

**REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE ESPAÑA**

Dando Color a la Computación Cuántica Topológica

DISCURSO LEÍDO EN EL ACTO DE SU RECEPCIÓN COMO ACADÉMICO DE
NÚMERO POR EL

**EXCMO. SR. D. MIGUEL ÁNGEL MARTÍN-DELGADO
ALCÁNTARA**

Y CONTESTACIÓN DE

EXCMO. SR. D. JUAN IGNACIO CIRAC SASTURAIN

EL DÍA 25 DE FEBRERO DE 2026



MADRID

Domicilio de la Academia: Valverde, 22

www.rac.es

*Dedicado a la memoria de mis padres,
Teófilo y Justa*

ISSN: 0214-9540

ISBN: 978-84-87125-95-9

Depósito legal: M-2613-2026

*“Al final uno se termina dando cuenta de que el arte
es el complemento necesario para el equilibrio de la razón”.*
Miguel Ángel

Índice general

Prefacio	6
Agradecimientos	7
Medalla 37	11
Capítulo 1 Introducción	15
Capítulo 2 Perspectivas sobre Computadores Cuánticos en un Futuro Cercano	18
Capítulo 3 La Necesidad de la Corrección Cuántica de Errores	22
3.1 De los Códigos Clásicos de Repetición a los Códigos Cuánticos	22
3.2 Los Códigos Cuánticos: de la Repetición al Entrelazamiento.	23
3.3 Corrección Cuántica de Errores	23
Capítulo 4 El Porqué de la Topología en la Física Cuántica	28
4.1 Nociones Elementales de Topología	28
4.2 Topología en Física Cuántica	31
4.3 Orígenes	33
Capítulo 5 La Topología como una Solución a la Computación Cuántica	34
5.1 El Problema de la Computación Cuántica	34
5.2 Una Solución al Problema de la Computación Cuántica	35
Capítulo 6 Taxonomía de la Computación Cuántica Topológica (CCT)	39
Capítulo 7 Computación Cuántica Topológica Basada en el Estado Fundamental	43
7.1 Introducción	43
7.2 Códigos Estabilizadores Topológicos	46
7.3 2-Colexes: Implementación Topológica del Grupo de Clifford de Operaciones Unitarias	52
7.4 3-Colexes: Computación Cuántica Topológica Universal	63
7.5 Ordenes Topológicos en $D = 3$: Brane-Nets y Branyones	66
7.6 Conclusiones	74
Capítulo 8 Experimentos con Códigos de Color Topológicos	75
8.1 Introducción	75
8.2 Plataforma de iones atrapados para computación cuántica	76
8.3 La Implementación Pionera con Trampas de Iones	77
8.4 Implementación de Quantinuum (Honeywell) con Trampas de Iones	85
8.5 Implementación con Átomos Neutros de QuEra MIT-Harvard	87

8.6	Implementación con Cúbits Superconductores de Google Quantum AI	89
8.7	Ventajas de los Códigos de Color para la Computación Cuántica Tolerante a Fallos .	92
8.8	El Futuro de los Códigos de Color en la Computación Cuántica	93
Capítulo 9	Tecnologías Cuánticas con Códigos de Color Topológicos	95
9.1	Patentes Principales sobre Códigos de Color Topológicos para Computación Cuántica	95
9.2	Conclusión	98
Capítulo 10	Computación Cuántica Topológica Autocorrectora	99
10.1	Consideraciones Generales	99
10.2	Modelos Autocorrectores con Códigos Abelianos	102
10.3	Computación Cuántica Topológica Autocorrectora basada en Anyones	111
Capítulo 11	Deformación de Códigos Topológicos	116
11.1	Motivación	116
11.2	Resolución: Deformación de Códigos Topológicos	118
11.3	Conclusiones	124
Capítulo 12	Más Allá de la Topología: Modelos de Fractón	125
12.1	Preliminares	125
12.2	Modelo X-cubo: Estructura Básica	126
12.3	Excitaciones y Propiedades	128
12.4	Papel de las Simetrías de Subsistema en Códigos Fractón	129
12.5	Degeneración Topológica Subextensiva	130
12.6	Corrección Cuántica de Errores y Umbrales Óptimos	130
12.7	Nuevos Modelos de Fractones	132
12.8	Conclusiones	134
Conclusiones:	Un Esfuerzo Colaborativo	135
Bibliografía		137
Discurso de contestación del Excmo. Sr. D. Juan Ignacio Cirac Sasturain		148

Prefacio

Excelentísima Sra. Presidenta de la Real Academia de Ciencias,
Excelentísimos Sres. Académicos,
Familiares, Amigos, Colegas, Señoras y Señores:

Es para mí un inmenso honor y motivo de profunda alegría comparecer hoy ante esta ilustre corporación como nuevo académico numerario, tras haber tenido el privilegio de servir a la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales como académico correspondiente desde 2010. Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a la Academia por la confianza que deposita en mí al elegirme para formar parte de su claustro de numerarios, consciente de la responsabilidad y el compromiso que ello implica. Asumo esta distinción con gratitud y humildad, y con el firme propósito de contribuir al fomento, la investigación y la difusión de las ciencias, en sintonía con los nobles fines que inspiran la historia y el quehacer de esta Real Academia.

Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero y profundo agradecimiento a don Juan Ignacio Cirac Sasturain por haber aceptado escribir el discurso de contestación en mi ingreso en la Real Academia. Para mí es un honor inmenso contar con la participación de una de las figuras más relevantes y reconocidas internacionalmente en el campo de la información y la computación cuánticas, director de la división teórica del Instituto Max Planck de Óptica Cuántica en Garching y galardonado con los más prestigiosos premios de la ciencia, como el Príncipe de Asturias y el Wolf, entre muchos.

Tuve el privilegio de trabajar junto a Cirac entre 2003 y 2006 en varios artículos publicados en *Physical Review Letters*, que abrieron nuevos caminos en la aplicación de la información cuántica a sistemas cuánticos fuertemente correlacionados, y que recibieron una excelente acogida en la comunidad científica. Nuestra colaboración fue para mí un impulso decisivo, abriéndome puertas y oportunidades, y marcando una de las líneas de investigación con las que más me he identificado y en la que más he trabajado en las dos últimas décadas. Además, he tenido la fortuna de ser investigador invitado en numerosas ocasiones en su división del Instituto Max Planck, donde siempre he encontrado un ambiente de excelencia, creatividad y estímulo intelectual.

Mi encuentro con Juan Ignacio Cirac supuso un punto singular en mi carrera científica. Agradezco profundamente no solo su generosidad y apoyo, sino también la inspiración, la visión y la confianza que siempre ha depositado en mí, y que han sido determinantes en los inicios de mi trayectoria en la computación cuántica. Compartir este momento con él es, sin duda, uno de los mayores honores de mi vida académica.

Quisiera expresar mi más sincero agradecimiento a los excelentísimos señores académicos don Arturo Romero Salvador, don Jon Marcaide Osoro y don Juan Ignacio Cirac Sasturain, quienes han tenido la generosidad y la confianza de proponer mi candidatura para formar parte de esta Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Su confianza y apoyo representan para mí un estímulo y una responsabilidad añadida, y me siento profundamente honrado de contar con el respaldo de tres figuras de referencia en el ámbito de la ciencia, cuyo magisterio y trayectoria admiro profundamente. Especialmente a Arturo Romero le agradezco por su constante ayuda y orientación durante mi etapa como académico correspondiente en la sección de Física y Química de esta Real Academia. Su generosidad, experiencia y dedicación han sido para mí un valioso apoyo, facilitando mi integración y participación activa en las actividades de la sección. Bajo su presidencia de la Sección, he encontrado siempre un referente de compromiso institucional, así como un ejemplo de entrega al servicio de la ciencia y la docencia. Le agradezco profundamente su confianza y su cercanía, que han contribuido de manera decisiva a mi desarrollo académico en el seno de esta corporación.

Deseo expresar mi más profundo agradecimiento al excelentísimo señor don Jon Marcaide Osoro, presidente de la Sección de Ciencias Físicas y Químicas de esta Real Academia, por el impulso decidido y la confianza que ha depositado en mi candidatura para académico numerario. Su apoyo constante, su fe en mi trayectoria y su generosa dedicación han sido determinantes en este proceso. Sin su concurso y su inestimable respaldo, hoy no estaría aquí recibiendo este alto honor. Le debo, por tanto, una

gratitud especial, de la que quiero dejar constancia en este acto solemne.

Quiero dedicar un agradecimiento muy especial a don Alberto Galindo Tixaire, figura fundamental en mi vida académica y científica. Tuve el privilegio de iniciarme en la física como alumno suyo en la licenciatura en la Universidad Complutense de Madrid, y más tarde de colaborar estrechamente como profesor ayudante en sus asignaturas de Mecánica Cuántica y Gravitación y Cosmología. Desde entonces, nuestra relación ha sido una fuente inagotable de aprendizaje, inspiración y amistad. En el año 2000 comenzamos una fructífera colaboración científica que dio lugar a dos artículos pioneros, entre ellos uno en *Reviews of Modern Physics* sobre información y computación cuántica, hoy considerado un clásico, y el primer algoritmo cuántico desarrollado en España en el 2000. Gracias a su impulso y apoyo, en 2004 creé el máster de Información y Computación Cuántica en la Facultad de Ciencias Físicas de la UCM, el primero oficial en Madrid y, probablemente, en España, donde el profesor Galindo ha seguido compartiendo su magisterio y experiencia hasta hace apenas tres años. Además, fue él quien, en 2010, tuvo la generosidad de nominarme como académico correspondiente de esta Real Academia, abriéndome las puertas a este camino que hoy culmina. Siento por Alberto Galindo una profunda admiración y respeto; su ejemplo de rigor, pasión por la ciencia y dedicación a la docencia han marcado de manera indeleble la trayectoria de numerosas generaciones de físicos teóricos en España. Siempre he buscado y valorado su opinión, y le debo un significativo desarrollo en mi camino como científico y docente. Así mismo, agradezco a los académicos que avalaron mi candidatura como Académico Correspondiente, D. Carlos Sánchez del Río, D. Alberto Galindo y D. Antonio Hernando.

Quisiera dedicar un agradecimiento muy especial al profesor don Germán Sierra Rodero, cuya generosidad y visión científica marcaron un punto de inflexión en mi carrera a mi regreso de la Universidad de Princeton en 1994, tras abandonar la teoría de cuerdas. Germán, que también había decidido reorientar su investigación, me brindó la oportunidad de iniciar junto a él una nueva y apasionante línea de trabajo en el estudio de sistemas cuánticos fuertemente correlacionados. Mi actividad científica recibió un impulso decisivo. Juntos trabajamos en el grupo de renormalización de la matriz densidad y los estados de producto de matrices. Nuestra colaboración pionera en Europa durante la década de los noventa abrió caminos en un campo que entonces apenas comenzaba a desarrollarse y que hoy es fundamental en la física teórica. Gracias a su apoyo y entusiasmo, recuperé la ilusión por investigar y afrontar nuevos retos científicos en una etapa en la que estos temas no formaban parte de la corriente principal investigadora. Siempre le estaré agradecido por su confianza, su inspiración y por haber compartido conmigo una etapa tan fructífera y estimulante de investigación conjunta.

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento al profesor don Juan Ramírez Mittelbrunn, quien me aceptó como estudiante de doctorado en una época en la que resultaba especialmente difícil encontrar dirección para una tesis en física teórica. Su confianza y generosidad al brindarme esa oportunidad marcaron el inicio de mi carrera investigadora y fueron decisivas para mi desarrollo científico y personal. Bajo su tutela, no solo recibí una formación rigurosa y un valioso acompañamiento académico, sino también el estímulo y el apoyo necesarios para afrontar los retos de la investigación en un campo tan exigente. Siempre le estaré agradecido por su dedicación, su paciencia y su compromiso

con la formación de nuevas generaciones de físicos teóricos.

Quisiera aprovechar este momento solemne para expresar mi más sincero agradecimiento a los investigadores principales y a todos los miembros del consorcio QUITEMAD (Quantum Information Technologies Madrid), cuyo esfuerzo y dedicación han sido fundamentales para el desarrollo de las tecnologías cuánticas en la Comunidad de Madrid. Desde su creación en 2010, QUITEMAD ha aunado el talento y la excelencia de siete nodos distribuidos entre universidades y centros del CSIC de Madrid, consolidando una red de colaboración científica que ha situado a nuestra región en el mapa europeo de las tecnologías cuánticas.

Gracias al trabajo colectivo de sus integrantes, QUITEMAD ha impulsado avances en computación cuántica, criptografía cuántica, simulación y optimización, sensores y metrología cuántica, así como en la formación de capital humano altamente cualificado, con la lectura de numerosas tesis doctorales y la colaboración con empresas líderes del sector. La labor de QUITEMAD ha sido un verdadero motor de innovación, generando sinergias entre instituciones públicas y privadas, y contribuyendo decisivamente a la captación de fondos competitivos nacionales e internacionales, lo que ha permitido consolidar una infraestructura científica de referencia. Este espíritu de cooperación y excelencia ha sido clave para que Madrid figure hoy entre las regiones punteras de Europa en el ámbito de las tecnologías cuánticas. Me enorgullece haber sido coordinador durante estos años. A todos los que han formado parte de este esfuerzo colectivo, mi gratitud y reconocimiento. El éxito de QUITEMAD es, ante todo, el reflejo del compromiso con la ciencia y la innovación, y un ejemplo inspirador de lo que puede lograrse cuando el talento y la colaboración se ponen al servicio de un objetivo común.

Mi más sincero agradecimiento al Centro Español de Metrología (CEM) y a su director, don José Ángel Robles Carbonell, por haberme abierto generosamente las puertas de su centro e iniciar en 2016 una colaboración que ha sido especialmente enriquecedora para mí. Gracias a esta oportunidad, he podido descubrir de primera mano la importancia y el alcance de la metrología, auténtica base y garantía de rigor en las ciencias físicas y la ingeniería. Mi paso por el CEM me ha permitido comprender el papel fundamental que desempeña la metrología en el desarrollo científico y tecnológico, así como valorar la excelencia y el compromiso de quienes la hacen posible.

Recibo este reconocimiento a mi labor científica plenamente consciente de que es el reflejo de un trabajo colectivo que se ha forjado a lo largo de casi cuarenta años dedicados a la investigación. Quiero compartir este honor con numerosos colaboradores, así como con los estudiantes de doctorado y postdoctorales que me han acompañado en este largo recorrido. Su entusiasmo, talento y dedicación han sido fundamentales en cada uno de los proyectos emprendidos y en cada avance logrado. A todos ellos les debo una parte esencial de este reconocimiento, y les expreso mi más sincero agradecimiento por su compromiso, su esfuerzo y por haber enriquecido mi vida científica y personal.

Al final solo importan las cosas del principio. Y en el principio fueron mis padres. De mi padre Teófilo heredé la creatividad y la curiosidad; de mi madre Justa, la sensatez. Estos y otros valores y principios de mi educación son su mejor herencia. Agradezco su apoyo y confianza durante mis largos estudios. Mis hermanas, Dolores y Susana, y mi cuñado, José Ignacio, continuaron ayudándome siempre como una verdadera familia.

Reservo la mención especial de gratitud para mi compañera, Tina, que me hace feliz día a día y

es mi mejor apoyo para seguir adelante.

Medalla 37

Quiero continuar mi intervención expresando mi más sincero agradecimiento y reconocimiento a quien me ha precedido en la medalla número 37 de esta Real Academia, el profesor don Manuel Aguilar Benítez de Lugo. Es para mí un honor ocupar el lugar que durante tantos años ha dignificado con su magisterio, su rigor científico y su entrega a la investigación.

Manuel Aguilar Benítez de Lugo, nacido en Madrid en 1943, es una de las figuras más destacadas de la física de partículas en España y Europa. Licenciado y doctor en Ciencias Físicas por la Universidad Complutense de Madrid, desarrolló una brillante carrera investigadora vinculada al CIEMAT y a los principales laboratorios internacionales, como el CERN, el Laboratorio Nacional de Brookhaven y el Collège de France. Su contribución a experimentos fundamentales en física de altas energías —desde las cámaras de burbujas del CERN y Brookhaven, hasta el detector L3 del LEP y el CMS del LHC— ha sido decisiva en el avance del conocimiento de la estructura última de la materia. Dirigió la participación española en el Espectrómetro Magnético Alpha (AMS) para la Estación Espacial Internacional, contribuyendo al descubrimiento de fenómenos astrofísicos de gran relevancia.

A lo largo de su trayectoria, el profesor Aguilar Benítez de Lugo ha ocupado puestos de liderazgo científico y de gestión, como director del Departamento de Fusión y Física de Partículas Elementales del CIEMAT (1998-2004) y, posteriormente, Director del Departamento de Investigación Básica (2004-2012). Ha sido vicepresidente del CERN y delegado científico de España en el Consejo de dicho organismo. Ha sido miembro de comités internacionales, fundador y organizador del International Meeting on Fundamental Physics, y primer presidente del Grupo Especializado de Física de Altas Energías de la Real Sociedad Española de Física. Su labor ha sido reconocida con numerosos premios, entre ellos el Premio Nacional de la Real Sociedad Española de Física, la Medalla de la RSEF, el Premio de la Real Academia de Ciencias y el Premio CEOE a las Ciencias.

La figura de Manuel Aguilar Benítez de Lugo representa una contribución excepcional al desarrollo y consolidación del Particle Data Group (PDG) como referencia mundial indispensable en física de partículas. Durante más de dos décadas (1981-2005), fue uno de los físicos responsables de la edición de la prestigiosa Review of Particle Physics y del “Particle Physics Booklet”, publicaciones que se han convertido en la “biblia” de la física de partículas y que han sido citadas en más de 30 000 artículos científicos. Su labor de coordinación y evaluación científica en el PDG contribuyó decisivamente a establecer los estándares internacionales para la compilación, análisis y divulgación de las propiedades fundamentales de las partículas elementales.

Su compromiso con la excelencia científica se ha manifestado también a través de su dilatada colaboración con la Fundación Ramón Areces desde 2010, donde desde 2017 ejerce como miembro del Consejo Científico de Ciencias de la Vida y de la Materia. Esta vinculación le ha permitido contribuir de manera decisiva al prestigio científico de la institución, facilitando la participación de veintiún Premios Nobel, una Medalla Fields y un Premio Abel en las conferencias de la Fundación durante el período 2004-2016. Su gestión ha sido instrumental en el crecimiento del apoyo económico a la investigación, elevando las subvenciones desde 25 000 euros en 2020 hasta los 100 000 euros

previstos para 2025, consolidando así el papel de la Fundación como referente en el fomento de la investigación científica de excelencia en España.

Con más de 700 publicaciones científicas, la dirección de numerosas tesis doctorales y una incansable labor de divulgación y formación, don Manuel Aguilar Benítez de Lugo ha dejado una huella imborrable en la física española y en esta Academia. Su ejemplo y legado constituyen un estímulo y una responsabilidad para quienes seguimos sus pasos.

Así mismo, quiero rendir homenaje a don Joaquín Catalá de Alemany, quien ostentó la medalla número 37 precediendo a don Manuel Aguilar Benítez de Lugo. Su figura representa uno de los pilares fundamentales en la historia de la física en España, y su legado sigue siendo fuente de inspiración para las generaciones presentes y futuras.

Joaquín Catalá de Alemany (Manresa, 1911 – Madrid, 2009) fue físico, meteorólogo, catedrático y académico, pionero de la física de partículas en nuestro país. Tras licenciarse en Ciencias Físicas en la Universidad de Barcelona y doctorarse en la Universidad de Madrid en 1943, inició una brillante carrera académica y científica. Ocupó la Cátedra de Física Teórica y Experimental en la Universidad de Valencia, donde, tras una estancia de investigación en la Universidad de Bristol en 1949, fundó en 1950 el primer grupo de investigación dedicado a la física de partículas en España que dio lugar al IFIC, introduciendo técnicas experimentales innovadoras y promoviendo la colaboración internacional en tiempos difíciles para la ciencia española.

Posteriormente, ejerció la cátedra de Física del Aire en la Universidad Complutense de Madrid y fue elegido académico numerario de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, ocupando la medalla 37 desde 1981 hasta 2000. Su labor fue reconocida con la primera Medalla de la Real Sociedad de Física y Química en 1958, así como con los premios nacionales Alfonso X el Sabio y Juan March, entre otros. El profesor Catalá no solo impulsó la investigación experimental en física nuclear y de partículas, sino que instauró una nueva forma de entender y organizar la ciencia en España, basada en el trabajo en equipo, la internacionalización y la excelencia, sentando las bases de una tradición investigadora que perdura hasta nuestros días.

Topología en la RAC

He podido encontrar un buen número de discursos de ingreso en la RAC donde se trata la topología desde varios puntos de vista y en varias disciplinas: matemáticas, física, química etc. En la sección de Matemáticas enumero los siguientes:

1. D. Ricardo San Juan Llosá. “La abstracción matemática”(1955). El discurso menciona explícitamente las estructuras topológicas, la topología algebraica así como la importancia de la topología en el desarrollo matemático moderno.
2. D. Baltasar Rodríguez-Salinas Palero. “Medidas en espacios topológicos”(1975). El título y el contenido del discurso giran en torno a la topología, especialmente en relación con la teoría de la medida en espacios topológicos.
3. D. Manuel Valdivia Ureña. “Recientes aspectos del análisis funcional”(1977). El discurso trata sobre la topología localmente convexa, la topología tonelada, y otros conceptos topológicos en

análisis funcional.

4. D. José María Montesinos Amilibia. “Nudos, cristales y números: aspectos de la topología de baja dimensión”(1990). El tema central es la topología de baja dimensión, la teoría de nudos y las variedades tridimensionales.
5. D. Fernando Bombal Gordón. “Paradojas y rigor. La historia interminable”(2006). La Topología aparece vinculada a las paradojas históricas de la teoría de conjuntos y del análisis funcional, como la paradoja de Banach-Tarski y los espacios topológicos. Se destaca cómo los problemas y paradojas en espacios topológicos impulsaron el desarrollo del rigor matemático y la axiomatización moderna.
6. D. José Francisco Duato Marín. “Aportaciones al control de congestión en redes de interconexión de alta velocidad”(2019). Aborda aspectos clave de la topología de redes de interconexión en el contexto del control de congestión en sistemas de alta velocidad y redes de comunicaciones.

La noción de topología que usaré en este discurso vinculada a la computación cuántica está relacionada más con la geometría que con el análisis funcional, de modo que es el discurso de D. José María Montesinos el que más cercano está de los desarrollos que expondré en este manuscrito.

En la sección de Física y Química de la RAC, quien más ha hablado de topología en la física y las matemáticas en sus discursos ha sido D. Alberto Galindo Tixaire. Lo hizo en su discurso de ingreso en 1980, y en todas las contestaciones a los discursos de ingreso donde dio la réplica, salvo en el de D. Juan Ignacio Cirac Sasturain:

1. D. Alberto Galindo Tixaire. Discurso de ingreso “No-linealidad en las ciencias de la naturaleza”(1980). Se destaca la importancia de la topología en el estudio de sistemas no lineales, especialmente en la comprensión de la estabilidad, el caos y la dinámica de sistemas complejos. Subraya cómo la topología algebraica y la estructura de los espacios funcionales son herramientas clave para modelar fenómenos físicos y emergentes. Así, la topología se presenta como un lenguaje fundamental en la ciencia moderna para abordar la no-linealidad.
2. *Ibidem*. Discurso de contestación a D. Francisco J. Ynduráin Muñoz, Se destaca la profunda relación entre física y topología, subrayando cómo los avances en teorías físicas modernas —como las teorías de campos, cuerdas y la geometría no conmutativa— han revolucionado la topología de variedades de baja dimensión y han generado nuevos invariantes topológicos, mostrando que la estructura del espacio-tiempo y de la materia requiere herramientas topológicas y geométricas avanzadas para ser comprendida plenamente.
3. *Ibidem*. Discurso de contestación a Juan María Marcaide Osoro, “Explosiones cósmicas”(2007). Se discute el papel de la topología en la forma global de nuestro universo y se pregunta. ¿Es la topología del cosmos observable?
4. *Ibidem*. Discurso de contestación a D. Pedro Miguel Echenique Landiribar, “Dinámica de iones y electrones en sólidos y superficies y pequeñas pinceladas sobre ciencia”(2017). Se destaca el papel de los campos Yang-Mills y su aplicación a problemas de topología en baja dimensión, obtención de nuevos invariantes de nudos, hallazgo de estructuras diferenciales exóticas en $\mathbf{R}^4$, la variedad topológica de los nudos en el espacio 3D y los materiales exóticos con protección topológica.

El profesor Alberto Galindo Tixaire (Zaidín, Huesca, 1934) es una de las figuras más destacadas de la física teórica española y un referente indiscutible en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Su vinculación con la Academia se remonta a 1969 como Académico Correspondiente, alcanzando la condición de Electo en 1977 y de Académico Numerario en 1980. Ejerció la presidencia de la institución entre 2005 y 2009, y de nuevo desde 2012 a 2015, siendo actualmente Presidente de Honor. Galindo ha sido pionero en la modernización de la enseñanza de la física en España, impulsando nuevas disciplinas y métodos didácticos desde sus cátedras en Zaragoza y Madrid. Cofundador y primer director del Grupo Interuniversitario de Física Teórica (GIFT), su labor ha sido fundamental para el desarrollo de la investigación y la formación de generaciones de físicos teóricos en España.

En la Real Academia, su magisterio y liderazgo han dejado una huella profunda. Destaca por su rigor intelectual, integridad y generosidad, valores que ha transmitido tanto en el ámbito académico como en el institucional. Bajo su presidencia, la Academia reforzó su papel como foro de excelencia científica y de diálogo interdisciplinar, abriéndose a los retos de la ciencia contemporánea. Ha contribuido de manera decisiva al avance del conocimiento y a la proyección internacional de la ciencia española. La figura de Alberto Galindo Tixaire en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales es la de un maestro insigne y un presidente ejemplar, cuyo legado sigue inspirando a la comunidad científica y académica.

Capítulo 1 Introducción

Sumario

- ❑ *Computación Cuántica*
- ❑ *Corrección Cuántica de Errores*
- ❑ *Topología*
- ❑ *Computación Cuántica Topológica*
- ❑ *Códigos Topológicos de Color*

La topología¹ es una de las ramas más recientes de las matemáticas y ha profundizado en la rama más moderna de la física teórica: la computación cuántica. En este discurso, haré un planteamiento elemental del papel que juega la topología en la física cuántica y sus implicaciones en los estados exóticos de la materia cuántica. La topología ayuda a resolver el problema esencial de la computación cuántica: combatir su fragilidad para poder beneficiarnos de su enorme potencial. Tras mostrar los códigos topológicos de color y su realización experimental, abordaré los desafíos futuros mediante modelos de fractones que suponen el descubrimiento de nuevas fases cuánticas de la materia, más allá de las fases topológicas conocidas, que fueron reconocidas con el Premio Nobel de Física en 2016.

El título de este discurso me fue inspirado por las palabras de un investigador americano, Andrew Landahl, quien fue de los primeros en investigar las propiedades de los códigos de color topológicos. Cuando comenzó a dar conferencias sobre el tema, hacía una presentación de este tipo: “Señores, hasta ahora hemos trabajado con los códigos de Kitaev, eso es como la televisión en blanco y negro. Ahora hay que estudiar los códigos de color, pues son la televisión en color”.

La computación cuántica allana el camino para dominar los fenómenos cuánticos de una manera sin precedentes, constituyendo una de las predicciones más destacadas de las últimas décadas en la teoría cuántica [1, 2]. Existen diversas vías para alcanzar este objetivo, como la miniaturización de componentes electrónicos [3], que se orienta hacia la creación de dispositivos cuánticos escalables. Sin embargo, para que esto se materialice, es esencial aprender a superar la decoherencia. Teórica y experimentalmente, hay esperanzas de que esto pueda lograrse [4-11], y que eventualmente se convierta en un desafío de ingeniería en la práctica.

Antes de que esto suceda, los conceptos de computación e información cuántica han demostrado ser extraordinariamente fructíferos en diversas disciplinas, como la física, la informática, las matemáticas y la ingeniería. Un ejemplo notable es la incorporación de la topología en la computación cuántica, utilizada para abordar el problema de la decoherencia, dando lugar a la computación cuántica topológica (CCT) [12-17]. Al mismo tiempo, una computadora cuántica no deja de ser un sistema físico; si es topológica, requerirá un tipo específico de sustrato material o fase cuántica de la materia. Esto conecta la CCT con sistemas fuertemente correlacionados en la materia condensada, conocidos como órdenes topológicos (OT) [18-22], que son candidatos naturales para la construcción de tales computadoras cuánticas.

La corrección de errores cuánticos (CCE) es un método que busca eliminar activamente los

¹Este manuscrito no es una obra definitiva, es mi testimonio de casi cuarenta años de investigación, de los cuales más de 25 los he dedicado a la computación cuántica.

errores en el sistema cuántico, resultantes del ruido externo o de operaciones cuánticas imperfectas [23-27]. Esta estrategia se basa en la aceptación de que los errores son inevitables; por lo tanto, debemos enfrentarnos a ellos mediante la detección y corrección. Esta será la estrategia predominante en gran parte de este discurso.

Inicialmente, se pensaba que la CCE era imposible. Surgieron diversos problemas fundamentales que parecían insuperables, tales como: i) la imposibilidad de la redundancia cuántica debido al teorema de no clonación; ii) la existencia de errores de fase en los cúbits que son peculiares del mundo cuántico, junto con errores de inversión del cúbit; y iii) la restricción de leer el estado del cúbit codificado, ya que esto provocaría decoherencia en el sistema lógico. Así, la detección y corrección de errores deben llevarse a cabo sin conocer el estado del cúbit. Todos estos retos aparentemente irremediables se desvanecieron con la introducción de los primeros códigos de CCE. Este desarrollo sugiere que muchas de las cuestiones abiertas y problemas actuales relacionados con la decoherencia podrían encontrar soluciones en el futuro cercano, posicionando la topología cuántica como un enfoque alternativo para proteger los sistemas cuánticos.

Las técnicas de CCE son adecuadas para construir memorias cuánticas o enviar mensajes a través de canales cuánticos ruidosos. Sin embargo, para lograr una computadora cuántica completamente funcional, es necesario ir más allá y adoptar técnicas de computación cuántica tolerante a fallos. La noción de tolerancia a fallos se origina en el reconocimiento de que el propio proceso de corrección es susceptible a errores: podemos introducir fallos durante la codificación, en la medición del síndrome o durante la decodificación. Los errores, en este contexto, se convierten en dinámicos, en lugar de ser estáticos, como se considera en la CCE. Las técnicas tolerantes a fallos [28-30], [31-34] están diseñadas para gestionar errores de manera oportuna, manteniéndolos por debajo de un umbral crítico y permitiendo la realización de una computación cuántica precisa y prolongada. Esta afirmación se respalda con el teorema del umbral, que establece las condiciones necesarias para la computación cuántica tolerante a fallos.

Podemos establecer una analogía entre la corrección de errores cuánticos (CCE) y la computación cuántica tolerante a fallos, por un lado, y la medicina, por el otro. La noción de síndrome de error proviene de la terminología médica, donde también contamos con doctores de verdad, no solo académicos. En este contexto, los errores en una computadora cuántica se asemejan a enfermedades que requieren tratamiento médico. La detección de errores puede ser vista como equivalente al diagnóstico, mientras que la recuperación de errores se asemeja a la administración de medicamentos para sanar la afección. Sin embargo, la computación cuántica presenta desafíos únicos: no podemos interactuar directamente con el estado cuántico para llevar a cabo la detección de errores. En medicina, se permite auscultar un cuerpo sin causar daño, pero en una computadora cuántica, tal interacción destruiría la coherencia necesaria para su funcionamiento óptimo. Por ello, necesitamos algo más que medicina; podría considerarse como la necesidad de algún tipo de “magia” para sortear estos obstáculos. La física cuántica, a menudo percibida como mágica y engañosa, nos ofrece estrategias ingeniosas, como el uso de cúbits ancila, que permiten recuperar información sin interactuar directamente con los cúbits codificados. Este enfoque asegura que ni el entorno ni el proceso de decodificación obtengan información sobre el estado codificado. A lo largo de este discurso, volveré a esta analogía, como en el capítulo 6 y para

explorar la noción de computación cuántica autoprotectora en el capítulo 10.

Al igual que cualquier computadora convencional, una computadora cuántica requiere un sistema físico específico para llevar a cabo sus operaciones. Si se basa en la topología cuántica, es probable que necesitemos un nuevo tipo de fase cuántica de la materia para estabilizar su funcionamiento. Estos potenciales candidatos se conocen como órdenes topológicos (OT), los cuales fueron introducidos en la materia condensada como nuevos paradigmas de sistemas fuertemente correlacionados, que presentan propiedades más allá del modelo estándar de la materia condensada. Este modelo está basado en la Teoría de Líquidos de Fermi (TLF) desarrollada por Landau, complementada por un mecanismo de ruptura espontánea de simetría (RSS), como el que da origen a la superconductividad BCS, además de análisis de grupos de renormalización (GR) en las transiciones de fase cuántica [18].

En resumen, existe una relación significativa entre los códigos cuánticos topológicos y los órdenes topológicos: i) los códigos topológicos en información cuántica son ejemplos de órdenes topológicos, y la búsqueda de estos órdenes en la materia condensada resultará útil para el desarrollo de códigos topológicos; ii) las herramientas de información cuántica, como el formalismo del estabilizador, son valiosas para detectar y caracterizar órdenes topológicos.

De este modo, es evidente que la topología cuántica representa otro ejemplo del enriquecedor diálogo entre la computación cuántica y los sistemas fuertemente correlacionados en la materia condensada, así como en la mecánica estadística y la física de partículas. Esta interacción no solo abre nuevas vías de investigación, sino que también subraya la importancia de abordar desafíos complejos mediante enfoques interdisciplinarios, fomentando un avance significativo en nuestro entendimiento y aplicación de la computación cuántica.

Capítulo 2 Perspectivas sobre Computadores Cuánticos en un Futuro Cercano

Sumario

- ❑ Evolución de la Computación Cuántica
- ❑ Cúbits Físicos y Lógicos
- ❑ Anchura y Profundidad de un Circuito Cuántico

La historia de la aviación es muy ilustrativa para entender cómo pequeños pasos dados de forma continuada y sostenida producen un resultado revolucionario al cabo de unas pocas décadas. En la figura 12.4 podemos ver una secuencia representativa de estos avances. Si tomamos como referencia el primer vuelo de los hermanos Wright, que ocurrió el 17 de diciembre de 1903, éste duró 12 segundos y recorrió una distancia aproximada de entre 36 y 37 metros. Este histórico vuelo fue pilotado por Orville Wright en Kitty Hawk, Carolina del Norte, y la aeronave se elevó a aproximadamente 3 metros sobre el suelo. Estas cifras son pírricas, pero suficientes para demostrar que un vuelo en un planeador se podía realizar de forma sostenible. Y tanto fue así que, en menos de 25 años, Charles Lindbergh cruzó el océano Atlántico sin escalas entre el 20 y el 21 de mayo de 1927 (con importantes precedentes españoles). Este vuelo duró aproximadamente 33 horas y media, cubriendo una distancia cercana a los 5.800 kilómetros desde Nueva York hasta París. A partir de entonces, se pudo desarrollar la aviación comercial y las transacciones comerciales por todo el globo terráqueo. La aviación había demostrado una ventaja logística frente al resto de los medios de transporte conocidos. Algo similar se busca con la computación cuántica y la consecución de una ventaja cuántica sobre los computadores clásicos tradicionales, con la esperanza de que dé lugar a una revolución cuántica que nos proporcione nuevos desarrollos y mejoras tecnológicas. En este sentido, la evolución que conocemos hasta ahora de los computadores cuánticos se asemeja mucho a la evolución de la aviación, y esperemos que el futuro también sea tan exitoso.

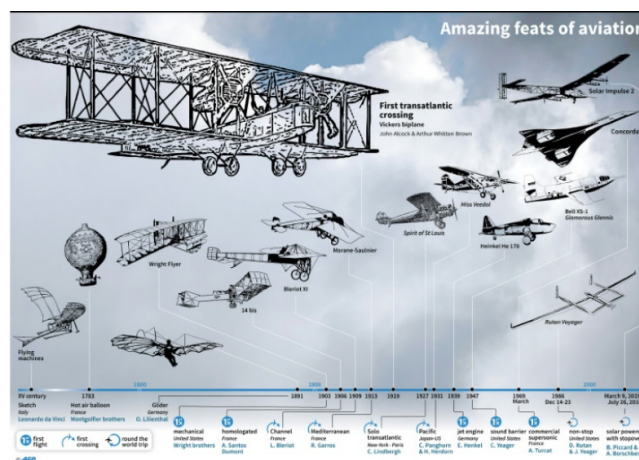


Figura 2.1: Algunos de los hitos de la historia de la aviación que sirven de guía para entender por analogía la evolución de la computación cuántica.

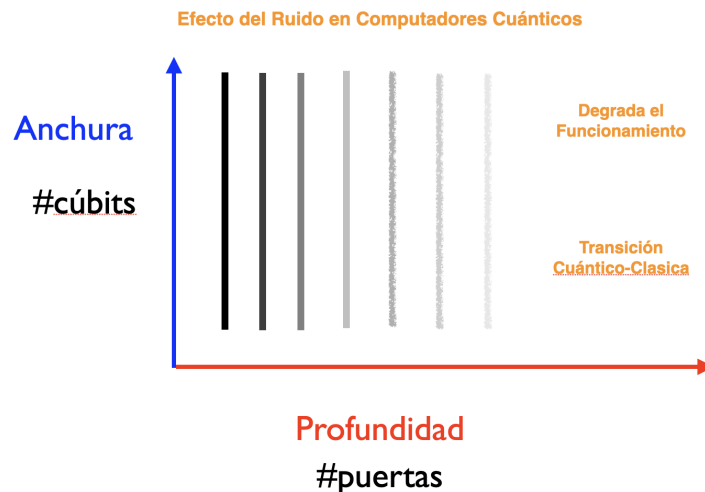


Figura 2.2: Parámetros básicos para caracterizar la bondad de un circuito cuántico hecho de cúbits (vertical) y puertas lógicas (horizontal). A medida que se degradan las propiedades cuánticas del circuito se produce una transición del mundo cuántico al mundo clásico en la dirección horizontal donde avanza el tiempo de ejecución del circuito.

Hasta ahora ha sido habitual evaluar la potencia de los computadores cuánticos actuales mediante el número de cúbits disponibles en su plataforma para ejecutar procesos cuánticos. Sin embargo, esta medida resulta poco útil para determinar la verdadera ventaja cuántica que puede ofrecer un computador. Los cúbits que suelen anunciarse en los medios de comunicación con el lanzamiento de estos dispositivos por parte de las grandes compañías como Google, IBM, etc. son cúbits físicos, es decir, sistemas cuánticos básicos con dos niveles claramente diferenciados.

Definición 2.1 (Cúbit Físico)

Un **cúbit físico** es un sistema cuántico de dos niveles que puede estar en una superposición lineal de dos estados base, típicamente denotados como $|0\rangle$ y $|1\rangle$. Representa la unidad mínima de información en computación cuántica.



Este tipo de cúbit se implementa físicamente mediante diversas tecnologías, como:

- Iones atrapados [2, 9, 35].
- Pares de Cooper en circuitos superconductores [36-38].
- Átomos neutros en redes ópticas [39, 40].

De igual manera, destacan otras plataformas como los cúbits de espín en silicio, cúbits fotónicos, electrones individuales en diamante (centros de vacantes de nitrógeno), cúbits de espín en moléculas, entre otras. Los cúbits físicos son altamente sensibles al ruido y a las perturbaciones del entorno, lo que los hace propensos a perder sus propiedades cuánticas debido a la decoherencia. En todos estos casos, se trata de sistemas cuánticos sin protección frente al ruido externo proveniente del entorno que los rodea; es decir, son computadores cuánticos “desnudos”. Incrementar el número de cúbits físicos desprotegidos hasta cantidades suficientemente grandes no ha resultado ser una estrategia efectiva. Esto se debe principalmente a que el ruido externo termina dominando el sistema, destruyendo sus propiedades esenciales de coherencia cuántica. La corrección cuántica de errores nos enseña que

la figura adecuada para evaluar la calidad real de un computador cuántico es el concepto de “cúbit lógico”.

Definición 2.2 (Cúbit Lógico)

*Un **cúbit lógico** es una abstracción construida mediante la codificación de información cuántica en un conjunto de cúbits físicos entrelazados. Este conjunto sigue un patrón definido por un código corrector de errores cuántico, que protege al cúbit lógico frente a errores y ruido externo.*



Un ejemplo típico de código corrector de errores son los códigos CSS (Calderbank-Shor-Steane) [41, 42]. La redundancia introducida en esta codificación permite recuperar la información lógica incluso si algunos de los cúbits físicos sufren perturbaciones. Los cúbits lógicos son esenciales para construir computadores cuánticos tolerantes a fallos. Sin embargo, el número de cúbits lógicos por sí solo tampoco es suficiente para caracterizar adecuadamente la calidad o robustez de un computador cuántico tolerante a fallos. Es necesario considerar también otro parámetro esencial: la profundidad del circuito.

Cuando representamos gráficamente un circuito cuántico, ubicamos los cúbits en dirección vertical y las puertas lógicas aplicadas en dirección horizontal (temporal) (ver figura 2.2). En esta representación:

Definición 2.3 (Anchura)

*La **anchura de un circuito cuántico** se define como el número total de cúbits físicos involucrados en el circuito.*



En una representación gráfica, esto corresponde al número de cúbits dispuestos a lo largo del eje vertical. La anchura proporciona una medida de los recursos cuánticos necesarios para el circuito, ya que determina cuántos cúbits se utilizan simultáneamente durante la computación.

Definición 2.4 (Profundidad)

*La **profundidad del circuito cuántico** se define como la longitud del camino dirigido más largo desde un cúbit de entrada hasta un cúbit de salida, avanzando en el tiempo a lo largo de los cables de los cúbits.*



Alternativamente, puede entenderse como el número total de pasos temporales necesarios para ejecutar todas las puertas en el circuito, donde las puertas que actúan sobre conjuntos disjuntos de cúbits pueden aplicarse en paralelo durante un solo paso temporal. La profundidad mide la complejidad secuencial del circuito e indica cuántas capas de operaciones son necesarias para completar la computación. La profundidad no es necesariamente igual al número total de puertas, ya que las puertas que actúan sobre cúbits independientes pueden ejecutarse simultáneamente. Tanto la anchura como la profundidad son parámetros críticos para evaluar los circuitos cuánticos, ya que influyen en los requisitos de recursos y en la viabilidad computacional dentro de los límites impuestos por el tiempo de coherencia. Por tanto, para evaluar correctamente la potencia real y la capacidad práctica de un computador cuántico es necesario considerar tanto el número efectivo de cúbits lógicos como la profundidad máxima del circuito que puede ejecutarse antes de perder coherencia debido al ruido

ambiental.

Para ilustrar de forma muy directa el estado de los computadores cuánticos ruidosos actuales suelo compararlos con un coche Ferrari. Como el Ferrari, el computador cuántico es teóricamente una máquina extraordinariamente potente. La gran paradoja es que son a la vez potentes y frágiles. Un computador cuántico actual es como un Ferrari que arranca con su poderoso motor pero que cuando se pone a andar pronto se queda sin gasolina y se para. Esta analogía ilustra los dos parámetros en la figura 2.2: anchura como medida de la potencia y profundidad como medida del tiempo de cálculo (que se corresponde con el camino que puede recorrer el Ferrari actualmente si tuviera suficiente gasolina).

Capítulo 3 La Necesidad de la Corrección Cuántica de Errores

Sumario

- | | |
|--|---|
| ☐ Errores Cuánticos de Tipo X, Y, Z | ☐ Síndrome |
| ☐ Propagación de Errores | ☐ Computación Tolerante a Fallos |
| ☐ Corrección Cuántica de Errores | ☐ Teorema del Umbral |

3.1 De los Códigos Clásicos de Repetición a los Códigos Cuánticos

Expondré brevemente la base de la corrección de errores clásicos mediante los códigos de repetición, para luego apreciar la magnitud de la revolución que supuso la llegada de los códigos cuánticos y, en particular, de los códigos topológicos y de color. El método más simple para corregir errores es el código de repetición clásico. Se basa en la idea de que repitiendo la información de un mensaje se pueden detectar fácilmente los errores, como hacemos cuando tenemos un móvil ruidoso y necesitamos pedir ayuda.

3.1.1 El Número 37 y los Códigos de Repetición

Haré una breve digresión para compartir una curiosidad numérica que conecta con los códigos de repetición. La medalla que recibo con gratitud de la RAC lleva por número el 37, que es uno de los números distinguidos de las matemáticas por ser el duodécimo número primo, solo divisible por 1 y por sí mismo. Además, el 37 es un número primo irregular, un primo cubano, un primo de la suerte, un primo sexy, un primo permutable y un primo de Padovan, lo que le añade un carácter único. El 37 es la mediana de los segundos factores primos de todos los números enteros. Esta afirmación significa que aproximadamente la mitad de todos los números tienen un segundo factor primo menor o igual a 37, mientras que la otra mitad tiene un segundo factor primo mayor que 37. Pero, además, tiene otra propiedad que lo relaciona con los códigos de repetición usados en la corrección clásica de errores: Si tomamos cualquier número de tres cifras iguales (repetidas), como 111, 222, 333, ... 999, todos son múltiplos de 37. Por ejemplo, $111 = 37 \times 3$, $222 = 37 \times 6$, $333 = 37 \times 9$, y así sucesivamente hasta $999 = 37 \times 27$. El 37 es el generador de los números de 3 cifras con dígitos repetidos como en los códigos clásicos con el 000 y el 111.

3.1.2 Telómeros como Códigos de Repetición Biológicos.

Un ejemplo biológico natural de códigos de repetición son los telómeros, estructuras protectoras ubicadas en los extremos de los cromosomas, que salvaguardan la integridad de la información

genética. Los telómeros contienen la secuencia de bases TTAGGG repetida cientos o miles de veces, actuando como una memoria intermedia protectora que absorbe el daño celular sin afectar los genes importantes. Cada división celular elimina entre 100 y 200 pares de bases teloméricas, pero no genes funcionales, y la enzima telomerasa restaura las repeticiones perdidas en células madre y germinales. Esto es de facto una corrección clásica de errores. De manera análoga, en la corrección cuántica de errores, los cúbits físicos absorben errores sin corromper el cúbit lógico.

3.2 Los Códigos Cuánticos: de la Repetición al Entrelazamiento.

Los códigos cuánticos de corrección de errores representan una generalización revolucionaria donde el entrelazamiento cuántico sustituye a la repetición clásica como mecanismo de protección de la información. Este cambio de paradigma es lo que permite superar las limitaciones inherentes a los códigos clásicos y abrir la puerta a una computación cuántica verdaderamente robusta. Para comprender la esencia de esta revolución, consideremos un desafío fundamental. Imaginen que tienen un mensaje muy importante que quieren proteger. En el mundo digital clásico, la solución es simple: hacer copias. Si escriben “HOLA” en tres papeles diferentes, aunque uno se rompa o se manche, siempre podrán recuperar el mensaje completo eligiendo la versión que aparezca más veces. Pero en el mundo cuántico, esta estrategia aparentemente obvia se enfrenta a una barrera infranqueable. La naturaleza cuántica impone una regla férrea: no se pueden hacer copias exactas de información cuántica desconocida y arbitraria. Es como si tuvieran una carta secreta escrita con tinta invisible que se desvanece en el momento en que intentan fotocopiarla. Esto sucede porque la información cuántica existe en superposición - puede ser múltiples cosas a la vez. El acto mismo de intentar “leer” esta información para copiarla la destruye, colapsándola a un solo estado. Es un callejón sin salida fundamental. Ante este desafío, en computación cuántica se tuvo una revelación extraordinaria: si no puedes copiar, entrelaza. En lugar de crear múltiples copias independientes, creamos correlaciones cuánticas fortísimas entre partículas separadas. Estas partículas quedan “entrelazadas” - conectadas de forma tan profunda que conocer el estado de una te dice instantáneamente algo sobre las demás, sin importar la distancia que las separe.

3.3 Corrección Cuántica de Errores

Los circuitos cuánticos son extremadamente susceptibles a errores debido a la naturaleza frágil de los cúbits, que están influidos por el ruido ambiental, la decoherencia y las imperfecciones en las operaciones de las puertas lógicas aplicadas en los circuitos. A diferencia de los errores clásicos, los errores cuánticos pueden propagarse a lo largo del circuito, amplificando su impacto y comprometiendo la computación. Dos tipos comunes de propagación de errores son los *errores X hacia adelante* (errores de inversión de cúbit que se propagan hacia arriba, ver figura 3.1) y los *errores Z hacia atrás* (errores de inversión de fase que se propagan hacia abajo), que ocurren principalmente en circuitos con puertas de entrelazamiento como la CNOT. Son varias las razones por las que ocurre la propagación de errores:

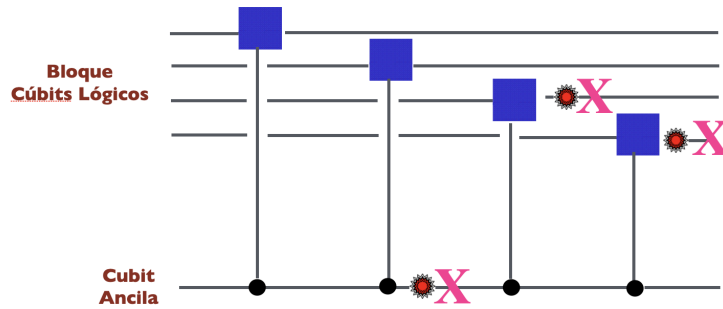


Figura 3.1: Propagación de errores en un circuito cuántico. En este caso, son errores de tipo inversión de cúbit ($|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$) representados por la matriz X de Pauli. Un error X en el cúbit ancila (abajo) se propaga al cúbit de control en el bloque lógico (arriba).

- *Entrelazamiento y acoplamiento entre puertas:* En los circuitos cuánticos, las puertas como la CNOT crean entrelazamiento entre cúbits. Este acoplamiento permite que los errores se propaguen de un cúbit a otro. Por ejemplo:
 - Un *error X* (inversión de bit) en un cúbit de control (ancila) de abajo se propaga hacia arriba al cúbit objetivo (bloque lógico o código) durante una operación CNOT.
 - Un *error Z* (inversión de fase) en un cúbit objetivo (bloque lógico o código) se propaga hacia abajo al cúbit de control (ancila).
- *Superposición e interferencia:* Los estados cuánticos de los cúbits existen en superposición, lo que los hace sensibles incluso a pequeñas perturbaciones. Cuando los errores se propagan, pueden interferir con otras operaciones, causando fallos en cascada a lo largo del circuito.

La propagación de errores aumenta significativamente la probabilidad de errores en múltiples cúbits, que son más difíciles de detectar y corregir. Sin estrategias efectivas para mitigar estos problemas, las computaciones cuánticas pueden volverse rápidamente poco fiables, haciendo inútiles incluso algoritmos simples.

La corrección de errores cuánticos (CCE) es esencial para abordar la propagación de errores y garantizar computaciones cuánticas robustas. La CCE funciona codificando cúbits lógicos en múltiples cúbits físicos utilizando redundancia cuántica en la forma de entrelazamiento cuántico y códigos específicos diseñados para detectar y corregir errores según las siguientes operaciones:

- *Detección de errores sin colapsar los estados:* La CCE utiliza cúbits auxiliares y verificaciones de paridad para identificar discrepancias causadas por errores propagados sin medir directamente los frágiles estados cuánticos. Esta es la “magia” de la que hablaba en el capítulo 2.
- *Corrección de errores:* Una vez que se detecta un error (por ejemplo, mediante mediciones del síndrome), se aplican operaciones correctoras como puertas Pauli (X , Y , Z) para restaurar el estado lógico.

Por ejemplo, en el código Steane [24] (un código CCE basado en 7 cúbits), un error X que se propaga hacia arriba a través de puertas CNOT puede identificarse mediante la medición de cúbits auxiliares. Esta medición, llamada síndrome, revela la ubicación del error, permitiendo aplicar operaciones correctoras.

Definición 3.1 (Síndrome)

Un **síndrome** es un patrón de resultados obtenido mediante mediciones específicas en cúbits auxiliares (ancila), que indica la presencia, tipo y ubicación de errores en los cúbits codificados sin revelar ni alterar la información cuántica almacenada.



