REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

DISCURSO

LEIDO EN EL ACTO DE RECEPCION

POR EL

EXCMO. SR. D. MANUEL VELASCO DE PANDO

Y

CONTESTACION

DEL

EXCMO. SR. D. FRANCISCO NAVARRO BORRAS

EL DIA 11 DE ENERO DE 1956

MADRID
DOMICILIO DE LA ACADEMIA: VALVERDE, 22
TELEFONO 21 25 29
1956

Nuevas Gráficas, S. A. — Andrés Mellado, 18. — Teléfono 24 01 20. — Madrid

Excmo. Sr. D. MANUEL VELASCO DE PANDO

DISCURSO DE INGRESO EN LA ACADEMIA
DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

TEMA:

Resistencia de los Materiales, Elasticidad, Plasticidad

Excmos. sres. Académicos, señoras y señores:

Ciertamente, en ocasiones análogas a esta, han sabido los respectivos recipiendarios ponderar, con galanura de frases y con brillantes imágenes, estas dos ideas fundamentales, propias de la coyuntura: la carencia de méritos que justifiquen el llamamiento de la Academia y el agradecimiento a la Corporación por la designación como Numerario. Y si tan ilustres y sabios varones juzgaron indispensable comenzar así su discurso de ingreso, ¿qué he de decir yo, tan menguado de méritos? Mas como no se puede exagerar esta idea, pues ha de quedar siempre a salvo el acierto y la prudencia de la Corporación, la más elevada representación entre nosotros del saber científico, he de pensar que hay una cota inferior indispensable para ser Académico de número; y que mientras mis ilustres antecesores cubrieron con amplios márgenes aquella cota, yo estoy justamente en ella, con lo cual quedará así comprobado que, conmigo, ha alcanzado la función su extremo inferior.

Pero en punto a agradecimiento, me atrevo a reivindicar, en cambio, el máximo; porque la Academia de Ciencias no ha sido nunca para mí una entidad lejana y poco conocida, sino que por una determinación de los hados, toda mi vida he estado en relación, por cierto muy fructífera científicamente para mí, con ella. Un día, allá por 1907, un amigo, con quien hablaba yo del impacto intelectual que me habían producido el Cálculo de las Probabilidades y la Teoría de errores, me dijo: «Pues escribe una memoria sobre ello, que ahora precisamente la Academia de Ciencias de Madrid ha abierto un concurso sobre la cuestión.» Y como consecuencia de tal trivial conversación, he aquí a un estudiante de dieciocho años metido a escritor científico, emborronando cuartillas entremetidas con los apuntes de clase; y en 1909 entré por vez primera por la puerta de Valverde cargado con mi manuscrito, porque literalmente manuscrito era, por lo cual debo consignar mi recuerdo a los Académicos que hubieron de molestarse en su lectura. Vino luego la sesión solemne de entrega de los premios, después el acuerdo de imprimir mi memoria en el turno de publicaciones de la Academia, y durante creo que dos o tres años, estuve en relación frecuente con el Secretario Perpetuo D. Francisco de P. Arillaga, de quien recibía periódicamente las galeradas primero, y las pruebas ajustadas después, momentos inefables para el autor que ve cómo sus ideas van plasmando en cosa bellamente impresa, pareciéndole que cobran aquéllas más importancia y veracidad. Apareció el libro en 1918; y en 1921 fuí nombrado Académico Corresponsal nacional, con lo que recibí puntualmente desde entonces las publicaciones de la Academia. Por fin, trasladada mi residencia a Madrid por el proceso de mi vida profesional, pude acudir puntualmente a casi todos los actos públicos de la Corporación, recibiendo lecciones muy provechosas del contacto con todos los Numerarios y de la audición de sus magníficos discursos, ya de ingreso, ya motivados por otras solemnes ocasiones.

Me corresponde la Medalla número cinco, que ostentaron sobre su pecho, desde la fundación de la Academia, varones tan ilustres. Fué el primero, D. José de Odriozola y Oñativia, Brigadier de Infantería y Coronel de Artillería, Vocal de la Junta Superior Facultativa de este Cuerpo, autor de varias obras de Matemáticas y nombrado Fundador entre los dieciocho Académicos que designó la Reina para constituir lo que podemos llamar el «estado inicial» de la Corporación. A su fallecimiento, vino a usufructuar la Medalla otro ilustre militar, D. José Balanzat y Baranda, también Coronel de Artillería y Profesor de la Academia de su Cuerpo, autor de un tratado de Mecánica y muerto valerosamente el 22 de junio de 1866.

De alternar con condecoraciones ganadas en acciones de guerra, vino la Medalla número cinco a hombre civil tan eminente como D. Miguel Merino y Melchor, Doctor en Ciencias Exactas y Director del Observatorio Astronómico de Madrid, que fué Secretario Perpetuo de la Academia, así como Consejero de Instrucción pública y Senador por designación de la Corporación. Contribuyó muy eficazmente D. Miguel Merino, con sus obras, al desarrollo de las Matemáticas en España, tratando de ganar el tiempo antaño perdido; en mi Cálculo de las Probabilidades cité, en el lugar correspondiente, un folleto publicado en 1866 por D. Miguel Merino, titulado «Reflexiones y conjeturas sobre la ley de mortalidad en España», con muy sagaces observaciones; publicó también D. Miguel, en 1879, una traducción libre, con muchas adiciones de su propia cosecha, de una memoria de Encke, con el título «Resolución general de las ecuaciones numéricas por el método de Gräffe»; por cierto, que a este método, el más práctico que existe cuando interesan todas las raíces, dedicó luego dos folletos, de que conservo sendos ejemplares con expresivas dedicatorias, publicados en 1917 y 1919, el también Académico D. Vicente Ventosa, en los que elogiaba como se merecía la labor del Sr. Merino, estudiando especialmente el no siempre llano problema de calcular los argumentos de las raíces complejas, sobre el cual y sobre la teoría del método en general, también se refería el Sr. Ventosa con elogio al curso litografiado de 1915-1916 de las Lecciones de Análisis Matemático de D. Julio Rey Pastor, en las que ya trataba el tema con la concisión y claridad, síntesis feliz de que parece tener el secreto. Antes de terminar esta breve referencia a D. Miguel Merino, quiero traer a colación un servicio muy importante que prestó a la ciencia española y a esta Corporación. Por 1895 era ya D. Santiago Ramón y Cajal figura mundialmente conocida de la Histología y empezaban a llegarle los nombramientos de Académico y Doctor «honoris causa» de todo el orbe. Pues bien, este hombre que ha sido el orgullo de cuantos amantes de la ciencia ha tenido España en la mitad transcurrida del siglo XX, siquiera se dedicasen a otras disciplinas, porque podían decirse para su fuero interno «por lo menos tenemos un genio indiscutible», es lo cierto que, en la época a que me refiero, no pertenecía a ninguna de las Reales Academias. Hecho que se prestaría a no pocas consideraciones, porque es característico de medios con escasa madurez científica el no sentirse capaces de destacar sus propios valores y el esperar el reconocimiento de los extraños, que a veces no llega por circunstancias ajenas a la ciencia misma. Pues bien, de fuente fidedigna tengo aprendido que fué un Astrónomo, Merino, a la sazón Secretario Perpetuo de esta Academia, quien tomó la iniciativa de proponer al gran biólogo para Numerario, con lo cual la Corporación se honró a sí misma al honrar a tan eminente figura, y Merino demostró su inquietud por todas las ramas de la ciencia. Y Cajal, hombre de gran corazón, jamás olvidó el rasgo de la Corporación, teniéndola por la primera en su afecto, entre aquellas a que perteneció. A las circunstancias del nombramiento de Cajal como Numerario de esta Corporación, aludió en su discurso de ingreso el gran Médico, polígrafo y Académico, D. Gregorio Marañón.

Sintió luego nuevamente la Medalla veleidades de Belona, y fué su cuarto usufructuario el General D. Manuel Benítez y Parodi, que profesó las asignaturas de Cálculo y Mecánica en la Academia de Estado Mayor; fué autor de reputados libros de texto y de numerosos trabajos y estudios científicos y, por cierto, paisano mío, nacido a la sombra de la Giralda.

Los dos nombres que siguen evocarán recuerdos juveniles en algunos de los que me escuchan, alumnos suyos. Porque fué el quinto usufructuario de la Medalla D. Luis Octavio de Toledo y Zulueta, Catedrático de Análisis Matemático en Sevilla, Zaragoza y, finalmente, en la Universidad Central, y en cuyos textos, reputadísimos, de Análisis, aprendimos, aun los que no tuvimos el honor de ser alumnos directos suyos, un empaque especial en el decir matemático. Y el sexto poseedor fué D. Honorato de Castro, Doctor en Ciencias, Catedrático de Astronomía y Geodesia en la Universidad Central, Astrónomo del Observatorio de Madrid y autor de muchos e importantes trabajos científicos.

Con lo que llegamos a mi inmediato antecesor el Contraalmirante Excmo. Sr. D. Wenceslao Benítez Inglott. Nacido en Las Palmas en 1879, ingresado en la Escuela Naval Militar en 1893, Alférez de navío en 1898, destacó de modo notable durante su vida militar, mandando el torpedero número tres, el «Dédalo», siendo Jefe de Estado Mayor de la División de Cruceros y mandando el crucero «Reina Victoria Eugenia». Profesor de la División de Instrucción, cursó la especialidad de Hidrografía, efectuando campañas hidrográficas de 1919 a 1921. Asimismo ejerció el Profesorado en la Escuela de Ingenieros Hidrógrafos y como Jefe de Sección en el Observatorio de San Fernando. Ascendido a Capitán de Navío, fué nombrado en 1930 Director de la Escuela Naval Militar; pero en 1931 el embrujo de la ciencia, de una parte, y tal vez las circunstancias políticas de otra, le indujeron a pedir voluntariamente el retiro, siendo designado Subdirector del Observatorio de Marina y dedicándose ya exclusivamente al cultivo de las ciencias, especialmente la Astronomía y la Hidrografía. Nombrado en 1940 Director del Observatorio, su labor fué brillantísima. Renovó métodos de trabajo, amplió las colaboraciones internacionales del acreditadísimo Centro, como las Efemérides Astronómicas, Posiciones de pequeños planetas, Movimientos estelares propios *et sit de céteris;* introdujo importantes mejoras en el meritísimo Almanaque Náutico para los Navegantes, inició la publicación del Almanaque Aeronáutico, estableció la Escuela de Estudios Superiores para Oficiales de la Armada y, en suma, dió muy acertado impulso a los trabajos del afamado Observatorio.

A muchas Sociedades Internacionales dedicadas al cultivo de la Astronomía perteneció Benítez Inglott, trascendiendo su labor a los ambientes mundiales. Así, era miembro de La Unión Astronómica Internacional y de la de Geofísica, y cuando ocurrió su fallecimiento, ocupaba la Presidencia del Comité Nacional del Año Geofísico Internacional 1957 a 1958.

Por sus méritos personales, profesionales y científicos, le fué otorgado el empleo de Contraalmirante honorario, y se le concedió a su fallecimiento, a título póstumo, la Gran Cruz de la Orden Civil de Alfonso X el Sabio.

Falleció en el desempeño de la dirección del Instituto y Observatorio de Marina el 22 de diciembre de 1954.

Fué Benítez Inglott hombre de gran sencillez y de extraordinaria modestia, que realizaba sus obligaciones profesionales y científicas como cosa sencilla y natural, granjeándose por sus excelentes cualidades humanas el afecto de cuantos le trataban, siendo aquella modestia la causa de que no buscase nunca el oropel de los reconocimientos ostentosos y de que su personalidad no fuese tan conocida, fuera de los medios especializados, como su vasta cultura y su alto saber científico merecían.

Pidamos a Dios que dé a su alma el merecido descanso y consagremos a su memoria el recuerdo que merece el hombre bueno y el sabio tan modesto como eficiente.

La evocación de tan ilustres antecesores deja en el ánimo un sentir agridulce; de la pena de verlos desaparecidos, por ley inmutable, sólo puede consolarnos el recuerdo de sus trabajos, porque como ya cantó en su elegía Jorge Manrique

Y aunque la vida murió
Nos dexó harto consuelo
Su memoria.

Observaréis que abundan entre los nombres precitados los Astrónomos, esa especialización científica que yo envidio tanto; no me parecen hombres del siglo, sino profesos de una orden maravillosa, caballeros de un nuevo Santo Grial que si tiene por Monte Sagrado las cúpulas de los grandes telescopios, tiene por tabernáculo la obra sublime del Creador en sus aspectos más grandiosos y mayestáticos.

