, aunque altamente provechosa, por los errores que permite descubrir y que desgraciadamente subsisten muchas veces, incluso después de la completa redacción. La lectura exige la traducción inversa, casi tan molesta como la directa, hasta el punto de que lectores con fuerza creadora prefieren muchas veces hacerse por su cuenta las demostraciones.

Prescindir de esta traducción en la lectura, pero por confundir las Matemáticas con el simbolismo de los libros, es el error de malos profesores, que son los responsables de la repulsión y el desprecio que el gran público siente en general por la Aritmética y el Algebra; atenuado, en cambio, para la Geometría por el auxilio de las figuras. Esas exposiciones brillantes en que el alumno pasa los términos de un miembro a otro, quita los denominadores y despeja la incógnita, incluso deriva e integra impecablemente, sin equivocación y sin saberse fórmulas de memoria, son, sin embargo, tan estúpidas como un examen de piano en que se recitasen una a una y por sus propios nombres las notas y silencios del pentágrama.

Hay casos naturalmente en que la notación desempeña papel esencial. Uno de ellos es el de las matrices y el cálculo tensorial; pero, aun aquí, la distinción entre matrices y tensores sólo se logra cuando no se olvida impunemente el significado geométrico de los elementos y su comportamiento especial en las transformaciones de coordenadas. Y la profundidad de los métodos de Elie Cartan, que aún siguen siendo fuente inspiradora de matemáticos actuales, se debe precisamente a que atendió siempre en sus creaciones más al hondo sentido geométrico que al enmarañado simbolismo.

El teorema de Kronecker, mencionado antes incidentalmente, logra la descomposición en factores lineales de un polinomio irreducible dado en el cuerpo ampliado con las clases de restos respecto del mismo. König llega al mismo resultado con método isomorfo, naturalmente, mediante hipercomplejos de n componentes, que pueden considerarse como los coeficientes del polinomio representante de cada clase. Pero un teorema que sustituya al llamado teorema fundamental del Algebra, demostrado por Gauss, exige mucho más: que no sólo uno, sino todo polinomio con coeficientes del cuerpo dado, admita descomposición en factores lineales en un cuerpo ampliado de aquél; o dicho brevemente, que todo cuerpo pueda ser ampliado hasta convertirse en otro resoluble mediante la adjunción de nuevos entes algebraicamente definidos. Esto fué logrado por Steinitz en su transcendental Memoria *Erweiterung der algebraischen Körper* («Teubner», 1910). El Algebra quedó así emancipada del Análisis. Pero, desgraciadamente, en la demostración de este preciso aserto, se utiliza la inducción transfinita, y, por ende, el postulado de Zermelo, para probar que el cuerpo dado está bien ordenado. Y podemos repetir que si los algebristas han conseguido con ideas geniales hacer el Algebra independiente del Análisis, ha sido a costa de recursos más sospechosos que las cortaduras y las sucesiones del Continuo.

El gran mérito de la Memoria de Steinitz no se limita evidentemente a la demostración de este discutible teorema. La trascendencia de esta obra es que contiene el primer estudio exhaustivo de los cuerpos abstractos y sus ampliaciones algebraicas y trascendentes, con el propósito consciente, característico de la Matemática del siglo XX, de alcanzar la máxima generalidad aquilatando el mínimo de los postulados. No vamos a intentar aquí, naturalmente, el bosquejo siquiera del imponente desarrollo del Algebra moderna. Hay colegas españoles que pueden hacerlo con plena autoridad. Nos limitaremos a citar como magistral exposición del estado actual del Algebra los tomos IV, VI y VII de Bourbaki, y señalaremos solamente, fieles a nuestro objeto, algunos jalones esenciales en el proceso de abstracción creciente.

Steinitz partió de la teoría de las magnitudes algebraicas, que Kronecker desarrolló en campos numéricos. A partir de 1920, matemáticos de primera fila, E. Noether, Krull, Artin Hasse, Brand, etc., han ampliado a los anillos y cuerpos abstractos las teorías de ideales de números algebraicos de Dedekind y la teoría de Galois sobre cuerpos de números. Por otro lado, Cayley, Speiser, Deuring, etc., han creado la teoría de grupos abstractos, partiendo de los grupos finitos de sustituciones y de los grupos continuos de Lie. E. Noether, Hasse, Chevaley, Deuring, etc., estudian los cuerpos de clases, ampliando las leyes de reciprocidad, el teorema del género, etc.; Wedderburn, Albert, Brouwer, Witt, etc., han analizado exhaustivamente las álgebras de división con coordenadas de cuerpos abstractos.

El Algebra del siglo xx aparece así como el resultado de un proceso de abstracción sobre teorías del siglo XIX, identificadas por isomorfismo y ampliadas al máximo compatible con un aquilatado mínimo de postulados. De tal identificación por isomorfismo surge la noción de estructura algebraica, que G. Birkhoff y A. Ore han ampliado con nueva abstracción al observar que las analogías de teorías diversas surgen cuando se prescinde de los elementos y se consideran sólo las relaciones entre subconjuntos privilegiados, como los ideales de los anillos, los subgrupos invariantes, los módulos característicos de los sistemas modulares, etc.

Actualmente se denomina *estructura* a todo sistema de entes con relaciones u operaciones definidas mediante axiomas, y, por esto, la denominación de estructural parece la más adecuada para la Matemática moderna. La noción general de estructura suministra una solución al viejo problema de la unidad de la Matemática con recursos exclusivamente matemáticos, sin ligarse a ningún sistema filosófico, como en las tentativas desde Platón, Descartes, Leibniz, Kant, etc., hasta los logísticos del siglo XIX; y sin partir de ideas *a priori* sobre las relaciones de la Matemática con el doble Universo del mundo real y del pensamiento.

Hay en primer lugar tres estructuras madres o simples: Las algebraicas definidas por operaciones de composición: grupos, anillos, cuerpos, etc. Las de orden, donde se define la relación de posterior, sin que necesariamente dos elementos tengan que ser comparables; es decir, necesariamente uno posterior al otro; cuando esto sucede se llama el conjunto totalmente ordenado, y bien ordenado, cuando todo subconjunto tiene un primer elemento (no posterior a ningún otro del mismo). Las estructuras topológicas, en que se define la noción de vecindad, aproximación o entorno. Estas estructuras madres se combinan y producen las estructuras múltiples: Topología algebraica (estructura topológica con leyes de composición); Algebra topológica (estructura algebraica de operaciones continuas con la topología admitida); la combinación de una estructura algebraica con otra de orden da origen, por una parte, a las teorías de divisibilidad y de ideales, y por otra, a la integración y a la teoría espectral de operadores, etc. Este ha sido el soberbio criterio organizador de la gran obra de N. Bourbaki.

Quedan, sin embargo, problemas importantes del Algebra clásica que todavía no ha resuelto el Algebra moderna con su exuberante desarrollo. La existencia en el cuerpo de los números racionales de ecuaciones sin afecto; esto es, cuyo grupo de Galois sea el simétrico, fué demostrada en 1892 por Hilbert con recursos trascendentes. Posteriormente, Schur (J. D. M. V., 1920), Furtwängler (M. A., 1922), Bauer (M. Z., 1923) y Ore (M. Z., 1924), dieron diversos métodos puramente algebraicos para la construcción de ecuaciones con coeficientes racionales y sin afecto en el cuerpo de éstos o en otros más amplios. En un cuerpo abstracto que sea ampliación por cociente de un dominio de integridad con elemento unidad y teorema de unicidad de la descomposición factorial en ideales primos se pueden construir ecuaciones sin afecto, como puede verse en la obra de van der Waerden *Moderne Algebra* (T. I, 2.ª edición, pág. 200). Pero ni aun limitándose a coeficientes racionales, la generalización para un grupo cualquiera; es decir, la existencia de ecuaciones con grupo de Galois prefijado es un problema no resuelto conocido con el nombre de problema de Noether, que lo propuso el año 1917 en *Mathematische Annalen* (T. 78). Lo que hace más difícil e interesante el problema general este que cada solución para el grupo simétrico tiene un método particular y todas utilizan propiedades específicas de este grupo simétrico. Probablemente será necesario un estudio profundo de cada grupo de sustituciones, que para el simétrico se hizo con motivo de la demostración de los teoremas de Ruffini y Abel sobre la irresolubilidad por radicales.

Este problema clásico, no resuelto, de la estructura de los grupos finitos ha adquirido nuevamente interés al introducirse éstos en la Mecánica cuántica poco después de 1930.

La aritmetización del Análisis, mencionada antes accidentalmente, aclaró conceptos y precisó ideas con maravillosa exactitud; pero produjo, en cambio, serias perturbaciones en algunos capítulos de esta ciencia. La noción euleriana de suma de una serie se sustituyó por la convergencia puntual en que la función suma de una serie funcional se forma con las sumas de las series numéricas (convergentes o no) en los distintos puntos del campo. Sugestiva definición es ésta por su generalidad y sencillez, pero que no acarrea pocas dificultades incluso para las series convergentes. La teoría de las series trigonométricas, por ejemplo, llena de excepciones y prolijos teoremas, sólo se torna armónica y sencilla cuando la convergencia puntual se sustituye por la convergencia en media cuadrática o mediante distancia en el espacio de Hilbert.

Esta asociación (de tipo euleriano en el fondo) de una función en bloque a una serie con la intervención simultánea de todos sus valores, como en el caso indicado de las trigonométricas (o de funciones ortogonales en general) y en el de las asintóticas o adherentes, según sean potenciales o de Dirichlet, se considera hoy más natural que la sumación punto por punto. Cada tipo de serie funcional tiene así su noción natural de convergencia, que podrá enunciarse en ciertos casos mediante una oportuna métrica o topología. La coincidencia de tal función con la obtenida mediante la sumación puntual pasa a ser una ley formal, que como cualquiera otra puede subsistir sólo en parte en la generalización al transponer la convergencia ordinaria.

En repetidas ocasiones hemos expuesto nuestra opinión de que si Poincaré, con su autoridad, hubiese establecido la determinación de la función y la derivación de sus series asintóticas en el campo complejo, en vez de comprobar lo contrario en el campo real mediante sencillos contraejemplos, hubiese sido la convergencia asintótica y no la puntual la que hubiese prevalecido en el Análisis matemático para las series de potencias y sus generalizaciones.

La determinación de la función se consiguió después para funciones holomorfas en campos adecuados mediante una mayor adherencia o aproximación de la función a las secciones o sumas parciales sucesivas de la serie, y la derivación no fué difícil restablecerla, incluso conservando aquélla. El genio más grande de la Matemática en la primera mitad del siglo actual, según opinión de Hadamard, dejó, pues, en esta modesta teoría tan profunda huella como en todas las ramas de la Ciencia donde trabajó.

Una de las más sólidas conquistas de la aritmetización del Análisis, terminada por Weierstrass, es la definición rigurosa del Continuo mediante cortaduras, sucesiones o cualquier otro proceso equivalente. Así quedaron resueltas las dificultades que encontraban los creadores del Cálculo infinitesimal al definir el paso al límite. Sin embargo, este paso al límite es insuficiente para nociones físicas elementales e incluso para la noción de integral. Sirven, en cambio, los llamados límites dirigidos, que G. D. Birkhoff dió en el congreso de Oslo de 1936, por necesidades de la Topología y del Algebra moderna, y que ya han pasado a los libros de texto. La sencilla aplicación a la noción de densidad de un flúido, por ejemplo, evita la apariencia artificiosa de la acertada definición de Prandlt, la cual acota inferiormente los volúmenes elementales para que éstos contengan suficiente número de moléculas, siendo a la vez suficientemente pequeños dentro del orden de aproximación admitido.

Este es un caso típico, y como tal lo hemos traído aquí, de una noción más general y abstracta que ha servido simultáneamente en la más pura Matemática y en la Física elemental. La idea del límite dirigido, pareja de la de estructuras de Ore, no es en el fondo, sino una afortunada abstracción del sencillo artificio de la tercera subdivisión, que ya empleó Cauchy en su definición elemental de la integral de una función continua, para comprobar la independencia del límite respecto de la ley de particiones y subdivisiones sucesivas del intervalo.

El mismo concepto del rigor que pareció definitivo e inconmovible a raíz de la célebre conferencia de Poincaré sobre la aritmetización del Análisis, ha perdido ya su pedantesco absolutismo; y los matemáticos se conforman ahora con que sus demostraciones sean rigurosas en el estado actual del rigor, ajustándose al credo intuicionista o al zermelista, según la índole de las conclusiones, o sea, en definitiva, a los postulados elegidos, sean de la Lógica o de la Matemática.