Estas mediciones se realizan mediante operaciones de estabilizadores, que son operadores cuánticos que comparan estados entrelazados de los cúbits físicos. El síndrome actúa como un “diagnóstico” que permite identificar si ha ocurrido un error de bit-flip (inversión de bit), phase-flip (inversión de fase) o una combinación de ambos, como mostraré en el capítulo 7. La clave del síndrome es que no mide directamente el estado lógico del cúbit, preservando así la superposición cuántica y el entrelazamiento. Esta técnica es esencial para implementar correcciones sin destruir la información, un requisito fundamental en computación cuántica tolerante a fallos.

La computación cuántica tolerante a fallos se basa en la CCE asegurándose de que el proceso mismo de corrección de errores no introduzca a su vez nuevos errores, ni permita que estos se propaguen aún más. Esto requiere varios ingredientes, entre los que se incluyen:

- **Puertas transversales:** Estas puertas minimizan la propagación de errores al restringir las interacciones entre cúbits correspondientes en diferentes bloques de datos codificados (ver figura 6.2 y capítulo 7).
- **Umrales para tolerancia a fallos:** Los protocolos tolerantes a fallos solo tienen éxito si las tasas de error físico están por debajo de un cierto umbral, garantizando que los errores lógicos disminuyan conforme se añaden más recursos.

El fenómeno de propagación de errores destaca la vulnerabilidad inherente de los circuitos cuánticos y subraya la necesidad de diseños robustos con CCE y tolerancia a fallos. Al mitigar tanto los errores X hacia arriba como los errores Z hacia abajo, estas técnicas aseguran que las computadoras cuánticas puedan realizar cálculos robustos incluso cuando los sistemas escalen hasta millones de cúbits. Sin ellas, la computación cuántica no puede cumplir su promesa de resolver problemas complejos más allá de las capacidades clásicas.

Teorema 3.1 (Teorema del Umbral)

Un computador cuántico puede realizar cálculos arbitrariamente largos y confiables, incluso en presencia de ruido y operaciones imperfectas, siempre que la tasa de error físico por puerta, medición o inicialización de los cúbits esté por debajo de un cierto valor **umbral** p_c .



Mediante la aplicación de esquemas de corrección de errores cuánticos y protocolos tolerantes a fallos, la tasa de error lógico puede reducirse a niveles arbitrariamente bajos con solo un aumento polinómico en los recursos necesarios. Este resultado tiene una serie de implicaciones:

- **Umbral de Tasa de Error (p_c):**
 - Si la tasa de error físico p satisface $p < p_c$, entonces es posible realizar computación cuántica tolerante a fallos.
 - El valor del umbral p_c depende del código específico de corrección de errores y del modelo de ruido. Por ejemplo:

- Los códigos concatenados suelen tener umbrales alrededor de 10^{-4} a 10^{-5} .
- Los códigos topológicos pueden alcanzar umbrales tan altos como 1 % bajo ciertas condiciones.
- *Supresión de Errores:* Por debajo del umbral, los errores se corrigen más rápido de lo que se acumulan. Los errores lógicos disminuyen exponencialmente con el número de capas de codificación o niveles de concatenación.
- *Sobrecarga de Recursos:* Lograr tolerancia a fallos requiere codificar cúbits lógicos en múltiples cúbits físicos utilizando códigos de corrección de errores cuánticos. La sobrecarga crece polinómicamente con el tamaño del cálculo y logarítmicamente con la precisión deseada.
- *Suposiciones:* Para poder obtener estos resultados analíticamente es necesario asumir un cierto modelo de errores que es una simplificación de las condiciones reales, pero es la misma estrategia seguida en la computación clásica, entre las que se encuentran:
 - Los errores son independientes y no están correlacionados ni en el espacio ni en el tiempo. No hay errores correlacionados a gran escala.
 - Existe suficiente paralelismo con computadores clásicos para implementar protocolos tolerantes a fallos.
 - Se dispone de cúbits auxiliares frescos (ancilas) durante la computación.

El teorema demuestra que la computación cuántica robusta es teóricamente posible, incluso con hardware ruidoso, siempre que las tasas de error sean suficientemente bajas. Este resultado forma la base para la escalabilidad en computación cuántica, permitiendo implementaciones prácticas de algoritmos complejos como el algoritmo de factorización de Shor [43], el algoritmo de búsqueda de Grover [44] o de simulaciones cuánticas de Hamiltonianos [45, 46] de interés para la física, la química etc.

Los investigadores que han contribuido al desarrollo del Teorema del Umbral en computación cuántica tolerante a fallos incluyen a Peter Shor que introdujo los primeros protocolos de corrección de errores cuánticos y estableció las bases para la tolerancia a fallos (1996) [28]. Dorit Aharonov y Michael Ben-Or que probaron una versión del teorema del umbral para modelos de ruido específicos, estableciendo formalmente la posibilidad de computación cuántica tolerante a fallos (1997) [47]. Emanuel Knill, Raymond Laflamme y Wojciech Zurek que contribuyeron con pruebas independientes del teorema y desarrollaron métodos prácticos para la corrección de errores cuánticos (1996) [48]. Alexei Kitaev que extendió el teorema al marco de códigos topológicos, como el código tórico, y exploró su aplicación en computación cuántica topológica (1996-2001) [12]. Daniel Gottesman desarrolló herramientas fundamentales como los códigos estabilizadores y protocolos para la implementación práctica de la tolerancia a fallos [49] o John Preskill que contribuyó al análisis teórico de los umbrales y la implementación práctica en sistemas físicos realistas [50]. Estos investigadores han trabajado tanto en los fundamentos teóricos como en las aplicaciones prácticas del teorema, permitiendo avances significativos en la escalabilidad de los computadores cuánticos.

En un código de corrección de errores cuánticos concatenado, el número de cúbits físicos necesarios aumenta exponencialmente con el nivel de concatenación. Si n representa el número de cúbits físicos utilizados por el código base (nivel 0), y L es el nivel de concatenación, el número total

de cúbits físicos necesarios para el código concatenado está dado por la fórmula:

$$N_{\text{físicos}} \approx n^L. \quad (3.1)$$

Para derivar esta relación, se consideran dos ingredientes fundamentales:

- *Código base (Nivel 0)*: El código base requiere n cúbits físicos para codificar un cúbit lógico.
- *Concatenación*: A cada nivel de concatenación, cada cúbit lógico del nivel anterior se codifica usando n cúbits físicos. Este proceso recursivo provoca un crecimiento exponencial en el número total de cúbits físicos.

El aumento en el número de cúbits físicos en un código concatenado es exponencial tanto respecto al nivel de concatenación como al número de cúbits físicos necesarios. Esto se debe a que en cada nivel de concatenación, se utilizan n cúbits físicos para codificar cada cúbit lógico del nivel anterior, aplicando este proceso de manera recursiva.

En este momento hay que hacer una observación crucial: el Teorema del Umbral es un teorema constructivo, se basa en el método de la concatenación de códigos el cual conduce a tasas de error extraordinariamente pequeñas y a recursos exponencialmente altos. A mí me gusta más llamarlo directamente una construcción en vez de un teorema, pero es demasiado tarde. Esta observación me resultó esencial cuando empecé a estudiar corrección de errores cuánticos allá por 2003-04 y consideré la posibilidad de salirse de esa vía concatenada y buscar alternativas. Cuando profundicé en el campo comprobé que tal camino había sido ya considerado por Kitaev en 1997 con sus códigos topológicos. Como mostraré más adelante (capítulo 7), justamente los códigos cuánticos topológicos permiten resolver las malas noticias que nos trae el Teorema del Umbral original.

Capítulo 4 El Porqué de la Topología en la Física Cuántica

Sumario

- ❑ Topología
- ❑ Principio de Superposición
- ❑ Interferencia y Coherencia Cuánticas
- ❑ Entrelazamiento Cuántico

4.1 Nociones Elementales de Topología

El adjetivo topológico tiene un significado de globalidad frente a detalles locales de un objeto. Este adjetivo ilustra el hecho de que una deformación continua (no abrupta) de un objeto material deja sus propiedades globales inalteradas. Etimológicamente, topología viene del griego: $\tau\acute{o}\pi o\varsigma$, ‘lugar’, y $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$, ‘estudio’.

Definición 4.1 (Topología)

La **Topología** es una rama de la Geometría que se ocupa del estudio de las propiedades globales que son invariantes bajo transformaciones continuas.



La Topología es la Geometría sin medidas, sin una métrica. En la Topología, las nociones de distancia, ángulos etc. no existen. La Topología sólo se interesa por las formas, por la Geometría como un todo, en su globalidad.

La Topología es una de las pocas disciplinas de las Matemáticas que no fueron inventadas por los antiguos griegos (como la Geometría, Aritmética, Teoría de Números etc.) o los árabes (el Álgebra). La invención y desarrollo de la topología como disciplina matemática se atribuye a varios matemáticos a lo largo de los siglos. Algunas de las figuras clave son las siguientes:

- *Leonhard Euler (1707–1783)*: Euler es frecuentemente reconocido por sentar las bases de la topología a través de su trabajo sobre el problema de los *Siete Puentes de Königsberg* en 1736. Este trabajo introdujo conceptos fundamentales como la conectividad y los invariantes topológicos. Además, formuló la famosa fórmula para poliedros:

$$V - E + F = 2, \quad (4.1)$$

que relaciona vértices V , aristas E y caras F de los poliedros.

- *Johann Benedict Listing (1808–1882)*: Listing introdujo el término “topología” en 1847, aunque ya lo había utilizado en correspondencia desde la década de 1830. Su trabajo ayudó a formalizar ideas topológicas, distinguiéndolas de la geometría clásica.
- *Bernhard Riemann (1826–1866)*: Riemann extendió la topología a dimensiones superiores e introdujo el concepto de variedades, que se convirtió en una base fundamental para la topología moderna.

- Felix Klein (1849–1925) realizó importantes contribuciones a la topología, destacando la introducción de la botella de Klein en 1882, una superficie no orientable con propiedades únicas que desafían la intuición geométrica. Este objeto es clave en el estudio de espacios topológicos y simboliza su enfoque innovador en matemáticas.
- Enrico Betti (1823–1892) realizó contribuciones fundamentales a la topología como su “Erlangen Program”(1872). Es conocido por introducir los números de Betti [51], que miden la conectividad de una variedad y son esenciales en la teoría de homología. Su trabajo sentó las bases para el desarrollo posterior de la topología algebraica, influyendo en matemáticos como Henri Poincaré.
- *Henri Poincaré (1854–1912)*: Poincaré es considerado uno de los fundadores de la topología moderna. Su obra *Analysis Situs* (1895)[52] introdujo conceptos clave como homotopía y homología, que son esenciales en la topología algebraica. También formalizó muchas ideas previas dentro de un marco coherente.

Estos matemáticos contribuyeron colectivamente a transformar la topología desde sus inicios en tiempos de Euler hasta su forma moderna a finales del siglo XIX y principios del siglo XX.

John L. Kelley describió humorísticamente a un topólogo como “alguien que no sabe la diferencia entre una taza de café y un donut”[53]. Esta afirmación refleja la idea fundamental en la topología de que los objetos se consideran equivalentes si pueden transformarse uno en otro mediante deformaciones continuas, como estiramientos o doblados, sin romper ni pegar. Esto ilustra el concepto de homeomorfismo, que es central en la topología. De esta manera, se representa a un topólogo como una especie de persona ignorante que no puede distinguir entre una taza y un chupete, cuando incluso un niño podría hacerlo. Pero un topólogo sabe mucho sobre el entrelazamiento de superficies toroidales. Esto se pone bien de manifiesto con el desafío representado en la Fig. 4.1, conocido como una “paradoja toroidal”[54]. Aquí vemos una posición inicial con un toro de género 2 entrelazado a un toro de género 1. Parece imposible alcanzar la otra situación en la que el 2-toro ha sido parcialmente desenredado del 1-toro. Es decir, utilizando las reglas de la topología basadas únicamente en transformaciones suaves de los objetos, que no los cortan en piezas y los vuelven a pegar, parece que este problema es irresoluble¹. Sin embargo, un topólogo con su “ignorancia” puede hacer el trabajo en

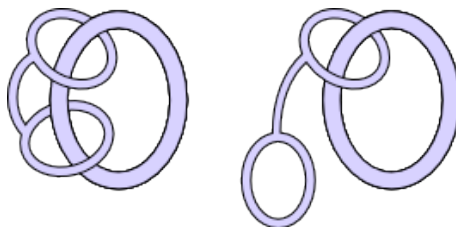


Figura 4.1: Un ejemplo de una paradoja toroidal. Partiendo de los toros entrelazados a la izquierda, parece imposible que la situación a la derecha pueda alcanzarse utilizando solo las reglas de la topología (ver Fig. 4.2).

varios pasos sin violar las reglas de la topología, como se muestra en la Fig. 4.2. Así, “la ignorancia

¹Alejandro Magno hubiese resuelto este problema con su espada como hizo cortando el nudo gordiano pero esto viola las reglas de la topología y nuestro topólogo tiene una solución mejor.

puede ser una fuente de conocimiento”,... al menos en manos de un topólogo. Cabe mencionar que la noción de entrelazamiento, que ahora está tan ligada a la mecánica cuántica, tiene un origen clásico muy relacionado con el entrelazamiento de toros, hebras u objetos deformables similares que hemos descrito en estas imágenes. Como veremos, lo interesante de emplear la topología a nivel cuántico es que la noción resultante de entrelazamiento topológico de alguna manera unifica ambas nociones de entrelazamiento, clásico y cuántico. Un ejemplo de este hecho es la descripción de los estados fundamentales topológicos como una superposición cuántica coherente de estados representados por una malla o red de estados de cuerdas, entrelazados entre sí como si estuvieran en el espacio real (capítulo 7. (7.49)). Lo que este ejemplo nos enseña es que las propiedades globales permanecen

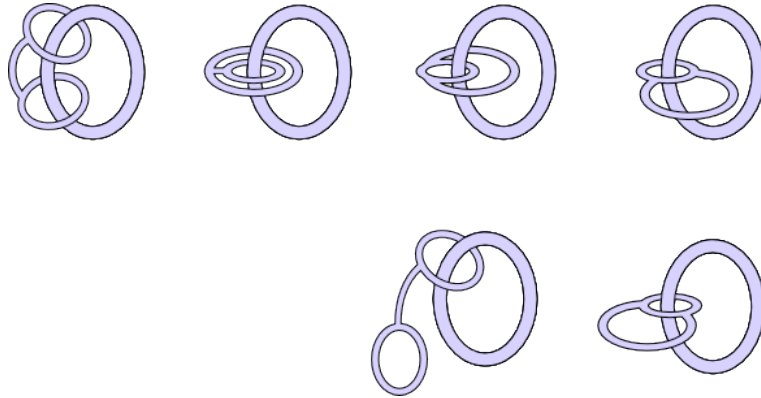


Figura 4.2: Explicación paso a paso de las transformaciones continuas compatibles con las reglas de la topología para disentrelazar los toros en la Fig. 4.1.

inalteradas bajo cambios estructurales locales siempre que no introduzcamos operaciones de corte. Esto es bien conocido en topología. Ahora el desafío es utilizar esta idea para proteger la información cuántica. Para esto necesitamos los siguientes requisitos:

Proposición 4.1 (Requisito 1)

Implementar la topología a nivel cuántico, es decir, no en el espacio real $\mathbb{R}^3$ como hicimos en la paradoja toroidal, sino en el espacio de Hilbert de los cúbits físicos donde queremos almacenar nuestra información.



Proposición 4.2 (Requisito 2)

Codificar cúbits lógicos en propiedades globales de la superficie de manera que puedan ser inmunes a errores, siempre que sean operaciones externas locales.



Como es habitual en computación clásica, no podemos prevenir que el sistema sufra de tipos arbitrarios de errores, y si resultan ser también errores globales, entonces ciertamente causarán daños irreparables a la memoria cuántica topológica. Sin embargo, al ser errores globales, también serán muy poco probables en un modelo de error estándar donde los errores son no correlacionados en el espacio y el tiempo (errores estocásticos): si la tasa de error de un cúbit es, digamos, p , entonces la probabilidad de error será

$$P(E) = p^{N_p}, \quad (4.2)$$

siendo N_p el número de cúbits en error y este número es típicamente grande para un error global, asumiendo que estamos por debajo de un umbral de error p_c . También sucede lo mismo con los errores en computación cuántica y se trata de construir plataformas en los que los errores globales sean tan improbables que sean los errores locales los que juegan el papel dominante. Este es el escenario que consideraré en el capítulo 7.

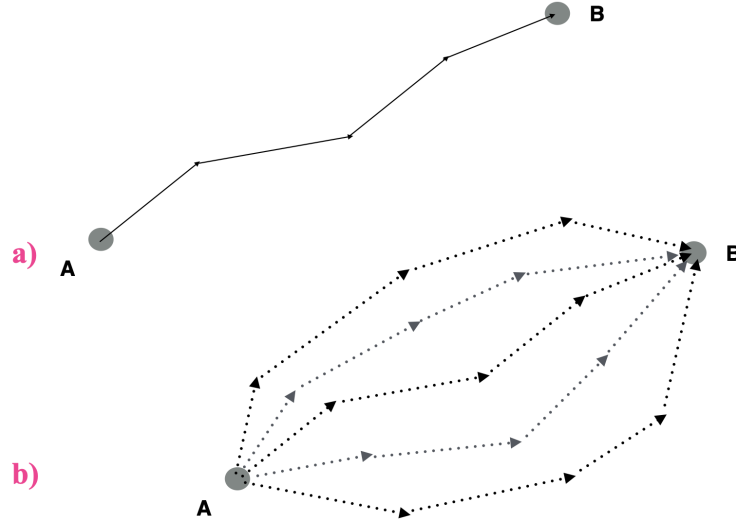


Figura 4.3: a) Propagación de una partícula clásica entre dos puntos A y B del espacio siguiendo el principio de Acción estacionaria. b) Propagación de una partícula cuántica según todas las trayectorias clásicas posibles entre los citados puntos. Cada trayectoria aparece pesada con la fase cuántica construida con la Acción clásica según la prescripción de Feynman.

4.2 Topología en Física Cuántica

Es natural preguntarse porqué los efectos topológicos son más probables en la física cuántica que en la mecánica clásica. Una forma intuitiva de ver las posibilidades de que la física cuántica proporcione efectos topológicos resulta de considerar la formulación de Feynman de la integral de caminos para calcular la amplitud de probabilidad de ir de un punto inicial A a otro final B como se ilustra en la figura 4.3. La formulación de Feynman de la mecánica cuántica no es otra cosa que expresar el experimento de la doble rendija en terminos de la superposición de todas las trayectorias posibles entre dos puntos. Además, hay que pesar cada trayectoria con un factor de fase que se construye con el funcional Acción S que lleva la información de la física (interacciones) del sistema y la constante de Planck $\hbar$. Por el contrario, en la mecánica clásica no hay tal superposición de trayectorias y solo aparece la trayectoria que hace estacionaria a la Acción. De este modo, es aparente que la mecánica cuántica con sus superposiciones permite la exploración de la globalidad del espacio de estados del sistema y esto potencialmente puede conducir a efectos topológicos, aunque por sí solo no está garantizado: no todo fenómeno cuántico es topológico.

Según el principio de superposición de la mecánica cuántica, la función de onda $|\Psi(t)\rangle$ se expresa

como una suma sobre una base discreta de estados $|x_i\rangle$ [55]:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_i \psi(x_i, t) |x_i\rangle, \quad (4.3)$$

donde $|x_i\rangle$ son los autoestados del operador posición X y $\psi(x_i, t) = \langle x_i | \Psi(t) \rangle$ representa la amplitud de probabilidad en la representación discreta de posiciones. De manera similar, la función de onda $|\Psi(t)\rangle$ se puede expresar como una suma sobre una base discreta de estados $|p_j\rangle$:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_j \phi(p_j, t) |p_j\rangle, \quad (4.4)$$

donde $|p_j\rangle$ son los autoestados del operador momento P y $\phi(p_j, t) = \langle p_j | \Psi(t) \rangle$ representa la amplitud de probabilidad en la representación discreta de momentos. Y así podríamos continuar con otras superposiciones que pueden incluir estados internos del sistema no necesariamente espacio-temporales.

Los efectos topológicos son más probables y naturales en la física cuántica que en la mecánica clásica debido a diferencias fundamentales como el principio de superposición, pero hay más razones principales. Aquí enuncio algunas de las más relevantes:

1. Función de Onda y Principio de Superposición.

En la mecánica cuántica, las partículas se describen mediante funciones de onda, que codifican tanto la amplitud como la información de fase (4.3), (4.4). Esta sensibilidad a la fase permite que los sistemas cuánticos exhiban efectos de interferencia que dependen de la topología del espacio por el que se mueve la partícula. Por ejemplo, el *efecto Aharonov-Bohm* demuestra cómo una partícula cargada adquiere un cambio de fase al atravesar una región con un potencial vectorial electromagnético, incluso si no pasa por una región con un campo físico. Este efecto es inherentemente topológico porque depende de las propiedades globales del camino tomado por la partícula, en lugar de las propiedades locales del campo. En el capítulo 10 mostraré cómo usar estas fases topológicas para hacer computación cuántica topológica por medio de anyones no-abelianos (ver figuras 10.2, 10.3). En contraste, la mecánica clásica carece de cantidades sensibles a la fase como las funciones de onda, por lo que los efectos topológicos como la interferencia están ausentes.

2. No-Localidad y Potenciales de Gauge.

La mecánica cuántica incorpora potenciales gauge (por ejemplo, potenciales electromagnéticos) como entidades físicamente significativas, incluso cuando no son directamente observables. Estos potenciales influyen globalmente en la fase de los estados cuánticos, habilitando fenómenos como invariantes topológicos y fases de Berry. Por otro lado, la mecánica clásica solo considera las intensidades locales de los campos (por ejemplo, campos eléctricos y magnéticos), que no exhiben efectos topológicos porque dependen únicamente de propiedades locales.

3. Coherencia Cuántica y Entrelazamiento.

La coherencia cuántica y el entrelazamiento permiten que los sistemas cuánticos exploren topologías no triviales en el espacio de Hilbert, dando lugar a fenómenos como las estadísticas no abelianas en los anyones (cuasipartículas utilizadas en computación cuántica topológica). Estos efectos dependen del principio de superposición y del entrelazamiento, que no tienen contrapartes en la mecánica clásica.

Los efectos topológicos surgen naturalmente en la física cuántica debido a su dependencia en funciones de onda, potenciales gauge no-localidad e invariantes globales; características ausentes en la mecánica clásica. Estos efectos tienen profundas implicaciones para entender fenómenos cuánticos como las fases topológicas de la materia, estados de borde robustos y efectos de interferencia, todos ellos críticos para tecnologías avanzadas como la computación cuántica y la espintrónica.

4.3 Orígenes

Al introducir la paradoja toroidal, figura 4.1 he querido rendir homenaje a mis estudios de topología que inicié durante mi tesis doctoral sobre teoría de cuerdas (1987-1991) [56] bajo la dirección del Prof. Juan Ramírez Mittelbrunn. Durante aquellos años estudié muchísimos libros de topología y de superficies de Riemann para sus aplicaciones en teoría de cuerdas. Pero también estudié teorías cuánticas de campos topológicas. Estas tenían una propiedad que las diferenciaba notoriamente de las teorías cuánticas de campos habituales que había estudiado durante mi licenciatura, como los campos escalares o la electrodinámica cuántica. En las teorías topológicas todo se podía calcular analíticamente y las funciones de correlación (amplitudes de colisión entre estados de partículas) se expresaban como invariantes topológicos. Estos a su vez, eran números de intersección de invariantes de nudos que aparecían en la teoría. Lo ventajoso de estas teorías es que se podían calcular efectos no-perturbativos de forma cerrada: un sueño de la teoría cuántica hecho realidad. Por el contrario, al final todos los resultados físicos se reducían a puros números. Poca física quedaba para analizar. En particular, no había efectos radiativos como en la electrodinámica cuántica que tantos efectos físicos nos proporciona. En definitiva, esta topología cuántica conducía a “nuestro gozo en un pozo”.

Capítulo 5 La Topología como una Solución a la Computación Cuántica

Sumario

❑ Decoherencia y Errores

❑ Una Solución Topológica

5.1 El Problema de la Computación Cuántica

El problema esencial de la computación cuántica es la decoherencia, el ruido externo, los errores en las operaciones. Los sistemas cuánticos son muy frágiles pues tienden a acoplarse al entorno que les rodea perdiendo sus propiedades de coherencia cuántica expresadas en el principio de superposición cuántica (4.3), (4.4). El gran problema es encontrar métodos que hagan robusta la computación cuántica como aparece en el enunciado del Teorema del Umbral 3.1. Consideremos un ejemplo sencillo para ilustrar el problema de la decoherencia. En un sistema de cúbits de iones atrapados como el de la figura 5.1 hay que ser capaces de mantener a cada cúbit en una superposición de los estados electrónicos suficientemente estables $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ formando un estado puro. Para un solo cúbit tendremos un estado $|\Psi\rangle = |\alpha_0|e^{i\varphi_0}|0\rangle + |\alpha_1|e^{i\varphi_1}|1\rangle$. Sin embargo, el acoplamiento inevitable del sistema de iones al entorno hace que efectos de campos residuales, como campos magnéticos, produzcan un efecto de desfase y se pierdan las fases cuánticas φ_0, φ_1 dando lugar a un estado mezcla $\rho = |\alpha_0|^2|0\rangle\langle 0| + |\alpha_1|^2|1\rangle\langle 1|$. Este representa una mezcla estadística clásica donde la información cuántica se ha perdido.

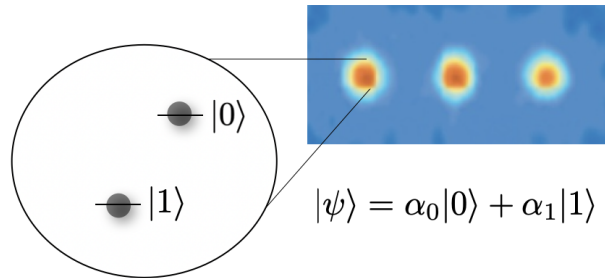


Figura 5.1: Tres iones de un cierto elemento, como el Ca^+ , en una memoria cuántica de iones atrapados. Cada uno de ellos es un cúbit con dos niveles electrónicos suficientemente estables para implementar los estados de la base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ del cúbit.

En la corrección de errores cuánticos, cualquier error arbitrario producido por el entorno en un solo cúbit, como en el caso anterior, puede descomponerse matemáticamente en una combinación lineal de la identidad y las tres matrices de Pauli X, Y, Z . Específicamente, un operador de error arbitrario en un solo cúbit E puede expresarse como:

$$E = c_I I + c_X X + c_Y Y + c_Z Z, \quad (5.1)$$

donde I es el operador identidad y X, Y, Z son las matrices de Pauli. Los coeficientes c_I, c_X, c_Y, c_Z son números complejos determinados al proyectar el operador de error sobre la base de Pauli. Esta

descomposición se ilustra gráficamente por medio de 3 canales de error independientes en la figura 5.2. Esta descomposición es fundamental para la corrección de errores cuánticos porque permite que los errores sean discretizados: medir un sistema ancila apropiado colapsa el conjunto continuo de posibles errores en un conjunto discreto de errores de Pauli. Esta medición auxiliar se denomina el “síndrome” de la definición 3.1. Después de esta medición, el sistema se encuentra efectivamente en uno de estos estados de error discretos, que luego pueden ser corregidos aplicando la operación inversa de Pauli correspondiente. Las matrices de Pauli en computación cuántica se definen de la forma habitual:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

La descomposición en estas matrices aprovecha sus propiedades como una base ortogonal completa para operadores de un solo cúbit bajo el producto interno de Hilbert-Schmidt. Este enfoque se generaliza de manera sencilla a errores en múltiples cúbits utilizando productos tensoriales de matrices de Pauli.

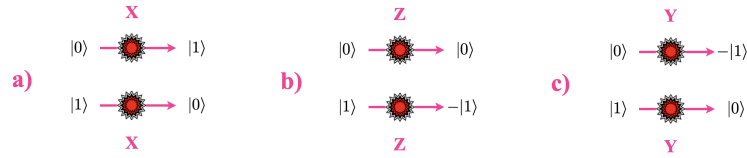


Figura 5.2: Un error arbitrario sobre un cúbit se puede descomponer en 3 canales de error independientes. a) Error de tipo inversión de cúbit X . b) Error de tipo cambio de fase Z . c) Error combinación de inversión de cúbit y de fase Y .

Rolf Landauer es conocido por su escepticismo hacia la computación cuántica y por enfatizar los desafíos que representan los errores y el ruido en los sistemas cuánticos. Landauer destacó que pequeños errores en las computaciones cuánticas podrían acumularse y hacer que la computación falle, como se menciona en su comentario de 1995 titulado “Is quantum mechanics useful?”[57]. Además, sus preocupaciones generales sobre la viabilidad de la computación cuántica debido a la acumulación de ruido y errores son frecuentemente referenciadas en discusiones sobre la corrección de errores cuánticos y la tolerancia a fallos en los primeros días de esta área. Shor se tomó muy en serio esta crítica y se puso manos a la obra para diseñar el primer código corrector de errores cuánticos [23] que abría la puerta a la computación cuántica tolerante a fallos. Obsérvese que la computación cuántica es más proclive a los errores que la computación clásica porque mientras que la primera tiene 3 canales de error para atacarla, la segunda sólo tiene un canal de error (el error de inversión de bit equivalente a X). Si se consigue un método eficiente de combatir los errores cuánticos, entonces su mayor potencial de cálculo será más ventajoso que la computación clásica.

5.2 Una Solución al Problema de la Computación Cuántica

El final del capítulo 4.1 ha sido desalentador. En otras palabras, las teorías cuánticas topológicas y similares eran muy aburridas ya que en su virtud de calcular todo exactamente, estaba también su defecto al no proporcionar efectos físicos de interés. Y sin embargo, hay que reconocer que esas teorías

tienen propiedades maravillosas. Algunos incluso podrían afirmar que son teorías bellas. Para mí la noción de belleza¹ en física es diferente. Me atrevo a proponer la siguiente definición que está basada en la idea de que la Naturaleza es bella:

Definición 5.1 (Belleza en Física)

Una teoría (modelo) es bella si, y solo si, describe a la Naturaleza.



La ventaja de esta definición de belleza sobre otras es que es objetiva, no subjetiva. Así evitamos que cada uno tenga una noción de belleza particular en cuanto a la física se refiere. No en vano, la física es una ciencia natural objetiva. No todo lo natural es bello, pero todo lo bello es natural. Por ejemplo, el principio gauge de las interacciones fundamentales en el modelo estándar de las partículas elementales es una teoría bella porque describe la naturaleza y el comportamiento físico de esas partículas. Por otro lado, las simulaciones cuánticas [58, 59] tienen el potencial de producir teorías bellas a partir de modelos que no lo son. Son una fábrica de belleza.

Con esta guía volvamos a tratar de hacer física con la topología cuántica. La clave para ello va a estar en la noción de aburrimiento que he comentado anteriormente. ¿Habrá alguna manera de sacar una ventaja a ese aburrimiento de las teorías cuánticas topológicas? El lema que suelo utilizar para ilustrar la búsqueda de una salida para esta situación es “emocionarse siendo aburrido”. Se trata de sacar algo emocionante de algo que es aburrido de por sí. Esta situación recuerda a la obra de Pirandello, pero en este caso reformulada como “una solución en busca de un problema”. ¿Qué problema físico podemos resolver con las propiedades aburridas de las teorías topológicas? Precisamente el problema central de la computación cuántica: la decoherencia, su propensión a los errores. Para ello necesitamos combinar la topología con un ingrediente más: la discretización. Recordemos que las teorías cuánticas de campo topológicas aparecieron inicialmente definidas en el continuo del espacio-tiempo. Sin embargo, en la computación cuántica tenemos sistemas cuánticos discretos formados por conjuntos de cúbits. La manera de combinar topología y discretización es mediante redes o retículos de cúbits que tengan propiedades topológicas. Con esta combinación podemos conseguir que la siguiente identificación:

Aburrimiento = Robustez

Y de esta manera sacar partido de las aburridas teorías topológicas para conseguir la robustez necesaria para hacer computación cuántica tolerante a fallos.

La manera concreta de combinar topología y discretización se ilustra en la figura 5.3. En la parte a) se muestra cómo características globales o topológicas como la forma de una taza o donut son robustas, invariantes bajo cambios o perturbaciones locales. En este caso, la perturbación local consiste en una deformación continua del objeto. En la parte b) se muestra una red de cúbits embutidos en un 2-toro. En este caso la deformación toma la forma de ruido que se supone actúa localmente en

¹Sobre la belleza en la ciencia podemos encontrar una magnífica contribución en el discurso de contestación de D. Alberto Galindo al ingreso de D. Pedro Echenique titulado “Ciencia y Belleza”(RAC 2017). El mismo D. Pedro Echenique ha disertado en numerosas ocasiones sobre este tema como en su excelente conferencia invitada titulada “Science. Beauty. Future” (“Ciencia. Belleza. Futuro”) en la sesión ceremonial del congreso anual de la Deutsche Physikalische Gesellschaft (DPG) en Berlín, el martes 19 de marzo de 2024, de 14:30 a 17:00, en el auditorio principal H 0105 (Audimax) de la Technische Universität Berlin.

un reducido número de cúbits. En estas condiciones, la estrategia topológica consiste en guardar la información cuántica en un ciclo (lazo) no trivial que rodea a una de las asas del 2-toro.

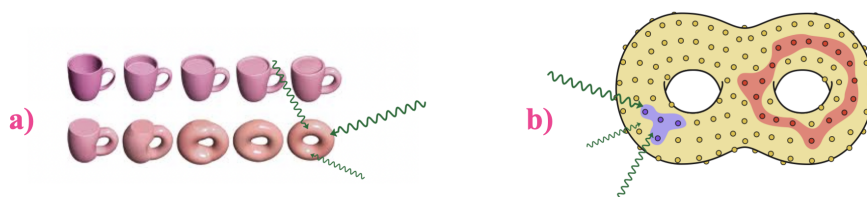


Figura 5.3: a) Deformación topológica para transformar suavemente una taza en un donut. b) Combinación de topología (2-toro) y discretización (retículo de cúbits embutidos en el 2-toro). La acción del ruido es local porque sólo afecta a una pequeña zona del 2-toro (sombreada en azul) relativa a su tamaño global. La información lógica se almacena en un ciclo homológicamente no trivial (en rojo) que se enrosca en una de las asas del 2-toro: la deformación local no cambia la propiedad topológica del ciclo ni sus propiedades cuánticas.

Esta es la idea genial que tuvo A. Kitaev [12]: almacenar la información cuántica distribuida globalmente para protegerla contra el ruido local (débil). En efecto, un ruido local actuando sobre los cúbits del 2-toro de la figura 5.3 b) produce una deformación local del ciclo homológicamente no trivial (en rojo) que está anidado en uno de los agujeros del 2-toro. Esa pequeña deformación continua del ciclo no cambia sus propiedades topológicas, y por ende, no cambia la información lógica que almacena. Esto dejaría de ser cierto si el ruido fuera muy brusco y afectara globalmente al retículo de cúbits. Es razonable suponer que los ruidos muy extensos e intensos se han evitado al construir nuestra plataforma de computación cuántica como ya comenté en el capítulo 5, (4.2), de lo contrario es mejor buscar otra plataforma alternativa. Lo mismo sucede con los computadores clásicos que han sido contruidos con la tecnología del silicio por muy buenas razones para hacerlos robustos.

Con la siguiente analogía podemos comparar la protección topológica de la información cuántica en la figura 5.3 b) con un cúbit físico en ausencia de protección. Pensemos en una película del Oeste con buenos y malos. El cúbit físico (el bueno) se enfrenta a un pistolero (el malo) que le apunta para ejecutarlo. Como es un blanco fijo, al pistolero le resulta muy fácil apuntar y disparar provocando su muerte. Sin embargo, si el cúbit fuera un cúbit lógico con la protección topologica del ciclo homológicamente no trivial, para el malvado pistolero ya no sería un blanco fijo. Por el contrario, el blanco estaría deslocalizado por todo el retículo y provocaría el fallo del asesino. A no ser que el pistolero pudiera disparar sobre todos los cúbits físicos a la vez. Pero ya he dicho que suponemos que nuestra plataforma solo tiene ruido local para que tenga más posibilidades de éxito y sobrevivir al malvado ruido.

Uno de los corolarios del Teorema del Umbral 3.1 en el capítulo 3 eran las malas noticias para los valores del umbral tan extremadamente bajos. Las buenas noticias de la construcción topológica tolerante a fallos es que hay una mejora sustancial de unos 3 ó 4 órdenes de magnitud, típicamente $p_c \sim 10^{-1}, 10^{-2}$. Esto supone una ganancia enorme y un gran respaldo para la computación topológica [60-63]. Como bonus extra, también se arregla el problema de la necesidad exponencialmente creciente de los cúbits físicos en los códigos concatenados.

El número de cúbits físicos necesarios para los códigos topológicos crece cuadráticamente con la

distancia del código, d , que es una medida de la tolerancia a errores del código de corrección cuántica [64]. Geométricamente, esta distancia es una medida del tamaño del código (su retículo). El número de cúbits físicos n requeridos escala con el cuadrado de la distancia d :

$$n \sim O(d^2). \quad (5.3)$$

Esto se debe a la disposición bidimensional del código topológico, donde la distancia d corresponde al tamaño del bloque de corrección de errores.

Capítulo 6 Taxonomía de la Computación Cuántica Topológica (CCT)

Sumario

- ❑ *Códigos Topológicos*
- ❑ *Códigos No-Autocorrectores*
- ❑ *Puertas Lógicas sin Trenzado*
- ❑ *Puertas Lógicas Transversales*

Cuando era un adolescente de unos 11-12 años me entusiasmé por el estudio de los insectos, la entomología. Aprovechaba mi condición de boy scout para en las salidas al campo, cazar insectos muy variados. Lo complementaba con búsquedas en zonas verdes cerca de mi casa. Aprendí a disecar escarabajos (coleópteros), mariposas (lepidópteros) e incluso orugas. Una procesionaria me causó más de un disgusto. Cada orden de insectos requería una técnica apropiada. Cuando estaban disecados y en cajas apropiadas, visitaba el Museo de Ciencias Naturales de Madrid que tenía una magnífica colección y los clasificaba según su orden, familia y especie. Con los métodos de combatir la decoherencia de un computador cuántico también se puede establecer una taxonomía de las diversas alternativas para conseguirlo.

Existen diversos caminos hacia la computación cuántica topológica, es decir, hacia métodos para combatir la decoherencia de manera eficiente. En este contexto, podemos enmarcar nuestro enfoque de información cuántica topológica utilizando un árbol de clasificación que organiza las posibles alternativas para implementar la computación cuántica tolerante a fallos. Este esquema se presenta en la Fig. 6.1. La utilidad de esta visión global radica en destacar la importancia de explorar soluciones creativas contra la decoherencia. Cabe mencionar que la decoherencia no siempre es perjudicial; de hecho, como seres humanos, nuestra existencia es resultado de ella. Durante el proceso evolutivo, la decoherencia nos ha permitido diferenciarnos unos de otros, evitando que seamos una “sopa cuántica” de individuos u “ondas de materia”. Sin embargo, el objetivo actual del computador cuántico es tener un alto grado de control cuántico sobre los estados para transmitir y procesar información de manera eficiente.

Comenzaré describiendo el árbol de decisiones presentado en la Fig. 6.1 y luego exploraré alternativas adicionales. En el primer nivel del árbol, debemos elegir entre dos rutas principales: la computación cuántica topológica o la no topológica. Esta segunda es la forma original de hacer computación cuántica tolerante a fallos utilizando códigos concatenados que ya expliqué en el capítulo 3. Una característica esencial de la concatenación de códigos es que produce esquemas de operaciones lógicas que son no-locales y esto dificulta su implementación experimental, además de los otros males ya comentados (muy bajos umbrales de error y alta demanda de recursos cuánticos). En cambio, la ruta topológica nos ofrece operaciones lógicas que son locales en la superficie del código y los hacen muy atractivos para su desarrollo experimental, juntos con sus mejoras en los umbrales de error y menores requisitos de cúbits físicos (ver sección 5.2).

La siguiente disyuntiva es si optar por códigos autocorrectores o no. Los códigos no autocorrec-

Taxonomía de la Computación Cuántica Tolerante a Fallos

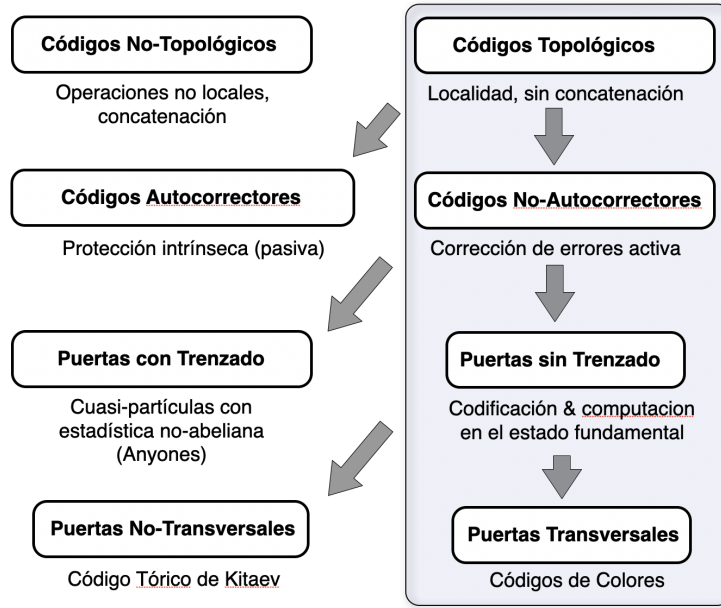


Figura 6.1: El árbol de taxonomía para la computación cuántica tolerante a fallos dentro de un marco topológico. En cada nodo del árbol se abre una posible manera de hacer computación cuántica dependiendo de diferentes elecciones posibles. Además, es posible combinar diferentes hojas para producir más alternativas.

tores son aquellos que necesitan una corrección activa de los errores mediante operaciones externas como ya he explicado. La corrección cuántica de errores externa (no autocorrectora) tiene muchos puntos de similitud con la medicina como he explicado en el capítulo 1. De hecho, la palabra síndrome 3.1 se utiliza en ambas disciplinas. En esta comparación, los errores en los computadores cuánticos juegan el papel de las enfermedades de un paciente en medicina. La detección de los errores y su representación mediante un síndrome (patrón) se corresponde con el diagnóstico médico de la enfermedad cuyos síntomas se recogen también en un síndrome. La curación externa o recuperación del computador de los errores que ha sufrido se corresponde con las medicinas proporcionadas por el médico al paciente para que se recupere de su enfermedad. Sin embargo, hay una diferencia esencial entre ambas disciplinas. En medicina se puede auscultar al paciente directamente, tocándolo con sus manos o con sus aparatos. En cambio, en un computador cuántico no se pueden detectar los errores mediante una medida directa (proyectiva de von Neumann) ya que esa medida destruiría la información lógica almacenada en el código cuántico. La forma de proceder para evitar este problema es mediante el uso de cúbits auxiliares o ancila, los cuales sirven para interrogar al sistema cuántico mediante puertas lógicas condicionales con base en la ancila y con objetivo en el código cuántico. Los cúbits ancila proporcionan la “magia cuántica” para evitar destruir las correlaciones cuánticas que protegen la información lógica en el código cuántico.

Podemos pensar en los códigos autocorrectores siguiendo con el símil de la medicina. Son como seres genéticamente (intrínsecamente) robustos que pueden con las enfermedades sin necesidad de tomar medicinas. No cabe duda de que esta idea es muy atractiva y en el capítulo 10 mostraré varias alternativas para formularlas Siguiendo con el árbol de la taxonomía de la corrección de errores, la

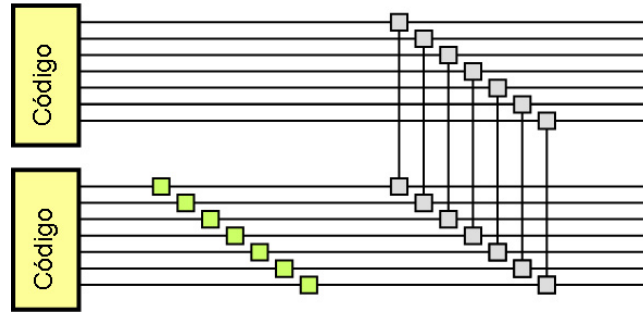


Figura 6.2: Acción transversal de una puerta lógica monaria (izquierda) en un solo código y binaria (derecha) entre dos códigos.

siguiente alternativa consiste en si realizar puertas cuántica mediante el trenzado de cuasipartículas o no. El primer caso conduce a un candidato para realizar computación cuántica autocorrectora que explicaré en el capítulo 10. La mayor parte de mis estudios se han centrado en la otra alternativa que no utiliza propiedades de trenzado de las excitaciones o cuasipartículas (típicamente anyones), sino que por el contrario, utiliza las propiedades topológicas del estado fundamental de un Hamiltoniano topológico que es degenerado. Esta degeneración coincide precisamente con el número de estados lógicos del código topológico y es una propiedad robusta frente al ruido externo local y poco intenso. En este caso, tanto la codificación de estados lógicos como la acción de las puertas lógicas se realiza sobre el estado fundamental y las excitaciones de cuasipartículas, aunque son anyones, corresponden a errores sobre computador cuántico. De hecho, los anyones en este caso son abelianos y no pueden realizar puertas lógicas interesantes (no triviales).

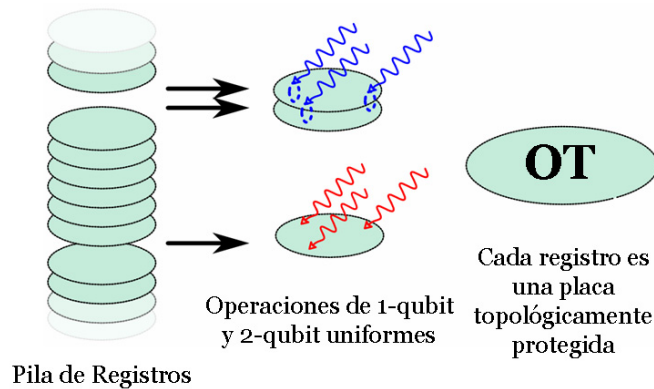


Figura 6.3: Diagrama conceptual de un computador cuántico topológico. A la izquierda se observa una estructura de múltiples capas, donde cada nivel codifica un cúbit lógico con protección topológica. Cada placa representa un cúbit codificado en un código topológico, como uno de Kitaev o un código de color. La sección central muestra cómo las operaciones de uno y dos cúbits se aplican uniformemente, en contraste con los métodos selectivos empleados en los códigos de superficie descritos en la sección 7.2. A la derecha se presenta una capa individual de cúbits físicos que almacena un cúbit lógico topológicamente protegido.

La última disyuntiva que consideraré dentro de los códigos topológicos correspondientes a estados fundamentales de Hamiltonianos topológicos es si las puertas lógicas que pueden aplicarse sobre el código son transversales o no. Algunos códigos estabilizadores están especialmente diseñados para la

computación cuántica. Son los que permiten realizar operaciones lógicas (puertas, medidas, etc.) de forma transversal y uniforme sobre todos los cúbits físicos, como puede verse en la fig.6.2. Actúan de forma independiente sobre los cúbits, cúbit a cúbit. Matemáticamente, las puertas transversales son producto tensorial de la puerta física que se quiere implementar a nivel lógico del código.

La acción transversal de las puertas y medidas evita la propagación de errores entre códigos, y por tanto es útil para implementar la computación tolerante a fallos. Ejemplos de códigos con puertas transversales son los códigos topológicos de color [65-68], mientras que los códigos tóricos originales de Kitaev no pueden implementar el importante grupo de Clifford de puertas lógicas de forma transversal.

Para terminar, daré una imagen intuitiva de una versión de computador topológico representada por la figura 6.3. Se trata de una pila de capas u obleas, unas sobre otras, en las que cada capa representa un código topológico cuántico bidimensional: un retículo de cúbits organizados para albergar el estado fundamental de un Hamiltoniano topológico, como por ejemplo un código tórico de Kitaev o los códigos topológicos de color. Mediante operaciones externas, como láseres, u otra técnica dependiendo de la realización experimental concreta, se pueden ejecutar puertas cuánticas a nivel lógico de modo que cada capa representa un cúbit lógico en sí mismo. No deja de resultar curioso la similitud de esta arquitectura con la disposición de la pila de Volta [69].

La estructura que aparece en la figura 6.3 es una de las posibles configuraciones para un computador topológico basado en las propiedades de los códigos topológicos o en el estado fundamental de Hamiltonianos cuánticos topológicos. Sin embargo, se pueden conseguir plataformas más sofisticadas que eliminen la necesidad de tener apiladas las capas de los cúbits topológicos. En particular conseguimos diseñar [70] un computador topológico con una sola capa y utilizando reconfiguraciones de estructuras de bordes que representan movimientos de los bordes implementando puertas lógicas, como explicaré en el capítulo 11. También lo hemos conseguido extender al caso de órdenes topológicos no-abelianos [71, 72] para implementar computación cuántica universal.

Capítulo 7 Computación Cuántica Topológica

Basada en el Estado Fundamental

Sumario

- ❑ Códigos Estabilizadores Topológicos
- ❑ Códigos de Color en 2D
- ❑ Grupo de Clifford Transversal
- ❑ Códigos de Color en 3D
- ❑ Computación Cuántica Universal
- ❑ Branyones

7.1 Introducción

La corrección cuántica de errores representa uno de los avances fundamentales en el desarrollo de la teoría de información y la computación en entornos cuánticos. Esta técnica esencial garantiza, por ejemplo, que las transmisiones de información cuántica a través de canales afectados por ruido no estén condenadas a fallar. Podemos afirmar que, sin mecanismos de tolerancia a fallos, la computación cuántica permanecería únicamente como un paradigma teórico: aunque conceptualmente revolucionario y potente, carecería de viabilidad para su implementación efectiva en aplicaciones del mundo real.

Ya he comentado en la sección 5.1 que Landauer [57, 73, 74] destacó tempranamente la gravedad del problema de los errores en sistemas cuánticos, subrayando que estos son considerablemente más perjudiciales que los errores presentes en sistemas clásicos. Por su parte, Unruh también señaló los efectos adversos de la decoherencia [75].

Proposición 7.1 (Orígenes Errores)

*Los errores cuánticos tienen al menos tres **orígenes principales**:*

- 1. La decoherencia, que ocurre debido al acoplamiento no deseado entre los datos cuánticos y el entorno que los rodea.*
- 2. Las imperfecciones en las operaciones realizadas por puertas lógicas cuánticas.*
- 3. Las imperfecciones en las mediciones llevadas a cabo durante la ejecución de un algoritmo cuántico específico.*



El desafío de la corrección cuántica de errores inicialmente parecía insuperable, ya que las estrategias clásicas de corrección de errores, basadas en conceptos como la redundancia y la repetición, parecían entrar en conflicto con el teorema cuántico de no-clonación. Además, los errores relacionados con la fase no tienen un equivalente en los sistemas clásicos, lo que implicaba la ausencia de una base teórica previa para abordar estos problemas.

Afortunadamente, las incertidumbres iniciales fueron resueltas con la introducción del primer código de corrección de errores cuánticos, presentado por Shor [23] y, de manera independiente, por Steane [24]. Ambos demostraron explícitamente cómo abordar y superar las dificultades asociadas.

Posteriormente, se desarrollaron códigos cuánticos más generales, conocidos como códigos CSS [25, 26], los cuales están basados en la cuantización de códigos clásicos. Estos códigos son especialmente prácticos porque permiten separar el tratamiento de los errores de tipo bit-flip (inversión de bit) de los errores de tipo phase-flip (cambio de fase). Además, los códigos CSS han demostrado ser herramientas valiosas en otros campos, como en la validación de la seguridad de protocolos de criptografía cuántica, sin necesidad de recurrir a computadoras cuánticas [76].

Los códigos estabilizadores, introducidos por Gottesman [27], constituyen una clase más amplia que incluye a los códigos CSS. En este enfoque, la construcción de códigos cuánticos se formula como un problema dentro de la teoría de grupos finitos. La tarea principal consiste en identificar subgrupos abelianos dentro del grupo de Pauli que preserven invariante un subespacio específico del espacio de Hilbert asociado a los estados físicos. Este subespacio representa los estados lógicos o codificados del código cuántico.