Confieso que una de mis distracciones favoritas, en ratos de ocio o de descanso, es leer las «Leçons de Mécanique Céleste» del gran Poincaré, o el «Traité de Mécanique Céleste» de Tisserand, viendo cómo el cerebro humano ha podido penetrar las leyes de esa Creación portentosa, siguiendo, por ejemplo, el desarrollo de la función perturbatriz en el problema de los tres cuerpos, y viendo cómo, a fuerza de ingenio, se llega a obtener la configuración de datos que puede producir un término de valor anormal. Obra de genios superiores con que Dios ha querido regalar a la humanidad y que ésta no siempre ha sabido agradecer, como demuestra la triste historia del portentoso y malogrado Nicolás Enrique Abel.

He elegido como tema de estas deshilvanadas frases, que por fuerza de la coyuntura he de llamar discurso, el seguir la evolución en la mitad transcurrida del siglo XX, tal como yo he creído verla, de la ciencia que permite al ingeniero prevenirse contra la rotura en las obras o en las máquinas que proyecta. Aspecto fundamental de la Ingeniería, según me percaté al terminar mis estudios y hacerme cargo de la Dirección técnica de unos talleres, pues de poco servían otras ventajas accesorias, si las osaturas metálicas se derrumbaban, si las calderas hacían explosión o si las piezas de las máquinas se rompían. Era, pues, obligación primordial mía comprobar la resistencia de lo que se proyectaba o dirigir y orientar a los colaboradores que podían ayudarme; y ello me obligó a una revisión a fondo de cuanto había estudiado.

Mi tema se concreta, pues, en la trilogía Resistencia de los Materiales-Elasticidad-Plasticidad; y si me he permitido en párrafo anterior alguna nota subjetiva, o si se me desliza luego cualquier otra del mismo carácter, es por la satisfacción personal y nostálgica que me produce recordar la relación de mi vida con los estudios que por constante afición he seguido siempre, siquiera haya sido en plan «amateur», porque en España, hasta ahora al menos, la dedicación íntegra a la ciencia ha implicado vocación de cartujo y voto de pobreza.

Estos toques subjetivos no significan, pues, que yo recabe ninguna prioridad, ni que pretenda influencia importante en el curso de las ideas habiéndome limitado a la muy modesta que he podido ejercer mediante libros, artículos, cursillos o conferencias.

La Resistencia de los Materiales, como habitualmente se dice, aunque el nombre no sea del todo apropiado, consideraba los diversos problemas prácticos adoptando en cada caso un postulado *ad hoc;* para estudiar la flexión de las piezas prismáticas, se admitía el postulado de Bernoulli, según el cual las secciones normales de la pieza se conservan planas; para el esfuerzo cortante, se admitía la constancia de la tensión tangencial, sobre una paralela a la fibra neutra; para los sistemas reticulares era la hipótesis habitual la articulación de los nudos; para las placas se admitía la rotura según una cierta sección que las experiencias de Bach habían localizado.

Salta a la vista la calificación mediocre de una ciencia que estudia cada problema a base de una hipótesis especial; ¿qué diríamos de la Mecánica Celeste, a que antes me refería yo con admiración, si para cada planeta admitiese una ley de atracción distinta?

Precisamente, el mérito de la Mecánica newtoniana fué el de explicar los fenómenos todos del movimiento y del equilibrio de los cuerpos, con principios básicos constantes; y lo que más nos admira de la Teoría de Einstein, es su aspiración de formular en síntesis grandiosa todos los fenómenos de los campos gravíficos, electromagnéticos y mesónicos.

Mas no eran sólo faltas de belleza teórica las que ofrecía la Resistencia de Materiales. Resultaba prácticamente imposible, por ejemplo, el abordar un caso nuevo, porque ¿cuál era la hipótesis que debería adoptarse? Así, la extensión de la ciencia quedaba reservada a inteligencias excepcionales, provistas de amplios medios de estudio y experimentación.

En los primeros años de la segunda década de este siglo, extendióse entre los ingenieros un método, llamado del *trabajo de deformación,* y en una de sus formas, de Castigliano; implicaba ya este método un mejoramiento por unificación de los capítulos de la Resistencia; pero no resolvía por sí mismo las dificultades esenciales ya señaladas. Pues se trata sólo de una identidad que permite calcular la deformación en cualquier punto del sólido por derivación del trabajo de deformación respecto a una acción exterior o respecto a una acción ficticia; y es obvio que no puede aplicarse si no se dispone de expresiones adecuadas del trabajo de deformación. Si, pues, se aplican las deducidas de la Resistencia de Materiales, es claro que están implicados en el resultado los postulados de aquélla, es decir, que los resultados serán correctos, aproximados o erróneos, según se apliquen, respectivamente, valores exactos, aproximados o falsos del trabajo de deformación. Mas con todo, daba el método una gran comodidad para las aplicaciones; y originó importantísimas derivaciones como el método *Müller Breslau* para los arcos, el del momento estático de la superficie de momentos para las vigas, el de Cross y otros análogos para los sistemas reticulares.

Por cierto que todos estos métodos se generalizaron en España antes, incluso, que en otros países cultos. Enunciados por Castigliano sus dos célebres teoremas en 1875 (1) permanecieron mucho tiempo como una mera curiosidad científica y fué sólo ya en este siglo cuando se generalizó su uso como herramienta cómoda para los ingenieros. En una conferencia pronunciada en el Instituto de Ingenieros Civiles, en marzo de 1912, por el malogrado Ingeniero de Caminos D. Juan Manuel Zafra, Numerario

(1) *Nouvelle théorie de l'equilibre des systèmes articulés* (Actes de l'Academie de Turín, 1875); *Théorie de l'equilibre des systèmes elastiques* (Turín, 1879).

de esta Academia, exponía ya el método de Castigliano y llamaba la atención sobre su importancia, siendo patente la rápida difusión que se produjo en nuestro país del mismo. Pues bien, ocho años después, en 1920, publicaba en Francia Bertrand de Fonviolant sobre el tema su obra «Les méthodes modernes de la Resistance des Matériaux», donde afirmaba que los métodos en cuestión estaban muy poco extendidos en Francia (assez peu répandues), y donde, por cierto, empleaba expresiones erróneas para los términos del trabajo producido por el momento de torsión y por el esfuerzo cortante.

Por mi parte, en un trabajo presentado en 1917 al Congreso de Sevilla de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias, hice aplicación del método al estudio general de los arcos y piezas curvas de eje plano cargados con fuerzas normales al plano del arco; estudio que, con carácter general, creo se formulaba entonces por primera vez y para el cual hube de obtener previamente las expresiones correctas del trabajo de deformación por torsión, empleando una fórmula de aspecto análogo a la del trabajo de la flexión, pero en que el momento de inercia viene sustituído por un coeficiente de rigidez torsional que sólo depende de la forma de la sección. También la consideración del trabajo debido al esfuerzo cortante impone la introducción de otro coeficiente análogo.

La reforma que necesitaba la Resistencia de Materiales aparecía más profunda; y era fácil vislumbrar que consistía en apoyarse como fundamento en la Teoría de la Elasticidad, por lo menos para la formación de los técnicos de grado superior. Mas no se crea que no envolvía cierta audacia el pensarlo así en los primeros años de este siglo, pues eran muchos los autores que estampaban francamente su opinión de que había que atenerse para las aplicaciones a los métodos de la Resistencia de los Materiales y que era tiempo perdido el que dedicasen los ingenieros a estudiar la Teoría Matemática de la Elasticidad.

Así, Jean Resal, el notable profesor de la Escuela de «Ponts et chaussées» de París, se expresaba como sigue, en 1898, en el prólogo de su «Resistance des Matériaux», obra, en otros aspectos, muy interesante:

«La Théorie de l'Elasticité est demeurée jusqu'á présent impuissante á founir des solutions pratiques pour la presque totalité des problémes á envisager dans l'art des constructions. C'est une science abstraite qui, pour le moment, n'est pas susceptible d'applications utilitaires.»

Y todavía bastantes años después, en 1921, R. d'Adhémar, en el prólogo de su «Résistance des Materiaux» escribía lo siguiente:

«La conception fondamentale de la Résistance des Matériaux est donc d'employer des hypothéses simplificatrices permettant d'eviter l'usage de la théorie de l'Elasticité, la science de l'Elasticité posant des problémes de mathématiques insolubles. Actuellement les hypothéses de la Résistance des Matériaux, qui ont convenablement subi l'épreuve de la critique et de la pratique, forment encore la méthode indispensable pour l'ingenieur.»

Mas había que preguntarse si estas opiniones no incitaban a seguir el camino vedado, lo mismo que cuando se necesita imperiosamente pasar una cerca, suele ser lo más sencillo buscar un letrero que diga: «se prohibe la entrada», ya que en los lugares por donde es físicamente imposible entrar, nadie se molesta en poner letreros.

La Teoría Matemática de la Elasticidad era ya vieja y había llegado a su madurez como ciencia, salvo los problemas de integración que planteaba; su historia se ha hecho tantas veces que resulta inútil reiterarla una vez más, por lo que me limitaré a señalar aquellos hitos más brillantes, convenientes para comparar con lo que luego diré sobre el desarrollo de la Plasticidad. Pasando, pues, casi por alto, sin más que la mención de sus nombres, precursores como Galileo (1638), Hooke (1678), los Bernoulli (Jaime, 1705, y Daniel, 1741-51), Euler (cuya teoría de 1778 sobre el pandeo de prismas se ha reconocido como más exacta que las fórmulas empíricas, algunos años en boga), llegamos al decenio 1820-1830 en que Navier, Poisson y Cauchy completaron la teoría en sus líneas generales, siendo Cauchy el que en 1828 escribió por vez primera las ecuaciones exactas de la Elasticidad para los cuerpos isótropos.

Y ya que de re histórico-científica tratamos maguer-que por la brevedad más parezcan nuestras palabras catálogo de nombres que cosa de sustancia, y ya que hemos mencionado al ilustre creador de la teoría de las funciones de variable compleja, permítaseme una disgresión en recuerdo de un artículo, viejo ya de medio siglo, titulado «El Baron Cauchy», en que D. José Echegaray, cuyo nombre en esta Casa y justificadamente en todas partes, está más allá de todos los adjetivos, hizo una bellísima biografía del gran matemático, como solamente podía hacerla quien unía a su extraordinaria cultura en las ciencias exactas, sus dotes magníficas de literato y dramaturgo. Nos va refiriendo D. José la vida de Cauchy, modelando la descripción de su carácter con toques magistrales, como cuando nos cuenta su voluntario destierro después de la revolución de 1830 por no prestar juramento de fidelidad a los Orleans, que eran, según su criterio, usurpadores de la corona de San Luis. Y llega al momento patético de su muerte, cuando su cerebro prodigioso sigue todavía lúcido, hasta tal punto que momentos antes, había estado repasando unos cálculos astronómicos, pero sus miembros van ya cayendo fatalmente en el letargo postrero, en grado tal que habiendo querido bendecir a sus hijos, alguien hubo de sostenerle el brazo. Pero D. José, aunque otra cosa pueda pensarse, no escribía nunca en trágico griego con monótono treno de terrores, sino en dramaturgo moderno, con los variados matices de la vida, y nos refiere como aplicada la Extrema Unción al moribundo, le pareció que su lado izquierdo había sido ungido con menor cantidad de Oleo Sagrado que el derecho y pidió humildemente que se subsanase la diferencia. El geómetra que tantas veces aplicara la razón de simetría para que se anulasen ciertos recorridos congruentes de integrales en el campo complejo, recobró sus fueros en el último momento: Cauchy quería morir en plena simetría sacramental.

Volviendo a la Elasticidad, subrayemos los nombres ya mencionados de Navier y Poisson; la memoria sobre la teoría presentada por el primero a la Academia de Ciencias de París, que Cauchy hubo de examinar como ponente, atrajo la atención del gran matemático puro hacia la Elasticidad. Por su parte, Poisson no fué de esos sabios felices que reciben en el ocaso de su vida el homenaje de sus contemporáneos; ni siquiera se han publicado sus obras completas, dispersas en revistas ya difíciles de compulsar; la posteridad ha sido más justa, porque hoy mismo no se publica ningún trabajo en ningún país sobre deformación de los sólidos en que no aparezca el coeficiente de Poisson; por cierto que un traductor forzado a sueldo mísero, estampó una curiosa «cifra del pescado»; y menos mal que no se comió una ese y no la convirtió en la «cifra del veneno».

