DISCURSOS

LEÍDOS ANTE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

EN LA RECEPCIÓN PÚBLICA

DEL

EXCMO. SR. D. ALBERTO BOSCH Y FUSTEGUERAS

el día 23 de Marzo de 1890

MADRID.—1890

IMPRENTA DE DON LUIS AGUADO

calle de Pontejos, núm. 8

DISCURSO

DEL

EXCMO. SR. D. ALBERTO BOSCH

TEMA:

Aplicaciones de las matemáticas á las ciencias morales y políticas

Señores Académicos:

I

> Los muertos rigen y gobiernan á los vivos.—AUGUSTO COMTE.

Justo y piadoso es honrar á los muertos. Sus ideas constituyen la civilización que admiramos. Ellos rompieron los límites que la naturaleza nos impuso. Ellos ensancharon los horizontes del individuo y de la especie. Ellos arrojaron á la historia los descubrimientos que sirven para satisfacer las necesidades más apremiantes, así como para dotarnos de lo que el vulgo denomina superfluo, palabra esencialmente contradictoria, puesto que, en el estado actual de la cultura, lo que se llama superfluo es lo que hace soportable la vida en el seno de las sociedades. Enaltezcamos, pues, á los muertos, sobre todo si fueron de los que lucharon para la conquista de la verdad en la ciencia, de los que realizaron actos que son ejemplo y estímulo de las generaciones sucesivas. ¡Cubramos de coronas el sepulcro de los que tal hicieron!

Entre esos hombres podemos contar al Illmo. Sr. Don Francisco Prieto y Caules, Ingeniero Jefe de Caminos, Profesor de varias asignaturas en la Escuela especial, Director de las obras de reconstrucción del pantano de Lorca y de la ampliación y mejora del puerto de Málaga, autor de diversos trabajos y producciones científicas, electo individuo de esta Academia el 11 de Diciembre de 1882.

Era el docto Académico á quien tengo el honor de reemplazar sencillo y modesto en su porte, en sus costumbres, en sus gustos, en su lenguaje. Parecía, en suma, un sabio que toma carta de naturaleza en la sociedad civil.

Aunque el Sr. Prieto y Caules cultivaba con fruto distintos ramos del arte del ingeniero, sobresalía en las construcciones hidráulicas, obras á que no se da entre nosotros la importancia que reclaman. Sin esas obras la agricultura decae. No decae cuando se ordena y explota la hidrología. Carecen los labradores de esperanzas racionales, en cambio, donde establecen el régimen de las aguas los accidentes orográficos y las inclemencias del cielo. La explotación de las aguas públicas puede considerarse como una de las cuestiones más difíciles. Exageran los que creen que la agricultura española está en la infancia. Debemos dar á cada uno lo suyo. Estamos más adelantados que nadie en obras de riego y en prácticas de agricultura de regadío. Llevaron los colonos y los propietarios españoles sus extensos conocimientos en la materia de que me ocupo á las provincias de Barcelona, Valencia, Alicante y Murcia sobre todo. Admiran verdaderamente los riegos en las hermosas vegas del Llobregat, del Mijares, del Palencia, del Júcar y del Segura. Hasta los extranjeros reconocen nuestro adelanto en estas cuestiones. Lo ha reconocido el Príncipe de Bismark, que une á las tareas de Gran Canciller las de Ministro de Comercio del Imperio de Alemania. Ese diplomático ilustre desea introducir las prácticas de los riegos españoles en las nacientes colonias africanas.

Falta extender ahora los procedimientos ensayados en pequeñas regiones y esparcirlos por las cuencas. ¿De qué manera? Despertando el espíritu de asociación: así como se allegan enormes capitales para construir ferrocarriles, alléguense para canalizar los ríos y para hacer accesible el crédito á la agricultura. Al efecto, prestarán grandes servicios las sociedades por acciones, libres desde el año 1868 de las trabas que las oprimían. Y donde no alcance el espíritu de asociación alcanzará el Estado, si se acude á ofrecer garantías á los intereses cuando el cánon impuesto á los regantes y los ingresos directos que reciba la empresa no compensen los gastos anuales y el reembolso del tanto por ciento del interés y de la amortización del capital invertido.

Dominó el Académico que la patria llora las combinaciones financieras que se han hecho en este siglo para levantar las maravillas del crédito. Supo enlazar esas combinaciones con sus profundos estudios de hidráulica, y obtuvo así resultados imprevistos. Por eso, principalmente por eso, no debemos echar en olvido las obras importantísimas del Sr. Prieto y Caules. Es triste pensar que hombre tan útil para sus conciudadanos ha muerto en edad temprana. No desertó el Sr. Prieto y Caules ni un sólo instante de la ciencia. A la ciencia pertenecen todos sus trabajos; á ella su último día y su último pensamiento.

El Sr. Prieto y Caules no llegó á tomar posesión del cargo de Académico de número. Se lo impidieron las tareas de su oficio. Por eso reemplazo ahora, más todavía que al Señor Prieto y Caules, al Excmo. Sr. D. Antonio Aguilar y Vela, Director del Observatorio de Madrid y Secretario perpetuo de la Real Academia de Ciencias exactas, físicas y naturales. Los fines del hombre son múltiples, y cada uno de estos fines requiere aptitudes diversas. ¡Cuán adecuada la naturaleza delicadísima del Sr. Aguilar para el estudio y la meditación de las arduas cuestiones en que el espíritu se cierne sobre la verdad para desencubrirla! Entregado á la sublime contemplación de los astros, indagaba el Sr. Aguilar los secretos del cielo. Ningun ciudadano ha prestado á la sociedad más generosamente que el Sr. Aguilar y Vela el concurso de sus facultades. Su mérito le llevó á la cátedra de matemáticas elementales de la Universidad de Valladolid, á la de cálculo de la de Santiago, y á la de astronomía de la Universidad Central. Completó sus estudios astronómicos en el Observatorio de Padua, bajo la dirección del sabio profesor Santini. Fundó, en fin, el Observatorio astronómico de Madrid, donde hubo de instalar los instrumentos construídos bajo su dirección en Hamburgo, en Munich y en otras capitales de Europa. No aspiraba el señor Aguilar á un vano renombre, sino al cumplimiento de sus patrióticos deberes. En la cátedra de Madrid derramó los raudales de su verdadera sabiduría. La serenidad del carácter y la pureza del sentimiento eran las notas salientes de su espíritu, de aquel espíritu para el trabajo pródigo y para el goce austero. Vosotros le atrajísteis á la Academia en 1855 y le nombrásteis Secretario perpétuo en 1861. Cuando abandonan esta vida hombres sabios y modestos como D. Antonio Aguilar y Vela, no se oye el estruendo de los bronces ni el clamor de las muchedumbres; pero visten de luto los santuarios de la ciencia, las Universidades, los Observatorios, las Academias, y no cabe otro consuelo que pensar en las grandes ideas acerca de la eternidad del espíritu.

Tras de estos recuerdos dolorosos, permitidme que siga la costumbre que impone el desarrollo de un tema científico en circunstancias como la presente. Sabéis, señores Académicos, el principio en que las matemáticas descansan: toda cantidad, por el hecho de ser variable, está sometida siempre á una ley de misteriosa evolución, que traduce ó expresa el cambio de sus incrementos. De este principio brotan el álgebra y la geometría, y de él debieron deducirse algunas de las verdades que en el órden de la libertad crean la importantísima rama de las ciencias morales.

Muchos hombres ilustres consideran casi utópico lo que ya es real en el organismo de las ciencias: que se compenetren las verdades todas. Sin descender al fondo y mirando únicamente la superficie de los hechos, se advierte la importación, si vale esta palabra, del tecnicismo de unas en otras ciencias. Pues qué, ¿no denominan algunos positivistas modernos, física ó fisiología del Estado y hasta historia natural de las sociedades á lo que su célebre maestro designó con el nombre de sociología?

¿Podríamos por las matemáticas destruir la confusión que reina entre las ciencias morales? ¿Podríamos fijar la nomenclatura de las ciencias que tratan de la vida derramada por la haz de la tierra? ¿Podríamos llegar á que se desenvolvieran las ciencias políticas con arreglo á métodos seguros, como las exactas? La contestación afirmativa es una esperanza: la negativa un peligro. Cuestiones son estas que se plantearon hace muchos años: no se han resuelto, sin duda, porque hay que buscar su resolución, no sólo en los eternos principios de la filosofía y de las matemáticas, sino en la realidad y la historia. Dediquémonos á esas cuestiones, abordémoslas con empeño, y no nos dejemos seducir de los que miran en la política pueriles y despreciables bagatelas.

Hace tiempo constituyen esos estudios mis constantes preocupaciones. Estaba resuelto á publicar un libro para exponer algunas ideas sobre la materia. Los que á las Matemáticas se dedican, deben más que nadie manifestar lo que piensan sobre el organismo y el desarrollo futuro de la ciencia económica, que constituyen una parte de las ciencias morales. No sabía cómo ni cuándo realizar este propósito. Lo viene á decir un inesperado acontecimiento: mi elección para la Real Academia de Ciencias exactas, físicas y naturales.

Será, por lo tanto, el tema de mi discurso LAS APLICACIONES DE LAS MATEMÁTICAS Á LAS CIENCIAS MORALES Y POLÍTICAS.

II

> Nada está en el espíritu aislado: no hay facultades diversas; sino una red de operaciones que se auxilian mútuamente.—E. VARONA.

Natural es acudir á la lógica si pretendemos aclarar las dudas de la conciencia. La lógica, como dice un escritor eminente, es la matemática de la cualidad. En sus leyes nos aleccionamos, de las formas que vacía en sus moldes nos servimos, á ellas somos deudores en parte de la disciplina de los conocimientos.

Merced á la debilidad é ignorancia de los hombres ha venido reinando en algunas materias el escepticismo y éramos esclavos de preocupaciones increibles. Alzóse la lógica contra esos fantasmas: investigó la naturaleza de la verdad y del error por medio del análisis reflexivo. Se supo entonces que, así como la verdad es una hipótesis demostrada, el error es una hipótesis desmentida, y, restaurado el procedimiento inductivo, se llegó á conocer la esencia y á penetrar en el corazón de los hechos.

No nacen las ideas con nosotros, sino de nosotros y en virtud del progreso espontáneo de la razón en la vida. Ayudemos ese progreso espontáneo por medio del estudio. Frente á frente de la naturaleza leamos, que eso es observar, é interroguemos, que eso es experimentar, y en seguida enlácense las observaciones con las experiencias, porque la unidad constituye el vehículo indispensable del saber, ya que la conciencia sólo percibe las totalidades.

El conocimiento de un objeto se forma por medio de su reconstitución sucesiva, una vez destruido artificialmente por el análisis. No abandonemos tampoco las grandes ideas abstractas, elaboradas al investigar la constitución de la sociedad, al discutir la política, porque el pensamiento desempeña funciones lógicas, de las que surgen principios al contacto de la experiencia.

Mr. de Pressense, en su libro *Les Origines*, proclama la teoría de que *pensar es unificar*. Sí, el conocimiento no se organiza científica ó sistemáticamente hasta que la inteligencia ha conquistado por medio de síntesis supremas la unidad del objeto. De aquí la exactitud de las matemáticas. Por eso esperan aún el principio ordenador que las ha de sintetizar las ciencias del trabajo, de la riqueza, de la producción, del cambio, y del gobierno de las sociedades humanas.

Los políticos, como los sofistas antiguos, cuestionan *os tentationis aut questus causa*. Domínales el escepticismo y les alienta la retórica. Para ellos parece que no existe la verdad en el orden político; no advierten que la evidencia de las verdades matemáticas es distinta, pero no superior á la evidencia de las verdades morales. Soy el primero en reconocer y declarar que tengo por diverso, por esencialmente diverso, el carácter de la observación en la naturaleza y en la historia. Rige la necesidad los hechos naturales y la libertad los morales. ¿Cómo han de alcanzar el mismo valor las inducciones en unas y otras ciencias? ¿Quién inducirá seguro de sus juicios en la política y en la historia, sin datos para ello, puesto que no es posible penetrar en los móviles ocultos y en las intenciones secretas que determinan la voluntad de los hombres y de los pueblos?

Recordemos, antes de pasar adelante, que todo conocimiento es empírico-ideal. Yerran los que creen que las verdades matemáticas resultan de la abstracción y de la generalización del espíritu, como pretenden algunos positivistas. No extrañaréis que los que cultivamos las matemáticas entremos en el campo de las ciencias morales, y, sobre todo, en el de la economía política, cuando sepais que economistas filósofos, como Stuard Mill, han penetrado en el recinto de las matemáticas para advertir á los que se dedican á las ciencias puras que tales conocimientos no tienen el carácter de inductivos. Fúndase Stuard Mill en que en cada teorema todo es conocido, y en que se procede á su formación por paridad de razonamientos. Aun así les sucede á las verdades de las matemáticas lo que á las demás verdades conocidas por el hombre, que participan del doble carácter ideal y empírico. La geometría superior, la más elevada y abstrusa, por ejemplo, no es el producto de una generalización vacía, ni aun siquiera de una experiencia ideal, como pudieran inclinarse á sostener los que advierten la continuidad homogenea del espacio. Por el contrario, los hechos individuales percibidos son la ocasión ó la condición de la idea general que se concibe luego racionalmente; pero no son el principio que concibe: lo sugieren, lo estimulan, no lo contienen ni lo constituyen.

Jouffroy esparció una luz vivísima sobre estas materias. Grande fué la exposición de su doctrina. Empezó echando á los piés de la metafísica los antiguos errores y proclamó la unidad de la ciencia y dilató sus fronteras hasta los últimos confines de lo infinito. Desbrozaron sus estudios el camino á la moderna teoría de la ciencia y hubieron de ser los primeros en luchar con preocupaciones que llevaban una sanción de siglos. Esa teoría de la ciencia produjo en breve extraordinarios beneficios. Después de aquella enciclopedia, que hizo estremecer sobre sus cimientos sistemas é hipótesis que se creyeron por largo tiempo incontrovertibles, levantó la teoría de la ciencia la bandera de la unidad del conocimiento. El mismo Hegel confundió á menudo esta unidad, esa profunda síntesis, con una simetría artificial, con una especie de juego de imaginación, análogo al de sus famosas *triadas*. Y no extrañará de seguro nadie que muchos pensadores y publicistas hayan incurrido en una equivocación semejante á la de Hegel, equivocación extraña, en que divirtió con ingenio su peregrino espíritu ese filósofo desde tantos puntos de vista extraordinario.

Digámoslo de una vez: el gran principio de la ciencia es la unidad del conocimiento, el principio fundamental que les falta á las ciencias morales y á que deben aspirar constantemente. No encontraréis, de seguro, principio más racional dentro del orden lógico. Por él cabe unir todos los hechos sin menoscabar la importancia de ninguno; por él cabe llegar á las leyes supremas que rigen la naturaleza, el hombre y la historia, sin destruir la inmensa variedad de los diversos fenómenos, antes bien componiéndola; por él cabe vislumbrar los lazos que unen cosas y géneros al parecer distintos en el ancho y cada vez más extenso horizonte de la conciencia. El principio de la unidad científica es el principio de nuestro siglo. El porvenir no tiene confidentes: si alguno tuviera, lo sería la unidad que palpita en el fondo de las ciencias particulares. Aceptemos, pues, ese principio y nos pondremos en la vanguardia del progreso; seamos sus propagandistas y llevemos sus últimas consecuencias hasta el más desorganizado de los conocimientos que figuran en el tortuoso laberinto de la política.

Reconocida esa unidad, ha de admitirse que no se puede constituir una sola ciencia sin el auxilio de las demás. Así entiendo, verbi-gracia, que no cabe discutir los problemas de la economía profundamente sin los métodos de las matemáticas. Es verdad que no tienen aún las ciencias particulares un lazo que anexione los elementos que les son comunes; pero lo tendrán con el tiempo.

Mas por ventura, ¿entiendo yo que las matemáticas no pueden prestar otras aplicaciones á las ciencias morales y políticas que las que se desprenden de la unidad intrínseca y abstracta de la ciencia? No: á otras aplicaciones más concretas é inmediatas me refiero. ¿Será una verdadera paradoja estudiar con el espíritu de las matemáticas las leyes de la economía política y social de las naciones? Tal vez se sorprendan algunos de que yo anuncie que precisamente en la política ejercen las matemáticas ahora mayor dominio que en otras ciencias: ese dominio lo prescribe la razón, lo proclaman los hechos, y, en todo caso, lo probará mi discurso.

III

> El hombre ha creado en primer lugar las matemáticas, ciencia de los guarismos, ciencia de las demás ciencias.—E. PELLETAN.

Las matemáticas lo miden todo: los astros y sus movimientos, las distancias interestelares y las interatómicas, el oleage del mar y las vibraciones infinitamente pequeñas del éter.

Dejo á un lado las aplicaciones de las matemáticas á la física y á la química. Esas vastas aplicaciones tienden á fundar una mecánica de la tierra sobre leyes generales como las que presiden la mecánica celeste. Nada menos que una forma nueva del análisis han creado Malus y Ampère con el objeto de explicar fenómenos hace poco desconocidos. El principio de la división de la ciencia, no menos fecundo que el de la división del trabajo, se lleva con éxito á la física matemática. Cada teoría sirve á una pléyade de ilustres geómetras: Fresnel se dedica á la doble refracción; Laplace á los estudios capilares; Savary á la electrodinámica; Duhamel á la acústica; Fourier á la teoría analítica del calórico.

La teoría matemática de una clase de fenómenos se apoya en uno ó dos principios ó hechos suministrados por la experiencia, que se consideran como axiomas. Esos axiomas conducen por medio del cálculo infinitesimal á representar el conjunto de los fenómenos por ecuaciones diferenciales: el exámen y la discusión de las ecuaciones diferenciales dan una gran parte de las leyes á que obedecen los hechos. Otras leyes resultan de integrar las ecuaciones diferenciales, si pueden integrarse, ó resultarán el día en que se integren. Mientras no se descubre algún método para integrar ciertas ecuaciones diferenciales, los infinitamente pequeños esconden curiosas leyes de grupos de fenómenos. Por este camino se creó la preciosa teoría de la atracción de los esferoides. Los progresos de la física matemática están subordinados á los del cálculo integral y especialmente á los de la integración de las ecuaciones con diferenciales parciales.