El grupo de Pauli está formado por las matrices de Pauli y sus productos tensoriales, aplicados sobre un conjunto de n cúbits físicos. Estas matrices generan las operaciones necesarias para definir la estructura del código cuántico y su capacidad para corregir errores.

Aunque actualmente contamos con una teoría general sobre la corrección de errores cuánticos, es igualmente crucial disponer de implementaciones concretas de códigos cuánticos para su uso en aplicaciones prácticas. En este contexto, la relación entre el número de cúbits codificados k , conocidos como cúbits lógicos, y el número total de cúbits físicos n , donde $n > k$, resulta fundamental. Los primeros códigos desarrollados por Shor y Steane presentan ratios de 1:9 y 1:7, respectivamente. Además, se ha demostrado que la mejor relación posible para corregir un único error arbitrario es 1:5 [77, 78]. Estos resultados subrayan la importancia de optimizar los recursos físicos necesarios para implementar códigos cuánticos eficaces en sistemas reales.

Un enfoque alternativo para la corrección de errores cuánticos fue introducido por Kitaev [12], conocido como los códigos cuánticos topológicos. De manera independiente, Freedman también exploró la idea de computación cuántica topológica [13]. Este método permite diseñar memorias cuánticas basadas en principios topológicos, las cuales son altamente resistentes frente a errores locales y proporcionan una protección eficaz para los datos cuánticos almacenados [14-17].

Para comprender el concepto de código topológico, es importante recordar primero que la estrategia común en la corrección de errores cuánticos consiste en proteger los cúbits lógicos o codificados distribuyéndolos en un conjunto más amplio de cúbits físicos ($n > k$). Este enfoque se inspira en la idea de redundancia utilizada en los códigos clásicos. En el caso de los códigos cuánticos topológicos, este principio se lleva aún más lejos al codificar los estados cuánticos en los grados de libertad no-locales de sistemas cuánticos altamente correlacionados que presentan orden topológico. Ejemplos de estos sistemas incluyen ciertas teorías gauge definidas en redes [12, 79-81], así como sistemas de materia condensada [82-84], [20-22]. En este contexto, la identificación de órdenes topológicos resulta ser un aspecto clave [85, 86].

Gracias a la codificación no-local, los estados cuánticos codificados son inherentemente resistentes frente a los efectos perturbadores del ruido, siempre que dicho ruido sea de naturaleza local y no afecte las propiedades globales (topológicas) del sistema. El estado fundamental de los hamiltonianos

asociados a estos sistemas presenta un tipo de orden topológico, cuya característica distintiva es la existencia de una degeneración en el estado fundamental que se mantiene estable frente a perturbaciones locales. Esto es posible gracias a la presencia de una brecha (gap) de energía que separa el estado fundamental del resto de los estados excitados en el espectro del hamiltoniano. Además, esta degeneración depende directamente de la topología de la red sobre la cual se define el hamiltoniano del sistema cuántico fuertemente correlacionado. Debido a este orden topológico, dichos estados exhiben propiedades de entrelazamiento cuántico (entanglement) que son especialmente relevantes [87, 88]. De manera intuitiva, el orden topológico puede interpretarse como una forma particular de entrelazamiento de largo alcance que se manifiesta tanto en los estados fundamentales como en los excitados de ciertos sistemas cuánticos.

Proposición 7.2 (Propiedades)

Los códigos cuánticos topológicos poseen otras características que los hacen especialmente interesantes:

1. *Forman parte de la clase de los códigos estabilizadores.*
2. *Los términos de interacción en los hamiltonianos que describen físicamente estos sistemas son locales, es decir, implican únicamente interacciones entre cúbits que son vecinos cercanos.*



La propiedad de localidad mencionada en 2. es crucial, ya que simplifica significativamente la implementación práctica de estos sistemas en redes físicas. Estas interacciones locales son de naturaleza geométrica, por ejemplo, involucran plaquetas del retículo donde se definen los códigos topológicos. En contraste, los códigos estabilizadores no-topológicos suelen ser no-locales en general. Se han propuesto diversas implementaciones prácticas para los códigos topológicos utilizando redes ópticas [89-91], las cuales simulan interacciones entre espines en redes hexagonales [82].

Hasta este punto he discutido ampliamente sobre los códigos cuánticos. En esencia, una memoria cuántica puede entenderse como un código cuántico. Sin embargo, para construir un computador cuántico funcional es necesario ir más allá de este concepto básico. La computación cuántica topológica [12, 92-95] se presenta como un ejemplo destacado dentro del ámbito de la computación cuántica tolerante a fallos [28-34]. Este enfoque está profundamente vinculado a los códigos cuánticos y sus principios fundamentales. En la sección 7.4 introduciré una propuesta innovadora para implementar una computación cuántica que sea tanto universal como topológica. Este modelo busca aprovechar las propiedades de los sistemas topológicos para garantizar la robustez y fiabilidad necesarias en el procesamiento de información cuántica.

Nuestros modelos de sistemas topológicos [65-67] están diseñados utilizando spines con $S = \frac{1}{2}$ que se ubican en los sitios (nodos) de redes o retículos específicos. El número de coordinación, también conocido como valencia, de estos retículos depende tanto de la dimensión D del espacio en el que se encuentra inmersa la red como de la propiedad de ser coloreable. Esta última será explicada en detalle en la sección 7.2.

7.2 Códigos Estabilizadores Topológicos

Una forma de comprender cómo un orden topológico puede ser útil para proteger información cuántica es mediante una comparación con la robustez que presentan los sistemas clásicos de almacenamiento de información. Consideremos un modelo idealizado de disco duro compuesto por un conjunto de spines, todos alineados hacia arriba en un estado ferromagnético. Este sistema puede interpretarse como un código clásico simple de repetición de errores, donde el conjunto de spines codifica un estado de información clásica. En este modelo, los spines interactúan entre sí de manera que el estado de mínima energía corresponde a la alineación ferromagnética completa. Sin embargo, debido a fluctuaciones ambientales, podría ocurrir que uno de los espines se invierta y adopte una orientación opuesta a la de sus vecinos. Este evento representa un error en el código clásico. No obstante, esta configuración es energéticamente desfavorable, y la interacción con los espines circundantes induce que el spin afectado regrese a su posición original (ver fig.7.1). Este proceso constituye una implementación natural del principio de la regla de la mayoría en un código clásico basado en repetición.



Figura 7.1: Ejemplo ilustrativo de una memoria clásica basada en spines con interacción ferromagnética. A la izquierda se observa un error de tipo cambio de bit (bit-flip), mientras que a la derecha el error ha sido corregido automáticamente gracias a la interacción con los spines vecinos.

Este ejemplo pone de manifiesto que los sistemas clásicos poseen mecanismos internos que les permiten proteger la información de manera autónoma: son sistemas autoprotegidos (ver capítulo 10). En particular, los ordenadores clásicos son altamente robustos, ya que la corrección de errores se realiza directamente a nivel de hardware, sin necesidad de depender de procesos externos basados en software. Sus componentes físicos están diseñados para corregir errores automáticamente, sin requerir un procedimiento adicional de detección y reparación.

En el caso de los computadores cuánticos, sería muy beneficioso contar con un mecanismo similar para mitigar los efectos de la decoherencia. Una forma de implementar este tipo de protección es mediante el uso de orden topológico, donde el estado fundamental de un hamiltoniano cuántico con degeneración topológica puede emplearse para construir una memoria cuántica en un computador (ver capítulo 10). Esto se puede entender a través de la siguiente correspondencia:

Hamiltoniano con Orden Topológico		Computación Cuántica
Estado Fundamental	$\longleftrightarrow$	Código Cuántico Corrector de Errores
Excitaciones	$\longleftrightarrow$	Errores
Brecha (Gap) de Energía	$\longleftrightarrow$	Corrección de Errores

Para avanzar más allá del concepto de memoria cuántica y construir un computador cuántico completo, es necesario realizar tareas adicionales además del almacenamiento de información. Entre estas tareas se encuentra la implementación de un conjunto universal de puertas lógicas cuánticas de manera tolerante a fallos. Más adelante, analizaremos cómo estas exigencias provenientes de la

teoría de la información cuántica imponen restricciones significativas sobre los órdenes topológicos que pueden ser utilizados, destacando así la importancia de identificar estos órdenes en sistemas fuertemente correlacionados.

7.2.1 Códigos Estabilizadores

Un código topológico representa un caso particular dentro de la categoría de los códigos estabilizadores. Para comprender esta idea, haré una breve revisión de este concepto.

Definición 7.1 (Código Estabilizador)

Un **código estabilizador** $\mathcal{C}$ de longitud n corresponde a un subespacio del espacio de Hilbert asociado a un conjunto de n cúbits. Este subespacio se define mediante el grupo estabilizador $\mathcal{S}$, compuesto por operadores de Pauli, es decir, productos tensoriales de las matrices de Pauli:

$$|\psi\rangle \in \mathcal{C} \iff \forall O \in \mathcal{S} \quad O|\psi\rangle = |\psi\rangle. \quad (7.1)$$

El grupo estabilizador garantiza que los estados cuánticos pertenecientes al código permanezcan invariantes bajo su acción. Para caracterizar completamente el código, basta con especificar los generadores del grupo $\mathcal{S}$. Por ejemplo:

$$\mathcal{S} = \{ZXXZI, IZXXZ, ZIZXX, XZIZX\}, \quad (7.2)$$

donde las matrices de Pauli se definen como:

$$X := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad Z := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

Definición 7.2 (Normalizador)

Los operadores O , que pertenecen al **normalizador** $\mathcal{N}(\mathcal{S})$ del grupo $\mathcal{S}$, satisfacen la siguiente propiedad:

$$O \in \mathcal{N}(\mathcal{S}) \iff O\mathcal{S} = \mathcal{S}O, \quad (7.4)$$

Estos operadores dejan invariante el espacio del código $\mathcal{C}$. Sin embargo, si no forman parte del grupo estabilizador, entonces actúan de manera no trivial sobre el código.

Un estado cuántico que forma parte del código puede verse afectado por errores. Para corregirlos, se procede a medir un conjunto de generadores de $\mathcal{S}$. El resultado obtenido de estas mediciones se denomina síndrome del error 3.1. Los errores son corregibles siempre que el síndrome permita distinguir entre las diferentes posibilidades de error. Dado que los errores corregibles forman un espacio vectorial, basta con considerar operadores de Pauli como base.

Definición 7.3 (Error Indetectable)

Un error Pauli e se considera **indetectable** si pertenece al conjunto $\mathcal{N}(\mathcal{S}) - \mathcal{S}$. En este caso, el síndrome no proporciona información útil:

$$\forall s \in \mathcal{S} \quad s e |\psi\rangle = e s' |\psi\rangle = |\psi\rangle. \quad (7.5)$$

Definición 7.4 (Error Corregible)

Un conjunto de errores Pauli E se clasifica como **corregible** si, y solo si:

$$E^\dagger E \cap \mathcal{N}(\mathcal{S}) \in \mathcal{S}. \quad (7.6) \quad \clubsuit$$

Algunos códigos estabilizadores están diseñados específicamente para facilitar la implementación de computación cuántica. Estos códigos permiten realizar operaciones lógicas (como puertas y mediciones) de manera transversal y uniforme sobre todos los cúbits físicos, como ilustré en la figura 6.2. La transversalidad en la aplicación de puertas y mediciones es clave, ya que previene la propagación de errores entre los cúbits del código. Por ello, esta característica es especialmente útil para implementar computación cuántica tolerante a fallos.

Definición 7.5 (Grupo de Clifford)

El **Grupo de Clifford** C_n en computación cuántica se define como el conjunto de operadores unitarios que normalizan al grupo de Pauli P_n . Formalmente, para un sistema de n cúbits, se expresa como:

$$C_n = \{U \in U(2^n) \mid U P_n U^\dagger = P_n\},$$

donde:

- P_n es el grupo de Pauli de n cúbits, generado por los operadores tensoriales de Pauli (X, Y, Z) e identidad (I).
- $U(2^n)$ denota el grupo de matrices unitarias de dimensión $2^n \times 2^n$.



Los generadores de este grupo pueden definirse mediante las siguientes puertas lógicas fundamentales:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}, \quad (7.7)$$

donde H corresponde a la puerta de Hadamard, S es conocida como la puerta $\pi/4$, y Λ representa la puerta CNOT. El Grupo de Clifford actúa de manera que un conjunto de cúbits puede ser preparado en un estado cuántico usando solo puertas del grupo, lo que lo hace vital en algoritmos de corrección de errores y en la computación cuántica en general.

Dado un conjunto de n cúbits, el grupo de Clifford está formado por operaciones unitarias que preservan la estructura de los operadores de Pauli bajo conjugación. Estas transformaciones se describen mediante las siguientes relaciones:

$$H X H^\dagger = Z, \quad S X S^\dagger = i X Z, \quad (7.8)$$

$$\Lambda(I X) \Lambda^\dagger = I X, \quad \Lambda(X I) \Lambda^\dagger = X X.$$

$$H Z H^\dagger = X, \quad S Z S^\dagger = Z, \quad (7.9)$$

$$\Lambda(I Z) \Lambda^\dagger = Z Z, \quad \Lambda(Z I) \Lambda^\dagger = Z I.$$

En estas expresiones, las operaciones del grupo de Clifford actúan sobre los operadores de Pauli de manera que preservan su estructura algebraica bajo conjugación. Las relaciones anteriores ejemplifican cómo las puertas lógicas como Hadamard (H), $\pi/4$ (S), y CNOT (Λ) transforman los operadores de

Pauli dentro del marco del grupo Clifford. En particular, estas relaciones representan matemáticamente la propagación de errores entre los cúbits ancila y los cúbits lógicos (ver capítulo 3).

Las operaciones del grupo de Clifford son fundamentales para diversas tareas importantes en información cuántica, tales como la destilación de entrelazamiento cuántico, la teleportación cuántica y la codificación densa. Estas operaciones forman la base de muchas aplicaciones prácticas en el ámbito de la computación cuántica. Por otro lado, los códigos cuánticos Reed-Muller destacan por su capacidad para permitir la implementación de computación universal mediante puertas transversales. Entre estas puertas se encuentran la puerta T y la CNOT:

$$T := S^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}, \quad (7.10)$$

así como mediciones transversales de los operadores de Pauli X y Z . La puerta T es conocida como la puerta $\pi/8$, y su implementación transversal es clave para garantizar la computación cuántica universal con tolerancia a fallos en sistemas cuánticos.

Más adelante exploraré cómo tanto el grupo de Clifford como las operaciones asociadas a los códigos cuánticos Reed-Muller pueden implementarse de manera transversal utilizando códigos topológicos específicos. Estos códigos, que son de tipo códigos de color, están diseñados para sistemas cuánticos fuertemente correlacionados en dos dimensiones espaciales ($2D$) y tres dimensiones ($3D$), respectivamente.

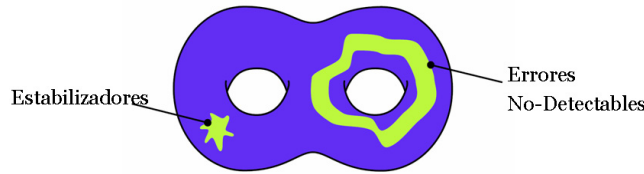


Figura 7.2: Representación de un 2-toro con una red o retículo que se supone embutido en el toro. A la izquierda se muestra un ejemplo de acción local de los operadores estabilizadores del código topológico, mientras que a la derecha se observa la acción de operadores de error globales (topológicamente no triviales) que generan errores no detectables.

7.2.2 Códigos Topológicos

El objetivo a continuación es desarrollar códigos topológicos que posean la propiedad de transversalidad. Esta característica es clave, ya que permite realizar operaciones cuánticas de manera uniforme en todos los cúbits físicos, sin necesidad de operar sobre cúbits individuales, sino aplicando la misma operación a todos simultáneamente. Esto se ilustra en la figura 6.2.

Para introducir el concepto de código topológico, comenzaremos localizando los cúbits sobre una red embutida en una superficie con topología no trivial, como la de un g -toro, donde g representa el género de la superficie (ver fig.7.2).

Definición 7.6 (Código Topológico)

Un código topológico puede definirse como un tipo particular de código estabilizador cuyos generadores son operadores locales y cuyos errores no detectables (u operadores codificados) son topológicamente no triviales.



La noción de operador local hace referencia a aquellos operadores contruidos a partir de cúbits que son vecinos cercanos en la red.

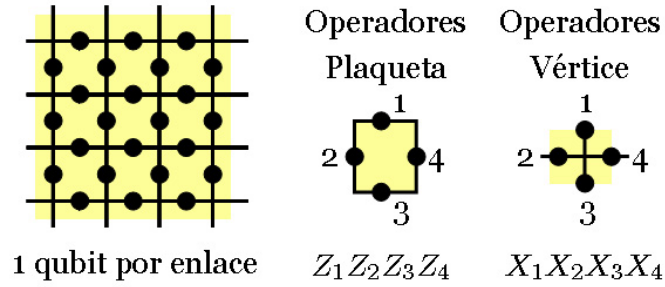


Figura 7.3: Representación de un código tórico (izquierda) junto con sus operadores estabilizadores: de plaqueta (centro) y de vértice (derecha).

Errores No-Detectables

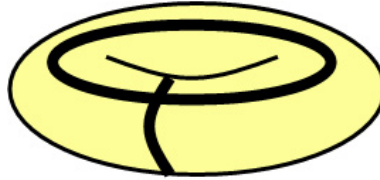


Figura 7.4: Ciclos de homología no triviales asociados a un código tórico con género 1.

Los primeros ejemplos de códigos topológicos desarrollados son los denominados códigos de superficie, los cuales están basados en la homología y cohomología (con coeficientes en el grupo abeliano $\mathbb{Z}_2$) de una superficie. Un caso representativo de código de superficie es el conocido código toroidal de Kitaev (ver figuras 7.3, 7.4).

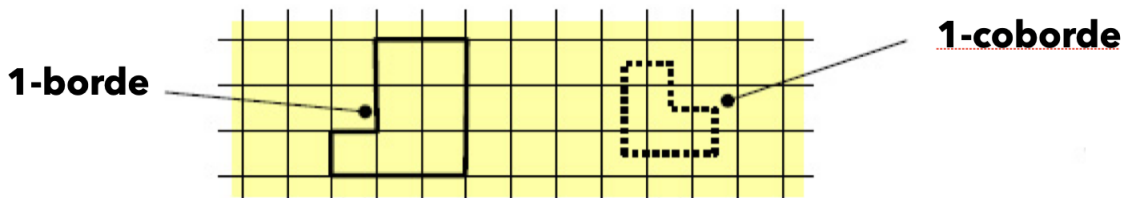


Figura 7.5: Ejemplo ilustrativo de un 1-borde y un 1-coborde en un código toroidal.

El estabilizador $\mathcal{S}$ de un código toroidal está compuesto por los 1-bordes de la red cuadrada directa y los 1-cobordes de la red dual (ver fig. 7.5). Por otro lado, el normalizador $\mathcal{N}(\mathcal{S})$ incluye los

1-ciclos y los 1-cociclos. Los operadores lógicos que pueden codificarse en este tipo de código son $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ y $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2$, como se muestra en la fig.7.6.

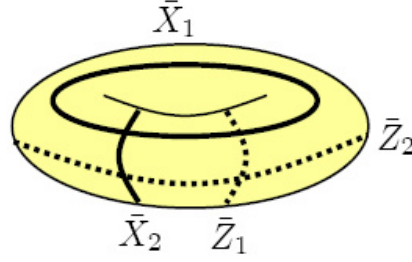


Figura 7.6: Ejemplo de un código toroidal que permite codificar dos cúbits lógicos. Los operadores $\bar{X}$ y $\bar{Z}$ asociados se representan tanto en la red directa (línea sólida) como en la red dual (línea punteada) de una red cuadrada inmersa en un toro de género 1.

La puerta CNOT Λ puede implementarse transversalmente en los códigos de superficie. Para entender esto, primero observamos que la acción bajo conjugación de la puerta CNOT está descrita por las ecuaciones (7.8) y (7.9). Por lo tanto, la acción transversal de la puerta CNOT sobre los operadores de un código de superficie consiste simplemente en replicar cadenas de operadores hacia adelante y co-cadenas hacia atrás (ver fig.7.7), de manera similar a como ocurre la propagación de errores entre ancilas y cúbits lógicos.

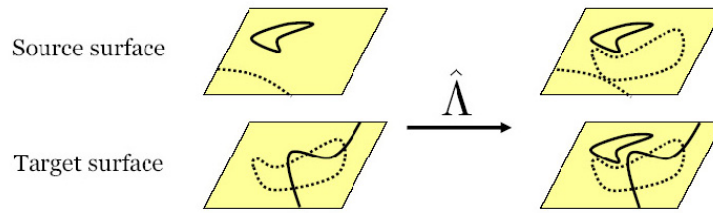


Figura 7.7: Acción transversal $\hat{\Lambda}$ de una puerta CNOT aplicada a dos códigos tóricos. Uno de ellos actúa como fuente (source), mientras que el otro se utiliza como objetivo (target). Por ejemplo, un 1-borde en el código fuente se transmite al código objetivo mediante $\hat{\Lambda}$, ya que está construido con operadores tipo Z sobre los cúbits físicos, según las ecuaciones (7.8) y (7.9).

Para analizar la acción transversal de la puerta CNOT sobre el código, es necesario seleccionar una base de operadores de Pauli para los cúbits codificados o lógicos. En el caso más sencillo, se considera un único cúbit almacenado en una superficie cuadrada con bordes adecuados (ver fig.7.8). La acción de una puerta CNOT transversal en los códigos de superficie también corresponde a una puerta CNOT que opera sobre los cúbits lógicos o codificados. Sin embargo, esta operación es esencialmente la única que puede implementarse en este tipo de códigos de superficie. Con estos códigos no es posible realizar computación cuántica universal, ni siquiera acceder al grupo de Clifford completo. Para lograr implementar puertas más generales y avanzar más allá de las limitaciones impuestas por este tipo de homología, es necesario explorar alternativas más avanzadas como los códigos topológicos de color [65-67].

Dado un código estabilizador topológico, es posible diseñar un sistema físico que exhiba orden topológico, el cual constituye un ejemplo de sistema fuertemente correlacionado. El hamiltoniano de

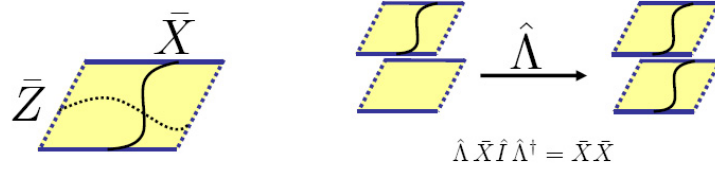


Figura 7.8: A la izquierda se muestra un código de superficie plano con los operadores de cuerda $\bar{X}$ y $\bar{Z}$ asociados al cúbit lógico, que están definidos en una red cuadrada inmersa en el plano (no representada). Los bordes punteados indican terminaciones de enlaces en la red, mientras que los bordes continuos representan enlaces completos. A la derecha se ilustra la acción transversal por conjugación de la puerta global $\hat{\Lambda}$ sobre un operador $\bar{X}$ que cumple con la relación (7.8).

dicho sistema se define a partir de los generadores del código de la siguiente manera:

$$H = - \sum_{O \in \mathcal{S}} O = - \sum_{p \in P} Z_p - \sum_{v \in V} X_v. \quad (7.11)$$

P y V representan el conjunto de plaquetas (caras) y vértices (nodos), respectivamente.

Proposición 7.3 (Propiedades Hamiltoniano Topológico)

Las propiedades más relevantes de este **hamiltoniano topológico** son las siguientes:

1. Es local, ya que las interacciones involucradas se producen únicamente entre cúbits vecinos.
2. Su estado fundamental es degenerado y corresponde al código estabilizador.
3. La degeneración del estado fundamental depende directamente de la topología de la superficie sobre la cual está definido (ej. números de Betti).
4. Existe una brecha (gap) energética en su espectro, que separa el estado fundamental del resto de los estados excitados.



7.3 2-Colexes: Implementación Topológica del Grupo de Clifford de Operaciones Unitarias

La fig.6.3 ilustra un concepto potencial de computador cuántico basado en códigos topológicos. Este diseño consta de una serie de capas bidimensionales superpuestas, cada una funcionando como un registro cuántico protegido por un orden topológico. Una característica distintiva de este enfoque es que las operaciones lógicas sobre los cúbits codificados se realizan de manera homogénea, es decir, sin necesidad de seleccionar subconjuntos específicos de cúbits físicos en cada capa.

Llamamos un 2-colex a un cierto tipo especial de red con la cual construimos nuevos códigos topológicos que llamaremos códigos de color.

Definición 7.7 (2-Colex)

Un **2-colex** es una red bidimensional (2D espacial) trivalente que es 3-coloreable mediante 3 etiquetas o colores que tomaremos como: rojo (r), verde (v) y azul (a). La trivalencia quiere decir que en cada vertice se encuentran tres aristas (ver figura 7.9).



La propiedad de 3-coloreabilidad implica una disposición específica de los colores: cada cara de un color determinado está rodeada exclusivamente por caras de los otros dos colores. Por ejemplo, una cara roja estará adyacente únicamente a caras verdes y azules, sin compartir aristas con otras caras rojas. Este principio se aplica de manera análoga a las caras verdes y azules (véase figura 7.9). Una definición alternativa de un 2-colex puede obtenerse requiriendo que las aristas de la red sean

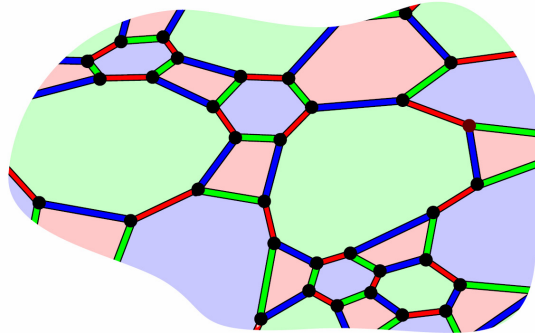


Figura 7.9: Ilustración de un 2-colex: red bidimensional (2D espacial) que exhibe la propiedad de 3-coloreabilidad, utilizando los colores rojo (r), verde (v) y azul (a).

3-coloreables. Esto implica que de cada vértice emergen tres aristas, cada una de un color distinto. La correspondencia entre este coloreado de aristas y el coloreado de caras previamente mencionado se establece estipulando que las aristas de un color determinado solo conecten caras del mismo color, y este principio se aplica de manera análoga para los otros colores. El término 2-colex se deriva

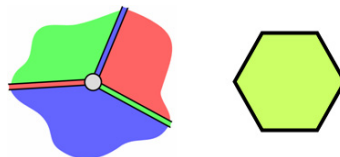


Figura 7.10: Representación de elementos básicos de un 2-colex. A la izquierda se muestra un vértice típico que representa un cúbit. A la derecha se ilustra una plaqueta hexagonal. Los operadores del estabilizador topológico, todos de tipo plaqueta, están definidos por la ecuación (7.12).

de la abreviación de “color complex”, que representa la estructura matemática fundamental de esta construcción. Esta nomenclatura puede extenderse a dimensiones superiores, dando lugar a D-colexes en espacios de dimensión arbitraria.

Proposición 7.4 (Caracterización D-Colex)

*La característica esencial de un **D-colex** es que toda su información topológica está codificada en dos elementos clave:*

1. *Su 1-esqueleto (es decir, la red formada por sus aristas).*
2. *La asignación de colores a dichas aristas o enlaces.*



Estas propiedades permiten una representación completa y eficiente de la estructura D-colex, basada únicamente en estos dos componentes.

Para generar un código topológico de color basado en un 2-colex, se asigna un cúbit a cada vértice de la red coloreada. El estabilizador asociado $\mathcal{S}$ se define exclusivamente mediante operadores de plaqueta, prescindiendo de operadores de vértice. Estos operadores de plaqueta se clasifican en dos categorías, B_f^X y B_f^Z , para cada plaqueta f . En el caso particular de una red hexagonal (ilustrada en la figura 7.10), estos operadores se expresan como:

$$B_f^X := \prod_{f \ni i=1}^6 X_i, \quad (7.12)$$

$$B_f^Z := \prod_{f \ni i=1}^6 Z_i.$$

Donde X_i y Z_i representan las matrices de Pauli X y Z actuando sobre el i -ésimo cúbit de la plaqueta hexagonal. Para entender los códigos de color en dos dimensiones, es fundamental introducir el concepto de operadores de cuerda. Estas cuerdas poseen propiedades topológicas. De manera similar a los códigos de superficie, la homología se define sobre $\mathbb{Z}_2$, lo cual es coherente con la naturaleza binaria de los sistemas cuánticos de dos niveles (cúbits). Sin embargo, estos códigos incorporan un elemento adicional: el color. A modo de ilustración, una cuerda azul se define como un conjunto de enlaces (lados) azules en una red 2-colex (véase figura 7.11). Los operadores de cuerda pueden

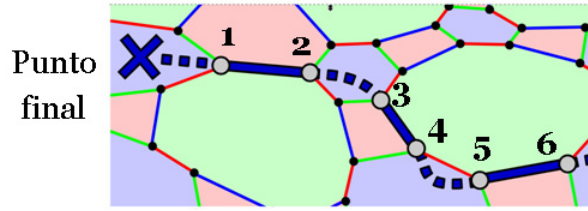


Figura 7.11: Representación de un operador cuerda azul (7.13) en un 2-colex genérico. La cuerda topológica está compuesta por aristas azules, mientras que las líneas discontinuas atraviesan caras azules. Estas líneas se incluyen para mantener la continuidad en la red directa, pero se omitirán en la red reducida auxiliar.

clasificarse en dos tipos principales, análogos a los operadores de plaqueta: tipo X y tipo Z . Estos se pueden representar de la siguiente manera:

$$S^X := \prod_{i \in \gamma} X_i, \quad (7.13)$$

$$S^Z := \prod_{i \in \gamma} Z_i,$$

donde el producto se extiende sobre los cúbits a lo largo de la cuerda γ . Las cuerdas pueden ser abiertas o cerradas. En el caso de cuerdas abiertas, sus extremos (puntos finales o bordes) se ubican en caras del mismo color que la cuerda. Es importante notar que cuando una cuerda tiene puntos finales, el operador de cuerda correspondiente no conmuta con los operadores de plaqueta en esos puntos. Una propiedad fundamental de estos operadores es que pertenecen al normalizador del estabilizador $\mathcal{N}(\mathcal{S})$ si y solo si la cuerda es cerrada, es decir, no tiene puntos finales. Esta característica tiene implicaciones importantes para la estructura del código y la manipulación de la información cuántica codificada.

Es importante notar que estas cuerdas coloreadas tienen una definición precisa en ciertas redes

auxiliares asociadas a las redes coloreadas de tipo 2-colex. Estas estructuras auxiliares, que denominamos *redes reducidas o estrujadas*, se obtienen al contraer un conjunto específico de plaquetas de la red original. Por ejemplo, una red rojo-reducida se genera al comprimir las caras rojas de la red 2-colex hasta convertirlas en puntos, a través de los cuales pasa una cuerda roja (véase figura 7.12). El proceso de compresión o simplificación de un 2-colex puede describirse mediante la siguiente

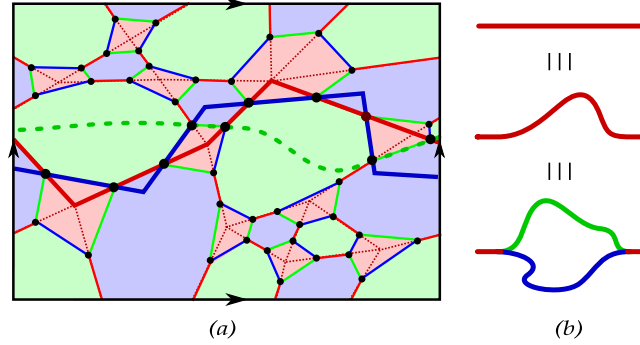


Figura 7.12: (a) Representación de un código de color tipo 2-colex en un toro de género 1. Cada vértice corresponde a un cúbit, mientras que cada plaqueta representa un generador del código estabilizador $\mathcal{S}$. La línea roja discontinua ilustra la red rojo-reducida o estrujada. Las líneas roja y azul representan operadores de cuerda que actúan sobre los vértices que atraviesan. La línea punteada verde muestra un operador de cuerda resultante de la combinación de los operadores de las cuerdas roja y azul. (b) Se muestran dos métodos para modificar la forma de un operador de cuerda rojo: mediante deformaciones homológicamente equivalentes del mismo color, o a través de ramificaciones con los otros dos colores complementarios.

correspondencia entre los elementos de la red original y la red resultante después de la reducción:

$$\begin{aligned}
 \text{Estructura original (2-colex)} &\Rightarrow \text{Red rojo-reducida} \\
 \text{Plaquetas rojas} &\Rightarrow \text{Nodos} \\
 \text{Enlaces rojos} &\Rightarrow \text{Conexiones} \\
 \text{Plaquetas verdes y azules} &\Rightarrow \text{Regiones}
 \end{aligned} \tag{7.14}$$

Los códigos de color presentan una característica distintiva adicional: los operadores de cuerda no solo pueden ser deformados de manera topológicamente equivalente, sino que también pueden experimentar una ramificación cromática. Este proceso permite que una cuerda de un color determinado se divida en dos cuerdas de los colores complementarios, manteniendo la equivalencia operacional antes y después de dicha bifurcación (véase figura 7.13).

La estructura homológica de cada color en estos códigos es análoga a las propiedades homológicas de un código de superficie sin atributos cromáticos. Sin embargo, la innovación radica en la capacidad de combinar operadores de cuerda homólogos de colores azul y rojo para generar un operador de cuerda verde equivalente. Dado que solo dos de los tres colores posibles son linealmente independientes, el número de cúbits lógicos o codificados en estos sistemas debe ser el doble que en un código de superficie convencional. Esta afirmación puede verificarse de manera explícita.

Consideremos una superficie cerrada y apliquemos la fórmula de Euler-Poincaré a cualquiera de las redes reducidas, una por cada color:

$$\chi = V - E + F, \tag{7.15}$$

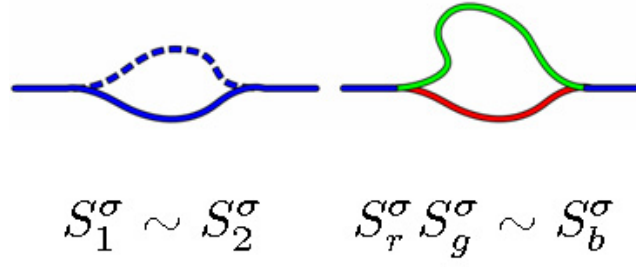


Figura 7.13: Ilustración de las transformaciones posibles en operadores de cuerda. A la izquierda se muestra una deformación topológicamente equivalente de una cuerda azul. A la derecha se ejemplifica una ramificación equivalente utilizando los colores complementarios rojo y verde.

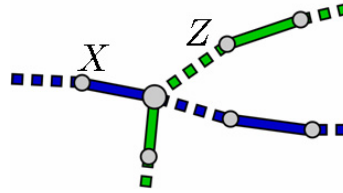


Figura 7.14: Intersección de operadores de cuerda de colores distintos. La anticonmutación (7.19) se produce cuando el número de cruces es impar.

donde V representa el número de vértices, E el número de aristas, y F el número de caras o plaquetas en la red reducida.

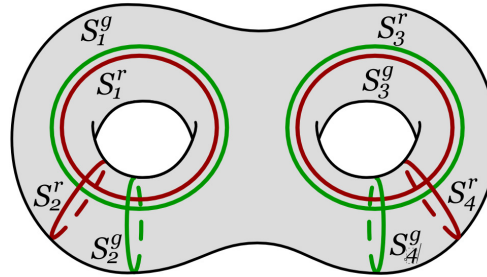


Figura 7.15: Representación de una superficie de tipo 2-toro que aloja un código 2-colex (no representado). Se muestran los operadores coloreados independientes de tipo X y Z , contruidos a partir de los ciclos de homología independientes y dos de los tres colores posibles. Estos operadores de la base actúan sobre los cúbits lógicos codificados en el código.

Los operadores asociados a las plaquetas o caras no son completamente independientes, sino que están relacionados por las siguientes ligaduras:

$$\prod_{f \in \bullet} B_f^\sigma = \prod_{f \in \circ} B_f^\sigma = \prod_{f \in \times} B_f^\sigma \quad (7.16)$$

Estas restricciones implican que el número total de generadores independientes del código, denotado por G , se puede expresar como:

$$G = 2(V + F - 2). \quad (7.17)$$

La cantidad de cúbits físicos, representada por n , es igual al doble del número de aristas, es decir, $n = 2E$. Como consecuencia, el número de cúbits lógicos o codificados, k , está relacionado con el primer número de Betti h_1 de la superficie de la siguiente manera:

$$k = n - G = 4 - 2\chi = 2h_1, \quad (7.18)$$

Esta cantidad constituye un invariante topológico de la superficie.

Para construir una base de operadores de Pauli que actúen sobre los cúbits lógicos o codificados, es posible utilizar operadores de cuerda no homólogos a cero, de manera análoga a los códigos de superficie. Este enfoque requiere comprender las relaciones de conmutación entre los distintos operadores de cuerda. Es evidente que los operadores de cuerda del mismo tipo (ya sea X o Z) siempre conmutan entre sí. Esto se debe a que una cuerda está compuesta por aristas, cada una de las cuales conecta dos vértices. Como consecuencia, dos operadores de cuerda del mismo color siempre comparten un número par de cúbits, lo que garantiza su conmutación.

La anticonmutación solo puede ocurrir entre operadores de cuerda de colores diferentes, y específicamente cuando estos se intersectan un número impar de veces (véase figura 7.14):

$$\{S_b^X, S_g^Z\} = 0. \quad (7.19)$$

Podemos ahora proceder a la construcción de la base de operadores que actúan sobre los cúbits codificados. Tomando como ejemplo un 2-toro (ilustrado en la figura 7.15), una posible elección de esta base sería:

$$\begin{array}{llll} S_1^{gX} & \leftrightarrow & X_1 & S_2^{rZ} & \leftrightarrow & Z_1, \\ S_2^{rX} & \leftrightarrow & X_2 & S_1^{gZ} & \leftrightarrow & Z_2, \\ S_2^{gX} & \leftrightarrow & X_3 & S_1^{rZ} & \leftrightarrow & Z_3, \\ \vdots & & & \vdots & & \end{array} \quad (7.20)$$

Estos operadores satisfacen las relaciones de conmutación:

$$X_i Z_j = (-1)^{\delta_{i,j}} Z_j X_i, \quad i, j = 1, 2, \dots, 2h_1. \quad (7.21)$$

La aplicación transversal de una puerta Hadamard H a un código construido en un 2-toro no resulta en una puerta H lógica codificada. Esto se debe a que para un operador de cuerda S , no se cumple la relación de anticonmutación:

$$\{S^X, S^Z\} \neq 0. \quad (7.22)$$

Para superar esta limitación, es posible utilizar superficies con bordes, particularmente planas. Este enfoque se puede lograr partiendo de una esfera (que no codifica cúbits) y eliminando sistemáticamente caras o plaquetas. Al eliminar una cara específica, el borde resultante debe tener asignado su propio color. Además, solo los operadores de cuerda de ese color particular pueden terminar en dicho borde (véase figura 7.16).

Es posible codificar un único cúbit eliminando la necesidad de crear agujeros en redes 2-colex planas. Este proceso se logra partiendo de un 2-colex sobre una esfera y eliminando un vértice, sus aristas adyacentes y las caras circundantes. El resultado es lo que denominamos un código topológico triangular (véase figura 7.17). Es posible generar códigos triangulares de dimensiones variables. Para garantizar que la puerta lógica S sea un elemento del normalizador del estabilizador $\mathcal{N}(S)$, es necesario

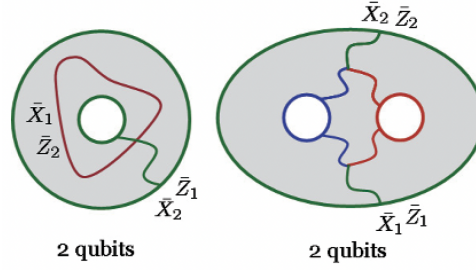


Figura 7.16: Ilustración de códigos de color basados en 2-colexes planos. A pesar de sus diferencias topológicas, ambos ejemplos codifican la misma cantidad de cúbits, en este caso 2.

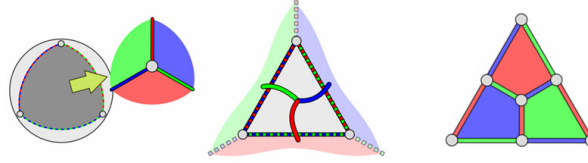


Figura 7.17: Representación de un código triangular plano derivado de un 2-colex, que codifica un cúbit lógico. A la izquierda se muestra el proceso de construcción, iniciando con un 2-colex esférico y eliminando un vértice, sus enlaces adyacentes y caras vecinas. En el centro se observa el código triangular coloreado resultante y su operador ramificado (string-net) asociado. A la derecha se ilustra la versión más simple del código triangular, que utiliza 7 cúbits físicos.

que las caras contengan un número de sitios igual a 4^j , donde $j = 1, 2, \dots$. Se puede demostrar [65] la viabilidad de construir códigos triangulares en los que cada cara o plaqueta está compuesta por 4 u 8 vértices (véase figura 7.18).

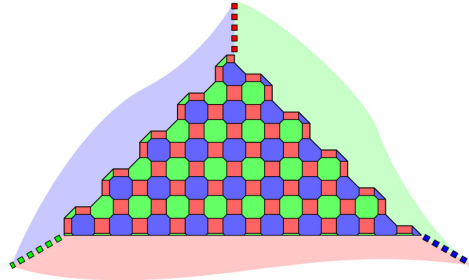


Figura 7.18: Representación de un código coloreado de geometría triangular (red 4.8.8) con tamaño variable, capaz de implementar la puerta lógica $\pi/4$, denotada como $\hat{S}$.

La aplicación transversal de la puerta Hadamard $\hat{H}$ tiene un efecto equivalente a una puerta Hadamard H actuando sobre los cúbits lógicos o codificados. Esta correspondencia se puede expresar de la siguiente manera:

$$H : \begin{array}{l} X \mapsto Z \\ Z \mapsto X \end{array} \quad \hat{H} : \begin{array}{l} T^X \mapsto T^Z \\ T^Z \mapsto T^X \end{array} \quad (7.23)$$

La puerta lógica S también presenta un comportamiento similar, gracias a la existencia de los denominados operadores de ramificación (string-net) T (ilustrados en la fig. 7.19). Estos operadores son una extensión de los operadores de cuerda, pero incluyen un punto de ramificación. Su existencia

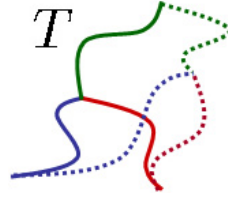


Figura 7.19: Representación de un operador ramificado (string-net) en un código topológico plano y triangular. Al deformar este operador, se puede observar que sus versiones X y Z deben anticonmutar. Esto se debe a que la string-net se interseca con su versión deformada en un único punto, involucrando colores diferentes.

está asegurada por la estructura de los códigos triangulares, que incorporan bordes de los tres colores posibles. Los operadores de ramificación (string-net) siguen reglas de anticonmutación análogas a las de los operadores de Pauli X y Z (véase figura 7.20):

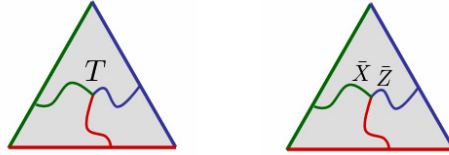


Figura 7.20: Representación de operadores en un código topológico plano y triangular. A la izquierda, un operador de ramificación (string-net), cuya existencia se debe a la presencia de tres bordes de colores distintos. A la derecha, los operadores equivalentes de tipo $\bar{X}$ y $\bar{Z}$.

$$\{T^X, T^Z\} = 0. \quad (7.24)$$

Estas propiedades de anticonmutación de los operadores T , que implican su acción sobre un número impar de cúbits, conducen a las siguientes relaciones para la puerta S y su versión transversal $\hat{S}$:

$$S : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & iXZ, \\ Z & \longrightarrow & Z, \end{array} \quad \hat{S} : \begin{array}{ccc} T^X & \longrightarrow & \pm i T^X T^Z, \\ T^Z & \longrightarrow & T^Z. \end{array} \quad (7.25)$$

Como consecuencia, los códigos triangulares permiten la implementación transversal del grupo de Clifford. Resulta muy útil introducir la presentación rotada a 45° del código tórico de Kitaev como hicimos para realizar un estudio comparativo de las capacidades de los códigos de Kitaev y los de color [96] (ver figura 7.21). En la versión rotada, se reemplaza los estabilizadores originales de vértice y plaqueta con dos tipos de operadores de plaqueta (negros y blancos) mediante una transformación geométrica de la red y una redefinición de los generadores de estabilizadores. La red rotada a 45° introduce un bicoloreado de las plaquetas (negro/blanco) en lugar de distinguir entre vértices y plaquetas. Se rota la red cuadrada 45° , creando un patrón de tablero de ajedrez de plaquetas negras y blancas. Los cúbits ahora residen en las intersecciones de la red rotada (efectivamente en los vértices de la red rotada). Los estabilizadores se redefinen para plaquetas negras con productos de X en sus bordes y similarmente para las plaquetas blancas con productos de Z .

La analogía con el ajedrez de esta comparativa va más allá del tablero. Los operadores de cuerda en la versión rotada son también de dos colores, blancos y negros. Estos siguen el producto de

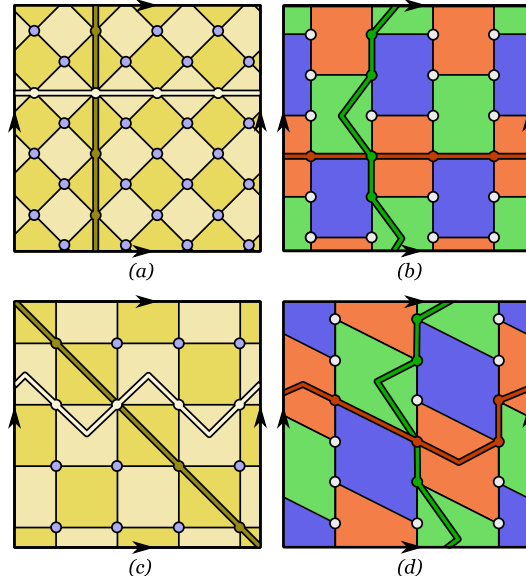


Figura 7.21: Comparativa de códigos regulares en el toro con distancia $d = 4$. Se muestran algunas cuerdas no triviales de longitud mínima. (a) En el código de superficie de Kitaev, los plaquetas son cuadrados y el número de cúbits físicos es $n = 32$. (b) Para el código de color [65], las plaquetas son hexágonos y $n = 24$. (c) Un código de superficie regular óptimo reduce el número de cúbits a $n = 16$. (d) Un código de color regular óptimo con $n = 18$.

operadores de Pauli según el patrón de los dos alfiles de color, blancos y negros, del juego tradicional. Lo curioso es que el ajedrez se puede definir también en una red hexagonal (ver figura 7.22) donde el número de alfiles es ahora 3, porque es una red tripartita. Estos alfiles de color se corresponden con los operadores de cuerda de 3 colores en los códigos de color como muestro en la figura 7.21¹.

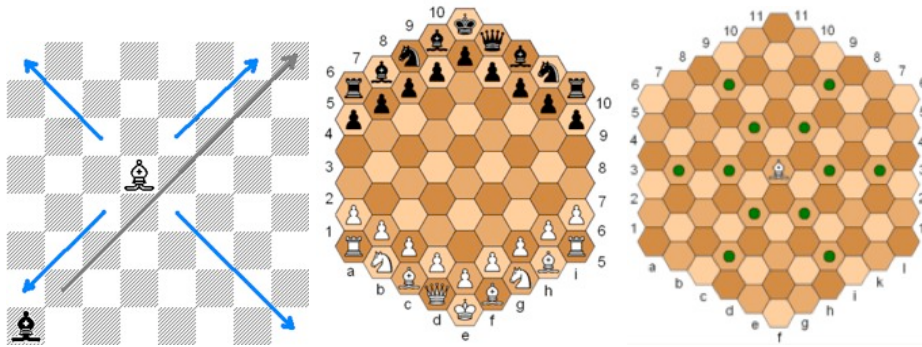


Figura 7.22: Comparativa de alfiles y sus colores en el juego del ajedrez. A la izquierda, en el tablero cuadrado estándar con casillas blancas y negras, donde hay 2 tipos de alfiles: de casillas blancas y de casillas negras. A la derecha, el juego de ajedrez se puede definir también en una red hexagonal con el mismo tipo de piezas. La sorpresa surge con los alfiles: ahora existen 3 tipos de alfiles que corresponden a los tres colores del 2-colex hexagonal correspondiente como en la figura 7.21 b), d).

Recapitaré los resultados obtenidos hasta ahora. En primer lugar, se ha logrado representar los operadores fundamentales de Pauli X y Z , que actúan sobre los cúbits lógicos del código, mediante

¹Lo que añade de nuevo el código de color 2-colex es que uno de los alfiles es dependiente de los otros dos.

una operación global que afecta a todos los cúbits físicos n , sin necesidad de seleccionar subconjuntos específicos:

$$\hat{X} = \prod_{i=1}^n X_i, \quad \hat{Z} = \prod_{i=1}^n Z_i, \quad \{\hat{Z}, \hat{X}\} = 0. \quad (7.26)$$

Esta característica representa una mejora significativa respecto a los códigos tóricos de Kitaev. Además, estos operadores globales satisfacen relaciones de conmutación con los generadores del estabilizador del código triangular, específicamente con los operadores de plaqueta:

$$[\hat{X}, B_f^Z] = 0, \quad [\hat{Z}, B_f^X] = 0. \quad (7.27)$$

Proposición 7.5 (Grupo de Clifford Transversal)

El **grupo de Clifford** puede ser implementado en un código de color mediante la aplicación de operadores globales, definidos de la siguiente manera transversal:

$$\hat{H} = \prod_{i=1}^n H_i, \quad \hat{S} = \prod_{i=1}^n S_i, \quad \hat{\Lambda} = \prod_{i=1}^n \Lambda_i. \quad (7.28)$$



Estas puertas lógicas, al ser aplicadas por conjugación, satisfacen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \hat{H} \hat{X} \hat{H}^\dagger &= \hat{Z}, & \hat{S} \hat{X} \hat{S}^\dagger &= \pm i \hat{X} \hat{Z}, \\ \hat{H} \hat{Z} \hat{H}^\dagger &= \hat{X}, & \hat{S} \hat{Z} \hat{S}^\dagger &= \hat{Z}, \end{aligned} \quad (7.29)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda} \hat{X} \hat{\Lambda}^\dagger &= \hat{I} \hat{X}, & \hat{\Lambda} \hat{X} \hat{\Lambda}^\dagger &= \hat{X} \hat{X}, \\ \hat{\Lambda} \hat{Z} \hat{\Lambda}^\dagger &= \hat{Z} \hat{Z}, & \hat{\Lambda} \hat{Z} \hat{\Lambda}^\dagger &= \hat{Z} \hat{I}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Estas transformaciones demuestran cómo los operadores globales actúan sobre los operadores de

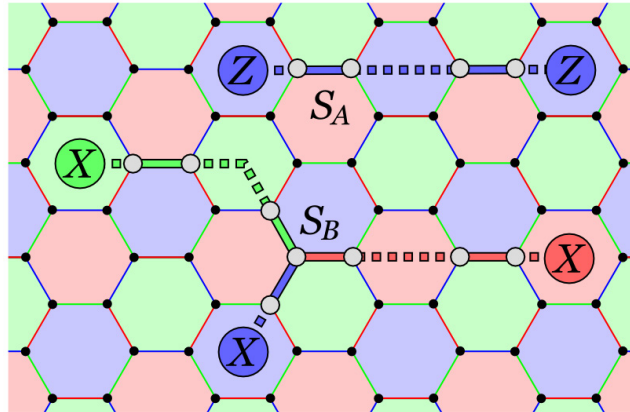


Figura 7.23: Representación de un 2-colex basado en una red hexagonal. Se ilustra un operador de cuerda S_A de tipo Z que genera un par de cuasipartículas en sus extremos, localizadas en los centros de las plaquetas correspondientes. Asimismo, un operador de tipo ramificado (string-net) S_B de tipo X crea un trío de cuasipartículas.