Hasta la noción general de función de Dirichlet, que quedó establecida en forma al parecer definitiva, por lo menos para variables numéricas, ha tenido que ser modificada por necesidades de teorías físicas y matemáticas. Mediante ampliaciones por un lado y restricciones por otro se trata de alcanzar a todas las aplicaciones y a la vez suprimir las excepciones que pusieron de manifiesto los contraejemplos de Riemann, Weïerstrass, Cantor, Koch, etc., que caen dentro del tipo de los que Borel calificó irónicamente de malintencionadamente preparados. Tales ejemplos cumplieron ya su trascendental misión crítica; pero perdurarán probablemente los profundos métodos empleados para construirlos: principio de condensación de singularidades, proceso diagonal, expresiones decimales de base tres, etc., etc.

Por un lado, los intuicionistas de la escuela más exigente restringen tanto la noción con sus austeros postulados, que toda función resulta uniformemente continua en un intervalo, y toda sucesión convergente en cada punto de éste es uniformemente convergente en él. Esto ya es demasiado.

Más éxito ha tenido, por otro lado, la modificación de Lorenzo Schwartz. La teoría de las distribuciones es un modelo de abstracción oportuna y fecunda. Ha sabido extraer el substractum común a conceptos aparentemente tan dispares como la función de Dirac, las soluciones discontinuas de las ecuaciones hiperbólicas de la Aerodinámica supersónica y las partes finitas de Hadamard en las integrales divergentes, para no citar eruditamente otras más complicadas, aunque no de menor interés. Se consigue esto mediante la regularización, o, si se nos permite, la *naturalización,* que produce una integración oportuna.

Cada función sumable Lebesgue define una masa, o, si se quiere, una medida de Radó, absolutamente continua, que es el valor de su integral en el intervalo; y recíprocamente. Cada masa define a su vez un funcional lineal en el espacio C de las funciones continuas en $(-\infty, +\infty)$ y nulas fuera de un intervalo finito cerrado, o, más general, con soporte compacto en

E_n; y recíprocamente, según un conocido teorema de F. Riesz. Se tiene así una representación de las funciones sumables Lebesgue por los funcionales de este espacio C definidos por masas absolutamente continuas. La cual es biunívoca si se identifican entre sí las funciones que sólo difieren en un conjunto de medida nula; y esto constituye ya un primer paso de abstracción con el que se eliminan diferencias antinaturales que hasta ahora exigen para su construcción el axioma de Zermelo. Pero es que, además, tal representación puede ampliarse, incluyendo las masas que no son absolutamente continuas; es decir, que no se obtienen como integrales de Lebesgue, entre las que se cuenta como la más sencilla la de Dirac. Y como dicha representación es un isomorfismo respecto de las operaciones lineales y el paso al límite con la topología específica del espacio C, se identifica la masa con el funcional que define sobre C. La noción de función queda así ampliada por un lado con la inclusión de masas discontinuas y restringida por otro con la exclusión de las funciones no sumables Lebesgue y de las diferencias entre éstas sobre conjuntos de medida nula.

Si el espacio C de las funciones continuas se sustituye ahora por el más restringido D de las funciones indefinidamente derivables y también con soporte compacto en E_n, el espacio dual formado por los funcionales lineales en él se amplía. Estos funcionales lineales en D son las distribuciones. Constituyen una nueva generalización de las funciones que permite incluir conceptos físicos, como los de doblete o dipolo, no alcanzados con la ampliación anterior. Y, además, tienen las propiedades sencillas de las antiguas funciones, que se perdieron con Riemann y Dirichlet: nunca carecen de derivadas sucesivas y éstas son independientes del orden de derivación, no exigen distinción entre series trigonométricas y de Fourier, dan las soluciones discontinuas de las mencionadas ecuaciones hiperbólicas de la Aerodinámica supersónica y de otros importantes capítulos de la Física matemática, tienen aplicaciones en la Topología algebraica y en muchas otras teorías que de día en día van encontrando escuelas enteras de matemáticos contemporáneos dedicados a esta fructífera labor.

Saliendo al paso de posibles objeciones a la teoría de Schwartz, advertiremos que la identificación indicada de sencillas nociones físicas, como la elementalísima de dipolo, con funcionales lineales en D, no es más atrevida que la ya mencionada, corriente en la Relatividad, entre fenómenos tangibles de la Naturaleza con invariantes de espacios no euclidianos, y tantas otras usadas en la Mecánica ondulatoria y en toda la Física matemática.

La célebre pseudo-función de Dirac es un ejemplo típico de esa intuición de los físicos, que nos admira y antes comentábamos, de llegar a buen término por caminos dudosos. Dirac sabía que no manejaba una función, en el sentido que le daban entonces los rigurosos matemáticos, sino una generalización para el continuo del símbolo de Kronecker, usual en las matrices $\delta_{mn} = 0$ para $m \neq n$ y $\delta_{mn} = 1$ para $m = n$. Sin embargo la manejaba; y no se equivocó. Después se han hecho muchos ensayos rigurosos, más o menos afortunados en cuanto a naturalidad y sencillez, para encajar la noción de Dirac en una u otra teoría matemática; pero todos han sido para comprobar las conclusiones, ninguno para rectificarlas. La superioridad en este punto de la teoría de Schwartz no está en su sencillez, que para este objeto específico puede indudablemente superarse, sino en obtener la δ de Dirac como derivada de la función de Heaviside del cálculo operacional, dándole el puesto que le corresponde dentro del Análisis matemático: el de un ejemplo sencillo, importante en Física, de una teoría en general. El lenguaje empleado en ésta nos podrá resultar desagradable a los apegados a la Matemática clásica; pero no es menor la dificultad de leer libros en un idioma mal conocido, y cuando hace falta, se leen.

En el artículo que publicó Schwartz en la Revista francesa de Telecomunicación, cuando todavía ocupaba un oscuro puesto en la Facultad de Ciencias de Nancy, se ve el origen de la teoría sin bagaje abstracto.

En Geometría, la abstracción se remonta a los griegos al menos. Las figuras de Euclides son abstracciones de cuerpos materiales y el espacio intuitivo de su Geometría es una abstracción del espacio real. El primer paso hacia la concepción de un espacio abstracto es indudablemente la Geometría no euclidiana, donde, al prescindir de un postulado de intuitiva evidencia, se rompe con la concepción de Platón y se emancipa la Matemática de las ideas filosóficas de Kant. El matemático dejó de ser el biógrafo de vidas reales para convertirse en el novelista que crea tipos con su fantasía. Pero esta fantasía, inherente a toda creación del espíritu, tiene aquí un restringido límite, impuesto por las relaciones con otras teorías, por el contacto con el fenómeno matemático natural.

Frente al matemático de tipo técnico que, ceñido dócilmente a una técnica bien aprendida, resuelve los problemas abordables con ésta; frente a este tipo útil pero de inferior calidad, está el matemático naturalista, si el equívoco cabe, que se enfrenta sin perjuicios con el problema. y, observando el fenómeno matemático como un experimentador que interroga a la Naturaleza aplica o crea, cuando aún no existe, el artificio técnico adecuado a su resolución. Es el caso de Newton, que inventa el Cálculo infinitesimal para aplicar sus leyes universales y fundar la Mecánica Celeste; el de Einstein, que acopla y perfecciona el Cálculo diferencial absoluto (creado por Ricci y Levi Civita) para formular sus conceptos de la Relatividad; el de Descartes, Fourier y Lagrange, con sus métodos analíticos; el de Laplace, al iniciar el Cálculo de Probabilidades; los de Hilbert y Poincaré, en todo el curso de sus colosales creaciones. Es el caso de Stieltjes, el astrónomo, que inventa una noción de integral para manejar mejor el valor de las fracciones continuas convergentes equivalentes formalmente a sus series potenciales de radio nulo. El de Cantor, con su teoría de conjuntos. Son Jordan y N. Bohr, que introducen las nociones de variación acotada y cuasiperiodicidad para dar soluciones elegantes a los respectivos problemas de la rectificación de curvas y de la representación por series de Dirichlet. Del mismo tipo son Borel, Lebesgue, Denjoy y Carleman, en cuyas Memorias se ven manar las ideas con sorprendente naturalidad, y Frechet, que para abordar un problema ergódico crea las funciones vectoriales asintóticamente cuasiperiódicas, y tantos otros que harían interminable esta pesada enumeración.

Otras veces, en cambio, se procedió a la inversa. El cálculo infinitesimal se aplicó a problemas geométricos, porque ya estaba hecho; y hasta mucho más tarde no se analizó su insuficiencia, que bien patente puso de manifiesto la conocida anécdota del papel arrugado de Lebesgue, que nos recordaba frecuentemente nuestro maestro D. José Alvarez Ude en su clase de Geometría Descriptiva, como ejemplo palpable de superficie desarrollable no incluída en los tratados aparentemente exhaustivos del pasado siglo; porque desde luego no tiene las derivadas parciales exigidas en estos libros. Del mismo modo en nuestro siglo, deslumbrados por los éxitos de topólogos y algebristas de primera fila, matemáticos mediocres, pero trabajadores a destajo, han creado espacios abstractos a voleo, sin otro criterio en la elección de postulados que el cómodo fluir de las demostraciones. Magnífica cantera de tesis doctorales no explotada por fortuna en España. Parece, sin embargo, que la fiebre ha pasado; y ya, cuando se introduce un nuevo espacio, se cuida el autor de indicar sus aplicaciones (teóricas, naturalmente) incluso en el título de la publicación. También se trató al parecer, por Menger y sus discípulos, de remediar la insuficiencia del Cálculo infinitesimal con los llamados métodos directos de la Geometría diferencial, pero desconocemos el éxito alcanzado por estas investigaciones.

Un ejemplo típico sencillo de problema naturalista y no técnico: ¿por qué son los valores principales de las integrales los que dan la interpretación correcta del fenómeno físico de acuerdo con ulteriores comprobaciones experimentales? Tal acontece en las fórmulas de Poincaré para el cálculo de las velocidades en función de los torbellinos o, si se prefiere del campo eléctrico mediante el magnético. También es valor principal el que figura en la ecuación íntegro-diferencial de Prandlt en la teoría del ala de envergadura finita, y tantos otros que se podrían citar.

Según nos dijo Terradas, hay más de cien métodos (señal de que ninguno es óptimo) para resolver aproximadamente esta ecuación clásica de la ya vieja Aerodinámica subsónica; es decir, para calcular la circulación en función de la velocidad horizontal, la envergadura y la profundidad del perfil. Quien conozca esta ecuación verá inmediatamente que la integral de valor principal es la suma de Stieltjes de una serie en potencias negativas de la variable con coeficientes iguales a los momentos de órdenes sucesivos de dicha circulación. Como ésta figura en el primer miembro, se tiene así un desarrollo formal en serie de potencias negativas de la circulación buscada, que da, como es sabido, la forma de la planta del ala. Tomando un número finito de momentos resulta así una expresión aproximada de la planta. La cuestión experimental interesante es interpretar físicamente estos momentos sucesivos; ver cómo influyen en el comportamiento del ala, probablemente en su movilidad, en la variación de esta movilidad, etc. Las balanzas aerodinámicas que vimos cuando teníamos contacto con estas cuestiones, sólo registraban los tres momentos clásicos (guiñado, picado y balanceo) de primer orden. Desde entonces los progresos de la Aerodinámica han sido grandes. Para quien los ha seguido de cerca indicamos este procedimiento de determinar la planta del ala en función de las características que se esperen de ella, según los momentos de órdenes crecientes; en vez de proceder al revés, como se hacía en los ciento y pico métodos mencionados.

Puesto ya a especular, porque no todo va a ser abstraer, sobre tipología de los matemáticos, merece señalarse quizá la diferencia entre el que se enfrenta con un problema previo y hasta que lo resuelve suspende toda otra publicación personal, y el otro, más sensato, que investiga sin meta prefijada y publica los resultados que va obteniendo buenamente, a veces orientado por sugerencias provechosas de lecturas en Memorias ajenas. Aparte de la gallardía que supone siempre un desafío, el primer sistema no es tan infecundo como a primera vista parece; el afinamiento de los métodos ante un problema con dificultades serias lleva normalmente a conclusiones más fecundas que la cómoda aplicación a problemas más dóciles de los métodos consagrados. El resultado alcanzado es con frecuencia una solución cortita; a veces, un ejemplo; pero no importa, que ya vendrán los generalizadores a recoger el fruto y a escribir muchas páginas, olvidando, con ceguera optimista o catatimia, que entre los resultados generalizables y las generalizaciones rara vez la elección es dudosa.

Para citar un solo ejemplo concluyente: los ideales. Nació la teoría de ideales de los esfuerzos *inútiles* de Kummer para demostrar el último teorema de Fermat, los cuales indujeron a Dedekind a generalizar la divisibilidad para los números algebraicos enteros. Hoy, bien organizada por Noether, Krull, etc., la teoría de ideales ocupa una posición central en el Algebra abstracta y en la moderna Geometría algebraica.