Saltemos ahora a Lamé (1795-1870) graduado de la Politécnica e ingeniero civil y de ferrocarriles, que en 1824 fué a Rusia, como ingeniero asesor, con su colega Clapeyron, el del teorema de los tres momentos. El interés de Lamé por la Elasticidad lo despertaron los problemas prácticos de puentes de hierro y otros análogos; podemos imaginar que concibió ya la idea, quizás todavía prematura, de que en la Teoría de la Elasticidad se encontraba la base científica para el estudio de las construcciones. De manos de Lamé salió ya la Elasticidad completa, como ciencia (1) salvo el problema de la integración; en lugar de emplear por hipótesis de trabajo el supuesto de Cauchy de imaginar formado el cuerpo por infinitos puntos, entre los cuales existían atracciones y repulsiones estabilizadoras de la forma geométrica, estableció el siguiente postulado, que es, en resumen, la definición matemática del estado elástico:

«Hay una correspondencia biunívoca entre tensiones y deformaciones.»

Así, quedaba asentada la Elasticidad como teoría puramente fenomenológica, sin aspiración a explicaciones físico-moleculares, como corresponde a ciencia que sólo trata de condensar en forma matemática que se preste al cálculo, las propiedades macroscópicas de los sólidos, en cuanto a tensiones y deformaciones.

Más adelante, demostraría H. Poincaré (2) que el referido postulado es consecuencia del principio de la conservación de la energía en forma estrictamente mecánica; Green, en 1842, había adoptado ya el mismo punto de vista. Con su método, llegaba Lamé a dos coeficientes para caracterizar cada material isotrópico, en lugar de uno solo como Cauchy. Lamé insistió además enfáticamente en la idea de usar coordenadas diversas, especialmente las ortogonales, para cada problema. El tiempo ha confirmado la importancia de tal idea, porque hoy no sólo la Elasticidad, sino

(1) LAMÉ: *Leçons sur la théorie mathématique de l'Elasticité des corps solides* París, 1852.

(2) H. POINCARÉ: *Leçons sur la théorie de l'Elasticité*, París, 1882.

toda la Física Teórica, emplea como herramienta fecundísima las diversas coordenadas ortogonales, que incluso han tenido repercusión en las Matemáticas puras, pues el expresar la ecuación de Laplace en coordenadas diversas y buscar soluciones simples, producto de tres funciones respectivas de cada variable, resultan ecuaciones diferenciales muy interesantes. No hablemos de las coordenadas esféricas y cilíndricas, que originan, por este procedimiento, las funciones de Legendre y de Bessel respectivamente; las coordenadas elípticas, conducen a las funciones de Lamé, brillantemente estudiadas por numerosos geómetras (1) y que Poincaré aplicó para deducir figuras de equilibrio de una masa flúida en rotación derivadas de los elipsoides; las cilindro-elípticas conducen a la ecuación de Mathieu, que este autor encontró estudiando las vibraciones de una membrana elíptica, y cuyas integrales han sido objeto de interesantes estudios, especialmente por matemáticos ingleses. Ambas ecuaciones, la de Lamé y la de Mathieu, han servido a los matemáticos puros de ejemplos muy interesantes para completar la teoría de las ecuaciones diferenciales del tipo fuchsiano con cuatro singularidades.

Aunque, como ya he dicho, Lamé concibió la idea de fundar en la Teoría de la Elasticidad la ciencia de las construcciones, se quedó en la labor de pulir y perfeccionar aquella teoría; el hado que distribuye los éxitos entre los investigadores, tenía reservado el paso esencial necesario a otro ilustre ingeniero francés, casi contemporáneo de Lamé, de Saint Venant (1797-1866), quien se dedicó a aplicar la Elasticidad a las piezas prismáticas o cilíndricas, estableciendo en sus fundamentos esenciales las teorías de la Torsión y de la Flexión; sentó el ilustre ingeniero francés un postulado fecundísimo, llamado «principio de Saint Venant», según el cual la ley de tensiones dada en la superficie, puede alterarse en una región acotada, siendo el error producido insensible a distancias mayores que unas dos veces la máxima dimensión de la región. Con esto, en las piezas cilíndricas, podía de Saint Venant suponer leyes simples de las fuerzas dadas sobre las bases; sólo la resultante y el momento importaban.

Me dediqué yo en la segunda década de este siglo a formar,

(1) P. HUMBERT: *Fonctions de Lamé et fonctions de Mathieu.* M. S. M. Fas. X. París, 1926.

para mi uso privado y sin pensar en su publicación, un a modo de catálogo, en que para cada caso, enfrentaba la solución de la Resistencia de Materiales, cuando la daba, con la de la Elasticidad; y por cierto que para estudiar ésta a fondo, me fué utilísimo, entre otros libros, un obsequio que me hizo la Academia, el de las Conferencias pronunciadas en la cátedra de Física Matemática de la Universidad Central por D. José Echegaray, en los cursos 1906 a 1907, 1907 a 1908 y 1908 a 1909, en los que explicó la Elasticidad según los métodos de Cauchy, Lamé y Poincaré respectivamente. Innegable es que Echegaray prestó a la cultura española un inestimable servicio, al introducir y divulgar entre nosotros las ideas de aquellos sabios, por lo que debo considerar feliz la casualidad, que en párrafos anteriores llevó mi pluma a asociar los nombres de Cauchy y de Echegaray, al traer a colación la inspirada semblanza que el gran español hizo del sabio francés.

Del catálogo comparativo a que antes me referí resultaba que en todos los casos en que la Resistencia podía resolver el problema, la Elasticidad lo resolvía también; y, en cambio, esta última permitía abordar muchos casos en que la Resistencia se mostraba impotente o incluso errónea. Claro está que las posibilidades de la Elasticidad eran teóricamente indefinidas; la limitaban solamente los métodos conocidos para la integración de las ecuaciones fundamentales. En honor de la verdad. hay que decir también que, en ciertos casos, como las piezas pseudoprismáticas de eje muy curvo, la admisión del postulado de Bernoulli permitía establecer la teoría de Grashof (1) para todas las secciones de prismas, y, en cambio, la Elasticidad, sólo daba hasta entonces una solución conocida y sencilla para la sección rectangular que, ciertamente, podía servir para comprobar aquélla, por lo menos, en un caso particular, demostrándose así que la teoría de Grashof, aunque no exacta, porque desprecia la tensión radial, es bastante aproximada cuando el radio de curvatura de la pieza no es demasiado pequeño (2). Pero estos casos eran raros y, en

(1) VELASCO: *Arcos, bóvedas, placas y otros problemas*. Madrid, 1943. Exposición de la teoría: cap. I, apartado B); crítica según la Elasticidad para la sección rectangular, cap. IV, apartado C).

(2) R. CHAMBAUD: *Le problème élastique des voutes épaisses*. París, 1926.

realidad, podían entroncarse con la Elasticidad, considerándolos como una extensión provisional de los métodos hasta que se encontrasen soluciones más rigurosas.

Muy significativo resultaba el caso de la Torsión de los prismas. La Elasticidad, con los supuestos obvios propios del caso, reduce el problema a uno de Dirichlet o de Neumann, ambos equivalentes en dos dimensiones. ¿Qué más puede apetecer el ingeniero que encontrarse con un problema tan estudiado por los matemáticos puros, para los cuales es también muy interesante? Así sólo hay que escoger la solución más adecuada para cada sección entre un extensísimo catálogo: método indirecto, empleado ya por de Saint Venant, y consistente en partir de una cierta función armónica como corrimiento axial y ver para qué perímetros se cumple la condición de contorno; empleo de series de términos exponenciales; representación del corrimiento por un potencial logarítmico de simple capa o bien de la armónica conjugada por otro de doble capa, llegando en ambos casos a una ecuación integral que se resuelve por el método de Neumann, por el de Fredholm, por el Schmid o «por regula falsi», como yo he propuesto (1); representación conforme del recinto dado en un círculo, método empleado por el académico D. Pedro Pineda en su folleto «Representaciones conformes según el método de Bieberbach»; empleo de formas polinómicas aproximadas; uso de la función de tensión; método de Ritz; métodos gráficos derivados de éste, etcétera.

Además, surgen numerosas analogías con otros fenómenos físicos cuya formulación matemática es idéntica: movimiento sin remolinos de un líquido en un vaso prismático, membrana tensa, película de jabón, potencial eléctrico, etc. Y estas analogías permiten en muchos casos mediciones experimentales muy simples.

En cambio, la Resistencia sólo resolvía el caso trivial del prisma circular; y lo que es peor, sus ideas habituales indujeron a algunos a pensar, erróneamente, que el postulado de Bernoulli podía dar una cierta aproximación, lo cual era inadmisible porque el corrimiento axial es precisamente la función de primer orden del problema, de cuyas derivadas salen las tensiones. Todo

(1) M. VELASCO: *Arcos, bóvedas, placas y otros problemas*. Cap. IV, núm. 36, II. Madrid, 1943.

ello conducía a representar la resistencia de la sección por el momento polar de inercia y así se estampó en muchos libros, incluso con tablas, hasta 1920 poco más o menos; basta torcer una chapa fina para ver que apenas opone resistencia a la torsión, mientras su momento polar de inercia es considerable. Por esto yo empleé muchas veces como piedra de toque para calibrar libros nuevos el hojear el capítulo de la Torsión; así pude observar cómo perduraban las ideas erróneas en libros extranjeros costosamente traducidos por editoriales hispanoparlantes.

De lo expuesto, se seguía un programa: la ciencia de las construcciones, la que tanto permite proyectar edificios resistentes a los terremotos y a los huracanes, como cañones capaces de destruirlos, había de ser una ciencia única, deductiva, fundada en la Elasticidad, sacando de ellas todas las reglas técnicas, a veces provisionalmente por extensiones aproximadas en obsequio a la brevedad de los cálculos y ante la falta de métodos de integración.

Tanto me encantó este programa que tomaba la Elasticidad por espina dorsal de la ciencia de las construcciones que sentí el impulso de salir a la palestra, convirtiendo en libro mis apuntes de uso personal. Cual nuevo Don Quijote, quise arremeter contra los Resistencialistas, que en mi mente asemejaba al pagano Alifanfaron de la Trapobana; pero por circunstancias que luego explicaré, dilatóse la publicación de mi libro, que no vió la luz hasta 1926, y, mientras tanto, malandrines encantadores convirtieron el ejército de los enemigos en rebaño de ovejas. Porque lo cierto es que llegadas las cosas a su granazón, en todo el mundo se precipitaron los estudiosos a buscar soluciones de los problemas elásticos que respondiesen a necesidades prácticas.

A este interés por las soluciones de problemas concretos de la Elasticidad, prestó no liviano impulso la generalización del hormigón armado. Si la piedra fué el material fundamental de las construcciones clásicas, el hierro laminado permitió las atrevidas y grandiosas realizaciones constructivas del siglo XIX; y la aparición del gran material, síntesis de ambos, marcó el tránsito a la vigésima centuria. Superada la época de los «sistemas», se establecieron las bases lógicas del cálculo del hormigón armado, entre las cuales figuraba un postulado especial, más constructivo que físico, referente a la solidaridad de deformaciones entre hormigón y armaduras, postulado que llamo constructivo porque no indica una propiedad física de los sistemas heterogéneos, sino un resultado de las formas elegidas y de las precauciones que se toman para asegurar la solidaridad. Pues bien, el hormigón planteaba muchos interesantes y nuevos problemas, porque en los sistemas reticulares, era imposible pensar en las articulaciones vista la esbeltez de las barras, mucho menor que en las construcciones metálicas, y porque en seguida aparecieron placas, bóvedas-membranas y pisos continuos. Pero me dispensa de entrar a fondo en esta línea y de llegar al moderno pretensado, la presencia en esta docta Corporación de dos ingenieros eminentes, D. Alfonso Peña Boeuf y D. Eduardo Torroja, que han sabido unir la maestría en realizaciones magníficas con el estudio científico de los problemas correspondientes, y a los cuales, debo, por cierto, expresar mi agradecimiento por el interés que han prestado a mis modestísimas aportaciones.

Se produjo, pues, un movimiento universal de búsqueda de soluciones para numerosos casos: funciones de Airy para problemas planos en coordenadas cartesianas, polares, cilindro-elípticas y otras; bóvedas cilíndricas y piezas muy curvas de sección rectangular, «efectos» de ángulos entrantes y de oquedades o ranuras; comprobaciones numéricas del principio de Saint Venant; bóvedas cáscaras o membranas; efecto de fondo en grandes depósitos; cúpulas gruesas; placas circulares, elípticas, rectangulares y triangulares, ya apoyadas, ya empotradas, ya flotantes; desarrollos sobre la teoría del contacto de Hertz; pandeo de placas y membranas y estudios dinámicos de vibraciones y velocidades críticas.