Tanto para resolver los problemas de la física matemática, como los de la mecánica celeste, era preciso dilucidar las propiedades de las superficies consideradas como límites de integraciones, empresa difícil que llevaron á cabo Monge, Hachette, Gauss y Jacobi. Ni bastaban sus esfuerzos. Había que generalizar el método de las cuadraturas y no eran suficientes para conseguirlo las funciones exponenciales y circulares. De aquí los descubrimientos de Abel sobre las trascendentes elípticas.

Por otra parte la mecánica no tuvo al principio el carácter racional con que ahora la conocemos. Se inventó para resolver las cuestiones de la mecánica celeste que preocupaban á los astrónomos. Y más tarde, sólo más tarde, pensaron los geómetras en aplicar los principios de la mecánica racional, sobre todo el de las velocidades virtuales y el de las fuerzas vivas, á los movimientos que tienen lugar en la superficie de la tierra: pensaron en deducir la teoría de las máquinas, la de los motores y de los agentes industriales. ¿Habrá quien desconozca las importantes aplicaciones de las matemáticas puras á la física, á la mecánica racional y á la mecánica celeste?

En cuanto á la química, bastará traer á la memoria que es una de las ciencias que más han adelantado en este siglo. Con ella cayeron los absurdos de los alquimistas y se realizaron las maravillas de la industria. ¡Qué desventurada fué, sin embargo, en su desarrollo! No ha merecido el nombre de ciencia hasta que su nomenclatura rasgó las preocupaciones antiguas, hasta que proclamó el método analítico, y procedió, como las matemáticas, de lo conocido á lo desconocido. No lo mereció, en verdad, hasta que Hassenfratz y Adet introdujeron los signos geométricos en la expresión de las combinaciones. Muchas, aunque sencillas, reglas de aritmética se necesitan para el estudio de los equivalentes y de los pesos atómicos, teorías en que han sobresalido Dumas y Gerhardt.

¿Qué de esfuerzos no han hecho las matemáticas por introducir sus principios y sus métodos en el corazón de las ciencias naturales? Estudiaron los geómetras el mundo inorgánico y descubrieron una ciencia nueva: la cristalografía. Se desarrolló esa ciencia desde los tiempos de Haüy de una manera extraordinaria, y se necesita ya para comprenderla el poderoso auxilio de la geometría superior y de la geometría descriptiva. Llevaron más lejos los geómetras sus investigaciones: las llevaron á la misteriosa región en que surge la vida de los seres, y nació entonces la morfología orgánica. Acompañada de la mesología, ó doctrina de los elementos, y de la tectología, ó tratado de la composición de las sustancias heterogéneas, ha deducido inapreciables leyes. Porque si hay rizopodos que no se distinguen de cristales regulares por los ejes que determinan la forma, aunque se distinguen por el desarrollo de las caras; si hay radiolarios cuyo esqueleto no es otra cosa que un sistema de ejes de cristalización *corporificados*, permitidme, señores, la palabra (1) ¿no se habrá de estudiar la contextura de esos curiosos seres con el auxilio poderoso del cálculo? La geometría y la mecánica presiden á todas luces unos fenómenos en que las plástidas obran y actúan para constituir las formas de los organismos, como los átomos para integrar la materia inorgánica cristalizable. Hace muchos años que algunos hombres ilustres adivinaron las fecundas aplicaciones de las matemáticas al estudio de la naturaleza. La naturaleza, dijo Geoffroy St. Hilaire (2) emplea constantemente los mismos materiales: su fecundidad consiste en la variación de las formas. ¿No era esto someter la naturaleza al imperio de la geometría?

Por entonces, botánicos insignes descubrieron que las flores de las plantas monocotiledóneas tienen un número de estambres representado por la fórmula $m \times 3$, es decir, un múltiplo del número 3. Ni siquiera las gramíneas de dos estambres y otras plantas de uno solo se exceptúan de esta regla aritmética, puesto que si se cuentan los estambres abortados se advierte que la ley subsiste. Descubrieron otros observadores que en los vegetales dicotiledóneos es $m \times 5$ la fórmula que representa el número de los estambres: de aquí la decandria, la icosandria y ciertas poliandrias de Linneo. Descubrieron, en fin, algunos que la fórmula $m \times 2$ puede aplicarse á los estambres de las flores de las labiadas y de otros vegetales cuyos tallos afectan la forma de prismas rectos de base cuadrada. Curiosas propiedades numéricas hay que notar en el exámen de algunos animalillos. Sirvan de ejemplo las investigaciones de Carus

---

(1) El haliomma hexacanthum y el actinomma drymodes representan, por ejemplo, el hexaedro regular del sistema cúbico; el acanthostaurus hastatus y el astromma Aristotelis, representan el octaedro cuadrado del sistema cradrangular, etc.

(2) *Philosophie anatomique*, París, 1818, t. 1.°, pág. 18.

acerca de las placas pentagonales de varios zoofitos entre las cinco series dobles de agujeros que sirven para el movimiento libre de sus tentáculos. El número de esas placas es siempre múltiplo de cinco: $5\times32=160$; $5\times40=200$. Tiedmann ha contado en el echinus saxatilis 440 placas, ó sea 5×88. Tiene además ese animal 2385 espinas, esto es, 5×477. Datos son estos, señores, no de ayer, sino muy antiguos, consignados en la obra que publicó Virey nada menos que en 1835 con el título de *Filosofía de la historia natural ó fenómenos de la organización de los animales y de los vegetales*. Desde entonces, ¿cuántos descubrimientos no han hecho los geómetras en el campo inmenso de la morfología orgánica?

Me apartaría demasiado de mi plan el estudio geométrico y mecánico de las espirales que se dibujan en los moluscos; de las formas semiesféricas de los nidos de las aves, y de las cilíndricas de los tallos y troncos; de la contextura hueca de las cañas; de la sección de doble T, más ó menos disimulada, de los huesos; y de otras muchas obras de la naturaleza. Basta á mi propósito recordaros que tales formas y contexturas distan de ser arbitrarias: son las que se necesitan, ora para lograr volúmenes ó capacidades máximas con el gasto mínimo de materia, ora para reunir y agrupar la masa con arreglo á la teoría de los momentos ó á la de los sólidos de igual resistencia: en una palabra, con arreglo á los principios matemáticos de la elasticidad.

Notable á este propósito es la discusión de la forma de los alvéolos de las abejas en sus renombrados panales. Consiguen tales alvéolos obtener un recipiente que con la menor cantidad de cera encierre la mayor cantidad de miel posible: problema de máximos y de mínimos que las abejas resuelven con exactitud matemática. Hace siglos que el vulgo, los zoólogos, con ideas más precisas, y especialmente los que explotan la apicultura ponderan las obras á que me refiero.

Las primeras observaciones matemáticas acerca de los panales fueron de Pappus, geómetra que vivió cuatro siglos antes de Jesucristo: pero Jacobo Felipe Maraldi calculó los alvéolos en 1687 por encargo del célebre Cassini. Reaumur dió cuenta de los resultados obtenidos por aquellos sabios en su célebre Historia de los insectos. El mismo Reaumur propuso al geómetra Samuel Kænig que buscara el rombo que satisface la condición del área mínima. Encontró Kænig para el ángulo obtuso del rombo 108° 26′. Macclaurín dedujo para ese ángulo un valor de 109° 28′ 16″ por sus métodos de geometría infinitesimal.

Ocurre preguntar ahora si en el mundo inorgárnico existen formas análogas á la de los alvéolos de los panales. Con este motivo recuerda Cabart que el oxídulo de cobre cristaliza en dodecaedros romboidales que tienen ocho ángulos triedros formados por tres diedros de 120° cada uno. Añade que se hallan en el mismo caso los cristales del granate y de la pirita de hierro. Además, el agua, según las experiencias de Clarke, cristaliza en el sistema romboédrico y ofrece dos triedros formados de tres diedros de 120° cada uno. Añádase que según los cálculos de Bravais sobre los halos y los parhelios es probable que la nieve cristalice en la misma forma.

La geometría, no lo negará de seguro nadie, ha llevado sus investigaciones á ese órden ameno de entretenidos estudios. Ozanam, en sus Matemáticas recreativas, demostró por métodos sencillos que la forma de los alvéolos de los panales resuelve el problema de máximos y de mínimos que anuncié hace poco, y en la página 160 del tomo II de los *Nouvelles annales de mathématiques*, de Terquem y Gerono, se insertó un artículo que no deja lugar á dudas sobre esta materia, debido al capitán de artillería M. Jacob. En ese artículo se calculan las condiciones del área mínima alveolar, que se reducen á que la diferencia entre las tres aristas más largas y las tres más cortas sea la cuarta parte de la diagonal del cuadrado construído sobre el lado del exágono que resulta de la sección recta del alvéolo, y á que el ángulo triedro con que están apuntados los prismas alveolares mida la cuarta parte del espacio esférico alrededor de un punto.

¿Quién ignora que se ha pretendido lograr y se ha logrado introducir las matemáticas en el estudio de la fisiología y de la patología humanas? No se entiende ni una sola página de la *Optica fisiológica* de Helmholtz sin el conocimiento del cálculo infinitesimal y de la geometría analítica.

Muchos ejemplos pueden citarse de esta índole, muchos de aplicaciones de las matemáticas á las ciencias de la naturaleza.

No faltan motivos para poner de relieve las aplicaciones de las matemáticas á las demás ciencias. Los proporciona el estudio de la evolución de la cultura humana. El cálculo ha nacido en todos los pueblos: nace y crece en el seno de la historia. No sólo entre los sabios, sino entre el vulgo gana terreno: no por bruscos saltos, sino por influencias recíprocas con las demás obras de la civilización, se abre camino.

Estos lazos entre las cifras y las manifestaciones de la existencia dicen cuán importante es el hilo de las matemáticas para llegar al descubrimiento de las verdades históricas. ¿Quién olvidará, ni mucho menos negará el poderoso influjo de la escritura en la lengua, de la lengua en la escritura, y de una y otra en los signos numéricos y en las palabras numerales? ¡Cuánta luz no han arrojado los geroglíficos de cifras sobre la historia del Egipto! Aun prescindiendo de la forma de los guarismos, ¿no cabe conocer épocas, razas y sucesos de la historia de las naciones por el exámen de la numeración hablada y de la numeración escrita? Los métodos de justaposición; de aumento ó disminución del valor de las cifras por medio de puntos colocados encima ó debajo de cada guarismo, de multiplicación del valor de las cifras por coeficientes; de aumento y disminución por divisiones en rangos de números en progresión geométrica, definen otros tantos estados de la cultura de los pueblos aquende y allende los mares. La discusión de la cifra *gobar* ¿no ha revelado capítulos enteros de historia de los indios y de los árabes? Silvestre de Sacy debe á esas investigaciones gran parte de su crédito como filólogo. En el poema *Mahabharata*, por ejemplo, se descubren las diversas civilizaciones que cruzaron sus ideas en el pueblo indio: se descubren, porque al lado de la aritmética decimal de posición se advierte un sistema sedecimal sin posición. Ni cabe duda de que algunos pueblos indios contaban por grupos de 16 unidades, como varios pueblos americanos y kimres contaban por grupos de 20. Tales coincidencias dan origen á profundas meditaciones acerca de la etnografía y de la historia.

Pero yo, señores, abandono este punto de vista. Acabo de consagrar algunas palabras á la historia, porque esa ciencia, ó ese arte, es en la cadena del saber el eslabón que une las ciencias naturales á las ciencias políticas. Esas palabras os afirmarán el convencimiento de que las matemáticas son, más todavía que una ciencia, una revelación permanente, un reflejo de la inteligencia universal y absoluta, la esfinge que guarda los fecundos secretos del número, del espacio y del tiempo, de lo continuo y de lo discontínuo, de lo real y de lo imaginario, de lo finito y de lo infinito.

Dejemos la naturaleza y la historia y discutamos las aplicaciones de las matemáticas á las ciencias morales y políticas. Poinsot ha dicho "las fórmulas no dan más de lo que se les lleva", verdad profunda, pero que dista de negar las inmensas aplicaciones del análisis algebráico. Las fórmulas no dan más de lo que se les lleva: lo metamorfosean, lo aclaran, lo sintetizan. Sería una locura pretender adivinar los hechos que brotan de la libertad del hombre, reducidos á la clase de fortuitos, y someterlos á la teoría del cálculo de probabilidades. Muchos genios ilustres abordan, sin embargo, investigaciones quiméricas. Emprendieron ese camino, con más audacia que fortuna, Condorcet, Poisson y Laplace. El célebre Arago se atrevió á sostener en la Cámara francesa que los números de Laplace acerca de los veredictos de los jueces eran tan ciertos como la paralage del Sol. ¡Extrañas tentativas las de tales filósofos! ¡Con cuánto motivo, exclama Stuard Mill, que esas disquisiciones extravagantes son el escándalo de las matemáticas!

Pero que los números y sus leyes pueden servir para resolver problemas difíciles de las ciencias morales, lo revelan testimonios autorizados. Escribe un gran pensador, que lo que se llama en la vida espíritu de los negocios y hasta lo que se llama espíritu práctico, no son sino un álgebra de fórmulas breves y de transformaciones rápidas. Un ingenioso novelista extranjero presenta y define una de sus creaciones con esta frase "estudió el alma por la fisiología y el mundo por el álgebra." Le Siecle demuestra, por medio del análisis, que el crédito, que sintetiza los demás fenómenos de la economía, puede considerarse como las matemáticas del cambio, del comercio y de la industria. ¿Qué es esa álgebra, le preguntaba Voltaire á Ravirol, qué es esa álgebra en que se camina siempre con una venda en los ojos? Sucede, contestaba Ravirol, con el álgebra, lo que con el delicado encaje: moviendo las hebras en una confusión de palitos, se obtiene, sin saber cómo, un precioso dibujo.

Tomaron por bandera sabios ilustres las matemáticas, viendo el mal sesgo que al estudio de la hacienda, del seguro y de la estadística se daba por algunos financieros empíricos, y en pocos años formaron una ciencia nueva que todavía está sin adecuado nombre. A pesar de los buenos deseos de todos, no hubiera sido esa ciencia posible sin las meditaciones de Moivre, Simpson, Baily, Morgan, Sprague, Gomprtz, Makcham y Woolhouse. Empeñáronse estos hombres en asentar sobre base sólida la hacienda, el seguro y la estadística, é hicieron un papel brillante. Se buscó y se encontró esa base en las matemáticas. Sobre ella se alzaron reformas administrativas, económicas y hasta políticas y sociales.

Jacob Rodríguez Pereire, célebre filántropo que hizo notabilísimos progresos en el arte de instruir á los sordomudos, inventó la curiosa teoría de los empréstitos reembolsables por anualidades con lotes y primas. A este grupo de investigaciones pertenecen las tablas de mortalidad que se usan para el cálculo de las rentas vitalicias, en que sobresalieron Duvillard y Deparcieux. Olinde Rodríguez, matemático discípulo de Saint-Simon, se ocupó con mucho talento de las operaciones aritméticas, rentísticas, de los seguros sobre la vida y de las cajas de ahorros: él hizo, antes que nadie, las tablas de amortización de los empréstitos de las Compañías de ferrocarriles. Casi al mismo tiempo Myrtil Maas estudió las primeras tarifas del premio vitalicio que se aplicaron á la Compañía de los seguros generales. Y desde 1835 creció en Francia la afición á estas aplicaciones fecundas de las matemáticas. En el año 1835 Courcy dió á conocer el excelente tratado de seguros sobre la vida que Baily publicó en Inglaterra en 1812.

No analizaré, Señores Académicos, los trabajos de Violeine acerca de los intereses compuestos y de las anualidades y los de Charlon acerca de las operaciones vitalicias.

Merece algunas palabras, en cambio, un libro titulado *Theory of compound Interest*. Su autor, el matemático ruso Fedor Thoman, reunió cuanto se ha escrito en estas difíciles materias, descubrió no pocos métodos, y compuso unas tablas de logaritmos de veintisiete cifras decimales, útiles en las operaciones mercantiles. Luego el espíritu de invención tendió su alas, y Achard, Jay, Kertanguy y Dormoy enunciaron teoremas interesantísimos.

Paso á paso y con exactitud matemática resuelve la hacienda qne se ha llamado de los *actuarios;* las cuestiones acerca del interés y del descuento; del cambio común y del cambio medio; de las rentas de términos constantes y variables; de la renta perpetua, limitada, vitalicia, inmediata, diferida y anticipada; de los empréstitos reembolsables por medio de rentas de términos constantes; de la evaluación con arreglo á un tipo de interés cualquiera de la nuda propiedad de los títulos de un empréstito; de los empréstitos de las obligaciones; de las rentas cuyos términos varían en progresión geométrica ó aritmética; de los fondos públicos y de la determinación de *la par* con el examen de sus elementos; de los arbitrajes de fondos públicos, del oro y de la plata; y en fin, señores, de la contabilidad y sus varios sistemas.

No creen con eso y todo algunos hombres públicos que las matemáticas penetren en la esfera de las ciencias del orden político más allá de la estrecha región en que se plantean las cuestiones de la hacienda, del seguro y de la estadística. Paréceles natural que sirva el cálculo para la resolución de los problemas de la hacienda pública, de los seguros vitalicios, que se determinan con arreglo á las leyes de la probabilidad matemática, y de la estadística, que acumula y clasifica lo homogéneo, entresacándolo del caos de lo heterogéneo.

A Pascal se debe la idea de introducir las matemáticas en las ciencias morales. Algún historiador opina que ese geómetra no fué en el orden político más que un adolescente taciturno. Las páginas que siguen tratan de averiguar si la tendencia del espíritu de Pascal fué vana ó fecunda.