Incidentalmente hemos tratado antes peyorativamente el afán de generalizar por generalizar. La generalización es fecunda, creadora, cuando es abstracción de detalles inútiles, conservando el método, la estructura esencial. Generalización del teorema de Gauss sobre los polígonos regulares construíbles con regla y compás es el teorema fundamental de Galois sobre ecuaciones resolubles por radicales, y de éste, la teoría general mediante adjunción de resolventes cualesquiera, binómicas o no. Del sencillo problema del péndulo surgieron las integrales elípticas; su inversión dió las funciones holomorfas doblemente periódicas, y como generalización de éstas creó Poincaré las funciones automorfas. Abstracción genial es el espacio de Hilbert, donde se identifican por isomorfismo las matrices de Heissenberg y los operadores de Schrödinger de la Mecánica ondulatoria, según ha demostrado von Neumann. Afortunada generalización de aquél es el espacio de Banach, en el cual subsiste gran parte del Análisis clásico. Toda la historia de la Matemática es una cadena de tales abstracciones, porque las otras, las generalizaciones banales, mueren al nacer, sin dejar recuerdo.

El descubrimiento mencionado de Gauss a los diecisiete años; la introducción de las raíces imaginarias de las ecuaciones de congruencia por Galois a los dieciocho; su célebre manuscrito a los veinte, la víspera de su muerte en un duelo sin importancia; las Memorias de Abel y de Stieltjes, que murieron jóvenes (veintisiete y veintinueve años, respectivamente); la famosa tesis doctoral de Lebesgue y tantas otras de mejor calidad que los ulteriores trabajos del mismo autor; todo ello se ha venido esgrimiendo como pruebas con valor estadístico de la precocidad de los matemáticos, sólo superada por los músicos. Si se quiere buscar una explicación, en lo poco que tienen de explicable las creaciones originales, cuando todavía la investigación no era una profesión remunerada, tal vez se encuentre en que el descubrimiento matemático por su misma abstracción no necesita los años de experiencia que la adquisición de un sentido físico, estadístico o clínico. La fórmula esquemática sería: a mayor abstracción, menor experiencia. Prudente es, sin embargo, poner en cuarentena conclusiones que ni aun un minucioso examen de la Historia podría establecer; y mejor aún, tomarlas como comodín para descansar a gusto una temporada, totalmente apartados de la Matemática, con la alegre esperanza de que al retorno se habrá recuperado algo de la juventud que se fué.

A las inspiraciones juveniles ha de seguir el reposado y tenaz trabajo de la madurez. El mismo Gauss, según confesión propia, empleó unos cincuenta años en desarrollar las inspiraciones que tuvo antes de los veintiuno, y muchas quedaron sin publicar. Parece ser que Einstein trató durante toda su vida de perfeccionar con la teoría del campo único sus profundos descubrimientos hechos antes de los veintiséis. Pero no se puede tomar como norma lo que ha sucedido a los genios. Solamente, a lo sumo, recordar como estímulo que incluso a los mejores matemáticos les costaron grandes esfuerzos demostrar sus teoremas, y que, por tanto, sin una gran tenacidad verdaderamente obsesiva, no debe esperarse alcanzar nada que merezca la pena de ser publicado. Pretender cosechar grandes frutos con pequeño esfuerzo, saltando ágilmente de una teoría a otra recién inventada, es como querer enriquecerse jugando en las rifas.

De entre las numerosas propiedades del espacio de Hilbert que llenan densas monografías hemos destacado antes la que demostró von Neumann en su Mecánica de los cuantos, medio siglo después de ser inventado el espacio, por su analogía con la recalcada aplicación que encontraron las cónicas en el trabajoso descubrimiento de Kepler de las trayectorias de los astros, y con la más genial de los espacios de Riemann a la Relatividad, o con la de las formas hermitianas en Física cuántica y otras muchas que se podrían rebuscar. Pero no para hacer la apología de las creaciones puras de la Matemática con olvido o desprecio de sus aplicaciones más o menos teóricas, sino al contrario, para señalar el talento, la intuición que hace falta para idear teorías abstractas útiles a la posterioridad. Es, en definitiva, la difícil facultad de elegir, que, según San Agustín y Poincaré, constituyen la clave de la invención y quién sabe si incluso de la felicidad. En opinión de Hadamard, son la belleza y la armonía que, actuando sobre el subsconsciente, inspiran tales elecciones.

Una parte de la impresionante obra de Hilbert contiene ya el germen de la Matemática del siglo XX. Su definición de los números como entes cualesquiera sometidos a las leyes formales del cálculo es, salvo retoques inesenciales, una típica definición del Algebra actual. En sus fundamentos de la Geometría, Hilbert dió el salto decisivo del espacio intuitivo a un espacio abstracto formado por entes cualesquiera que verifiquen los axiomas, y los primeros espacios no intuitivos (salvo, naturalmente, los de las Geometrías no euclidianas) son los sistemas númericos que allí propuso para comprobar la condición esencial de compatibilidad y la conveniente de la independencia recíproca de los axiomas. Se planteó así la no contradicción de la Aritmética, que un siglo después demostró Gödel que es indecidible. Pero no sólo en estas cuestiones de los fundamentos; en las conferencias que dió el americano Moore, cuatro años después de la comunicación de Frechet ya mencionada, se señalan las funciones de infinitas variables y el espacio de Hilbert como precursores del paso decisivo que dió la Matemática al comienzo del siglo. Otro tanto podría decirse de su precioso método de demostración del teorema de la base en los sistemas de invariantes y sizygias.

Frechet, sin embargo, procedió con absoluta originalidad. Su célebre comunicación de 1902 contiene una modesta generalización del teorema de Bolzano-Weierstrasse sobre el máximo de una función continua en un conjunto de los que él llamó compactos. Nada al parecer. Había prescindido de la condición innecesaria de la acotación del campo de la variable para quedarse con la única esencial: la existencia de un punto de acumulación en todo subconjunto infinito. Y aquí viene la trascendental abstracción: esta acumulación puede definirse para entes cualesquiera, aunque no sean puntos con coordenadas numéricas. Después, en su libro *Les espaces abstraits*, introdujo la noción de distancia y clasificó los diversos tipos de vecindad o acumulación, e incluso dió un ensayo sobre el concepto de dimensión para conjuntos cualesquiera. Había fundado así la teoría de los espacios abstractos. Las contribuciones posteriores de Urysohn y Haussdorf, con sus más afortunadas definiciones de entorno, son perfeccionamientos de trascendental interés y que, como tantas veces sucede en la Historia de la Matemática, dejan grabados sus nombres en sustitución del propio del iniciador. La teoría de la dimensión fué luego hecha por Menger y Brouwer con orientación original totalmente distinta de la de Fréchet.

La noción elemental de proporcionalidad expresada en la vieja ecuación funcional de Cauchy conduce en los espacios abstractos vectoriales, normados y completos o de Banach, a la bella teoría de los funcionales lineales, donde con suma elegancia se obtienen profundos resultados sobre sistemas de ecuaciones lineales con infinitas incógnitas, ecuaciones integrales, problema de los momentos, algoritmos de sumación, etc. Los teoremas de F. Riesz, Steinhaus y Fréchet sobre la expresión general de un funcional lineal en el respectivo espacio C, L y $L^{(r)}$ $(r > 1)$ mediante una integral de Stieltjes o Lebesgue, a los que se llegó por etapas sucesivas a través de trabajosas contribuciones originales de Volterra y Hadamard, se ven ahora como la generalización natural de la ecuación de la recta $y = Cx$ o la $y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$ del plano, que resuelven la ecuación funcional de Cauchy en el campo real o en el espacio euclídeo E_n, respectivamente. La inversión de ciertas transformaciones integrales (Laplace, Fourier, Watson Hankel, etc.) aparecen como generalización natural de la elemental regla de Cramer de los sistemas lineales, y se tiene así una explicación de la analogía de los núcleos en las transformaciones directas e inversas. La idea de las distribuciones es, en definitiva, la sustitución del sistema continuo o discontinuo de coeficientes por la forma lineal completa que caracterizan.

Hay que suponer siempre, naturalmente, la continuidad o la acotación de las soluciones de dicha ecuación de Cauchy, que, como en el caso de variable real, son equivalentes. Las soluciones discontinuas en el campo real fueron obtenidas por Hamel apoyándose en el axioma de Zermelo, y tal vez fuese interesante la formación de una base de Hamel en un espacio abstracto; por ejemplo, de Banach o de Hilbert al menos, la cual permitiría formar funcionales lineales no acotados.

Antes de terminar, quizá merezca señalarse que la generalidad de las hipótesis, propias de los espacios abstractos, repercute inevitablemente en debilidad de las conclusiones, como Klein advirtió a propósito de la Geometría proyectiva; y así, reduciendo la escala, sucedió que en toda la brillante y extensa literatura sobre la integral de Fourier no encontramos un solo teorema sobre su convergencia uniforme, el cual necesitábamos para demostrar una solución al llamado problema de la representación de la transformación de Laplace. Cierto que no fué difícil obtenerlo en unión de otros con la colaboración de Rodríguez Salinas, y al final logramos eludir su aplicación. Pero valga como un ejemplo más no rebuscado. En la obra de Bourbaki está muy bien atendido el suministro de resultados y teoremas particulares, expuestos en letra pequeña con aplicación de las teorías abstractas generales, y es que sus autores son cultivadores entusiastas de la Matemática moderna, pero no porque desconozcan y desprecien la clásica.

Toda la Matemática moderna, es decir, la del siglo xx, ha nacido con el calificativo de abstracta. No somos quien nosotros para desautorizar un adjetivo que viene empleándose hace cincuenta años. Pero sí podemos repetir (aunque suene a tautología) que abstracta es toda la Matemática. En la abstracción, como en la emoción y en la velocidad, no son los valores absolutos, sino sus incrementos los que el hombre percibe. Y desde luego, por grandes que resulten los actuales progresos de la generalidad, no fué menor el enorme golpe de abstracción necesario para descubrir en el siglo xvii que la caída de una manzana y el girar de la Luna sean efectos de una misma fuerza universal.

Después de escrito este discurso; después de releído todas esas veces que exige la impresión y que terminan por hacernos odiosas nuestras propias publicaciones; después de todo eso, nos asalta una duda; la misma que al principio; no es la falsa modestia; sino, por el contrario, una duda orgullosa: si nuestro deber no hubiera sido exponer lo que creyésemos el estado actual de una teoría concreta, que desconociésemos menos. Ya no tiene remedio. Ante el entuerto consumado, sólo cabe afrontar la responsabilidad. En descargo podemos alegar que el aburrimiento hubiese resultado entonces todavía mayor.

DISCURSO DE CONTESTACION

POR EL

EXCMO. SR. D. JULIO REY PASTOR

Señoras y señores:

Una soleada mañana invernal, hace treinta años, me deparó inolvidable satisfacción al subir muy pausadamente por la calle de San Bernardo, después de cumplir mi tarea universitaria. La lentitud no era debida al empinado repecho, de cuya existencia no me enteré hasta muchos años después, cuando aflojaron mis energías; sino porque al andar iba corrigiendo pruebas de imprenta; delicada tarea que exige parsimonia. Al notar que alguien seguía discretamente mis huellas, me volví, sin reconocer al joven seguidor, que muy respetuosamente se presentó como alumno mío de primer curso, pidiéndome hora para hacerme consultas. Recordando que el reglamento de nuestras gloriosas universidades medievales imponía a todo profesor la obligación de estar «media hora al poste» después de cada clase, servicio que hoy sería más necesario que nunca para aclarar las dudas suscitadas, le invité a la confesión inmediata, y pronto se entabló un largo diálogo de preguntas y respuestas que duró varias horas hasta llegar a mi casa, por el camino más largo posible, y con máxima lentitud, porque de vez en cuando era preciso ilustrar el tema con algún croquis, sobre la pared más cercana.

Pronto vi que era un estudiante singular; ni una de sus preguntas era ingenuidad de principiante, y algunas, más que dudas obtusas, eran críticas agudas. Trabajo me costó responder a todas; y a una tuve que decirle: no puede usted entender bien esa demostración porque no es absolutamente rigurosa, como usted las exige, y habré de mejorarla en otra edición.

Aquella mañana venturosa quedó inscrita entre mis días felices. ¡Por fin —dije para mí— entre tantas centenas de alumnos, un discípulo!

Nació Ricardo San Juan en Toledo, en vez de nacer en cualquier otro paraje español; y en este sencillo hecho aleatorio radica quizás su predestinación para la creación matemática. Porque si bien era nula para todo párvulo inscrito en el bachillerato de cualquier Instituto español la probabilidad de oir de algún profesor una frase de encomio de la investigación o al menos una alusión a la posibilidad de que en esta tierra de místicos, dramaturgos y pintores, un rebelde a esta ley que parecía racial se pusiera a ser creador matemático, esta probabilidad existía estudiando en Toledo, donde tenía cátedra el único matemático español de aquella época no comulgante en la filosofía carlyleana, que asignaba a pocos semidioses el divino don de la creación; con la fatalidad de que esos héroes o semidioses nacían siempre al norte del Pirineo, como si nuestra Península estuviera dejada de la mano de Dios, a pesar de su religiosidad inveterada.