Pauli codificados, preservando la estructura del grupo de Clifford. Además, su acción sobre los estabilizadores tipo plaqueta del código triangular también concuerda:

$$\begin{aligned} \hat{H} B_f^X \hat{H}^\dagger &= B_f^Z, & \hat{S} B_f^X \hat{S}^\dagger &= B_f^X B_f^Z, \\ \hat{H} B_f^Z \hat{H}^\dagger &= B_f^X, & \hat{S} B_f^Z \hat{S}^\dagger &= B_f^Z, \end{aligned} \quad (7.31)$$

$$\begin{aligned}\hat{A}IB_f^X\hat{A}^\dagger &= IB_f^X, & \hat{A}B_f^X I\hat{A}^\dagger &= B_f^X B_f^X, \\ \hat{A}IB_f^Z\hat{A}^\dagger &= B_f^Z B_f^Z, & \hat{A}B_f^Z I\hat{A}^\dagger &= B_f^Z I.\end{aligned}\quad (7.32)$$

Al analizar el sistema de cúbits como un conjunto fuertemente correlacionado de spines $\frac{1}{2}$, podemos describir su comportamiento mediante el siguiente hamiltoniano del código de color:

$$H_{CC} = - \sum_f (B_f^X + B_f^Z). \quad (7.33)$$

Este hamiltoniano posee un estado fundamental $|\text{GS}\rangle$ que exhibe orden topológico, caracterizado por una degeneración cuyo origen es de naturaleza topológica. Este estado fundamental es equivalente al código topológico que hemos desarrollado. Además del estado fundamental, el sistema presenta estados excitados. Estas excitaciones, también denominadas cuasipartículas, pueden generarse a partir del estado fundamental mediante la aplicación de operadores de cuerda previamente estudiados (véase figura 7.23):

$$S_A^Z S_B^X |\text{GS}\rangle. \quad (7.34)$$

Cada extremo o punto final de un operador de cuerda representa una cuasipartícula, que se manifiesta como una alteración de la condición de plaqueta en el estado fundamental.

Las cuasipartículas que pueblan este sistema exhiben propiedades de anyones abelianos. Consideremos, por ejemplo, una excitación de tipo X verde (es decir, el extremo de una cuerda verde) que realiza un circuito completo alrededor de una excitación Z azul. Como resultado de esta operación, el estado cuántico del sistema experimenta un cambio de fase de π , equivalente a una multiplicación por -1 (véase figura 7.24). Este comportamiento se puede expresar matemáticamente mediante las

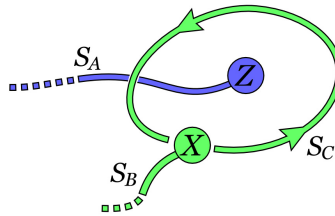


Figura 7.24: Trayectoria de una cuasipartícula X verde alrededor de una cuasipartícula Z azul. Este proceso, conocido como monodromía, resulta en la adquisición de una fase π por parte del estado cuántico del sistema (7.36).

siguientes relaciones:

$$\{S_A^Z, S_C^X\} = 0, \quad (7.35)$$

$$S_C^X (S_A^Z S_B^X |\text{GS}\rangle) = -S_A^Z S_B^X |\text{GS}\rangle. \quad (7.36)$$

Donde $|\text{GS}\rangle$ representa el estado fundamental del sistema.

Es importante destacar que en nuestro modelo computacional de código topológico de color, las excitaciones y su entrelazamiento no desempeñan un papel relevante. Todas las operaciones lógicas se ejecutan sobre el estado fundamental del sistema, mientras que las excitaciones se consideran errores que se disipan debido a la brecha (gap) energética de naturaleza topológica que protege dicho estado fundamental.

Esta construcción nos ha permitido desarrollar una implementación topológica del grupo de

Clifford de operaciones unitarias, que además posee la característica de ser transversal [65]. Esta propiedad de transversalidad es particularmente significativa en el contexto de la computación cuántica tolerante a fallos.

7.4 3-Colexes: Computación Cuántica Topológica Universal

El objetivo ahora va a ser desarrollar códigos topológicos capaces de ejecutar un conjunto más amplio de operaciones cuánticas que las proporcionadas por el grupo de Clifford, analizado previamente. En particular, se trata de diseñar un código de color que permita realizar computación cuántica universal de manera topológica y transversal simultáneamente [66, 67]. Para lograr esto, es necesario introducir el concepto de red tipo 3-colex, una extensión tridimensional del 2-colex anterior 7.7.

Definición 7.8 (3-Colex)

*Las estructuras tridimensionales denominadas **3-colexes** son redes tetravalentes, es decir, con número de coordinación 4 (véase figura 7.25), que poseen propiedades específicas de coloración. Sus 3-celdas (o volúmenes elementales) admiten una coloración con 4 colores. Esta característica representa una generalización natural del caso bidimensional. Los 3-colexes pueden generarse a partir de cualquier 3-variedad compacta sin borde. Sus aristas o enlaces también son susceptibles de ser coloreados de manera coherente, de forma análoga al caso bidimensional (véase figura 7.26).*

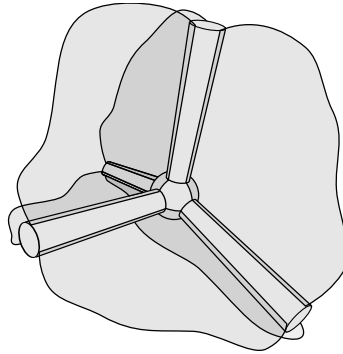


Figura 7.25: Representación de un vértice tetravalente en una red 3-colex. Cada vértice está conectado a 4 vecinos inmediatos.

En este caso, los generadores del código estabilizador topológico $\mathcal{S}$ se componen de dos tipos de operadores. Por un lado, tenemos operadores vinculados a las 3-celdas:

$$B_c^X = \prod_{c \ni i=1}^8 X_i, \quad (7.37)$$

Y por otro lado, operadores asociados a las caras o plaquetas:

$$B_f^Z = \prod_{f \ni i=1}^4 Z_i. \quad (7.38)$$

Estos operadores se ilustran geoméricamente en la figura 7.27.

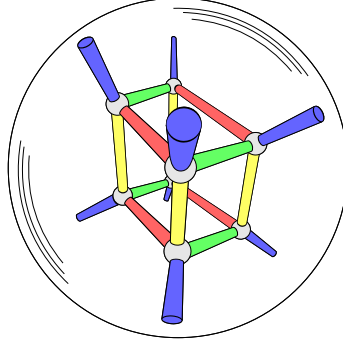


Figura 7.26: Ilustración del 3-colex más elemental en un espacio proyectivo tridimensional. Los enlaces azules que intersectan la esfera están identificados entre sí.

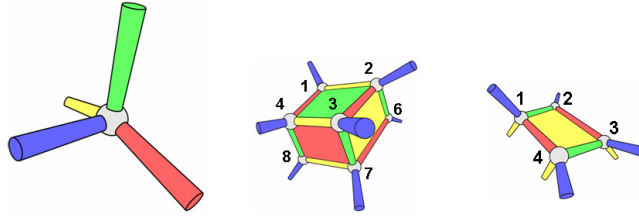


Figura 7.27: Componentes fundamentales de un 3-colex: a la izquierda, un vértice con cuatro conexiones; en el centro, una 3-celda de color azul; y a la derecha, una cara o plaqueta bicolor azul-amarilla. En esta última, solo se visualiza el color amarillo en la superficie externa, mientras que el azul corresponde a la cara interna no visible.

En esta construcción del 3-colex, nos encontramos con dos grupos de homología distintos, a diferencia del caso bidimensional. Uno para operadores de cuerda y otro para operadores de membrana, como mostraré más adelante. Sin embargo, es interesante notar que estos grupos resultan ser equivalentes debido a la dualidad de Poincaré.

La cantidad de cúbits codificados k en estos 3-colexes se expresa mediante la siguiente relación:

$$k = 3h_1, \quad (7.39)$$

donde h_1 representa el primer número de Betti de la variedad tridimensional en la que se construye el 3-colex. Este número es un invariante topológico de la variedad.

El sistema físico fuertemente correlacionado asociado al 3-colex puede describirse mediante el siguiente hamiltoniano:

$$H_{CC} = - \sum_c B_c^X - \sum_f B_f^Z. \quad (7.40)$$

Este hamiltoniano incorpora las contribuciones de los operadores de cara (f) y de 3-celda (c) que caracterizan la estructura del 3-colex.

Los operadores de cuerda en el contexto del 3-colex se construyen de manera similar al caso bidimensional, pero con la particularidad de que ahora se utilizan cuatro colores: rojo (r), verde (g), azul (b) y amarillo (y) (véase figura 7.28). Al igual que en el caso 2D, se mantiene la posibilidad de ramificación cromática en las cuerdas.

$$S^Z = \prod_{i \in \gamma_{\text{cuerda}}} Z_i. \quad (7.41)$$

Una característica distintiva de las redes tridimensionales es la presencia de operadores de tipo

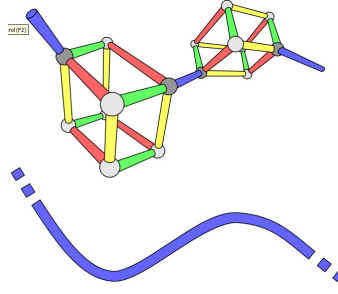


Figura 7.28: Representación de un operador de cuerda azul en la red 3-colex original (parte superior) y en su correspondiente red reducida (parte inferior).

membrana:

$$M^X = \prod_{i \in M \text{ membrana}} X_i. \quad (7.42)$$

Estas membranas también son coloreables, con cada una exhibiendo dos colores, uno por cada cara. Esto resulta en seis posibles combinaciones cromáticas para las membranas (figura 7.29). Al igual que los operadores de cuerda, las membranas pueden experimentar ramificaciones de color (figura 7.32). Para facilitar la visualización de estas cuerdas y membranas, se emplean complejos reducidos (o

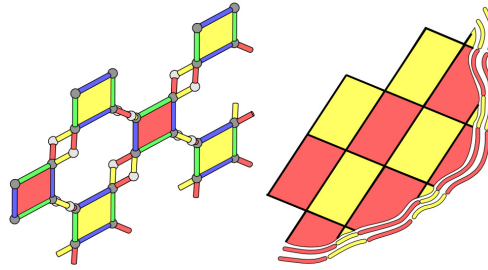


Figura 7.29: Ilustración de un operador de membrana rojo-amarillo en la red 3-colex original (izquierda) y en su correspondiente red reducida (derecha).

estrujados) específicos.

Para que los 3-colexes sean útiles en aplicaciones prácticas de computación cuántica, es necesario considerar 3-variedades con fronteras. Esto se puede lograr de manera sencilla partiendo de una variedad compacta y eliminando progresivamente celdas. De manera análoga al caso bidimensional, las fronteras resultantes heredarán el color de la celda eliminada.

En este contexto tridimensional, el equivalente a los códigos triangulares son los códigos tetraédricos. Estos se obtienen mediante la eliminación de un vértice en una 3-esfera (véase figura 7.30). A diferencia del caso bidimensional, donde la implementación de la puerta transversal $S^{\frac{1}{2}} =: T$ presentaba dificultades, en un 3-colex es posible implementar esta puerta bajo ciertas condiciones geométricas: las caras deben tener un número de vértices múltiplo de 4, y las celdas deben contener un número de vértices múltiplo de 8.

Es factible diseñar un código tetraédrico que codifica un cúbit lógico utilizando 15 cúbits físicos. Estos códigos tetraédricos poseen la notable característica de permitir la implementación transversal de operaciones lógicas fundamentales como la puerta Hadamard H , la puerta T , y la puerta CNOT. Esta capacidad, combinada con la posibilidad de realizar mediciones transversales de los operadores

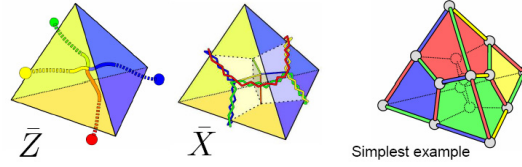


Figura 7.30: Representación de las únicas cuerdas ramificadas (string-net) y membranas ramificadas (membrane-net) no triviales en un código tetraédrico (izquierda y centro). Cada superficie está asociada a un color específico, que determina qué tipos de cuerdas y membranas pueden terminar en ella. A la derecha se muestra el código tetraédrico más simple, compuesto por 15 cúbits.

X y Z , proporciona los elementos necesarios para lograr una computación cuántica universal tolerante a fallos de naturaleza topológica. Estas propiedades excepcionales confieren a los códigos tetraédricos un carácter único y altamente relevante en el campo de la computación cuántica

7.5 Ordenes Topológicos en $D = 3$: Brane-Nets y Branyones

En los capítulos previos he puesto de manifiesto que el concepto de orden topológico es fundamental para los códigos cuánticos topológicos. A continuación, profundizaré en este concepto desde una perspectiva física, resaltando su relevancia en sistemas fuertemente correlacionados en materia condensada y otros campos afines.

En la física, la búsqueda de fenómenos que se desvían de las teorías establecidas ha sido siempre un foco de interés, impulsando el descubrimiento de nueva física. En el ámbito de la materia condensada, el paradigma dominante ha sido la teoría de Landau de los líquidos cuánticos (líquido de Fermi), complementada por el mecanismo de ruptura espontánea de simetría (RES) y el enfoque del grupo de renormalización (GR) de Wilson [18, 97, 98].

En el marco de la teoría de Landau, el concepto de parámetro de orden local es crucial para identificar y clasificar las fases cuánticas. Sin embargo, los órdenes topológicos escapan a esta descripción basada en parámetros de orden locales. En su lugar, se requiere un conjunto diferente de números cuánticos para caracterizar estas nuevas fases, incluyendo aspectos como la degeneración del estado fundamental, las propiedades estadísticas del entrelazamiento de cuasipartículas, los estados de borde [20, 99, 100], y la entropía topológica [85, 86], entre otros.

La ruptura espontánea de simetría (RES) típicamente conlleva una degeneración del estado fundamental. En contraste, los sistemas con orden topológico exhiben una degeneración del estado fundamental que no está asociada a la ruptura de ninguna simetría, sino que tiene un origen puramente topológico. Esta característica distingue fundamentalmente a los órdenes topológicos de las fases convencionales descritas por la teoría de Landau de la RES, sugiriendo que la naturaleza posee una complejidad mayor de lo que se había anticipado en el marco teórico estándar. En el Ciclo Ciencia para Todos 2017 de la RAC para celebrar el Premio Nobel de Física 2016 tuve oportunidad de disertar sobre estos conceptos en extensión [101].

Un ejemplo emblemático de orden topológico se encuentra en los líquidos cuánticos del efecto Hall fraccionario (EHF). Estos sistemas presentan múltiples fases cuánticas a temperatura cero, todas ellas con idéntica simetría. Consecuentemente, estas fases no pueden diferenciarse mediante consi-

deraciones de simetría, lo que hace inaplicable la teoría de Landau de la RES [20, 102-104]. Para caracterizar los estados del EHF, es necesario recurrir a números cuánticos alternativos. Un ejemplo notable es la dependencia de la degeneración del estado fundamental d_g con respecto al género g de la superficie en la que se confina el sistema electrónico. Específicamente, se demuestra que:

$$d_g = m^g, \quad (7.43)$$

donde m está relacionado con el factor de llenado de las bandas electrónicas ν mediante la expresión $\nu = \frac{1}{m}$.

El fenómeno de orden topológico se manifiesta en diversos sistemas físicos. Entre ellos, destacan los modelos de enlaces de valencia resonantes (RVB) de corto alcance [105-109], así como una variedad de líquidos cuánticos de espines [99, 110-116]. En el contexto de la información cuántica, el orden topológico puede interpretarse como una forma novedosa de entrelazamiento, caracterizada por correlaciones cuánticas no locales específicas en los estados del sistema. Las transiciones de fase topológicas implican transformaciones entre estados cuánticos que poseen diferentes tipos de orden topológico.

Para dimensiones espaciales $D \geq 4$, hemos desarrollado modelos teóricos precisos de hamiltonianos en redes que exhiben transiciones de fase topológicas [67]. Un caso particular en $D = 4$ demuestra una transición de fase con modificación de orden topológico al variar un parámetro de acoplamiento en el hamiltoniano [67]. Este hallazgo es significativo, ya que contrasta con el escenario más común donde se observa un único punto topológico rodeado por fases cuánticas convencionales.

En el contexto bidimensional, una amplia gama de fases topológicas ha sido analizada y categorizada utilizando el marco matemático de las categorías tensoriales [79]. El fenómeno físico subyacente a estos órdenes topológicos es la condensación de cuerdas ramificadas (string-nets). Este proceso es análogo a la condensación de partículas, que da lugar a la aparición de fases ordenadas en la teoría de Landau.

Las cuerdas ramificadas (string-nets) representan una estructura más compleja que una simple colección de cuerdas abiertas o cerradas. En estas cuerdas ramificadas, es posible que múltiples cuerdas converjan en un punto común, denominado nodo o punto de ramificación, una característica ausente en las cuerdas convencionales, que típicamente poseen como máximo dos extremos (véase fig.7.31). Desde una perspectiva matemática, mientras que una cuerda se define como una variedad unidimensional, una red de cuerdas trasciende esta definición.

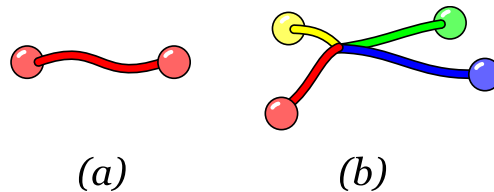


Figura 7.31: Representación de cuasipartículas como puntos terminales de operadores de cuerda. (a) Extremos de una cuerda simple. (b) Extremos de una cuerda ramificada (string-net) con un punto de ramificación.

El estado fundamental de estos sistemas puede describirse mediante superposiciones de estados caracterizados por cuerdas ramificadas (string-nets). Este fenómeno se debe a restricciones energéticas

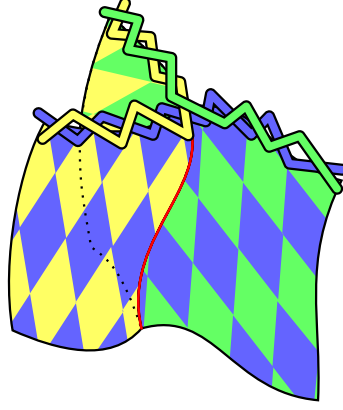


Figura 7.32: Representación de una red de membranas con ramificación cromática.

locales que provocan una reorganización efectiva de los grados de libertad microscópicos presentes en el hamiltoniano original, dando lugar a estructuras extendidas en forma de cuerdas ramificadas.

La teoría cuántica de la información y la computación ha abierto un nuevo campo de aplicaciones para los órdenes topológicos [12-15]. En esencia, la computación cuántica consiste en manipular fases cuánticas para codificar y procesar información. Una estrategia natural para proteger estas fases de la decoherencia es utilizar estados cuánticos con orden topológico, que poseen un tipo de entrelazamiento no local. En este contexto, la no localidad implica que el entrelazamiento cuántico está distribuido entre numerosas partículas de tal manera que no puede ser destruido por perturbaciones locales, lo que reduce significativamente la decoherencia.

Además, la información cuántica codificada en estados topológicos puede ser manipulada de diversas formas. Por ejemplo, mediante el movimiento de excitaciones de cuasipartículas entre sí o alrededor de otras, generando efectos de trenzado que se traducen en puertas cuánticas lógicas universales [12, 117-121], como mostraré en la sección 10.3. Alternativamente, existen esquemas de computación cuántica topológica que se basan exclusivamente en las propiedades topológicas del entrelazamiento del estado fundamental [16, 17, 65, 66] como he mostrado en este capítulo.

El conocimiento sobre los órdenes topológicos en dimensión $D = 3$ es menos completo en comparación con dimensiones inferiores. Esta limitación se debe, en parte, a la mayor complejidad de las estructuras topológicas en el espacio tridimensional. Mientras que en dos dimensiones existe una clasificación exhaustiva de las diversas topologías, la situación en $D = 3$ presenta desafíos significativamente mayores. La clasificación completa de topologías tridimensionales ha sido un problema abierto durante mucho tiempo, y solo recientemente se ha logrado un avance sustancial con la demostración de la conjetura de geometrización de Thurston [122]. Este resultado fundamental engloba, como caso particular, la resolución de la célebre conjetura de Poincaré [123-125].

Los estudios sobre órdenes topológicos en tres dimensiones han explorado modelos que presentan condensación de cuerdas ramificadas (string-nets) [79], utilizando estructuras trivalentes que son generalizaciones de las empleadas en dos dimensiones. No obstante, surge una complicación: al buscar un hamiltoniano exactamente soluble que describa esta fase topológica tridimensional, se observa que los operadores de flujo magnético (análogos a (7.12)) dejan de conmutar entre sí en $D = 3$. Una posible resolución de este desafío implica la imposición de restricciones adicionales al mecanismo

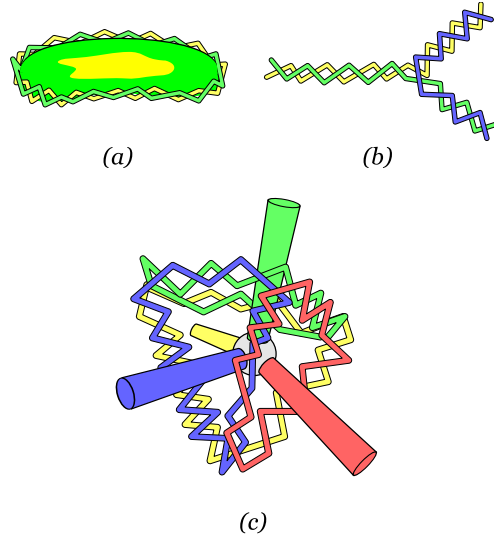


Figura 7.33: Ilustración de flujos y bordes de cuerdas, con capacidad de ramificación según su color. (a) El borde de una membrana gy se manifiesta como un flujo gy . (b) Un flujo gy puede descomponerse en flujos gb y by al atravesar una celda roja. (c) Microflujos alrededor de un vértice individual, resultantes de la aplicación de un operador X al estado fundamental en el cúbit correspondiente situado en el vértice.

bidimensional, aunque esto conlleva una pérdida de claridad en la representación geométrica del modelo resultante, en comparación con sus equivalentes bidimensionales [79].

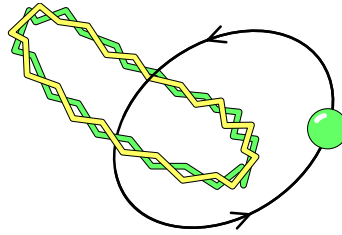


Figura 7.34: Ilustración del efecto de fase cuando una cuasipartícula de tipo verde (g-carga) se enrolla alrededor de un flujo gy . Este proceso induce una fase global de -1 en el estado cuántico del sistema, consecuencia de la anticonmutación entre el operador de membrana asociado al flujo y el operador de cuerda vinculado a la cuasipartícula en movimiento.

Los 3-colexes representan una nueva categoría de modelos con solución exacta en dimensión $D = 3$ que exhiben orden topológico [65, 67]. Estos modelos se basan en operadores de flujo magnético de diversas clases que, a diferencia de casos anteriores, conmutan entre sí. Esta propiedad se logra mediante redes que satisfacen ciertos criterios geométricos específicos, sobre las cuales se definen los hamiltonianos cuánticos correspondientes. Esta construcción permite un análisis completo del espectro de estos modelos, con especial énfasis en sus características topológicas.

El estado fundamental de estos sistemas puede describirse como una condensación de cuerdas ramificadas (string-nets) o, alternativamente, como una condensación de membranas ramificadas (membrane-nets). Las membranas ramificadas generalizan el concepto de colección de membranas, de manera análoga a cómo las cuerdas ramificadas extienden la noción de cuerdas individuales. En las membranas ramificadas, estas pueden unirse a lo largo de líneas de ramificación, en contraste con los puntos de unión convencionales (véase fig. 7.32).

Proposición 7.6 (Excitaciones de Códigos de Color 3D)

Las **excitaciones** en estos sistemas se clasifican en dos categorías principales:

1. Cuasipartículas que se manifiestan como extremos de cuerdas (fig.7.31).
2. Flujos que emergen como bordes de membranas (fig.7.33), constituyendo objetos de naturaleza extensa.



Un fenómeno interesante ocurre cuando una cuasipartícula realiza un circuito alrededor de uno de estos flujos cerrados: el estado cuántico del sistema adquiere una fase no trivial (fig.7.34). Este comportamiento es reminiscente de la interacción entre anyones en sistemas bidimensionales [126, 127], donde la función de onda del sistema adquiere un factor abeliano cuando un anyon completa una revolución alrededor de otro. Para describir estas cuasipartículas que presentan características de anyones pero con una estructura extensa, introducimos el término “branyones”. Los modelos basados en 3-colexes exhiben precisamente este tipo de branyones de naturaleza abeliana. Para comprender

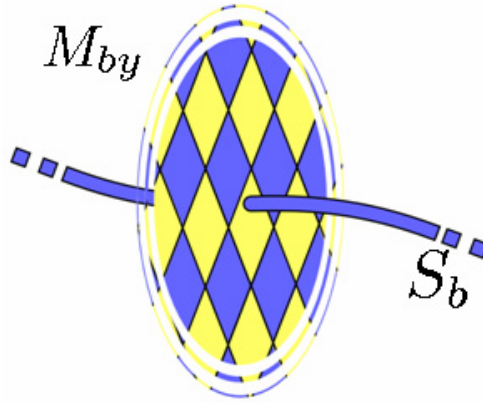


Figura 7.35: Ilustración de la anticonmutación entre un operador de cuerda y un operador de membrana cuando comparten un color y se intersectan.

la estructura del estado fundamental en estos nuevos modelos basados en 3-colexes, es necesario considerar la condensación de cuerdas ramificadas (string-nets) y membranas ramificadas (membrane-nets). Según hemos estudiado [67], estos modelos presentan tres colores independientes para los operadores de cuerda, así como tres combinaciones cromáticas independientes para los operadores de membrana. Esta característica se deriva de las relaciones de ligadura específicas que cumplen los operadores de cuerda y membrana en un 3-colex [67]:

$$S_\mu^r S_\mu^g S_\mu^b S_\mu^y \sim 1, \quad (7.44)$$

$$M_\mu^{pq} M_\mu^{qo} M_\mu^{op} \sim 1, \quad (7.45)$$

donde los símbolos o , p y q representan colores distintos. Como consecuencia de esta estructura, el número total de cúbits codificados k en estos sistemas se expresa como:

$$k = 3h_1 = 3h_2, \quad (7.46)$$

En esta expresión, h_1 y h_2 denotan respectivamente el primer y segundo números de Betti de la 3-variedad sobre la cual se construye la red de tipo 3-colex.

Los operadores de cuerda y de membrana generalmente conmutan entre sí, con una excepción notable: cuando comparten el mismo color y la cuerda interseca la membrana un número impar de veces (véase fig.7.35). Esta interacción se expresa matemáticamente como:

$$\{S_b^Z, M_{by}^X\} = 0. \quad (7.47)$$

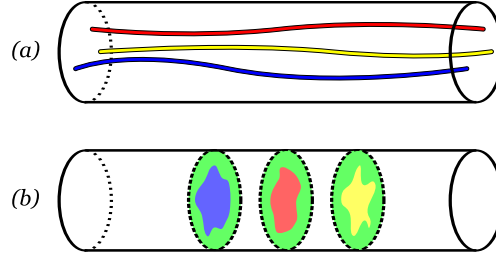


Figura 7.36: Representación de una base de Pauli para operadores de 3 cúbits codificados en una 3-variedad de tipo $S^2 \times S^1$. (a) Se ilustra una base no trivial de operadores de cuerda cerrada. Existe una cuarta cuerda (verde) que es combinación lineal de las tres mostradas, según (7.44). (b) De manera similar, se presenta una base de operadores de membrana, eligiendo membranas gb -, gr - y gy -. Existen otras tres membranas no triviales (tipos br -, by - y yr -) que son combinaciones lineales de las mostradas, de acuerdo con (7.45).

El sistema cuántico fuertemente correlacionado que hemos desarrollado, basado en la estructura del 3-colex, exhibe un orden topológico caracterizado por la condensación simultánea de cuerdas ramificadas (string-nets) y membranas ramificadas (membrane-nets). Esta propiedad se ilustra en las figuras 7.36 y 7.37.

Los operadores de cuerda con homología no trivial, que actúan de manera global sobre el sistema cuántico, son los únicos capaces de modificar el estado fundamental mientras lo mantienen invariante. Este fenómeno es característico de un condensado de cuerdas [128].

Aunque podría ser tentador describir el estado fundamental del sistema utilizando el conjunto de operadores de cuerda S_b de tipo borde:

$$\sum_{s \in S_b} B_s^Z | \rightarrow \rangle^{\otimes |V|}, \quad (7.48)$$

donde $| \rightarrow \rangle^{\otimes |V|}$ representa el estado cuántico con todos los espines o cúbits orientados en la dirección positiva del eje x , esta descripción no es válida. En realidad, el sistema presenta un condensado de cuerdas ramificadas (string-nets), como se evidencia en las relaciones (7.44), donde se observan puntos de ramificación en los que convergen cuerdas de diferentes colores formando nodos. Esta configuración particular del sistema permite una rica estructura topológica que combina elementos unidimensionales (cuerdas) y bidimensionales (membranas) en un espacio tridimensional, dando lugar a propiedades emergentes únicas.

Por lo tanto, el estado fundamental consiste en una superposición de todas las posibles configuraciones de operadores de cuerda (ver figura 7.37). Una representación más adecuada del estado fundamental es la siguiente:

$$\prod_{f \in F} (1 + B_f^Z) | \rightarrow \rangle^{\otimes |V|} \equiv \sum_{s \text{ string-nets}} B_s^Z | \rightarrow \rangle^{\otimes |V|}. \quad (7.49)$$

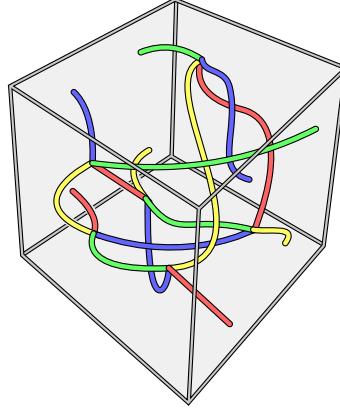


Figura 7.37: Representación de un condensado de redes de cuerdas con ramificación cromática en un 3-Toro. La imagen muestra un estado representativo de la superposición descrita en la ecuación (7.49).

Esta formulación refleja de manera más precisa la naturaleza del condensado de redes de cuerdas presente en el sistema.

Existe una descripción alternativa que emplea membranas en lugar de cuerdas, denominada condensados de redes de membranas (membrane-nets). Es notable que, a diferencia de otros órdenes topológicos en dimensión 3 basados en códigos tóricos que no presentan este fenómeno [128], los 3-colexes sí exhiben condensación de redes de membranas [67].

La formación de un condensado de membranas se debe a que únicamente las membranas con homología no trivial pueden actuar de manera significativa sobre el estado fundamental. La estructura de membranas ramificadas surge porque, como indican las relaciones (7.45), es posible combinar membranas de diferentes tipos (por ejemplo, gr -, gb - y br -) a lo largo de una línea común (véase fig.7.32). Si representamos por $|\uparrow\rangle^{\otimes|V|}$ el estado con todos los espines (cúbits) orientados hacia arriba, podemos expresar un ejemplo de estado fundamental en la representación de membranas de la siguiente manera:

$$\prod_{c \in C} (1 + B_c^X) |\uparrow\rangle^{\otimes|V|} \equiv \sum_{m \text{ membrane-nets}} B_m^X |\uparrow\rangle^{\otimes|V|}. \quad (7.50)$$

Esta formulación captura la esencia del condensado de redes de membranas característico de los 3-colexes.

Nuestros modelos pueden extenderse a dimensiones superiores, permitiendo el cálculo preciso del estado fundamental y su degeneración en función de los números de Betti de las variedades que albergan los D-colexes [67]. Esta capacidad nos permite diferenciar variedades con distintas características homológicas mediante el uso de hamiltonianos cuánticos. En estas dimensiones superiores, emergen estructuras extendidas generalizadas que denominamos branas, junto con un mecanismo de condensación asociado que llamamos branas ramificadas (brane-nets).

Para dimensiones $D > 3$, se pueden obtener diversos condensados de branas ramificadas. Para cada par de enteros (p, q) que cumplan $p+q=D$, podemos definir un hamiltoniano en el que los operadores de $(p+1)$ -celda y $(q+1)$ -celda actúan como estabilizadores de un código cuántico. Específicamente,

hemos propuesto el siguiente hamiltoniano [67]:

$$H_{p,q} = - \sum_{c \in C_{p+1}} B_c^Z - \sum_{c \in C_{q+1}} B_c^X. \quad (7.51)$$

Este sistema tiene solución exacta, y su estado fundamental corresponde a un código cuántico corrector de errores cuyo grupo estabilizador está formado por el conjunto de operadores de celda. La degeneración del estado fundamental viene dada por $k = \binom{D}{p} h_p = \binom{D}{q} h_q$, donde D representa la dimensión del espacio y h_p, h_q son números de Betti de la D -variedad.

Las excitaciones en este sistema son objetos extendidos de dimensiones $p-1$ y $q-1$. Estas excitaciones pueden entrelazarse entre sí, dando lugar a fases globales en los estados cuánticos del sistema. Denominamos “branyones.” a estos anyones de tipo brana, reflejando su naturaleza extendida y sus propiedades topológicas.

En dimensiones $D \geq 4$, emerge un fenómeno novedoso en comparación con el caso tridimensional. En estos espacios de mayor dimensión, es posible obtener diversas combinaciones de los parámetros (p, q) , cada una de las cuales genera órdenes topológicos distintos. Esta diversidad abre la posibilidad de transiciones cuánticas entre estos diferentes órdenes topológicos.

Un ejemplo ilustrativo de este fenómeno se presenta en $D = 4$, donde podemos considerar el siguiente hamiltoniano:

$$H = H_{1,3} + \lambda H_{2,2}, \quad (7.52)$$

Este sistema experimenta una transición de fase topológica al modificar el valor del parámetro de acoplamiento λ . Es importante notar que, aunque $H_{(1,3)}$ y $H_{(2,2)}$ son individualmente resolubles de manera exacta por construcción, el hamiltoniano completo (7.52) no admite una solución exacta. Esta característica se debe a que los operadores de cara o plaqueta B_f^Z y los operadores de celda B_c^X correspondientes al tipo (1,3) no conmutan con sus contrapartes de tipo (2,2).

El hamiltoniano H no exhibe un orden topológico exacto para valores arbitrarios del parámetro de acoplamiento λ . El orden topológico se manifiesta únicamente en los regímenes de acoplamiento débil ($\lambda \ll 1$) o fuerte ($\lambda \gg 1$), presentando características distintas en cada caso. Al modificar el valor de λ , es posible establecer una conexión entre dos fases topológicas diferentes, aunque no necesariamente toda la trayectoria paramétrica en λ corresponde a un estado topológico.

Habiendo analizado el mecanismo de transiciones de fase cuánticas y topológicas en colexes para el caso más simple de $D = 4$, podemos generalizar este concepto a dimensiones arbitrarias $D \geq 4$ mediante la introducción de los siguientes hamiltonianos:

$$H_D = \sum_{p,q:p+q=D} \lambda_{p,q} H_{p,q}, \quad (7.53)$$

donde los hamiltonianos $H_{p,q}$ están definidos según la ecuación (7.51). Al variar las constantes de acoplamiento $\lambda_{p,q}$ y alcanzar los puntos topológicos caracterizados por $\lambda_{p,q} = 0, \forall p, q \neq p_t, q_t, \lambda_{p_t, q_t} = 1$, se observan nuevamente ejemplos de transiciones de fase con cambios en los órdenes topológicos correspondientes [67].

7.6 Conclusiones

Desde la perspectiva de la teoría de la información cuántica, los estados fundamentales con orden topológico que hemos desarrollado utilizando D -colexes [65-67] ofrecen una implementación concreta de memorias y procesadores cuánticos con protección topológica. Estos sistemas comprenden un conjunto de estados cuánticos y operaciones lógicas que poseen una resistencia intrínseca a la decoherencia, gracias a la codificación de la información cuántica en las características topológicas del sistema.

Los D -colexes son estructuras reticulares específicas con un número de coordinación igual a la dimensión espacial $D + 1$, que además presentan ciertas propiedades de coloración. Estos colexes permiten la construcción de códigos cuánticos topológicos de color, que exhiben una estructura más sofisticada que los códigos de superficie previamente conocidos, tanto en términos de su potencial para la computación cuántica como por la novedad de los órdenes topológicos que manifiestan [67]. En particular, los 2-colexes facilitan la implementación transversal de las operaciones unitarias del grupo de Clifford, también conocidas como puertas lógicas simplécticas [65]. Más aún, los 3-colexes permiten la realización de un conjunto completo de operaciones lógicas, habilitando así la computación cuántica universal [66]. Este fenómeno puede interpretarse como la existencia de una dimensión crítica $D=3$ para lograr la computación universal mediante redes de tipo colex, análogo a cómo la dimensión crítica para obtener transiciones de fase entre órdenes topológicos en colexes es $D=4$ [67].

A diferencia de lo que ocurre en dimensión $D = 2$, no existe una clasificación exhaustiva de los órdenes topológicos en $D = 3$ dimensiones. Esto implica que no se ha identificado un orden topológico capaz de diferenciar entre todas las posibles configuraciones topológicas en variedades tridimensionales. Hemos propuesto el concepto de clase topológicamente completa de hamiltonianos (TCH) [67] para describir aquellos hamiltonianos cuánticos cuyo estado fundamental presenta una degeneración que varía en función de la topología de la variedad sobre la que se define la red del hamiltoniano.

Utilizando esta definición, hemos desarrollado una familia de órdenes topológicos basados en estructuras reticulares denominadas colexes. Estos modelos permiten distinguir entre 3-variedades con distintas propiedades homológicas. Aunque la homología constituye un invariante topológico, no es suficiente para diferenciar completamente todas las variedades topológicamente no equivalentes en dimensión $D = 3$. Un ejemplo clásico es la esfera de Poincaré, una 3-variedad que comparte las mismas propiedades homológicas que la 3-esfera estándar, pero difiere en su estructura topológica. Poincaré demostró que el grupo fundamental (o primer grupo de homotopía) de esta nueva esfera tiene orden 120, mientras que la 3-esfera estándar posee un grupo fundamental trivial.

Esta distinción abre la posibilidad de construir hamiltonianos cuánticos definidos en redes que sean capaces de discriminar cualquier topología tridimensional a través de la degeneración de su estado fundamental. Tal logro equivaldría a abordar la conjetura de Poincaré desde la perspectiva de la mecánica cuántica.

Capítulo 8 Experimentos con Códigos de Color Topológicos

8.1 Introducción

Sumario

- ❑ Códigos Planares Topológicos
- ❑ Iones Atrapados
- ❑ Corrección Cuántica Completa
- ❑ Átomos Neutros
- ❑ Cúbits Superconductores
- ❑ Ventajas Experimentales

Los códigos de color topológicos representan uno de los enfoques más prometedores para lograr la computación cuántica tolerante a fallos. Desde su primera demostración experimental en 2014 [129], estos códigos se han implementado en múltiples plataformas de computación cuántica, cada una ofreciendo ventajas únicas para la corrección de errores cuánticos. Repasaré la evolución de las implementaciones de códigos de color en sistemas de iones atrapados, átomos neutros y cúbits superconductores, destacando el papel esencial que juegan estos códigos en la búsqueda de una computación cuántica práctica y tolerante a fallos.

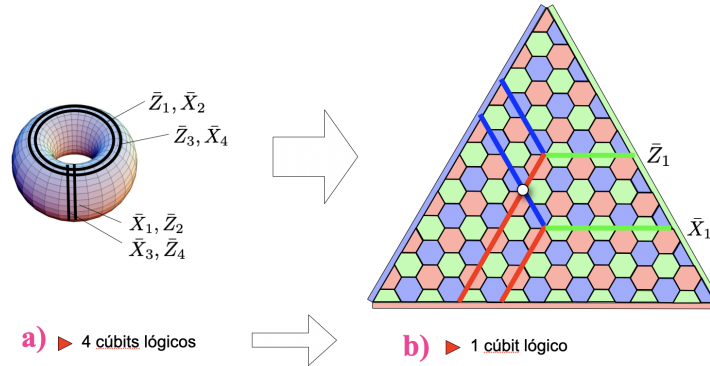


Figura 8.1: De códigos de color en el toro a códigos de color planares. a) Código de color embutido en un toro (no mostrado) codificando 4 cúbits lógicos. b) Código de color planar que resulta de eliminar un cúbit físico de un código hexagonal de color en una esfera, junto con sus tres enlaces, y deformarlo en un plano (ver figura 7.17). Los tres lados coloreados eliminados producen los lados del triángulo de colores rojo, azul y verde que codifican la homología de color relativa al borde.

Los códigos topológicos de color representan un enfoque de corrección de errores cuánticos que opera a nivel abstracto de software, independientemente de la tecnología física subyacente. En pocas palabras, son plataforma-independientes. Su diseño se basa en propiedades topológicas y matemáticas que protegen la información cuántica mediante estructuras geométricas bidimensionales, como el conocido modelo de color en retículas hexagonales. Esta independencia de plataforma permite implementarlos en diversos sistemas cuánticos, desde iones atrapados [129, 130], átomos neutros en redes ópticas [131-135], cúbits superconductores [136-138], hasta arquitecturas basadas en fermiones

de Majorana, pasando por sistemas fotónicos o de espines. La clave radica en que la protección topológica se logra mediante las relaciones lógicas entre cúbits en el código, no por las propiedades intrínsecas de los cúbits físicos. Estudios recientes demuestran su aplicabilidad en redes de cajas de Cooper Majorana [139], uniones Josephson superconductores, e incluso proponen formulaciones mediante modelos de Ising para su decodificación eficiente, evidenciando su versatilidad tecnológica [140]. Esta característica los posiciona como candidatos ideales para la computación cuántica universal, donde la corrección robusta de errores debe integrarse con diferentes implementaciones de hardware.

8.2 Plataforma de iones atrapados para computación cuántica

La tecnología de iones atrapados representa una de las plataformas más avanzadas para la implementación de computación cuántica. En estos sistemas, los cúbits están codificados en los estados electrónicos de átomos cargados (iones) que se mantienen suspendidos en el espacio mediante campos electromagnéticos.

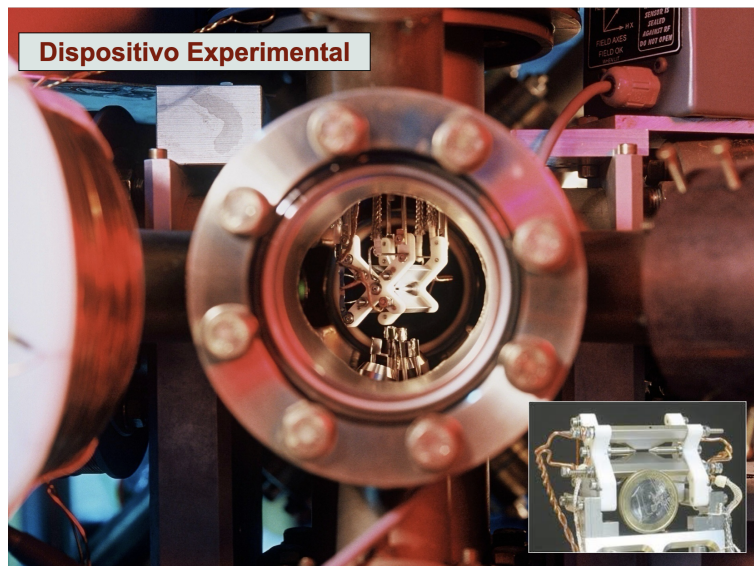


Figura 8.2: Dispositivo experimental mostrando la trampa de iones usada en el experimento para implementar el código de colores topológico minimal [129, 130]. A la derecha, se aprecia el detalle del tamaño de la trampa.

8.2.1 Principios básicos de operación

Los sistemas de iones atrapados funcionan confinando iones mediante campos electromagnéticos en cámaras de ultra-alto vacío. Las operaciones cuánticas se realizan a través de pulsos láser precisamente controlados que manipulan los estados electrónicos de los iones. La tecnología ofrece varias ventajas fundamentales:

- Alta fidelidad: Los cúbits de iones atrapados demuestran operaciones de alta precisión, con fidelidades de puerta superiores al 99.9 %.

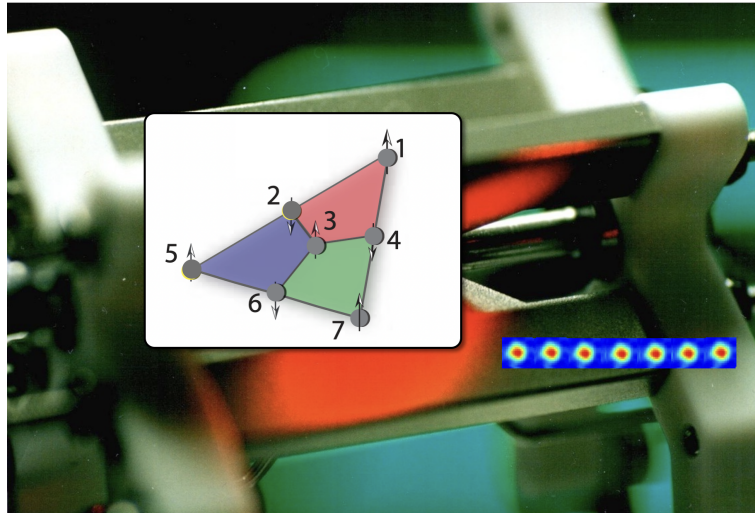


Figura 8.3: Representación del código de color minimal (7 cúbits) en una trampa de iones atrapados.

- Largos tiempos de coherencia: Los estados cuánticos de los iones permanecen estables durante períodos relativamente largos, facilitando operaciones cuánticas complejas.
- Conectividad total: Los iones pueden interactuar entre sí independientemente de su ubicación física, permitiendo implementar una amplia gama de algoritmos.

Sin embargo, esta plataforma también enfrenta desafíos significativos, principalmente relacionados con la escalabilidad y la velocidad de operación, ya que el movimiento físico de los iones es relativamente lento comparado con otras tecnologías cuánticas.

8.3 La Implementación Pionera con Trampas de Iones

El primer experimento para realizar el código de color minimal se realizó en 2014 fruto de una colaboración entre mi grupo teórico (GICC de la Facultad de CC. Físicas de la UCM) y el grupo experimental del Prof. Rainer Blatt en la Universidad de Innsbruck (Austria) [129, 130]. El experimento no solo demostró la codificación de información cuántica en este espacio protegido, sino que también implementó operaciones lógicas sobre el cúbit codificado. Por primera vez, conseguimos proteger un bit cuántico expuesto a todo tipo de errores. Además realizamos cálculos sobre un cúbit protegido sin que se pierda la información. Este trabajo representó un hito fundamental en el campo de la computación cuántica por varias razones:

1. Fue la primera demostración de un cúbit completamente protegido contra errores arbitrarios.
2. Logró aplicar con éxito secuencias de operaciones lógicas sobre el cúbit protegido.
3. Produjo uno de los estados cuánticos más complejos generados experimentalmente hasta ese momento.

La implementación del código de color topológico más pequeño (7 cúbits) en una trampa de iones se basa en un esquema triangular 2D con tres plaquetas, utilizando técnicas de corrección cuántica de errores (QEC). El código topológico de color 2D más pequeño C se implementa en un arreglo de 7 cúbits físicos (ver figura 8.4 a), organizados en una red triangular con tres plaquetas (roja, verde,

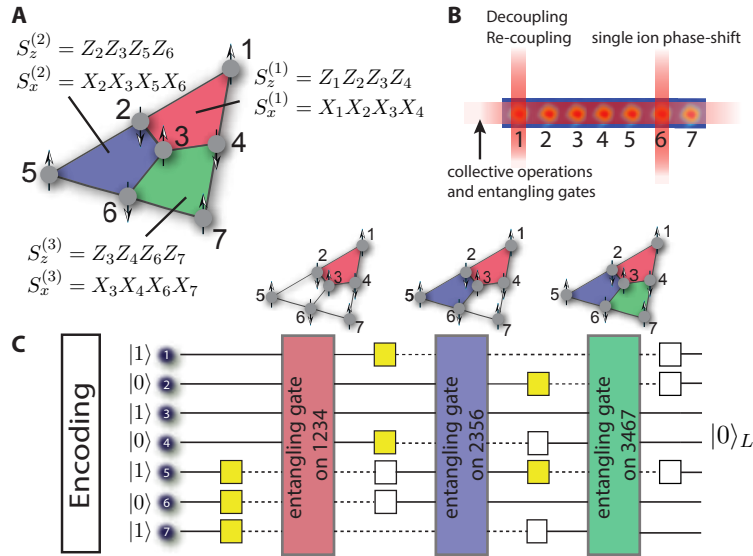


Figura 8.4: El código de color minimal. Está hecho de $n = 7$ cúbits físicos y tiene 6 plaquetas correspondientes a los $s = 6$ operadores estabilizadores. Almacena $k = 1$ cúbits lógicos.

azul). Cada plaqueta (cara) contiene 4 cúbits y está asociada a operadores estabilizadores:

$$\begin{aligned} S_x(1) &= X_1 X_2 X_3 X_4, & S_z(1) &= Z_1 Z_2 Z_3 Z_4, \\ S_x(2) &= X_2 X_3 X_5 X_6, & S_z(2) &= Z_2 Z_3 Z_5 Z_6, \\ S_x(3) &= X_3 X_4 X_6 X_7, & S_z(3) &= Z_3 Z_4 Z_6 Z_7, \end{aligned} \quad (8.1)$$

donde X_i, Z_i son matrices de Pauli. El espacio del código se define como el subespacio común de autovalores +1 de los 6 estabilizadores. Los estados lógicos $|0\rangle_L$ y $|1\rangle_L$ son autoestados del operador lógico Z_L definidos por:

$$\bar{Z} = Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 Z_5 Z_6 Z_7, \quad \bar{X} = X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 X_6 X_7. \quad (8.2)$$

Estos operadores lógicos reproducen el álgebra de Pauli para los estados codificados a nivel lógico.

$$\begin{aligned} \bar{Z}|\bar{0}\rangle &= |\bar{0}\rangle, & \bar{Z}|\bar{1}\rangle &= -|\bar{1}\rangle, \\ \bar{X}|\bar{0}\rangle &= |\bar{1}\rangle, & \bar{X}|\bar{1}\rangle &= |\bar{0}\rangle. \end{aligned} \quad (8.3)$$

8.3.1 Implementación experimental con iones atrapados

La configuración física se muestra en la figura 8.4 b) está formada por 7 iones de $^{40}\text{Ca}^+$ en una trampa lineal de Paul, con los cúbits físicos codificados en estados electrónicos metaestables ($S_{1/2}$ y $D_{5/2}$) que tienen tiempos de coherencia suficientemente largos. La “caja de herramientas” del laboratorio de Innsbruck contiene las siguientes operaciones cuánticas:

- Rotaciones colectivas:

$$U(\theta, \phi) = e^{-i\frac{\theta}{2} \sum_i (\sin \phi Y_i + \cos \phi X_i)}, \quad (8.4)$$

- Puertas entrelazantes de Mølmer-Sørensen:

$$MS(\theta, \phi) = e^{-i\frac{\theta}{4} \left(\sum_i (\sin \phi Y_i + \cos \phi X_i) \right)^2}. \quad (8.5)$$

- Desacoplamiento espectral: Técnica para aislar subconjuntos de cúbits durante operaciones en

plaquetas específicas.