Conviene señalar aquí la aparición (1.ª edición 1925, 2.ª edición 1930) de la magnífica «Mecánica Elástica» de D. Alfonso Peña, obra que sustancialmente seguía el programa que antes yo señalaba como ideal, lo que demuestra que éste era sentido separadamente por muchos, obra que lleva la impronta característica de su autor, el empleo de cálculos de la máxima sencillez posible, y que, sin embargo, representan los hechos con aproximación suficiente.

Probablemente, el autor que más ha contribuído a la solución de problemas determinados en el ruso Stephen Timoshenko, radicado en Estados Unidos desde 1922, cuyas obras (1) presentan además numerosas citas bibliográficas que permiten seguir las líneas generales de la evolución.

No abundan en las citas de Timoshenko los autores hispanoparlantes, a pesar de que tanto en España, como en varias Repúblicas hispano-americanas se han publicado trabajos muy interesantes; aparte de los ya antes citados y aparte también del conocido profesor Buty, me acuden a la memoria, sin grandes búsquedas ni pretensiones exhaustivas, una memoria muy completa de L. Sobrino Aranda sobre las bóvedas cáscaras cilindro-elípticas (Buenos Aires, 1947), varios folletos de Walter S. Hill, Montevideo, sobre bóvedas cáscaras (2) y las interesantes investigaciones fotoelásticas de Sergio Merino, de Santiago de Chile, sobre edificios resistentes a los seismos (3) publicadas en la Revista de esta Real Academia.

Si me permitís que traiga al severo templo de la ciencia un modismo de revista, diré que la reseña precedente está hecha «a lo loco»; muchas de las soluciones adoptadas en ciertos casos, en estos años, arrancan de los maestros del siglo XIX, con ciertos retoques técnicos; así, el estudio en piezas curvas rectangulares de un momento flexor puro, se basa en el *estado elástico de Lamé*, que da la solución más general de tensión plana para cargas independientes del meridiano. De este mismo *estado de Lamé*, combinado con la teoría de la rotura de Grashof y de Saint Venant, salió ya en el siglo XIX la fórmula para el cálculo de envolventes cilíndricas gruesas, empleadas en los talleres bien documentados, aunque con los conocimientos de la Resistencia de Materiales resultase inexplicable su estructura, lo que constituye un nuevo argumento en favor del programa antes formulado.

Pero querer seguir la línea histórica de cada problema, exigiría

---

(1) STEPHEN TIMOSHENKO: *Théorie de l'Elasticité*. Traducción francesa. París, 1936.
Idem: *Théorie des vibrations*. París, 1947.
Idem: *Teoría de placas planas y curvas*. Buenos Aires, 1947.

(2) Prof. Ing. WALTER S. HILL: *Bóvedas ultradelgadas de hormigón armado*, número 487 de la *Revista de Ingeniería* (Uruguay), noviembre 1948. Montevideo.
Los hangares del aeródromo nacional de Carrasco, núm. 466 de la *Revista de Ingeniería* (Uruguay). Montevideo, 1947. *Bévedas cáscaras prefabricadas de hormigón*, número 469 de la *Revista de Ingeniería* (Uruguay). Montevideo, 1947.

(3) *Revista de la Academia de Ciencias E. F. y N.* Tomo XLVII, págs. 373 a 461 y 511 a 533. SERGIO MERINO: *Cisternas Estudio fotoelástico de fachadas asísmicas*.

paciencia tamaña a la que ha empleado en cuestiones análogas el académico D. José Sánchez Pérez y tropezaría además con la barrera de las nacionalidades, pues muchas soluciones fueron indicadas casi simultáneamente por autores franceses, ingleses y alemanes; así, por ejemplo, mientras Chambaud, en obra ya citada, al estudiar la bóveda cilíndrica gruesa, atribuye la paternidad de la solución que emplea a Ribière (1), citando los Comptes rendues de l'Academie es Sciences de Paris, t. 108, 1889, pág. 561, el profesor A. Rosemblat, de Cracovia, que publicó sobre el mismo tema una serie de artículos en la Revista de Ciencias, de Lima, cuyo director es el veterano profesor y corresponsal de esta Academia, Dr. Godofredo García, la atribuye a J. H. Michel (Proceding of the London Mathematical Society, 31, 1899); no nos atrevemos a profundizar en el examen de esta prioridad por miedo a crear un nuevo problema que haga necesaria la intervención de «los cuatro grandes» y que torne más dificultosa aún la solución de los problemas internacionales.

Por mi parte, he contribuído a la línea de soluciones de problemas elásticos determinados con algunas modestas aportaciones, entre las cuales recuerdo varios casos de torsión de prismas (2); placa circular cargada con fuerzas cualesquiera (3); presas de gravedad (4); placa rectangular empotrada, con fuerzas cualesquiera, mediante polinomios biharmónicos (5); tuberías zunchadas, grandes depósitos y otros problemas con simetría axial mediante desarrollos según el incremento del radio y mediante funciones de Bessel (6); método de regula falsi para resolver las ecuaciones integrales de los problemas elásticos (7); bóvedas cáscaras con doble curvatura (8); torsión del hormigón armado estudiada mediante el postulado de la solidaridad de deformacio-

---

(1) C. E. RIBIÈRE, francés, Ingeniero y Doctor en Ciencias matemáticas, nacido en Riberaz en 1854, autor de una Memoria titulada *Divers cas de la flexion des prismas rectangles*, publicada en Burdeos en 1888.

(2) VELASCO: *Elasticidad y Resistencia de los Materiales*, 1.ª edición, Sevilla, 1926; 2.ª edición, Madrid, 1946.

(3) Revista *Cemento*, núms. de marzo y abril 1936, y *Arcos, bóvedas, placas*, capítulo VIII, núm. 11.

(4) *Revista de Obras Públicas*, núms. de agosto y septiembre 1935, y obra *Arcos, bóvedas, placas*, Madrid, 1943, cap. IV, núm. 41.

(5) y (6) *Arcos, bóvedas, placas*, Madrid, 1943.

(7) y (8) *Arcos, bóvedas, placas*, Madrid, 1943.

nes (1); arcos circulares y elípticos con fuerzas normales a su plano, con tablas numéricas (2); cálculo de velocidades críticas en los sistemas rotatorios, con momento de inercia y sección variables (3); pisos continuos o techos setas (4); placa triangular empotrada (5); viga rectangular empotrada, estudiada por el método de alteración ficticia del contorno (6); explicación dinámica de la rotura del puente de Tacoma (7); cúpulas gruesas estudiadas mediante las funciones esféricas (8); placas flotantes (9); y otros.

Puede parecer una objeción autorizada al programa que antes indicamos el hecho de que en Norteamérica, por ejemplo, sigan apareciendo numerosas obras del tipo Streng of materials, correspondientes con algunos remozamientos, a las Resistencias de Materiales de principios del siglo. Ya dijimos que nuestra tesis se refería a la ciencia en sí y a los técnicos de grado superior; las ingentes necesidades de las actividades económicas modernas exigen gran número de técnicos de grado medio, que pueden colaborar en cálculos corrientes de estructuras con bases científicas más modestas. Aunque los ajustadores y torneros necesiten saber Aritmética, no es conveniente y sería perturbador explicarles las discusiones entre formalistas, logicalistas e intuicionistas sobre los métodos de demostración.

En la aplicación de la Elasticidad a la Ingeniería, aparece como una fecha clave la del 1913. Hasta entonces, la repartición de tensiones en un cuerpo cargado, era experimentalmente un arcano; la Teoría, mediante cálculo, a veces muy prolijos, permitía llegar a determinar las tensiones; pero en cuanto a comprobaciones experimentales, sólo podían hacerse mediciones totalizadas, como flechas u otras análogas, o ensayos simples; nótese la diferencia con la electrotecnia, por ejemplo, donde el amperímetro y el voltímetro comprueban por doquier las previsiones. Desarrollando un experimento recreativo del físico inglés David Brewster (1816),

(1) y (2) *Arcos circulares y elípticos*. Madrid, 1944.

(3) *Arcos, bóvedas, placas*. Madrid, 1943, cap. X, núms. 8 y 9.

(4) Artículo publicado en la *Revista de Ingeniería Industrial*, núm. 69, febrero de 1936, y reproducido en *Arcos, bóvedas, placas y otros problemas*. Madrid, 1943.

(5) *Arcos, bóvedas, placas y otros problemas*. Madrid, 1943, cap. VIII, núm. 14.

(6) *Arcos, bóvedas, placas*. Madrid, 1943, cap. IV, núm. 16.

(7) Revista *Dyna*, núm. 6 de 1941, artículo reproducido en *Arcos, bóvedas, placas y otros problemas*. Madrid, 1943.

(8) *Arcos, bóvedas, placas*. Madrid, 1943, cap. VII, núm. 17.

(9) *Arcos, bóvedas, placas*. Madrid, 1943, cap. VIII, núm. 17.

sobre las variaciones que un estado de tensión produce en las propiedades ópticas del vidrio, Mesnager en el año antes citado, confirmando un trabajo previo anterior, publicó en los Anales Des Ponts et chaussés (Vol. 16, p. 135), la base de la fotoelasticimetría. El profesor Coker perfeccionó y completó el método, con trabajos que se extienden, por lo menos, desde 1920 a 1931, sustituyendo el vidrio por materiales plásticos como la fenolita, con la cual los modelos pueden literalmente recortarse con unas tijeras.

En Londres trabajó con Coker mi querido compañero y eminente académico Don José Antonio de Artigas, que muy joven y ya valor internacional, investigaba intensamente en los Laboratorios ingleses; y como el desarrollo de la fotoelasticimetría, efectuado al principio con modelos de vidrio, exigía un estudio a fondo de las propiedades ópticas de aquéllos, al aplicar allí Artigas su excepcional dominio de los métodos científicos, fué precisamente donde inició su difícil escuela de la Físico-Química de las sustancias ópticas, que por su fecundidad en la Enseñanza Superior y en la industria, tanto elogiaron sobre todo Cajal en España y los sabios de la fundación Zeiss, como con justa delectación tiene registrado y ensalzado esta Real Academia.

El caudaloso desarrollo de la fotoelasticimetría no necesita ser ponderado; pero hay que decir que los Laboratorios fotoelásticos, no han perdido nunca el contacto con la Elasticidad Teórica, pues ésta ha de determinar las relaciones de las tensiones entre modelo y pieza, ha de averiguar en qué casos son las tensiones independientes del material, como ocurre en Tensión plana cuando el problema es del tipo Neumann y la sección es monoconexa, y ha de completar casi siempre con ciertos cálculos los resultados experimentales.

A la fotoelasticimetría han venido a unirse en estos últimos años numerosos métodos para la medición en obras o probetas de dilataciones y tensiones, entre los cuales los estadounidenses (1) insisten particularmente en los patrones eléctricos para medir dilataciones, que en forma de rosetas permiten determinar las dilataciones principales.

Conviene señalar también el nacimiento en estos años de la *fotoplasticimetría*, por lo que hay que pensar en un nombre que

(1) MARK B. MOORE: *Principles of experimental stress analysis*. New York, 1954.

comprenda ambas ramas, permitiéndome yo proponer el de *fototensiometría*.

He dicho antes que la publicación de mi libro se retrasó, y voy a referirme a la causa: pensaba yo que el magnífico edificio de la Elasticidad necesitaba una coronación que lo completaría en el aspecto mental, como la cúpula grandiosa de Miguel Angel completa la Basílica de San Pedro; tal complemento sería un método general para resolver el problema elástico. Poincaré había calificado el intento de «insurmontable» y Echegaray de «inmensamente difícil», pero las Matemáticas habían progresado mucho en los primeros años de este siglo; en particular, en 1903, el sueco Fredholm había publicado el descubrimiento de sus célebres trascendentes que permitían resolver la ecuación integral de segunda especie, y todo inducía a pensar que, de existir una solución general del problema elástico, sería por reducción a una ecuación integral.

Intentaba yo afanosamente el averiguar si por alguien se había encontrado alguna solución general, la cual podía venir o por el lado de los matemáticos puros, tal vez para un problema más general, o por el de los elasticistas. Estaba en su auge la primera guerra mundial, y las dificultades de información, siempre grandes para un aficionado un poco aislado, como yo, resultaban amplificadas; sólo pude encontrar un artículo de M. A. Korn, inserto en el tomo X, serie segunda, 1908, de los *Anales de la Facultad de Ciencias de Toulouse*, titulado «Solution générale du problème d'equilibre dans la théorie de l'elasticité, dans le cas ou les efforts sont donnés a la surface», en el cual resolvía, en efecto, la cuestión mediante un método de aproximaciones sucesivas, cosa siempre muy interesante, pero distinta de la que yo anhelaba.