D. Ventura de los Reyes y Prósper, hombre de vastísima cultura idiomática, naturalista y arqueológica, conocedor como nadie de su Toledo, casi piedra a piedra, y autor de importantes investigaciones sobre moluscos, sobre pájaros y sobre fósiles, que le valieron prestigio europeo, no era ciertamente el único matemático español de su tiempo que tenía ideas originales; pero D. Eduardo Torroja y D. Miguel Vegas las intercalaban en sus textos impresos; y el mejor de mis maestros, que aquí goza oyéndonos, las ocultaba tímidamente entre sus papeles; por el contrario, D. Ventura tenía la inmodestia y el coraje de comunicarlas a sabios alemanes y rusos, con quienes correspondía, de viajar para consultarles, y hasta de publicar algunas en exóticas revistas; porque había vencido el complejo de inferioridad que acobardaba a casi todos los españoles, y porque además tenía cosas interesantes que decir en los variados sectores de su sabiduría.

La generosa exuberancia hispánica, disculpable por la patriótica sed que todos sufrimos de compatriotas famosos, se apresurará a calificar de *genio* a este matemático precursor; calificativo que haría sonreir a cualquier profesor ultrapirenaico al medir fríamente el valor absoluto de las ingeniosas notas elementales firmadas por nuestro colega toledano; pero mal juez será siempre el que interprete en abstracto los hechos del frío sumario escrito, sin interesarse por el caso concreto del encausado, con todo su entorno de circunstancias vitales; y así resulta en este caso: que quien sería fríamente calificado como profesor corriente y *normal,* juzgado fuera de aquí, es en verdad *genial,* precisamente por ser *normal afuera* y por tanto excepcional aquí *dentro*; por ser distinto de todos sus colegas; y por parecerse a los hombres de otro mundo más que a los del propio.

Es claro que la acción catalítica de D. Ventura habría sido estéril con otro muchacho; miles de ellos pasaron por el aula del bondadoso maestro y no tenemos noticia de ningún otro matemático toledano; pero quizás tenía razón la desacreditada Astrología al hacer depender los grandes sucesos humanos de una conjunción feliz de dos o más astros en el momento de nacer; y las dos coyunturas favorables que presidieron la venida a este mundo del segundo matemático toledano fueron: la presencia de Reyes Prósper, que lo inició en la Matemática elemental, y el cambio radical que se había operado hacia 1915 en la Universidad de Madrid, con la introducción de teorías y métodos modernos en la Matemática superior.

Al surgir en 1916 como por arte de magia varios trabajos originales que, a pesar de su modestia, fueran acogidos muy benévolamente por la crítica extranjera, quedó deshecho el maleficio que parecía pesar sobre el intelecto español, no solamente en opinión del bando llamado *izquierdista,* desde Echegaray hasta Galdeano, sino también en la íntima convicción de Menéndez Pelayo, que al ensalzar el altísimo valor de la Ciencia española en todos sus sectores, excluía prudentemente, como excepción inexplicable, la ciencia exacta, resignándose ante nuestra incapacidad racial, piadosamente atenuada: «quizá la genialidad española no tira tanto por ese camino» (*).

Ese primer ensayo madrileño hizo clasificar como paparruchas las absurdas, cuando no rídiculas, *explicaciones* de sociólogos y filósofos, sobre la incapacidad hispánica para las matemáticas; y poco después quedó demostrado que esa consoladora realidad se extendía a los retoños ultramarinos, cuando repitió la hazaña un grupo de muchachos argentinos que se presentaron en globo al Congreso Internacional de 1928 con sendos trabajos, muy diversos, de Matemática superior, no sólo admitidos y publicados íntegramente en las actas del Congreso, sino favorablemente comentados por la crítica, y frecuentemente citados en memorias de famosos matemáticos. Desde entonces menudean en revistas extranjeras y actas de sociedades prestigiosas, comunicaciones firmadas por aquellos nombres que Echegaray echaba de menos en los siglos pasados y «que labios españoles pueden pronunciar sin esfuerzo». Pero estos éxitos, ya vulgares de puro repetidos, dejaban todavía en el aire como dudosa la posibilidad de que pudiera surgir un matemático español de categoría mundial, autor de memorias extensas y profundas; y entonces se planteaba un problema estadístico: si para producir un buen poeta hacen falta, según la fórmula de

(*) «Confieso de buen grado la inferioridad en esta parte; no lo da Dios todo a todos». Ciencia Española. 2.ª ed. p. 22.

«En el siglo XVI decaen los estudios matemáticos y astronómicos». (Idem, p. 276).

«En todas las ciencias que en el siglo XVI estaban adultas y formadas tuvimos hombres de primer orden... ¿Qué nos faltó, pues? Astrónomos y matemáticos, es decir, lo que habiamos tenido en la Edad Media» (loc. cit. Nota).

Girardin (*), cien poetas malos, ¿cuántos matemáticos mediocres o discretos debemos producir para que surja uno bueno, que no sólo sea admitido, sino estimado, elogiado y tenido en cuenta en el más alto plano internacional de esta ciencia?

Ese acontecimiento se ha realizado ya desde hace algunos años, y no es nuestro nuevo compañero el único que ha escalado ese alto peldaño, antes considerado inaccesible para hombres de nuestra sangre. Pero hoy debemos hablar de él, sin digresiones.

Los primeros trabajos de San Juan fueron prolongación de los míos sobre el problema de las series divergentes, donde con irreverente independencia de criterio contra la autoridad de Borel, Pringsheim y Knopp, salí en defensa del concepto euleriano de serie, convenientemente modificado. El apoyo entusiasta del joven discípulo me animó a sostener ese punto de vista en el Congreso de Bolonia, donde se impuso al fin, y por eso escribe la frase «definitivamente rebatida», cada vez que alude a la famosa objeción antieuleriana (**).

Años después demostró su adhesión generosa trenzándose en polémica con el prestigioso matemático suizo Ostrowski, que habiendo sido precedido varios años por San Juan en la resolución completa, rigurosa y mucho más sencilla, del problema de Gräffe sobre las ecuaciones algebraicas, no encontró mejor defensa que atacar mi sencillo lema inserto en las «Lecciones de Algebra», en que San Juan apoyaba su teoría; y en vista de la terca negativa del suizo a entender la recta traducción que San Juan le explicaba, éste le hizo exhibir en

(*) M. Menéndez Pelayo. Crítica filosófica. I pág. 22.

(**) «La clásica objeción de Borel, Knopp, Pringsheim, ha quedado definitivamente rebatida por Rey Pastor mediante una modificación de la definición de Euler» (Trab. I_1, pág. 125).

«Borel, Knopp, Pringsheim,... han rechazado rotundamente esta definición de origen euleriano, presentando una ya clásica pretendida paradoja; y es Rey Pastor quien claramente la explica,...» (loc. cit. Nota).

los amplios folios de «Acta Mathematica» (una de las más prestigiosas revistas del mundo) el discutido párrafo de mi modestísimo libro de texto, con su traducción alemana, reduciendo a silencio al polemista.

Al exhumar hoy de pasada aquel lejano incidente, por ser la primera ocasión en que puedo expresarle públicamente gratitud, mi ruta me lleva a señalar la importancia de ese criterio demostrado por San Juan hace veinte años, (cinco antes que la complicada teoría de Ostrowski) criterio que agota y clausura el problema de Gräffe, como puede verse en la última edición de mi Algebra, donde no cupo imprimir el desarrollo de la demostración; pero ésta tuvo cabida en el más voluminoso tratado del prestigioso profesor Vicente Gonçalves, que para incluirla tuvo que deshacer unas páginas de composición tipográfica, donde había desarrollado una solución deficiente. Y también puede verse extractada en la reciente memoria del matemático húngaro Paul Turán (*).

Retrocediendo a los primeros trabajos, el tema de tesis que le propuse versaba sobre el apasionante problema de las series divergentes de radio nulo. Que en el siglo XIX ideara Weierstrass la prolongación analítica de una serie, fuera de su círculo de convergencia, dándole sentido en todo el plano o al menos en la estrella que después se llamó de Mittag-Leffler, fué obra ingeniosa que podríamos decir humana; pero lograr esto mismo partiendo de la nada, sin disponer de un dominio de existencia, por mínimo que fuese, como hizo Borel, es creación *ex nihilo,* que podríamos decir cuasi divina.

(*) *Paul Turán* (Budapest): *On approximative solution of algebraic aquations.*— Publicationes Mathematicae Debrecen. 1951-52, págs. 26-42.

Sobre el método de Gräffe (Zürich 1837) después de citar el primer ensayo de Polya en 1913 para darle alguna base teórica dice: «The books 'Lehrbuch der Algebra' of Fricke (1924) and 'Vorlesungen über Algebra' of Bauer-Bieberbach (1929) showec no progress what so ever. After the result of Rey Pastor incorporated in his 'Lecciones de Algebra' (II edition, 1932) the results of R. San Juan (1935) meant the first essential progress. His idea was found independently and cleary by A. Ostrowski in 1940,...».

Por aquellos años, en que conocí a San Juan, me ocupaba yo de este problema, esbozando una teoría que llamé de prolongación *semianalítica;* pero el avance realizado por el joven doctorando fué decisivo; pues, mediante una ingeniosa generalización del algoritmo de Stieltjes, resolvió satisfactoriamente el problema propuesto. Pero la cosecha más abundante la obtuvo cuando vió que esta creación de una función partiendo de una serie de coeficientes cualesquiera, es decir, la conversión de un algoritmo formal en algo tan visible y tangible como es una función, aunque sea en el campo complejo (que también es real, pero bidimensional), tiene su raigambre en la teoría de la convergencia asintótica de Poincaré, modificada por Watson.

Calladamente, modestamente, casi clandestinamente, fué ganando altura en la teoría de las funciones cuasianalíticas, y en pocos años el águila se remontó hasta perderse de vista. Nadie reconocería el parentesco entre las funciones semianalíticas que introduje hace treinta años en el Congreso de Bolonia para designar a las que están determinadas por sus derivadas angulares en un punto, y las clases que él llama *semianalíticas* con significación precisa y mucho más compleja. Tan compleja y erizada de tecnicismos, que explicarlo aquí sería crueldad intolerable, no sólo para el público que ingenuamente nos ha honrado con su asistencia, sabedor del nivel medio que suelen alcanzar estas solemnidades, sino también para los profesionales no especializados en tales problemas. Quien se interese por ellos podrá satisfacer su curiosidad en el Apéndice de este discurso, donde explico sus repetidos análisis del intrincado problema, hasta descubrir la imposibilidad de llegar a la ansiada solución de máxima generalidad, por veinte años perseguida.

Como compensación halagüeña, consiguió demostrar la necesidad de la condición de Watson; y expondré también en ese capítulo adjunto otras producciones de San Juan, que lejos de indicar inconstancia o versatilidad, como es frecuente en muchos investigadores, confirman la incorruptible fidelidad de este enamorado a su musa de la divergencia. Es media vida consagrada a un problema central y a los problemas adventicios relacionados con él, que se le han ido enzarzando en su camino; en ese camino recto que se trazó hace seis lustros, y de cuya elección entre infinitos otros posibles, no me declaro inocente.

Desde que se consagró al problema de Watson lo admiré, pero ya no lo seguí; celebré sus éxitos, pero dejé de interesarme directamente en sus problemas; y ésto por razones estéticas. Hermosa cúpula del Análisis moderno es sin duda la teoría de las funciones cuasianalíticas; pero tal como ha sido edificada por Carleman, estará siempre afeada por ese andamiaje de cotas y recintos inseparables de la construcción, que ocultan la intrínseca armonía de sus conceptos. Después del reciente esclarecimiento sobre la imposibilidad, que no permite hacerse grandes ilusiones, me atraerá menos aún el problema; pero de lejos seguiré admirando a este caballero del ideal, callado y solitario, que prosigue imperturbable su camino rectilíneo, dejando de lado las actividades infecundas con que otros llenan sus vidas, y desoyendo las mil incitaciones de un ambiente adverso.

Esta consagración exclusiva a un capítulo de la ciencia habría sido imposible cuando San Juan iniciaba sus estudios, y urgía a la vez preparar libros de Análisis moderno y proponer temas de trabajo personal, abarcando el más amplio horizonte de vocaciones posibles. La dispersión de fuerzas era fatal, para ocupar tantas disciplinas como había vacantes; y mayor aún lo fué en el tiempo de Echegaray, cuando además de la Matemática y de la Física los mismos hombres debían hacer ingeniería. Injusticia irritante sería pesar en la misma balanza la producción de los matemáticos españoles anteriores a San Juan, latifundistas por obligación, con la de sus contemporáneos extranjeros que sólo labraban a fondo su huerto; o comparar a los concertistas virtuosos de un instrumento, fin y plenitud de su vida, con nuestros habilidosos hombres-orquestas.