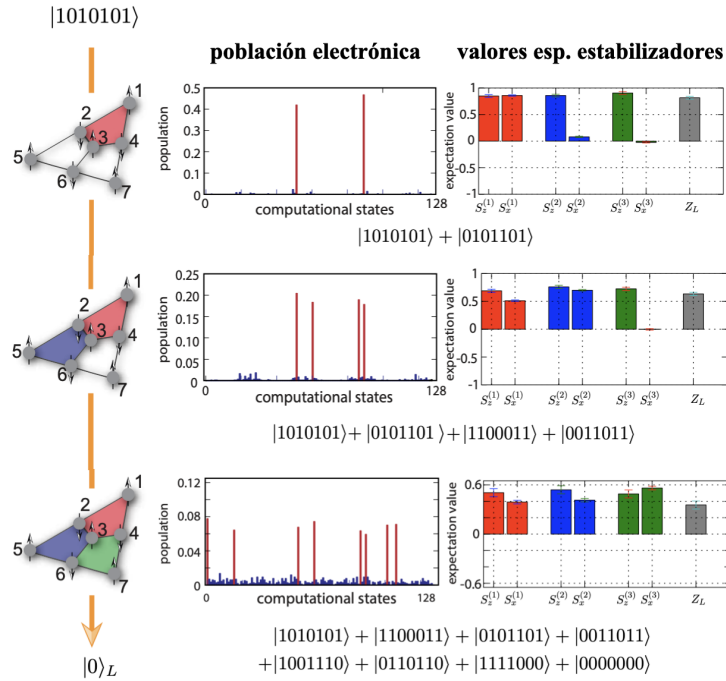


Figura 8.5: Codificación del cúbit lógico del código de color mínimo en una trampa de iones. El proceso de codificación se realizaba mediante un circuito cuántico que transforma coherentemente el estado de entrada $|1010101\rangle$ al estado lógico $|0\rangle_L$. Esto se logra en tres pasos secuenciales: i/ Preparación del sistema en un estado producto que satisfacía las condiciones $S_z^{(i)} = +1$ y $Z_L = +1$. ii/ Aplicación de operaciones de entrelazamiento por plaqueta para satisfacer las restricciones $S_x^{(i)} = +1$. iii/ Creación de entrelazamiento tipo GHZ entre los cuatro cúbits de cada plaqueta con una fidelidad de 88.8 %.

La preparación del estado lógico $|0\rangle_L$ empieza con el estado inicial $|1010101\rangle$, que satisface $\langle S_z(i) \rangle = +1$ y $\langle Z_L \rangle = +1$. Después se van aplicando las condiciones de los otros estabilizadores de plaqueta mediante el entrelazamiento plaqueta a plaqueta (ver figura 8.5):

- Se aplican puertas $MS(\pi/2, 0)$ a grupos de 4 cúbits por plaqueta, mientras los demás iones se desacoplan espectralmente.
- Ejemplo: Para la plaqueta roja (cúbits 1-2-3-4), se desacoplan los iones 5, 6, 7 y se aplica $MS(\pi/2, 0)$, generando un estado GHZ:

$$|1010101\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|1010101\rangle + i|0101010\rangle). \quad (8.6)$$

Para compensar las fases que aparecen se aplican pulsos de desplazamiento Stark $U_Z(i)(\pm\pi/2)$ para corregir fases acumuladas.

La fidelidad del estado codificado obtenido es $F = 32,7(8) \%$ para $|0\rangle_L$, superando el umbral de 25 % para detectar entrelazamiento multipartito. El solapamiento con el espacio del código es 34(1) %, con fidelidad dentro del código del 95(2) %. Las correlaciones topológicas se observan mediante la ausencia de orden local (fidelidad 98,3(2) % con estados mezcla en submatrices de 2 cúbits) así como la presencia de correlaciones globales $\langle Z_1 Z_4 Z_7 \rangle = -0,46(6)$.

8.3.2 Detección y corrección de errores

El código de color minimal detecta errores individuales (bit-flip X_i , phase-flip Z_i , o combinados Y_i) mediante violaciones de estabilizadores según se indica en la figura 8.6.

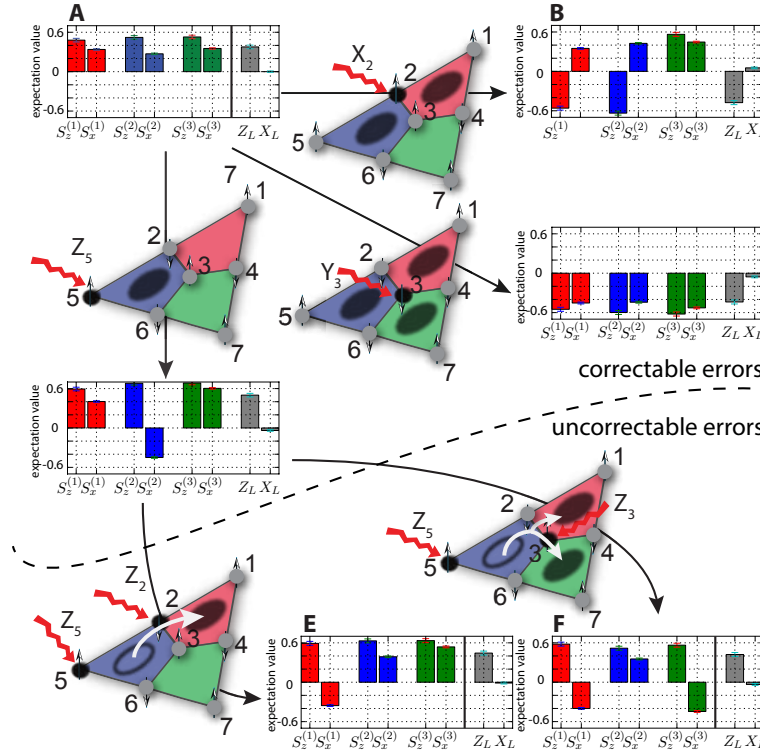


Figura 8.6: Efecto de errores en cúbits lógicos. (A) Estado lógico inicial $|0\rangle_L$ con estabilizadores $S_{x/z}^{(i)}$ positivos. (B-C) Errores X (bit-flip) y Z (phase-flip) alteran estabilizadores adyacentes (plaquetas grises) y operadores lógicos Z_L/X_L . (D) Error $Y (= X + Z)$ afecta múltiples plaquetas, invirtiendo todos los estabilizadores. (E-F) Errores dobles (ej: $Z_5 \rightarrow Z_2/Z_3$) generan síndromes ambiguos idénticos a errores simples (Z_1/Z_4), induciendo errores lógicos tras corrección. Dinámica topológica: Las violaciones de estabilizadores migran (flechas blancas) entre plaquetas adyacentes o se dividen, revelando el orden topológico del código.

El efecto de errores en cúbits lógicos puede ser visualizado a través de las violaciones que estos errores causan en los estabilizadores del sistema. Cuando un error de tipo inversión de bit (bit-flip), denotado como X_i , ocurre, provoca violaciones en los estabilizadores $S_z(j)$ que están asociados a las plaquetas que incluyen el cúbit i . A su vez, un error de tipo inversión de fase (phase-flip), representado por Z_i , viola los estabilizadores $S_x(j)$ correspondientes. Es importante notar que los síndromes de error resultantes son únicos para cada cúbit, como se muestra en la figura 8.6, lo que permite identificar y corregir el error físico presente.

La figura 8.6 ilustra cómo un error individual en un cúbit físico se manifiesta como una violación específica de los estabilizadores asociados. Por ejemplo, una inversión de bit, X_i , afecta los estabilizadores $S_z(j)$ en las plaquetas que contienen el cúbit i . Un caso ilustrativo es un error X_2 , que según se muestra en la figura 8.6B, invierte los signos de los estabilizadores $S_z(1)$ y $S_z(2)$, lo cual altera también el operador lógico Z_L . Por otro lado, una inversión de fase, Z_i , origina violaciones en los estabilizadores $S_x(j)$. Un ejemplo claro es cuando ocurre un error Z_5 ; como se observa en la Figura

2C, este error cambia el signo del estabilizador $S_x(2)$.

Además, un error combinado, denotado como $Y_i = iX_iZ_i$, genera violaciones simultáneas tanto en $S_x(j)$ como en $S_z(j)$. La figura 8.6D muestra que un error Y_3 resulta en la inversión de los signos de seis estabilizadores y del operador lógico Z_L .

Cada error produce un patrón único de síndromes, lo que se ve reflejado en la figura 8.6E-F, permitiendo así identificar el cúbit físico afectado mediante mediciones de estos estabilizadores. Específicamente, el síndrome generado por cada error individual proporciona un patrón único de violaciones; por ejemplo, un error X_2 resulta en $S_z(1) = -1$ y $S_z(2) = -1$. Sin embargo, también existen límites en la corrección de errores. Cuando ocurren dos errores, como Z_5 seguido de Z_2 , se generan síndromes indistinguibles de errores individuales, lo que puede llevar a errores lógicos, como se representa en la figura 8.6 E-F.

La dinámica topológica de los errores es otro aspecto que se puede considerar. Las violaciones de los estabilizadores pueden desplazarse entre plaquetas adyacentes bajo la influencia de múltiples errores, reflejando así la naturaleza no local del orden topológico, tal como se presenta en la figura 8.6E-F. La relación entre un error E y los estabilizadores violados se puede modelar mediante la ecuación:

$$S_j|\psi\rangle_L = (-1)^{c_j}|\psi\rangle_L, \quad c_j \in \{0, 1\}, \quad (8.7)$$

donde $c_j = 1$ indica que el estabilizador correspondiente está violado. Para cualquier error $E \in \{X_i, Z_i, Y_i\}$, los coeficientes c_j se determinan por la interacción superpuesta del error con los estabilizadores.

La figura 8.6 demuestra que el código de 7 cúbits es eficaz en la detección de inversiones de bit y de fase, así como sus combinaciones, corroborando su capacidad para realizar corrección de errores cuánticos. La implementación práctica de este esquema en sistemas de iones atrapados utiliza técnicas de desacoplamiento espectral y operaciones colectivas, con los síndromes medibles a través de protocolos de tomografía optimizados.

8.3.3 Operaciones lógicas transversales

Las operaciones del grupo Clifford son fundamentales en la computación cuántica y se implementan de manera transversal en un código de color como mostré en el capítulo 7, (proposición 7.5), lo cual es esencial para evitar la propagación de errores en el sistema. Una vez que el cúbit lógico ha sido codificado, se realizó experimentalmente el conjunto completo de operaciones de Clifford para un solo cúbit de forma transversal, aplicándose cúbit a cúbit. Durante estos experimentos, logramos fidelidades de operación notables: un 95 % para el estado $|0\rangle_L$, un 85 % para el estado $|+\rangle_L$, y un 87 % para otros estados. Estas métricas se consideran muy relevantes, ya que reflejan la capacidad de los sistemas de operación en cúbits lógicos bajo condiciones experimentales específicas.

Además, también ejecutamos cálculos más complejos, incluyendo hasta 10 operaciones consecutivas de la puerta lógica X_L de forma secuencial. Este resultado demuestra no solo la capacidad computacional del cúbit codificado, sino también la funcionalidad que se puede alcanzar en aplicaciones prácticas. Este experimento, sin duda, representa un paso crucial hacia la construcción de sistemas de computación cuántica que son tolerantes a fallos, utilizando códigos topológicos.

La figura 8.7 muestra un esquema detallado de la implementación de las operaciones lógicas del grupo Clifford en un cúbit codificado topológicamente. La descripción técnica a continuación incluye fórmulas clave y referencias relevantes a la estructura experimental utilizada. Como se ilustra

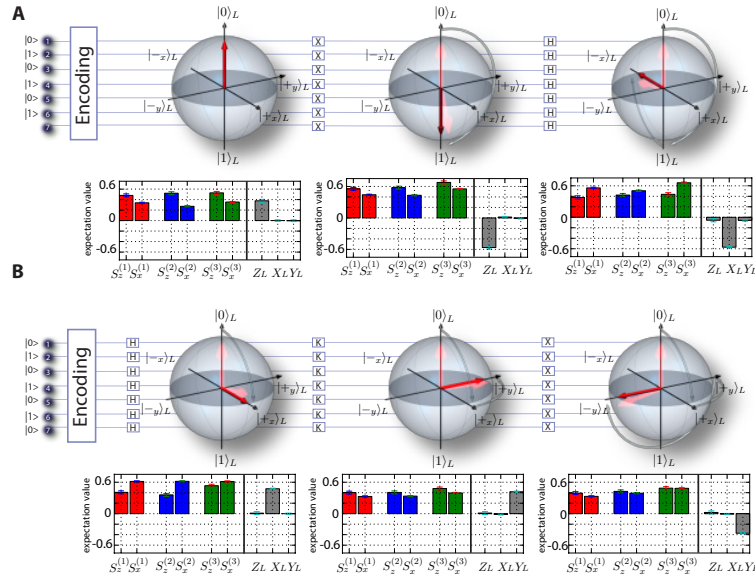


Figura 8.7: Operaciones de puertas Clifford de un solo cúbit aplicadas a un cúbit lógicamente codificado. Comenzando desde el estado lógico $|0\rangle_L$, se aplican secuencias de operaciones de puertas Clifford lógicas $\{X_L, H_L\}$ en (A) y $\{H_L, K_L, X_L\}$ en (B), de forma consecutiva y transversal (es decir, bit a bit) para realizar los seis estados cardinales $\{|0\rangle_L, |1\rangle_L, |-x\rangle_L, |+x\rangle_L, |+y\rangle_L, |-y\rangle_L\}$ del espacio lógico del cúbit codificado topológicamente. La dinámica bajo las operaciones de la puerta aplicada se ilustra mediante rotaciones del vector de Bloch (flecha roja) en la esfera de Bloch lógica, así como por el diagrama de circuito de fondo. Cada uno de los estados lógicos generados se caracteriza por el patrón medido de los estabilizadores $S_x^{(i)}$ y $S_z^{(i)}$, así como por el vector de Bloch lógico, cuyas tres componentes están dadas por los valores esperados de los operadores lógicos X_L, Y_L y Z_L . La orientación del vector de Bloch lógico cambia como se esperaba bajo las operaciones de puertas lógicas.

en la figura 8.7A-B, se pueden identificar diferentes enfoques para la implementación de las puertas lógicas. Primero, para la puerta X_L , se aplica un pulso global que se puede describir matemáticamente mediante la expresión:

$$U(\pi, 0) = e^{-i\frac{\pi}{2} \sum_i X_i}, \quad (8.8)$$

donde $U(\pi, 0)$ representa una rotación colectiva sobre todos los cúbits en la dirección del eje X del horizonte cuántico. Además, la puerta Z_L se realiza mediante desplazamientos locales que se conocen como desplazamientos Stark, representados matemáticamente por:

$$\prod_{i=1}^7 U_Z(i)(\pi). \quad (8.9)$$

Esto asegura que cada cúbit en el sistema experimenta un desplazamiento preciso y controlado, permitiendo la correcta aplicación de la puerta Z en cada uno de los cúbits físicos. Por otro lado, la implementación de la Hadamard lógico, denotada como H_L , requiere una combinación de rotaciones

colectivas junto con fases específicas. Esta combinación está encapsulada en las siguientes expresiones:

$$U(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cdot \prod_{i=1}^7 U_Z(i)(\pi). \quad (8.10)$$

Esta forma de realizar la Hadamard lógica es crucial para manipular el estado cuántico de los cúbits de tal manera que se obtengan los estados deseados.

Las secuencias de preparación de estados también son significativas en este contexto. Por ejemplo, para preparar el estado $|1\rangle_L$, se realiza la operación X_L sobre el estado base $|0\rangle_L$. Asimismo, para preparar el estado $|+_x\rangle_L$, se aplica H_L sobre el estado $|0\rangle_L$, y para el estado $|+_y\rangle_L$, se necesita primero aplicar H_L y luego S_L sobre $|0\rangle_L$, así:

$$|+_y\rangle_L = S_L H_L |0\rangle_L. \quad (8.11)$$

Es importante mencionar las fidelidades observadas dentro del espacio de código. Las mediciones de fidelidad para los distintos estados preparados son:

$$F(|0\rangle_L) = 95(2) \%, \quad F(|+_x\rangle_L) = 87(2) \%, \quad F(|+_y\rangle_L) = 85(3) \%. \quad (8.12)$$

Estos valores revelan el desempeño del sistema en la generación de estados lógicos y son indicativos de la calidad de las operaciones realizadas. Adicionalmente, se observó que los valores esperados promedio de los estabilizadores, $\langle S_x(i) \rangle$ y $\langle S_z(i) \rangle$, se mantienen en niveles aceptables de 0,48(2) después de la aplicación de hasta tres puertas Clifford. Esto sugiere que la estabilidad del sistema se conserva, lo que es esencial para cualquier implementación de computación cuántica robusta.

En conclusión, conseguimos demostrar que las operaciones del grupo Clifford pueden implementar un conjunto completo de operaciones cuánticas de manera segura y efectiva, lo que representa un avance significativo en el desarrollo de computación cuántica basada en códigos topológicos, mostrando así el potencial de los sistemas de cúbits en aplicaciones prácticas.

8.3.4 Aplicación Repetitiva de Puertas Lógicas

En el capítulo 2.2 mostré cómo el papel nocivo de la decoherencia y ruido externo se traduce en tiempos de operación más cortos para las puertas lógicas que hacen que la profundidad del circuito 2.4 se reduzca sustancialmente en ausencia de herramientas correctoras del ruido (ver figura 2.2). Nuestro experimento [129, 130] fue el primero en mostrar que la protección topológica frente al ruido es beneficiosa para poder aplicar trenes de puertas seguidos durante varias veces antes de que la decoherencia destruya las propiedades cuánticas del circuito. Anteriormente, lo normal era aplicar una sola puerta cuántica, digamos una CNOT, y ya no se podían aplicar más puertas pues el sistema había quedado inservible cuánticamente.

En nuestro estudio experimental, ampliamos el estudio de las capacidades computacionales del cúbit codificado mediante la ejecución de un circuito cuántico extendido, compuesto por hasta 10 operaciones lógicas X_L aplicadas sobre el estado inicial $|+_y\rangle_L$ (figura 8.8A). Los resultados obtenidos muestran claramente las transiciones esperadas entre autoestados de Y_L (figura 8.8B), evidenciadas por las siguientes observaciones:

- Oscilaciones en $\langle Y_L \rangle$.

- Valores nulos en $\langle X_L \rangle$ y $\langle Z_L \rangle$.
- Degradación moderada de los estabilizadores: 3,8(5) % por operación lógica.

En un análisis independiente de las propiedades de decoherencia (figura 8.84C), preparamos el estado de superposición $|+x\rangle_L$ y medimos los siguientes parámetros:

- Tiempo de coherencia lógica: $\tau_X^{(\text{lógico})} \approx 10\tau_{10 \text{ puertas}}$.
- Dinámica de decaimiento en $\langle X_L \rangle$ y $\langle Z_L \rangle$.

Estos hallazgos indican que la limitación principal en el rendimiento computacional no proviene de la decoherencia intrínseca, sino de imperfecciones en la ejecución de puertas Clifford lógicas, cuyas fidelidades concuerdan cuantitativamente con las operaciones locales individuales y colectivas del sistema experimental.

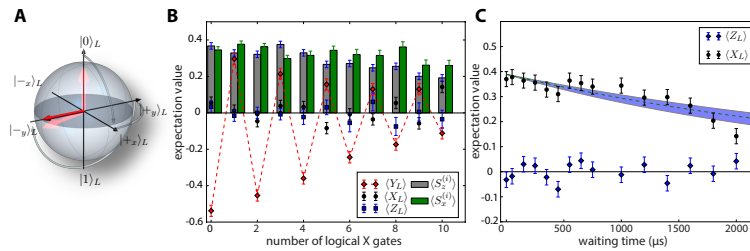


Figura 8.8: Aplicación repetitiva de operaciones de puertas cuánticas lógicas. (A) Preparación del estado $|-y\rangle_L$ mediante la aplicación de operaciones de puertas H_L , K_L y X_L sobre el cúbit que inicialmente se preparó en el estado $|0\rangle_L$. (B) Posteriormente, se inducen cambios entre los estados lógicos $|+y\rangle_L$ y $|-y\rangle_L$ al aplicar consecutivamente operaciones de puertas lógicas X_L hasta 10 veces. El cambio de signo en el valor esperado de Y_L (rombos rojos) después de cada paso señala de forma clara los cambios inducidos en el vector de Bloch lógico, mientras que los valores esperados de Z_L (cuadrados azules) y X_L (círculos negros) se mantienen cercanos a cero, como era de esperar (el promedio de $\{\langle Z_L \rangle, \langle X_L \rangle\}$ da como resultado $\{0,01(1), -0,01(1)\}$). Los valores esperados promedios de los estabilizadores $S_z^{(i)}$ (en barras grises) y $S_x^{(i)}$ (en barras verdes) después de cada puerta X_L se muestran como barras grises y verdes, respectivamente. (C) Caracterización de la coherencia del cúbit lógico, que se preparó inicialmente en el estado propio de X_L , $|+x\rangle_L$. Una medición de la decadencia del valor esperado de X_L (círculos negros) en función del tiempo muestra un tiempo de $1/e$ de 3.6(6) ms, mientras que el valor esperado de Z_L (rombos azules) permanece en cero, como se esperaba (promedio de 0.001(8)).

8.3.5 Desarrollos Experimentales Posteriores

Después del trabajo seminal sobre el experimento con los códigos de color en trampas de iones [129, 130], se ha abierto el camino para la realización de más hitos en el camino de la computación cuántica tolerante a fallos usando estos códigos de colores. A continuación enumero algunos de los más relevantes.

El grupo experimental de Innsbruck lograron implementar, en un procesador de iones atrapados [141], un conjunto universal de puertas cuánticas lógicas de manera tolerante a fallos, utilizando el código de color de siete cúbits (también conocido como el código de Steane). La tolerancia a fallos se consigue mediante la técnica de “flag fault tolerance”, que emplea cúbits auxiliares (cúbits bandera)

para detectar la presencia de errores peligrosos durante las operaciones, permitiendo así descartar y repetir los procesos cuando se detectan fallos irreparables.

Entre sus principales logros experimentales destacan la realización de una puerta lógica CNOT transversal entre dos cúbits lógicos, la preparación tolerante a fallos de un estado mágico lógico y la implementación de la puerta lógica T (no-Clifford) mediante la inyección de dicho estado mágico a través de teleportación. Estas operaciones constituyen un conjunto universal de puertas, esencial para la computación cuántica general. Los resultados muestran que la implementación tolerante a fallos supera en fidelidad a la versión no tolerante, incluso considerando el aumento en la complejidad y el número de operaciones requeridas. Además, los resultados experimentales concuerdan bien con simulaciones numéricas basadas en modelos de ruido despolarizante, lo que valida la robustez del enfoque experimental. Este trabajo representa un paso fundamental hacia la computación cuántica universal y protegida contra errores, al demostrar que es posible realizar operaciones lógicas universales de manera tolerante a fallos en hardware real.

8.4 Implementación de Quantinuum (Honeywell) con Trampas de Iones

Quantinuum, anteriormente conocida como Honeywell Quantum Solutions, ha realizado avances significativos en la implementación de códigos de color para computación cuántica tolerante a fallos, utilizando su arquitectura propietaria de iones atrapados [142-145]. La arquitectura utilizada por Quantinuum en sus computadoras cuánticas de iones atrapados se basa en un diseño escalable que combina movimientos controlados de iones con operaciones cuánticas de alta fidelidad. Estos son sus componentes clave. El sistema H2 de Quantinuum, con 56 cúbits, demuestra la escalabilidad de esta arquitectura, logrando una fidelidad de puerta de dos cúbits $> 99,8\%$ y volumen cuántico récord [144, 145]. La capacidad de realizar operaciones condicionales basadas en mediciones (como en el algoritmo RCS con JPMorgan Chase) posiciona Quantinuum como una plataforma líder para corrección de errores cuánticos [143, 145].

Quantinuum ha realizado la implementación experimental de un sumador de un bit de manera tolerante a fallos utilizando el código de color $[[8,3,2]]$ ($n = 8$ cúbits físicos, $k = 3$ cúbits lógicos, distancia $d = 2$) en un computador cuántico de iones atrapados. El trabajo aborda uno de los desafíos fundamentales de la computación cuántica: la necesidad de reducir las tasas de error mediante la corrección cuántica, especialmente cuando se requieren operaciones no-Clifford, esenciales para la universalidad. Tradicionalmente, la implementación de puertas no-Clifford de forma tolerante a fallos implica elevados recursos, como la destilación de estados mágicos, lo que dificulta su ejecución en hardware cuántico actual. En contraste, el código de color $[[8,3,2]]$ permite realizar la puerta CCZ (no-Clifford) de manera transversal y, por tanto, tolerante a fallos, simplificando notablemente el circuito y reduciendo la cantidad de puertas y mediciones necesarias [146].

Los autores logran implementar un circuito de suma de un bit con 24 puertas CNOT y 12 mediciones, eliminando circuitos de corrección de errores innecesarios y empleando técnicas de preparación y

medición de bajo costo. Al comparar el rendimiento de este circuito tolerante a fallos con su versión no codificada, se observa una reducción significativa en la tasa de errores aritméticos: aproximadamente 0.11 % para el circuito tolerante a fallos frente a 0.95 % para el circuito sin codificación, ejecutados en el mismo hardware. Además, el estudio demuestra que la sobrecarga de recursos (en términos de número de cúbits y puertas) es mucho menor que la de implementaciones equivalentes basadas en códigos de superficie, que requerirían más de diez veces la cantidad de cúbits físicos para lograr una tasa de error comparable.

Entre sus logros principales del experimento destacan: la demostración experimental de un algoritmo aritmético elemental (suma de un bit) de manera tolerante a fallos con un código de color pequeño, la reducción sustancial de la sobrecarga de recursos frente a otras arquitecturas de corrección de errores, y la validación de técnicas que combinan puertas transversales, preparación postseleccionada y omisión selectiva de circuitos de corrección de errores. Estos avances no solo acercan la ejecución práctica de algoritmos cuánticos útiles en hardware actual, sino que también sientan las bases para el diseño de circuitos más eficientes y escalables en computación cuántica tolerante a fallos.

En otro experimento, Quantinuum ha presentado la primera demostración experimental de teletransportación cuántica de un cúbit lógico de manera tolerante a fallos utilizando el código de color topológico $[[7,1,3]]$ [147] en un procesador cuántico de iones atrapados. Los autores implementan y comparan diferentes variantes del protocolo de teletransportación: a nivel físico, a nivel lógico mediante puertas transversales y a nivel lógico mediante cirugía de retículo (lattice surgery) [148], empleando hasta 30 cúbits físicos y corrección de errores en tiempo real. El código de color es fundamental en este trabajo, ya que permite la codificación y protección del cúbit lógico contra errores, facilitando la ejecución de operaciones lógicas tolerantes a fallos, como la teletransportación y la manipulación de información cuántica de manera robusta.

Entre los logros principales, destacan la obtención de fidelidades de proceso elevadas para los distintos esquemas: 0.9895 para la teletransportación física, 0.975 para el circuito lógico con corrección de errores (CCE), y 0.851 para el circuito de cirugía de retículo, además de una fidelidad de 0.989 en el protocolo tipo Knill de corrección de errores. El uso del código de color permitió, por primera vez, la implementación de cirugía de retículo en un código corrector de errores cuánticos de distancia 3, mostrando la versatilidad del procesador y del enfoque experimental. El experimento también discute las ventajas y desafíos de cada método, subrayando que la cirugía de retículo, aunque actualmente tiene menor fidelidad que las puertas transversales, ofrece alternativas prometedoras para arquitecturas cuánticas escalables y con restricciones de conectividad. Este trabajo representa un avance significativo en la computación cuántica tolerante a fallos, demostrando la viabilidad de la teletransportación lógica y la cirugía de retículo en códigos de color. Los resultados sientan las bases para futuras optimizaciones y para la comparación directa entre diferentes paradigmas de corrección de errores, acercando el objetivo de operaciones cuánticas fiables y escalables en hardware real.

8.5 Implementación con Átomos Neutros de QuEra MIT-Harvard

La plataforma de códigos de color en procesadores cuánticos de átomos neutros desarrollada por QuEra Computing representa un avance significativo hacia la computación cuántica universal tolerante a fallos. Basada en investigaciones pioneras de la Universidad de Harvard y el MIT, esta tecnología utiliza átomos individuales de rubidio-87 (^{87}Rb) dispuestos en retículos reconfigurables mediante pinzas ópticas y controlados por pulsos láser de precisión [149, 150]. En 2024, el equipo de QuEra demostró experimentalmente la destilación de estados mágicos lógicos (MSD de Magic State Distillation) en códigos de color 2D, logrando fidelidades de hasta el 99.4 % en su procesador cuántico Gemini. Este hito subraya el potencial de los sistemas de átomos neutros para implementar protocolos complejos de corrección de errores con eficiencia superior a plataformas competidoras. A diferencia de los códigos de superficie de Kitaev, los códigos de color admiten estructuras poliédricas en geometrías 2D y 3D, facilitando la realización de puertas lógicas universales sin requerir operaciones auxiliares complejas. Su capacidad para codificar múltiples cúbits lógicos en una sola capa topológica los hace particularmente adecuados para arquitecturas cuánticas con restricciones de conectividad, como las basadas en átomos neutros.

La destilación de estados mágicos (MSD), propuesta por Bravyi y Kitaev en 2005, resuelve una limitación fundamental de la computación cuántica tolerante a fallos: la imposibilidad de implementar operaciones no-Clifford de manera directa [151]. Según el teorema de Gottesman-Knill, las operaciones Clifford pueden simularse eficientemente en computadoras clásicas, por lo que los estados mágicos —recursos cuánticos que permiten realizar operaciones no-Clifford mediante teleportación cuántica— son esenciales para lograr ventaja cuántica [152, 153].

El protocolo de MSD implementado por QuEra sigue un esquema “5-a-1”, donde cinco estados mágicos de baja fidelidad se combinan para producir un único estado de mayor calidad. Este proceso aprovecha la supresión cuadrática de errores inherente a los códigos de color de distancia 3 y 5, donde la distancia del código determina el número máximo de errores corregibles. La elección de códigos de color sobre códigos de superficie se justifica por su mayor eficiencia en la implementación transversal de operaciones lógicas, reduciendo la sobrecarga computacional en un factor proporcional a la distancia del código.

El procesador Gemini de QuEra integra 256 cúbits físicos de átomos neutros en una arquitectura Field-Programmable Quantum Array (FPQA), permitiendo reconfiguración dinámica de la disposición atómica con una precisión de 4 μm . Esta flexibilidad espacial resulta crítica para implementar códigos de color 2D, que requieren patrones geométricos específicos de átomos entrelazados. Las operaciones se realizan mediante:

1. Bloqueo Rydberg: Interacción dipolar que evita la excitación simultánea de átomos adyacentes, permitiendo la creación de puertas CZ con fidelidades del 99.5 %.
2. Control láser global: Pulsos de microondas y láseres sintonizables que manipulan los estados electrónicos de los átomos sin necesidad de direccionamiento individual.

En el experimento de MSD, se codificaron diez cúbits lógicos de distancia 3 y cinco de distancia 5, representando el código de color más grande implementado hasta la fecha. Cada cúbit lógico se construyó mediante el entrelazamiento de 7 (distancia 3) o 13 (distancia 5) cúbits físicos, aprovechando la conectividad total de la plataforma. El protocolo de destilación demostró una mejora cuantificable en la fidelidad lógica:

1. Códigos de distancia 3: Fidelidad de entrada del 95.1 % $\rightarrow$ Fidelidad de salida del 99.4 %.
2. Códigos de distancia 5: Fidelidad de entrada del 92.5 % $\rightarrow$ Fidelidad de salida del 98.6 %.

Estos resultados validaron la relación teórica,

$$F_{\text{out}} = 1 - 5(1 - F_{\text{in}})^2 + O((1 - F_{\text{in}})^3), \quad (8.13)$$

característica de la supresión cuadrática de errores en esquemas de MSD. La fidelidad medida superó el umbral del 99 % necesario para aplicaciones prácticas, aunque aún se requieren mejoras para permitir múltiples rondas de destilación consecutivas.

Los sistemas de átomos neutros ofrecen ventajas únicas frente a plataformas competidoras como superconductores o iones atrapados:

1. Cúbits idénticos: Los átomos de ^{87}Rb son indistinguibles cuánticamente, eliminando la necesidad de calibración individual.
2. Tiempos de coherencia prolongados: Hasta 10 segundos para estados hiperfinos, comparado con $\sim 100 \mu\text{s}$ en cúbits superconductores.
3. Operación a temperatura ambiente: Reduce la complejidad criogénica y permite sistemas más compactos.

La reciente financiación de 230 millones de dólares liderado por Google Quantum AI y SoftBank [150] respalda el potencial escalable de esta tecnología, destinado a desarrollar sistemas con > 1000 cúbits lógicos para 2027. La arquitectura dual del procesador Gemini permite la integración de modos de trabajo analógico-digitales, alternando entre ambos:

1. Modo analógico: Optimizado para simulaciones cuánticas y algoritmos de optimización, con entrelazamiento masivo en tiempos $< 100 \mu\text{s}$.
2. Modo digital: Implementación de circuitos cuánticos universales mediante puertas lógicas de 1 y 2 cúbits con fidelidades $> 99\%$.

Esta dualidad posiciona a los procesadores de átomos neutros como plataformas versátiles para abordar problemas tanto de dinámica cuántica como de procesamiento de información convencional.

La reciente colaboración entre QuEra y Google Quantum AI explora aplicaciones de MSD en algoritmos de aprendizaje automático cuántico, donde los estados mágicos podrían acelerar operaciones de kernel en modelos de soporte vectorial cuántico. Esta sinergia podría reducir el costo de recursos para problemas de clasificación complejos en un 40 % según simulaciones preliminares. A pesar de todos estos logros, existen limitaciones actualmente y se ha propuesto una hoja de ruta que incluye los siguientes principales desafíos:

1. Tasas de error residuales: Errores SPAM (preparación y medición) del 1.5 % limitan la profundidad de circuitos tolerantes a fallos.
2. Escalabilidad óptica: El uso de moduladores espaciales de luz (SLM) para trampas atómicas introduce cuellos de botella en la velocidad de reconfiguración.

Las mejoras proyectadas en la tecnología FPQA apuntan a superar estas limitaciones mediante el uso de inteligencia artificial para optimizar la disposición atómica y algoritmos de compilación cuántica adaptativos.

La plataforma de QuEra ha establecido un nuevo estándar en la implementación práctica de códigos de color y protocolos de corrección de errores cuánticos. Al combinar las ventajas únicas de los átomos neutros —escalabilidad, coherencia prolongada y reconfigurabilidad— con avances teóricos en códigos topológicos, este enfoque acerca la computación cuántica tolerante a fallos a la viabilidad práctica. Sin embargo, el camino hacia procesadores universales requiere avances coordinados en fidelidad de operaciones, integración de sistemas de control y desarrollo de algoritmos adaptados a las peculiaridades hardware. La reciente inyección de capital y las colaboraciones industriales sugieren que la próxima década podría presenciar la transición definitiva de esta tecnología desde laboratorios de investigación a aplicaciones comerciales críticas.

8.6 Implementación con Cúbits Superconductores de Google Quantum AI

Los recientes avances en el chip cuántico Willow de Google representan un hito significativo en la implementación de códigos de color topológicos para computación cuántica tolerante a fallos. Estas implementaciones no solo han demostrado la viabilidad de los códigos de color en sistemas de cúbits superconductores, sino que también han revelado ventajas significativas frente a otros enfoques de corrección de errores cuánticos.

Willow representa la última generación de procesadores cuánticos superconductores desarrollados por Google Quantum AI. Anunciado a finales de 2024, este chip de 105 cúbits ha marcado dos logros fundamentales: la reducción exponencial de errores al aumentar el número de cúbits y la realización de cálculos en minutos que tomarían miles de millones de años a los supercomputadores clásicos más potentes [154].

A diferencia de las implementaciones de códigos de color anteriores, el trabajo de Google ha abordado específicamente las propiedades de escalado del código, demostrando que el aumento de la distancia del código de tres a cinco suprimió errores lógicos por un factor de 1.56. Esta investigación ha mostrado que con mejoras modestas en el rendimiento de cúbits físicos, los códigos de color podrían potencialmente superar en eficiencia a los códigos de superficie.

El equipo de Google también ha hecho avances significativos en operaciones lógicas, logrando puertas de Clifford transversales con un error añadido muy bajo (solo 0.0027 por operación). Realizaron con éxito la inyección de estados mágicos con fidelidades superiores al 99 % y demostraron la teleportación de estados lógicos entre códigos de color de distancia tres utilizando cirugía de retículo, alcanzando fidelidades de teleportación de hasta el 90.7 %.

El chip fue fabricado en la nueva instalación de Google en Santa Barbara, California y representa un avance significativo respecto a su predecesor Sycamore. Las mejoras en el diseño han permitido un aumento de cinco veces en el tiempo de coherencia T_1 (de 20 a 100 microsegundos) y aproximadamente

el doble de fidelidad en las puertas lógicas. Estas características han convertido a Willow en una plataforma ideal para implementar códigos cuánticos de corrección de errores más complejos y exigentes, como los códigos de color. La principal promesa de Willow radica en su capacidad para demostrar operaciones “por debajo del umbral”(ver teorema 3.1, lo que significa que los errores disminuyen exponencialmente al aumentar el tamaño del código, un requisito fundamental para la computación cuántica a gran escala tolerante a fallos.

Los códigos de color representan una familia de códigos cuánticos topológicos prometedores para la computación tolerante a fallos. A diferencia de otros códigos como el código de superficie, los códigos de color ofrecen ventajas significativas en términos de operaciones lógicas y eficiencia de recursos, aunque también presentan desafíos en la implementación práctica.

Un aspecto crucial de los códigos de color es su umbral de error, que determina la tasa de error física por debajo de la cual la corrección de errores resulta efectiva. Investigaciones recientes han establecido un umbral de aproximadamente 0.47 % para el código de color triangular 6.6.6. bajo un modelo de ruido a nivel de circuito, acercándose cada vez más al rendimiento del código de superficie de Kitaev [155].

La implementación de códigos de color en Willow representa uno de los experimentos más completos de corrección de errores cuánticos realizados hasta la fecha. Los investigadores de Google Quantum AI demostraron la supresión de errores lógicos y la realización de operaciones lógicas utilizando el código de color [156]. La arquitectura experimental aprovecha la disposición de los 105 cúbits superconductores en Willow para implementar versiones escalables del código de color triangular. La configuración permite medir los operadores estabilizadores necesarios para detectar y corregir errores, a pesar de las limitaciones de conectividad inherentes a los procesadores cuánticos planares como Willow.

Los resultados experimentales muestran una clara evidencia de escalabilidad ya que al aumentar la distancia del código de 3 a 5, los errores lógicos se suprimieron por un factor de aproximadamente 1.56. Aunque este factor de mejora ($\Lambda_{3/5}$) es algo menor que el 2.14 previamente reportado con el código de superficie de Kitaev en el mismo procesador, demuestra claramente que la implementación está operando por debajo del umbral de error, lo que indica que el rendimiento mejoraría sistemáticamente con códigos de mayor distancia. En el contexto de corrección de errores cuánticos, la expresión $\Lambda_{3/5}$ se refiere a un factor de mejora en la supresión de errores al escalar códigos de corrección. Su definición es la siguiente:

$$\Lambda_{d/d'} := \frac{\epsilon_d}{\epsilon_{d'}}, \quad (8.14)$$

donde $\Lambda_{3/5}$ es el factor de mejora al escalar la distancia de 3 a 5 en los códigos, ϵ_3 es la tasa de error lógico con distancia 3 y ϵ_5 es la tasa de error lógico con distancia 5. La interpretación de estos valores es la siguiente. Valores $\Lambda > 1$ indican una mejora al aumentar la distancia. Por ejemplo con $\Lambda_{3/5} = 1.56$:

$$\epsilon_5 = \frac{\epsilon_3}{1.56} \Rightarrow \text{Reducción del 56 \%}. \quad (8.15)$$

La siguiente tabla muestra los resultados clave en el procesador Willow. Estos valores demuestran que

Cuadro 8.1: Comparación de factores de mejora Λ .

<i>Tipo de Código</i>	$\Lambda_{3/5}$
Código de Superficie	2.14
Código de Color	1.56

ambos códigos operan *por debajo del umbral de error*, condición necesaria para una corrección eficaz de errores, la escalabilidad cuántica y para operaciones lógicas estables.

Una de las ventajas más significativas de los códigos de color es su capacidad para implementar un conjunto más rico de operaciones lógicas transversales, particularmente las puertas Clifford. El experimento en Willow demostró esta capacidad implementando con éxito puertas Clifford transversales con un error adicional de solo 0.0027(3), sustancialmente menor que el error de un ciclo de corrección de errores en estado inactivo. Este resultado es particularmente relevante porque las puertas Clifford transversales representan una forma natural y eficiente de realizar operaciones lógicas en códigos de corrección de errores, minimizando la introducción de nuevos errores durante la manipulación de la información cuántica.

Además de las puertas Clifford, el equipo logró inyectar estados mágicos con fidelidades superiores al 99 % mediante post-selección (reteniendo aproximadamente el 75 % de los datos). Esta capacidad es fundamental para la computación cuántica universal, ya que los estados mágicos complementan las puertas Clifford para permitir cualquier operación cuántica arbitraria. Aquí es donde de nuevo los códigos topológicos de color muestran su bondad ya que hacen posible que la destilación de estados mágicos se pueda hacer de forma completamente topológica, y por tanto, más robusta.

Un logro particularmente notable ha sido la teleportación de estados lógicos entre códigos de color de distancia tres mediante cirugía de retículo, logrando fidelidades de teleportación entre 86.5(1) % y 90.7(1) %. La cirugía de retículo es una técnica clave para realizar operaciones entre cúbits lógicos distintos sin necesidad de reorganizar físicamente los cúbits subyacentes, lo que resulta crucial para arquitecturas planares como las de los procesadores superconductores. El experimento en Willow proporciona evidencia empírica de las ventajas teóricas que los códigos de color ofrecen frente a otros códigos topológicos, particularmente el código de superficie que ha sido el enfoque dominante en implementaciones anteriores. La principal ventaja de los códigos de color radica en su capacidad para implementar un conjunto más completo de operaciones lógicas de forma transversal.

Otra ventaja potencial identificada en las simulaciones es que, con mejoras modestas en el hardware, el código de color podría ser más eficiente que el código de superficie en términos del número de cúbits físicos necesarios para lograr un nivel dado de protección lógica.

A pesar de los avances significativos, la implementación de códigos de color en plataformas de cúbits superconductores todavía enfrenta varios desafíos importantes. Los códigos de color requieren mediciones de estabilizadores más complejas y técnicas de decodificación más sofisticadas en comparación con el código de superficie. La decodificación eficiente de los síndromes de error en códigos de color es un área activa de investigación. Recientemente se han desarrollado varios decodificadores adaptados específicamente para códigos de color, incluyendo decodificadores basados en redes neuronales, y algoritmos de paso de mensajes [157]. Otro desafío importante es la cirugía de

retículo en códigos de color, que permite operaciones entre cúbits lógicos distintos. Investigaciones recientes han abordado la decodificación a nivel de circuito para la cirugía de retículo del código de color, proporcionando algoritmos eficientes que son cruciales para realizar operaciones lógicas en arquitecturas bidimensionales [155]. El futuro del desarrollo de códigos de color en plataformas superconductoras parece prometedor, con varios avances potenciales en el horizonte. Estos incluyen esquemas de cirugía de retículo para diseños híbridos 6.6.6-4.8.8 que ofrecen menor overhead de recursos en comparación con esquemas análogos de código de superficie, y circuitos de destilación de estados mágicos de bajo overhead utilizando cúbits bandera o cirugía de retículo.

La implementación exitosa de códigos de color en el procesador Willow de Google representa un avance significativo hacia la computación cuántica tolerante a fallos a gran escala. Los resultados experimentales demuestran claramente que los códigos de color no solo son teóricamente atractivos sino también prácticamente viables en plataformas de cúbits superconductores actuales. Estos estudios confirman que los códigos de color representan no solo un fascinante ejemplo de fases de materia topológicamente ordenadas, sino también uno de los modelos candidatos más prometedores para realizar computación cuántica tolerante a fallos con un overhead de recursos mínimo. Esta implementación en cúbits superconductores representa un desarrollo crítico, ya que demuestra la viabilidad de los códigos de color en la plataforma de computación cuántica comercial más madura, potencialmente influyendo en la dirección de la investigación en computación cuántica tolerante a fallos a través de la industria.

8.7 Ventajas de los Códigos de Color para la Computación Cuántica Tolerante a Fallos

En todas estas realizaciones experimentales, los códigos de color han demostrado varias ventajas clave que los posicionan como una alternativa convincente a otros códigos de corrección de errores cuánticos para la computación cuántica tolerante a fallos:

8.7.1 Codificación Eficiente

Los códigos de color pueden codificar cúbits lógicos con menos cúbits físicos que los códigos de superficie comparables: se requieren aproximadamente un 25 % menos de cúbits físicos. Esta eficiencia de recursos se vuelve cada vez más importante a medida que los sistemas cuánticos aumentan de escala y las limitaciones de recursos se convierten en factores limitantes.

8.7.2 Operaciones Clifford Transversales

A diferencia de los códigos de superficie, los códigos de color permiten que todo el conjunto de puertas de Clifford se implemente de forma transversal. Esta propiedad es particularmente valiosa, ya que las operaciones transversales evitan que los errores se propaguen entre cúbits, haciéndolos intrínsecamente tolerantes a fallos.

8.7.3 Operaciones Lógicas Simplificadas

La estructura de los códigos de color permite una implementación más sencilla de ciertas operaciones lógicas que son un reto en otras familias de códigos. Esta simplificación puede llevar a una menor sobrecarga en la implementación de algoritmos cuánticos a nivel lógico.

8.7.4 Mejora de los Umbrales de Error

Si bien tradicionalmente se ha considerado que los códigos de color tienen umbrales de error más bajos que los códigos de superficie, investigaciones recientes han reducido significativamente esta brecha. El trabajo de Google demostró la supresión de errores lógicos por debajo del umbral, indicando que los códigos de color se están volviendo cada vez más prácticos a medida que mejora el hardware.

8.7.5 Potencial de Escalado Superior

Las simulaciones sugieren que con mejoras modestas en el rendimiento de los cúbits físicos, los códigos de color podrían superar a los códigos de superficie en términos de eficiencia y requisitos de recursos. Este comportamiento favorable de escalado los hace particularmente atractivos para arquitecturas de computación cuántica a largo plazo.

8.7.6 Computación Cuántica Universal

En tres dimensiones, los códigos de color pueden implementar un conjunto de puertas universales transversales sin la necesidad de un costoso proceso de destilación de estados. Incluso en implementaciones bidimensionales, el manejo eficiente de la destilación de estados mágicos hace que la computación cuántica universal sea más accesible.

8.8 El Futuro de los Códigos de Color en la Computación Cuántica

El viaje de los códigos de color desde concepto académico hasta realidad experimental a través de múltiples plataformas de computación cuántica demuestra su versatilidad y potencial. Cada implementación—desde el trabajo pionero en trampas de iones, pasando por las aplicaciones comerciales de Quantinuum, las innovaciones de átomos neutros de QuEra, hasta la demostración de cúbits superconductores de Google—ha contribuido con conocimientos únicos y ha avanzado el campo hacia la computación cuántica tolerante a fallos práctica.

A medida que el hardware cuántico continúa mejorando, las ventajas inherentes de los códigos de color—codificación eficiente, operaciones transversales y escalado favorable—los posicionan como un candidato líder para la arquitectura de corrección de errores de futuras computadoras cuánticas tolerantes a fallos. El desarrollo continuo a través de plataformas diversas sugiere un futuro brillante

para los códigos de color en el paisaje de la computación cuántica. Si bien permanecen desafíos significativos para escalar estas implementaciones a los tamaños necesarios para una ventaja cuántica práctica, el progreso constante a través de diversas plataformas indica que los códigos de color desempeñarán un papel central en la realización de la computación cuántica tolerante a fallos.

Capítulo 9 Tecnologías Cuánticas con Códigos de Color Topológicos

Sumario

- Patentes de Color Codes
- Amazon AWS
- IBM
- PsiQuantum
- Teleportación Cuántica Topológica

9.1 Patentes Principales sobre Códigos de Color Topológicos para Computación Cuántica

En la siguiente lista detallo las patentes identificadas relacionadas con códigos de color topológicos para computación cuántica, con un enfoque particular en aquellas que involucran cirugía de retículo (lattice surgery) y corrección de errores cuánticos. En esta lista analizo el panorama actual de las patentes en EE.UU. que involucran específicamente códigos de color topológicos cuánticos, identificando empresas clave, autores y el propósito de cada patente. A continuación presento descripciones detalladas de las patentes relevantes en este campo, con énfasis en las tecnologías relacionadas con códigos de color topológicos.

1. Patente: US11966817B1

Título: “Teleporting magic states from a color code to a surface code and decoding a merged surface-color code”

Inventores: Noah John Shutty, Christopher Chamberland

Asignado a: Amazon Technologies Inc.

Fecha de solicitud: 14 de marzo de 2022

Fecha de publicación: 23 de abril de 2024

Resumen: Esta patente detalla técnicas para teleportar estados cuánticos entre códigos correctores de errores, utilizando un proceso conocido como cirugía de retículo. Facilita la computación cuántica tolerante a fallos al combinar las ventajas de códigos de color y códigos de superficie.

2. Patente: US20250068958

Título: “Fault-tolerant quantum computing using color code lattice surgery”.

Fecha de Presentación: 5 de mayo de 2023

Propósito: Se centra en la corrección cuántica de errores mediante un método de agrupamiento con una subrutina de paso de mensajes para códigos de color. Mejora la decodificación eficiente.

Características clave:

- Método de corrección de errores en computadoras cuánticas.
- Uso de cúbits de síndrome para agrupar vértices.
- Procedimiento de agrupamiento para identificar cúbits de datos.

Ventajas:

- Tolerancia a fallos.
- Implementación en entornos criogénicos.
- Escalable y eficiente.

3. Patente: US11900221B1

Título: “Error correction decoding techniques for lattice surgery”.

Inventores: Christopher Chamberland, Earl Terence Campbell

Fecha de solicitud: 8 de diciembre de 2021

Fecha de publicación: 13 de febrero de 2024

Resumen: Propone técnicas para decodificación de errores durante la cirugía de retículo, incluyendo métodos que mejoran las operaciones lógicas en computación cuántica tolerante a fallos.

4. Patente: US12165006B1

Título: “Lattice surgery techniques without using twists”.

Inventores: Christopher Chamberland, Earl Terence Campbell

Fecha de solicitud: 8 de diciembre de 2021

Fecha de publicación: 22 de agosto de 2023

Resumen: Métodos de cirugía de retículo sin giros, que optimizan la implementación de computación cuántica mediante el uso de códigos correctores de errores y técnicas de decodificación.

5. Patente: US12007835B1

Título: “Temporally encoded lattice surgery protocols for hybrid error detection and correction schemes”.

Inventores: Christopher Chamberland, Prithviraj Prabhu

Fecha de solicitud: 12 de diciembre de 2022

Fecha de publicación: 11 de junio de 2024

Resumen: Introduce protocolos de cirugía de retículo que reducen los costos en la corrección de errores cuánticos mediante un enfoque híbrido de detección y corrección.

6. Patente: US11455207B2

Título: “Using flag qubits for fault-tolerant implementations of topological codes with reduced frequency collisions”.

Inventores: Jay M. Gambetta, Sergey Bravyi, David C. McKay, Antonio D. Córcoles et al.

Asignado a: International Business Machines Corporation (IBM).

Propósito: Reducir colisiones de frecuencias en mediciones de síndromes mediante cúbits auxiliares. Estos principios son aplicables a cualquier código topológico, incluyendo los color codes, que también requieren mediciones de estabilizadores multi-cúbit. Utiliza cúbits de bandera para mejorar la decodificación en códigos de color, lo que aborda problemas de colisiones de frecuencia en computación cuántica.

Asignado a: Fenner Investments, Ltd.

7. Patentes Relacionadas

US20190080256A1

Título: “Topological Quantum Computing, Apparatus, System and Method”.

Inventores: David L. Fenner

Propósito: Esta patente describe un ordenador cuántico que utiliza material de cuasicristal para cúbits en un sistema cuántico topológico, con un enfoque en un formalismo de red de espines topológicos. La patente describe explícitamente el uso de color code quantum computing with topological superconductor networks.^{en} su resumen técnico, vinculando directamente su metodología a códigos de color topológicos.

Características:

- Ordenador cuántico tolerante a fallos.
- Estados de espín entrelazados.
- Propiedades anyónicas para operaciones lógicas.

US20210232963A1

Título: “Fusion based quantum computing”.

Inventores: Timothy C. Ralph, Glen G. Gillett, Peter P. Rohde, Austin G. Fowler, Daniel E. Browne, Juan Miguel Arrazola

Empresa: Psiquantum, Corp.

Fecha de Presentación: 29 de enero de 2021.

Propósito: Describe un método de computación cuántica basado en la fusión de múltiples sistemas cuánticos entrelazados, relacionado con enfoques de computación cuántica topológica. Los protocolos de corrección de errores topológicos mediante mediciones destructivas. Estos principios son genéricos para códigos topológicos, incluyendo los códigos de color.

Características:

- Mediciones conjuntas para determinar valores de grafo de síndrome.
- Integración en la computación cuántica topológica.