IV

> **Si en todas las ramas de los conocimientos humanos se tuviera al cálculo la repugnancia que se le ha tenido en la economía política, ignoraríamos las leyes del firmamento; y la navegación, que gracias á los astrónomos reune todas las partes del mundo, se reduciria á un simple cabotage.—JUAN ENRIQUE DE THÜNEM.**

La aplicación de las fórmulas y de los símbolos del análisis matemático, así como de las figuras geométricas á la economía política, merece ya el aplauso de ilustres pensadores. El cálculo de probabilidades tuvo su origen en el juego y su mayor desarrollo en los acontecimientos contingentes de la vida humana. Del cálculo de probabilidades se pasó, por grados insensibles, al cálculo de la economía política. Muchos economistas consideran ilusorio lo que realizan sin sospecharlo en sus propios escritos. No sorprende de seguro á nadie que Smith, Say, Bastiat y otros que revisten sus ideas de una literatura brillante rechacen el empleo de los signos matemáticos; pero ¿se hallan en el mismo caso los que, como Ricardo, abordan cuestiones abstractas ó buscan una precisión á que no aspiran sus colegas? Al fin y al cabo en la economía política se trata de investigar relaciones entre cantidades. Y para eso, ¿qué ciencia dispone de más recursos que el álgebra? El álgebra traduce los hechos de una manera concisa, los discute y extiende. Las investigaciones de Ricardo son cálculos disfrazados de palabras, fórmulas, en el lenguaje vulgar, cuentas de aritmética de una prolijidad insoportable. Haced uso del álgebra en los razonamientos, y de una simple ojeada, en una sola ecuación, advertiréis lo que ocupa páginas y más páginas en los libros de aquel célebre publicista. ¡Pues qué! ¿No sustituirían ventajosamente algunas ecuaciones las reglas de falsa posición de la aritmética bancaria?

Si aplicáramos el álgebra elemental á la economía política, mucho habríamos adelantado. Tendríamos, en vez de hechos, fórmulas generales; desaparecerían contradicciones aparentes; no estaríamos expuestos á la falacia de los sistemas. Si además del análisis introdujéramos el cálculo de probabilidades en el estudio de la ciencia económica, ¡cuán seguras parecerían nuestras investigaciones! Ese cálculo compara los números que suministra la experiencia y acumula la estadística: deduce los límites de los fenómenos: á veces acerca esos límites tanto que adivina los acontecimientos. No pocos filósofos reconocen la importancia de los servicios que las matemáticas prestan, y estarían de seguro dispuestos á sostenerla vigorosamente si alguien los pusiera en duda. Reconocen que Newton descubrió el principio de la gravitación universal, porque Descartes, Fermat y Leibnitz echaron antes los cimientos del análisis; que la física matemática no llegó á constituirse como ciencia hasta que tomó vuelo el cálculo y sobre todo la integración de las ecuaciones con diferenciales parciales, y que el arte del ingeniero distaría de alcanzar la perfección que ostenta, si Navier, Poisson, Cauchy, Poncelet, Morin y Combes no hubieran creado la teoría de la elasticidad de los sólidos.

¡Y qué! ¿No es por ventura la economía política una ciencia matemática? Para mí, la economía política no se ocupa de gobernar las sociedades humanas, como supone Quesnay; ni de conseguir para el pueblo una subsistencia abundante y para el Estado una contribución suficiente, como dice Adam Smith; ni de obtener los medios por donde las riquezas se forman, se reparten y se consumen, como supone Juan Bautista Say en sus populares escritos. La economía política es la ciencia que tiene por objeto el estudio de los precios de las mercancías en la hipótesis de la libre concurrencia absoluta. Ese estudio matemático, esencialmente matemático, debe llevarse á las leyes que presiden el equilibrio y el movimiento, la permanencia y la variación de los precios. De aquí dos ramas distintas de la economía: la *estática* y la *dinámica* de los precios.

El hecho del cambio, de que parte la economía política, es un hecho matemático. Si un hectolitro de trigo se vende en la plaza á 24 pesetas, y convenimos en llamar v_t ó *valor* del trigo esa unidad, ó en otros términos el hectolitro que es *capaz* de cambiarse por 24 pesetas, resultará

$$v_t = 24 \text{ pesetas.}$$

Luego el valor es la capacidad de cambio de la unidad de mercancía.

Esta definición y el análisis de la utilidad en sus dos elementos, extensivo é intensivo, dan origen á las investigaciones modernas acerca de la economía matemática.

Como ejemplo curioso de tales investigaciones, y ya que no sean posibles extensos desarrollos y cálculos prolijos en un discurso, diré algo de la famosa ley de la oferta y la demanda, ley que escojo porque sintetiza la teoría del cambio. El precio de las cosas, se ha repetido centenares de veces, está en razón inversa de la oferta y en razón directa de la demanda. ¿Qué significa ese principio? ¿Quieren dar á entender los que lo enuncian que, cuando se duplica la cantidad de una mercancía que se pone á la venta, baja la mitad el precio? Sería más sencillo entonces limitarse á enunciar que el precio está en razón inversa de la cantidad ofrecida por el mercado. Esto se entiende fácilmente; pero es un error, porque, en general, que se hayan vendido 100 unidades de una mercancía á 20 pesetas no es una razón para que en el mismo tiempo y en las mismas circunstancias se vendan 200 unidades á 10 pesetas. Además, ¿qué se entiende por demanda? No es la cantidad que se consume por el pedido de los compradores: si lo fuera, resultaría entonces de la célebre ley el absurdo de que se gasta tanto más de un género determinado cuanto más caro se vende. Si por demanda se entiende un deseo vago de poseer la cosa, prescindiendo del precio que cada comprador se impone, puede considerarse como infinita siempre la demanda. Suponed, por el contrario, que se tiene en cuenta el precio á que cada comprador compra y el precio á que cada vendedor vende: ¿qué significa entonces la decantada ley de la oferta y la demanda? Una estéril combinación de frases.

Discutamos la idea y precisémosla. Una mercancía es en general tanto más solicitada cuanto más barata se venda: en general aumenta la demanda cuando el precio disminuye. Digo *en general,* porque hay objetos que no deben su valor sino á su elevado precio. Si los adelantos de la industria, v. gr., ó algún descubrimiento inesperado consiguieran la cristalización del carbono con tal baratura que se diese por una peseta un brillante que vale ahora cinco mil pesetas, dejarían de ser los brillantes piedras preciosas y hasta un artículo de comercio. En este caso, excepcional sin duda, con la baja extraordinaria del precio, no aumentaría, sino que antes bien disminuiría la demanda. Me apresuro á reconocer que este género de objetos no es frecuente en las sociedades humanas.

La demanda de una mercancía aumenta si el precio disminuye. No avancemos por de pronto más: no digamos que la demanda está en razón inversa del precio, porque son muchos los casos en que la demanda crece ó decrece en una proporción más rápida, sobre todo cuando se trata de productos manufacturados. Otras veces, por el contrario, la variación de la demanda parece menos rápida que si cambiara en razón inversa del precio. Así ocurre ¡cosa singular! con los productos indispensables y con los menos necesarios, con los términos más apartados en la escala de nuestros deseos. Imagínese que duplicara el precio del pan: no se reduciría por eso á la mitad su consumo, porque los consumidores preferirían economizar en cosas menos útiles. Supóngase que se reduce á la mitad del actual el precio de los telescopios: ¿duplicaría por esta causa la demanda de tales instrumentos? Nadie lo sostendrá de seguro.

¿A qué se reduce, pues, la manoseada ley de la oferta y la demanda?

Para comprenderlo acudamos á la teoría de las funciones. Sea D la demanda anual de una mercancía. Se trata de conocer la ley de la demanda, ó sea la forma de la función $D=f(p)$, en la que p representa el precio. La forma de esa función depende de la utilidad de las cosas, de la naturaleza de los servicios que prestan, de las necesidades que satisfacen, de los goces que procuran, de las costumbres de cada pueblo, de la riqueza media, y de la organización social en su más amplio sentido.

Influyen demasiadas causas morales sobre la oferta y la demanda para que puedan enunciarse en una ley y traducirse en una fórmula. La observación, sólo la observación, suministra una tabla de valores de p y D correspondientes. Esos datos permiten construir la curva que representa la función de que se trata, ó calcular una fórmula empírica. ¿Cómo? Acudiendo á los métodos de interpolación, entre los que me parece uno de los más adecuados al objeto el que dió á conocer Cauchy á la Academia de Ciencias en 1835(1).

Aunque no se determinara $D=f(p)$, sería útil introducir

(1) *Journal de Mathématiques:* Joseph Liouville, tome deuxième, année 1837, pag. 193.

esa función de una manera simbólica en los razonamientos acerca de las variaciones de la oferta y de la demanda, porque uno de los importantes servicios del análisis consiste en obtener consecuencias imprevistas de la discusión de cantidades cuyos valores numéricos y hasta cuyas formas algebráicas se desconocen. Muchas son, en efecto, las funciones matemáticas, de forma indeterminada y tal vez indeterminable, que ponen de relieve propiedades ó caracteres generales. Descubrimos en algunos casos que son continuas ó discontinuas, crecientes, decrecientes ó periódicas, reales ó imaginarias entre determinados límites.

Admitamos que D sea una función continua de p, cosa probable si aumentan la población y el mercado, cosa probable en virtud de la ley del cálculo de probabilidades que se llama de los grandes números. Entonces tiene D la propiedad de toda función continua: los incrementos de la demanda se pueden considerar proporcionales á los incrementos del precio, cuando esos incrementos son infinitamente pequeños. Además se observa claramente que esos incrementos ó variaciones tienen signos contrarios, es decir, que á un aumento de precio corresponde una disminución de la demanda.

Así como la mecánica racional se apoya en el espacio, el tiempo y la velocidad, la teoría matemática del cambio se construye sobre tres nociones: la utilidad, la cantidad, y la *insuficiencia* (1). Las dos primeras, la utilidad y la cantidad son de sobra conocidas y familiares á todo el mundo para que tengamos que definirlas. No sucede lo mismo con la insuficiencia. Equivale la insuficiencia en la economía política matemática á la velocidad en la ciencia del movi-

(1) Doy el nombre de *insuficiencia,* tal vez impropio, á lo que los franceses llaman *rareté* y los alemanes *grenznutzen* (utilidad limitada) en los libros de economía política matemática.

miento. Sabemos que la velocidad es la derivada del espacio con relación al tiempo. Pues bien: la insuficiencia económica es la derivada de la utilidad con relación á la cantidad.

El aire es útil, pero carece de insuficiencia económica, porque la insuficiencia exige dos condiciones: cuando se habla de ella se trata de una cantidad útil y finita. Fijemos y definamos bien la noción de la insuficiencia. Hemos comparado la insuficiencia de la economía con la velocidad de la mecánica. Llevemos esa comparación hasta los últimos límites. Los cálculos sobre la velocidad se refieren á algo concreto, á la velocidad de un móvil. De la misma manera, los cálculos sobre la insuficiencia se refieren á una mercancía útil en cantidad limitada. Para abreviar, se denominan insuficientes las cosas útiles y finitas.

Esas cosas insuficientes son las únicas que se apropian: una vez apropiadas se establece entre ellas un lazo que consiste en que, aun prescindiendo de la utilidad directa que les pertenece, adquieren la propiedad especial de poderse cambiar con cada una de las otras. El cambio se expresa por medio de una razón matemática precisa.

Enunciemos, por lo tanto, este principio: las cosas insuficientes, una vez apropiadas, adquieren un valor de cambio. Y puesto que las matemáticas tienen por objeto la medida de las cantidades, ¿cabe negar que existe una rama de las matemáticas que no se ha elaborado hasta nuestro siglo y que se propone calcular el valor del cambio? Esa ciencia no es la economía política entera: es la economía política *pura* ó *racional*, que debe preceder á la economía política aplicada.

La economía política pura es una ciencia físico-matemática. Como todas las ciencias que se ocupan de la naturaleza, que al fin y al cabo los hombres y las sociedades forman parte de la naturaleza, la economía política pura se eleva sobre la realidad después de haberle arrancado sus tipos: abstrae de los tipos reales creaciones ideales que define, y levanta el andamiaje de sus teoremas. Vuelve presurosa á la experiencia para confirmar y aplicar sus pensamientos.

Todo es ideal en este método: ideal el mercado; ideales los precios que están entre sí en razones rigurosas dentro del mundo abstracto de la libre concurrencia en que se presentan frente á frente una demanda y una oferta ideales. Mas esas verdades á que la teoría conduce, ¿son susceptibles de aplicaciones prácticas? Tenemos, sin duda, el derecho y tal vez el deber de ocuparnos de la ciencia por la ciencia; pero no es un secreto para nadie, versado en estas materias, que la economía política pura nos lleva como por la mano á la resolución de los problemas obscuros y debatidos de la economía política aplicada y de la economía social.

Con el auxilio del cálculo, que conocéis de una manera tan profunda, se han determinado dos importantísimas leyes de la economía política racional: 1.ª la ley del establecimiento del precio de equilibrio; 2.ª la ley de variación de los precios.

La primera de estas leyes consiste en que para que haya equilibrio entre varias mercancías cuyo cambio se efectúa con moneda ó se define por medio de precios, es necesario y suficiente que á esos precios la demanda efectiva de cada mercancía sea igual á su oferta efectiva. Rota la igualdad, surge un alza del precio de las mercancías cuya demanda efectiva es superior á la oferta efectiva, y una baja del precio de aquellas cuya oferta efectiva es superior á la demanda efectiva hasta llegar al precio de equilibrio.

Completa esta ley la de la variación de los precios: tiene dos partes. Se puede enunciar la primera diciendo que si la utilidad y la cantidad de una cosa varían respecto de uno ó muchos compradores y vendedores, de modo que las insuficiencias no cambien, el precio permanecerá constante. Es la segunda que si la utilidad y la cantidad de un grupo de mercancías cambian respecto á un grupo de compradores y vendedores, de manera que los cocientes de las insuficiencias no cambien, los precios no variarán tampoco.

Tal es la fórmula científica de lo que se llama en economía ley de la oferta y la demanda, enunciado que resume la teoría del valor del cambio.

Conviene reconocerlo y declararlo: esa ley, la ley fundamental de la economía política, no se demuestra ni aun siquiera se formula correctamente hasta que se definen la oferta efectiva, la demanda efectiva, y la insuficiencia; hasta que se relacionan la oferta y la demanda efectivas con el precio, y la insuficiencia con ese precio mismo: tarea imposible sin recurrir á las notaciones y á los métodos de las matemáticas.

Si abrigais alguna duda de que las formas de las matemáticas son para la economía política no sólo posibles, sino hasta convenientes, la desvanecerá el rápido estudio que haré del numerario, del billete y del precio de la tierra.

Para zanjar las antiguas cuestiones entre monometalistas y bimetalistas no hay otro recurso que las matemáticas.

El examen de la teoría matemática de la moneda demuestra claramente que si no se admite más que una mercancía (*A*) como numerario, el problema es determinado, porque para tres incógnitas, que son la cantidad de (*A*), que permanece bajo la forma de mercancía, la que se reduce á moneda y el precio de (*A*), ya se considere como mercancía, ya como moneda, hay tres ecuaciones que traducen estas verdades indiscutibles:

1.ª La suma de las cantidades de (*A*), que existen bajo la forma de mercancía y de moneda, es igual á la cantidad total de *A*.

2.ª Existe una fórmula que relaciona el precio y la cantidad de la mercancía (*A*).

3.ª También es posible hallar otra fórmula que ligue el precio y la cantidad de la moneda (*A*).

Precisamente porque el problema es en esta hipótesis determinado se resuelve por sí mismo á causa de la virtualidad espontánea de la concurrencia libre. El legislador no tiene que hacer en este caso, el del prototipo único, sino escoger la mercancía moneda (*A*); dejar que se reduzca la moneda á mercancía cuando el valor de (*A*), mercancía, es superior al valor de (*A*), moneda; y llevar á cabo la transformación de la mercancía en moneda, cuando el valor de (*A*) moneda excede al valor de (*A*) mercancía.

Por el contrario, si se emplean simultáneamente dos mercancías (*A*) y (*B*) como numerario, habrá seis incógnitas y cinco ecuaciones: el problema será, por lo tanto, indeterminado. En efecto:

INCÓGNITAS.

1.ª La cantidad de mercancía (*A*).
2.ª La cantidad de moneda (*A*).
3.ª La cantidad de mercancía (*B*).
4.ª La cantidad de moneda (*B*).
5.ª El precio de (*A*) mercancía y moneda.
6.ª El precio de (*B*) mercancía y moneda.

ECUACIONES

1.ª La suma de las cantidades de (*A*) mercancía y de (*A*) moneda es igual á la cantidad total de (*A*).

2.ª La suma de las cantidades de (*B*) mercancía y de (*B*) moneda es igual á la cantidad total de (*B*).

3.ª Fórmula según la que el precio de (*A*) mercancía resulta de la cantidad de (*A*) mercancía.

4.ª Relación según la que el precio de (*B*) mercancía resulta de la cantidad de (*B*) mercancía.

5.ª Función según la que los precios de (*A*) moneda y de (*B*) moneda resultan de las cantidades (*A*) moneda y de (*B*) moneda.

Se advierte del mismo modo que si se emplean tres mercancías como moneda hay siete ecuaciones para determinar nueve incógnitas; si cuatro mercancías nueve ecuaciones para determinar doce, y así sucesivamente.

Volviendo á la hipótesis de dos mercancías amonedadas, es decir, al prototipo doble, es ya evidente que el legislador puede intervenir en las operaciones monetarias aprovechando la indeterminación expuesta, lo que equivale á combinar con las cinco ecuaciones que resultan de la naturaleza de las cosas una ecuación más, planteada ó deducida por el Estado.

Puede proponerse el Estado determinar la cantidad de moneda (*A*), la de moneda (*B*), la relación entre ambas cantidades, establecer el precio de moneda (*A*), de moneda (*B*), ó la relación entre ambos precios.

Si se marca la relación entre las cantidades, se llega al bimetalismo de relación fija de cantidades: si se marca la relación entre los precios al bimetalismo de relación fija de precios. En el primer caso el valor se constituye por sí mismo en el mercado. En el segundo la cantidad se determina al impulso espontáneo de la concurrencia libre.