Formulado matemáticamente, el problema consistía en buscar un vector-corrimiento definido en el campo constituído por el cuerpo dado, tal que en la superficie cumpliese una de estas tres condiciones (dando de lado a alguna otra de menor interés):

1.ª Tomar el propio vector valores dados sobre la superficie; por analogía con los problemas referentes a la ecuación de Laplace, llamaba yo al problema resultante *tipo Dirichlet*.

2.ª Tomar el vector-tensión valores dados en la superficie;

como las componentes del vector-tensión se expresan mediante las derivadas de las del vector-corrimiento, le llamaba problema *tipo Neumann*.

3.ª *Problema mixto,* tal que en unas regiones de la superficie fuese dado el vector corrimiento y en otras el vector-tensión.

De estos tres problemas, el primero es puramente académico, no existe ningún problema técnico que así se presente; el importante es el segundo, pues conocida su solución podían resolverse en la práctica el problema mixto y el primero, incluso mediante el método de Castigliano.

Fué precisamente del primero, es decir, del problema tipo Dirichlet, del que pude averiguar la solución dada por el propio Fredholm, reduciéndolo a una ecuación integral, publicada en 1906 en el *Archiv for Matematik, Astronomi och Fisik* (Bd II, 1906, núm. 28 S. 1-8). Otras soluciones análogas del mismo problema fueron dadas por Lauricella (1) y Marcolongo (2). Pero el problema del tipo Neumann seguía sin resolver, por lo que yo podía averiguar, aunque los mencionados trabajos de Fredholm y de los dos sabios italianos aumentasen la probabilidad de que también pudiese reducirse a una ecuación integral, probabilidad creciente todavía atendiendo a que T. Boggio había en 1907 intentado un tipo análogo de transformación, si bien con faltas evidentes de rigor (3).

En estas condiciones, me sorprendió a mí mismo un día encontrar, ensayando soluciones, una expresión de potenciales de simple capa, relativamente sencilla, que satisfacía idénticamente a las ecuaciones indefinidas y que, expresando en la superficie el vector-tensión, conducía a una ecuación integral del tipo de Fredholm, en que la incógnita era una densidad-vector que tenía por componentes las densidades de los tres potenciales de simple capa.

Faltaba, sin embargo, un pormenor. El método de Fredholm para las ecuaciones integrales exigía primeramente que el nú-

(1) G. Lauricella: *Sull' integrazione delle equazione dell' equilibrio dei corpi elastici isotropi*. Atti della Reale Academia dei Lincei. Bd. XV, 1 Semester 1906, S. 426-432.

(2) R. Marcolongo: *La teoria delle equazioni integrali e le sue aplicazione alla Fisica matematica*. Atti della R. A. dei Lincei. Bd. XVI, 1 Semester 1907, S. 742-749.

(3) T. Boggio: *Determinazione della deformazione de un corpo elástico per date tensione superficiali*. Atti della R. A. dei Lincei. Bd. XVI, 2 Semester 1907, S. 441-449.

cleo fuese acotado; posteriormente, Hadamard extendió la solución mediante iteraciones a núcleos que se hiciesen infinito, con ciertas limitaciones. En el caso de las integrales de superficie que aparecían en el problema elástico, era necesario que al coincidir el punto atrayente y el atraído se hiciese infinito el núcleo como una potencia del valor recíproco de la distancia de exponente inferior a 2.

Y ocurría que mi solución no cumplía esta condición, el exponente valía precisamente 2, con lo cual las integrales, aunque existían, eran semiconvergentes.

Una circunstancia de rara casualidad pudo resolverme la dificultad, que quizá por medios ordinarios de información se hubiese prolongado muchos años. El gran matemático suizo, Hermann Weyl, hoy residente en Estados Unidos, vino a España en 1922, y de mi contacto con él resultó averiguar la manera de arreglar la solución. La por mí encontrada era a modo de una integral particular; se necesitaba otra integral particular, la *solución de antena* de Weyl; combinadas linealmente ambas, con coeficientes adecuados, podía lograrse un núcleo que se hiciese infinito, como el recíproco de la distancia.

En posesión, pues, de la solución completa del problema, pude aplicarlo a algunos casos, logré fácilmente reducirlo a dos dimensiones, caso sencillo y muy importante en que las fórmulas se simplifican considerablemente, y pude al fin imprimir mi Elasticidad y Resistencia de los Materiales, que apareció en 1926, enviando antes al Congreso de Coimbra de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias, celebrado en 1925, la solución general del problema elástico.

Cuando ésta fué siendo conocida; algún lector competente me dijo: «Está bien, pero los cálculos numéricos para aplicarla a casos concretos resultan tan complicados que se la debe considerar casi como un teorema de existencia.»

En primer lugar hay que decir que los teoremas de existencia, contra lo que a primera vista puede pensarse, no son interesantes solamente para el matemático puro; también para las aplicaciones es conveniente saber que se pisa terreno firme Además, aun sin llegar a cálculos numéricos, la solución general permite deducir ciertas consecuencias de gran interés. Por ejemplo, por las propiedades del potencial, puede demostrarse el principio de Saint Venant, que se convierte así de postulado en teorema (1), y también puede comprobarse algo ya conocido por otros métodos, que en dos dimensiones y en secciones monoconexas, la distribución de tensiones en el problema tipo Neumann es independiente del material (2), pero en tres dimensiones y en cuerpos convexos, sale un resultado no conocido antes, a saber, que la distribución de tensiones sólo depende del coeficiente de Poisson y no del módulo de Young para el mismo tipo de problema (3).

Ahora bien, viniendo a cálculos numéricos, es cierto que la aplicación de las trascendentes de Fredholm en este caso, como en todos, resulta bastante complicada; el interés de llegar a una ecuación de Fredholm es, sobre todo, el de permitir una discusión segura. Pero para el cálculo numérico es, sin duda, preferible el método de Schmid, con el que la dificultad práctica se reduce a resolver un sistema de ecuaciones lineales, problema de aparición muy frecuente en los problemas técnicos, sobre el que desde Gauss ha habido una voluminosa literatura y sobre el que encontramos puntos de vista interesantísimos en el magnífico libro del académico don Julio Rey Pastor «Los problemas lineales de la Física», 1955.

Como medio práctico de cálculo, yo siempre pensé en el método de Schmid; por eso me alegró mucho encontrar en el libro precioso del académico D. Francisco Navarro Borrás titulado «Las ecuaciones integrales», Madrid, 1942, una exposición muy clara y rigurosa de dicho método, muy preferible a la que antaño había hallado en Heywood et Frechet (4); tanto me gustó que casi íntegramente la transcribí en la segunda edición de mi «Elasticidad y resistencia de los materiales», hecha en 1946, con objeto de contribuir al conocimiento del método.

Además, en el tiempo transcurrido desde 1920, los cerebros electrónicos han facilitado tanto los cálculos que han aminorado la importancia de tal punto de vista.

Conviene subrayar también que D. Julio Rey Pastor, en el libro antes citado, da un método para calcular por recurrencia los

(1) VELASCO: *Elasticidad y Resistencia de los Materiales*, cap. XII.
(2) VELASCO: *Arcos, bóvedas, placas y otros problemas*, cap. IV, núm. 24, II.
(3) VELASCO: *Arcos, bóvedas, placas y otros problemas*, cap. IX, núm. 13.
(4) HEYWOOD et FRECHET: *L'equation de Fredholm*. París.

términos del desarrollo de Fredholm, y que en el caso de dos dimensiones, que cubre problemas muy importantes, el método se simplifica considerablemente.

Por lo expuesto, yo creo que si el método no se ha aplicado, que yo sepa, por lo menos a obras importantes, cuyo valor justifique ciertos gastos del proyecto, es por escasa difusión.

Pero que no se tranquilicen los estudiantes de ingeniería; ahora, digerida ya la Elasticidad, apunta por el horizonte un nuevo nublado, el de la *Plasticidad*; palabra en que por sinécdoque implicamos cuanto se refiere a las deformaciones de los sólidos fuera del período elástico. Ciertamente, la importancia en las aplicaciones no es tan grande como la de la Elasticidad; verdad es también que ya en sus aspectos fundamentales tienen todos una idea del período plástico. Pero un estudio más a fondo de la Plasticidad va haciéndose cada día más necesario, porque es interesante prever lo que ocurrirá cuando el programa de cargas de una construcción o de un ingenio se encuentre sobrepasado por circunstancias fortuitas y porque muchos procesos tecnológicos conducen necesariamente a trabajos en período plástico, como ocurre en la laminación, en el trefilado, en el curvado de perfiles, en el roblonado y en otros análogos. Además, el ingeniero ha de tener siempre presente el drama de la rotura, como desenlace que evitar; y como entre el límite de elasticidad y la rotura se interpone el período plástico, solamente un estudio a fondo de éste permite conocer las condiciones en que acaece la rotura. En suma, es innegable el interés científico-técnico de conocer las leyes de las deformaciones de los sólidos fuera del período elástico, único hasta hace poco bien determinado.

La historia de los estudios sobre Plasticidad comienza con Coulomb, que en 1773 consideró la condición de equilibrio de los macizos plásticos o con cohesión; sus sagaces puntos de vista fueron desarrollados por Poncelet (1840) y por Rankine (1853), estableciéndose una teoría del empuje y aguante de las tierras, con una formulación matemática muy interesante, recogida en gráficos y tablas, y más exacta que otras puramente estáticas, permitiendo llegar a un cálculo más apretado de los muros de sostenimiento (1).

(1) CAQUOT (A.): *Equilibre des massifs à frotement interne*. París, 1934.

El caso de los cuerpos elástico-plásticos, tipo metales dúctiles, fué primeramente tratado por Tresca, en 1864, quien a base de experiencias de punzonado, consideró la tensión tangencial máxima en cada punto como discriminante del estado plástico cuando llegaba a un valor crítico.

De Saint Venant, en 1871, tomó como punto de partida el criterio de plasticidad de Tresca y sentó los principios fundamentales de la teoría clásica de la plasticidad, bien que limitados a tensión plana, postulando que hay una correspondencia biunívoca entre las tensiones y las velocidades de deformación. Muy poco después, Lévy generalizó los resultados de Saint Venant, extendiéndolos a tres dimensiones.

Se pasaron luego cuarenta años sin que se registrase ningún progreso notable, realizándose en varios países, especialmente en Inglaterra, numerosas experiencias, pero sin que la antorcha del Análisis, permitiese una interpretación clara de los resultados. Hasta que en 1913 formuló Von Mises su notable criterio de plasticidad. Teniendo en cuenta que en el caso de triaxilidad, es decir, en el de tres dimensiones principales iguales, se admite que no hay plasticidad por grande que sea el valor absoluto de las tres tensiones, el criterio de Tresca y de Saint Venant, expresado respecto a un triedro cuyos ejes sean las tensiones principales, conduce a que las transformaciones elásticas quedan contenidas en los puntos interiores de un prisma de sección exagonal, cuyo eje coincide con la recta correspondiente a las tres tensiones principales iguales. Pues bien, Von Mises sustituyó el prisma por el cilindro circunscrito, y este criterio resultó más acorde con los resultados experimentales. Considerando la ecuación cúbica cuyas raíces son las tres tensiones principales y que tiene por coeficientes los tres invariantes del tensor de los esfuerzos, el discriminante de Von Mises se expresa mediante un polinomio cuadrático simétrico de las tres raíces de la ecuación. Pocos años más tarde, Hencky interpretó el criterio de Von Mises, demostrando su equivalencia con el trabajo del tensor desviador, es decir, del tensor de los esfuerzos despojado de un tensor esférico o hidrostático.

Después de la primera guerra mundial se registra bastante actividad, especialmente por científicos alemanes, Prandtl, en 1921, demostró que el problema plano corresponde a una ecuación de características reales (lo mismo, por cierto, que ocurre en mi teoría), y resolvió el problema de la cuña. Hencky, en 1923, descubrió propiedades muy interesantes de las líneas de resbalamiento. En 1923, Nadai resolvió el problema de la torsión de barras no circulares, y en 1925, el simpático profesor Von Karman, que tan frecuentemente viene a España, publicó su teoría de la laminación, que pudimos oírle personalmente en una conferencia dada en Madrid, en el Instituto de Técnica Aeronáutica «Esteban Terradas». Entretanto había surgido una heterodoxia: Hencky, cuyos trabajos ya hemos mencionado, propuso, en 1924, una teoría nueva, en la que admite relaciones tensión-deformación, lo que implica, claro está, que se ha llegado a la deformación por un camino determinado. En los problemas prácticos de tres dimensiones, la teoría de Hencky se aplica con mayor facilidad que la clásica, y Nadai, en un libro publicado en 1931, la considera preferible; también los investigadores rusos la emplean intensamente (1). Hemos dicho que la teoría de Hencky resulta más sencilla que la clásica en los problemas de tres dimensiones, porque en cuanto a los de dos, en los casos llamados isostáticos, la teoría clásica resulta ya de aplicación sumamente simple.