9.2 Conclusión

El panorama de patentes para códigos de color topológicos cuánticos aún se está desarrollando, con la mayoría de las patentes centradas en métodos y sistemas de corrección de errores, técnicas de implementación para reducir errores en sistemas de cúbits físicos y enfoques novedosos de hardware para la computación cuántica topológica.

Empresas como Quantinuum (Honeywell), AQT (Alpine Quantum Technologies), Amazon, Google Quantum AI están activas en esta línea de desarrollo tecnológico, junto con empresas más nuevas de computación cuántica como QuERa, Psiquantum. Es de prever que otras empresas como IBM se sumen al desarrollo de los códigos topológicos de color. El campo muestra un potencial muy significativo para el desarrollo futuro, particularmente a medida que el hardware cuántico madura y la corrección de errores se vuelve cada vez más crítica para las aplicaciones prácticas de la computación cuántica. A medida que la computación cuántica continúa avanzando, podemos esperar más patentes enfocadas específicamente en códigos de color topológicos, particularmente para la corrección de errores y las implementaciones de computación cuántica tolerante a fallos.

Capítulo 10 Computación Cuántica Topológica

Autocorrectora

Sumario

- ❑ *Noción Autocorrectora*
- ❑ *Escenarios Posibles*
- ❑ *Autocorrección Abeliانا*
- ❑ *Memorias con Códigos 4D*
- ❑ *Códigos de Color 6D/7D Universalidad*
- ❑ *Ventajas de los Códigos de Color*
- ❑ *Computación Topológica Anyónica*

10.1 Consideraciones Generales

Este enfoque es muy sobresaliente ya que se basa en tener un mecanismo físico intrínseco que permite al sistema topológico corregir de manera interna los errores locales: se corrige a sí mismo, de ahí la noción de ser una computadora autocorregible. En un código topológico autocorrector, no es necesario detectar y corregir errores cuánticos desde fuera del sistema, como ocurre con los códigos cuánticos topológicos convencionales que he presentado en el capítulo 6. En este caso, son las propias propiedades físicas del sistema las que generan un mecanismo de protección para los estados cuánticos codificados. Este mecanismo está gobernado por interacciones descritas mediante un hamiltoniano definido sobre redes o retículos inmersos en superficies con topología no trivial.

Además, si bien un sistema que utiliza excitaciones de cuasipartículas (anyones no-abelianos) puede haber mostrado un potencial prometedor, las propiedades del estado fundamental pueden ofrecer ventajas inigualables en términos de estabilidad y resistencia a la decoherencia. Por lo tanto, es esencial investigar ambas direcciones para determinar cuál ofrece un camino más sólido hacia el desarrollo de computadoras cuánticas eficientes y robustas.

En resumen, la exploración de la computación cuántica topológica representa un emocionante avance hacia una nueva era en el procesamiento cuántico de la información. La combinación de topología, teoría cuántica y tecnologías emergentes puede llevarnos a soluciones innovadoras a problemas persistentes en la ciencia del cómputo moderna, sentando las bases para futuros desarrollos en el campo de la computación cuántica.

La autocorrección corresponde a lograr tolerancia a fallos a nivel de hardware. Siguiendo el árbol de taxonomía, ver Fig. 6.1, merece la pena recordar que la motivación principal original para introducir códigos cuánticos topológicos [12] era lograr la idea de una computadora cuántica topológica autocorregible. Esto significa que el sistema de procesamiento cuántico es tan robusto que, si ocurre algún error, entonces el sistema puede deshacerse de él por sí mismo, sin la intervención externa de ningún otro agente. Para entender esto, volvamos a nuestra analogía con la medicina introducida en el capítulo 6 para explicar la corrección de errores en términos simples. Ahora, la autocorrección es otra alternativa y más fuerte. Es como si no tuviéramos que ir al médico cuando estamos enfermos, sino

que hemos sido tan bien diseñados genéticamente que nuestro organismo es lo suficientemente fuerte como para curarse a sí mismo sin recurrir a los medicamentos. Es decir, es intrínsecamente inmune.

La estabilidad auto-correctora contra el ruido externo de los códigos cuánticos topológicos depende de las propiedades de sus excitaciones. Primero que todo, a temperatura $T = 0$, los Hamiltonianos topológicos (7.11), (7.34) son estables frente perturbaciones asumiendo que estas son provocadas por operadores locales como campos magnéticos (términos unidimensionales) y similares, por ejemplo:

$$V = h \sum_{v \in V} \sigma_v^z + J \sum_{\langle v, v' \rangle} \vec{\sigma}_v \cdot \vec{\sigma}_{v'}. \quad (10.1)$$

La razón básica para esta estabilidad es precisamente la existencia de la brecha de energía Δ con respecto a los estados excitados mencionados anteriormente. Es posible presentar un argumento basado en la teoría de perturbaciones [12] que muestra que la ruptura de la degeneración topológica del estado fundamental es del orden de $O(h^{\lceil \frac{\sqrt{|V|}-1}{2} \rceil})$ para una red cuadrada en presencia de solo perturbaciones de campo magnético. Así, para campos magnéticos pequeños y sistemas cuánticos lo suficientemente grandes, las fluctuaciones cuánticas están suprimidas exponencialmente.

Utilizando simulaciones cuánticas de Monte Carlo, es posible realizar una prueba no perturbativa de este tipo de estabilidad estudiando la variación de la degeneración del estado fundamental con respecto a la intensidad del campo magnético externo aplicado, o de otras perturbaciones locales [158]. La estabilidad resultante para el código torico de Kitaev es muy buena ya que solo campos magnéticos muy fuertes $h \sim 0,5$ pueden producir una ruptura de la degeneración del estado fundamental.

La situación cuando el sistema está a temperatura no nula, en presencia de un baño térmico, es diferente. Argumentos heurísticos basados en la existencia de la brecha de energía Δ [12, 121] pueden conducir a la protección contra el ruido térmico, asumiendo algún tipo de proceso de relajación y que la temperatura es lo suficientemente baja en comparación con la brecha $T \ll \Delta$.

Los estudios sobre la estabilidad térmica en la computación cuántica tolerante a fallos estándar (no topológica) son bastante fenomenológicos. Se basan en un cierto modelo de error que generalmente tiene bastante suposiciones simplificadoras para hacer que el análisis de errores sea manejable. Este también es el caso en la tolerancia a fallos clásica. Sin embargo, al tener una formulación basada en un Hamiltoniano cuántico topológico en una red, es posible realizar un análisis más detallado y microscópico de la interacción entre el baño térmico y la computadora cuántica. Así, se han llevado a cabo varios estudios sobre la acción del ruido térmico en el código torico topológico [14, 159-161]. Una prueba rigurosa [160] ha mostrado que los códigos topológicos de tipo Kitaev en 2D no son estables con respecto al ruido térmico. El único modelo conocido que muestra estabilidad térmica [161] es el modelo de Kitaev en 4D.

Sin entrar en un análisis detallado, es posible dar argumentos heurísticos detrás de esta inestabilidad térmica [14]. Consideremos una cuerda simple con solo dos puntos finales como en la figura 7.31a). Aun si comienza como una cuerda corta con sus puntos finales separados por solo un enlace, no hay costo de energía en esos puntos finales para empezar a separarse cada vez más: los operadores estabilizadores realizan el trabajo sin costo pues conmutan con el hamiltoniano. Lo mismo se aplica a los cuatro puntos finales de la excitación de las cuerdas ramificadas de los códigos de color en $D=3$ figura 7.31b). En un escenario autocor, esto se convierte en un problema serio, ya que

esperamos que el sistema se autocorrija sin operaciones externas activas. Pero esto es poco probable cuando el sistema está expuesto a un baño térmico externo, el cual producirá excitaciones que se propagaran por el sistema si no hay una barrera de energía que impida que las partículas finales se propaguen libremente.

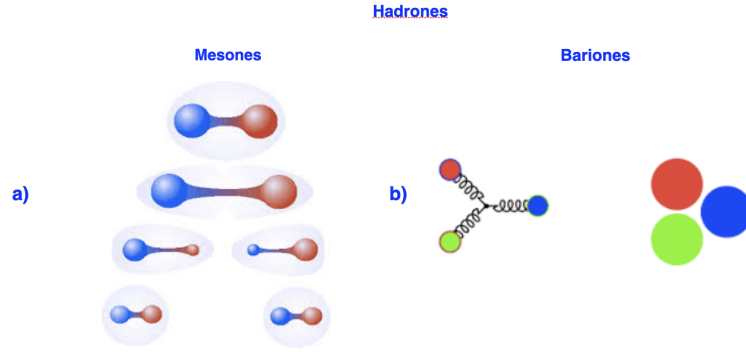


Figura 10.1: Representación de los hadrones con cuerdas QCD en el límite de gran N en teorías gauge no-abelianas. a) Mesones con una cuerda simple. b) Bariones con una cuerda ramificada con los tres colores en QCD que expresan el confinamiento de los quarks.

En este punto, podemos trazar una analogía de esta situación con la QCD (Cromodinámica Cuántica), la teoría de interacciones fuertes. Así, podemos pensar en la cuerda simple con dos puntos finales como un “mesón de juguete” (figura 7.23) ya que es como un estado de dos partículas, pero de dos cargas $\mathbb{Z}_2$, en lugar de un sistema real de quarks-antiquarks $q\bar{q}$ con cargas $SU(3)$. De manera similar, en los códigos de color topológicos, incluso podemos tener un “barión de juguete” correspondiente a la cuerda ramificada más simple con tres puntos finales (figura 7.23). De hecho, existe una imagen efectiva de mesones y bariones en la que están unidos por una ‘cuerda QCD’ efectiva hecha de flujos de tubos de los campos de gauge (figura 10.1). Sin embargo, hay una gran diferencia entre nuestros mesones y bariones de juguete y los reales: no vemos quarks libres en la vida real porque viven en una fase confinada desde nuestra escala de energía. En cambio, su contraparte de juguete vive en una fase de desconfinamiento donde las cargas en los extremos de las cuerdas pueden moverse libremente. [162, 163]. Nuestras cargas topológicas no forman un estado ligado; sus cuerdas y cuerdas ramificadas también tienen una naturaleza topológica y no los unen entre sí produciendo su confinamiento.

Una posible solución a este problema con las excitaciones de cuasipartículas que se mueven libremente es encontrar un mecanismo para hacer que las partículas finales se recombinen y aniquilen, o al menos no se propaguen libremente sin costo. Este sería un posible mecanismo autocorrector. Algunas posibles alternativas son:

A1 Aumentar la dimensión D .

A2 Introducir grupos de gauge no abelianos en el formalismo de estabilizadores.

A3 Introducir grados adicionales de libertad.

La alternativa A1 corresponde a definir códigos toricos en redes cúbicas en 3D o generalizaciones de mayor dimensión [14]. Asimismo, también es posible definir códigos de color topológicos en 3D y más allá [67]. En 3D los códigos de color son capaces de implementar computación cuántica universal

[66], al combinar la transversalidad y propiedades topológicas de las puertas cuánticas. De esta manera, la ventaja es que las excitaciones de cuasipartículas no son cuerdas, sino superficies o generalizaciones de mayor dimensión llamadas membranas. En los códigos de color topológicos, también existen redes de membranas con líneas de ramificación, o branas ramificadas más generales [67], como he descrito en el capítulo 7. El hecho es que estos objetos extendidos, cuyos límites son bucles o extensiones de mayor dimensión, pero no objetos puntuales, exhiben más dificultades para propagarse sobre la memoria cuántica y pueden ser estabilizados [66, 161]. Sin embargo, para estabilizar los errores X y Z de manera independiente, necesitamos una excitación de membrana 2D para cada uno de ellos, y esto da lugar a una red cuántica espacial de 4D como mínimo. La alternativa A1 la desarrollaré en la sección 10.2.

Un ejemplo de la alternativa A2 es una nueva familia [164] de Hamiltonianos cuánticos topológicos basados en álgebras de grupos no abelianos, que incluyen el modelo de Kitaev como un caso especial. Los nuevos sistemas exhiben condensación y confinamiento de las cargas topológicas presentes en los extremos de las configuraciones de cinta. Estas cintas son la generalización no-abeliana de las cuerdas que hemos considerado en los modelos de red abelianos. Cuando el grupo de gauge compacto discreto es no abeliano, estos nuevos modelos presentan tensión de cinta entre las cargas topológicas en los extremos, y esto actúa como un mecanismo para dificultar su difusión a través de la red 2D. Es un problema abierto ver si algunos de estos nuevos modelos pueden proporcionar una memoria cuántica autocorrectora, que en ese caso sería bidimensional y local.

Existen también otras alternativas para intentar lograr sistemas cuánticos autocorrectores en dos dimensiones como la alternativa A3, en la que se introducen grados adicionales de libertad en el sistema de manera similar a cómo se introducen grados de libertad no abelianos en A2. Una posibilidad es acoplar un campo bosónico a los puntos finales de las cuerdas abiertas en el código torico [165]. La interacción con el campo bosónico produce una fuerza atractiva de largo alcance entre los puntos finales de las cuerdas abiertas. Aún así, sigue siendo un problema abierto encontrar esquemas de acoplamiento a otros campos de tal manera que obtengamos un mecanismo autocorrector. También existe la posibilidad de combinar estas alternativas para lograr una propuesta realista de computación cuántica topológica.

10.2 Modelos Autocorrectores con Códigos Abelianos

10.2.1 Planteamiento del problema

Se propone una clasificación de las computadoras cuánticas basada en su capacidad para protegerse contra la decoherencia, un desafío significativo en el ámbito de la computación cuántica. Esta clasificación abarca tres categorías distintivas, cada una con un nivel diferente de protección contra errores.

En primer lugar, las “computadoras cuánticas desnudas” son aquellas que no cuentan con ninguna forma de protección contra los errores que puedan surgir durante sus operaciones. Estas máquinas están expuestas a la decoherencia sin ninguna medida de corrección, lo que las hace más vulnerables

a las fallas durante el procesamiento cuántico.

En segundo lugar, se encuentran las “computadoras cuánticas protegidas externamente”. Estas máquinas incorporan estrategias de corrección de errores activas que se aplican desde fuera del sistema cuántico. Generalmente, esto implica el uso de códigos de corrección de errores que detectan y corrigen errores antes de que puedan corromper los cálculos cuánticos.

Por último, se enfocan en las “computadoras cuánticas protegidas internamente”. Estas representan una forma más avanzada de protección, ya que se basan en sistemas autocorrectores que integran mecanismos de corrección de errores dentro de su propia arquitectura. El trabajo profundiza especialmente en esta categoría, planteándose una pregunta crucial: ¿Es viable construir una computadora cuántica que sea completamente autocorrectora y que pueda, además, realizar de forma autónoma las operaciones básicas como la inicialización, la ejecución de puertas cuánticas y la realización de mediciones?

Responder a esta pregunta no solo tiene repercusiones prácticas, sino también fundamentales. Implica explorar el potencial para descubrir un nuevo estado cuántico de la materia que pueda impulsar esta capacidad autocorrectora.

Para abordar estas cuestiones, se propone un enfoque innovador basado en códigos topológicos de color, conocidos por sus propiedades de corrección de errores. A través de la investigación, se hacen varias contribuciones significativas al campo:

En primer lugar, se definen condiciones suficientes que permitirían a un código estabilizador operar como una memoria cuántica autocorrectora. Esto establece las bases teóricas necesarias para desarrollar sistemas que puedan corregirse por sí mismos sin intervención externa.

Además, se examinan ejemplos clave de códigos estabilizadores topológicos en dimensiones arbitrarias, expandiendo así la comprensión de cómo estos códigos pueden desempeñar un papel crucial en la protección de la información cuántica.

Finalmente, se demuestra que los códigos de color en seis dimensiones ofrecen un modelo autocorrector viable. Este modelo permite la implementación de operaciones cuánticas de manera transversal y local, facilitando un conjunto universal de operaciones fundamentales para la computación cuántica.

A través de estas exploraciones, el trabajo no solo aboga por una potencial revolución en el diseño de computadoras cuánticas, sino que también amplía el horizonte sobre cómo se puede alcanzar computadoras cuánticas más robustas y efectivas en el futuro.

10.2.2 Códigos estabilizadores como memorias cuánticas autocorrectoras en dimensiones arbitrarias

La capacidad de los códigos estabilizadores para funcionar como memorias cuánticas autocorrectoras depende críticamente de propiedades geométricas y topológicas que imponen barreras energéticas efectivas contra la propagación de errores. Estas propiedades se manifiestan a través de cuatro condiciones fundamentales interrelacionadas, cuya satisfacción garantiza la estabilidad térmica del sistema. A continuación, analizamos en profundidad cada uno de estos requisitos y sus implicaciones físicas.

Los códigos estabilizadores topológicos constituyen pilares fundamentales en la protección

cuántica de información, donde los modelos tóricos y de color emergen como paradigmas con propiedades complementarias. Su comportamiento en dimensiones altas ($D \geq 4$) revela mecanismos intrínsecos de autocorrección y capacidades computacionales universales, aspectos que analizaremos en detalle.

La autocorrección emerge de un delicado equilibrio entre la localidad de las interacciones y la estructura global del espacio de Hilbert. Este equilibrio se formaliza mediante cuatro condiciones:

(i) *Localidad de errores*: Cada operador de Pauli actuando en un único cúbit físico solo puede afectar a un número acotado (λ) de generadores del estabilizador. Esta restricción asegura que los errores locales no generen patrones extensos de excitaciones. Por ejemplo, en el código toroidal 4D de Kitaev, un error en un cúbit de enlace altera como máximo cuatro estabilizadores de plaqueta adyacentes.

(ii) *Conectividad acotada*: El grafo de excitaciones (donde los nodos representan términos del Hamiltoniano y las aristas sus interacciones) debe tener un grado máximo μ . Esto limita la velocidad de propagación de correlaciones entre síndromes. En términos prácticos, implica que las excitaciones no puedan formar estructuras ramificadas complejas, un requisito clave para contener errores.

(iii) *Descomposición modular de síndromes*: Cualquier síndrome b debe poder dividirse en componentes $\{b_i\}$ no superpuestas ni conectadas, con un número máximo ν de subcomponentes. Esta propiedad permite tratar errores macroscópicos como colecciones de defectos locales independientes, facilitando estrategias de corrección paralelizable. Matemáticamente, se expresa mediante la descomposición:

$$b = \bigoplus_i b_i \quad \text{con} \quad \text{dist}(b_i, b_j) > 1 \quad \forall i \neq j$$

(iv) *Ausencia de síndromes críticos pequeños*: Los síndromes que no alteran los observables lógicos vestidos (N_{dr}) deben satisfacer $|b| < \xi L$, donde ξ es una constante adimensional y L el tamaño del sistema. Esta condición establece un umbral de tamaño para los defectos peligrosos, creando una barrera entrópica efectiva. Por ejemplo, en códigos toroidales 4D, los bucles de error con perímetro menor que ξL pueden corregirse localmente sin afectar la topología global.

10.2.3 Fundamentos teóricos

El estudio se enmarca en el formalismo de códigos estabilizadores, donde destacan tres conceptos fundamentales interrelacionados. Primero, los observables vestidos (N_{dr}) emergen como versiones robustas de los operadores lógicos, definidos mediante una corrección activa de síndromes:

$$N_{dr} := \sum_b \text{corr}(b)^\dagger N \text{corr}(b) P_b \quad (10.2)$$

Aquí, P_b proyecta al subespacio con síndrome b , y $\text{corr}(b)$ representa el operador de corrección asociado. Estos observables encapsulan la información lógica protegida contra errores locales.

Segundo, los síndromes críticos corresponden a configuraciones de error que alteran los observables vestidos con un solo error físico. La estabilidad térmica del sistema requiere que su probabilidad decaiga exponencialmente con el tamaño L , logrado mediante barreras energéticas topológicas.

Tercero, la teoría de homología provee un marco unificador: en códigos tóricos, las excitaciones corresponden a ciclos en grupos de homología, mientras en códigos de color emergen redes de branas ("brane-nets") sujetas a reglas combinatorias de coloración. Esta dualidad permite analizar ambos modelos mediante cadenas de operadores X/Z en retículos multidimensionales.

10.2.4 Mecanismo de supresión térmica: argumento de Peierls generalizado

La estabilidad a temperatura finita se demuestra mediante una generalización cuántica del argumento clásico de Peierls. La probabilidad de aparición de síndromes críticos decae exponencialmente con el tamaño del sistema:

$$P_{\text{crit}} \leq \text{poly}(L) \exp\left(-\frac{\delta \xi L}{\lambda \mu}\right)$$

donde $\delta = \beta t_{\min} - \tau$ combina parámetros termodinámicos ($\beta = 1/k_B T$) y geométricos ($t_{\min}$ es la energía mínima por término del Hamiltoniano).

Este decaimiento exponencial surge de dos efectos competitivos:

- El factor entrópico $\text{poly}(L)$, que cuenta el número de configuraciones posibles de síndromes críticos.
- El factor energético $\exp\left(-\frac{\delta \xi L}{\lambda \mu}\right)$, que suprime exponencialmente las fluctuaciones que superan la escala ξL .

La transición de fase ocurre cuando $\delta = 0$, definiendo una temperatura crítica $T_c = \frac{t_{\min}}{k_B \tau}$ por debajo de cual el sistema exhibe autocorrección.

10.2.5 Códigos tóricos generalizados: geometría y protección homológica

Los códigos tóricos se basan en la homología $\mathbb{Z}_2$ de variedades D -dimensionales, estableciendo una dualidad entre operadores y estructuras geométricas para cada dimensión d :

- *Estabilizadores tipo X*: Actúan sobre $(d+1)$ -cadenas, siendo membranas en 3D o hipervolúmenes en dimensiones superiores. En 4D, se asocian a volúmenes 3D que envuelven toros topológicos.
- *Estabilizadores tipo Z*: Operan sobre cadenas duales de dimensión $(D-d)$, formando una red de protección bidireccional. En 4D, corresponden a superficies 2D entrelazadas con los volúmenes anteriores.

Las excitaciones se presentan como d -*branas* (errores X) y $(D-d-1)$ -*branas* (errores Z). Una interacción topológica significativa ocurre cuando estas branas en dimensiones impares inducen una fase -1 , similar al comportamiento de anyones en 2D.

10.2.5.1 Autocorrección térmica

Para $D \geq 4$, las branas críticas que alteran cúbits lógicos deben cubrir una fracción apreciable del sistema, con energía escalando como:

$$E \propto L^d, \quad (10.3)$$

y su probabilidad de aparición térmica suprimida por Boltzmann:

$$P_{\text{crit}} \sim e^{-\beta t_{\min} L^d}. \quad (10.4)$$

Este mecanismo, inicialmente mostrado en el modelo 4D de Kitaev, da lugar a una transición de fase térmica con temperatura crítica:

$$T_c = \frac{t_{\min}}{k_B \tau}. \quad (10.5)$$

10.2.5.2 Códigos toroidales en D dimensiones

En dimensiones $D \geq 4$, las d -branas extendidas presentan energías que escalan con su volumen:

$$E_{\text{excitación}} \propto L^d, \quad (10.6)$$

creando una barrera energética que suprime las fluctuaciones. La conectividad acotada, inherente a la estructura homológica del toro, permite que correcciones locales mantengan la topología global. Así, la probabilidad de síndrome crítico es reducida, ya que requeriría branas del tamaño del sistema total L . Este diseño contribuye a la estabilidad intrínseca, haciendo menos probables los errores en grandes dimensiones.

10.2.6 Códigos de color en 6D como memorias cuánticas autocorrectoras

La implementación de memorias cuánticas autocorrectoras en seis dimensiones espaciales (6D) usando códigos de color combina protección térmica robusta con capacidades computacionales universales. Este modelo avanzado supera las limitaciones anteriores al integrar dos pilares: la supresión de errores a través de efectos topológicos volumétricos y las operaciones cuánticas transversales.

10.2.6.1 Mecanismos de autocorrección térmica

Basado en un *6-colex*, el código organiza cúbits físicos en vértices de un complejo celular en 6D. Los estabilizadores se asocian a 3-celdas y sus duales, formando interacciones locales donde errores aparecen como configuraciones topológicas extendidas:

2-branas: Perturbaciones de tipo X (superficies bidimensionales). *3-branas*: Errores Z (volúmenes tridimensionales).

El *argumento de Peierls generalizado* describe la estabilidad térmica: la energía crítica para crear una brana escalable que altera observables lógicos es proporcional al volumen de la brana:

$$E_{\text{crítica}} \propto t_{\min} L^3, \quad (10.7)$$

donde L es el tamaño lineal del sistema. Esto introduce una barrera energética que reduce exponencialmente la probabilidad de errores:

$$P_{\text{crit}} \sim e^{-\beta t_{\min} L^3}, \quad \beta = \frac{1}{k_B T}. \quad (10.8)$$

La conectividad acotada limita la interacción entre excitaciones, facilitando la corrección de branas no críticas mediante operaciones locales.

10.2.6.2 Transversalidad computacional y universalidad

Los códigos de color en 6D permiten *operaciones universales transversales* gracias a la simetría del 6-colex, que separan operaciones lógicas de la corrección de errores:

La *puerta CNOT* se realiza localmente, manteniendo los errores contenidos.

La *fase $\pi/4$ (R_2)* se logra aplicando:

$$R_2^{\otimes n} = \bigotimes_{i=1}^n \text{diag}(1, e^{i\pi/4}), \quad (10.9)$$

que afecta colectivamente a cúbits físicos sin generar correlaciones espurias.

Extendiendo a 7 dimensiones, se logra localidad estricta para CNOT, manteniendo protección topológica.

10.2.6.3 Protocolos de inicialización y lectura

Preparación de estados lógicos usa dos estrategias:

Polarización térmica: Un campo magnético global alinea los cúbits; su apagado adiabático proyecta al subespacio lógico. *Deformación topológica*: Localmente modifica acoplamientos para cultivar cúbits lógicos, evitando campos externos.

La *medición transversal*, gracias a la estructura CSS del código, permite leer los observables lógicos sin perturbación, reconstruyendo la información mediante mediciones locales en bases X o Z .

10.2.6.4 Ventajas sobre esquemas tóricos

La comparación con códigos tóricos en 4D revela avances cualitativos:

- *Naturaleza de las excitaciones*: Mientras los códigos tóricos manejan excitaciones unidimensionales (bucles), los códigos de color gestionan redes de branas extendidas (2-branas y 3-branas). Esta dimensionalidad superior incrementa la barrera energética contra errores.
- *Operaciones cuánticas*: Los códigos tóricos solo permiten operaciones del grupo de Clifford de forma transversal, insuficientes para universalidad. En contraste, los códigos de color en 6D implementan puertas universales (CNOT, R_2) nativamente.
- *Escalabilidad*: La localidad de CNOT en 7D elimina la necesidad de concatenación, reduciendo la sobrecarga computacional en implementaciones prácticas.

10.2.6.5 Fundamentos teóricos y perspectivas

La viabilidad de estos modelos descansa en tres pilares matemáticos:

1. *Dimensionalidad óptima*: La relación crítica $D \geq 3\bar{d}$ (para $\bar{d} = 2$) asegura que las branas peligrosas requieran volumen proporcional a L^3 , haciendo su energía inaccesible térmicamente.
2. *Estructura simplicial*: La coloración jerárquica de los 6-colex permite descomponer operaciones globales en secuencias locales, preservando la coherencia cuántica durante el procesamiento.

3. *Dualidad CSS mejorada*: La independencia entre corrección de errores X y Z simplifica los protocolos de medición y redundancia, análogo a códigos de repetición clásicos multidimensionales.

Los códigos de color extienden la protección topológica mediante estructuras combinatorias llamadas *D-colex*, retículos duales a complejos simpliciales coloreados. Cada d -célula ($0 < d \leq D$) contiene un $(d - 1)$ -colex anidado, generando una jerarquía de subcódigos.

- Las *excitaciones* forman *redes de branas* (*brane-nets*) en lugar de objetos aislados. En 3D, por ejemplo, partículas (1-branas) interactúan en vértices formando redes cerradas, con reglas de conservación topológica estrictas.
- La *transversalidad* alcanza su máximo potencial en $D = 6$. Aquí, las operaciones universales (CNOT, fase $\pi/4$) se implementan localmente mediante:

$$U = \bigotimes_i U_i \quad \text{con} \quad U_i \in \{H, R_2, \text{CNOT}\}, \quad (10.10)$$

donde $R_2 = \text{diag}(1, e^{i\frac{\pi}{4}})$ actúa transversalmente en cada cúbit físico. En 7D, incluso el CNOT se vuelve local, evitando la propagación de errores.

Códigos de color en dimensiones 6D. Estos códigos combinan autocorrección con universalidad computacional gracias a su estructura simplicial coloreada. Las propiedades clave incluyen:

- *Transversalidad universal*: Implementación nativa de puertas CNOT y de fase $\pi/4$ (puerta S) mediante operaciones locales en 7D (6D espaciales + 1D auxiliar).
- *Jerarquía de branas*: Las excitaciones forman redes de 2-branas y 3-branas cuya energía escala cúbicamente con L , suprimiendo eficientemente los síndromes críticos:

$$P_{\text{crit}} \sim \exp(-\beta t_{\text{min}} L^3).$$

- *Dualidad CSS mejorada*: Permite mediciones transversales independientes en bases X/Z sin propagar errores.
- Estos códigos no solo permiten la implementación de puertas transversales universales, como CNOT y uertas de fase $\pi/4$, sino que también son intrínsecamente capaces de corregir errores. La elevada dimensionalidad de estos sistemas, específicamente en 6D, garantiza que las branas críticas que pudieran surgir tengan energía que es proporcional a su volumen, lo que a su vez favorece la estabilidad general del sistema.

10.2.7 Análisis comparativo en dimensiones altas

La Tabla 10.1 sintetiza las ventajas relativas de ambos enfoques. Mientras los códigos tóricos priorizan corrección de errores mediante branas simples, los de color sacrifican simplicidad geométrica por universalidad computacional. Un equilibrio clave reside en la *escalabilidad energética*: en 6D, las excitaciones críticas de códigos de color poseen energía proporcional al volumen:

$$E \propto L^3, \quad (10.11)$$

superando la barrera térmica más eficientemente que branas lineales en 4D:

$$E \propto L. \quad (10.12)$$

<i>Propiedad</i>	<i>Códigos tóricos (4D)</i>	<i>Códigos de color (6D)</i>
Excitaciones	d -branas simples (ej. bucles en 4D)	Redes de branas coloreadas (ej. 2-branas en 6D)
Autocorrección	Sí ($T > 0$)	Sí ($T > 0$)
Operaciones transversales	Clifford group (no universales)	Universales (CNOT, R_2 , mediciones)
Inicialización	Campo magnético externo o deformación del código	Similar, con ajuste de acoplamientos

Cuadro 10.1: Comparación sistémica entre arquitecturas tóricas y de color en dimensiones altas. Los códigos de color logran universalidad a costa de mayor complejidad geométrica.

10.2.8 Protocolos de Inicialización y Lectura

El proceso de inicialización y la medición son aspectos cruciales para el funcionamiento óptimo de las memorias cuánticas autocorrectoras.

- *Inicialización térmica:* Para preparar adecuadamente los cúbits, se puede aplicar un campo magnético externo que permita polarizarlos en un estado computacional específico: $|0\rangle^{\otimes n}$ o $|+\rangle^{\otimes n}$.
 1. Posteriormente, es necesario realizar un apagado adiabático del campo magnético, lo que estabiliza el sistema. Este proceso implica enfriar adiabáticamente mientras se reduce el campo, permitiendo que el sistema se relaje en el subespacio código.
 2. Alternativamente, se puede optar por una deformación del código, facilitando así la creación de cúbits lógicos en un estado predeterminado y optimizando la inicialización del sistema.
- *Medición transversal:* Es fundamental medir todos los cúbits en las bases X o Z . Este enfoque permite recuperar los observables lógicos del sistema sin corromper la información cuántica almacenada, asegurando que el proceso de medición no introduzca errores adicionales en el sistema.
- *Lectura en base X :* Se mide todos los cúbits físicos en la base X y se aplica una corrección clásica de síndromes.
- *Lectura en base Z :* Se realiza de manera análoga utilizando mediciones en la base Z .
- La estructura CSS garantiza que los errores de medición no se propaguen entre bases conjugadas.

10.2.9 Protocolos de Inicialización y Lectura

El proceso de inicialización y la medición son aspectos cruciales para el funcionamiento óptimo de las memorias cuánticas autocorrectoras.

- *Inicialización térmica:* Para preparar adecuadamente los cúbits, se puede aplicar un campo magnético externo que permita polarizarlos en un estado computacional específico: $|0\rangle^{\otimes n}$ o $|+\rangle^{\otimes n}$.

1. Posteriormente, es necesario realizar un apagado adiabático del campo magnético, lo que estabiliza el sistema. Este proceso implica enfriar adiabáticamente mientras se reduce el campo, permitiendo que el sistema se relaje en el subespacio código.
 2. Alternativamente, se puede optar por una deformación del código, facilitando así la creación de cúbits lógicos en un estado predeterminado y optimizando la inicialización del sistema.
- *Medición transversal*: Es fundamental medir todos los cúbits en las bases X o Z . Este enfoque permite recuperar los observables lógicos del sistema sin corromper la información cuántica almacenada, asegurando que el proceso de medición no introduzca errores adicionales en el sistema.
 - *Lectura en base X* : Se mide todos los cúbits físicos en la base X y se aplica una corrección clásica de síndromes.
 - *Lectura en base Z* : Se realiza de manera análoga utilizando mediciones en la base Z .
 - La estructura CSS garantiza que los errores de medición no se propaguen entre bases conjugadas.

10.2.10 Conclusión: Hacia una memoria cuántica práctica

Los resultados presentados en este análisis demuestran que la autocorrección cuántica es una posibilidad teórica viable. Sin embargo, su implementación práctica en sistemas de menor dimensión continúa enfrentando desafíos considerables, que deberán ser abordados en futuras investigaciones.

Si bien los resultados teóricos indican que la autocorrección cuántica es físicamente posible, los retos prácticos en dimensiones bajas (particularmente en 2D y 3D) siguen siendo significativos. Los avances recientes en la ingeniería de Hamiltonianos efectivos y en técnicas de corrección híbrida (cuántico-clásicas) sugieren posibles vías para relajar los requisitos dimensionales, facilitando así la realización de experimentos en sistemas físicos análogos.

La implementación de memorias cuánticas autocorrectoras viables requiere satisfacer simultáneamente los siguientes criterios:

- *Dimensionalidad óptima*: Se requiere un mínimo de 4D para garantizar una protección básica, y de 6D a 7D para lograr la universalidad computacional mediante códigos de color.
- *Topología no trivial*: La estructura del sistema debe ser topológica de manera que imponga barreras energéticas capaces de inhibir la aparición de errores globales. Esta característica es fundamental para asegurar la estabilidad del sistema en condiciones adversas.
- *Transversalidad*: La realización de operaciones cuánticas universales debe ser transversal, lo que permite llevar a cabo de manera eficiente y segura dichas operaciones durante el proceso de computación cuántica.
- *Acoplamiento térmico equilibrado*: Es necesario que las tasas de relajación sean compatibles con los tiempos de operación lógica. Deben existir mecanismos térmicos que minimicen de forma exponencial la probabilidad de síndromes críticos, lo cual es esencial para la estabilidad a largo plazo del sistema.

La elección entre códigos tóricos y de color en dimensiones altas depende críticamente del ob-

jetivo perseguido: mientras que los primeros ofrecen corrección robusta con geometrías sencillas, los segundos permiten la computación cuántica universal nativa. El código de color en 6D demuestra que ambas propiedades son compatibles en principio; sin embargo, su realización práctica requiere superar importantes retos de ingeniería en dimensiones elevadas. Los avances recientes en Hamiltonianos efectivos y técnicas de corrección híbrida sugieren caminos para llevar estos modelos hacia implementaciones físicas viables.

10.3 Computación Cuántica Topológica Autocorrectora basada en Anyones

Como la computación cuántica puede entenderse como el arte de dominar las fases cuánticas a voluntad con el objetivo de procesar información, existe otra forma directa de llegar a la computación cuántica topológica mediante la búsqueda de fases cuánticas en la naturaleza que poseen un carácter topológico. Hay un candidato natural: la fase de Aharonov-Bohm (AB) [166, 167] que ya mencioné en el capítulo 5. Sabemos que las fases cuánticas son frágiles y tienden a la decoherencia, pero la fase

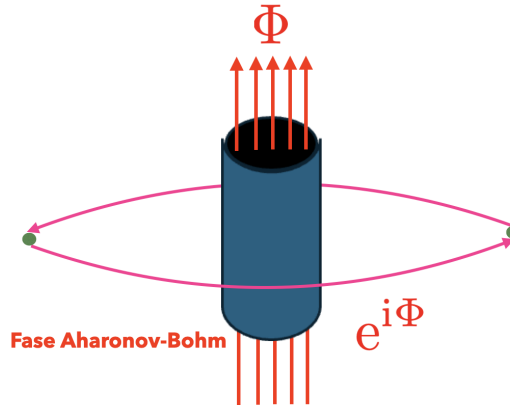


Figura 10.2: Fase de Aharonov-Bohm recogida por la función de onda del electrón al rodear el solenoide que contiene un flujo magnético Φ .

AB es naturalmente robusta y puramente cuántica. Solo depende del número de veces que un electrón determinado circunda un solenoide con un flujo magnético enhebrado, ver Fig.10.2. Mientras la trayectoria del electrón sea solo una deformación suave que no cambie el número de vueltas alrededor del flujo, la fase cuántica θ que recoge la función de onda del electrón permanece inalterada, es decir, es topológicamente invariante y viene dada por:

$$\theta = \frac{e}{\hbar} \Phi, \quad (10.13)$$

donde Φ es el flujo magnético que atraviesa el solenoide. La naturaleza independiente del camino de θ es la fuente de su robustez. Solo depende de la topología y, por lo tanto, las perturbaciones locales en la forma de deformaciones no producen errores. Es un candidato prometedor para la computación cuántica tolerante a fallos, suponiendo que podemos encontrarla en la naturaleza. Afortunadamente, la física cuántica bidimensional ofrece la posibilidad de realizaciones experimentales de este tipo

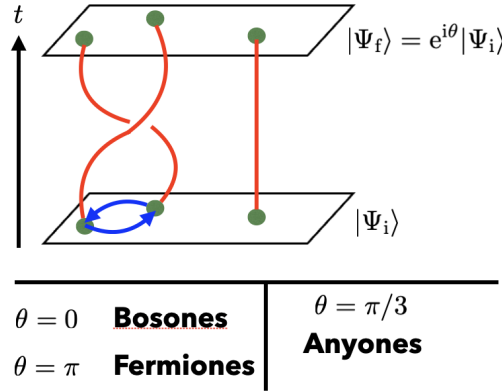


Figura 10.3: Trayectorias espacio-temporales de partículas idénticas trenzadas en un mundo de 2+1 dimensiones. Los bosones y fermiones son instancias particulares de partículas más generales conocidas como anyones por su factor de fase estadística arbitraria θ .

de fases. Las fases estadísticas que pueden surgir al intercambiar partículas puntuales idénticas en $D = 2$ dimensiones espaciales son más ricas que en dimensiones superiores. En $D = 3$ dimensiones espaciales, sabemos que este intercambio de partículas solo puede dar una de dos fases: $\theta = 0$ para bosones, o $\theta = \pi$ para fermiones. Sin embargo, en $D = 2$ estas restricciones no se aplican

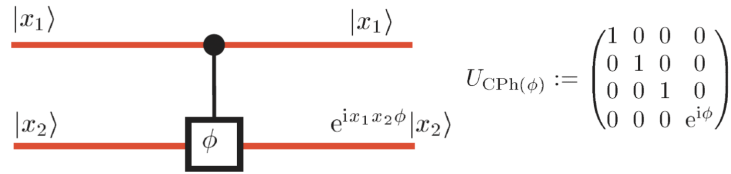


Figura 10.4: Una puerta importante de dos cúbits: la puerta de fase controlada (10.15).

y es posible tener fases arbitrarias $\theta \in [0, 2\pi)$. En el caso particular de dos dimensiones, este intercambio de partículas se llama un “trenzado” de partículas ya que es peculiar pues ya no es equivalente a intercambiar una partícula por debajo o por encima de la otra. Como resultado, el grupo de transformaciones permitidas para partículas idénticas en 2D no es el grupo de permutación Π_n de n partículas, sino el llamado grupo de trenzas B_n de n hebras. Estas hebras representan las trayectorias espacio-temporales en 2+1 dimensiones, como se muestra en la figura 10.3.

Después de uno de estos procesos de intercambio en dos dimensiones, el estado inicial $|\Psi_i\rangle$ de un sistema de 2 partículas idénticas recoge una fase arbitraria en el estado final dada por

$$|\Psi_f\rangle = e^{i\theta} |\Psi_i\rangle. \quad (10.14)$$

Las partículas que obedecen estas estadísticas se llaman anyones abelianos porque su factor estadístico mutuo θ puede tomar valores arbitrarios, no solo 0 o π , y la función de onda que describe el sistema conjunto de dos partículas no es degenerada [126, 127]. Por lo tanto, el factor estadístico es una fase pura. Estas fases forman un grupo abeliano. En una sesión del ciclo Ciencia para Todos de la RAC en 2016 tuve la oportunidad de disertar sobre las fases estadísticas en física cuántica y sus extensiones

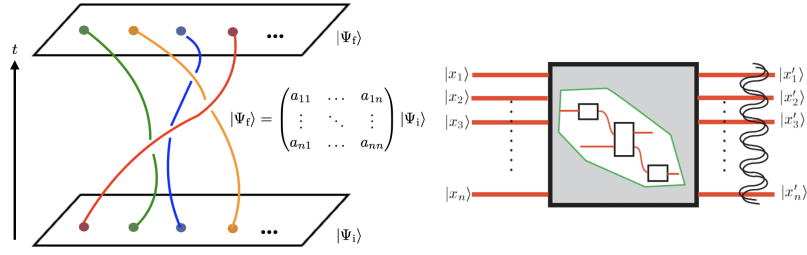


Figura 10.5: A la derecha, trayectorias espacio temporales de anyones no-abelianos que forman trenzas y generan matrices unitarias no triviales. A la izquierda, una puerta lógica cuántica de múltiples cúbits que se puede generar con el trenzado de los anyones no-abelianos para hacer computación cuántica topológica anyónica.

para anyones [168].

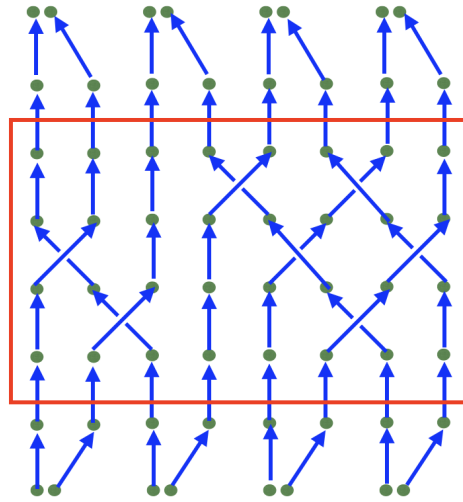


Figura 10.6: Evolución temporal de múltiples anyones no-abelianos en 2+1 dimensiones. Sus trayectorias se entrelazan y no son equivalentes a permutaciones. La evolución cuántica resulta en operaciones cuánticas de trenzado que sirven para hacer puertas lógicas cuánticas.

Podemos pensar en estas fases cuánticas estadísticas como un recurso para realizar operaciones cuánticas. De hecho, es natural comparar este proceso con una puerta cuántica como la puerta de fase controlada $U_{\text{CPhase}}(\phi)$ familiar en la computación cuántica:

$$U_{\text{CPhase}}(\phi) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi \end{pmatrix}. \quad (10.15)$$

Esta puerta es muy funcional: permite la implementación de la puerta CNOT $U_{\text{CNOT}} = (1 \otimes \sigma_x)U_{\text{CPhase}}(\pi)(1 \otimes \sigma_x)$, que es esencial en la lógica condicional. Existen diferencias entre estas puertas de fase: pros y contras. Mientras que (10.14) es topológica, (10.15) no lo es. Sin embargo, la fase controlada (10.15) proporciona un conjunto de puertas que permite la computación cuántica

universal; este no es el caso de la fase estadística (10.14) ya que no tiene suficiente estructura para producir universalidad, pues es una simple fase. Hay una forma de resolver estos problemas considerando generalizaciones apropiadas de anyones conocidas como anyones no-abelianos [169]. El ingrediente básico adicional para estos anyones es que ahora el estado de función de onda de las dos partículas es degenerado, y esto permite un factor de fase más general, específicamente, una matriz unitaria llamada matriz de trenzado U_B del intercambio:

$$|\Psi_f\rangle = U_B |\Psi_i\rangle. \quad (10.16)$$

Las matrices U_B forman una representación unitaria del grupo de trenzas B_2 de dos objetos.

La forma de construir puertas topológicas multicúbit es considerando el trenzado de muchos, digamos n , anyones no-abelianos, como en la Fig.10.5. La matriz $U_B \in B_n$ depende solo de la topología de las hebras trazadas por las trayectorias espacio-temporales de los anyones.



Figura 10.7: A la izquierda, una máquina de tejer o telar de Jacquard. A la derecha, detalle del telar de Jacquard donde se muestra el patrón de agujeros que da origen a las tarjetas perforadas de las antiguas computadoras clásicas.

A modo de corolario, resulta divertido comparar los orígenes de la computación clásica con los recientes desarrollos modernos en la computación cuántica topológica. A saber, las viejas tarjetas perforadas de cartón de los ordenadores clásicos fueron tomadas prestadas de las primeras máquinas de tejer introducidas a principios del siglo XIX. Se remontan a la introducción del telar de Jacquard (1801). Joseph Jacquard reconoció que el tejido, aunque es una tarea intrincada y delicada, es una tarea altamente repetitiva. Creía que el tejido de patrones complejos podría ser automatizado, al igual que la fabricación de patrones simples había sido automatizada. (ver figura 10.7). Concibió un sistema que se basaba en tarjetas de cartón rígido con varios patrones de orificios perforados. Más tarde, estos medios de hardware fueron sustituidos por formas más eficientes de codificar datos y, por lo tanto,

procesarlos. Así, el origen de los ordenadores clásicos se puede rastrear hasta el telar de Jacquard. Ahora, la computación cuántica topológica anyónica regresa al tejido de cuasi-partículas (anyones no-abelianos). Es bastante curioso ver que la computación cuántica topológica es una propuesta que utiliza ideas antiguas en el origen de los ordenadores clásicos para intentar estabilizar cálculos cuánticos difíciles mediante nuevamente el trenzado, es decir, mediante tejer.

Epílogo El ejemplo del textil con el telar de Jacquard lo he usado también para rendir homenaje a mi familia. Mi padre, Teófilo Martín-Delgado, con ayuda de mi madre, Justa Alcántara, creó una empresa familiar dedicada a la producción de jerseys. La llamó GRAZO, construida con las letras del nombre del pueblo de Orgaz en Toledo. Mi cuñado, José Ignacio de las Sías, se unió a la dirección de la empresa junto con mis hermanas, Dolores y Susana. Este negocio familiar fue una fuente de progreso para mi familia y de muchas alegrías. Mi familia ha sido mi mayor apoyo en durante mi carrera, especialmente en los momentos más difíciles. A ella le quiero expresar mi gratitud.

Capítulo 11 Deformación de Códigos Topológicos

Sumario

- ❑ *Problema Central*
- ❑ *Escenarios Posibles*
- ❑ *Autocorrección Abelian*
- ❑ *Memorias con Códigos 4D*
- ❑ *Códigos de Color 6D/7D Universalidad*
- ❑ *Ventajas de los Códigos de Color*
- ❑ *Computación Topológica Anyónica*

11.1 Motivación

La deformación de códigos topológicos surge como una solución innovadora para abordar la decoherencia, un desafío crítico en la computación cuántica que afecta la integridad de la información. Los códigos cuánticos de corrección de errores son esenciales para proteger la información frente a perturbaciones. Sin embargo, los métodos tradicionales de computación cuántica tolerante a fallos presentan limitaciones importantes, ya que se basan en la codificación de cúbits en bloques de código, operaciones transversales y mediciones destructivas de bloques de código auxiliares. En particular, la arquitectura de capas apiladas descrita en el capítulo 6 (ver figura 6.3) es posible mejorarla y reducirla a una sola capa de cúbits donde realizar la computación cuántica al completo.

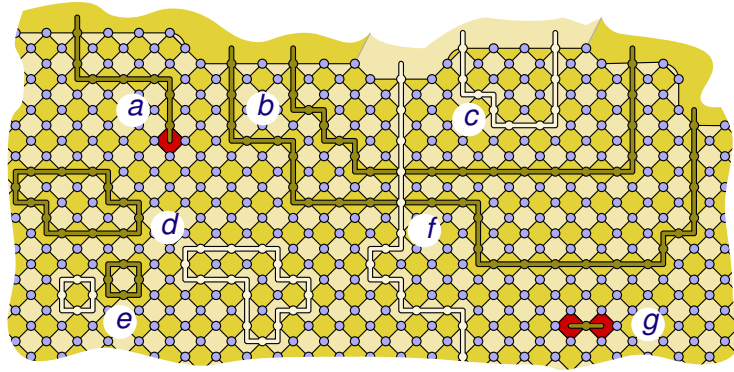


Figura 11.1: Un fragmento de un código de superficie con un borde superior que alterna entre regiones oscuras y claras. Cada vértice de la red alberga un cúbit. Las cadenas oscuras (claras) corresponden a productos de operadores Z (X). (e) Los operadores de plaqueta pueden visualizarse como cadenas. (c, d) Al multiplicar operadores de plaqueta, se obtienen cadenas que forman los bordes. (a, g) Si una cadena termina en una plaqueta, no conmutará con el operador de esa plaqueta. (b) Dos operadores de cadena que difieren sólo por una deformación tendrán el mismo efecto sobre los estados codificados. (f) Cuando una cadena de X cruza una de Z , los operadores correspondientes anticonmutan.

Para describir el concepto de deformación de códigos topológicos utilizaré los códigos de superficie de Kitaev, que están diseñados para operar en una configuración bidimensional. A pesar de su utilidad, los códigos de superficie presentan restricciones en la implementación de puertas no transversales. En este contexto, hemos propuesto una técnica que no solo supere estas limitaciones, sino

que también permita realizar mediciones no destructivas de cúbits y amplíe el conjunto de puertas tolerantes a fallos que pueden implementarse naturalmente dentro de un código dado.

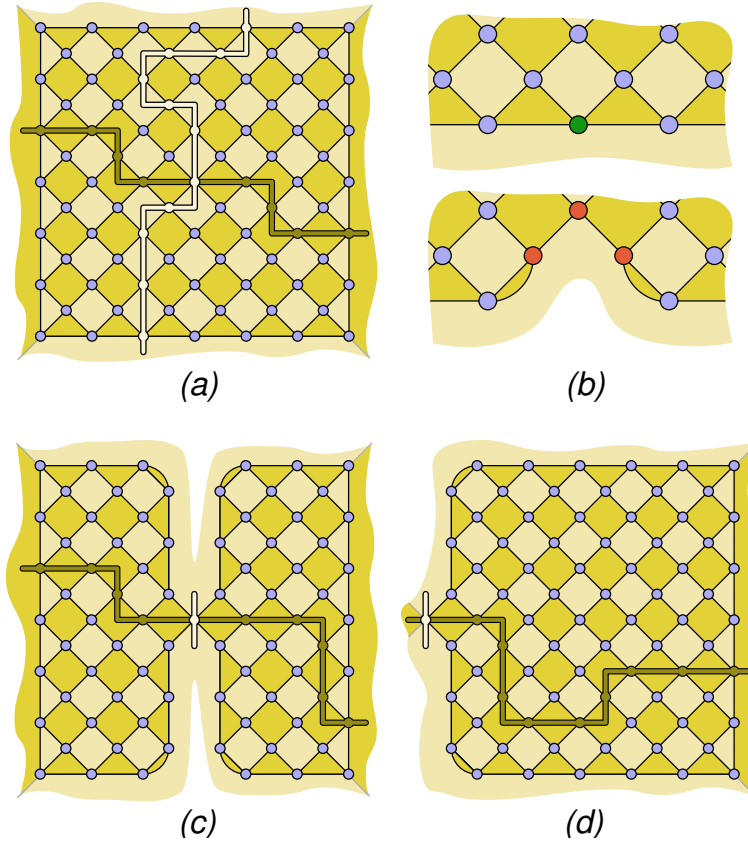


Figura 11.2: (a) Esquema de código de superficie que presenta una secuencia alternante de bordes oscuros y claros. Esta disposición permite codificar un único cúbit, donde las cadenas operacionales no triviales asociadas a los operadores lógicos $\bar{X}$ y $\bar{Z}$ se representan gráficamente. (b) Ilustración de una transformación geométrica básica. Al eliminar el cúbit indicado en verde, si los nuevos operadores de plaqueta de dos sitios adquieren autovalor negativo, se implementan operadores Z en los cúbits marcados en rojo para corregir la configuración. (c) Representación del código tras aplicar una deformación controlada que hace accesible el operador lógico $\bar{X}$ mediante mediciones locales. Esta modificación topológica expone selectivamente los grados de libertad codificados. (d) Procedimiento de ajuste de bordes donde la reducción estratégica de un sector oscuro permite medir directamente el operador $\bar{X}$ sin comprometer la integridad del código. La secuencia demuestra cómo las modificaciones geométricas controladas facilitan el acceso a operaciones lógicas.