Supongamos, por ejemplo, que se adopte el sistema de la relación fija de los valores: tomemos el número $15^1/_2$ para la relación á que nos referimos, es decir, para la relación del valor de la moneda de oro al valor de la moneda de plata, número adoptado por los bimetalistas. ¿Qué ocurrirá entonces entre las cantidades de oro y de plata reducidas á moneda y las entregadas á la naturaleza y al arte?

Cuando la relación del valor del oro mercancía al valor de la plata mercancía supera la cifra $15\,^1/_2$ todo el oro extraído de las minas se emplea en objetos artísticos é industriales. Hay más: entonces una parte del oro moneda se transforma en oro mercancía, mientras que al mismo tiempo, no solamente se reduce á moneda la plata de las minas, sino que parte de la plata mercancía se convierte en plata moneda. En suma: la cantidad de moneda de oro disminuye y la de moneda de plata aumenta; la cantidad de mercancía oro aumenta y la de mercancía plata disminuye.

Esa metamórfosis se opera y desenvuelve hasta que la relación del valor del oro mercancía al valor de la plata mercancía desciende á $15\,^1/_2$. Se presentan y desarrollan los fenómenos inversos á los que se acaban de describir cuando la relación del valor del oro mercancía al valor de la plata mercancía está por debajo de la cifra $15\,^1/_2$. La cantidad de moneda de oro aumenta; la de la moneda de plata disminuye. En cambio disminuye la cantidad de mercancía de oro y aumenta la de mercancía de plata. Tales fenómenos económicos ocurren hasta que la relación del valor del oro mercancía al valor de la plata mercancía sube á $15\,^1/_2$.

Resulta de este análisis que los monometalistas se equivocan cuando afirman de una manera absoluta que se empeñan en un imposible los que prometen la invariabilidad de la relación $15\,^1/_2$. Esta invariabilidad es posible entre ciertos límites, sin embarazar la acción de la libre concurrencia. Pero la misma teoría matemática de que nos ocupamos pone de manifiesto que los bimetalistas se equivocan también cuando manifiestan que la relación $15\,^1/_2$, fija como relación legal del valor del oro moneda al valor de la plata moneda establece de una vez para siempre la relación natural entre el valor del oro mercancía y el de la plata mercancía. La relación $15\,^1/_2$ señalada por la ley al metal moneda se impone al metal mercancía por el mecanismo de la libre concurrencia; mas no inmediata ni definitivamente. Si la relación del valor del oro mercancía al valor de la plata mercancía es superior á $15\,^1/_2$, no desciende más que por la desmonetización del oro y mientras hay oro que desmonetizar, después de lo que alcanza á 16, 17, 18... La misma relación no se eleva más que por demosnetización de la plata cuando es inferior á $15\frac{1}{2}$ y continúa ese movimiento mientras hay plata que desmonetizar. Los bimetalistas defienden, con razón ó sin ella, que la baja actual del valor de la plata se debe á la acción de la ley y no á la de la naturaleza. No pueden sostener sin embargo seriamente que no influye la naturaleza jamás sobre las oscilaciones del valor de la plata en el mercado. La teoría matemática del numerario confirma que en el sistema bimetálico puede sobrevenir un aumento de la cantidad de plata, que produzca la desmonetización del oro y obligue á hacer los grandes pagos con sumas pesadas, ó un aumento en la cantidad de oro que lleve consigo la desmonetización de la plata y nos obligue á hacer los pequeños pagos con piezas diminutas. En otros términos: el sistema de doble tipo ó de dos metales, sobre la base de $15\frac{1}{2}$ legal, es en definitiva el sistema de tipo único, pero alternativo, en que el metal depreciado arroja de la circulación al metal apreciado.

Dos palabras acerca de la teoría matemática del billete de banco. La depreciación de los metales preciosos no es el único efecto de la emisión de los billetes de banco aunque sea el que más se discute en la economía política matemática. Consiste otro de sus efectos en la extensión del crédito. ¿En qué consiste esa extensión del crédito? No lo han explicado hasta ahora bien los economistas. Niegan muchos que los billetes de banco sirvan para obtener un suplemento cualquiera del capital fijo ó circulante, fundándose en que imprimir ó grabar viñetas en papel filigrana no es levantar edificios, ni construir máquinas ó instrumentos útiles, ni obtener primeras materias ó productos manufacturados; y sostienen que el único resultado ventajoso del billete de banco consiste en producir la transformación de una parte del metal moneda en metal mercancía. Cárlos Coquelin no se atreve á defender que los billetes de banco acrecen la cantidad de capitales, y dice sólo que multiplican su empleo y suministran crédito á los empresarios, sin pedírselo á los capitalistas. Estas no son más que palabras que carecen de sentido.

Un empresario no puede á la vez prestar sus fondos á otro empresario y continuar empleándolos. Hay que ir más lejos que Coquelin y enunciar que la emisión de los billetes de banco aleja los límites del crédito y permite á los banqueros prestar á los empresarios sin prestar á los capitalistas. Si no fuera por las emisiones de billetes de banco, los bancos y los banqueros no podrían comprar títulos de crédito y particularmente de billetes á la orden y letras de cambio á los empresarios de la agricultura, la industria y el comercio, sino con ciertas condiciones que establece la economía política matemática.

El cálculo intenta llevar sus procedimientos fecundos, no sólo á la economía política, sino á la economía social.

Hace veinte años alzó su voz un escritor socialista (León Walras—*De l'impôt dans le canton de Vaud*—) y dijo: "el trabajo constituye la propiedad individual; la tierra, la propiedad colectiva; el arrendamiento, la contribución del Estado." He aquí una manera de conciliar el individualismo y el comunismo.

La contribución territorial no perjudica la industria del país. Nada les importaría, por otra parte, á los colonos pagar á título de contribución las rentas que perciben ahora los propietarios. Fundado en estas y otras razones duélese Hermann Enrique Gossen (1) de que el suelo no pertenezca siempre á la Nación representada por el Gobierno. Desea que las tierras pasen de los que como capitalistas las explotan á la colectividad entera, no por el interés de clase alguna, sino por el interés público; lo desea, no por un vano empeño de reformar, sino porque el equilibrio económico y

---

(1) Entwicklung der Gesetze des menschlichen Verkehrs und der daraus fliessenden Regeln fur menschliches Handeln.

las matemáticas demuestran que la producción más elevada corresponde al empleo más útil. Inspira en tales conceptos Gossen un hermoso libro; protesta contra las amenazas de comunistas y socialistas; estudia el incremento del valor de la tierra; y parte de ese incremento para que el Estado disfrute el derecho de propiedad sin despojar al propietario.

Dueño el Estado del suelo, arrendaría por medio de subastas el cultivo de la tierra. Este es, en brevísimas palabras, el procedimiento de Gossen, procedimiento que ni aplaudo ni censuro.

Minuciosos razonamientos conducen á Gossen á la fórmula

$$a_n = a\,(1 + z)^n$$

en que a es la renta en un instante determinado, z el tipo del incremento anual, y a_n la renta después de un número n de años. Deduce que $z = 0{,}01$.

Tendríamos que entrar en prolijos cálculos para seguir las profundas investigaciones de Gossen, así como la crítica severa y matemática á que las ha sometido el célebre profesor de la Academia de Lausanna, León Walras. Me concretaré á recordaros que, según advierte Walras, es un hecho económico incontestable que el incremento de la renta territorial origina el desnivel de los precios de las tierras y de los capitales propiamente dichos. Pero tal incremento dista de ser constante: si lo fuera, se descontaría de una vez por los propietarios. El incremento de la renta de la propiedad territorial nace y se desarrolla en el seno de toda sociedad progresiva ó culta. A cada variación del incremento las tierras suben: alza imprevista é incalculable. Por lo incalculable no sería lícito, según Walras, que fundaran los propietarios en ella derecho alguno.

Suscitan las proposiciones de Gossen debates jurídicos acerca de la posesión y de la *gewere* alemana, posesión especialísima que no exige un *animus domini* como la de

Roma. Suscitan, además, debates acerca de problemas de cálculo que no dilucidaré ahora en obsequio á la brevedad que las circunstancias me imponen.

Estoy convencido de que los más graves problemas de la economía no se resolverán sino con el auxilio de las matemáticas. Fuí de los primeros en afiliarme al método de los que aplican el cálculo á la economía pública, observando cómo se avienen con la educación de mi espíritu las ideas que proclaman. Este método reformador es activo y fecundo: en pocos años lo han creado simultáneamente Cárlos Meuger en Viena, Stanley Jevons en Manchester, y León Walras en Lausanna, sabios profesores de economía política. Sobre el cálculo diferencial é integral levantan todos ellos las teorías de la producción, de la capitalización y del cambio. La teoría del cambio es la síntesis de las demás teorías económico-matemáticas. Parte, como hemos visto, de la hipótesis del equilibrio del mercado; establece la condición de que todo el que cambia obtenga un máximo de utilidad; y consigue su propósito estableciendo para el individuo que cambia una ecuación ó una curva que expresen ó definan la energía ó fuerza de la última necesidad satisfecha, como función decreciente de la cantidad que se consume.

Esa teoría del cambio que deduce el precio de *l'intensité du dernier besoin satisfait,* del *Final Degree of Utility,* del *Grenznutzen,* no es un sueño de filósofos ilusos. La han aceptado los más ilustres economistas de las primeras Universidades y Academias de Europa y de América. Forma parte ya, en efecto, de los programas de los cursos de economía política de Cambridge, Londres, Edimburgo, Dublin, Utrecht, Leyde, Amsterdam, Louvain, Hannover, Wurzburg, Viena, Praga, Innsbruck, Montpellier, Burdeos, Nápoles y Boston.

Muestra del movimiento que se observa en favor de las aplicaciones del cálculo á la economía política es el *Mathematische Begründung der Volkswirthschaftslehre* de *Laundhardt* y la *Mathematical Psychics* de *Wicksteed*.

Privarnos del auxilio de las matemáticas es por lo tanto incurrir en una falta de lógica y oponer dificultades insuperables á la resolución de los problemas de la economía política, pura y aplicada.

La economía política matemática descansa en la hipótesis de la libre concurrencia, como la mecánica racional en otras hipótesis no menos ideales. Algunos matemáticos llevan también el cálculo á la teoría económica del monopolio. Así lo hacen Cournot en el capítulo V de sus *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses,* y Dupuit en dos preciosas Memorias que se titulan: *De la mésure de l'utilité des travaux publics* y *De l'influence des péages sur l'utilité des voies de communication*, publicadas en los *Annales des Ponts et Chaussées* (1844-1849.)

Cada vez descubrimos en el tema que me confiásteis nuevos horizontes. Sin embargo, terminaré aquí esta parte de mi discurso para no abusar de la benevolencia de los señores Académicos. Permitidme sólo dos palabras antes de ceder el paso á otras cuestiones.

Expondré pronto algunas fórmulas sencillas. Deben considerarlas mis oyentes y mis lectores como ejemplos de la aplicación del análisis á los problemas de la vida social y civil de los pueblos. No tienen ni podían tener otro alcance en un trabajo de esta índole: lejos de profundizar ideas me contento ahora con apuntarlas.

V

> Es necesario hacer compatibles dos grandes pensamientos: la igualdad de los individuos y la jerarquía de las funciones. El que las concilie organizará la democracia.—PAUL LAFFITTE.

La cuestión social merece capítulo aparte. En sentido lato, la cuestión social encierra todas las cuestiones de la vida, que, á corta ó larga fecha, se resuelven espontáneamente por la evolución de los pueblos. En sentido estricto el problema social se ocupa de la remuneración del trabajo.

El salario debe calcularse con arreglo á leyes más equitativas y simpáticas que las que resultan del monopolio. No les haréis entender á muchos hombres, que se llaman de orden, sino aquella fácil y cómoda economía que se reduce al intento de comprar por tres pesetas lo que vale seis ó de vender por seis pesetas lo que vale tres, sin preocuparse del equilibrio de los valores, del precio de las mercancías, de la reciprocidad de los servicios, del tipo de los intereses y de la justicia de los salarios.

Con el nombre exótico de democracia ha pensado la plebe arrojar la luz del derecho sobre la economía pública: ha dicho que quería vivir no de la caridad sino de la justicia. Comprende que le es más necesario que vencer los hechos con las armas vencer las preocupaciones con las ideas. Por esta razón celebra congresos en que estudia los problemas sociales. No hay para qué oponerse ni denostar la reforma que persigue: hay que discutirla y encauzarla.

Una de las cuestiones que preocupan á los estadistas y á los jornaleros, es la del salario. Colíganse y se declaran en huelga masas de hombres, mujeres y niños, para que se les reduzcan las horas de trabajo y se les aumenten los salarios. Todo eso es muy fácil de arreglar, dicen los economistas de la escuela inglesa: obedece á la ley de la oferta y la demanda. El punto de vista del socialismo es otro: las artes útiles deben producir á lo menos lo que exigen las necesidades de los que trabajan. Aquí tenemos ya para el salario, y de consiguiente para el trabajo, un primer límite, un mínimo.

¿Pueden las matemáticas precisar el concepto de los salarios? ¿Pueden darnos su medida práctica y científica?

Discútase el problema analizando la producción del capital por medio del trabajo. Snpongamos que se constituye una sociedad de obreros divididos en dos secciones. Una sección se ocupa en crear establecimientos agrícolas é industriales. Otra sigue en el trabajo asalariado: entrega el excedente de los salarios á los obreros del primer grupo con el objeto de satisfacer sus atenciones. En esta hipótesis no se consume ni un solo átomo del capital propiamente dicho. Los nuevos capitales resultan del trabajo y nada más que del trabajo. Esta sociedad de artesanos productores empleará tal vez obreros asalariados en el establecimiento agrícola ó industrial de que dispone. ¿Cómo se determina el salario de tales obreros? Ni debe obtenerse caprichosamente ni con arreglo á las leyes de la contratación ordinaria: ha de calcularse de manera que el obrero retire de su trabajo la renta máxima.

Los que plantean el problema en esta forma lo hacen para investigar la relación entre el salario y el tipo del interés, de manera que no complique el estudio la renta de ningún capital predeterminado. No es aquí el interés personal el freno del salario como en la mayor parte de las explotaciones agrícolas é industriales. El obrero, cuando se ocupa en la producción de capital, no se propone más objeto que recibir por su trabajo la mayor renta posible.

Figurémonos que la explotación del establecimiento de que se trata, exige el trabajo continuo de n familias de obreros. Imagínese que para instalar la explotación se requiere un año de trabajo de $n\ q$ hombres. Cada uno de los n obreros empleados en la explotación corriente del establecimiento trabaja, pues, con un capital que se debe á q años de trabajo. Sea p el producto anual del obrero, que consideramos dispone de un capital de q años de trabajo. Todo el producto de los n obreros asalariados será, pues, $n\ p$.

Por otra parte, cada obrero necesita para la conservación de sus fuerzas una cantidad a que determina la higiene, y más todavía que la higiene la experiencia.

Los $n\ q$ obreros trabajan un año en el establecimiento de la fábrica ó explotación de que nos ocupamos, y consumen $a\ n\ q$. Es claro que en el salario de los obreros hay que distinguir la porción destinada al consumo de la familia y un excedente que llamaremos y. La producción de $a\ n\ q$ hectólitros consumidos por los operarios que intervinieron en el primer establecimiento de la fábrica ó explotación ha exigido un año de trabajo de $\frac{a\ n\ q}{y}$ obreros.

Así, pues, el número de trabajadores que ha creado la industria que sirve de base á nuestro razonamiento es:

$$n\ q + \frac{a\ n\ q}{y} = n\ q\left(\frac{a+y}{y}\right)$$

Los n jornaleros que trabajan en la fábrica disfrutan un salario de $a + y$ cada uno. La suma de los salarios tiene por expresión algebráica $n\ (a + y)$. Se deduce la renta de la fábrica ó explotación restando el importe de los salarios del producto $n\ p$, lo que da

$$n\ p - n\ (a + y),$$

renta perpetua que constituye en rigor una propiedad perteneciente á los $n\, q \left(\frac{a+y}{y}\right)$ obreros productores de capital.

Un año de trabajo de cada uno de los obreros estará pagado por una renta de

$$\frac{n\, p - n(a+y)}{n\, q\left(\frac{a+y}{y}\right)} = \frac{\{p - (a+y)\}\, y}{q\,(a+y)},$$

¿Cuál es el valor de y que hace máxima esa función? Para contestar, acudamos al cálculo diferencial:

$$d\,\frac{p\,y - a\,y - y^2}{q\,(a+y)} = o.$$

O sea

$$q\,(a+y)\,(p-a-2y)\,dy - (p\,y - a\,y - y^2)\,q\,dy = o;$$

y, en otros términos,

$$(a+y)\,(p-a-2y) = p\,y - a\,y - y^2;$$

ó en fin

$$a + y = \sqrt{a\,p}\,.$$

Mas allá de la remuneración del trabajo queda sin duda una cosa importantísima que estudiar: lo que denomina Paul Laffitte la jerarquía de las funciones. No se presta esa jerarquía á los cálculos de las matemáticas. En cambio la remuneración del trabajo es un problema que, por su índole, pertenece al análisis.

Este salario que no resulta de la relación entre la oferta y la demanda, ni de las necesidades del obrero, sino que arranca de la asociación y del trabajo, se llama en la economía matemática *salario natural*. El salario natural es la media geométrica entre las necesidades del obrero y el producto de su trabajo.

La discusión de la fórmula $\sqrt{ap}$ conduce á exponer el problema social en toda su magnitud y aclara regiones obscuras de la economía y el derecho.

No tiene, señores, la sociología matemática la pretensión de cortar de un solo golpe, por medio de una fórmula, las agrias disputas, ni mucho menos las discusiones entabladas entre los hombres que pertenecen á las escuelas individualista y socialista. Aspira á demostrar que los problemas de una y otra escuela se resuelven por medio del cálculo. Hace una recomendación más de las aplicaciones de las matemáticas á las ciencias morales y políticas.

VI

Las Cortes son para el pueblo lo que un mapa reducido para el territorio de la nación entera: las magnitudes de los mapas y de los planos han de guardar entre sí las proporciones del original, porque esos mapas y esos planos deben considerarse como copias y nada más que como copias.—MIRABEAU.