Hoy tenemos ya matemáticos creadores, fatalmente especialistas; y los hay, no sólo aquí, sino también en los dos paises del Plata; y los hay, en Méjico y Perú por irradiación del coloso norteamericano que generosamente les envía sus mejores profesores (*). El maleficio hispánico ha sido deshecho; y muy duradero y cerril habrá de ser un gobierno inculto, para que deje perecer en su país esa vegetación intelectual que ya se propaga, y se perpetuará por sí misma, si se cuida y estimula.

En todos estos países de nuestra lengua, que significa de nuestro mismo espíritu, ha encontrado la juventud la más adecuada palestra donde lucir sus destrezas y fomentar sus optimistas esperanzas, en el doble escenario de la Topología y del Algebra, cuya estructuración axiomática y abstracta ha sido realizada por un grupo valiosísimo de jóvenes y semijóvenes matemáticos franceses rebeldes a la tradición, bajo la égida, no caprina sino humorística (**) de Nicolás Bourbaki, que encabeza como autor la colosal obra de esta colaboración singular, que se llama «Elementos de Matemáticas».

Estos «Elementos», que vienen a sustituir a los de Eucli-

(*) Además de los jovenes y muy valiosos investigadores enviados frecuentemente a ellos y al Brasil, como fermento de su juventnd, que después se traslada a EE. UU., han ejercido eficaz proselitismo, con sus viajes frecuentes, las figuras señeras de George Birkhoff y Marshall Stone.

(**) Para orientación de quienes hayan oído repetir ese nombre en el discurso de San Juan debo informarle que ese personaje, inexistente hoy, fué general famoso en la desastrosa guerra franco-prusiana: famoso por su hazaña de salvar indemne a su ejército, sin un sólo rasguño prusiano, gracias a la original maniobra de atravesar los Alpes e internarlo en Suiza.

des, despiertan entusiasmo en la juventud, por ser ultramodernos y revolucionarios, por esa pincelada de humorismo juvenil que ostenta en la portada (aunque su contenido denso y difícil no es para sonreir) y también precisamente por su retorcida exposición pedante, que se complace en complicar y abstraer todos los conceptos; pues como lo expuesto son los *elementos*, es decir, los conceptos primeros de la Matemática, inteligibles sin cadena ninguna de conocimientos anteriores, una vez captados por el principiante con cierto esfuerzo, los considera tesoro suyo, y muy valioso, porque más se estima lo que más cuesta; y ese derecho de propiedad se afirma al saberlo defendido de ajenas asechanzas por el dragón del espinoso tecnicismo. El estudioso del Bourbaki se transforma así en *iniciado*, y el estudio en religión.

Agréguese la facilidad, para el menos inspirado, de formar nuevas combinaciones de axiomas, felices o infecundas, y deducir muchos teoremas, valgan lo que valieren; y la posibilidad de inventar nombres, más o menos superfluos, pero siempre altisonantes para cada peldaño, impresionando a los no iniciados y autosugestionándose con la entrevisión de la inmortalidad, y se comprenderá cuánto fascina a la juventud de todos los países esa nueva secta religiosa que se llama *bourbakismo*. Religión de iluminados y recitadores *ad litteram* del nuevo Coran (sin osar entenderlo, porque sería irreverencia), que no debe confundirse con el estudio crítico de lo mucho y bueno que contiene esta nueva *Summa*, debida al esfuerzo conjunto de toda una valiosa generación francesa (*); de igual

(*) Como aconteció con el cantorismo, también habrá de moderar ciertos excesos la *Summa* de Bourbaki, cuya antipatía a la obra de Frechet le hace desechar y silenciar el concepto de espacio *compacto*, que, en la forma amplia adoptada por éste, es indispensable en la moderna matemática. Baste citar la Teoría de las *familias compactas* de funciones (inexpresivamente llamadas *normales*) y la Teoría de las *distribuciones* del genial Schwartz, quien necesitando de esa topologia *amplia* de Frechet excluída de la axiomática adoptada en los «Elementos», se ve obligado a adoptarla heterodoxamente, con el nombre de *pseudotopología*.

modo que no debe confundirse el *cantorismo,* mística finisecular que aspiró a la demolición de la Geometría, con la *Teoría de conjuntos* del inmortal *Cantor,* que una vez moderada en sus desorbitadas ambiciones, sigue y seguirá siendo potente instrumento del Análisis Matemático.

Quien conozca a San Juan sabe cual es su ecuanimidad, alejada de todo extremismo, y sospechará cual será su posición equilibrada en el actual cisma que divide a los matemáticos en *clásicos* y *modernistas;* clasificación que, si es radical, resulta peyorativa para los dos bandos. Pues por clásica que sea la formación de un veterano prófesor, ya al borde final de la vida, será indigno de seguir ocupando la cátedra si se cierra al espíritu de los tiempos, si no respira el *Zeitgeist* y vuelto hacia el ocaso, da la espalda a la juventud, que mira esperanzada hacia el oriente, adorando al nuevo sol.

Criterio de verdad para el pragmatismo es el éxito; y sin ponerme a discutir extramuros de la ciencia, quienes moramos dentro nos regimos por esa norma de verdad científica en la empírica Filosofía natural, que también (mudando lo mudadero) es aplicable a la especulación matemática abstracta. Si la verdad la señala el éxito, y éste pertenece a la juventud, como dueña que es del porvenir, buen rumbo es para el viejo aliarse con los jóvenes en las peripecias de la vida. Mis colegas coetáneos me censuraron siempre el preferir en mis cursos la matemática *dernier cri* (*); y consecuente con tal criterio incurable, introduje el Bourbaki, apenas inició su aparición; pero habría sido imperdonable ingenuidad de pazguato el copiarlo con todas sus exageraciones y apasionamientos juveniles, que no perdurarán.

(*) Esta era en 1916 la Matemática cantoriana-zermeliana, y la Topología de Frechet; en 1930 era la boubarkista. Mi censor más autorizado fué siempre Hugo Broggi, querido amigo y excelente analista clásico. Más riguroso todavía es el prestigioso analista Beppo Levi, que repudia de plano toda la matemática moderna.

También en esta conyuntura estoy de acuerdo con San Juan que, en la mitad del camino de la vida, no se deja seducir por la sirena; y del ramillete ofrecido sabe elegir las flores, despreciando el follaje.

Nos ha declarado que no es algebrista, y nadie lo encasilla en esa secta, pues ya tiene tarea bastante con las aproximaciones asintóticas; pero cuando algo quiero saber o aclarar en la actual maraña algebraica, a él recurro en consulta, seguro de que ha visto lo esencial, y que la plétora de nombres que él ignore, no valen la pena de estudiarlos.

Cuando en 1953 nos honró con su visita Krull, autoridad máxima del Algebra moderna, la ingénita timidez de San Juan, que se exacerba hasta el rubor ante los extranjeros que laboran feudos distintos del suyo, le hizo esconderse en su celda, sin exhibirse nunca en las conferencias, que no le interesaban; pero Krull sabía de él y había leído una nota suya, de pocas líneas, inserta en mis Lecciones de Algebra, donde ponía el dedo en la llaga de que adolece la usual definición de *grupo* de Galois; estas pocas líneas dieron pie al famoso algebrista a elaborar extensa Memoria, que redactó aquí en Madrid y publicó en la Revista de esta Academia, agotando con todo lujo de técnica el tema que San Juan había suscitado. Y tampoco escaparon al perspicaz sabio alemán las innovaciones algebraicas contenidas en la «Teoría de las magnitudes», tema candente y muy discutido, al que nuestro compañero aportó esenciales progresos.

Algo de esto explicaré en el Apéndice; pero todo ello queda al margen de la ocupación y preocupación central de su vida: la batalla sin tregua contra esa fortaleza que parece inexpugnable. Dicho quedó cuan tenaces han sido sus asaltos y cuan definitivos sus esclarecimientos, hasta demostrar que es imposible la soñada generalidad máxima; solución negativa al estilo de la que tuvieron muchos problemas famosos.

El tímido estudiante rigorista, que sometía dudas al joven profesor hace seis lustros, mientras repechaban la cuesta de San Bernardo, continuando después el diálogo a través del Atlántico, es ya un matemático de alta jerarquía y no un especialista de vía estrecha; un analista capaz de atacar los más variados problemas, sean clásicos o modernistas, que sucesivamente va disolviendo en claras conclusiones, esparcidas en prestigiosas revistas, hasta acopiar en muchos años de ejemplar dedicación reconcentrada, la valiosa cosecha con que hoy acude al llamamiento de la Academia, que nunca solicitó.

Repasando la lista de sus publicaciones se comprende que, si el autor fuera otro, se habría hinchado de vanidad con su avanzar constante en la planicie infinita del misterio, y habría declamado con el romancero: se va ensanchando Castilla delante de mi caballo; pero la simplicidad casi esquemática de su carácter le impidió siempre usar frases altisonantes y menos para si mismo. Y, sin embargo, es instructiva la imagen; pues el éxito negativo de su última Memoria nos invita a la reflexión: cuando el caballo se empaca, lo prudente es buscar otra ruta o cambiar de cabalgadura; y como este segundo expediente no ofrece mejores perspectivas, pues el método de las cotas y recintos ha dado ya todo su rendimiento, ¿no sería preferible buscar otra ruta de acceso al problema de Borel, tras desandar lo andado por tantos analistas? Mucha vida tiene por delante para intentar esta hazaña.

Para seguir la pauta de toda biografía, deberíamos mencionar todavía las calificaciones obtenidas en su carrera y los premios ganados después, las Cátedras de Matemática pura y aplicada que ha desempeñado, las Comisiones y Centros a que pertenece y los Congresos extranjeros a que ha concurrido. Luzca toda esa honorífica farfolla quien no tenga cosa de más substancia que exhibir; pero ni él ni yo concederíamos gran valor a estos lauros, un tanto aleatorios, si no fuera por una circunstancia que los biógrafos suelen omitir; no asistió como turista a los Congresos internacionales, liviano y placentero deporte a expensas del Estado; sino como colaborador activo, aportando trabajos originales, que fueron discutidos y tomados muy en cuenta.

En tales areópagos y fuera de ellos se relacionó con el sueco Carleman, que le abrió las páginas de *Acta Mathemática*; con Doetsch que lo ha hecho conocer en Alemania; con el polaco Mandelbrojt, que le dedica amplias citas al proseguir los trabajos de nuestro compatriota; con el llorado Valiron, gran propulsor de las funciones enteras; con el danés Bang, profesor en Copenhague; con el húngaro Horvath;... Con ellos y con muchos más, de sólido prestigio, discute de igual a igual; y, cuando lo hace, es porque está seguro de su razón, que demuestra con ejemplos y contraejemplos incontrovertibles, hasta lograr la conformidad del adversario.

Gran suerte es operar sobre esa tierra firme, sin fisuras ni tremedales, que es la Matemática moderna, donde toda contradicción se resuelve a favor de una de las partes, sin apelación posible; mientras en las ciencias empíricas, ante resultados contradictorios igualmente fidedignos, la discrepancia suele encontrar explicación plausible, terminando en tablas la partida; a no ser que la disparidad persista en varias direcciones, presagio de crisis total, cuya ulterior resolución no deja vencedores ni vencidos; y en cuanto a la Filosofía, tales polémicas son irresolubles, prolongándose indefinidamente, porque los contrincantes hablan lenguas distintas. Sólo *dentro* de la palestra matemática (es decir, sin tocar el contorno de problemas colindantes con la Gnoseología) la contradicción es lucha a muerte, con vencido y vencedor; y nunca mejor recordado, para expresar la alegría del maestro, que se siente copartícipe de tales victorias, el viejo romance de Bernardo: «Si no vencí reyes moros, engendré quien los venciera».

Vocación inexplicable para el vulgo es la de encauzar nuestras vidas entre dos orillas, nada atractivas para el hombre común: la *derrota* y el *fracaso*, que él interpreta así: la *humillación* o la *muerte*.

Todo maestro teme al fracaso, porque la producción escrita tiene vida efímera, y sin discípulos que prolonguen la vida espiritual, única que vale, el fracaso pedagógico es sinónimo de muerte. Es, por el contrario, motivo de satisfacción, porque lo es de esperanza —la única que nuestro ministerio nos depara, en compensación de tantas ingratitudes y pedanterías jactanciosas— el ser superado por algún discípulo; porque en su obra revivirá una porciúncula de nuestro ser. *Vencer* a sus discípulos significa morir, *ser vencido* por ellos es a la vez revivir y renacer.