El problema central en los códigos de superficie es el siguiente.

Proposición 11.1 (Problema Central)

*El **problema central** para los códigos de superficie consiste en cómo implementar puertas cuánticas no triviales, aquellas que van más allá de las operaciones transversales, de manera tolerante a fallos, especialmente dentro de las limitaciones impuestas por los códigos de superficie 2D.*



Además, es necesario abordar el desafío de inicializar y medir cúbits dentro del marco de estos códigos topológicos, donde mantener la localidad de las operaciones es crucial para la implementación

práctica.

Los enfoques tradicionales de computación tolerante a fallos, basados en codificación de cúbits en bloques estáticos, presentan limitaciones significativas en flexibilidad operacional. Mediante la técnica de deformación de códigos [170] conseguimos superar estas restricciones ampliando el conjunto de puertas tolerantes a fallos que pueden implementarse de forma nativa dentro de un código dado, particularmente en sistemas bidimensionales.

Los códigos de superficie emergen como una plataforma prometedora debido a su localidad geométrica inherente, característica que los hace compatibles con tecnologías de fabricación como la litografía. No obstante, su estructura bidimensional impone restricciones en la implementación de operaciones no transversales, requiriendo nuevas estrategias para ejecutar puertas cuánticas más allá del conjunto Clifford. La deformación de códigos aborda específicamente la implementación de operaciones no triviales manteniendo dos principios clave.

Proposición 11.2 (Principios Clave)

*Los **principios clave** del método de la deformación de códigos son:*

- 1. La no destructividad en las mediciones.*
- 2. La preservación de la localidad física.*



La primera garantiza que las mediciones no colapsen los estados codificados, mientras que la segunda resulta esencial para sistemas cuyas interacciones fundamentales están limitadas a vecindarios espaciales acotados.

Un aspecto crítico del enfoque propuesto radica en la integración coherente de protocolos de inicialización y medición dentro del marco del código de superficie. Estos procesos deben diseñarse para operar en paralelo con la corrección activa de errores, evitando la propagación de fallos y manteniendo la integridad de la información durante todo el ciclo computacional. La solución combina técnicas de deformación topológica con esquemas de medición indirecta, permitiendo manipular estados lógicos sin exponerlos directamente al ambiente externo. Esta sinergia entre protección cuántica y control operativo abre nuevas rutas para implementar algoritmos complejos en arquitecturas físicamente realizables.

11.2 Resolución: Deformación de Códigos Topológicos

La deformación de código se refiere a la manipulación gradual de un código cuántico de corrección de errores para crear, manipular y medir cúbits codificados. Este enfoque se aplica especialmente a los códigos de superficie, donde la computación se realiza en una capa de código que se deforma utilizando operaciones de “cortar y pegar”. Los cúbits físicos se sitúan en una red subyacente fija; por lo tanto, la deformación no altera el sistema físico mismo, sino los estabilizadores que lo definen.

Distinguiendo entre dos tipos de deformaciones, deformaciones suaves vs. no suaves:

- *Deformaciones Suaves:* Estas no alteran la topología de la superficie y se utilizan para realizar puertas unitarias en cúbits codificados.

- *Deformaciones No Suaves:* Estas cambian la topología de la superficie y se utilizan para la inicialización y medición de cúbits.

Por ejemplo, al cortar la superficie a lo largo de una cadena de cúbits, se puede medir el operador correspondiente a esa cadena; al pegar bordes, se puede inicializar un cúbit en un estado determinado. El esquema de deformación de código está diseñado para integrarse con los métodos existentes de corrección de errores en códigos de superficie. Este enfoque implica un seguimiento continuo de errores mediante la medición de los generadores locales del estabilizador. Además, cuando las deformaciones implican mediciones, es crucial contabilizar cómo estas afectan los valores medidos y asegurar que las correcciones se apliquen adecuadamente.

11.2.0.1 Códigos de Superficie

Para construir un código de superficie, se utiliza una red bidimensional donde cada sitio corresponde a un cúbit físico. Los estabilizadores se definen como productos de operadores X o Z sobre los cúbits de cada plaqueta, diferenciando entre plaquetas “oscuras” y “claras”, respectivamente. La figura 11.2 muestra la estructura y operadores en el código de superficie. Se puede ver una porción de la red, con cúbits en cada vértice y cadenas (cuerdas) de operadores X y Z representadas como líneas claras y oscuras, respectivamente. Los operadores de cuerda cerrada generan el normalizador del estabilizador $\mathcal{N}(\mathcal{S})$, y cómo los operadores de frontera corresponden a productos de estabilizadores. Se ilustra cómo dos operadores de cuerda que difieren solo por una frontera son equivalentes (homología), y que operadores de cadenas que se cruzan un número impar de veces anticommutan.

11.2.0.2 Deformación de Códigos de Superficie

Un ejemplo de código y deformación elemental se presenta en la figura 11.2. Este código de superficie codifica un solo cúbit, mostrando las cuerdas no triviales asociadas a los operadores X y Z codificados. Se muestra cómo la eliminación de un cúbit en el borde modifica los estabilizadores y puede requerir la aplicación de operadores correctores. Así se ilustra cómo una deformación puede exponer un operador codificado a mediciones locales, y cómo la contracción de un borde puede facilitar la medición de un operador. Las deformaciones se implementan como cambios geométricos en la superficie, moviendo o pegando bordes y creando o eliminando agujeros (cúbits codificados).

11.2.0.3 Deformaciones Suaves

Definición 11.1 (Deformación Suave)

Una deformación es suave si no cambia el número de cúbits codificados y, por lo tanto, puede realizarse o deshacerse sin introducir violaciones del estabilizador.



Una deformación suave en el contexto de los códigos de superficie cuánticos se refiere a una transformación que altera la forma de la superficie del código sin cambiar su topología. En otras

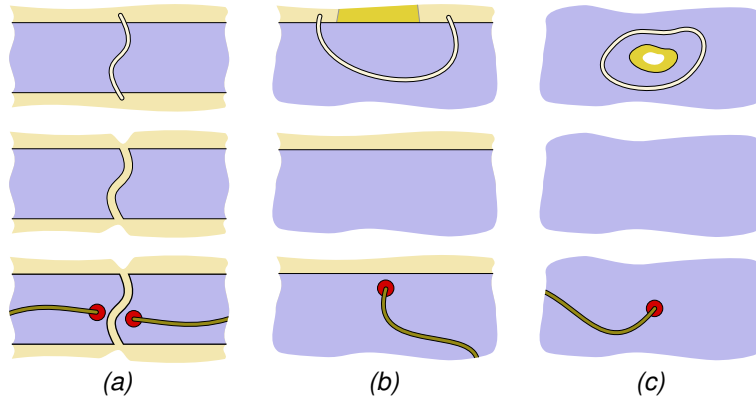


Figura 11.3: El efecto de las deformaciones no suaves. Las imágenes en la parte superior representan la situación inicial. El operador de cadena X a medir se muestra como una cadena clara. Las dos imágenes de abajo muestran la situación después del resultado de la medición. Las figuras en la parte inferior corresponden al caso donde $X = -1$. Las violaciones del estabilizador que aparecen en este caso se asocian con cadenas de Z no locales, tal como se muestra. Estas deformaciones discontinuas pueden entenderse de abajo hacia arriba. En tal caso, representan la introducción de un nuevo cúbit codificado, junto con la inicialización $X = 1$. (a) Un corte de un borde a otro. (b) La contracción de un borde. (c) La contracción de un agujero.

palabras, es como estirar, doblar o remodelar la superficie sin crear nuevos agujeros, pegar bordes que no estaban conectados previamente o cortar la superficie en pedazos separados.

La característica definitoria es que la topología de la superficie se preserva. Esto significa que el número de agujeros (género) y el número de componentes conectados no cambian. Dado que la topología no cambia, el número de cúbits lógicos codificados en el código de superficie tampoco cambia durante una deformación suave. Las deformaciones suaves se utilizan para implementar puertas cuánticas en los cúbits codificados. Al remodelar la superficie de manera controlada, se pueden inducir transformaciones en los operadores de Pauli codificados, lo que equivale a realizar una puerta cuántica. Las deformaciones suaves tienen una interpretación geométrica clara, ya que corresponden a cambios localizados en la forma de la superficie. Idealmente, las deformaciones suaves se realizan de forma continua, lo que significa que la transformación se puede describir mediante una función continua que transforma la superficie original en la superficie deformada.

Un ejemplo típico de una deformación suave es mover un agujero claro alrededor de un agujero oscuro en un código de superficie. Esta transformación no cambia el número de agujeros ni la conectividad de la superficie, pero sí altera la forma en que los operadores de Pauli codificados se transforman, lo que permite implementar una puerta CNOT.

11.2.0.4 Deformaciones No Suaves

Las deformaciones no suaves implican cambios en la topología de la superficie del código, a diferencia de las deformaciones suaves que solo alteran la forma sin cambiar la topología. La figura 11.3 ilustra el efecto de tales deformaciones, donde las imágenes en la parte superior representan la situación inicial y las dos imágenes debajo muestran la situación posterior, dependiendo del resultado de la medición. Se presentan tres tipos de deformaciones no suaves: (a) Un corte de borde a borde:

Situación inicial: Se muestra un código de superficie con una cadena X (representada como una cadena clara) que conecta dos bordes. Esta cadena X representa el operador que se va a medir. Situación posterior: Dependiendo del resultado de la medición, la superficie se corta a lo largo de la cuerda X . Las figuras en la parte inferior corresponden a la situación en la que $X = -1$. Las violaciones del estabilizador que aparecen en este caso corresponden a cuerdas Z no locales, como se muestra. (b) La contracción de un borde: Situación inicial: Se muestra un borde del código de superficie. Situación posterior: El borde se contrae, eliminando efectivamente esa parte de la superficie. (c) La contracción de un agujero: Situación inicial: Se muestra un agujero en el código de superficie. Situación posterior: El agujero se contrae, eliminando efectivamente el agujero de la superficie.

Estas deformaciones no suaves pueden interpretarse como la introducción de un nuevo cúbit codificado, junto con la inicialización $X = 1$. Las discontinuidades pueden leerse de abajo hacia arriba. Las deformaciones no suaves permiten la medición de operadores de Pauli codificados, lo que es esencial para realizar puertas cuánticas y otras operaciones en cúbits codificados. Sin embargo, también introducen cambios en la topología de la superficie, lo que puede conducir a errores si no se gestionan adecuadamente.

11.2.0.5 Corrección de Errores

La corrección de errores en códigos de superficie se basa en la medición periódica de los estabilizadores locales, identificando violaciones (errores) y reconstruyendo las trayectorias de estos errores en el espacio-tiempo. La introducción de deformaciones no altera sustancialmente este procedimiento, aunque cuando se realiza una medición mediante una deformación, el resultado debe interpretarse teniendo en cuenta las correcciones aplicadas.

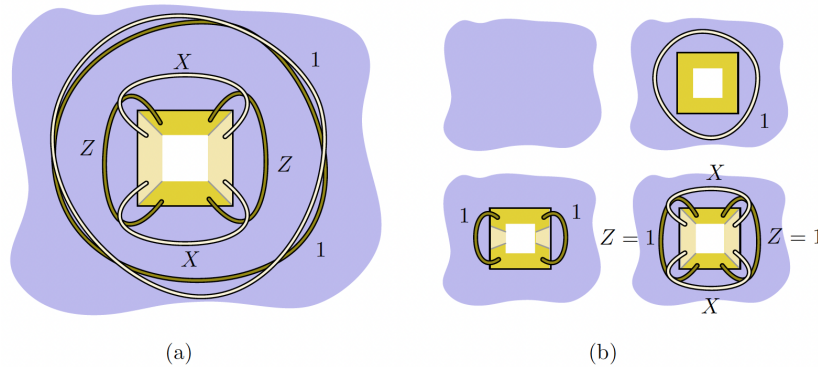


Figura 11.4: (a) Cada cúbit está asociado a un agujero que presenta una estructura de borde oscuro-claro-oscuro-claro. Los operadores no triviales se etiquetan con su correspondiente valor. (b) El procedimiento de deformación para inicializar un cúbit en el estado $|1\rangle$, tal como se explica en el texto.

En esencia, la corrección de errores consiste en realizar un seguimiento de los errores a medida que aparecen. Para ello, los generadores locales del estabilizador se miden repetidamente a lo largo del tiempo. Los resultados de cada ronda de mediciones proporcionan una instantánea temporal, o de hecho dos: una para las violaciones de los generadores de tipo X y otra para las violaciones de los generadores de tipo Z .

Para cada tipo (X o Z), las instantáneas temporales se organizan en una estructura de $(2+1)$ dimensiones, donde la dimensión extra representa el tiempo. Si las violaciones en un momento dado se consideran como “partículas”, entonces en esta imagen de $(2+1)$ dimensiones tenemos sus trayectorias espacio-temporales.

En realidad, las mediciones no nos dan directamente las trayectorias reales. En cambio, deben ser inferidas. Esto se puede hacer correctamente con alta probabilidad utilizando ciertos algoritmos, siempre que los errores estén por debajo de un cierto umbral (ver el teorema del umbral 3.1). Para que el procedimiento tenga éxito, las trayectorias reales y las inferidas deben ser homológicamente equivalentes.

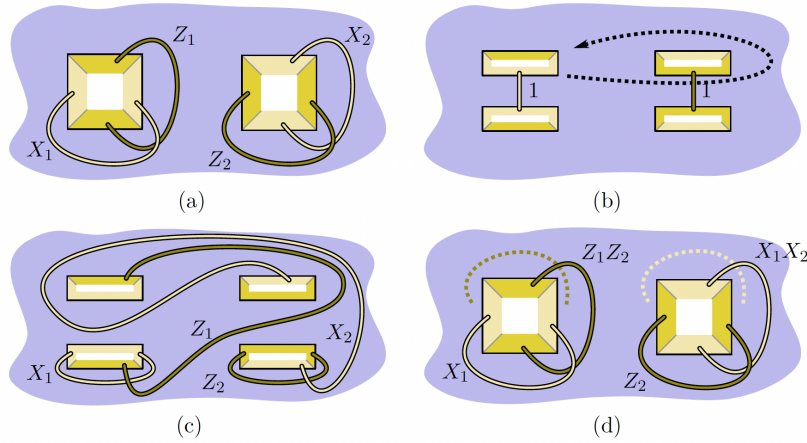


Figura 11.5: El procedimiento de deformación del código para obtener una puerta CNot. Para mejorar la legibilidad, solo se muestran algunas de las cadenas no triviales. (a) Los cúbits antes de aplicar la puerta: el cúbit de la izquierda es el de origen y el de la derecha es el de destino. (b) Se realizan un par de operaciones de pegado para obtener cúbits con dos agujeros. El movimiento del agujero que se va a realizar se muestra con líneas discontinuas. (c) El agujero en la parte superior del primer cúbit se enrosca alrededor de uno de los agujeros del segundo cúbit, y los operadores de cadena se deforman en consecuencia. (d) Finalmente, se realizan un par de operaciones de corte para recuperar la configuración inicial. Los operadores codificados han evolucionado según la puerta CNot planificada.

Cuando las deformaciones del código entran en escena, el procedimiento de corrección de errores que describí en el capítulo 7 permanece básicamente sin cambios. El punto clave es cómo manejar las deformaciones que implican una medición, es decir, la pérdida de un cúbit codificado. En este caso, el valor de la medición debe recuperarse teniendo en cuenta las correcciones. Esto significa que las violaciones relevantes del estabilizador deben verificarse después de que los errores hayan sido cancelados. Esto es consistente con el hecho de que solo la homología de las trayectorias espacio-temporales es relevante.

El proceso de corrección de errores involucra los siguientes pasos:

1. *Medir los estabilizadores:* Medir repetidamente los generadores del estabilizador para detectar errores.
2. *Construir las instantáneas temporales:* Organizar los resultados de las mediciones en instantáneas para generadores X y Z .
3. *Inferir las trayectorias espacio-temporales:* Utilizar un algoritmo para inferir las trayectorias

de los errores a partir de las rebanadas de tiempo.

4. *Considerar las deformaciones:* Si una deformación implica una medición, asegurarse de que el valor de la medición se recupere correctamente teniendo en cuenta las correcciones de errores. Verificar las violaciones del estabilizador después de cancelar los errores.
5. *Homología:* Asegurar que las trayectorias reales e inferidas sean homológicamente equivalentes.

11.2.0.6 Implementación: Codificación, Inicialización y Puertas Lógicas

Hay muchas maneras de codificar cúbits y manipularlos a través de deformaciones en un código de superficie. Aquí he elegido una implementación que está estrechamente conectada con la corrección de errores describí en el capítulo 7. Sin embargo, se podrían dar muchas otras implementaciones. Por ejemplo, un disco con un borde externo oscuro y n agujeros oscuros codifica n cúbits: los operadores X_i corresponden a cuerdas que encierran los agujeros y los operadores Z_i corresponden a cuerdas que conectan los agujeros con el borde externo. Las figuras 11.4, 11.5 y 11.6 ilustran los pasos clave en esta implementación, incluyendo la codificación, la inicialización, la implementación de la puerta CNOT y la desconexión de cúbits. La figura 11.3 proporciona una visión general de las operaciones básicas de deformación no suaves que se utilizan en estos procedimientos.

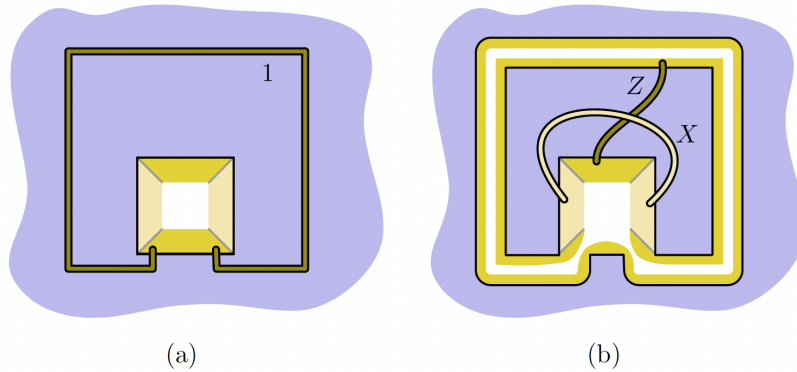


Figura 11.6: 1 procedimiento de deformación del código para desconectar un cúbit del resto del código superficial. Este proceso puede invertirse para volver a conectar un cúbit. (a) El operador de cadena a lo largo del cual se realiza el corte tiene un valor propio de 1. (b) Después de realizar el corte, el cúbit aislado resultante reside en la red interna, que es idéntica, salvo por las deformaciones, a la presentada en la figura 11.2(a).

11.2.1 Ventajas de la Deformación de Códigos

La deformación de códigos topológicos ofrece ventajas clave en computación cuántica fault-tolerant, particularmente en la manipulación segura de cúbits codificados. Estas son sus principales fortalezas:

1. *Operaciones locales en 2D:* Todas las operaciones (mediciones, puertas lógicas) se realizan mediante interacciones físicas estrictamente locales en un plano bidimensional. Esto evita la necesidad de arquitecturas 3D complejas, facilitando implementaciones prácticas en hardware como superconductores o trampas de iones.

2. *Mediciones no destructivas*: Permite medir cúbits codificados sin colapsar su estado cuántico, crucial para operaciones intermedias en algoritmos.
3. *Integración con corrección activa de errores*: Las deformaciones se ejecutan junto a rondas de medición de estabilizadores, donde los errores se detectan como violaciones de homología en $(2+1)$ -dimensiones. Procesos como el acortamiento de bordes (Fig. 3d) mantienen la capacidad de corregir errores X o Z mediante operadores locales.
4. *Puertas lógicas topológicas*: La deformación geométrica permite implementar operaciones como CNOT mediante movimientos de agujeros en el código. Estas puertas preservan la protección topológica, evitando la propagación de errores.
5. *Escalabilidad y flexibilidad*: El código puede expandirse/reducirse dinámicamente mediante adición/eliminación controlada de cúbits físicos, ajustándose a necesidades algorítmicas.
6. *Protección contra ruido correlacionado*: La no localidad inherente de los operadores codificados mitiga efectos de errores correlacionados, un desafío crítico en hardware cuántico actual. .

La deformación de códigos cuánticos topológicos representa una técnica revolucionaria para implementar computación cuántica tolerante a fallos. Al aprovechar las propiedades invariantes de los sistemas topológicos, permite proteger la información cuántica de la decoherencia y realizar operaciones lógicas universales. A medida que la investigación continúa, se espera que la deformación de códigos cuánticos topológicos juegue un papel crucial en el desarrollo de computadoras cuánticas prácticas y confiables, capaces de resolver problemas actualmente intratables para la computación clásica.

11.3 Conclusiones

La deformación de códigos cuánticos topológicos representa un avance revolucionario en la implementación de computación cuántica tolerante a fallos. Al aprovechar las propiedades topológicas, se puede proteger la información cuántica frente a la decoherencia y realizar operaciones lógicas universales. Los recientes desarrollos, como la implementación de puertas lógicas universales y procesadores como Willow, demuestran el potencial de esta técnica en la práctica. Aunque se enfrentan desafíos significativos, el futuro de la computación cuántica parece prometedor, con la esperanza de que la deformación de códigos juegue un papel crucial en la evolución de computadoras cuánticas eficaces y confiables.

Capítulo 12 Más Allá de la Topología: Modelos de Fractón

Sumario

- ❑ *Códigos de Fractón*
- ❑ *Códigos de Color 3D*
- ❑ *Fractones y Lineones*
- ❑ *Simetrías de Subsistema*
- ❑ *Degeneración Subextensiva*
- ❑ *Umbrales Óptimos*
- ❑ *Nuevos Modelos*

12.1 Preliminares

Actualmente, estamos inmersos en una nueva revolución en la teoría de las fases cuánticas de la materia, impulsada por el objetivo de ir más allá de las nociones existentes de orden topológico. Una manifestación de este novedoso y sorprendente comportamiento son las llamadas fases de “fractones”, que dependen tanto de la geometría como de la topología. Esto se evidencia claramente en la degeneración del estado fundamental de estos sistemas, la cual depende del tamaño del sistema y no es un invariante topológico. Aunque los modelos de fractones se originaron a partir de estudios de información cuántica, están ganando cada vez más atención en la comunidad de materia condensada como ejemplos de nuevas fases de la materia con “orden de fractones”. Los modelos de fractones presentan una brecha energética, son exactamente resolubles y son estables ante perturbaciones locales arbitrarias del Hamiltoniano. El término “fractón” fue acuñado originalmente en el contexto de las redes fractales, pero posteriormente se extendió a redes de dimensiones enteras.

Una de las características definitorias de estos nuevos modelos es la aparición de excitaciones de cuasi-partículas aisladas, denominadas fractones, que son fundamentalmente inmóviles cuando están aisladas. Esto contrasta notablemente con las excitaciones topológicas en sistemas con orden topológico, que pueden difundirse fácilmente por todo el sistema como he mostrado en el capítulo 7. Además de las excitaciones de fractones, estos modelos pueden presentar excitaciones adicionales que solo son móviles a lo largo de subdimensiones, como líneas o planos, dentro de un sistema tridimensional.

El modelo de fractones X-cubo representa un cambio de paradigma en la corrección de errores cuánticos, conectando los códigos topológicos 3D convencionales y una nueva clase de memorias cuánticas robustas. Mientras que los códigos topológicos 3D tradicionales como el código de color y el código toroidal dependen de las excitaciones anyónicas móviles protegidas por simetrías globales, el modelo X-cube introduce fractones: cuasipartículas inmóviles restringidas por simetrías de subsistemas. Esta diferencia fundamental en la movilidad de las excitaciones proviene de sus distintas estructuras de red: donde el código de color 3D opera en mosaicos cuatro-colorables como expliqué en el capítulo 7, el X-cube emplea redes cúbicas con restricciones planas que se intersecan, lo que

impone dinámicas de fractones.

Las conexiones estructurales con los códigos topológicos 3D emergen a través de varias características clave:

- *Formalismo estabilizador*: Ambos sistemas utilizan operadores estabilizadores locales: mediciones de Pauli centradas en caras en los códigos toroidales frente a operadores planos que se intersecan en el X-cubo.
- *Dualidades*: El código de color 3D se puede relacionar con múltiples códigos de superficie mediante circuitos de Clifford locales, mientras que el modelo X-cubo muestra equivalencia a dos modelos de tablero (checkerboard) a través de transformaciones unitarias.

La relación entre ambos tipos de códigos se vuelve evidente al considerar las restricciones de la red como se muestra en la tabla 12.1. Esta tabla destaca cómo los modelos de fractones generalizan la

Característica	Código de Color 3D	Modelo X-Cube
Tipo de simetría	Global topológico	Subsistema
Excitaciones	Anyones móviles	Fractones + lineones
Escalabilidad de cúbits lógicos	Dependiente del género de superficie	Extensiva
Corrección de errores	Decodificadores de coincidencia	Coincidencia paralelizada

Cuadro 12.1: Comparativa entre el código de color 3D y el modelo X-cubo.

protección topológica a través de simetrías espacialmente restringidas. Los estabilizadores planos del X-cubo—productos de operadores de Pauli a través de todos los planos de la red—crean una intrincada red de restricciones que impiden la propagación de excitaciones mientras mantienen capacidades de corrección de errores. Notablemente, su umbral de cambio de fase supera a los códigos 3D convencionales por 2-4 veces, atribuible directamente a la inmovilidad de los fractones, que suprime la proliferación de errores.

El modelo de tablero (checkerboard)—un pariente cercano del X-cubo—demuestra aún más esta relación entre ambos tipos de códigos. A través de transformaciones unitarias locales, las excitaciones del modelo tablero se descomponen en pares de fractones, imitando cómo los estados del código de color 3D se dividen en equivalentes de códigos topológicos 2D. Este parentesco estructural sugiere que los modelos de fractones constituyen una extensión natural de los códigos cuánticos topológicos en regímenes con protección pasiva mejorada, lograda a través de un diseño de red estratégico en lugar de recurrir a extensiones dimensionales (ver capítulo 10).

12.2 Modelo X-cubo: Estructura Básica

Los modelos de fractones representan una fascinante clase derivada de los órdenes topológicos cuánticos en sistemas tridimensionales (3D) que no son estrictamente topológicos, pero están estrechamente emparentados con ellos. Estas teorías son especialmente interesantes debido a las características únicas de sus excitaciones, que incluyen fractones (excitaciones puntuales completamente inmóviles)

y lineones (excitaciones cuya movilidad está restringida a una única dimensión o línea). Por esta razón, se dice que tienen movilidad “fraccionalizada”. Estas propiedades los convierten en candidatos prometedores para aplicaciones avanzadas, como la corrección cuántica de errores. En este capítulo describiré el modelo X-cubo, uno de los ejemplos más representativos dentro de esta categoría.

El modelo X-cubo se define sobre una red cúbica tridimensional con condiciones de frontera periódicas. Cada arista de esta red alberga un cúbit físico, lo que da lugar a una estructura rica en interacciones entre los cúbits.

12.2.1 Red y cúbits

Para entender la base del modelo X-cubo, primero debemos definir su estructura fundamental (ver figura 12.1). La red cúbica tridimensional sirve como el marco donde se distribuyen los cúbits físicos. Cada arista (ℓ) de esta red contiene un cúbit, que es la unidad básica de información cuántica en el sistema.

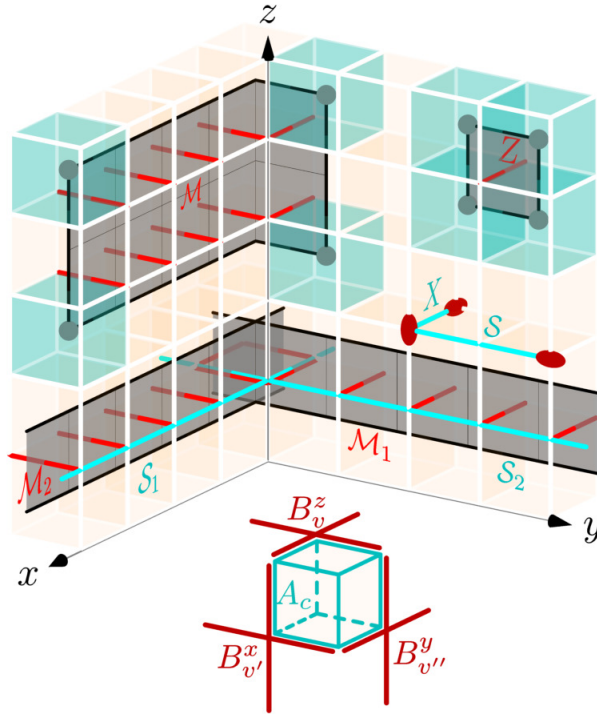


Figura 12.1: Generadores del estabilizador, excitaciones y operadores lógicos del modelo X-cubo. A cada arista (ℓ) de la red se le asigna un cúbit físico. Los operadores de Pauli X (Z) se representan mediante aristas cian (rojas). Los generadores A_c (definidos en cubos unitarios c) y B_v^μ (en vértices v) constituyen el estabilizador. Los estados base cumplen $A_c = 1$ y $B_v^\mu = 1$ para todo c, v y $\mu \in \{x, y, z\}$. Cuerdas cian ($\mathcal{S}$) y membranas grises ($\mathcal{M}$) simbolizan operadores de cadena $X_{\mathcal{S}} := \prod_{\ell \in \mathcal{S}} X_\ell$ y membrana $Z_{\mathcal{M}} := \prod_{\ell \in \mathcal{M}} Z_\ell$. Las excitaciones tipo fractón ($A_c = -1$) aparecen como cubos cian en vértices de membranas. Operadores cadena generan lineones en extremos y codos, representados por elipsoides rojos con $B_v^\mu = 1$ y $B_v^{\nu \neq \mu} = -1$ (dirección μ indicada por la elongación). Las estructuras extendidas $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ corresponden a operadores lógicos sin excitaciones debido a condiciones de contorno periódicas (PBC).

12.2.2 Generadores estabilizadores

Los generadores estabilizadores son operadores que actúan sobre conjuntos específicos de cúbits en la red. Estos operadores determinan las reglas que los estados del sistema deben cumplir para pertenecer al espacio protegido del código cuántico. En el modelo X-cubo, existen dos tipos principales:

1. Operadores tipo A_c : Para cada cubo o celda elemental (c) en la red, se define un operador que es el producto de operadores Pauli- X en las 12 aristas del cubo:

$$A_c = \prod_{\ell \in c} X_\ell \quad (12.1)$$

Este operador asegura que las interacciones dentro del cubo mantengan una coherencia específica.

2. Operadores tipo $B_{v\mu}$: Para cada vértice (v) y dirección espacial $\mu \in \{x, y, z\}$, se define un operador que es el producto de operadores Pauli- Z en las cuatro aristas adyacentes al vértice y perpendiculares a la dirección μ :

$$B_{v\mu} = \prod_{\ell \in v: \ell \perp \mu} Z_\ell \quad (12.2)$$

Este operador regula las interacciones locales alrededor de cada vértice en función de su orientación.

12.2.3 Hamiltoniano

El Hamiltoniano del modelo X-cubo combina ambos tipos de operadores estabilizadores para garantizar que los estados base satisfagan las condiciones impuestas por estos operadores:

$$H_{X\text{-cubo}} = - \sum_c A_c - \sum_{v,\mu} B_{v\mu} \quad (12.3)$$

Los estados base del sistema son aquellos que cumplen $A_c = 1$ y $B_{v\mu} = 1$ para todos los cubos (c) y vértices (v) en todas las direcciones (μ).

12.3 Excitaciones y Propiedades

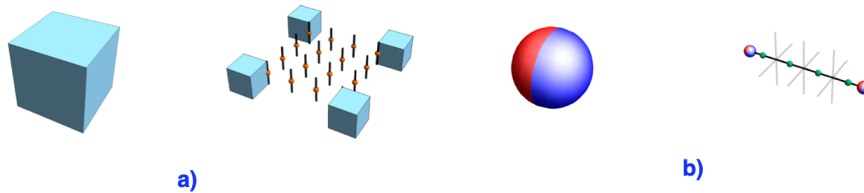


Figura 12.2: Excitaciones en el modelo fracton X-cubo. a) Fractones: son excitaciones individuales localmente inmóviles representadas por un cubo azul aislado, mientras que las excitaciones compuestas de varios fractones (cuatro en este caso) son móviles. b) Lineones: excitaciones de cuasipartícula cuya movilidad está restringida a lo largo de una línea dentro del sistema.

Las excitaciones en el modelo X-cubo presentan características únicas que las distinguen de otros sistemas topológicos convencionales (ver figura 12.2).

12.3.1 Fractones

Los fractones son excitaciones puntuales que surgen cuando $A_c = -1$ en un cubo específico. Estas excitaciones se generan en las esquinas de operadores membranas (ver figura 12.1) construidas con operadores tipo Z_M . Una propiedad notable es su inmovilidad: no pueden desplazarse sin crear nuevas excitaciones adicionales, lo cual está directamente relacionado con las simetrías locales del sistema.

12.3.2 Lineones

Por otro lado, los lineones son excitaciones asociadas a $B_{v\mu} = -1$. Estas excitaciones se forman en los extremos o curvas de operadores tipo cuerda X_S . A diferencia de los fractones, los lineones tienen movilidad restringida a lo largo de una única dirección espacial (μ), lo que limita su movimiento a trayectorias unidimensionales dentro del sistema.

12.4 Papel de las Simetrías de Subsistema en Códigos Fractón

Las simetrías de subsistema son fundamentales en los códigos fractones, como el modelo X-cubo, para garantizar excitaciones con movilidad restringida y orden topológico no convencional. Su influencia se manifiesta en aspectos clave que describo a continuación.

En el modelo X-cubo, las simetrías actúan sobre subsistemas 2D (planos) en lugar de todo el sistema. Por ejemplo, invertir todos los espines en un plano preserva la energía del estado fundamental. Esto impide que los fractones (excitaciones puntuales) se muevan sin crear nuevas excitaciones, ya que violarían estas simetrías locales. Los lineones (excitaciones 1D) solo pueden moverse a lo largo de ejes compatibles con las simetrías de subsistema asociadas a direcciones cristalográficas específicas. Las simetrías de plano o subsistema, a diferencia de las simetrías globales de otros modelos, son responsables de las características únicas de las excitaciones. Estas simetrías limitan las posibles transiciones de fase y conservan propiedades cuánticas específicas. Estas se manifiestan en el funcionamiento del modelo a través de transiciones de fase que son cruciales para la descripción de sus características cuánticas.

La tabla 12.2 muestra una comparación entre las propiedades que exhiben los modelos de fractones con los modelos estrictamente topológicos.

Característica	Simetrías de subsistema (fractones)	Simetrías globales (códigos convencionales)
Unidad de simetría	Planos/líneas (2D/1D)	Todo el sistema (3D)
Conservación	Parcial (subsistemas específicos)	Total (teorema de Noether global)
Excitaciones	Fractones (inmóviles), lineones (1D)	Anyones (móviles en 2D/3D)
Implantación física	Requiere acoplamientos multi-escala	Estructuras periódicas simples

Cuadro 12.2: Comparación entre modelos de fractones con simetría de subsistema con códigos topológicos convencionales con simetrías globales.

12.5 Degeneración Topológica Subextensiva

Las simetrías de subsistema generan una degeneración exponencial del estado base, que escala con el tamaño del sistema. Esto rompe la degeneración topológica estrictamente constante de los modelos topológicos convencionales (ver capítulo 7). Por ejemplo, en el modelo X-cubo:

$$\text{Degeneración EF} \sim 2^{6L-3} \quad (L = \text{tamaño del sistema}) \quad (12.4)$$

Esto contrasta con códigos convencionales donde las simetrías globales no permiten tal escalamiento. Para un sistema definido en una red cúbica con condiciones de frontera periódicas (equivalente a un 3-toro), la degeneración del estado fundamental es 8. Este valor surge de las tres direcciones espaciales independientes (x, y, z) , cada una contribuyendo un factor de 2 a la degeneración (2^3). Este resultado es independiente del tamaño lineal L del sistema, siempre que sea suficientemente grande para mantener la topología global. En contraste, si el sistema tuviera condiciones de frontera abiertas o topologías no triviales adicionales, la degeneración podría modificarse, pero seguiría siendo una constante topológica que no escala con L . Este comportamiento refleja la naturaleza de las excitaciones topológicas en 3D, donde los operadores de Wilson asociados a bucles y superficies no contractibles (homológicamente no-triviales) definen los estados fundamentales.

- *Códigos fractones*: La degeneración topológica escala exponencialmente con el tamaño del sistema, debido a simetrías de subsistema. Por ejemplo, el modelo X-cubo exhibe una degeneración subextensiva.
- *Códigos convencionales*: La degeneración es constante (independiente del tamaño del sistema). El código toroidal en 3D tiene degeneración constante de 8, no exponencial con el tamaño.

12.6 Corrección Cuántica de Errores y Umbrales Óptimos

El modelo X-cubo no solo es interesante desde un punto de vista teórico, sino también por sus aplicaciones prácticas como código cuántico corrector de errores. Su capacidad para detectar errores locales mediante síndromes específicos lo convierte en una herramienta robusta frente al ruido cuántico. Hemos caracterizado rigurosamente los modelos de fractones como códigos de corrección de errores cuánticos, denominados códigos de fractones. Esto es posible porque son códigos estabilizadores en una red 3D, a pesar de no ser los códigos topológicos más estándar que han sido objeto de mucho más estudio que los códigos de fractones. Hemos demostrado que los códigos de fractones son candidatos legítimos para funcionar como memoria cuántica y, por lo tanto, es importante determinar sus umbrales de error para cuantificar su idoneidad como unidades potenciales de almacenamiento de información.

Al abordar por primera vez las capacidades de umbral de error de una memoria cuántica, es conveniente utilizar lo que se llama un modelo de error fenomenológico para simplificar la tarea, de otro modo muy compleja, de determinar los umbrales de error bajo situaciones de ruido realistas. La lógica detrás de este enfoque es que si estos umbrales fenomenológicos son lo suficientemente altos y comparables a umbrales similares para el código de Kitaev y los códigos de color, entonces podemos

considerar que tienen la oportunidad de ser competitivos. Si el umbral fenomenológico es muy bajo en comparación con esos ejemplos bien conocidos, podemos evitar el esfuerzo de profundizar en modelos de error más detallados.

12.6.1 Comparación de Umbrales de Error

Los errores de fase (Z) y de bit (X) son claves en la corrección de errores. Los errores de fase se detectan a través de síndromes con $A_c = -1$, mientras que los errores de bit generan lineones, detectados cuando $B_{v\mu} = -1$. La identificación efectiva de ambos tipos de errores es esencial para mantener la integridad cuántica del sistema.

Como resultado del análisis de errores cuánticos mediante modelos estadísticos de espines clásicos, hemos desarrollado nuevos modelos estadísticos aleatorios con simetría de subsistema. Presentamos dos de estos modelos: el RPI (Ising en Plaquetas Aleatorias) y el RACAT (Ashkin-Teller Acoplado Aleatoriamente de manera Anisotrópica), cada uno de los cuales proporciona un umbral de error para errores de inversión de bits o de fase.

El estudio convencional de los modelos de espines clásicos aleatorios se realiza especificando un tipo particular de desorden congelado a un valor fijo del parámetro de ruido (p). Sin embargo, la identificación del umbral de error requiere un tratamiento diferente, ya que el parámetro (p) debe variar a lo largo de la Línea de Nishimori hasta alcanzar el límite de fase que separa las fases ordenadas y desordenadas. Adicionalmente, el desorden congelado no es arbitrario, sino que está determinado por el modelo de error fenomenológico. Todo esto, junto con el hecho de que las redes son 3D, convierte el análisis numérico de estos nuevos modelos en un desafío significativo que hemos superado con éxito.

La ausencia de orden vítreo a lo largo de la Línea de Nishimori dentro de la fase ordenada de los modelos estadísticos asociados al código de fractones es fundamental para el correcto funcionamiento de este código como memoria cuántica. Demostramos este resultado de manera analítica por primera vez en modelos 3D, utilizando parámetros de orden de vidrio de fractones diseñados específicamente para detectar este tipo de orden perturbador.

El análisis numérico exhaustivo realizado con avanzados métodos de Montecarlo de atemperamiento paralelo nos ha proporcionado valores precisos para los umbrales del código de fractones X-cubo, mencionado previamente. Además, hemos encontrado una dualidad aproximada entre los umbrales de error para inversión de bits y de fase. Estos umbrales de error, al igual que en cualquier código CSS con tasa de codificación cero, obedecen la desigualdad:

$$H(p_{Xc}) + H(p_{Zc}) \leq 1, \quad (12.5)$$

impuesta por el límite cuántico de Gilbert-Varshamov, donde

$$H(p) := -p \log_2(p) - (1 - p) \log_2(1 - p) \quad (12.6)$$

es la entropía de Shannon. Nuestros resultados dan como resultado

$$H(p_{Xc}) + H(p_{Zc}) = 1,00(2), \quad (12.7)$$

lo que no solo cumple con esta restricción, sino que se aproxima a su límite superior, similar a las situaciones observadas en códigos topológicos convencionales. El cumplimiento de esta restricción

de entropía de Shannon brinda un sólido apoyo a la dualidad aproximada en presencia de desorden. Resultados como este son muy raros debido a las dificultades que conlleva trabajar bajo condiciones de desorden fuerte.

Los errores en los códigos de fractón se pueden relacionar con propiedades de las transiciones de fase en modelos estadísticos 3D con simetrías de subsistema, como he mencionado anteriormente:

- Modelo RPI (Random Plaquette Ising): Relacionado con errores X , presenta transiciones de fase de primer orden a bajas tasas de error (p).
- Modelo RACAT (Random Anisotropically Coupled Ashkin-Teller): Asociado a errores Z , muestra transiciones suavizadas cerca del umbral.

Los umbrales de error óptimos son (ver tabla 12.3):

- $p_c^X \simeq 15,2(4) \%$ (errores de bit).
- $p_c^Z \simeq 7,5(2) \%$ (errores de fase).

Estos valores superan significativamente a los códigos topológicos 3D convencionales: código toroidal (3.3 %) y código de color (1.9 %), resaltando el potencial del modelo X-cubo como memoria cuántica tolerante a fallos.

	$2D$	$3D$	Errores de Cúbit y Medidas
Kitaev	11 %	3.3 %	2.9 % ($2D$)
Código Color	11 %	1.9 %	4.5 % ($2D$)
Fractón X-cubo	$\emptyset$	7.5 %	??

Cuadro 12.3: Comparación de umbrales de error entre modelos de fracton en $3D$ y modelos topológicos en $2D$ y $3D$.

En resumen, los fractones muestran umbrales de error significativamente superiores a los de códigos topológicos estándar, gracias a la detección local de síndromes, destacando su robustez como opción para aplicaciones de memoria cuántica tolerante a fallos.

12.7 Nuevos Modelos de Fractones

En este trabajo, hemos logrado construir una nueva y enriquecida familia de modelos de fractones y hemos encontrado nuevos métodos para estudiarlos de manera sistemática. Hemos descubierto una generalización natural de los modelos de fractones obtenida al torcer sus simetrías de gauge. Al introducir operadores de transformación de gauge generalizados que llevan factores de fase adicionales según configuraciones locales, hemos construido una gran y rica familia de modelos tridimensionales exactamente solvibles, a los que denominamos “modelos de fractones retorcidos.” Además, hemos presentado un marco matemático general dentro del cual se pueden estudiar sus propiedades del estado fundamental y el espectro de excitaciones.

Hasta donde sabemos, este trabajo constituye el primer estudio sistemático de las propiedades de trenzado y fusión de órdenes de fractones, incluidos aquellos con características no abelianas, y proporciona un marco general para futuros estudios sobre el orden de fractones. Hasta el momento,

este marco nos ha conducido a una multitud de modelos tridimensionales exactamente resolubles que exhiben un comportamiento rico y hasta ahora inexplorado.



Figura 12.3: Portada de la revista Physical Review Letters que nos fue concedida como reconocimiento a nuestros resultados de los umbrales óptimos en modelos fractón.

1) Degeneración del Estado Fundamental

Esta es una característica clave que distingue los órdenes de fractones de los órdenes topológicos. En este trabajo, calculamos las degeneraciones no triviales del estado fundamental de los modelos de fractones retorcidos con el sistema definido en un toro tridimensional. Los cálculos explícitos para los modelos X-Cube torcido y de tablero de damas tienen un doble propósito. En primer lugar, la degeneración no trivial del estado fundamental demuestra claramente que los modelos considerados son fases con brechas que albergan una cantidad subextensiva de estados fundamentales localmente indistinguibles y, por tanto, son estables ante perturbaciones locales arbitrarias. En segundo lugar, la dependencia de la degeneración del estado fundamental en el tamaño del sistema en todos los modelos considerados establece la naturaleza geométrica de las fases de fractones, ya que son sensibles no solo a la topología global sino también a la geometría.

2) Caracterización Completa de Nuevos Órdenes de Fractones

Otra virtud de nuestro trabajo es que representa un avance clave en el estudio de las fases cuánticas tridimensionales de la materia y del orden de fractones, proporcionando una ruta sistemática para estudiar las propiedades topológicas de trenzado y fusión de partículas subdimensionales. Significativamente, esto también nos permite dar una definición matemática precisa de un fractón como una excitación que no es el resultado de fusión de excitaciones móviles, relacionando así la inmovilidad de los fractones con las propiedades de fusión de las excitaciones topológicas en teorías de gauge de redes. De manera similar, una excitación unidimensional se define como aquella que no es el resultado de la fusión de excitaciones bidimensionales, llevando a una noción general de excitaciones subdimensionales dentro del mismo marco.

3) Fractones No Abelianos

Una característica notable de nuestra construcción es que, a pesar de basarse en grupos discretos abelianos, aún alberga fractones no abelianos. Nuestro trabajo extiende la noción de excitaciones no abelianas a tres dimensiones, ya que los modelos de fractones retorcidos pueden realizar fases en las que los propios fractones son no abelianos, con sus estados ligados de dimensión 2 realizando estadísticas de trenzado no abelianas, o en las que las excitaciones unidimensionales son no abelianas. La posibilidad de realizar tales excitaciones exóticas en tres dimensiones puede tener implicaciones significativas para el campo de la computación cuántica topológica, así como para el almacenamiento de información cuántica.

12.8 Conclusiones

Las noveladas fases cuánticas de la materia, caracterizadas por sus propiedades topológicas, se han convertido en un tema de intenso estudio en diversas áreas que van desde la materia condensada y la información cuántica hasta la física de altas energías. Se ha avanzado significativamente también en sus realizaciones experimentales. Esta tendencia culminó en la obtención del premio Nobel de física (2016), el premio Buckley (2016) y la medalla Dirac (2015), entre otros, en reconocimiento a los avances en el campo de las fases topológicas de la materia, con desarrollos modernos que se extienden aún más. La fuerza motriz original detrás de los estudios en este campo fue la intención de ir más allá de la teoría estándar de las fases de la materia, introducida por Landau, basada en la noción de simetrías rotas espontáneamente y sus correspondientes parámetros de orden.

Conclusiones: Un Esfuerzo Colaborativo

La mecánica cuántica es una teoría de la información en sí misma, incluso desde sus fundamentos: cuando postulamos que la función de onda es la *información* que tenemos sobre el estado de un sistema físico y podemos calcular observables físicos a partir de ella. Hoy en día, hemos entrado en una nueva era con la información cuántica. Este es un campo interdisciplinar, ya que es la combinación fructífera de la mecánica cuántica y la teoría de la información. La física, las ciencias del cómputo, las matemáticas, etc. están típicamente involucradas en este tipo de investigación.

Al principio de la información cuántica, para los físicos era difícil entrar en esta naciente disciplina cuántica debido a la falta de formación en ciencias del cómputo. Tenían que vencer una “barrera computacional” para complementar su formación y comenzar a trabajar en ella. O de manera similar, para los informáticos era la “barrera cuántica” la que tenían que superar. Algo similar sucede ahora con la computación cuántica topológica: ha habido una falta de conocimientos de topología en la comunidad de computación cuántica a la cual he tratado de contribuir a superar. Aún existe la necesidad de superar una cierta “barrera topológica”. Uno de los objetivos de este discurso es intentar hacer este tema más accesible y mostrar que hay preguntas abiertas. Y hay desafíos muy interesantes por delante para un físico teórico.

Un físico teórico debe ser teórico antes que físico. Darme cuenta de esto y de sus implicaciones ha sido fundamental tanto en mis estudios durante la carrera de físicas como en mi carrera investigadora. Esta idea me ha aportado la claridad suficiente para ver la luz en los momentos de oscuridad, que no han sido pocos. Por eso siempre he admirado y disfrutado con las teorías de la física que explican la naturaleza. Eso es lo que me atrajo a la física. Eso es lo más bonito y gratificante que tenemos los físicos. Para mí, ver que los códigos cuánticos topológicos de color que construimos teóricamente en 2006 y años siguientes, han sido realizados experimentalmente en varios laboratorios por el mundo y más tarde por compañías tecnológicas, representa el sueño de un físico teórico hecho realidad. Por tanto, puedo decir que el código de color es un modelo con belleza física (definición 5.1). Pero más importante aún, no solo es un modelo con belleza, es un modelo útil (en inglés, “it’s not just beautiful, it is useful”).

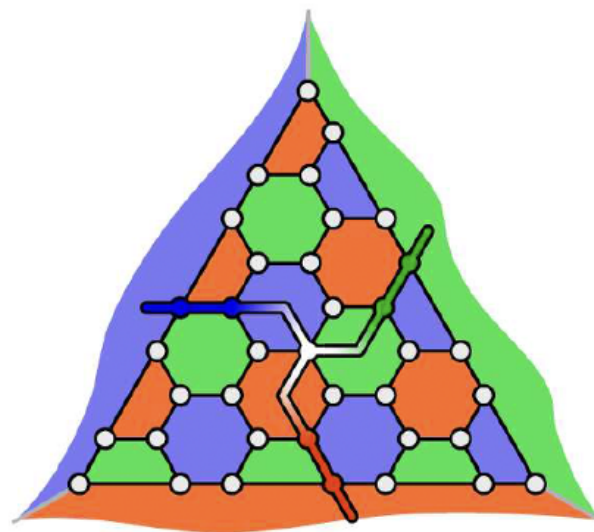
Todavía queda mucho camino para construir un computador cuántico plenamente funcional, pero estoy convencido de que se conseguirá más pronto que tarde. Si miro cómo estaba el panorama de la computación cuántica en el año 1998 cuando empecé a interesarme por ella, lo que hemos avanzado era impensable por aquel entonces. Por eso soy optimista hacia el futuro. He utilizado varias veces una analogía con la salsa pil-pil¹ para describir la evolución de la computación cuántica actualmente: los avances son continuos y frecuentes aunque aislados no son suficientes, pero la constancia y continuidad harán que todos ellos juntos cooperen para llegar al punto crítico donde aparecerá el computador cuántico ante nosotros.

¹El que ha hecho alguna vez una salsa pil-pil sabe que tiene que tener paciencia y mantener el movimiento de la sartén para que las pequeñas gotitas de emulsión que se van formando aumenten en número y lleguen a percolar formando la salsa completa ... que está de rechupete.