Si comparamos la precedente noticia histórica de la Plasticidad con el desarrollo de la Elasticidad, surgen dos diferencias: el estudio de la primera es mucho más moderno, pues ya las investigaciones de De Saint Venant aparecen medio siglo después de que Cauchy escribiera las ecuaciones elásticas, y si consideramos que Von Mises completó la teoría formulando su fundamental criterio en 1913, entonces la diferencia es casi de un siglo. El segundo aspecto de la comparación es que en Elasticidad el acuerdo es universal, si acaso para algunos materiales o para tensiones próximas al límite de elasticidad, pueda ser aconsejable el empleo de la elasticidad no lineal (de la que por cierto oímos, en el coloquio de la I. U. T. A. M., al que volveré a referirme, una exposición muy notable al Dr. Kauderer, de Stuttgart), mientras en Plasticidad existen diversas teorías. Esta segunda diferencia se explica por las consideraciones críticas siguientes:

(1) R. Hill: *The mathematical theory of Plasticity*. Oxford, 1950.

La teoría de la plasticidad, que podemos llamar clásica (1), admite los siguientes postulados:

1.° Las transformaciones plásticas son isovolumétricas, es decir, se realizan con densidad constante.

2.° Los cuerpos que presentaban isotropía en el estado libre o en el período elástico, siguen siendo isótropos en el período plástico.

3.° Hay una correspondencia biunívoca entre las tensiones y las velocidades de deformación, supuesto que atribuye al fenómeno un carácter de fluencia dinámica, atemperada por admitir además que las aceleraciones son nulas.

4.° Cierta función de las tensiones permanece constante durante los procesos plásticos.

Aunque ofrece interés la discusión completa de estos cuatro postulados, me limitaré por el momento a considerar el cuarto, que es el sustancial para mi objeto. La función que hoy se admite como constante, durante los procesos plásticos, es, como ya hemos dicho, el discriminante de Von Mises

$$S = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2$$

en que σ_1, σ_2, σ_3 son las tensiones principales; su igualación a una constante es la llamada «condición de fluencia». Y como los metales (acero, aluminio, cobre) son los cuerpos de aplicaciones más importantes, surge naturalmente la siguiente pregunta:

¿Se verifica la constancia de S en las transformaciones plásticas de los metales?

La respuesta es evidentemente negativa; basta observar el ensayo por tracción de una probeta de acero suave; aquí $\sqrt{\frac{S}{2}}$ se reduce, aproximadamente, a la tensión axial; el período elástico termina a unos 28 Kg/mm^2; el período plástico, que empieza en seguida, termina con unos 40 Kg/mm^2 de tensión aparente o referida a la sección primitiva, lo que, tenida cuenta de la estric-

(1) ITERSON: *Plasticidad para el Ingeniero.* I. T. de la C. y del C. Madrid, 1950. Sra. GEIRINGER (Hilda): *Fondements mathematiques de la théorie des corps plastiques isotropes.* M. des S. M. Fas. LXXXIV, París, 1937. G. MILLÁN: *Introducción a la teoría de la Plasticidad.* Litografiado. I. N. de T. A. E. T., 1954.

ción supone una tensión efectiva en la sección estringida, que es donde más ha progresado la plastificación, de unos 100 Kg/milímetro cuadrado. Ahora bien, conceder que es constante una tensión que progresa de 28 a 100 envuelve un eufemismo demasiado versallesco.

En honor de la verdad, hay que decir que el fenómeno de la tracción de una probeta de tamaño normal es más complejo de lo que a primera vista parece (1). Además de la tensión axial, hay, sin duda, tensiones radiales y circunferenciales, y al introducir éstas en el discriminante de Von Mises, el aumento no resulta tan grande como el que revela la sola tensión axial. Pero es que casos más sencillos, como el tubo de pared estrecha estirado o sometido a tensión confirman también el aumento de las tensiones en un proceso monótono de carga.

Hecho tan evidente no podía ocultarse a los plasticistas. Y su terminología es la siguiente: los «plásticos perfectos» son los cuerpos en que la condición de fluencia se cumple durante el proceso de la plasticidad; a estos cuerpos se aplica la teoría clásica. Cuando durante el proceso plástico aumentan las tensiones, dice Prager, es que hay «ecrouissage», es decir, endurecimiento. Esta terminología recuerda un poco los «gases perfectos» de la Termodinámica; el mayor rigor es puramente formal. Recuerda también vagamente el método axiomático de los matemáticos puros; pero en Física no basta que no existan contradicciones en los axiomas admitidos: es necesaria la concordancia con la realidad. Nuestra pregunta se transforma, pero resurge inexorable:

¿Los metales son «plásticos perfectos»? Tal vez tengamos casos de alguna aproximación en el «hierro dulce» o acero casi sin carbono, que no toma temple alguno, o en otros metales recocidos; pero en la generalidad de los metales tratados en frío sigue siendo negativa la respuesta. Prager, que en su obra (2) se ha propuesto compendiar en pocas páginas todos los intentos, estudia el «endurecimiento», y también su inverso, el «reblandecimiento».

El endurecimiento está originado, según Prager, por las pro-

---

(1) Un estudio sobre la probeta cilíndrica estirada he publicado en la *Revista de Ciencia Aplicada*, núm. de enero-febrero 1955.

(2) W. PRAGER: *Mecanique des solides isotropes au délà du domaine élastique*. M. S. M. Fasc. 87. París, 1937.

pias deformaciones anteriores a la actual. Así, en la curva clásica del ensayo por tracción del acero suave, a la terminación del período elástico sigue un tramo irregular, que puede idealizarse pasablemente en tramo horizontal, aunque sea lo más frecuente que se acusen los límites superior e inferior de fluencia. Pues bien, en las ideas de Prager, esta deformación es la que origina el endurecimiento, porque luego se muestra ya la típica tendencia al aumento de la tensión propia del endurecimiento. Así, en el cuerpo plástico endurecible, las propiedades mecánicas dependen no solamente de las deformaciones y de las tensiones actuales, sino también de las deformaciones anteriormente experimentadas. Esto está de acuerdo con la experiencia tecnológica: la laminación, el trefilado o el martillado, aumentan las resistencias de los metales; es muy significativo a este respecto el clásico mandrilado de cañones.

Se sigue de lo expuesto que el carácter *histórico* o *hereditario* (Volterra) del fenómeno de la plasticidad, resultante ya de su definición, comprende dos efectos: uno primordial y otro secundario, pues, de una parte, los ciclos previos de carga y descarga dejan deformaciones permanentes que se suman a la actual, y de otra, tales ciclos modifican las propiedades del material, haciéndolo reaccionar de modo distinto.

Conviene advertir que Prager distingue el «endurecimiento isotrópico» y el «anisotrópico», con lo que prepara el abandono del postulado segundo antes relacionado.

Inicia también la idea, de enormes posibilidades, de los cuerpos «compuestos», cuyas propiedades mecánicas resultan de agregar idealmente dos cuerpos de tipo simple. Por ejemplo, la síntesis de un cuerpo elástico con otro plástico perfecto, estudiada por Reuss (1) ha sido comprobada experimentalmente por Hohenemser, que obtiene propiedades muy concordantes con las del acero suave.

De manera poco académica, pero cómoda, los cuerpos que nos interesan pueden clasificarse en cuatro tipos:

1.° Los cuerpos «plásticos perfectos»; tipo, la arcilla mojada o barro de alfarero. El cuerpo plástico perfecto deriva del

(1) A. Reuss: *Berücksichtigung der elastischen Formänderungen in der Plasticitätstheorie.* Zeitschr. f. angew Math. u Mech., t. 10, 1930, p. 266.

visco-plástico, suponiendo nulo el coeficiente de viscosidad; si, en cambio, se anula el esfuerzo tangencial máximo, que puede resistir el material, se cae en el líquido viscoso que, por nueva anulación del coeficiente de viscosidad, tiene por estado límite el líquido perfecto.

2.° Los metales (acero, aluminio, cobre, etc.).

3.° Los cuerpos frágiles, como la fundición, especialmente la blanca, y el vidrio; su característica es que la rotura sobreviene con deformaciones pequeñas. Por cierto que en este grupo se incluyen materiales de gran interés actual, los llamados plásticos; en el coloquio de Madrid de la I. U. T. A. M., el profesor H. Le Boiteux, de París, presentó ensayos muy interesantes hechos con probetas de plexiglás, los cuales evidencian un corto período plástico en tensiones próximas a la rotura y la necesidad de tener en cuenta la viscosidad

4.° Los cuerpos muy elásticos, como la goma, en que el período plástico apenas tiene extensión apreciable.

Creemos utópico, o al menos prematuro, en el actual estado de la ciencia, pensar en una teoría general que por determinación de funciones o de constantes, englobase las propiedades de los cuatro grupos indicados. En realidad, es para el primero para el único que existe una teoría satisfactoria: la que hemos llamado clásica, pues las posibilidades señaladas por Prager no creemos hayan cuajado en teorías completas y desarrolladas, prestas para las aplicaciones. Ni tampoco las que resultan de la notable obra de los Cosserat (1), «Theorie des corps deformables», que reducen el estudio de todas las deformaciones de los cuerpos a una *acción euclidiana*, es decir, a una acción invariante para el grupo de las transformaciones euclidianas (traslaciones y rotaciones). A pesar de su vejez, la obra de los Cosserat sigue siempre siendo citada por los plasticistas más modernos; pero un desarrollo circunstanciado de sus ideas, hasta llegar a los problemas técnicos referentes a los cuatro grupos de cuerpos antes citados, no lo vemos por parte alguna.

En resumen, la Plasticidad como ciencia nos ofrece un especto comparable al de un regio palacio, preparado para fiesta noc-

(1) E. y F. COSSERAT: *Théorie des corps déformables.* París, 1909.

turna, en el que falla el alumbrado; hachones y candelabros iluminan parcialmente unos aspectos de salones y galerías; pero otras partes permanecen en la penumbra o en la sombra.

En este estado las cosas, se nos ocurrió, en 1951, la idea de una teoría nueva, especialmente pensada para el grupo segundo, es decir, para los metales, aunque generalizable a otros casos. No es esta ocasión adecuada de exponerla, lo que he hecho en artículos (1), en un libro (2), en un folleto en inglés (3) y en una comunicación al coloquio de la I. U. T. A. M. (Unión Internacional de Mecánica Teórica y Aplicada) sobre «Deformación y fluencia de los sólidos» (Madrid, 1955); me limitaré a expresar su postulado fundamental. Para ello consignaré, antes que en un proceso plástico aparece siempre una *acción determinante*, que represento por un parámetro λ; en la atracción de una probeta, λ es proporcional a la separación impuesta a las cabezas, en una envolvente λ, lo es a la presión interior creciente; en una masa plástica comprendida entre dos platos, es proporcional al acercamiento de éstos. Es λ una función del tiempo, cuya primera derivada suponemos pequeña y la segunda despreciable para que el fenómeno pueda considerarse como una sucesión de estados de equilibrio. Un tramo del proceso es entonces la variación que corresponde a un incremento pequeño o diferencial $\delta\lambda$. Esto sentado, nuestro postulado fundamental se enuncia así:

«Dividido en tramos un proceso de plastificación, hay en cada tramo una correspondencia biunívoca entre los incrementos de las tensiones en cada punto y los de las deformaciones en el mismo punto.» Según este postulado, un proceso plástico se considera como una sucesión de estados de equilibrio y no como una fluencia dinámica.

Lo que nos permitió escribir inmediatamente, en casos muy importantes, las ecuaciones diferenciales que traducen el postu-

---

(1) Artículos relacionados en nota, pág. VIII de mi *Plasticidad*, y además, los posteriores siguientes:

Revista Dyna, enero de 1955: «La iluminación estudiada mediante mi nueva teoría de la plasticidad».

Revista de Ciencia Aplicada, enero-febrero 1955: «Estudio de la probeta cilíndrica».

Revista Dyna, agosto de 1955: «Estudio del trefilado según mi nueva teoría de la plasticidad».

(2) VELASCO: *Plasticidad* (nueva teoría y aplicaciones). Madrid, 1954.

(3) VELASCO: *A new theory of Plasticity*. Madrid, 1955.

lado propuesto, es el conocimiento de las experiencias del profesor suizo Stüssi, miembro corresponsal de esta Academia, que expuso los resultados obtenidos por él, en una conferencia pronunciada en este Salón el día 22 de abril de 1950 y publicada luego en la revista de la Academia (1).