Entre los problemas políticos que se plantean y que se discuten ahora con mayor empeño ninguno como el sufragio universal ha preocupado á las naciones, ó mejor dicho, á los publicistas; y con motivo, porque este problema del sufragio es en el fondo el problema de la soberanía, sobre que se levanta el derecho público. Yo respeto á los profundos escritores que defienden la soberanía de los reyes, ó la soberanía de los pueblos; pero, por mucho que los respete, claro es que no pienso con su espíritu, sino con el mío, y éste no reconoce otra soberanía que la de la razón humana. Ahora bien: si la razón es la soberanía de los individuos

¿cuál será la soberanía de las naciones, cuál será la soberanía de la especie? Late aquí todo el problema.

La soberanía de las naciones no puede ser más que una síntesis de su inteligencia, de su sentimiento y de su voluntad. Esa síntesis debe reflejarse en los parlamentos. Hay que resolver, por lo tanto, para constituir las Cortes, un gran problema: la representación *total y proporcional* del pueblo en la vida pública.

No es la ocasión presente oportuna para discutir el sufragio universal ó restringido. Esta Real Academia se ocupa de otra clase de cuestiones. Entran, sin embargo, en el tema de mi discurso las tentativas laudables que se han hecho y se continúan haciendo por algunos pensadores para organizar el sufragio con arreglo á principios filosóficos y matemáticos.

El vulgo de la política, que también la política tiene su vulgo, cree irreflexiva y ligeramente que, proclamado el sufragio universal, se ha dicho todo en el orden de la representación política de las naciones. ¡No! el sufragio universal alcanza un valor ú otro, un sentido ú otro, según se organiza. Organizaciones hay del sufragio universal que lo niegan. Por cierto que una manera segura para destruirlo sería no pensar en organizarlo.

Se trata, repito, de la representación total y proporcional del pueblo en la vida pública. Este problema es en rigor imposible de resolver con exactitud matemática: imposible como tantos otros, como la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo, la duplicación del cubo, el movimiento continuo: ideales y nada más que ideales, eternos ideales del hombre.

Ya que no se resuelva con exactitud matemática el problema de la representación total y proporcional del pueblo en la vida pública, ¿acertaríamos con algún método científico análogo al de las aproximaciones sucesivas?

Digámoslo muy alto, señores Académicos: envanezcámonos con el orgullo noble que nace del culto que rendimos á nuestras amadas ciencias, de que la idea más fecunda que ha brotado en este siglo para resolver el problema de la representación del pueblo en la vida pública se debe á un ilustre matemático y político, pero más que político matemático, á Mr. Andræ, Ministro de Hacienda de Dinamarca hacia el año 1855. Él inventó la teoría del cociente electoral, maravillosamente desarrollada por Thomas Hare en 1859 y por Stuard Mill en 1861.

Saben de sobra los señores que me escuchan que se llama cociente electoral la cifra que se obtiene dividiendo la suma total de los electores, ó, mejor dicho, de los votantes, por el número de candidatos que se debe proclamar en definitiva. Un candidato ó una lista de candidatos, según que la elección sea unipersonal ó por lista, quedarán elegidos en este sistema tantas veces cuantas esté contenido el cociente electoral en el número de votos que se emitan á favor del candidato ó de la lista.

La multiplicidad ó acumulación de votos, en una persona ó en una lista, que resultaría de este procedimiento no se puede utilizar en la práctica sino aceptando el pensamiento que expuso Mr. Boutmy en la *Liberté* del día 21 de Agosto de 1867, es á saber: concediendo á la persona ó á la lista de que se trate un número de votos parlamentarios proporcional al número de sufragios que haya obtenido. Semejante método entrega los destinos del país á un pequeño número de hombres populares: mina solapadamente los cimientos del sistema representativo.

¿Cómo salvar este inesperado escollo? Una manera de conseguirlo es que cada candidato presente una lista que indique, en un orden de preferencia, las personas á que desea transferir ó ceder los votos superfluos ó insuficientes. Son superfluos los que exceden del cociente electoral, é insuficientes los que no llegan á ese número. Por este camino se utilizan todos los sufragios; y cuantos resultan elegidos, ya directamente, ya por una transferencia, lo son porque han alcanzado y no han excedido el cociente que se toma como base. Es muy exacto ese procedimiento desde el punto de vista de las representaciones proporcionales: en él la balanza de la política pesa por igual todos los partidos.

Desgraciadamente en este sistema la elección no se hace por los electores: los diputados elegidos primero votan á los demás: desaparece ó se nubla la intervención directa del pueblo en la vida nacional, que es lo que á todas luces se persigue.

Habrán comprendido los que me escuchan que los sistemas racionales y matemáticos de la teoría del sufragio no aspiran sólo á la representación más ó menos vaga ó fortuita de las minorías, sino que se proponen llevar á cabo la representación proporcional de la mayoría y de las minorías. De aquí nace su carácter, esencialmente matemático.

Aclaremos una vez más el procedimiento de que nos ocupamos. Supónganse 90.000 electores que han de elegir seis diputados: 15.000 será el cociente electoral entonces. Imaginemos que entre esos 90.000 electores los hay de tres partidos: de la derecha, del centro, de la izquierda. Sean los candidatos:

A y *B*	por la derecha.
C, *D*, *E* y *F*	por el centro.
G, *H* y *K*	por la izquierda.

Partamos de que el resultado de la elección fuera el que da á conocer la adjunta lista:

	CANDIDATOS	VOTOS
	A........................	9.000
	B........................	6.000
	C........................	21.000
	D........................	9.000
	E........................	5.000
	F........................	10.000
	G........................	10.000
	H........................	16.000
	K........................	4.000
Total...	9	90.000

Por el sistema que exponemos quedarán elegidos:

A con 15.000 votos, que resultan de añadir á los 9.000 de *A* 6.000 de *B*.
C con 15.000 votos, que resultan de restar de los 21.000 de *C* 6.000 que se agregan á *D*.
D con 15.000 votos, que resultan de añadir á los 9.000 de *D* 6.000 de *C*.
F con 15.000 votos, que resultan de añadir á los 10.000 de *F* 5.000 de *E*.
G con 15.000 votos, que resultan de añadir á los 10.000 de *G* 1.000 de *H* y 4.000 de *K*.
H con 15.000 votos, que resultan de restar de los 16.000 de *H* 1.000 que se agregan á *G*.

Según la cuenta de cada partido resulta que la derecha tiene 15.000 votos y un representante; el centro 45.000 votos y tres representantes; y la izquierda 30.000 votos y dos representantes. Todos los votos se aprovechan sin excepción alguna. Cada grupo está representado proporcionalmente á su importancia efectiva.

El método del cociente electoral es inaplicable al caso en que las divisiones entre los números de los votos de cada partido y la suma de los representantes son inexactas. Entonces Mr. d'Hondt aplica el curioso sistema del *divisor común*. Tenemos, por ejemplo, 100.000 votos, 10 representantes y tres partidos, compuestos respectivamente de 40.000 votantes de la derecha, 40.000 del centro y 20.000 de la izquierda. Debería haber 4 diputados de la derecha, 4 del centro y 2 de la izquierda.

Sea el cómputo de los votos

42.543 de la derecha,
40.563 del centro,
16.894 de la izquierda.

¿Cómo distribuir los diputados con arreglo al principio de la representación proporcional de los electores?

Lo primero que se ocurre es descomponer el número 10 según la regla de compañía; ó, en otros términos, descomponer el número 10 en partes x, x', x'', proporcionales á los números 42.543, 40.563, 16.894. Los valores de x, x', x'' se hallan dividiendo el número propuesto por la suma de los números á que han de ser proporcionales las partes y multiplicando el cociente por cada uno de estos números. Así pues,

$$x = \frac{42.543 \times 10}{100.000}, \quad x' = \frac{40.563 \times 10}{100.000}, \quad x'' = \frac{16\ 894 \times 10}{100.000}$$

$$x = 4,2543 \qquad x' = 4,0563 \qquad x'' = 1,6894$$

Ó, despreciando las fracciones decimales,

$$x = 4, \qquad x' = 4, \qquad x'' = 1.$$

Resultan, pues, nueve representantes en vez de los diez que deben elegirse: cuatro para la derecha, cuatro para el centro, y uno para la izquierda. El décimo representante habría que concederlo á la izquierda, porque á ese grupo corresponde el excedente de votos más numeroso.

Sin embargo, el principio de la mayoría, justo cuando se trata de discernir la victoria entre dos partidos, debe rechazarse de una manera categórica y absoluta en el sistema de la representación proporcional de los electores. No olvidemos que el gran principio moderno, el que desarrollamos ahora por medio del cálculo, no es el *sufragio universal,* sino la *representación universal* y *proporcional.* De ese principio resulta una diferencia esencialísima entre las democracias del mundo antiguo y las del nuevo. Estas son democracias representativas, en que la representación ha de ser de todos y proporcional á la mayoría y á las minorías, al paso que aquellas son democracias directas, á las que no compete el derecho representativo de deliberar, sino el de decidir, cosa enteramente distinta.

En una palabra, el problema consiste en obtener un divisor común de los números 42,543, 40.563 y 16.894 que dé cocientes cuya suma sea igual á 10; es decir, al número de diputados. Obsérvese, ante todo, que ese divisor tiene por máximo el cociente electoral 10.000 en el ejemplo de que se trata. En efecto: puesto que 100.000 contiene 10 veces 10.000, es notorio que 100.000 dividido por 10 no podrá dar nunca una cifra superior á 10.000. Ese máximo sirve de punto de partida á Mr. d'Hondt.

Dividamos los números propuestos por 10.000 y despreciemos las fracciones:

42.543	dividido	por 10.000	da 4.
40.563	íd.	por 10.000	da 4.
16.894	íd.	por 10.000	da 1.

Resultarían, según esto, 9 representantes, cuando hay que elegir 10 diputados, lo que prueba que el divisor 10.000 es mayor de lo que conviene. Fijémonos en las cifras que proporcionan un diputado más por cada partido, que en este caso serían 5, 5 y 2, y tomemos esas cifras por divisores, despreciando como siempre los quebrados. Se llega en esta forma á los tres cocientes 8.508, 8.112 y 8.447.

Escojamos por divisor ahora el mayor de estos divisores, 8.508, y se deducirán cocientes cuya suma será igual á 10.

42.543	dividido	por 8.508	da 5.
40.563	íd.	por 8.508	da 4.
16.894	íd.	por 8.508	da 1.
Total de cocientes............			10

No cabrá desde ahora duda, ni en los más prevenidos contra el cálculo, de que son importantes y frecuentes las aplicaciones de las Matemáticas á las Ciencias Morales y Políticas. Hemos visto surgir esas aplicaciones por donde quiera. No se atuvo jamás el cálculo al estrecho programa de la ciencia pura, ni al más amplio de la Naturaleza. Saltó la valla. Penetró, como hemos recordado, en las regiones de la vida, de la historia, de la riqueza, del crédito, de la propiedad, del salario, de la representación del pueblo en las Cortes.

El cálculo de probabilidades resuelve además muchas cuestiones relacionadas con los escrutinios. Así, verbi gracia, dos candidatos, X y Z, luchan en unas elecciones. Contiene la urna $n + k$ papeletas de X y n de Z. En definitiva será proclamado X; pero ¿cuál es la probabilidad de que mientras dura el acto de sacar papeletas no cese de aparecer X por encima de Z? Este problema, más curioso que útil, sirve de ejemplo entre tantos otros. Esa probabilidad será:

$$\frac{K}{2n+K}$$

Sean cuales fueren los métodos de conseguir la representación nacional que se adopten y los sistemas que para hacer el escrutinio se prefieran, hay que llegar, por último, á una decisión que impone la mayoría. Ya en este orden de ideas Guibert se ha ocupado de la probabilidad de los juicios de una mayoría determinada.

Discutamos el caso más general posible. Una decisión se somete á un tribunal de primera instancia, y después á otro tribunal, ante quien se apela, compuesto de $2n+1$ ó de $2n$ jueces. En igualdad de circunstancias, dejando aparte las prendas morales y la competencia de los jueces, ¿qué resoluciones ofrecerán más garantías con arreglo al cálculo de probabilidades? ¿La que dicte una Sala, un Colegio electoral ó una Asamblea legislativa compuesta de $2n+1$ ó de $2n$ personas?

Sea p la probabilidad de que un juez del tribunal de apelación no se equivoque; P la probabilidad de que la sentencia del tribunal de primera instancia es justa; y P_{2n+1}, P_{2n} las probabilidades de que las ejecutorias de las salas de apelación compuestas de $2n+1$ y de $2n$ jueces se han dictado con arreglo á derecho.

Se trata de comparar entre sí las cantidades P_{2n+1} y P_{2n}.

Segun los principios fundamentales de cálculo de probabilidades se tiene:

$$P_{2n+1}=p^{2n+1}+(2n+1)(1-p)p^{2n}+\ldots+\frac{(2n+1)\ldots(n+2)}{1\ldots n}(1-p)^{n}.p^{n+1}$$

$$P_{2n}=p^{2n}+2n(1-p)p^{2n-1}+\ldots+P\frac{2n\ldots(n+1)}{1\ldots n}(1-p)^{n}p^{n}.$$

Multiplicando el segundo miembro de esta última igualdad por $p+1-p$ se le dará fácilmente la forma:

$$P_{2n}=P_{2n+1}+\frac{2n\ldots(n+1)}{1\ldots n}(P-p)(1-p)^{n}p^{n},$$

que resuelve el problema.

Desde luego se advierte que según que

$$P>p \quad P=p \text{ ó } P<p$$
$$P_{2n}>P_{2n+1} \quad P_{2n}=P_{2n+1} \quad P_{2n}<P_{2n+1}$$

Admitamos que $p>\frac{1}{2}$ lo que muchas veces ocurre. Entonces, si la probabilidad de que un juez del tribunal de primera instancia no se equivoque es constante é igual á p, se tendrá siempre $P>p$ y por consiguiente $P_{2n}>P_{2n+1}$, á no ser que el tribunal de primera instancia esté formado por un solo juez, sea unipersonal, en cuyo caso $P=p$ y $P_{2n}=$ $=P_{2n+1}$.

La inecuación $P>p$ se funda en que, cuando aumenta el número de jueces, aumenta la probabilidad de que una sentencia se dicte con arreglo á derecho. Este postulado es un axioma. Por otra parte sería fácil demostrarlo directamente por medio del análisis.

Por igual camino se prueba matemáticamente que la probabilidad de la justicia de una ejecutoria en una sala de $2n$ jueces es menor ó mayor que la probabilidad de la justicia de esa ejecutoria en otra sala de $2n+1$, segun que la sentencia del tribunal de primera instancia y la ejecutoria del tribunal de apelación estén de acuerdo ó difieran.

En esta discusión conducen á resultados que sorprenden las aplicaciones del cálculo de probabilidades á la estadística judicial. Sobre tan difícil materia puede consultarse con fruto la Memoria de Mr. A. A. Cournot, rector de la Academia de Grenoble, publicada en la página 257 del tomo 3.° del *Journal de mathématiques de Liouville.*

Aleccionada la política por los matemáticos, pide la representación proporcional de las naciones. ¿Por qué? Porque esa representación da á las asambleas la influencia y el prestigio que arrastra consigo la idea de proporcionalidad, que es la idea de justicia; porque esa representación se compone de todos los intereses y de todas las fuerzas vivas de la patria; porque esa representación ahuyenta las ficciones y alza un baluarte en que sostener y reivindicar los derechos de los ciudadanos; porque esa representación no puede menos de ser escudo y amparo del poder legítimo; porque esa representación, en fin, armoniza tendencias opuestas, y conduce, para decirlo de una vez, al sufragio universal que ha uncido á su carro de batalla hipótesis absurdas acerca de la soberanía de los pueblos.

VII

> **El análisis matemático es una caja llena de semillas. Cuando esa caja se abre, las semillas caen y encuentran surcos labrados en las demás ciencias.—Carlos Grun.**

Me acabo de ocupar, señores Académicos, de las aplicaciones de las matemáticas á la naturaleza, á la historia, á la hacienda, al seguro, á la estadística, á las ciencias económicas y sociales. Aplícanse tambien las matemáticas al derecho. Mejor que largos razonamientos lo probará la exposición abreviada del estudio sobre los derechos sucesivos de los hijos naturales, estudio que se debe á Mr. Luis Gros, Doctor en Jurisprudencia y Abogado del Colegio de Lyon. Ni en Francia ni en España abundan los Abogados que profundizan las matemáticas. No sucede lo mismo en Inglaterra y en Alemania. En Inglaterra el célebre abogado Lord Brougham se dedicó con gran aprovechamiento al cálculo diferencial é integral y á la física matemática. Alejandro Humboldt y el notable selenógrafo Guillermo Beer, hermano del compositor ilustre, han armonizado en Alemania los estudios de las ciencias morales y de las ciencias exactas.

Trata Mr. Gros de interpretar el pensamiento que desarrollan los legisladores en el artículo 757 del Código civil francés: "el derecho del hijo natural sobre los bienes de su padre y de su madre, fallecidos, se computará en esta forma: si el padre ó la madre dejan descendientes legítimos, ese derecho es el tercio de la porción hereditaria que el hijo natural tendría si fuera legítimo, etc."

Es clara la interpretación del artículo 757 cuando no hay más que un hijo natural. La relación entre la parte del hijo natural y la de un hijo legítimo varía con el número de hijos legítimos: alcanza 1/5 cuando no hay más que un hijo legítimo, y aumenta, si hay varios, hasta 1/3, que es su valor límite.

Hace notar Mr. Gros que esas distintas relaciones ponen de manifiesto la inconsecuencia de los principios en que el legislador se funda. Es discutible que los hijos naturales deban tener derechos hereditarios inferiores á los de los hijos legítimos. Las leyes se modifican en el sentido de la igualdad y, sobre todo, comprenden que no hay razón alguna para castigar en los hijos las culpas de los padres. Creen algunos, en cambio, que el respeto á la familia exige que el hijo natural no tenga los derechos del hijo legítimo: En este criterio se inspiró el artículo 757 del Código francés, como tantos otros. Admitida la idea, hay que establecer la cifra ó el coeficiente constante que expresa la relación entre los derechos del hijo natural y del hijo legítimo: *constante,* digo, sea cual fuere el número de hijos naturales y legítimos.