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todos los colaboradores que han contribuido al desarrollo teórico de los códigos de color. En particular, agradezco profundamente a Héctor Bombín de la Universidad Complutense de Madrid (España) por su colaboración esencial en el marco teórico fundamental. Asimismo, extendo mi gratitud a Helmut Katzgraber y Ruben Andrist por sus importantes contribuciones numéricas. Para la implementación experimental de los códigos de color, deseo reconocer el trabajo excepcional de todos los colaboradores involucrados como Markus Müller y Ángel Rivas de la Universidad Complutense de Madrid (España). De igual manera, expreso mi profundo reconocimiento a Rainer Blatt y a su equipo por su excepcional trabajo en la implementación experimental de estos sistemas cuánticos. Del mismo modo, extendo mi gratitud a Hao Song, Ke Liu, Lode Pollet y sus equipos de investigación por sus contribuciones fundamentales en el desarrollo y análisis teórico de los códigos de fractón, ampliando así nuestro entendimiento más allá de las estructuras topológicas para la corrección cuántica de errores.

En los locos años 20 del siglo XX se formularon las leyes de la mecánica cuántica. Ahora estamos en los cuánticos años 20 del siglo XXI y pensamos que la realización práctica de un computador cuántico está cada vez más cerca.

He dicho.



$$d=7, n=37$$

Figura 12.4: Código de color triangular con 37 cúbits físicos.

Bibliografía

- [1] M. Nielsen e I. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2000.
- [2] A. Galindo y M. A. Martín-Delgado. «Information and computation: Classical and quantum aspects». En: *Reviews of Modern Physics* 74.2 (2002), págs. 347-423. DOI: [10.1103/RevModPhys.74.347](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.74.347). arXiv: [arXiv:quant-ph/0112105](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0112105) [quant-ph].
- [3] R. P. Feynman. «There's plenty of room at the bottom». En: *Engineering and Science* 23 (feb. de 1960). Speech at the annual meeting of the American Physical Society at Caltech on December 29th 1959, págs. 22-36.
- [4] P. A. Benioff. «Quantum mechanical models of Turing machines that dissipate no energy». En: *Phys. Rev. Lett.* 48 (1982), págs. 1581-1585.
- [5] R. P. Feynman. «Quantum mechanical computers». En: *Opt. News* 11 (1985), pág. 11.
- [6] D. Deutsch. «Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer». En: *Proc. Roy. Soc. Lond. A* 400 (1985), págs. 97-117.
- [7] D. DiVincenzo. «Two-bit gates are universal for quantum computation». En: *Phys. Rev. A* 51 (1994). cond-mat/9407022, págs. 1015-1022.
- [8] A. Barenco, C. H. Bennett, R. Cleve, D. P. DiVincenzo, N. Margolus, P. Shor, T. Sleator, J. A. Smolin y H. Weinfurter. «Elementary gates for quantum computation». En: *Phys. Rev. A* 52 (1995), págs. 3457-3467.
- [9] J. I. Cirac y P. Zoller. «Quantum computations with cold trapped ions». En: *Phys. Rev. Lett.* 74 (1995), págs. 4091-4094.
- [10] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, W. M. Itano y D. J. Wineland. «Demonstration of a universal quantum logic gate». En: *Phys. Rev. Lett.* 75 (1995), págs. 4714-4717.
- [11] H. C. Nägerl, W. Bechter, J. Eschner, F. Schmidt-Kaler y R. Blatt. «Ion strings for quantum gates». En: *Applied Physics B Lasers and Optics* 66 (1998), págs. 603-608.
- [12] A. Yu. Kitaev. «Fault-tolerant quantum computation by anyons». En: *Annals of Physics* 303.1 (2003). quant-ph/9707021, págs. 2-30.
- [13] M. H. Freedman. «P/NP, and the quantum field computer». En: *Proc. Natl. Acad. Sci., USA* 95 (1998), págs. 98-101.
- [14] E. Dennis, A. Kitaev, A. Landahl y J. Preskill. «Topological quantum memory». En: *J. Math. Phys.* 43 (2002), págs. 4452-4505.
- [15] S. B. Bravyi y A. Yu. Kitaev. «Quantum codes on a lattice with boundary». En: *arXiv: Quantum Physics* (1998). quant-ph/9811052.
- [16] H. Bombin y M. A. Martín-Delgado. «Topological Quantum Error Correction with Optimal Encoding Rate». En: *Phys. Rev. A* 73 (2006). quant-ph/0602063, pág. 062303.

- [17] H. Bombin y M. A. Martin-Delgado. «Homological Error Correction: Classical and Quantum Codes». En: *J. Math. Phys.* 48 (2007). quant-ph/0605094, pág. 052105.
- [18] X.-G. Wen. *Quantum Field Theory of Many-body Systems: From the Origin of Sound to an Origin of Light and Electrons*. New York: Oxford Univ. Press, 2004.
- [19] X.-G. Wen. «Topological orders and Edge excitations in FQH states». En: *Advances in Physics* 44 (1995), pág. 405.
- [20] X.-G. Wen y Q. Niu. «Ground-state degeneracy of the fractional quantum Hall states in the presence of a random potential and on high-genus Riemann surfaces». En: *Phys. Rev. B* 41 (1990), pág. 9377.
- [21] M. Freedman, C. Nayak y K. Walker. «Towards Universal Topological Quantum Computation in the $\nu = 5/2$ Fractional Quantum Hall State». En: (). cond-mat/0512066.
- [22] S. Das Sarma, M. Freedman y C. Nayak. «Topologically-Protected Qubits from a Possible Non-Abelian Fractional Quantum Hall State». En: *Phys. Rev. Lett.* 94 (2005), pág. 166802.
- [23] P. Shor. «Scheme for reducing decoherence in quantum memory». En: *Phys. Rev. A* 52 (1995), pág. 2493.
- [24] A. M. Steane. «Error correcting codes in quantum theory». En: *Phys. Rev. Lett.* 77 (1996), pág. 793.
- [25] A. R. Calderbank y P. W. Shor. «Good quantum error-correcting codes exist». En: *Phys. Rev. A* 54 (1996), pág. 1098.
- [26] A. M. Steane. «Multiple particle interference and quantum error correction». En: *Proc. Roy. Soc. Lond. A* 452 (1996), pág. 2551.
- [27] D. Gottesman. «Class of quantum error-correcting codes saturating the quantum Hamming bound». En: *Phys. Rev. A* 54 (1996), pág. 1862.
- [28] Peter W. Shor. «Fault-Tolerant Quantum Computation». En: *IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*. 1996.
- [29] E. Knill, R. Laflamme y W. Zurek. «Accuracy Threshold for Quantum Computation». En: (). quant-ph/9610011.
- [30] D. Gottesman. «A theory of fault-tolerant quantum computation». En: (). quant-ph/9702029.
- [31] D. Aharonov y M. Ben-Or. «Fault-Tolerant Quantum Computation With Constant Error». En: *Proceedings of the Twenty-Ninth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*. El Paso, Texas, mayo de 1997, págs. 176-188.
- [32] C. Zalka. «Threshold estimate for fault tolerant quantum computing». En: (). quant-ph/9612028.
- [33] J. Preskill. «Reliable Quantum Computers». En: *Proc. Roy. Soc. Lond. A* 454 (1998), págs. 385-410.
- [34] P. Aliferis, D. Gottesman y John Preskill. «Quantum accuracy threshold for concatenated distance-3 codes». En: *Quant. Inf. Comput.* 6 (2006), págs. 97-165.

- [35] D. Leibfried, R. Blatt, C. Monroe y D. Wineland. «Quantum dynamics of single trapped ions». En: *Reviews of Modern Physics* 75.1 (2003), págs. 281-324. DOI: [10.1103/RevModPhys.75.281](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.75.281).
- [36] Vlatko Vedral. *Introduction to Quantum Information Science*. Oxford Graduate Texts. Oxford University Press, 2013.
- [37] M. H. Devoret y J. M. Martinis. «Implementing Qubits with Superconducting Integrated Circuits». En: *Quantum Information Processing* 3.1–5 (2004), págs. 163-203. DOI: [10.1007/s11128-004-3101-5](https://doi.org/10.1007/s11128-004-3101-5). arXiv: [arXiv:quant-ph/0405030](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0405030) [quant-ph].
- [38] J. Clarke y F. K. Wilhelm. «Superconducting quantum bits». En: *Nature* 453.7198 (2008), págs. 1031-1042. DOI: [10.1038/nature07128](https://doi.org/10.1038/nature07128). arXiv: [arXiv:0805.0283](https://arxiv.org/abs/0805.0283) [quant-ph].
- [39] M. Saffman, T. G. Walker y K. Mølmer. «Quantum information with Rydberg atoms». En: *Reviews of Modern Physics* 82.3 (2010), págs. 2313-2363. DOI: [10.1103/RevModPhys.82.2313](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.82.2313). arXiv: [arXiv:1003.0305](https://arxiv.org/abs/1003.0305) [quant-ph].
- [40] A. M. Kaufman y K.-K. Ni. «Quantum science with optical tweezer arrays of ultracold atoms and molecules». En: *Nature Physics* 17.12 (2021), págs. 1324-1333. DOI: [10.1038/s41567-021-01357-2](https://doi.org/10.1038/s41567-021-01357-2). arXiv: [arXiv:2102.00134](https://arxiv.org/abs/2102.00134) [quant-ph].
- [41] A. R. Calderbank y P. W. Shor. «Good Quantum Error-Correcting Codes Exist». En: *Physical Review Letters* 78.3 (1997), págs. 405-409. DOI: [10.1103/PhysRevLett.78.405](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.78.405). arXiv: [arXiv:quant-ph/9605005](https://arxiv.org/abs/quant-ph/9605005) [quant-ph].
- [42] A. Steane. «Error Correcting Codes in Quantum Theory». En: *Physical Review Letters* 77.5 (1996), págs. 793-797. DOI: [10.1103/PhysRevLett.77.793](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.793). arXiv: [arXiv:quant-ph/9602020](https://arxiv.org/abs/quant-ph/9602020) [quant-ph].
- [43] Peter W. Shor. «Algorithms for Quantum Computation: Discrete Logarithms and Factoring». En: (1994), págs. 124-134. DOI: [10.1145/185058.185067](https://doi.org/10.1145/185058.185067).
- [44] Lov K. Grover. «Quantum Mechanics Helps in Searching for a Needle in a Haystack». En: *Physical Review Letters* 79.2 (1997), págs. 325-328. DOI: [10.1103/PhysRevLett.79.325](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.79.325).
- [45] Richard P. Feynman. «Simulating Physics with Computers». URL: <https://doi.org/10.1007/BF02650179>.
- [46] Seth Lloyd. «Universal Quantum Simulators». En: *Science* 273.5278 (1996), págs. 1073-1078. DOI: [10.1126/science.273.5278.1073](https://doi.org/10.1126/science.273.5278.1073). URL: <https://doi.org/10.1126/science.273.5278.1073>.
- [47] Dorit Aharonov y Michael Ben-Or. «Fault-tolerant quantum computation with constant error rate». En: *arXiv preprint quant-ph/9611025* (1997). URL: <https://arxiv.org/abs/quant-ph/9611025>.
- [48] Emanuel Knill, Raymond Laflamme y Wojciech Zurek. «Resilient quantum computation: error models and thresholds». En: *Science* 279.5349 (1998), págs. 342-345. DOI: [10.1126/science.279.5349.342](https://doi.org/10.1126/science.279.5349.342).

- [49] Daniel Gottesman. «Stabilizer codes and quantum error correction». En: *PhD Thesis, California Institute of Technology, arXiv preprint quant-ph/9705052* (1997). URL: <https://arxiv.org/abs/quant-ph/9705052>.
- [50] John Preskill. «Fault-tolerant quantum computation». En: *arXiv preprint quant-ph/9712048* (1997). URL: <https://arxiv.org/abs/quant-ph/9712048>.
- [51] Enrico Betti. «Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni». En: *Annali di Matematica Pura ed Applicata* 4.1 (jul. de 1870), págs. 140-158.
- [52] Henri Poincaré. «Analysis Situs». En: *Journal de l'École Polytechnique* 1 (1895), págs. 1-121.
- [53] N. Rose. *Mathematical Maxims and Minims*. Raleigh, NC: Rome Press Inc., 1988.
- [54] Herbert Taylor. «Citado por Martin Gardner en “Juegos Matemáticos”». En: *Investigación y Ciencia (Edición en español de Scientific American)* 41 (1980), pág. 107.
- [55] Alberto Galindo y Pedro Pascual. *Mecánica Cuántica*. 1ª. Madrid, España: Editorial Alhambra, 1978. ISBN: 84-205-0606-8.
- [56] Miguel Ángel Martín-Delgado Alcántara. «Amplitudes de colisión cerca de la capa de masas en teorías de cuerdas mediante superficies de Riemann con bordes». Tesis Doctoral. Madrid, España: Universidad Complutense de Madrid, 1991.
- [57] Rolf Landauer. «Is Quantum Mechanics Useful?». En: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Physical and Engineering Sciences* 353.1703 (1995), págs. 367-376. DOI: [10.1098/rsta.1995.0067](https://doi.org/10.1098/rsta.1995.0067).
- [58] D. Jaksch, C. Bruder, J. I. Cirac, C. W. Gardiner y P. Zoller. «Cold Bosonic Atoms in Optical Lattices». En: *Phys. Rev. Lett.* 81 (15 oct. de 1998), págs. 3108-3111. DOI: [10.1103/PhysRevLett.81.3108](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.81.3108). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.81.3108>.
- [59] Markus Greiner, Olaf Mandel, Tilman Esslinger, Theodor W. Hänsch e Immanuel Bloch. «Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms». En: *Nature* 415.6867 (ene. de 2002), págs. 39-44. DOI: [10.1038/nature01450](https://doi.org/10.1038/nature01450). URL: <https://www.nature.com/articles/nature01450>.
- [60] Robert Raussendorf y Jim Harrington. «Fault-Tolerant Quantum Computation with High Threshold in Two Dimensions». En: *Phys. Rev. Lett.* 98 (19 mayo de 2007), pág. 190504. DOI: [10.1103/PhysRevLett.98.190504](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.190504). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.98.190504>.
- [61] H. G. Katzgraber, H. Bombin y M. A. Martín-Delgado. «Error Threshold for Color Codes and Random Three-Body Ising Models». En: *Phys. Rev. Lett.* 103 (9 ago. de 2009), pág. 090501. DOI: [10.1103/PhysRevLett.103.090501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.103.090501). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.103.090501>.

- [62] H. Bombin, Ruben S. Andrist, Masayuki Ohzeki, Helmut G. Katzgraber y M. A. Martin-Delgado. «Strong Resilience of Topological Codes to Depolarization». En: *Phys. Rev. X* 2 (2 abr. de 2012), pág. 021004. DOI: [10.1103/PhysRevX.2.021004](https://doi.org/10.1103/PhysRevX.2.021004). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.2.021004>.
- [63] Helmut G. Katzgraber, H. Bombin, Ruben S. Andrist y M. A. Martin-Delgado. «Topological color codes on Union Jack lattices: a stable implementation of the whole Clifford group». En: *Phys. Rev. A* 81 (ene. de 2010), pág. 012319. DOI: [10.1103/PhysRevA.81.012319](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.81.012319). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.81.012319>.
- [64] H. Bombin y M. A. Martin-Delgado. «Optimal resources for topological two-dimensional stabilizer codes: Comparative study». En: *Phys. Rev. A* 76 (1 jul. de 2007), pág. 012305. DOI: [10.1103/PhysRevA.76.012305](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.76.012305). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.76.012305>.
- [65] H. Bombin y M. A. Martin-Delgado. «Topological Quantum Distillation». En: *Physical Review Letters* 97 (2006), pág. 180501. DOI: [10.1103/PhysRevLett.97.180501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.97.180501).
- [66] H. Bombin y M. A. Martin-Delgado. «Topological Computation without Braiding». En: *Physical Review Letters* 98 (2007), pág. 160502. DOI: [10.1103/PhysRevLett.98.160502](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.160502).
- [67] H. Bombin y M. A. Martin-Delgado. «Exact Topological Quantum Order in D=3 and Beyond: Branyons and Brane-Net Condensates». En: *Physical Review B* 75 (2007), pág. 075103. DOI: [10.1103/PhysRevB.75.075103](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.75.075103).
- [68] Victor V. Albert y Philippe Faist. *Error Correction Zoo: Transversal Gates*. Último acceso: 14 de abril de 2025. 2025. URL: https://errorcorrectionzoo.org/list/quantum_transversal.
- [69] Antonio Moreno González. *Alessandro Volta (1745-1827). El triunfo de la electricidad*. Córdoba: Almuzara, 2024. ISBN: 978-84-1130-353-7.
- [70] H. Bombin y M. A. Martin-Delgado. «Quantum Measurements and Gates by Code Deformation». En: *J. Phys. A: Math. Theor.* 42.9 (feb. de 2009), pág. 095302. DOI: [10.1088/1751-8113/42/9/095302](https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/9/095302). URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1751-8113/42/9/095302>.
- [71] H. Bombin y M. A. Martin-Delgado. «Family of non-Abelian Kitaev models on a lattice: Topological condensation and confinement». En: *Phys. Rev. B* 78 (11 sep. de 2008), pág. 115421. DOI: [10.1103/PhysRevB.78.115421](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.78.115421). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.78.115421>.
- [72] H. Bombin y M. A. Martin-Delgado. «Nested topological order». En: *New Journal of Physics* 13 (2011), pág. 125001. DOI: [10.1088/1367-2630/13/12/125001](https://doi.org/10.1088/1367-2630/13/12/125001). URL: <https://doi.org/10.1088/1367-2630/13/12/125001>.
- [73] R. Landauer. «The physical nature of information». En: *Physics Letters A* 217 (1996), págs. 188-193.

- [74] R. Landauer. «Is quantum mechanically coherent computation useful?» En: *Proceedings of the Drexel-4 Symposium on Quantum Nonintegrability—Quantum-Classical Correspondence*. Ed. por D.H. Feng y B.-L. Hu. Boston: International Press, 1997.
- [75] W. G. Unruh. «Maintaining coherence in quantum computers». En: *Physical Review A* 51 (1995), págs. 992-997.
- [76] P. W. Shor y J. Preskill. «Simple proof of security of the BB84 quantum key distribution protocol». En: *Physical Review Letters* 85 (2000), págs. 441-444.
- [77] C.. Bennett, D. DiVincenzo, J. Smolin y W. K. Wootters. «Mixed state entanglement and quantum error correction». En: *Physical Review A* 54 (1996), págs. 3824-3851.
- [78] R. Laflamme, C.. Miquel, J.-P. Paz y W. H. Zurek. «Perfect quantum error correction code». En: *Physical Review Letters* 77 (1996), págs. 198-201.
- [79] M. Levin y X.-G. Wen. «String-net condensation: A physical mechanism for topological phases». En: *Physical Review B* 71 (2005), pág. 045110.
- [80] M. H. Freedman, C. Nayak y K. Shtengel. «A Line of Critical Points in 2+1 Dimensions: Quantum Critical Loop Gases and Non-Abelian Gauge Theory». En: *Physical Review Letters* 94 (2005), pág. 147205.
- [81] P. Fendley y E. Fradkin. «Realizing non-Abelian statistics in time-reversal-invariant systems». En: *Physical Review B* 72 (2005), pág. 024412.
- [82] A. Yu. Kitaev. «Anyons in an exactly solved model and beyond». En: *arXiv:cond-mat/0506438* (2005).
- [83] M.H. Freedman, C. Nayak y K. Shtengel. «An extended Hubbard model with ring exchange: a route to a non-Abelian topological phase». En: *Physical Review Letters* 94 (2005), pág. 066401.
- [84] S.H. Simon, N.E. Bonesteel, M.H. Freedman, N. Petrovic y L. Hormozi. «Topological Quantum Computing with Only One Mobile Quasiparticle». En: *Physical Review Letters* 96 (2006), pág. 070503.
- [85] A. Kitaev y J. Preskill. «Topological Entanglement Entropy». En: *Physical Review Letters* 96 (2006), pág. 110404.
- [86] M. Levin y X.-G. Wen. «Detecting Topological Order in a Ground State Wave Function». En: *Physical Review Letters* 96 (2006), pág. 110405.
- [87] F. Verstraete, M. A. Martin-Delgado y J. I. Cirac. «Diverging Entanglement Length in Gapped Quantum Spin Systems». En: *Physical Review Letters* 92 (2004), pág. 087201.
- [88] J. J. Garcia-Ripoll, M. A. Martin-Delgado y J. I. Cirac. «Implementation of Spin Hamiltonians in Optical Lattices». En: *Physical Review Letters* 93 (2004), pág. 250405.
- [89] L.-M. Duan, E. Demler y M. D. Lukin. «Controlling Spin Exchange Interactions of Ultracold Atoms in Optical Lattices». En: *Physical Review Letters* 91 (2003), pág. 090402.

- [90] A. Micheli, G. K. Brennen y P. Zoller. «A Toolbox for Lattice Spin Models with Polar Molecules». En: *arXiv:quant-ph/0512222* (2005).
- [91] J. K. Pachos. «Quantum Computation with Abelian Anyons on the Honeycomb Lattice». En: *arXiv:quant-ph/0511273* (2005).
- [92] R. W. Ogburn y J. Preskill. «Topological Quantum Computation». En: 1509 (1999), págs. 341-356.
- [93] M. H. Freedman, A. Kitaev y Z. Wang. «Simulation of Topological Field Theories by Quantum Computers». En: *Communications in Mathematical Physics* 227 (2002), págs. 587-603.
- [94] Freedman M., M. Larsen y Z. Wang. «A Modular Functor Which is Universal for Quantum Computation». En: *Communications in Mathematical Physics* 227 (2002), págs. 605-622.
- [95] M. H. Freedman, A. Kitaev, M. J. Larsen y Z. Wang. «Topological Quantum Computation». En: *Bulletin of the American Mathematical Society* 40 (2003), págs. 31-38.
- [96] H. Bombin y M. A. Martin-Delgado. «Optimal Resources for Topological 2D Stabilizer Codes: Comparative Study». En: *arXiv preprint quant-ph/0703272* (2007). URL: <https://arxiv.org/abs/quant-ph/0703272>.
- [97] L. D. Landau. En: *Phys. Z. Sowjetunion* 11 (1937), pág. 26.
- [98] V. L. Ginzburg y L. D. Landau. En: *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 20 (1950), pág. 1064.
- [99] X.-G. Wen. En: *Int. J. Mod. Phys. B* 4 (1990), pág. 239.
- [100] Xiao-Gang Wen. «Theory of the Edge States in Fractional Quantum Hall Effects». En: *International Journal of Modern Physics B* 6.10 (mayo de 1992), págs. 1711-1762. DOI: 10.1142/S0217979292000840. URL: <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0217979292000840>.
- [101] Miguel A. Martin-Delgado. *Un nuevo laboratorio de partículas fundamentales: más allá del modelo estándar*. Conferencia, Ciclo Ciencia para Todos 2017, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid. 11 de mayo de 2017. 2017. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=il0JGXMV3pQ>.
- [102] B. Blok y Xiao-Gang Wen. «Effective theories of the fractional quantum Hall effect: Hierarchy construction». En: *Physical Review B* 42.13 (nov. de 1990), págs. 8145-8156. DOI: 10.1103/PhysRevB.42.8145. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.42.8145>.
- [103] N. Read. En: *Phys. Rev. Lett.* 65 (1990), pág. 1502.
- [104] J. Froöhlich y T. Kerler. En: *Nucl. Phys. B* 354 (1991), pág. 369.
- [105] D.S. Rokhsar y S.A. Kivelson. En: *Phys. Rev. Lett.* 61 (1988), pág. 2376.
- [106] N. Read y B. Chakraborty. En: *Phys. Rev. B* 40 (1989), pág. 7133.
- [107] R. Moessner y S.L. Sondhi. En: *Phys. Rev. Lett.* 86 (2001), pág. 1881.
- [108] E. Ardonne, P. Fendley y E. Fradkin. En: *Annals of Phys.* 310 (2004), pág. 493.

- [109] J.González, M.I A. Martín-Delgado, G. Sierra y M. A. H. Vozmediano. *Quantum Electron Liquids and High-Tc Superconductivity*. Vol. 38. Lecture Notes in Physics Monographs. Berlin: Springer-Verlag, 1995. ISBN: 978-3-540-59409-5.
- [110] V. Kalmeyer y R.B. Laughlin. En: *Phys. Rev. Lett.* 59 (1987), pág. 2095.
- [111] X. G. Wen, F. Wilczek y A. Zee. En: *Phys. Rev. B* 39 (1989), pág. 11413.
- [112] N. Read y S. Sachdev. En: *Phys. Rev. Lett.* 66 (1991), pág. 1773.
- [113] Xiao-Gang Wen. «Mean-field theory of spin-liquid states with finite energy gap and topological orders». En: *Physical Review B* 44.6 (ago. de 1991), págs. 2664-2672. DOI: [10.1103/PhysRevB.44.2664](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.44.2664). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.44.2664>.
- [114] Xiao-Gang Wen. «Quantum orders and symmetric spin liquids». En: *Physical Review B* 65.16 (abr. de 2002), pág. 165113. DOI: [10.1103/PhysRevB.65.165113](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.65.165113). arXiv: [cond-mat/0107071](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0107071). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.65.165113>.
- [115] S. Sachdev y K. Park. En: *Annals of Phys.* 298 (2002), pág. 58.
- [116] L. Balents, M. P. A. Fisher y S. M. Girvin. En: *Phys. Rev. B* 65 (2002), pág. 224412.
- [117] R. W. Ogburn y J. Preskill. «Topological Quantum Computation». En: *Lecture Notes in Computer Science*. Vol. 1509. 1999, págs. 341-356.
- [118] Michael H. Freedman, Alexei Kitaev y Zhenghan Wang. «Simulation of topological field theories by quantum computers». En: *Commun. Math. Phys.* 227 (2002), págs. 587-603.
- [119] M. Freedman, M. Larsen y Z. Wang. «A modular functor which is universal for quantum computation». En: *Comm. Math. Phys.* 227 (2002), págs. 605-622.
- [120] M. H. Freedman, A. Kitaev, M. J. Larsen y Z. Wang. «Topological Quantum Computation». En: *Bull. Amer. Math. Soc.* 40 (2003). quant-ph/0101025, págs. 31-38.
- [121] J. Preskill. *Lecture notes on Topological Quantum Computation*. <http://www.theory.caltech.edu/preskill/ph219/topological.ps>. Accessed: [insert date accessed].
- [122] W. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology*. Ed. por Silvio Levy. Vol. 1. Princeton Mathematical Series 35. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1997.
- [123] G. Perelman. *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*. math.DG/0211159. 2002.
- [124] G. Perelman. *Ricci flow with surgery on three-manifolds*. math.DG/0303109. 2003.
- [125] G. Perelman. *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*. math.DG/0307245. 2003.
- [126] F. Wilczek. «Quantum Mechanics of Particles with Fractional Statistics». En: *Phys. Rev. Lett.* 49 (1982), pág. 957.
- [127] J.M. Leinaas y J. Myrheim. «On the Theory of Identical Particles». En: *Nuovo Cimento B* 37 (1977), pág. 1.

- [128] A. Hamma, P. Zanardi y X.-G. Wen. «Quantum Phase Transition in Spin Chains with Randomness». En: *Phys. Rev. B* 72 (2005), pág. 035307.
- [129] D. Nigg, M. Müller, E. A. Martinez, P. Schindler, M. Hennrich, T. Monz, M. A. Martin-Delgado y R. Blatt. «Quantum computations on a topologically encoded qubit». En: *Science* 345.6194 (2014), págs. 302-305. DOI: [10.1126/science.1253742](https://doi.org/10.1126/science.1253742). URL: <https://www.science.org/doi/10.1126/science.1253742>.
- [130] M. Müller, A. Rivas, E. A. Martínez, D. Nigg, P. Schindler, T. Monz, R. Blatt y M. A. Martin-Delgado. «Iterative Phase Optimization of Elementary Quantum Error Correcting Codes». En: *Phys. Rev. X* 6 (3 ago. de 2016), pág. 031030. DOI: [10.1103/PhysRevX.6.031030](https://doi.org/10.1103/PhysRevX.6.031030). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.6.031030>.
- [131] C. Ryan-Anderson, S. A. Moses, J. Yoder, J. M. Chow, B. R. Johnson, R. Niffenegger, D. Mazzanti, S. Moses, M. Merrill, T. Olsacher, K. Christensen, S. E. Bloom, B. Calvin, R. Rugango y D. Hayes. «Implementing Fault-Tolerant Entangling Gates on the Five-Qubit Code and the Color Code». En: *PRX Quantum* 4.4 (2023), pág. 040335. DOI: [10.1103/PRXQuantum.4.040335](https://doi.org/10.1103/PRXQuantum.4.040335). URL: <https://journals.aps.org/prxquantum/abstract/10.1103/PRXQuantum.4.040335>.
- [132] D. Bluvstein, S. R. Evered, J. P. Gaebler, J. Choi, T. Xie, S. Wang, G. T. Diederich, C. L. Parzyck, A. M. Cain, G. S. Mendell, H. Kaufmann, P. Kalincevik, G. Semeghini, K. Schleppchenbeck y Quera Team. «Logical Magic State Distillation using a 2D Color Code on a Neutral Atom Quantum Computer». En: *arXiv preprint* (2023). eprint: [2312.03982](https://arxiv.org/abs/2312.03982) (quant-ph). URL: <https://arxiv.org/abs/2312.03982>.
- [133] Pedro S. Rodriguez, John Robinson, P. N. Jepsen, Hengyun Zhou, Sergio Cantu, Harry Levine, Alexander Keesling, Dolev Bluvstein, Ahmed Omran, Markus Greiner, Vladan Vuletić, Mikhail D. Lukin, Dirk Englund y Soonwon Choi. «Experimental Demonstration of Logical Magic State Distillation». En: *arXiv preprint* arXiv:2412.15165 (2024). Implementación en computadora cuántica de átomos neutros usando códigos de color 2D $[[7,1,3]]$ y $d=5$. URL: <https://arxiv.org/abs/2412.15165>.
- [134] QuEra Computing Inc. *Quantum Error Correction with Neutral Atoms*. Descripción técnica del experimento de destilación de estados mágicos con 35 qubits físicos. 2024. URL: <https://www.quera.com/quantum-error-correction>.
- [135] NVIDIA Corporation. *NVIDIA and QuEra Decode Quantum Errors with AI*. Blog post. Accessed: 2025-04-16. Mar. de 2025. URL: <https://developer.nvidia.com/blog/nvidia-and-quera-decode-quantum-errors-with-ai/>.
- [136] Nathan Lacroix, S. Krinner, N. Thurow, W. J. Eckner, J. Bartolomé, A. Bengtsson, P. V. Siva, B. Tarasinski y C. Erickson et al. «Scaling and logic in the color code on a superconducting quantum processor». En: *arXiv preprint* arXiv:2412.14256 (dic. de 2024). Implementación en procesador Willow de Google con código $[[7,1,3]]$. DOI: [10.48550/arXiv.2412.14256](https://doi.org/10.48550/arXiv.2412.14256). URL: <https://arxiv.org/abs/2412.14256>.

- [137] Google Quantum AI Team. *Quantum Error Correction Breakthrough with Color Codes*. Blog post. Análisis técnico del $\Lambda = 1,56(4)$ en escalado $= 3ad = 5$. 2024. URL: <https://blog.google/technology/quantum/color-code-breakthrough>.
- [138] Google Quantum AI Collaboration. «Fault-Tolerant Clifford Gates in Superconducting Color Codes». En: *IEEE Symposium on Quantum Computing*. Caracterización puertas transversales con error 0.0027(3). 2025, págs. 45-58. DOI: [10.1109/QCE.2025.00015](https://doi.org/10.1109/QCE.2025.00015).
- [139] Daniel Litinski, Markus S. Kesselring, Jens Eisert y Felix von Oppen. «Combining Topological Hardware and Topological Software: Color-Code Quantum Computing with Topological Superconductor Networks». En: *Phys. Rev. X* 7 (3 sep. de 2017), pág. 031048. DOI: [10.1103/PhysRevX.7.031048](https://doi.org/10.1103/PhysRevX.7.031048). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.7.031048>.
- [140] Yugo Takada, Yusaku Takeuchi y Keisuke Fujii. «Ising model formulation for highly accurate topological color codes decoding». En: *Phys. Rev. Res.* 6 (1 ene. de 2024), pág. 013092. DOI: [10.1103/PhysRevResearch.6.013092](https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.6.013092). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevResearch.6.013092>.
- [141] L. Postler, S. Heußen e I. Pogorelov et al. «Demonstration of fault-tolerant universal quantum gate operations». En: *Nature* 605 (2022), págs. 675-680. DOI: [10.1038/s41586-022-04721-1](https://doi.org/10.1038/s41586-022-04721-1). URL: <https://doi.org/10.1038/s41586-022-04721-1>.
- [142] J. M. Pino, J. M. Dreiling, C. Figgatt y et al. «Demonstration of the trapped-ion quantum CCD computer architecture». En: *Nature* 592 (2021), págs. 209-213. DOI: [10.1038/s41586-021-03318-4](https://doi.org/10.1038/s41586-021-03318-4).
- [143] Patty Lee. *High Performance Commercial Trapped Ion Quantum Computers based on the QCCD Architecture*. <https://www.youtube.com/watch?v=EhWWum60bkc>. 2021.
- [144] Paul Smith-Goodson. «Así es el System Model H2, el ordenador cuántico de Quantinuum con el mayor rendimiento de la historia». En: *Forbes Argentina* (jun. de 2023). URL: <https://www.forbesargentina.com/innovacion/asi-system-model-h2-ordenador-cuantico-quantinuum-mayor-rendimiento-historia-n35806>.
- [145] Europa Press. *Quantinuum lanza el primer ordenador cuántico de 56 qubits con iones atrapados de la industria*. Publicado 05/06/2024 18:52 - Comunicado. Jun. de 2024. URL: <https://www.europapress.es/comunicados/internacional-00907/noticia-comunicado-quantinuum-lanza-primer-ordenador-cuantico-56-qubits-iones-atrapados-industria-20240605185228.html>.
- [146] Yang Wang, Selwyn Simsek, Thomas M. Gatterman, Justin A. Gerber, Kevin Gilmore, Dan Gresh, Nathan Hewitt, Chandler V. Horst, Mitchell Matheny, Tanner Mengle, Brian Neyenhuis y Ben Criger. «Fault-tolerant one-bit addition with the smallest interesting color code». En: *Science Advances* 10.29 (2024), eado9024. DOI: [10.1126/sciadv.ado9024](https://doi.org/10.1126/sciadv.ado9024). URL: <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/sciadv.ado9024>.

- [147] C. Ryan-Anderson, N. C. Brown, C. H. Baldwin, J. M. Dreiling, C. Foltz, J. P. Gaebler, T. M. Gatterman, N. Hewitt, C. Holliman, C. V. Horst, J. Johansen, D. Lucchetti, T. Mengle, M. Matheny, Y. Matsuoka, K. Mayer, M. Mills, S. A. Moses, B. Neyenhuis, J. Pino, P. Siegfried, R. P. Stutz, J. Walker y D. Hayes. «High-fidelity teleportation of a logical qubit using transversal gates and lattice surgery». En: *Science* 385.6715 (2024), págs. 1327-1331. DOI: [10.1126/science.adp6016](https://doi.org/10.1126/science.adp6016).
- [148] Andrew J. Landahl y Ciaran Ryan-Anderson. «Quantum computing by color-code lattice surgery». En: *arXiv preprint arXiv:1407.5103* (2014). Available at <https://arxiv.org/abs/1407.5103>.
- [149] Martín Oliveira. «Google y Softbank lideran inversión multimillonaria para proyecto de computación cuántica». En: (feb. de 2025). URL: https://notipress.mx/tecnologia/google-softbank-lideran-inversion-para-proyecto-computacion-cuantica-27566#google_vignette.
- [150] Javier Carvajal. «Invierten 230 millones de dólares en proyecto de computación cuántica que usa átomos neutros para crear cúbits». En: (feb. de 2025). URL: <https://es.wired.com/articulos/invierten-230-millones-de-dolares-en-proyecto-de-computacion-cuantica-que-usa-atomos-neutros-para-crear-cubits>.
- [151] Sergey Bravyi y Alexei Kitaev. «Universal quantum computation with ideal Clifford gates and noisy ancillas». En: *Phys. Rev. A* 71 (2 feb. de 2005), pág. 022316. DOI: [10.1103/PhysRevA.71.022316](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.71.022316). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.71.022316>.
- [152] QuEra Team. «Magic state distillation on logical qubits». En: *QuEra Computing News* (dic. de 2024). Accessed: [fecha de acceso]. URL: <https://www.quera.com/blog-posts/magic-state-distillation-on-logical-qubits>.
- [153] Matt Swayne. «Magic State Distillation Demonstrated in Neutral Atom Quantum Computers». En: *QuEra Computing News* (dic. de 2024). Accessed: [fecha de acceso].
- [154] CQI. «Google Unveils the 105 Qubit Willow Chip and Demonstrates New Levels of RCS Benchmark Performance and Quantum Error Correction Below the Threshold». En: (dic. de 2024). URL: <https://quantumcomputingreport.com/google-unveils-the-105-qubit-willow-chip-and-demonstrates-new-levels-of-rcs-benchmark-performance-and-quantum-error-correction-below-the-threshold/>.
- [155] Jiaxuan Zhang, Yu-Chun Wu y Guo-Ping Guo. «Facilitating practical fault-tolerant quantum computing based on color codes». En: *Phys. Rev. Res.* 6 (3 jul. de 2024), pág. 033086. DOI: [10.1103/PhysRevResearch.6.033086](https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.6.033086). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevResearch.6.033086>.
- [156] N. Lacroix, A. Bourassa, FJH Heras, LM Zhang, J. Bausch, AW Senior, T Edlich, N Shutt y et al. «Scaling and logic in the color code on a superconducting quantum processor». En: *arXiv preprint* (2024). arXiv: [2412.14256](https://arxiv.org/abs/2412.14256). URL: <https://arxiv.org/abs/2412.14256>.

- [157] Error Correction Zoo. *Triangular Color Code*. https://errorcorrectionzoo.org/c/triangular_color. Accedido: 26 de marzo de 2025. 2025.
- [158] S. Trebst, P. Werner, M. Troyer, K. Shtengel y C. Nayak. «Breakdown of a Topological Phase: Quantum Phase Transition in a Loop Gas Model with Tension». En: *Phys. Rev. Lett.* 98 (2007), pág. 070602.
- [159] R. Alicki, M. Fannes y M. Horodecki. «A statistical mechanics view on Kitaev's proposal for quantum memories». En: *J. Phys. A: Math. Theor.* 40 (2007), págs. 6451-6467.
- [160] R. Alicki, M. Fannes y M. Horodecki. *On thermalization in Kitaev's 2D model*. arXiv:0810.4584.
- [161] R. Alicki, M. Horodecki, P. Horodecki y R. Horodecki. *On thermal stability of topological qubit in Kitaev's 4D model*. arXiv:0811.0033.
- [162] David J. Gross y Frank Wilczek. «Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories». En: *Phys. Rev. Lett.* 30 (1973), págs. 1343-1346. DOI: 10.1103/PhysRevLett.30.1343. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.30.1343>.
- [163] H. David Politzer. «Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?» En: *Phys. Rev. Lett.* 30 (1973), págs. 1346-1349. DOI: 10.1103/PhysRevLett.30.1346. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.30.1346>.
- [164] H. Bombin y M.A. Martín-Delgado. «A Family of Non-Abelian Kitaev Models on a Lattice: Topological Confinement and Condensation». En: *Phys. Rev. B* 78 (2008). Electronic preprint arXiv:0712.0190, pág. 115421.
- [165] A. Hamma, C. Castelnovo y C. Chamon. *Topological Quantum Memory at Finite Temperature*. arXiv:0812.4622v2.
- [166] Y. Aharonov y D. Bohm. «Significance of electromagnetic potentials in quantum theory». En: *Phys. Rev.* 115 (1959), pág. 485.
- [167] W. Ehrenberg y R.E. Siday. «The Refractive Index in Electron Optics and the Principles of Dynamics». En: *Proc. Phys. Soc.* B62 (1949), pág. 8.
- [168] M. A. Martín-Delgado. *Los anyones: del efecto Hall cuántico al ordenador cuántico robusto*. Video en YouTube. Conferencia en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Mayo de 2016. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=HZM1PDptals>.
- [169] G. Moore y N. Read. «Nonabelions in the fractional quantum Hall effect». En: *Nucl. Phys. B* 360 (1991), pág. 362.
- [170] H Bombin y M A Martín-Delgado. «Quantum measurements and gates by code deformation». En: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 42.9 (feb. de 2009), pág. 095302. DOI: 10.1088/1751-8113/42/9/095302. URL: <https://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/42/9/095302>.

DISCURSO DE CONTESTACIÓN

DEL

EXCMO. SR. D. JUAN IGNACIO CIRAC SASTURAIN

Excma. Sra. Presidenta,

Sras. y Sres. Académicos,

Señoras, Señores,

Es para mí una gran satisfacción poder, en nombre de la Academia, dar la bienvenida al profesor Miguel Ángel Martín-Delgado como nuevo académico de número. Además de su reconocida capacidad científica, que comentaré a continuación, estoy convencido de que su incorporación supondrá un valor añadido que complementará armoniosamente a los miembros que conformamos la Academia. Miguel Ángel Martín-Delgado nació en Miranda de Ebro (Burgos) en 1963. Cursó la carrera de Ciencias Físicas en la Universidad Complutense de Madrid, especializándose en Física Fundamental, en donde obtuvo excelentes calificaciones. Allí realizó su doctorado bajo la dirección del Dr. Juan Ramírez Mittelbrunn, con una beca de Formación de Personal Investigador (FPI) del Ministerio de Educación y Ciencia, y lo concluyó en 1991. El tema de su tesis doctoral fue la Teoría de Cuerdas, y fue titulada: “Amplitudes de colisión cerca de la capa de masas en teorías de cuerdas mediante superficies de Riemann con bordes”.

Tras finalizar su doctorado, obtuvo una beca del Ministerio de Educación y Ciencia para realizar una estancia en la Universidad de Princeton, institución que cuenta con uno de los departamentos de física teórica más prestigiosos del mundo. Allí han trabajado científicos de la talla de Philip Anderson, Duncan Haldane y Elliot Lieb. Los dos primeros recibieron el Premio Nobel, y el último es probablemente uno de los físicos matemáticos vivos más reconocidos. Durante los últimos años de su doctorado y su estancia postdoctoral, Miguel Ángel trabajó en gravedad cuántica, grupos cuánticos y modelos estadísticos en espacios curvos. El objetivo final de los trabajos que realizó durante su tesis y su postdoctorado fue contribuir a la construcción de una teoría cuántica de la gravedad, uno de los problemas abiertos más fundamentales de la física.

Tras dos años de postdoctorado, regresó a su alma mater como profesor ayudante en 1993. Es interesante observar cómo, al volver a España, inició nuevas líneas de investigación en Física Teórica, no directamente relacionadas con la gravitación cuántica o la Teoría de Cuerdas. Tuvo la visión y el atrevimiento de percibir que la Teoría de Cuerdas y otros intentos de cuantizar la gravedad podían centrarse excesivamente en desarrollos matemáticos muy abstractos, con pocas aplicaciones a la vida real y sin ninguna garantía de éxito. Por ello, comenzó a aplicar métodos de teorías cuánticas de campos, típicamente utilizados en física de altas energías, a problemas de materia condensada; es decir, a la descripción de materiales cuyo comportamiento puede entenderse en términos de teorías no relativistas de muchos cuerpos. En esa época investigó problemas de cadenas de espines a bajas temperaturas, en los que los estados cuánticos son extremadamente complejos de describir. Desarrolló métodos numéricos para resolver algunos de estos problemas complejos, basándose en el grupo de renormalización. El conocimiento adquirido en su doctorado y durante su postdoctorado le otorgó una posición privilegiada para abordar estos problemas desde perspectivas originales y aportar métodos

muy potentes para su resolución. En 2011 fue nombrado catedrático de Física Teórica en la Universidad Complutense de Madrid, donde continúa compaginando su labor docente con la investigación.

La primera vez que oí hablar de Miguel Ángel fue en Innsbruck, a finales de los años noventa, cuando Alberto Galindo visitó el Instituto de Física Teórica, donde yo me encontraba trabajando. Él nos comentó sobre un trabajo que estaba realizando conjuntamente con Miguel Ángel relativo al algoritmo de Grover, una de las piezas fundamentales de la computación cuántica. Como otro profesor de esa universidad, Peter Zoller, era editor de la revista *Reviews of Modern Physics*, la de mayor impacto en física, le sugerí que invitara a Alberto y a Miguel Ángel a escribir un artículo de revisión sobre su visión de la computación cuántica. Dicho artículo ha resultado extraordinariamente influyente, sirviendo a generaciones de jóvenes investigadores como introducción al campo, y cuenta actualmente con más de 700 citas. Tras haber coincidido con él en varias conferencias, especialmente en el Centro de Ciencias de Benasque, en 2003 nos visitó en el Instituto Max Planck de Óptica Cuántica, donde yo llevaba dos años trabajando. La razón de la visita fue que en mi grupo estábamos intentando trasladar los conceptos de la teoría cuántica de la información a problemas de materia condensada, y Miguel Ángel era la persona idónea para colaborar en ese campo, dado su profundo conocimiento en ambas áreas. La visita resultó extremadamente fructífera y marcó el inicio de una prolongada y productiva relación científica. Uno de los temas en los que trabajamos fue la introducción de medidas de entrelazamiento en cadenas de espines y el estudio de su comportamiento durante transiciones de fase cuánticas. Recuerdo vivamente cómo Miguel Ángel se lanzaba a la pizarra para explicarnos conceptos complejos, como el grupo de renormalización o la prohibición de ruptura espontánea de simetría en determinados modelos. Sin embargo, la aportación que más nos influyó fue la descripción de los denominados “estados de productos de matrices”, utilizados para cálculos variacionales en modelos de espines. Esto nos motivó a expresar dichos estados, y otros similares, utilizando el lenguaje de la teoría cuántica de la información, resaltando en primer plano sus propiedades de entrelazamiento. Desde entonces, he continuado trabajando en este tema, que hoy se conoce como el estudio de las redes de tensores.

Pero sigamos con la investigación de Miguel Ángel. El, desde principios del nuevo siglo había encontrado un tema fascinante en el que profundizar. Por aquel entonces, Alexei Kitaev propuso utilizar estados topológicos como códigos de corrección de errores, combinando dos áreas aparentemente dispares: las teorías cuánticas topológicas y la computación cuántica. La idea se basaba en que ciertos estados cuánticos de la materia poseen propiedades excepcionales, llamadas topológicas, lo que implica, por ejemplo, que dos estados de este tipo son indistinguibles mediante mediciones realizadas en zonas acotadas del espacio. En paralelo, sabíamos que los ordenadores cuánticos son extremadamente vulnerables a errores, y que su utilización requiere corregirlos. Sin embargo, la corrección de errores en física cuántica es compleja, ya que las mediciones alteran el estado del sistema; por ello, es necesario aplicar técnicas sofisticadas conocidas como códigos de corrección de errores. La estrategia consiste en elegir estados cuánticos, configurando lo que denominamos cúbits, de manera que los errores locales no revelen información sobre su contenido. Precisamente, los estados topológicos cumplen esta condición, lo que los convierte en candidatos naturales para proteger la información en ordenadores cuánticos. Sobre esta base, Kitaev propuso los denominados “Códigos del Toro”, que permiten proteger la información de manera eficiente y robusta.

Miguel Ángel, además de haberse consolidado como un experto en computación cuántica, es uno de los pocos científicos que comprende profundamente las teorías topológicas, gracias a su formación en teorías de cuerdas y grupos cuánticos. Por esta razón, se aventuró a trabajar en el tema y, en 2006, junto con un estudiante de doctorado, propuso el uso de nuevos estados topológicos, que denominó “Códigos de Colores”. Con estos estados, introdujo una idea innovadora para proteger los ordenadores cuánticos, logrando resultados superiores a los de los códigos de Kitaev.

Los códigos de colores no solo tienen aplicaciones prácticas, sino que también han generado nuevas formas de realizar tareas cuánticas, como la destilación de entrelazamiento o el teletransporte cuántico, desarrollos en los que Miguel Ángel y sus colaboradores, así como otros científicos en el mundo, han tenido un papel destacado. Más aún, su trabajo ha dado lugar al descubrimiento de nuevos modelos en campos como la teoría de redes cuánticas topológicas o modelos de mecánica estadística aleatoria. El artículo correspondiente a esta investigación cuenta con más de 900 citas, consolidándose como uno de los más influyentes en el campo de la corrección de errores cuántica. Además de su trabajo teórico, Miguel Ángel ha participado en múltiples colaboraciones con físicos experimentales. Cabe destacar su participación en la primera demostración experimental de un código completo de corrección de errores, junto al Prof. Rainer Blatt de la Universidad de Innsbruck, en un prototipo de ordenador cuántico basado en iones atrapados, trabajo que fue publicado en la revista Science.

Otro de los ámbitos a los que ha dedicado sus últimos años es la simulación cuántica. Este campo emplea dispositivos cuánticos, como ordenadores cuánticos, para resolver problemas de física de muchos cuerpos que aparecen en áreas tan diversas como la física de la materia condensada, la óptica cuántica, la física de altas energías e incluso la química. La simulación cuántica fue propuesta por Richard Feynman a principios de los años ochenta y constituye la aplicación más clara de la computación cuántica, ya que permite abordar problemas que no pueden resolverse ni siquiera con los superordenadores clásicos más potentes. En este ámbito, Miguel Ángel ha realizado contribuciones cruciales, como la propuesta de simulación de materiales aislantes y superconductores topológicos, y la correspondiente predicción de que conservan algunas de sus propiedades más relevantes a temperaturas distintas de cero. También destacan sus propuestas para la simulación de electrodinámica de axiones y de teorías relativistas. La elección de su discurso de entrada en la Academia sobre corrección de errores cuánticos, y en particular sobre los códigos topológicos de color, refleja sus conocimientos enciclopédicos y multidisciplinarios, cualidades que han caracterizado toda su carrera científica y que han despertado la admiración de colegas y colaboradores. Asimismo, demuestra la originalidad y el pensamiento profundo que han acompañado su trayectoria: no solo la capacidad para resolver problemas concretos, sino también la visión para abrir nuevas líneas de investigación que combinan diversos campos. Su trabajo subraya, además, la importancia fundamental de sus descubrimientos para la computación cuántica, en la medida en que un día podrían permitir construir ordenadores cuánticos funcionales y libres de errores. Hay un último punto que quisiera destacar. Cuando Miguel Ángel regresó de Princeton, ya se había forjado una sólida reputación en el campo de la Teoría de Cuerdas y la Gravitación Cuántica. Sin embargo, fue uno de los pocos que decidió abandonar estos campos por la convicción de que la Física Teórica podría abordar otros problemas igualmente profundos y, a la vez, más prácticos. Creo firmemente que el tiempo le ha dado la razón. Aunque las teorías de cuerdas

y de gravedad cuántica han avanzado en las últimas tres décadas, aún no está claro si podrán resolver algunos de los problemas fundamentales de la Física. Mientras tanto, Miguel Ángel ha realizado numerosas contribuciones que han impulsado el progreso en otras áreas, como la física de la materia condensada y la computación cuántica, cuyas repercusiones prácticas están cada vez más cerca de materializarse.

Permítanme concluir con una pequeña anécdota de la primera vez que conocí personalmente a Miguel Ángel. Fue en el Centro de Ciencias de Benasque, durante un programa de tres semanas que coorganicé junto con Artur Ekert, en el que Miguel Ángel participó en el verano de 2002. Allí comenzamos a discutir sobre las conexiones entre la física cuántica de muchos cuerpos y la teoría cuántica de la información. Como yo debía regresar a Madrid antes de la finalización del congreso y había alquilado un coche, le ofrecí a Miguel Ángel que viniera conmigo, pues él también tenía que dirigirse a Madrid; de este modo, podríamos aprovechar el trayecto para continuar nuestra conversación. Desafortunadamente, el coche se averió y una grúa nos llevó de Benasque a Lérida, donde nos proporcionaron otro vehículo. Tras desayunar, viajamos los tres en la cabina de la grúa, él y yo junto al conductor, bajo un calor veraniego insoportable. Aun así, pasamos el tiempo discutiendo apasionadamente sobre todos los temas que estábamos investigando, completamente concentrados, hasta el punto de que el conductor tuvo que soportar toda nuestra conversación sin entender prácticamente nada, probablemente pensando que estábamos fuera de nuestro sano juicio. Fue en ese viaje donde conectamos profundamente, y marcó el inicio de una larga y fructífera colaboración. Estoy seguro de que Miguel Ángel guarda anécdotas similares con muchos otros de sus colaboradores, reflejo de su entusiasmo y pasión por la ciencia y el intercambio de ideas que han caracterizado su carrera científica.