De estas experiencias se deducen las ecuaciones diferenciales para la plastificación producida por una tensión normal creciente o por una fuerte tensión tangencial, siendo pequeñas las demás tensiones, en cuyos dos tipos entran numerosos casos o problemas.

Mi teoría no implica la isovolumetría; pero puede aproximarse a ella por pequeño retoque de los coeficientes. En cambio, rechaza la isotropía, aunque la hubiese en el período elástico, y envuelve una *anisotropía* del proceso plástico, en vista de los valores de los coeficientes.

El admitir ecuaciones diferenciales entre los incrementos o variaciones de las tensiones y las deformaciones, no es incompatible con el carácter «histórico» o «hereditario» del fenómeno; apenas habrá ecuación diferencial más sencilla que aquella a que obedece el *logaritmo neperiano,* y, sin embargo el valor de esta función en un punto del plano complejo depende del camino de integración, es decir, en cierto sentido, de la historia. Lo que ocurre es que las ecuaciones diferenciales empleadas, sólo pueden integrarse a lo largo de un camino determinado.

Surge, naturalmente, una pregunta: ¿Y el hormigón armado? Los cuatro grupos antes considerados son cuerpos macroscópicamente homogéneos; para estudiar un cuerpo heterogéneo, como el hormigón armado, habrá primero que considerar separadamente el hormigón y las armaduras. Estas se encuentran ya en el grupo segundo; en cuanto al hormigón, como uno de los procesos plásticos más sencillos que podemos ensayar, es el de la tensión monoaxial, en este caso compresión, la fórmula del académico D. Eduardo Torroja demuestra claramente un caso de «plástico endurecible». Por eso yo creo que mi teoría se aplicará, y para corroborarlo harán falta experiencias, que de seguir

---

(1) F. Stüssi: *Die Grundlagen der mathematischen Plasticitäts theorie und der Versuch.* Revista de la Real Academia de Ciencias E. F. y N. de Madrid, tomo XLIV, cuaderno 2.º, 1950.

la vía de Stüssi habrían de realizarse con tubos sometidos a presión interior, a tracción o compresión y a torsión, a fin de poder formar diversos estados dobles de tensión, que permitirían por inducción colegir lo que pasaría en estados triples.

Si a base de las ecuaciones fundamentales de mi teoría se supone que son integrables, se obtienen relaciones finitas entre tensiones y deformaciones, es decir, se cae en el período elástico; si se supone que son integrables respecto a las tensiones, resultan relacionadas éstas con las derivadas de las deformaciones respecto a λ, o lo que es equivalente, con las velocidades de deformación, es decir, que resulta la teoría clásica de la plasticidad, o sea, la de la plasticidad perfecta; pero, por otra razón, no es ésta respecto a la mía un *caso particular,* sino un *caso singular,* a causa de la hipótesis de que el discriminante de Von Mises permanece constante; cuando se representa en un diagrama una relación funcional, un tramo de la gráfica paralelo al eje de las abscisas, implica una degeneración en la que ha desaparecido la relación funcional.

Ignoro el porvenir de mi teoría, en cuanto al consenso de los competentes; pero me parece un buen augurio que al reunirse en París el 23 de mayo de 1955 los representantes de la I. U. T. A. N. para acordar el programa del coloquio sobre Plasticidad y otras materias relativas a las deformaciones de los sólidos, a celebrar en Madrid en septiembre de este año, se me incluyó para explicar mi teoría entre los 14 conferenciantes oficiales de todo el mundo, que iban a tratar de plasticidad, con lo que las primeras autoridades en la materia han tenido ocasión de conocer y contrastar mis ideas. Traería aquí con gusto una impresión, siquiera fuese por personal poco autorizada, de lo tratado en el coloquio; me gustaría especialmente relatar la conferencia del profesor Hodge, de Nueva York, en la que advierto puntos de coincidencia con mis ideas; pero me priva de hacerlo una razón de pulcritud científica, ya que casi todas las conferencias, sin duda por el limitado tiempo disponible, han sido exposiciones verbales de las líneas generales del pensamiento de cada profesor, y orales han sido también las discusiones; hay que esperar a la publicación de las actas del coloquio para poder realizar un estudio crítico medianamente concienzudo.

Yo me permitiría un ruego, dirigido a aquellos Organismos y personalidades que en España presiden y orientan las investigaciones científicas: la Plasticidad no es un problema sustancial, pero sí muy importante, de la ciencia, y por lo mismo que no está totalmente resuelto, ofrece campo a los experimentadores y a los teóricos; el hierro hay que machacarlo cuando está caliente, según un adagio que en forma directa, recíproca o contraria existe en casi todos los idiomas; es el momento de impulsar estudios, cálculos y experiencias sobre la materia, con lo cual estudiosos españoles podrán incorporarse al movimiento mundial en la cuestión.

En el maravilloso discurso de ingreso leído aquí por el académico y querido compañero mío D. José Antonio de Artigas, sostuvo la tesis de que si el hombre español no se había incorporado con ardor, casi hasta este siglo, al movimiento científico, era por ser la ciencia determinista, aspecto que pugna con algo esencial del español. Tiende éste a la acción: Don Quijote se lanza contra los molinos de viento antes de comprobar si son o no gigantes, mientras el norteño Hamlet se pasa cinco largos actos monologando sobre si debe matar o no al asesino de su padre, dando lugar a que el espectro de éste se muestre ya un poco impaciente. Y ¿qué sentido tiene la acción en un universo determinista, en que las cartas están jugadas de antemano? Ahora que con el principio de indeterminación y con los operadores diferenciales que determinan valores estadísticos, la ciencia pierde el aspecto determinista, los españoles se incorporarán con satisfacción íntima a la ciencia. Pues aceptada la tesis, vengan los españoles a la Plasticidad, ya que en ella se pierde el carácter determinista, puesto que el fenómeno diferencial depende a través de constantes y de coeficientes de toda la historia anterior, y la teoría sólo puede marcarnos una tendencia que se proyecta del pasado al devenir, pero sujeta en seguida a infinitas posibilidades.

La monumental obra que es el discurso de Artigas, agota ejemplarmente las pruebas de «nolición primaria» de los estudiosos españoles ante una Ciencia cuya epistemología descansa en «la aplicación abusiva del enlace racional de magnitudes a los entes reales en los que no pueden estar definidas la igualdad y la suma, y en la atribución gratuita a cada elemento del ente conjunto de la naturaleza de éste, no sólo *virtualiter*, sino también *formaliter*». Y como decía en su contestación al discurso el Presidente de la Sección de Físico-Química de la Academia, hoy su Secretario Perpetuo, D. Obdulio Fernández, es difícil encontrar una síntesis de mayor profundidad y alcance en la interpretación de la Ciencia que la ley epistemológica a que llega Artigas, de pulsación entre la primacía del culto a los *hechos nuevos* o a las *doctrinas que los enlazan*.

Pero, rindiendo mi homenaje, como siempre, a esta concepción grandiosa y a la labor titánica para haberla fundamentado, su evocación me aporta, además, un nuevo motivo de buena esperanza en el porvenir de la teoría que os he sometido que creo libre, sin duda, del absolutismo determinista. Y es que, como en ocasión solemne escuchamos en este recinto, en el inolvidable diálogo entre los dos Académicos eminentes, Rey Pastor y Terradas, al lado de la inmensidad en profundidad y superficie que el gran Señor se complace en mostrar con incansable actividad y duro esfuerzo, desde la cúspide que sus alas le permitieron dominar, se ven a menudo ejemplos de modestos artesanos que a costa de sacrificios, quizá también heroicos, construyen con sus propias manos humildísimas casitas en el menguado solar al que alcanzaron sus recursos.

Bien reducida puede ser la casita de mi teoría, frente a las edificaciones que en aquella efemérides se dominaron también con el diminutivo. Mas, la rotunda fe con que la genial tesis de Artigas descuenta la enérgica incorporación de los españoles a la nueva Ciencia, arrastra también mi optimismo, aunque el autor, con su ejemplar modestia, subrayase aquí que sólo os presentaba su solidísima teoría, como sugerimiento digno puramente de ser tomado en consideración entre otros esfuerzos más valiosos hacia la clave del problema de la posible producción científica española, que en el pasado había sido *formidable* y *tenebroso* para el glorioso polígrafo Menéndez y Pelayo.

Del trabajo de todos, extranjeros y españoles, yo espero que algún día saldrá la teoría completa y perfecta de la Plasticidad; de otro modo, si el conocimiento por el hombre de las deformaciones de los cuerpos hubiese de quedar reducido a un registro voluminoso de hechos, habría que perder la fe en el pensamiento profundo de Albert Einstein: «Lo más incomprensible del mundo es que resulte comprensible», frase que, desprovista de un evidente juego de palabras, yo me atrevo a transcribir así: «Lo más maravilloso del mundo es que resulte racional.»

Señores Académicos: Veo que es inútil continuar; he querido ingenuamente acumular méritos con los párrafos de este discurso como el que quiere pasar un torrente y no encontrando el vado, se pone a echar piedras al agua, sin que apenas suba el nivel del fondo; mi estado de ánimo es el del examinando que pide permiso para retirarse, renunciando a seguir la prueba Si vuestra bondad es tan grande que insistís en otorgarme la investidura, que ciertamente no cambiaría por ninguna otra de la Tierra, sólo puedo terminar con una emocionada palabra: Gracias.

HE DICHO.

DISCURSO

DE CONTESTACION DEL

Excmo. Sr. D. FRANCISCO NAVARRO BORRAS

SEÑORES ACADÉMICOS:

Con singular satisfacción recibe esta Real Academia al nuevo miembro numerario Velasco de Pando; públicamente conocido por sus notabilísimas aportaciones a la investigación científica, y por la influencia ejercida mediante sus obras en nuestros técnicos. Al darle la bienvenida, en nombre de la docta Corporación, cumplo un gratísimo deber, porque participo de la complacencia que ésta experimenta, no sólo por mi calidad de Académico, lo que por sí sería suficiente; sino, también, porque debo al recipiendario, en cierto modo, la orientación definitiva de buena parte de mis actividades científicas.

Su obra sobre Elasticiad y Resistencia unida a la de Mecánica Elástica de nuestro ilustre colega, Peña Boeuf, produjeron, en mi ánimo, tan profunda impresión, que determinaron de una manera decisiva, en la época ya lejana de mis años escolares, el rumbo de mis estudios. En ambas, pude aprender que la disciplina relativa al tratamiento elástico de la Resistencia de Materiales, es, ante todo, Ciencia deductiva; y en las dos, pude, por primera vez, informarme de las teorías correspondientes a las más avanzadas técnicas; lo que motivó que contrajese para siempre una deuda de gratitud con ambos autores, que, como científica, no puede ser saldada.

En el citado libro de Velasco, y en los demás suyos que, en el curso de los años, han ido apareciendo, destacan, entre otras características, la claridad de exposición y la elegancia natural del lenguaje; la agudeza en el enfoque de los problemas, deleitosamente contemplados en todas sus facetas; junto con un pensamiento atrevido, perspicaz y profundo; dotado a la vez de rapidez y agilidad que quizá, se deba a ser Sevilla, cuna de tantos ingenios preclaros, su ciudad natal.

El temperamento meridional de Velasco de Pando, sincera y hondamente sentido, determina que su alegría por el legítimo triunfo, quede empañada, en el día de hoy, por el recuerdo de su antecesor, nuestro querido y llorado compañero, el Almirante Benítez Inglot. Velasco, al trazar su semblanza, más que a la satisfacción de una obligación protocolaria, obedece a sus sentimientos; y conforme a sus mandatos, detalla y resalta, en forma emotiva, los altísimos valores intelectuales y morales que se centraban en quien tanto honró la medalla transferida. Rememora, asimismo, las excelsas figuras de los primeros titulares del sillón académico que va a ocupar; remembranza siempre grata en nuestra casa, donde perdura eternamente, como ejemplo, el espíritu de los que fueron y gozan de eterno descanso.

Huérfano de padre, Velasco de Pando, apenas cruzadas las fronteras de la infancia; cursó, en su ciudad natal, las asignaturas del Bachillerato; en las que demostró sus privilegiadas dotes, a la par que su preferencia por las disciplinas científicas. Aconsejado por sus deudos (que procuraban, en lo posible, suplir la falta de protección paterna), decidió seguir la carrera de Ingeniero. Con este fin, se trasladó a Bilbao, en donde, al cabo de un solo año de preparación, logró el ingreso en la Escuela de Ingenieros Industriales allí instalada; permaneció en ella hasta los veintiún años; edad en la que le fué expedido el título de Ingeniero, con tal aprovechamiento que, según certificación librada por el Centro, el número de Sobresalientes que obtuvo, excedía, del total de los concedidos a todos los alumnos, desde su fundación en 1899, hasta la fecha de terminación de los estudios.