He aquí una de las interpretaciones más lógicas del principio que el legislador invoca. El padre de hijos naturales perjudica á los hijos legítimos, y los perjudica tanto más cuanto mayor es el número de hijos legítimos, puesto que ese número es el divisor que sirve para calcular la hijuela de cada uno. Para disminuir el perjuicio, es necesario que la parte de la herencia segregada de la familia en obsequio de los hijos naturales esté en razón inversa del número de hijos legítimos y del número de hijos naturales. Sean n y l el número de hijos naturales y legítimos. Según el Código, la parte de un hijo natural sólo es

$$\frac{1}{3(1+l)}$$

En nuestra hipótesis la parte de cada hijo natural es

$$\frac{1}{3n(1+l)},$$

y la parte de cada hijo legítimo

$$\frac{3l+2}{3l(1+l)}.$$

De manera que la parte del hijo legítimo es independiente del número de hijos habidos fuera del matrimonio.

El distinguido matemático Mr. Prouhet advierte que el Código de Haïti es, en esta parte, más lógico que el artículo 757 del Código civil de Francia á que se refiere Mr. Gros. En efecto, ese Código concede al hijo natural en todos los casos la tercera parte que á un hijo legítimo.

Del texto de la ley y de las discusiones que tuvieron lugar en el Consejo dedujo Mr. Gros que el legislador no previó que varios hijos naturales pidieran la sucesión hereditaria. ¿Qué hacer entonces? Conservar la relación establecida por el legislador en el caso únicamente previsto. Para conseguir este objeto, Mr. Gros no considera por de pronto más que un hijo natural y un hijo legítimo, y, hechas las particiones en esta hipótesis, atribuye ú otorga á los demás hijos naturales una parte igual á la que se confirió al primero: advierte que por este sistema la suma de las partes excedería al total de la herencia, por lo que reduce en proporción las cantidades como si se tratara de repartir entre acreedores un activo inferior á la suma de sus créditos. Tal es el procedimiento que Mr. Gros llama de reparto.

El problema de análisis que estudiamos podría enunciarse del siguiente modo. Supongamos que el derecho de un hijo natural en concurrencia con uno ó varios hijos legítimos es $\frac{1}{m}$ de la porción hereditaria que tendría si fuera hijo legítimo, ¿qué parte corresponde á cada hijo natural ó legítimo? Se conocen el número de hijos naturales, el número de hijos legítimos, y la herencia. Llámese n al número de hijos naturales, l al de hijos legítimos, y represéntese por la unidad la suma ó porción hereditaria.

Denominemos $y_{n,l}$ $x_{n,l}$ las porciones respectivas de cada hijo natural y legítimo.

Es evidente que

$$n\,y_{n,l}+l\,x_{n,l}=1.$$

Imaginemos que uno de los hijos naturales se considera como legítimo. En tal hipótesis la parte de cada uno de los demás hijos naturales será, según la notación adoptada,

$$y_{n-1,l+1}$$

y su parte colectiva

$$(n-1)\,y_{n-1,l+1}.$$

Hay, pues, que repartir entre los $(l+1)$ hijos legítimos la suma

$$1-(n-1)\,y_{n-1,l+1}.$$

Fácilmente se puede ver ahora que la segunda ecuación del problema resulta de que la $\frac{1}{m}$ parte de cada uno de los hijos que se han supuesto legítimos sea igual á $y_{n,l}$.

Se tendrá según esto:

$$y_{n,l}=\frac{1}{m(l+1)}\left(1-(n-1)\,y_{n-1,l+1}\right)$$

Si se hace $n=1$ en esta ecuación, el segundo miembro se reduce á una cantidad conocida $\frac{1}{m(l+1)}$.

Por medio de sustituciones sucesivas se puede, por lo tanto, calcular el valor de $y_{n,l}$ en función de los números n y l.

En una palabra, las fórmulas que resuelven el problema son:

$$y_{n,l} = \frac{1}{m(l+1)} - \frac{n-1}{m^2(l+1)(l+2)} - \mp \frac{(n-1)(n-2)\ldots\ldots 3.2.1.}{m^n(l+1)\ldots\ldots(l+n)}$$

$$x_{n,l} = \frac{1}{l} - \frac{n}{ml(l+1)} - \ldots \mp \frac{n(n-1)\ldots\ldots 3.2.1.}{m^n l(l+1)\ldots\ldots(l+1)}.$$

Nada más sencillo que construir una tabla de doble entrada cuyos límites abracen la extensión de los valores eventuales que pueden tener simultáneamente los números n y l.

Me entretendría, fuera ya de mi propósito, la discusión matemática de esta parte de nuestro derecho antiguo y moderno. Establece el derecho antiguo la ley 8.ª tít. XIII, Part. VI, que concede al hijo natural una dozava parte de la herencia cuando hay descendientes. Surge el derecho moderno del art. 840 del Código vigente. Los procedimientos de cálculo que he procurado desenvolver del modo más breve que me ha sido posible abren las puertas de esa discusión é invitan á llevarlo á cabo. Pero ¿me propongo, señores, otra cosa que despertar en el ánimo de las gentes, por medio de sencillos ejemplos, la convicción de que habrán de ser cada día más fecundas las aplicaciones de las matemáticas á las ciencias morales y políticas?

No aspiro en mi Discurso á resolver, ni aun á desflorar, los problemas de las ciencias morales y políticas enunciados en estas páginas. Los cito con objeto de que me sirvan de punto de partida para exponer los servicios que las matemáticas pueden prestarles: servicios preciosos, porque las matemáticas se ocupan de lo concreto; hacen que la ciencia no salga del estudio de lo *concreto:* ¡gran paso para la conquista de la verdad en la naturaleza, en la historia y en el arte! No olvidemos que Dios crea lo concreto: el hombre nada más que lo abstracto.

VIII

> Α γεωμέτρητος μηδεὶς εἰσίτω
> No entre aquí nadie que no sea geómetra.

Se dice que Platón hizo esculpir estas palabras en su Academia. Ninguno de los escritores antiguos habla de la inscripción famosa. La citan algunos sabios bizantinos. La frase del célebre pensador se menciona por primera vez en una carta dirigida por Miguel Psellus á uno de los emperadores que han llevado el nombre de Andrónico, probablemente el que rigió el imperio en 1067. A la misma inscripción se refiere el curioso y agotado libro que se titula *Ramillete de violetas de Arsénicus.* Algún otro libro reproduce la inscripción en forma de verso jámbico. Los críticos sostienen que en Grecia significaban la misma cosa los geómetras y los filósofos. Era la geometría una preparación indispensable para el estudio de los demás conocimientos. Habíase dado allí por este camino un gran paso á favor de la unidad científica. Eso es lo que me proponía recordaros. Pero dejémonos de investigaciones dudosas ó inciertas y vengamos á lo práctico.

Revela todo lo que precede que hay un orden superior al de la política, si bien de la misma naturaleza: el orden social. Por la sola razón de que existen los intereses sociales y de que constituyen una categoría, por decirlo así, extraordinaria y nueva, reclaman detenido estudio. ¿No es lógico esperar que la ciencia humana y las matemáticas singularmente, que son una de las más espléndidas manifestaciones de esa ciencia, encaminen sus esfuerzos en adelante á resolver el problema social que nos envuelve? ¿No cabe llevar con éxito las conquistas hechas en el orden físico á satisfacer las apremiantes necesidades de los hombres y de los pueblos? Aunque sea cierto que no es lícito confundir la política con la historia natural, sino que más bien puede definirse la política como la historia humana, ¿está lejos esta última historia de las leyes universales, que no son más que la previsión desarrollada por el cálculo? ¿Qué leyes matemáticas ligan entre sí las variables, al parecer independientes, de la economía política, y las cambian en funciones simples, en funciones de funciones y en funciones complejas, dando á estas palabras el riguroso sentido que tienen en las ciencias á que nos dedicamos? ¿Qué fórmulas abrazan y sintetizan la manera como el trabajo influye sobre el capital y el capital sobre el trabajo, la manera cómo la riqueza se desarrolla, la manera cómo el salario se desprende de los productos al mismo tiempo que se elaboran, la manera cómo el cambio se establece y la circulación se difunde y el crédito se esparce y el ciclo entero de la economía, ó la trayectoria del comercio, se trazan y se cierran en virtud de la contextura espontánea de la vida? ¿Qué algoritmo traducirá de un modo más adecuado al objeto la idea anglo-americana de la soberanía, que, cuando trata de la representación total y proporcional, considera el número como faccioso si se sobrepone á los derechos individuales? ¿Pueden, en fin, aclararse problemas de jurisprudencia con los métodos del cálculo?

En breves palabras he procurado contestar estas delicadísimas preguntas.

Fijándonos en el orden social exclusivamente, resulta que hasta hoy las frases vagas, cuando no huecas, de la política, los arbitrajes, los jurados, las organizaciones administrativas, por donde quiera insuficientes, sólo pueden considerarse como paliativos de los males que sufren las naciones.

Yo quiero que las ciencias puras lleven sus recursos á la sociedad para destruir las antinomias que la preocupan y la destrozan. No soy de los que con poner la ciencia á gran altura dejan á su merced tan sólo futiles problemas. Ella sirve ó debe servir para la vida práctica. Sorprende verdaderamente que, cuando para estudiar cuestiones de filosofía ó de matemáticas puras se derrocha el talento de sabios ilustres, se haya dado en la extraña manía de entregar á hombres sin conocimientos de ningún género aún los más difíciles problemas de la administración, de la política y de la sociología. He aquí una de las principales causas que traen á mal traer la constitución de los pueblos. No me cansaré de recordaros la necesidad de constituir científicamente la política moderna, todavía anárquica por la ineptitud de muchos de sus corifeos. Constituyámosla: las matemáticas serán, para constituirla, el brazo que se propone ahogar todo germen de apasionados y estériles enconos. Es carácter distintivo de las ciencias exactas que hacen prevalecer las verdades sobre los intereses.

¿Qué han intentado los Gobiernos para que cundan las ciencias exactas? Lejos de fomentar los estadistas los pensamientos de tales ciencias, manifestaron el temor de peligrosas innovaciones y hasta lamentaron á veces que se dedicaran á ellas espíritus extraordinarios. Para colmo de mal se tuvieron largo tiempo por estériles los descubrimientos del cálculo. Vióse en muchos astrónomos y físicos la decisión de imponer á la turba de los escolásticos las nuevas ideas, y en los gobernantes, en cambio, el oculto intento de hacer imposible la propaganda de las matemáticas. Comenzó así entre los geómetras y la tradición antigua y vulgar de las escuelas una lucha que constituye la historia de aquella revolución que nació en el siglo décimosexto y que abre todavía nuevos horizontes.

Las matemáticas pasan por una verdadera crisis. Ponderamos con razón sus progresos; pero son de ayer los procedimientos más profundos del análisis, los que llevan la vida á las regiones de las ciencias físicas, y de hoy los que se ocupan de la sociedad y del hombre. No ya el cálculo infinitesimal, sino hasta la palabra *cálculo,* en su sentido más genérico, es de uso reciente. Los romanos no tenían el infinitivo *calculare:* empleaban esta locución *calculos subducere.* Aurelius Prudentius Clemens, poeta que nació en la provincia de Tarragona en 348, escribe por vez primera la palabra *calculare.*

¿Cómo extrañar que no hayan penetrado aún las matemáticas en las ciencias morales? Penetrarán las matemáticas en las ciencias morales y se sobrepondrán algún día á las hipótesis abstrusas. Prefiero, dice Leibnitz á Huyghens, un hombre sencillo que me explica lo que ve á un cartesiano que me explica lo que piensa. Y las matemáticas explican lo que ven y nada más que lo que ven: ese es todo su mágico secreto.

Estudiemos la naturaleza, recojamos sus datos, y despejemos sus incógnitas. Midámoslo todo, que medirlo es calcularlo, y calcularlo es conocerlo. Conocida la naturaleza, se descubrirá la situación del hombre en el mundo, y no nos adjudicaremos inmodestamente títulos pomposos como los de rey del universo, señor de la creación, homo sapiens, y tantos otros fáciles de ostentar, aunque difíciles de ejercer. Penetrémonos de la profunda y amarga verdad de que no ha sido creada la naturaleza para el hombre, sino el hombre para la naturaleza.

De la naturaleza forman parte el hombre y la especie. Investigando los elementos de la naturaleza y siguiendo su historia, sorprenderemos las metamórfosis de la vida, suprema síntesis de la ciencia. Recordad, señores Académicos, cada instante, que para esos cálculos se necesita del poderoso auxilio de las matemáticas, sublime orden de conocimientos á que se halla sujeto y subordinado todo lo que no resulta inmediatamente del libre albedrío de la conciencia.

Yo tengo, además, la convicción profunda de que el hombre no va, no puede ir, más lejos que las matemáticas. Donde no alcanza el cálculo sólo advertiréis la triste sombra de la duda. La historia prueba que nada hemos podido saber de las cuestiones metafísicas acerca del porvenir de la humanidad á traves de las brumas del tiempo. Pero, ¿acaso perderíamos algo con huir de esas ideas y limitarnos á las que nos interesan en la vida práctica? Dejémoslas, por mucho que nos atraigan: abandonémoslas, porque están fuera del estrecho limbo que vislumbramos claramente. Por mi parte, y en ese orden supremo, me consuela pensar que la naturaleza nos arroja á la corriente de la vida: ella nos recoje, después de la muerte, en el profundo arcano de su misteriosa evolución, y nos atenderá, que si dejara de atendernos negaría su propia y virtual existencia.

Antes de terminar, confesaré que me ocupan las matemáticas, no sólo por motivos nobles, sino por una especie de calculado egoismo. Absorben esas ciencias la atención del hombre; le separan y aislan de cuanto le rodea; vienen á ser como el sueño para los cansados y afligidos. Si las pasiones ó las desdichas invaden el corazón, sólo pueden consolarnos los estudios que ocupan el entendimiento; y, entre ellos, los que más reconcentran el espíritu son las matemáticas. Recuerdo haber leído que Sofía Germain, dama ilustre que vió la luz en la época en que Francia proclamaba los derechos democráticos entre los fulgores de la anarquía, se consagró á los estudios de las matemáticas para olvidar las conmovedoras escenas de la revolución de 1789. Los cálculos de Sofía Germain sobre las placas elásticas y los que discutió con Gauus magistralmente solazaron su espíritu y la distrajeron, según ella misma reconoce, de las sangrientas luchas que esparcían el terror entre sus conciudadanos.

¿Son excepcionales las ocasiones en que ha tenido que refugiarse el hombre en el seguro puerto de la ciencia para olvidar crueles desgracias? No ciertamente. Era Poncelet oficial del ejército de Francia cuando Rusia le hizo prisionero. Encerrado en Sarakoff vivió entre peligros: disipó allí la tristeza de su espíritu con los profundos inventos que le condujeron á redactar el *Tratado de las propiedades proyectivas*, obra fecunda y para los geómetras admirable. Podría citar muchas peripecias análogas.

Los últimos ecos de mi palabra serán para hacer público el testimonio de mi gratitud por el honor que me dispensais al admitirme en el seno de esta ilustre Academia. Es la gratitud la memoria del corazón, sentimiento delicado y, más todavía que delicado, justo. Por justo y delicado que sea he querido cumplir los deberes que tenía con vosotros como Académico, antes que los que tenía con vosotros como amigo.

El amor que siento hacia las ciencias exactas, físicas y naturales, y la simpatía que tributa mi espíritu á los que como vosotros las cultivais, hacen que sea para mí esta Real Academia, como aquel afecto de que dice el más espontáneo de los poetas del presente siglo:

> Que brilla su claridad
> En su centro solitario,
> Cual lámpara en el santuario,
> Cual faro en la tempestad.

DISCURSO

DEL

EXCMO. SR. D. JOSÉ ECHEGARAY

Señores Académicos:

Si la elección que hicísteis de D. Alberto Bosch para cubrir la vacante, que en esta Academia había dejado el ilustre ingeniero D. Francisco Prieto y Caules, hubiere menester de una prueba clara y patente de acierto, en el discurso que acabais de oir y en la inusitada rapidez con que fué presentado, la tendríais completa y elocuentísima. Y como no quisiera yo ser menos en punto á celo y á prontitud, en breves horas he borrajeado las siguientes páginas, cumpliendo en ellas un deber de costumbre y de estatutos, á la vez que de amistad y de simpatía, al ofrecer en vuestro nombre y en el mío, cariñoso saludo de bienvenida al amigo y al compañero.

Hay que saludar, en efecto, al amigo que llega, pero hay que dar al propio tiempo el adiós de despedida al amigo y al compañero que partió para siempre; y en esta ocasión, por el motivo que el Sr. Bosch indica, las despedidas son dos y ambas tristísimas.

Del Sr. D. Antonio Aguilar y Vela, ¿qué podré decir yo que no haya dicho el nuevo académico, que no murmuréis por lo bajo todos vosotros con los ecos del cariño y del respeto, que no sepan de antemano cuantos tuvieron la dicha de conocerle, ya como hombre de ciencia, ya como insigne profesor, ya como amigo afable, leal y bondadoso?

Era el Sr. Aguilar un sabio astrónomo, que prestó grandes servicios á su patria; porque á la patria se la sirve, no sólo entre los estruendos de la publicidad, sino también en el silencio del gabinete, en la torrecilla de un observatorio, ó entre cálculos que acaso nadie verá: servirla, es desvelarse por el bien de la tierra que las propias fronteras abarcan; pero también es servirla consumir los años en el estudio, empobrecer la sangre con el trabajo, y apagar la vista contemplando las maravillas del cielo, que es patria común que á todas las demás patrias cobija.

Era un eminente profesor, tan ilustre como modesto y sencillo, que nunca buscó el clamoreo del aplauso, pero que siempre lo obtuvo de sus discípulos: la ciencia que sembró pregona la que poseía, que tan sólida era como ha sido fecunda.