Con filial admiración nos ha recordado San Juan que el inolvidable Terradas superó a sus más adictos discípulos; esta victoria pírrica significa que su memoria durará mientras vivan quienes lo conocieron y admiraron, quienes oyeron sus cursos o vieron construir sus grandes obras de ingeniería. Mayor fortuna es la de ser vencido por discípulos de la jerarquía científica y moral de San Juan o Santaló, que tempranamente volaron por cielos más altos, sin engreirse, porque conocen la ley evolutiva de la Ciencia y la duración efímera de cada hallazgo afortunado, pronto sustituído por otro que lo supera.

El generoso proselitismo de ambos y de otros varios investigadores de nuestra misma raza, ya incorporados a la comunión internacional de la Ciencia exacta, logrará formar sin duda nuevos y mejores discípulos, que al superarse más y más, en generaciones sucesivas, asegurarán la continuidad de la ya vigorosa Matemática hispánica, saldando así la deuda de honor que teníamos contraída con la cultura universal, desde el siglo de Alfonso el Sabio (*).

HE DICHO

(*) Deber de exactitud es glorificar a los matemáticos del Siglo de Oro que aportaron ideas originales: el dominico Fr. Juan Ortega y los portugueses Alvaro Tomás y Pedro Nunes; y en la misma órbita filosófica que Tomás, se ocupó el dominico Soto del movimiento acelerado, que esclareció como nadie; pero la matemática moderna era entonces el Algebra, que los españoles (salvo Nunes) dejaron de lado.

En el siglo XVII produjo Omerique una obra muy ingeniosa anti-cartesiana; cuando precisamente la Matemática moderna era y siguió siendo la cartesiana.

En la centuria siguiente no surge matemático creador ninguno, y debemos conformarnos con la introducción por Jorge Juan del Cálculo infinitesimal, con un siglo de retraso, perdiendo así la tercera oportunidad en que se abre una gran puerta de acceso a la Matemática moderna.

A fines del siglo XIX damos un salto gigante con la introducción de Staudt, más estudiado aquí que en Alemania; pero la Geometría se enderezó por el rumbo analítico, y tanto Cremona como Torroja y quienes lo seguíamos, quedamos una vez más fuera del cauce.

APENDICE
DE ADICIONES Y ESCLARECIMIENTOS

I. El problema de Borel-Watson

La teoría de una clase de series no convergentes en el sentido de Cauchy fué organizada inicialmente por Cesàro mediante las sumas iteradas, generalizando así el clásico concepto de *valor* de una serie como *límite* de sumas parciales; pero con ser importantísimo ese avance, creador de muy copiosa bibliografía, abrió más amplias perspectivas al Análisis la generalización de Borel de raíz euleriana, que asigna sentido funcional a una serie de potencias aun en casos que por tener radio nulo de convergencia, no es aplicable la prolongación analítica. E inmediatamente surgen problemas por doquier: ¿qué operaciones entre series son conservadas por las funciones creadas por el algoritmo de Borel o por cualquier otro? ¿Las derivadas en el origen de la función suma de una serie potencial son precisamente los coeficientes, como acontecía en el caso de radio no nulo?

La primera pregunta encuentra pronto solución, pues por muy parcos que seamos en exigencias, caemos en la aproximación llamada *asintótica* por Poincaré; pero ésta no determina una función, sino infinitas funciones y además no subsiste la derivación término a término, como su creador hizo notar, no sobrepasando el campo real, discrepancias que desvanecen la armoniosa sencillez a que estábamos acostumbrados. Era preciso, pues, para reconquistar un trozo del «paraíso perdido» modificar la definición de Poincaré, imponiéndole condiciones restrictivas, como hizo Watson, a fin de lograr unicidad.

Estas condiciones de Watson (1), perfeccionadas por el joven finlandés F. Nevanlinna en su tesis doctoral (2), eran *suficientes*, pero

(1) *Philosophical Transactions R. Soc.*, Londres. Serie A. t. 211, págs. 273-313.

(2) *Zur theorie der asymptotischen Potenzreihen*. Akademische Abhandlung, Helsingfors, 1918.

excesivas; y el próximo avance fué logrado por el sueco Carleman, que con los más poderosos recursos analíticos, y ampliando un profundo teorema de Denjoy, logró dar en su libro famoso (3) su cuadro de condiciones *necesarias* y *suficientes* una vez admitida una escala de cotas, que en su método juegan papel esencial.

Fué éste el punto vulnerable donde San Juan concentró su ataque en el Congreso de Oslo de 1936, demostrando mediante contraejemplos que, en realidad, lo resuelto por Carleman era un problema de interpolación en sentido *amplio* (denominación de Borel), donde la función no queda determinada por la serie solamente, sino por ésta más la sucesión de las cotas del desarrollo asintótico, como condición complementaria de la interpolación; en efecto, dió San Juan dos funciones distintas con el mismo desarrollo asintótico y cotas distintas, que verifican separadamente la condición de Carleman.

La traducción del problema de *series asintóticas* a la *teoría de funciones cuasianalíticas* es una cuestión que San Juan se encontró planteada en la ya citada monografía de Carleman, *Fonctions quasi-analytiques,* Paris, 1926 (pág. 77), como una de las dos cuestiones interesantes que quedaban por resolver en esta teoría y que tuvo la fortuna de zanjar diez años después de ser propuesta y sin ningún precursor. La construcción de estas funciones se logra por un método de descomposición que, como indicaba su autor en «Acta Mathematica», t. 75, pág. 247, se aplica a todo algoritmo (serie o integral) con generatriz, y que Mandelbrojt aplicó (a la vista de los originales de San Juan conocidos en 1938 a través de Gorny) a una serie de polinomios de Chebichev, y Bang usó posteriormente (1946) con absoluta originalidad en las transformadas de Fourier generalizadas.

Donde se ve todo el alcance del método de San Juan es en su trabajo *Les fondements d'une théorie générale de séries divergentes,* presentado al Congreso de Harvard (1950), donde lo aplica a masas de Radò y obtiene teoremas de descomposición que comprenden como caso muy particular al indicado de Mandelbrojt y que no están incluídos en los de Bang, a pesar de que éstos dan condiciones necesarias y suficientes para el intervalo $(-\infty, +\infty)$, porque alcanzan a las clases cuasianalíticas de orden y tipo prefijados, introducidas por necesidades ineludibles en el campo complejo de los desarrollos asintóticos, quedando las clases de Denjoy-Carleman clasificadas como de tipo y orden iguales a 1.

Comenzó así San Juan el proceso de la descomposición de fun-

(3) *Les fonctions quasianalytiques.* (Colección Borel.)

ciones, con éxito tal, que hoy forma todo un capítulo obligado en la teoría de las funciones cuasianalíticas, incluído en muchas publicaciones de los autores más famosos. Así, por ejemplo, la monografía de Mandelbrojt de 1942 (4) le dedica ocho páginas; y en la de Bang de 1946 (5) ocupa más de 20 de las 100 que tiene esta original tesis doctoral.

Este progreso esencial ha patentizado la necesidad de modificar las clásicas condiciones de Carleman, de manera que resuelvan el problema inicial. Exito del mismo San Juan, logrado en su última Memoria premiada (I 23), ha sido el de lograr esa necesaria modificación, y lo ha conseguido gracias a su original método de descomposición, perfeccionado por la moderna técnica del joven matemático danés Thoger Bang, que nos ha honrado en el año pasado con un denso y valioso curso de conferencias.

Para la resolución del difícil problema introduce San Juan en su comunicación al Congreso de Amsterdam de 1954 las clases semianalíticas de desarrollos asintóticos, análogas a las de funciones cuasianalíticas de Denjoy-Carleman, y con su poderoso recurso de la descomposición resuelve el viejo problema de las series divergentes, pero en sentido negativo, como aconteció antaño con otros problemas que fueron clásicos.

Demostrada, mediante las cotas y recintos, la imposibilidad de edificar una teoría de series divergentes que englobe todas las demás, queda clausurada la teoría de Carleman y habrá que buscar otro plan para atacar al obsesionante problema de Borel.

---

(4) *Analytic functions and classes of Infinitely Differentiable Functions.* Rice Inst., Pamphlet, t. XXIV, 1942, págs. 92-100.

He aquí la extensa cita que Mandelbrojt repite reiteradamente en los «Comptes Rendus»; en «Acta Mathematica», t. 72, pág. 26; en «Rice Institute Pamphlet», v 29, pág. 100:

«M. Carleman a posé dans son livre sur les fonctions quasi analytiques, un problème intéressant qui, avec la terminologie que nous avons adoptée dans l'introduction, peut se formuler ainsi: peut-on affirmer que deux fonctions du type fortement quasi analytique, dans un intervalle fermé, dont toutes les dérivées (ainsi que les fonctions elles mêmes) coincident en un point, sont identiques?

M. San Juan a donné à cette question une réponse négative (Cong. Oslo, 1936).»

Continúa con un resumen de esta comunicación al Congreso de Oslo.

(5) *Om quasianalytiske funktioner.* Kjobenhavn, 1946, págs. 35-51 y 76-82.

En pág. 63, nota al pie, cita los trabajos de Mandelbrojt y San Juan.

II. La aproximación asintótica óptima

La función determinada por la serie de radio nulo con independencia de la sucesión de cotas de Carleman ha sido denominada por San Juan *aproximación asintótica óptima*, para expresar su mayor adherencia o aproximación asintótica a la serie. El problema central tratado en esta Memoria última, titulada *El problema de Watson y las clases semianalíticas* (premio «Francisco Franco 1954»), es el de saber si la condición inicialmente introducida por Watson es *necesaria y suficiente* para que una clase semianalitica esté formada exclusivamente por aproximaciones óptimas. La suficiencia de esta condición fué ya demostrada en la Memoria *Sumación de series divergentes y aproximación asintótica óptima*, premiada por la Real Academia en 1935. La escasa difusión de esta Memoria y la necesidad de aplicarlo en otras Notas, indujo a reproducir este resultado en una Nota publicada en los «Comptes Rendus» (t. 235, 1952, páginas 118-119); y no era infundada la sospecha de esta falta de difusión, porque la recensión de esa Nota hecha por Boas en el «Math Review» lo daba como una demostración brevísima de un resultado *conocido* contenido en la tesis doctoral de Bang *Om quasi-analytiske funktioner* (1946). Pero al conocer ulteriormente Boas en 1954 la Memoria de 1935 de San Juan, hizo la recensión de ésta (a pesar de los años transcurridos) en la misma revista «Math Review», reconociendo que ya contenía el resultado atribuído por error a Bang. Esto sirvió a San Juan para iniciar el estudio de la importante tesis doctoral de Bang, que se hizo traducir del danés para su estudio a fondo y establecer contacto estrecho con su autor, que culminó en un curso de dos meses (enero y febrero de 1955) explicado por Bang en Madrid.

Mucha más importancia y dificultad tenía la demostración de la *necesidad* de dicha condición. Durante mucho tiempo trató San Juan de responder negativamente a esta pregunta mediante contraejemplos. Para su construcción perfeccionó un método de la Vallée-Pousin para la resolución de un sistema de infinitas ecuaciones lineales, método que publicó en los «Comptes Rendus», t. 236 (1953), págs. 1841-1843. Otro de los recursos ensayados fué la existencia de funciones holomorfas en un semiplano cuyos momentos de Stieltjes sobre las semirrectas de éste creciesen más rápidamente que $n!$. El fracaso en la búsqueda de estas funciones le condujo a sospechar su inexistencia, la cual demostró («C. R.», t. 236, 1953, págs. 1941-1943) apoyándose en la Nota anterior, obtuvo así un principio de identidad de tipo totalmente distino a los clásicos de Pragmen-Lindelöf que utilizan la acotación de la función mediante una exponencial, el cual fué perfeccionado por Sunyer Balaguer (R. M. H. A., 1953) con independencia y casi simultáneamente; después generalizado por Boas («Bull. A. M. S.», 1954), y más recientemente por Rodríguez Salinas en el tomo del «Journal de Math. pures et appl.», 1955, de homenaje al profesor Denjoy con motivo de su jubileo, donde da condiciones *necesarias* y *suficientes.*

En vez de construir los buscados contraejemplos que resultaron inexistentes, consiguió al fin San Juan demostrar la necesidad de esta condición tras una larga cadena de teoremas contenidos en dicha Memoria, intitulada *El problema de Watson y las clases semianalíticas*, que traducida al alemán aparecerá en «Acta Mathematica».

Quedaba entonces la duda de si la condición de Watson dejaría de ser necesaria cuando sólo se exigiera que algunas (y no todas) de las funciones de la clase semianalítica fuesen aproximaciones óptimas. Esta fué resuelta mediante ejemplos incluídos en dicha Memoria y que traducidos a las funciones cuasianalíticas fueron objeto de otra nota en los «Comptes Rendus», t. 238 (1954), págs. 1185-1187.