Durante el período en que fué alumno de la Escuela de Ingenieros Industriales, Velasco de Pando envía un trabajo a esta Corporación, sobre Cálculo de Probabilidades; sin sospechar que en el futuro, uno de los sillones le estaba reservado. En él, muéstrase prendado no sólo por los problemas que se suscitan en la aplicación de las Matemáticas a la Física, sino también por las sutiles discusiones originadas por la introducción en la Física del concepto de probabilidad, el cual, siguiendo las ideas de Bolzmann, da origen a la transformación de gran parte de la Física determinista en estadística.

La exposición que nos ha hecho en su discurso de cómo la teoría de la elasticidad se ha ido amalgamando con la Resistencia de Materiales, hasta dominar completamente a ésta y constituir una ciencia deductiva, corresponde a una transformación que hemos vivido todos los técnicos desde la penúltima generación; y en ella nuestro nuevo compañero ha desempeñado un papel de guía porque su «Elasticidad y Resistencia de los Materiales», primera obra suya que yo leí, contenía una exposición magnífica del nuevo plan, consistente en relacionar con la Elasticidad todas las reglas constructivas y en coronar el edificio de la nueva Ciencia con un procedimiento general de integración, que Velasco de Pando detalla, aplicándolo a ejemplos y tratándolo por diversos procedimientos. El mérito fundamental de este método, radica en el planteo riguroso de los problemas de contorno.

Con patente modestia, enumera en el discurso sus contribuciones a la teoría de la elasticidad, citándolas sin darles importancia, y calificándolas al final, de piedrecillas con las que, apenas (nos dice), ha hecho subir el nivel de su disciplina. Pues bien, voy a glosar algunos de estos trabajos, con entera objetividad, y trataré de asignarles imparcialmente su auténtico valor.

Entre tales trabajos es, cronológicamente, el primero la Memoria presentada al Congreso de 1917, de la «Asociación Española para el Progreso de las Ciencias», sobre piezas de fibra plana cargadas normalmente a su plano. Su contenido, bajo su aspecto genérico, es una cuestión que cualquier persona consagrada a su estudio, hubiera podido abordarla; pero la novedad estriba en que Velasco, que dominaba ya, con arreglo a los métodos de la teoría elástica, el problema del trabajo por torsión (de suma importancia en este caso), al acometerlo de nuevo, consigue formularlo, de una manera sencilla, con las características de rigor, claridad y perspicacia en el pensamiento científico que le son habituales, y a las que en la iniciación de este discurso hube de referirme. De este trabajo se han hecho tres ediciones, hoy totalmente agotadas (lo que demuestra el interés que ha despertado).

Velasco, pues, se presenta siempre como un fidelísimo partidario de la teoría elástica, y ferviente defensor de su utilidad en una época en que su valor práctico era frecuentemente puesto en duda. Entre los trabajos emprendidos con este espíritu, sobresale, a mi juicio, su estudio acerca de las placas indefinidas o continuas sobre apoyos aislados, publicado en 1936, en la Revista de Ingeniería Industrial. En él, después de establecer la fórmula empírica, hasta entonces propuesta, para representar la deformación del plano medio, y de referirse, a las experiencias de Ross (de las cuales Alfonso Peña Boeuf se ocupa en su obra «Grandes estructuras y presas»), pasa a exponer su teoría. Emplea, con este fin, una idea matemática sumamente simple: la de que supuesta la placa indefinida y siendo rectangular la distribución de los postes, las funciones del problema han de ser periódicas respecto a las dos variables cartesianas, por cuyo motivo las representa por una serie trigonométrica doble. Y así, desarrollados sus cálculos y aplicadas numéricamente las fórmulas, efectúa la comparación con los resultados experimentales obtenidos en Norteamérica y Suiza, encontrando una sorprendente coincidencia que obliga a un reconocimiento inmediato del satisfactorio valor del método empleado. Y, animado con el certero sentido de su intuición, abandona antiguos empirismos, formula una teoría rigurosa, que explica incluso un cambio de signo que se produce en el momento, según las experiencias, y que la fórmula empírica no evidenciaba. Como véis, se trata de un trabajo de excepcional importancia por sus aplicaciones, que, a pesar de su transcendencia, únicamente se publicó en castellano, lo que es índice justificativo de modestia y patriotismo, atendido a que pudo hacerlo en otros idiomas y confiarse a revistas de mayor difusión, que, con justo criterio, hubieran sabido ponderar los excepcionales méritos del autor.

Figuran en el haber científico de Velasco de Pando, otros estudios sobre placas, como son: el referente a la rectangular flotante; el relativo a la circular con distribución arbitraria de cargas; el que atañe a la triangular; el de la rectangular empotrada... Hubiera sido mi deseo examinar, con todo detenimiento, estos trabajos, pero los límites propios del discurso que me ha sido encomendado, me vedan su atenta exposición. Me limitaré a tratar del contenido de este último.

Oriéntase la investigación de nuestro compañero a buscar una solución general para los problemas de placas, cuya idea básica es muy sencilla: Consiste en descomponer el problema en dos: por una parte, resuelve la ecuación de Lagrange con independencia de las condiciones de contorno; por otra, introduce a continuación una serie de polinomios biharmónicos homogéneos que suministran una solución plausible en el contorno. Tales polinomios son, claro está, los que satisfacen a la ecuación bicuadrática homogénea, o sea la que se obtiene al igualar a cero el resultado de aplicar dos veces el operador de Laplace. Para tal objeto se ocupa detenidamente en el estudio de estos polinomios biharmónicos homogéneos y especialmente de sus coeficientes libres.

El procedimiento ideado tiene una amplitud superior, y Velasco lo ensaya, también con éxito, a la placa rectangular empotrada. Es sabido que para el caso de estar simplemente apoyada, el método de Navier da una solución muy sencilla con el mero empleo de una serie trigonométrica doble ; pero este procedimiento fracasa en la placa empotrada, puesto que en ésta han de anularse simultáneamente, en el contorno, el corrimiento y su primera derivada ; anulación simultánea que es imposible con las funciones de seno y coseno.

Por tal motivo, recurre con certera intuición a los polinomios biharmónicos, como complemento de una integral particular ; y, al expresar las condiciones de contorno, llega a un sistema de ecuaciones lineales que resuelve para diversos casos particulares sencillos.

Es innegable que sería más perfecta una solución del problema en la que se llegase a una determinación recurrente de los coeficientes ; pero es el caso que, posteriormente a la publicación de tal trabajo, ha tenido mucha difusión la obra de Timoshenko «Teoría de placas planas y curvas», y este autor, siempre tan documentado, sigue un método que conduce también a un sistema de ecuaciones lineales ; es decir, no reporta ninguna ventaja formal respecto al del recipiendario.

Otro problema elástico importante en que se ha ocupado Velasco de Pando es el de los casos de simetría axial cilíndrica (grandes depósitos, envolventes cilíndricas, zunchados, etc.). También aquí la idea fundamental de nuestro colega es matemáticamente sencilla: buscar la representación de las funciones del problema, por desarrollo según las potencias del incremento del radio. Así se estudian los casos expresados, resolviendo las dificultades analíticas que se le presentan hasta llegar a ejemplos numéricos. Y, en una segunda parte de su trabajo, hace una ingeniosa aplicación de las funciones de Bessel al mismo problema y lo orienta para los casos con simetría esférica referente a cúpulas gruesas.

Señores Académicos:

Muy sugestiva habría de ser la enumeración de las publicaciones del interesado, porque su valor intrínseco suministraría, con su exégesis, el panegírico más objetivo de su autor. Pero la extensión que esta labor requiere lo impide en absoluto. Renuncio, pues, a una crítica de la obra global de Velasco; mas quiero subrayar algunas de sus facetas, como son las que se refieren a su estudio sobre la torsión de las barras de hormigón armado, y a su método para el cálculo de velocidades críticas en los sistemas giratorios, con momento de inercia y sección variables, fundado en la introducción de un parámetro análogo al que se considera en las ecuaciones integrales, que divide la ecuación en dos partes y permite resolverla mediante un desarrollo según las potencias enteras del parámetro.

Asimismo quiero hacer referencia a un libro que el autor ni siquiera ha mencionado en su discurso, sin duda, por considerarlo, en su modestia, de escasa importancia. No debo pasarlo por alto: lo reputo una tarea de propedeútica, esencial para los estudios de la profesión. Me refiero a la obra «Repertorio de funciones». Se trata de un libro que al principio hojeé, pero que, después, me he ido acostumbrando a emplear, como eficaz herramienta de trabajo, al darme cuenta de que Velasco tuvo la idea original, al escribirlo, de formar un a modo de catálogo en que se encuentran recopiladas las propiedades de las funciones más corrientes, con gráficos y desarrollos fundamentales que son utilísimos al investigador científico.

La inquietud de Velasco de Pando, por las cuestiones relacionadas con la Elasticidad y la Resistencia de los materiales, le ha llevado, hace algunos años, al estudio de las deformaciones de los sólidos más allá del período elástico. Hace algunos años el límite elástico era comparable a las primitivas columnas de Hércules, más allá de las cuales se encontraba el «mar tenebroso» en que pocos espíritus osaban penetrar. Pero hoy son numerosas las cuestiones técnicas que conducen a problemas que rebasan el límite elástico. En todo el mundo se ha establecido una experimentación y un detenido estudio sobre tales cuestiones. En el discurso de hoy, hemos escuchado una breve historia de los esfuerzos realizados en tan sugestivo campo y se nos ha presentado el estado actual del problema, en el cual se ha sumergido audazmente Velasco con una teoría nueva, ideada para los cuerpos susceptibles de endurecimiento, cuyo postulado fundamental me parece extraordinariamente lógico.

Tentado estoy de proseguir la enumeración de aportaciones de Velasco al acervo mundial de descubrimientos, pero me lo veda la ya excesiva longitud que alcanza esta contestación, sin haber mencionado todavía sus trabajos en la teoría de la plasticidad, especialmente los basados en las experiencias del Profesor Stüssi, del politécnico de Zürich, ni sus intervenciones en el reciente Congreso convocado en Madrid por la Unión Internacional de Mecánica Teórica y Aplicada, durante el pasado mes de septiembre, en cuyos coloquios lució una vez más el raro talento de amenizar las investigaciones más áridas, logrando que hasta los que se hallan insuficientemente iniciados siguieran con deleite su discurso, acuciados por una curiosidad que sabe excitar con gran destreza.

Y me doy cuenta también de que, hasta ahora, solamente han sido contempladas las actividades de Velasco de Pando en su faceta científica. Sírvame de disculpa la imposibilidad de analizar las otras (dentro de los límites discretos que debe tener esta contestación), por su carácter vario y asombrosamente múltiple. Básteme, en justificación de lo indicado, con enumerar las distintas funciones que le han sido confiadas, en el curso de su vida, unas veces como Ingeniero, y otras al margen de su carrera ; y siempre por razón de su capacidad excepcional, que ha determinado que pueda apreciarse en su haber una intensa labor de signo positivo ; porque Velasco de Pando, ha sido o es hasta hoy, Delegado Regio de Primera Enseñanza ; Presidente de la Cámara de Comercio, Industria y Navegación y de la Junta de Obras del Puerto de Sevilla ; Presidente de la Junta de Movilización Industrial de la Segunda Región Militar ; Jefe de la Sección de Producción y Política Industrial del Ministerio de Industria y Comercio ; Director de la Escuela de Peritos Industriales y de la de Trabajo de Valladolid ; Ingeniero Jefe de varias Delegaciones Provinciales de Industria ; Inspector General, Presidente de Sección del Consejo Superior de Industria ; Consejero Técnico de las Universidades Laborales ; Vocal de la Junta Central de Formación Profesional, así como miembro de la Real Academia Sevillana de Buenas Letras, de la de Ciencias y Artes de Cádiz, del Instituto de Coimbra y de la Sociedad Geográfica de Lima; Presidente del Congreso Internacional de Ciudades (1929); Vocal del Consejo Superior Bancario, etc.

* * *

Cuando se vuelve la vista a la trayectoria seguida por Velasco de Pando en más de cuarenta años, y no se ignoran los esfuerzos que requieren los progresos en toda especulación humana; cuando se contempla el conjunto de su fecunda y persistente labor, así como los valiosos frutos obtenidos, se comprende que culmine su vida científica con la ratificación y reconocimiento oficial de sus méritos que entraña el hecho de haber sido llamado al seno de la Real Academia de Ciencias.

Con estas palabras pongo punto final al cumplimiento del honroso mandato recibido, y al felicitar al recipiendario, hago extensiva la felicitación a la Corporación por la brillante adquisición que en este momento efectúa.

HE DICHO.