Era, en fin, un buen caballero, cuya conciencia fué tan severa como fué dulce su carácter: de tanto mirar á la máquina inmutable de los astros, algo había tomado para sí de la ley eterna que rige en las lejanas alturas, de la marcha regular de los mundos superiores y de la placidez de los espacios azulados en noches de fructífera observación.

Su recuerdo y su nombre valen más para todos nosotros, que cuantos retóricos alardes pudieran brotar de mi pluma en este momento: quedan, para decir lo que fué, sus valiosos trabajos de muchos años, la pureza de su alma, que resplandecía en todos sus actos, y la bondad de su carácter, que jamás tuvo notas ásperas para nadie.

Todavía necesita el Sr. Bosch cumplir otro deber tristísimo, tristísimo digo por el motivo que á cumplirlo le obliga, al enaltecer en su Memoria la del docto académico á quien reemplaza; y pocos, como el que tiene la honra de dirigirse á la Academia en este momento y en esta ocasión solemne, podrán apreciar la justicia de los elogios que al Sr. Prieto tributa el nuevo Académico. Tuve, en efecto, la suerte, y tuve la honra de contar entre mis discípulos al Sr. Prieto y Caules, y desde el primer instante aprecié todo lo que valía por su elevada inteligencia, su laboriosidad excepcional y su modestia á prueba de triunfos escolares; más de una vez aplaudí su entusiasmo por las ciencias matemáticas puras y aplicadas, que agradecidas, á no dudarlo, por el culto que les tributaba, le ofrecieron desde sus primeros pasos brillante porvenir; con interés sumo y con aplauso le seguí en sus adelantamientos y en sus empresas; y hoy uno mi duelo al de la Academia por la temprana muerte de tan modesto sabio, como uno mi entusiasta asentimiento á las justas y calurosas alabanzas que le tributa nuestro nuevo compañero, compañero mío dos veces: por ley de ingeniería la primera, por reciente lazo académico la segunda.

Si mucho siento la inesperada pérdida del amigo cariñoso, del antiguo discípulo, del ilustre profesor y del insigne ingeniero, no siento menos en verdad la del excelente matemático, ni es menos de sentir, en esta nuestra patria donde por tanto tiempo, por tantos siglos pudiera agregar, se ha desdeñado por los más esclarecidos ingenios el estudio de la *ciencia matemática:* ciencia tan útil para las realidades de la vida, como sublime y luminosa en las altas regiones del saber puro y desinteresado.

Bien es cierto que, si para toda alegría hay una tristeza que la amortigüe, por compensación piadosa, muchas tristezas encuentran alegrías que las aplacan, al menos en ley de humanidad; y así esta Academia, al perder en el Sr. Prieto y Caules un partidario insigne y activo de las ciencias matemáticas, encuentra en su dignísimo sucesor, no ya un matemático entusiasta, sino lo que es aún más, un matemático ambicioso y conquistador, que no contento con los feudos tradicionales de la gran ciencia, entra por tierras ajenas con el pendón glorioso del análisis y de la geometría; y de este modo aspira á llevar las leyes de la cantidad, del número, del orden y del cálculo, á la Botánica, á la Zoología, á la Mineralogía, á la Escritura y al Lenguaje, al Cálculo de probabilidades, á la Economía política, á la Sociología, á la Estadística, al gran problema del salario, á los debatidos problemas del monometalismo y del bimetalismo, al crédito, á la renta de la tierra, al cambio, y aun á la misma política y al derecho, deteniéndose, sin duda por respeto, aunque no por falta de deseo, en los límites de la Metafísica y de la Teología.

Yo no sé cómo los tradicionales poseedores de todas estas ciencias recibirán al invasor: es posible que le reciban en son de guerra, que toda invasión la provoca; pero yo en todo caso mando desde aquí mis aplausos y mis simpatías al campeón de mi tierra, que tierra de mi niñez fueron las matemáticas, y hacia ella vuelvo siempre los ojos con cariño cuando la agitación de la marcha forzada y penosa que sigo me lo permite.

Del placer singularísimo con que he leído el elevado y erudito trabajo del Sr. Bosch, os dará idea vuestro propio placer al escuchar su lectura; y los que conozcan por acaso mi afición á estas materias, comprenderán sin esfuerzo que cada punto, y casi cada párrafo de la Memoria de que me ocupo, ha sido para mí una verdadera tentación: la de enfrascarme en cualquiera de las cuestiones que el nuevo Académico discute y que tan de mi agrado han sido siempre; sin que haya podido detenerme más que el deseo, que hoy es casi deber, de no dar á mi escrito extensión excesiva: esto por una parte, y por otra el mismo exceso de la tentación, que con sus múltiples formas me llevaba de uno á otro lado, sin darme tiempo para caer resueltamente en ninguno de ellos. Me explicaré.

Diserta el Sr. Bosch sobre la Física-matemática, sobre los admirables problemas de la Optica, de la Electro-dinámica, de la Acústica, del Calor, y sobre la honda y difícil cuestión de las ecuaciones diferenciales; y al leer estas páginas de su Memoria, creía yo, que cualquiera de estos problemas era asunto de importancia suficiente para servir de base á mi escrito de contestación, que no ha de ser otra cosa, en el fondo, sino conjunto de forzadas variaciones sobre el propio tema elegido por el nuevo Académico: algo así como un acompañamiento de la voz cantante.

Igual impulso sentía al recorrer las páginas siguientes, en las que con tanta posesión del asunto se habla de la Mecánica general, de la Mecánica celeste, del Cálculo integral, y de las funciones elípticas de Abel: nombre sublime este último, que evoca grandezas intelectuales y desdichas humanas, y que despierta el poético y doloroso recuerdo del que fué genio imperecedero en la ciencia y mártir de una sociedad mezquina y egoista; el recuerdo de aquel desdichado sabio, repito, que murió de frío y de miseria á los treinta años, allá en las heladas soledades del Norte, después de haber emulado la gloria de los mayores matemáticos del mundo.

A bien que, si por aquellas tierras hubieran abundado los simpáticos entusiasmos del Sr. Bosch por las matemáticas y por sus adeptos, no hubiera perecido el Newton del Norte por no poder comprarse un abrigo de invierno.

¡Extraño y doloroso contraste! El gran maestro de las funciones elípticas moría de frío porque le faltaban unos cuantos metros de tela de lana ó de algodón!

Y ya sin sentirlo comenzaba á dejarme llevar por la triste y tentadora historia del matemático noruego.

Pero como todas estas cuestiones son accidentes del discurso, y muy otro es su objeto principal, seguí mi lectura buscando algo oportuno y dominante en que fijarme, convirtiéndolo en materia de mi escrito.

Más inclinado á ceder me sentí al recorrer aquellas páginas tan llenas de interés y de erudición, en que el nuevo

Académico recuerda los esfuerzos hechos para aplicar las leyes matemáticas de la Geometría y del Cálculo, no sólo á la cristalización de los seres inorgánicos, geometría maravillosa de los átomos, sino á la morfología biológica, en que la simetría y las relaciones trigonométricas del espacio parece como que se filtran en la misma masa del protoplasma; en que la ley numérica se compenetra con la función orgánica y con la distribución anatómica; en que la Mecánica se pone al servicio de la vida; y en que empieza á elaborarse en forma misteriosa y profunda la armonía de la cantidad y del orden con aquella causa espontánea é innegable que pugna por subir á las esferas de la libertad.

Pero aun al nuevo estímulo resistí, recordando lo que el nuevo Académico nos ha dicho al empezar su discurso, á saber: que se propone estudiar la aplicación de las matemáticas á las Ciencias morales y políticas. Todo lo demás no es otra cosa, según se ve, que algo así como el pórtico del Templo; y yo debo acompañar al Sr. Bosch hasta el interior del santuario.

De nuevo solicitan mi atención y con grandes tentaciones me asaltan los varios problemas, que nuestro estudioso compañero trata, sobre el influjo de los signos numéricos en la escritura y en la lengua de egipcios, indios y árabes; y otra vez me parece ver la idea engendrando los signos, el número circulando en oleadas cabalísticas por los repliegues de la historia, y la aritmética inconsciente y la geometría prehistórica moldeando en cierto modo las celdillas cerebrales del hombre primitivo. Y, sin embargo, resistí la tentación, hecho un San Antonio; que alguna vez han de emular los matemáticos á los santos, y continué la sabrosa lectura del notable trabajo que en estas líneas más enumero que analizo.

Del Cálculo de probabilidades tratan los párrafos siguientes, y los nombres de Poisson, Condorcet, Laplace, y aún pudiéramos agregar el nombre inmortal de Gauss, aparecen en ellos con la aureola de gloria que merecen, que al fin y al cabo merecen todos brillar como astros de primera magnitud en las esferas de la ciencia; y en verdad que á primera vista todo hombre sesudo creería empresa temeraria, cuando no insensata, someter al cálculo matemático, es decir, á lo más exacto, fijo y determinado, aquellos problemas cuyo fondo es lo incierto, lo dudoso y lo indeterminado, como que se fundan ni más ni menos que en la *casualidad*. Problemas, repito, por todo extremo sutiles, y más de una vez engañosos; pero que hoy son casi de actualidad, desde que el eminente matemático Mr. Bertrand ha publicado una obra sobre el Cálculo de probabilidades, que es modelo, como todo lo que el insigne secretario de la Academia de Ciencias escribe, de saber profundo, de estilo elegante y hasta de sentido común, que nunca el sentido común está demás, sobre todo, en asuntos tan enmarañados.

Pero la introducción de la Memoria del Sr. Bosch termina, el verdadero tema empieza, y no logran fascinarme ni las cándidas paradojas del *caballero de Meré,* ni la paradoja llamada de San Petersburgo, que por ser de tierra del Nihilismo y del Pesimismo, debe ser espejo de paradojas, siquiera sea espejo ahumado, ni los errores de Condorcet, ni los hermosos teoremas de Bernoulli, ni los sublimes trabajos de Laplace, ni los de Gauss, ni todas las lucubraciones posteriores, que son todas ellas como esfinges matemáticas, que defienden el templo nebuloso de la diosa Casualidad, la de más veleidades y más coqueterías entre todas las diosas.

Aquí llegó para el Sr. Bosch el verdadero asunto de su discurso, y aquí llegó para mí la ocasión de escoger el tema del mío, que como queda dicho, ha de ser uno de los que dilucida el nuevo Académico.

La Memoria á que contesto afirma, que es posible y que es conveniente, la aplicación de las Matemáticas á las ciencias morales y políticas, y lo prueba el Sr. Bosch, no con discusiones de carácter general, sino con hechos positivos. Es posible aplicar las matemáticas á dichas ciencias, puesto que se aplican; es posible obtener en tal empresa resultados importantes, puesto que ya se han obtenido; y si alguien lo duda, oiga la lista de los puntos principales que comprende la Memoria de que trato.

Aplicación de las Matemáticas á la Economía política, y en especial, á los siguientes problemas:

Al problema de los precios y á la ley de la oferta y la demanda, que el Sr. Bosch discute ampliamente y con gran conocimiento de la materia; al arduo problema del monometalismo y del bimetalismo; al crédito y á los bancos; y, por fin, á la renta de la tierra.

Aplicación de las Matemáticas á la Sociología en sus relaciones con la Economía política, abordando el problema del salario, que es como el caballo de batalla de todas las sectas socialistas, y el peligrosísimo problema del salario natural, que es una consecuencia del anterior.

Aplicación de las Matemáticas al sufragio universal, en la parte que pudiéramos llamar técnica; sin que pretenda el Sr. Bosch, y sirva esto para tranquilizar á los hombres políticos, fundar ni en el Algebra ni en la Geometría, ni siquiera en el cálculo de los infinitos, la esencia íntima de este derecho.

Y, por fin, *Aplicación de las Matemáticas á la Hacienda, al Seguro y á la Estadística,* cuestiones menos rebeldes que las anteriores á la dominación, ó, por lo menos, al protectorado de la ciencia Matemática.

Con lo cual acaba el interesante, profundo y erudito trabajo del Sr. Bosch, que en todo él nos da pruebas patentes y copiosas de sus vastos estudios y de su indiscutible talento.

El último capítulo lleva por epígrafe aquellas célebres palabras, ó aquella supuesta inscripción, que dice: "No éntre aquí nadie que no sea geómetra", y en él se condensa la tesis en períodos elocuentes, que palpitan al impulso de grandes verdades, y se caldean con el calor de grandes entusiasmos: los habéis oído, y todo comentario es inútil: no soy crítico que juzga, soy público que aplaude.

Pero al llegar á este punto, que es el punto final del Discurso del Sr. Bosch, mis dudas y mis perplejidades crecen, y mi elección es tan incierta como al principio. De todo quisiera ocuparme porque todo es interesante, y no es posible que de todo me ocupe: debo elegir ya, y, sin embargo, elegir uno de los problemas discutidos, es poner los restantes en segundo término, cuando todos merecen á competencia nuestra atención. Quede, pues, el Discurso del nuevo Académico como está, que en buenas manos estuvo al estar en las suyas, y termine yo mi grata tarea haciendo algunas consideraciones generales sobre el tema en cuestión, sin descender á pormenores, que resultarían inútiles después de los muchos, y todos oportunísimos, que habéis oído.

¿Pueden aplicarse las matemáticas á las ciencias morales y políticas? Pueden y deben aplicarse, afirma el Sr. Bosch: y demuestra su tesis, como se demuestra el movimiento: andando.

Él aduce numerosas pruebas: yo me limito á prestar mi asentimiento por lo que valga.

Pero entiéndase que el Sr. Bosch no pretende anular ciencia alguna que merezca este nombre: no intenta tampoco absorber las demás ciencias en la ciencia maravillosa de Pitágoras, Arquímedes, Newton, Descartes y Leibnitz. No: cada ramo del saber tiene su esfera propia: es como nación autónoma en la federación universal: comprende un grupo distinto de fenómenos: tiene principios y acude á leyes que le son peculiares: afecta rasgos característicos: supone especiales aptitudes en quien la cultiva, y se dirige, en suma, á un fin determinado, aunque todos estos fines se armonicen en uno total, expresión del progreso humano: como los distintos colores del iris, sin dejar de ser lo que son, se funden en suprema unidad, dando á los espacios los inmaculados resplandores de la luz blanca.

Ahora bien: una cosa es la ciencia y otra cosa son sus métodos; y, aunque cada ramo del saber utilice sus métodos especiales, el método matemático lo es de energía suprema, y á donde se aplica lleva la perfección y la evidencia, y en donde falta imperan la vaguedad, la controversia y la lucha; lucha á veces fecunda, pero siempre penosa.

Y ante todo, ¿es legítima esta aplicación de las matemáticas á las ciencias morales y políticas?

¡Quién lo duda! Yo, al menos, no lo dudo, ni tampoco, por lo visto, lo duda el Sr. Bosch.

Las ciencias matemáticas, ó como antes se decía, *la matemática*, estudian la *cantidad*, concepto universal, que se aplica á cuanto es ó existe; estudian las *funciones*, enlace causal, que pudiéramos llamarlas, de unas variables con otras; estudian el *orden combinatorio* y el *orden de posición;* estudian, por fin, todo *alto simbolismo* que reduzca las operaciones lógicas del entendimiento á operaciones algebráicas ó geométricas; y afirma el Sr. Bosch, y yo afirmo, que, bajo todas estas formas, pueden aplicarse los métodos matemáticos á las demás ciencias, aun á las que más rebeldes se muestran á la ley numérica, á la expresión analítica, ó á la representación gráfica.

Examinemos el problema, siquiera sea rápidamente, bajo todos estos aspectos.

Lo hemos dicho poco ha: la *cantidad* es categoría suprema de cuanto existe.

Cantidades son las líneas, las superficies y los volúmenes; y, por eso y por otros motivos, la Geometría es ciencia matemática.

Cantidades son la masa, la fuerza, el tiempo, la velocidad y la aceleración; y por eso el cálculo se enseñorea en la Mecánica, desde la Mecánica celeste á la Mecánica molecular.

Cantidades son las afinidades químicas; y, aunque no se hayan medido en absoluto, algo y aun mucho se avanza por este camino, con la Termo-química y las teorías de Guldberg y Waage, por ejemplo, sin olvidar la potencial termo-química y los estudios matemáticos sobre el equilibrio de las combinaciones ó sobre las leyes y velocidades de sus cambios.

Cantidades son, que pueden medirse, los pesos atómicos y los equivalentes; y de ahí los inmensos progresos realizados hasta hoy por la Química, que vienen á ser como avanzadas de otros progresos mayores.

Pero no es esto sólo: cantidades son el *dolor* y el *placer*, que harto lo sabe el sér humano cuando su fibra se estremece y sus potencias espirituales se agitan.

Cantidades son el vicio y la virtud, el mal y el bien, que suben desde los abismos del réprobo al cielo de los héroes y de los mártires, pasando por el mezquino *cero* de los indiferentes, limbo insustancial de toda pasión.

Cantidades son los conceptos de la Economía Política, como precios, producción y consumo; y muchos de ellos sujetos estan á número y medida, como os lo ha demostrado el Sr. Bosch.

Cantidad es toda ansia y todo deseo, y bien recorren la gama espléndida, sombría ó luminosa, de los anhelos terrestres y de las grandes aspiraciones.

Cantidad es el derecho, que al fin y al cabo toda justicia humana no es otra cosa que el fiel contraste, imperfecto, pero necesario, de lo que pudiéramos llamar la *cantidad jurídica*.

¿Pero á qué cansaros con inútiles enumeraciones? Donde existe la diversidad, donde el sér anda disperso en determinaciones múltiples, donde la intensidad recorre grados, allí está la cantidad como concepto inevitable de cuanto es: trama profunda del inmenso tejido en que la realidad está aprisionada. Será algo positivo, será producto de las sensaciones, será esencia metafísica de las cosas, será lo que fuere, según las diversas escuelas filosóficas pretendan explicarla; pero se impone á la razón, y en nada puede pensarse sin pensar en que eso, en que se piensa, es un término en la serie de las cantidades.