Estos resultados de San Juan sobre las clases semianalíticas de aproximaciones óptimas, al ser comparados con otros de Bang sobre la clase cuasianalítica de las funciones analíticas, muestran que la aproximación asintótica de Watson desempeña para las series de radio nulo el mismo papel que la prolongación analítica ordinaria para las series con círculo de convergencia, según se indica en las págs. 61-62 de la publicación española de dicha Memoria, *El problema de Watson...*, hecha por el C. S. I. C. Constituye, pues, en opinión de San Juan, la aproximación de Watson la solución natural al problema de Borel sobre unicidad de las series de radio nulo, aunque no sea la más general, ya que ésta no puede lograrse mediante las cotas.

El problema de la determinación de la función con independencia del recinto de aproximación asintótica es aún más duro que el de la independencia de las cotas. En la Memoria mencionada, sobre Watson, se da una solución para las aproximaciones de Watson sin pretensiones de máxima generalidad. Opinión de Frechet oída por San Juan es que la noción de *suma* lleva inherente la de *recinto* y que de la serie numérica sola se puede sacar muy poco.

La infructuosa búsqueda de desarrollos asintóticos con cotas de Carleman que no sean monótonas crecientes indujo a sospechar que en toda clase cuasianalítica las cotas pueden elegirse crecientes, y así logró demostrarlo en «Comptes Rendus», t. 235 (1952), págs. 282 283); en cambio, no pueden elegirse convexas si no se trata de toda la recta, según había demostrado anteriormente H. Cartan. Estos dos resultados constituyen una especie de cotas inferior y superior bastante próximas sobre la estructura de las cotas que definen clases cuasianalíticas.

Al tratar de trasplantar a recintos más generales que el semiplano los resultados de las clases cuasianalíticas, estudió San Juan ampliaciones de la transformación de Laplace y dió teoremas generales sustituyendo la exponencial por una función entera con adecuadas condiciones. En la recensión que hace R. Wilson en «Math. Review» (16, págs. 352-353), de un trabajo de van der Corput, dice así: «Recientemente han sido dados por R. San Juan extensiones de la teoría de Poincaré en relación con los desarrollos asintóticos que surgen de los problemas de momentos asociados con diferentes clases de transformadas» y cita estos resultados.

No consiguió San Juan el propósito indicado de trasplantar los resultados de las clases cuasianalíticas a recintos más generales por la dificultad en el manejo de la transformación inversa; y por esto en la última Memoria citada, *El problema de Watson...*, abordó el estudio directo de las clases semianalíticas. Pero los resultados obtenidos sobre tales transformaciones y publicados en la Revista de la Real Academia de Ciencias de Madrid, tuvieron aplicación para estudiar el problema de Watson en las soluciones asintóticas de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes polinómicos, cuyas conclusiones fueron expuestas en una nota de los «Comptes Rendus», t. 234 (1952), págs. 1338-1339, y que Rodríguez Salinas trata de extender a tipos muy amplios de ecuaciones lineales.

La inclusión de dos series de Hardy en la *Teoría general de series divergentes*, que viene publicando San Juan en la Revista de esta Real Academia, le exigió demostrar un teorema sobre funciones enteras de orden infinito y crecimiento regular no incluído en los teoremas conocidos (Boletín de Darboux) del tipo que dió Lindelöf sin demostraciones completas en 1903. Tuvo que perfeccionar para esto un método de Valiron que le permitió demostrar además de modo automático los de Lindelöf y hacer una clasificación de las funciones enteras de orden infinito de crecimiento regular. Esta Memoria, titulada *Funciones enteras de crecimiento regular*, obtuvo el premio «Francisco Franco» de 1949.

La aplicación de este método a series de radio finito y al orden precisado en las funciones enteras de orden infinito fueron objeto de las tesis doctorales de J. Martínez Ugartemendía y A. Gil Azpeitia, respectivamente. La generalización para integrales de Laplace y series de Dirichlet fué hecha por Rodríguez Salinas en una Memoria que recibió el premio «Alfonso el Sabio» de 1951.

III. Derivación de series asintóticas

La respuesta afirmativa a la segunda pregunta formulada antes (Nota I) viene dada también mediante la misma definición de aproximación asintótica para la derivada primera, y para las restantes cuando se demuestra la regla de derivación término a término, entendiendo, naturalmente, que las derivadas se definen para $z \to 0$ dentro del recinto, las cuales se denominan derivadas angulares, aunque el campo no contenga ningún ángulo de vértice O.

La derivación de series asintóticas ha sido estudiada bajo condiciones de generalidad creciente por J. F. Ritt («Bull. A. M. S.», 1918), F. Nevanlinna («Ann. Acad. Sci. Fennicae», 1919) y R. San Juan («Revista de la Univ. de Madrid», 1942, y «Collectanea Math.», 1952). En esta última Memoria se imponen condiciones que conservan las de Carleman para las derivadas sucesivas.

Casi huelga recordar que la importancia de esta ley es que sin ella cesa la más trascendental aplicación de las series de radio nulo: la integración de ecuaciones diferenciales.

Las ecuaciones de monogeneidad para derivadas angulares, publicadas en la «R. M. H. A.» (1930) por San Juan, fueron obtenidas un año más tarde por el especialista ruso en estas cuestiones, profesor Menchoff: *Sur les fonctions monogènes*, «Bulletin de la Société Mathématique de France», t. 59 (1931), pág. 181.

Al lado del problema de la unicidad, y más importante quizá que éste, se presenta el problema de la existencia, que es el origen de los algoritmos de sumación.

En el artículo de «Collectanea», *Sobre la existencia de una función holomorfa con desarrollo asintótico dado y cotas prefijadas*..., da San Juan un método de construir la función sirviéndose del teorema de existencia de Fréchet del mínimo de una funcional en un conjunto compacto de un espacio abstracto, en vez de atacarlo con los métodos clásicos del cálculo de variaciones, como hacía Carleman en su libro, donde daba condiciones necesarias y suficientes equivocadas.

Se trata en realidad de un algoritmo de sumación de nuevo tipo. En cambio, entra en los moldes clásicos el publicado en la Unión Matemática Argentina con el título *Un método de sumación de series divergentes*. El algoritmo es tan potente al menos como el de Borel y válido en toda la estrella, aunque más complicado que éste.

IV. Problema de los momentos y transformación de Laplace

En su tesis doctoral mencionada en el discurso se da una solución del problema de los momentos incluyendo generatrices complejas como auxiliar para la aplicación del algoritmo de Stieltjes generalizado, con el que obtuvo San Juan su primera contribución al problema de unicidad de la sumación de series de radio nulo. La solución del problema de Stieltjes fué luego ampliada, publicando las conclusiones en los «Comptes Rendus», t. 198 (1934), pág. 1838, y el artículo completo en la «R. M. H. A.» (1934).

Otro problema que propuse a San Juan para tesis doctoral fué el que entonces llamábamos *inversión de la transformación de Laplace* y al que después Doetsch dedicó el capítulo VII de su *Handbuch der Laplace Transformation*, denominándolo *problema de la representación:* obtener condiciones necesarias y suficientes para que una función sea expresable mediante una integral de Laplace simplemente convergente. No resolvió San Juan este problema entonces, sino que obtuvo una serie de teoremas tauberianos y otros de tipo Abel, que no publicó.

Pasaron los años, y en la conferencia que dió en esta Real Academia el profesor Doetsch el 19 de abril de 1952 (publicada en la Revista de esta Academia, t 46, 1952, págs 125-136), fué éste uno de los dos problemas a que dedicó su disertación, indicando algunas soluciones parciales. Guiado, según manifestación propia, por las investigaciones de Widder sobre el problema relativo a la transformación de Laplace-Stieltjes, dió San Juan una solución que publicó, con la demostración abreviada propia de tales Notas, en los «Comptes Rendus», t. 238, págs. 451-452, sesión del 2 de febrero de 1953. Otra solución y la demostración completa de la anterior fueron publicadas en «Mathematische Nachrichten», t. 12 (1954), págs. 113-118 bajo el título *Charakterisierung der durch einfach konvergente Laplace Integrale*. El profesor Doetsch, que tuvo la atención de presentar el articulo en dicha Revista y traducirlo él mismo al alemán, al hacer su reseña en el «Zentralblatt für Mathematik», dice literalmente, después de resumir las conclusiones de San Juan: «Die Bedingungen sind die allgemeinsten bisher bekannten unter denjenigen, die bei ihrer Formulierung das komplexe integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} f(s)\frac{e^{ts}}{s}\,ds$$

benutzen».

De índole totalmente distinta y mucho más sencillo que el anterior es el problema de la caracterización de la transformación de Laplace como funcional lineal de un espacio. Este tipo de caracterizaciones fué iniciado por E. Levi («Atti. Accademia Naz. dei Lincei» (6), 24, págs. 422-426 (1937) para la integral en intervalo finito. Siguiendo el método de Levi, entre 1941 y 1952 publicó San Juan una serie de artículos en «Portugaliae Math.» (1950, 1951, 1952) y «R. M. H. A.» (1952) dando la caracterización completa en los espacios L^p ($p \geqslant 1$) y U mediante la ley de composición o regla de la Faltung, lo cual demuestra que es la transformación de Laplace la única apta para la interpretación de los fenómenos físicos de la electrotecnia tratables mediante el llamado cálculo operacional.

En 1951 publicó Doetsch en «Math. Nachr.», 5, págs. 219-230, sirviéndose de la ley de derivación usada por E. Levi y equivalente a la de composición, la caracterización para el espacio L^2 con método distinto del empleado por Levi y San Juan. Posteriormente, en «Rendiconti R. Accademia dei Lincei» (1954), el Prof. Doetsch ha generalizado su método para alcanzar con él los resultados anteriores de San Juan en sus cinco trabajos sobre caracterizaciones en L^p ($p \geqslant 1$) y U, que allí son resumidos.

El artículo publicado en colaboración con B. R. Salinas en la revista de esta Real Academia contiene tres teoremas nuevos sobre convergencia uniforme de la integral de Fourier en intervalos compactos, finitos o infinitos.

La conclusión de que el integrando tiende a cero cuando su derivada es acotada (demostrada en las «Lecciones de Análisis matemático», 2.° curso, de San Juan) tuvo que ser generalizada como lema para la resolución del problema de la representación de la integral de Laplace, sustituyendo la acotación por el orden exponencial del integrando. Bajo condiciones muy generales se puede sustituir a su vez la exponencial por otra función, y se obtiene el teorema publicado en «R. M. H. A.», t. XIV, del tipo de los que dió Hardy en los Procc. de Londres el año 1913.

V. Teoría de las magnitudes físicas

Mucha falta hacía un estudio sistemático de esta debatida cuestión, en que se entreverán puntos de vista irreconciliables. El propio Krull había pensado hacer un libro sobre el tema, pues siempre consideró necesario un estudio previo analítico riguroso de la homogeneidad; pero, a la vista del libro de San Juan, anunció que desistía de su proyecto.

Las funciones homogéneas generalizadas fueron introducidas por Ehrenfest. Ya en los textos de Mecánica de la Vallée-Poussin y de Levi-Civita se consideraban funciones homogéneas respecto de diversos grupos de variables, porque las clásicas de los cursos de Análisis son las propias de la Geometría, en que sólo hay una magnitud primitiva: la longitud. Enrenfest dió en «Mat. Ann.» las funciones homogéneas generalizadas para su aplicación física, pero en realidad quedaban desligadas de ésta. Era necesario demostrar que las únicas funciones aptas para definir magnitudes derivadas eran las homogéneas generalizadas, y la condición para eso es que permitan definir una igualdad y una suma invariantes en los cambios de unidades. El que la función resulte homogénea generalizada de Ehrenfest es un teorema nada inmediato, que se da en el libro de San Juan. Tal vez exigiendo la derivabilidad sea fácil, pero la demostración general exige el estudio de la ecuación funcional de Cauchy $f(x+y) = f(x) + f(y)$ sin continuidad ni acotación. (Este estudio contenido en el libro de San Juan fué incluído como artículo en la publicación de la Universidad del Litoral (R. Arg.), titulada «Homenaje al profesor Julio Rey Pastor».

Se hace en dicho libro una aplicación, teórica naturalmente, del principio de Klein a la sistematización de las teorías físicas, tomando como grupo el formado por los cambios de unidades acordes. Los sistemas fundamentales de sizygias se interpretan como las fórmulas bases de cada teoría. Las dimensiones forman grupos abelianos multiplicativos, que son espacios vectoriales sobre el anillo de los exponentes.

Las magnitudes no forman grupos, sino una generalización de esta noción, que San Juan llamó *sistemas*, donde hay propiedad asociativa, pero la multiplicación y división no son uniformes. Subsiste, sin embargo, el llamado teorema fundamental del meroformismo en que las clases de antihomólogos forman grupo. Esto es lo que Krull señaló como novedad al advertirle su autor, cuando le ofreció el libro, que sólo contenía, salvo retoques inesenciales, lo ya conocido de la obra de van der Waerden. Los sistemas de magnitudes son meromorfos con los grupos de dimensiones. La representación de las dimensiones como vectores parece ser que resulta útil, pero no sabemos si es en este libro donde se ha dado por primera vez. Decisiva novedad ofrece, en cambio, la interpretación vectorial que hay en el artículo titulado *Una aplicación de los espacios vectoriales a la regla de las fases de la Termodinámica*. Aquí se aclara un caso singular de la regla de Volterra, que no se lograba mediante la característica de la matriz.

La Teoría de magnitudes contiene una aplicación de los límites dirigidos a la definición de densidad de un flúido, que puede ser norma para otras magnitudes; densidad eléctrica, por ejemplo. La cosa es sólo expositiva, pues Prandlt ya señaló los inconvenientes del paso al limite ordinario; pero la forma que lo daba en su Mecánica de flúidos resultaba poco natural.

En la parte de homogeneidad y semejanza se da una definición de sistemas físicamente semejantes (generalización de las figuras semejantes de Geometría) y una demostración rigurosa del teorema de π. Creemos que la primera sin hipótesis complementarias, sino sólo sirviéndose del teorema esencial mencionado antes y de la definición de sistemas físicamente semejantes.

¡El libro de J. Palacios sobre Análisis dimensional tiene numerosas citas a esta monografía.

Según confesión propia, por despolarizarse de la especialidad y algo por probar la enorme diferencia de dificultades entre los duros problemas de la Matemática pura clásica y las sencillas aplicaciones, se ocupó San Juan en la primavera de 1953 de problemas de la Programación lineal, que cae dentro de la llamada Investigación operativa, de moda desde la última guerra mundial.

Publicó en la revista «Ciencia aplicada» un artículo, con alguna parte expositiva, titulado *El método del simplex de la programación lineal.* Las novedades son unas demostraciones geométricas de los teoremas de existencia y una simplificación del método práctico de cálculo numérico de la solución máxima factible, que permite ahorrar horas de trabajo en cada aplicación.

El Dr. Gil Azpeitia, discípulo de San Juan, actualmente contratado en Estados Unidos, prosigue allí las investigaciones sobre este tema iniciadas en el artículo mencionado, que ha sido traducido por encargo de la Brown University.

LISTA DE PUBLICACIONES DE RICARDO SAN JUAN

I. Teoría general de series divergentes asintónicas y funciones casianalíticas

1) *Sumación de series de radio nulo y prolongación semianalítica* (Tesis doctoral). «Revista de la R. Academia de Ciencias de Madrid», t. XXX, páginas 122-193 (1933).
2) *Sumación de series y aproximación asintótica óptima.* Memoria premiada por la R. Academia de Ciencias de Madrid en 1935. Publicada por la R. Academia en monografía especial en 1942.
3) *Sur le problème de Watson dans la théorie des séries asymptotiques et solution d'un problème de Carleman de la théorie des fonctions quasianalytiques.* «Extrait Congrès International des Mathématiciens», pág. 94. Oslo, 1936.
4) *Sur le problème de Watson dans la théorie des séries asymptotiques,* etc. «Acta Mathematica», t. 75, págs. 247-254.
5) *Métodos de descomposición en la teoría de las funciones cuasianalíticas.* «Revista de la Universidal de Madrid (Ciencias)», t. II, f. II (1942).
6) *Derivación e integración de series asintóticas.* «Revista de la Universidad de Madrid», t. II, f. II (1942).
7) *Les fondements d'une théorie générale des séries divergentes.* «Revista de Facultade de Ciencias de Lisboa», serie 2.ª A-A, vol. II, págs. 45-76 (1951). Resumen en los «Proceedings of the International Congress of Mathematicians». Cambridge, 1950.
8) *Algunos desarrollos asintóticos notables.* «Revista Matemática Hispano Americana», 4.ª serie, t. XI, núms. 1 y 2 (1951).
9) *Sobre la existencia de una función holomorfa que se aproxima asintóticamente a una serie dada con cotas prefijadas y de una función real indefinidamente derivable en un intervalo con derivadas prefijadas en un punto y acotadas en el intervalo.* «Collectanea Mathematica», v. IV, fasc. I, 1951.
10) *Sur le problème de Watson pour les solutions des équations diférentielles lineáries homogènes.* «Comptes Rendus de Paris», t. 234, págs. 1338-1340 (1952).
11) *Sur la somme des classes quasianalytiques.* «Comptes Rendus», Paris, t. 235, págs. 118-119 (1952).
12) *Une propriété générale des classes quasianalytiques et des développements asyptotiques dans les demiplans.* «Comptes rendus», Paris, t. 235, páginas 282-284 (1952).
13) *Condiciones suficientes de prolongación radial.* «Revista de Facultade de Ciencias de Lisboa», 2.ª serie A, vol. II, págs. 185-196.

14) *Résolution d'un système infini d'équations linéaires.* «Comptes Rendus de Paris», t. 236, págs. 1841-1843 (1953).

15) *L'acroissement des moments d'une fonction holomorphe dans un angle.* «Comtes Rendus de Paris», t. 236, pág. 1941.

16) *Análisis de dos series estudiadas por Hardy.* «Revista Matemática Hispano-Americana», 4.ª serie, t. XIII, núms. 1 y 2 (1953).

17) *Algunos teoremas sobre derivación e integración de series asisntóticas.* «Collectanea Mathematica», 1952, vol. V.

18) *Un contre-exemple de fonctions quasianalytiques.* «Comptes Renaus de Paris», tomo 238, págs. 1185-1186.

19) *Classes semianalytiques.* Procedings of the international Congress of mathematiciens, 1954 (Amsterdam), págs. 165-167.

20) *Los fundamentos de una teoría general de series divergentes.* Cap. I. *Funciones enteras de crecimiento regular* (premio «Francisco Franco» de 1949). Capítulo II. *Desarrollos asintóticos en series de potencias,* publicados en la «Revista de la Real Academia de Ciencias de Madrid», t. XL VI (la Memoria continúa).

21) *Un tipo especial de polinomios.* «Revista de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias», año XIX (1954), págs. 827-828.

22) *Sobre un problema de Carleman.* «Revista Matemática Hispano-Americana», números 9-10 de 1933.

23) *El problema de Watson y las clases semianalíticas* (premio «Francisco Franco» de 1954). Publicacines del Consejo Superior de Investigaciones Científicas (1955).

24) *Das Problem von Watson und die halbanalytische Klassen.* «Acta Mathematica» (en prensa).

II. Trabajos especiales de series e integrales impropias y teoría de funciones analíticas.

1) *Sobre el análisis correlativo de series e integrales.* «Revista Matemática Hispano-Americana», núms. 4-5, 1930.

2) *Las ecuaciones de homogeneidad para derivadas angulares.* «Revista Matemática Hispano-Americana», núms. 7-8, 1930.

3) *Algoritmos de sumación correlativos de la integral de Laplace y del algoritmo de Stieltjes.* «Revista Matemática Hispano-Americana», núm. 9, 1932.

4) *El algoritmo de Euler y la transformación correlativa de la integral de Laplace.* «Rendiconti del Real Instituto Lombardo de Science e Lettre», vol. LXVIII, páginas 619-624.

5) *Sur le problème des moments.* «Comptes Rendus de Paris», t. 198, pág. 1832 (1934).

6) *Una solución del problema de los momentos de Stieltjes.* «Revista Matemática Hispano-Americana», núm. 7, 1934.

7) *Una propiedad general de las sucesiones de términos positivos.* «Revista Matemática Hispano-Americana», 3.ª serie, 1937.

8) *El algoritmo de sumación de series divergentes.* «Unión Matemática Argentina», núm. 21, 1941.

9) *Un teorema general sobre integrales impropias simplemente convergentes.* «Revista Matemática Hispano-Americana», 4.ª serie, t. XIV, págs. 74-75.
10) *Exposición de un criterio sobre integrales impropias sucesivas.* «Gaceta Matemática», 1.ª serie, t. VI, págs. 68-76.
11) *Exposición de algunos teoremas conocidos y otros nuevos sobre convergencia ordinaria y uniforme de la integral de Fourier.* «Revista Academia de Ciencias de Madrid», t. XL VII, págs. 495-510 (En colaboración con B. Rodríguez Salinas).

III. Sobre la transformación de Laplace.

1) *Caractérisation de la transformation de Laplace par la loi du produit ou règle de la Faltung.* «Portugalee Mathematica», vol. 2, Février et Décembre, 1941.
2) *Caractérisation de la transformation de Laplace par la loi de composition appelée règle de la Faltung.* «Portugalee Mathematica», vol. 9, 1950, et vol. 10, 1952.
3) *Caractérisations fonctionelles des transformations de Laplace.* «Portugalee Mathematica», vol. 10, 1951.
4) *Caracterizaciones funcionales de las transformaciones de Laplace generalizadas en los espacios L, L^r y U.* «Revista Matemática Hispano-Americana», 4.ª serie, t. XII, págs. 41-42, 1952.
5) *Caractérisation directe sous forme exponentielle des transformations de Laplace généralisés.* «Portugalee Mathematica», vol. 11, 1952.
6) *Fonctions représentables au moyen d'une intégrale de Laplace.* «Comptes Rendus de Paris», t. 236, págs. 431-452 (1953).
7) *Charakterisierung der durch einfach konvergente Laplace. Integrale darstellbaren Funktionen.* «Mathematischen Nachrichten», B, 12 (1954), S. 113-118.
8) *Generalización de un teorema de Steinhaus sobre funcionales lineales.* Revista «Las Ciencias», año XVII, núm. 3.

IV. Sobre el método de Gräffe.

1) *Compléments à la méthode de Gräffe pour la résolution des équations algébraiques.* «Bulletin des Sciences Mathématiques», 2.ª serie, t. LIX, 1935.
2) *Complementos al método de Gräffe para la resolución de ecuaciones algebraicas.* «Revista Matemática Hispano-Americana», 3.ª serie, t. I, 1939.
3) *A propos du mémoire: «Recherches sur la méthode de Gräffe..., etc.»* par Alexandre Ostrowski à Bale. «Acta Mathematica», t 75.

V. De aplicaciones físicas y económicas.

1) *Teoría de las magnitudes físicas y sus fundamentos algebraicos.* «Revista de la Real Academia de Ciencias de Madrid», 1945-1946.
2) *Dimensiones de las magnitudes.* «Revista de la Universidad de Madrid», t. II, fascículo II, 1942.

3) *Una generalización del concepto de grupo.* «Revista Matemática Hispano-Americana», 4.ª serie, t. 3, 1943.
4) *Sobre la finitud de la entropía y la anulación del calor específico al tender al cero absoluto.* Congreso de Oporto de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias, 1942.
5) *Una aplicación de los espacios vectoriales a la regla de las fases de la Termodinámica.* Congreso de Oporto y «Revista de Facultade de Ciencias de Lisboa», 2.ª serie B, vol. I, págs. 107-112 (1952). Resumen en «Las Ciencias», año VII, núm. 2.
6) *Algunas cuestiones de Mecánica de flúidos.* «Revista de Aeronáutica», 1943.
7) *Una exposición del teorema de Kutta-Joukouski y una regla general para el cálculo de la circulación alrededor de un perfil con punta.* «Revista de Ingeniería Aeronáutica», 1951.
8) *Sobre programación lineal.* Conferencia pronunciada el 6-IV-54 en el ciclo organizado por la Escuela de Estadística. En curso de publicación.
9) *El método del simplex de la programación lineal.* «Revista de Ciencia aplicada», 1954, págs. 481-492, y 1955, págs. 133-136.
10) *Una aplicación de las aproximaciones diofánticas a la ecuación funcional* $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$. Publicaciones del Instituto de Matemática de la Universidad del Litoral. Rosario (Argentina), vol. VI.

VI. Cuestiones elementales.

1) *Areas y sentidos de las figuras planas.* «Revista Matemática Hispano-Americana», 1931.
2) *Aproximación asintótica de algunas series e integrales.* «Revista Matemática Hispano-Americana», 1931.
3) *Una demostración del teorema de Bolzano Weierstrass.* «Revista de la Universidad de Madrid», t. II, fasc. II, 1942.

VII. Trabajos de divulgación.

1) *Conceptos del Análisis Matemático.* Congreso de Oporto de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias, 1942.
2) *La obra científica del matemático español D. Ventura de los Reyes Prosper.* «Gaceta Mathematica», 1950.
3) *Lecciones de Análisis Matemático.* 2.º curso, 4.ª tirada, Madrid, 1953.