¿Pero basta que en todas las ciencias exista la cantidad, para que á todas ellas pueda aplicarse la ley numérica y el cálculo aritmético? La imparcialidad y la justicia me obligan á contestar negativamente. Para que el cálculo de los números se aplique á un fenómeno físico ó moral, dos cosas son necesarias: *unidad* y *medida*. Y para poder *medir* es indispensable estar en posesión de un método práctico, real y positivo, que determine el caso de *igualdad* entre dos cantidades; porque de la igualdad se deduce la *multiplicidad*, y de la multiplicidad brota el *número* como símbolo; y, reduciendo á *números* los fenómenos, el cálculo aritmético es aplicable.

Se sabe cuando dos segmentos rectílineos son iguales: la superposición práctica ó ideal lo demuestra.

Se sabe cuando dos pesos son iguales: la balanza lo comprueba.

Se pone en evidencia la igualdad de dos tiempos: el péndulo es su sencillo y maravilloso metro.

Con ignorarse cuál sea la esencia íntima de la electricidad, aun puede comprobarse prácticamente la igualdad de dos cargas eléctricas, de dos corrientes ó de dos potenciales, por la igualdad, pongo por caso, de sus efectos dinámicos.

Tampoco se sabe, aunque se sospeche con gran fundamento, lo que sea el calor; y, sin embargo, el termómetro pone en evidencia el caso de igualdad.

De igual modo, y aquí den fin los ejemplos, se determina en la Acústica y en la Óptica la igualdad del número de vibraciones de dos sonidos ó de dos rayos de luz.

Y si se saben medir, porque se saben igualar, una línea á otra, un peso á otro peso, y del mismo modo tiempos, velocidades, cargas eléctricas, corrientes, temperaturas y vibraciones, claro es que al cálculo en general y aun al cálculo numérico estarán sometidos todos estos espléndidos y admirables fenómenos del mundo físico. Aquí no hay duda ni vacilación: poco importa que ignoremos la esencia íntima de la materia, del calórico, de la electricidad, de la fuerza ó del espacio, porque sólo obtenemos relaciones y sólo calculamos sobre números: medimos lo desconocido por lo desconocido; lo incognoscible por lo incognoscible; el misterio de la electricidad por otro misterio como él; una x repetida 20 veces por la misma x; y, si se me permite la comparación, diré que del numerador y del denominador del quebrado desaparece el factor común desconocido, la x que representa la esencia profunda de los seres y de los fenómenos, quedando tan sólo el símbolo numérico, que es el que se halla á nuestro alcance.

Ahora bien: esta condición, que podemos llamar de *posibilidad de medida*, á que satisfacen las ciencias exactas y que determinan su carácter matemático, choca contra formidables obstáculos al pretender ingerirse en las ciencias morales, políticas y sociológicas, ó al llegar, con pretensiones de rigor absoluto, á las regiones de la crítica artística.

Yo puedo saber cuándo dos líneas son iguales; pero ¿cómo igualar dos placeres, un dolor á otro dolor, dos virtudes, dos bellezas ó dos derechos? ¿Dónde la misteriosa balanza ó el metro maravilloso?

¿Cómo cerciorarme de que un dolor es, ni más ni menos, que otro dolor, no ya en seres distintos, sino en el mismo sér? ¿Cómo probar que una virtud es precisamente la raíz cúbica, pongo por caso, de otra virtud? ¿Que, en un conflicto internacional, dos derechos son entre sí como las quintas potencias de los protocolos? ¿O que el caudal de un rico es la integral entre *o* y $\frac{\pi}{2}$ de la miseria de un pobre?

El cálculo numérico es imposible sin la igualdad práctica, positiva, tangible, experimental de las magnitudes ó cantidades de que se trate. Y esta confesión, que á fuer de leal hago ante vosotros, parece como que achica las ambiciones matemáticas del nuevo Académico, y que condena mis complacientes complicidades. Pero no tanto.

Hay muchos casos en que la realidad nos ofrece, aun en las ciencias morales y políticas, esa unidad de medida, tan necesaria como difícil de hallar, y en casi todos los ejemplos que el Sr. Bosch, con tanto acierto, ciencia tan amplia y erudición tan vasta, os ofrece en su Discurso, el *número* brota de la esencia misma del problema, y de l[illegible]as y realidades del fenómeno. Porque ¿qué es, por ejemplo, el *mercado,* sino una balanza especialísima de los precios. Y en todas las cuestiones en que interviene el cálculo de probabilidades, ¿qué importa la naturaleza íntima del problema, si es posible reducirlo al simbolismo único de una urna con bolas blancas y negras? Y, aun abordando mayores dificultades, ¿no se vislumbra el día, siquiera sea en la forma vaga de un crepúsculo, en que la intensidad del dolor ó del placer esté en cierto modo representada por la cantidad de determinadas combinaciones químicas, que en el seno del organismo se realicen á impulso del estimulante placentero ó doloroso?

En todas estas cuestiones puede decirse qué es lo que hoy se ignora; mas fuera atrevimiento grande negar en absoluto lo que quizá mañana llegue á saberse.

Pero demos por terminado este punto antes de que la tentación domine, y en él me detenga más de lo que me he propuesto. Y, pasando adelante, recordemos que la ciencia matemática no está formada tan sólo de leyes numéricas, sino de otras más altas leyes de carácter general.

Ya lo dice con exactitud y oportunidad suma el Sr. Bosch. Aun sin conocer los parámetros numéricos de una función, pueden deducirse de su forma consecuencias importantísimas, tanto para la ciencia abstracta, como para las aplicaciones prácticas; y puede afirmarse que en este punto, nuestro nuevo compañero ha predicado con el ejemplo.

Valga otro más, que á este propósito me ocurre y que condensa con rapidez y precisión mi pensamiento.

Empleando una representación geométrica, como la que usaron Dupuit, Cournot y Walras, insignes autores que más de una vez cita el Sr. Bosch, supongamos que sobre el eje de las x se cuenta el derecho arancelario impuesto á determinada mercancía; que sobre el eje de las y se toman las importaciones de la misma, y que de este modo se construye una curva: cada punto de dicha curva corresponderá á un derecho arancelario y á la importación compatible con él.

¿Conocemos hoy la naturaleza de estas curvas? ¿Sus formas, sus parámetros, sus dimensiones? No, ciertamente: sólo trabajos estadísticos minuciosos, continuos y concienzudos, podrían determinar estos diversos elementos. Pero sin conocer la naturaleza de dichas líneas pueden deducirse consecuencias importantes, prácticas, y por de contado de exactitud rigurosa.

En efecto: si el derecho arancelario aumenta, llega un caso en que la importación es nula; precisamente cuando, por lo elevada, la tarifa protectora equivalga á la prohibición absoluta. Este derecho y esta importación nula determinan un punto sobre el eje de las x, que es aquel en que, la curva característica del fenómeno que nos ocupa, corta á dicho eje.

Por el contrario, si el derecho arancelario baja y llega al origen de coordenadas, es decir, á cero, la importación llegará á un límite del cual nunca podrá pasar, porque el consumo de cualquier mercancía no es ilimitado; y este valor cero de la abscisa, y este valor máximo de la ordenada, determinarán un punto sobre el eje de las y, que corresponde al libre cambio absoluto, como el del eje de las x correspondía á la absoluta protección, es decir á la prohibición definitiva.

En resumen, la curva será desconocida hoy, pero sabemos que corta al eje de las x á una distancia finita del origen; que crece por la ley de continuidad, al menos por una continuidad de primer orden; y que corta, por fin, al eje de las ordenadas en un punto del espacio finito.

Ahora bien, esta curva, cuya ecuación desconocemos, pero cuya marcha general hemos trazado, tiene en éste y en todos los problemas del consumo y de los rendimientos, una importancia capital y una propiedad importantísima. Los rectángulos en ella inscritos, cuyos lados sean las abscisas y las ordenadas correspondientes, expresan en forma geométrica el ingreso bruto de las Aduanas, puesto que tienen por medida la ordenada por la abscisa, es decir, la cantidad de mercancías, multiplicada por los derechos que satisfacen. Esto es rigoroso, absoluto, indiscutible, sea cual fuere la ley de la curva. Pero dicho rectángulo inscrito y variable es nulo en el eje de las x, porque es nula la altura, ó de otro modo, porque no entran mercancías; es nulo otra vez en el eje de las y, porque es nula la base, lo cual significa que las mercancías nada pagan al entrar. De suerte que, en ambos puntos, el rendimiento de las Aduanas es nulo:

en el primero, porque nada entra; en el segundo, porque nada paga: resultados de sentido común, para llegar á los cuales no hacen falta ni curvas, ni ejes, ni matemáticas, ni toda la lujosa vestidura de la representación cartesiana; pero resultados que conducen á otro más profundo y de importancia decisiva, del cual no siempre el sentido común se hace cargo.

En determinado punto de la curva característica, el rectángulo de los productos aduaneros adquiere un valor máximo, lo cual no debe maravillarnos, porque cuando una cantidad variable parte de *cero*, crece, y vuelve á *cero*, encuentra indefectiblemente *un máximo* en su camino.

De donde se deduce con evidencia matemática, que existe un derecho arancelario comprendido entre cero y el límite de la protección, que es el más favorable al fisco y que es el que da mayor rendimiento en la frontera. Así como el sistema protector va, por decirlo así, marchando por el eje de la x, y el sistema librecambista trepa por el eje de las y, el fisco corre por la curva y tiende á fijarse en el punto del mayor rectángulo. Hacia la derecha ve con enojo á los proteccionistas subir los aranceles, porque su renta disminuye: los rectángulos inscritos son, en efecto, más y más pequeños. Hacia la derecha ve con igual enojo á los librecambistas subir por el eje de las y, porque sus productos aduaneros decrecen también. Y atento á su interés, á los derechos proteccionistas ó á las rebajas del librecambio, opone como solución suprema su *derecho fiscal*, que le proporciona el mayor rectángulo, ó sea el mayor ingreso.

¿Cuál es para cada producto y en cada época este derecho fiscal de mayor rendimiento?

Sólo una estadística perfecta que abarcase gran número de años y épocas varias podría fijarlo con exactitud; pero de todas maneras, si pudiera conocerse con alguna aproximación, es indiscutible que esta y otras cuestiones de Economía política y de Hacienda, en vez de agitarse entre apasionadas controversias, llegarían fácilmente á soluciones prácticas: todo lo cual viene en apoyo de la tesis que el señor Bosch sostiene con tan abundante copia de razones y con razón tan sobrada.

Y aún me atreveré á someter al superior criterio de esta Academia otro ejemplo más en apoyo de las ideas sustentadas por aquel insigne matemático.

Ejemplo singular, aplicación atrevidísima de las leyes matemáticas y de las ecuaciones diferenciales á uno de los problemas más arduos de la filosofía y de la moral: me refiero al problema del *libre albedrío.*

¡Enlazar de algún modo la libertad humana con el cálculo integral, y con las ecuaciones diferenciales!

¿No os parece que semejante propósito traspasa las fronteras del atrevimiento, y penetra casi en aquella triste región de las jaulas de hierro y de las camisas de fuerza?

Esto parece, no lo niego; y, sin embargo, cuando se penetra en el fondo del problema, el disparatado antagonismo se resuelve en algo muy serio, ó por lo menos muy digno de estudio.

Prescindiendo del problema general del determinismo en lo que al aspecto metafísico se refiere, y concretando la cuestión al *determinismo mecánico,* hay escritores que en este terreno niegan la libertad humana, fundándose en que las leyes de la Mecánica son necesarias, fatales, ineludibles, desde aquellas que determinan las condiciones todas del movimiento, hasta las que proclaman la *invariabilidad de la energía física* ó *química.* El movimiento de un sistema de puntos materiales, sujetos á determinadas fuerzas de atracción y de repulsión, está determinado también por sus ecuaciones diferenciales y por el estado inicial, que es producto de estados anteriores, algo así como la tradición ó herencia del sistema. Pero el cuerpo humano es un conjunto de puntos y de fuerzas: luego la posición, la velocidad, la aceleración de cada uno de estos puntos y de todos ellos, son cantidades geométricas ó dinámicas fijas y determinadas para cada instante, sin vacilación ni ambigüedad.

Cuando el asesino, dicen los defensores de esta tésis fatalista, levanta el brazo para descargar el golpe de muerte, su brazo se mueve en forma tal, porque las trayectorias de todos los puntos que lo constituyen no pueden ser otras. Cuando la mano alarga una limosna, la ecuación diferencial es la caritativa en todo caso, porque la máquina humana en aquel momento se siente arrastrada al bien por las leyes de la Dinámica. La vibración de las celdillas cerebrales, la palpitación de la fibra carnal, la contracción del músculo, todo está escrito de antemano, según la escuela filosófica que cito, en las ecuaciones diferenciales del problema: como de la ecuación $x - 3 = 0$ solo puede deducirse un valor $x = 3$, así de las ecuaciones de la Mecánica se deducen en función del tiempo los valores de las coordenadas de cada punto material del universo, sea este punto gota que vaya perdida por el Océano, arena que arrastre la corriente del río, átomo de hidrógeno que vague en la atmósfera solar, fibra humana que palpite al calor de la pasión, lágrima que ruede por la mejilla, ó glóbulo rojo que el golpe del corazón empuje por el torrente circulatorio.

Aunque el hombre pudiera pensar en forma espontánea, aunque sintiere el bien y el mal y su diferencia, aunque en la región de las ideas fuese libre, afirma la teoría en cuestión que, al convertir en actos sus ideas, sus sentimientos ó sus pasiones, el fatalismo de la Mecánica le obligaría á seguir las curvas fijas del problema, con las velocidades correspondientes y con las aceleraciones que las integrales determinen. Inmensa máquina la del universo, que en cada instante tiene la única posición que puede tener y que arroja impasible de sus ecuaciones propias, que son sus ecuaciones diferenciales, el bien y el mal, el crimen y la virtud, lo sublime y lo grosero, el malvado y el héroe, el egoista y el mártir, como una máquina industrial ó agrícola arroja madera aserrada, hierro laminado, espigas desechas ó abono animal.

Tales objeciones, ante el sentido común y ante la afirmación de la conciencia, pasarán sin morder; porque la mayoría de las gentes se cuida poco de ecuaciones diferenciales, de las que ni aun habrán oido hablar en los periódicos noticieros; pero ante la razón severa del hombre de ciencia, y sobre todo ante el matemático, si no son decisivas, son formidables.

De muy antiguo se viene debatiendo bajo diversas formas el mismo problema, y, en este siglo sobre todo, muchos pensadores han procurado y procuran hallar dentro de la moderna psico-física soluciones claras y concluyentes, que desvanezcan la objeción tremenda de la escuela fatalista; pero ignorando como ignoran, casi todos ellos, los principios de la Dinámica, ó conociéndolos de una manera incompleta, sus explicaciones son de todo punto inadmisibles; porque sin sospecharlo suponen cierto lo mismo que pretenden probar: solo á mi juicio el eminente matemático francés Monsieur Boussinesq presenta una solución, que sean cuales fueren las objeciones á que se preste, encierra un gran fondo de verdad; sólo él penetra por los campos de la Moral y de la Filosofía, como desea el Sr. Bosch que se penetre: con valor y con empuje.

No ignoro que mientras los filósofos espiritualistas acogen con profunda simpatía el pensamiento del ilustre profesor, matemáticos no menos ilustres lo rechazan con desdén y hasta con ironía, oponiendo á una solución como esta, solución armónica con la Fisiología moderna, con la Mecánica molecular y con las más elevadas doctrinas de la Químíca, unas cuantas salidas humorísticas que nada prueban como no sea el ingenio literario de sus autores.

La teoría de Mr. Boussinesq expuesta en dos palabras, es la siguiente.

Las ecuaciones diferenciales del movimiento de un sistema de puntos tienen diversas integrales generales, y se diferencian unas de otras por las condiciones del momento inicial que consideremos.

Por cada una de estas integrales marcharían, si puedo expresarme de este modo, los puntos del sistema material que contituye el cuerpo humano, de una manera fatal y necesaria: en cada una de ellas la Mecánica impera, la libertad no tiene manera de ejercitar su acción. Estas integrales son las del fatalismo mecánico, las de la ciencia matemática, las del mundo inorgánico.

Se separa un péndulo, por ejemplo, de su posición; se le comunica cierta velocidad, y se le abandona: pues cae fatalmente, y su movimiento está definido por su ecuación diferencial y por sus condiciones iniciales.

Pero las integrales generales no son las únicas soluciones del sistema diferencial, dice Mr. Boussinesq; existen además las *soluciones singulares*, que en cierto modo constituyen algo así como las envolventes de las primeras, y aun si se quiere, el tránsito posible de unas á otras: y bien me dispensaréis por la índole de este escrito, lo vago de los términos que empleo.

Dichas soluciones singulares contituyen dentro de la Mecánica la región de lo indeterminado: la Mecánica es insuficiente en estos casos: en tal región nada es necesario y forzoso: el fatalismo inorgánico queda como en suspenso, y ellas representan, como hemos dicho, el tránsito *sin consumo de trabajo* de una á otra integral general, de una á otra trayectoria fatalista: del brazo que cae armado de un hierro, á la mano que se extiende alargando una limosna.

Suponed que el péndulo ideal, de que antes os hablaba, es un sér vivo é inteligente: mientras oscila en un plano, su movimiento es fatal, es mecánico, es necesario; pero si en sus oscilaciones llega con *velocidad nula* á la posición vertical superior, allí se queda en suspenso y en equilibrio instable, precisamente porque esa es la *solución singular*. Y desde esa posición, *con un esfuerzo menor que cualquier esfuerzo dado, por pequeño que sea,* se le puede lanzar en cualquier plano vertical; porque suponemos no *un eje* sino *un punto* de suspensión. Uno de estos planos representará por ejemplo la fatalidad mecánica de la acción virtuosa, y otro plano la fatalidad mecánica de la acción criminal; pero entre las dos, desde la solución singular, el libre albedrío elige, y si en cada plano la Dinámica impera, en el punto superior la libertad domina y escoge, y es libertad. Escoger libremente entre infinitas fatalidades, es, en efecto, ser libre sobre todas ellas. Y esta solución, nótese bien, la ley matemática la brinda con sus indeterminaciones matemáticas: es como si el fatalismo del mundo inorgánico, al llegar á dichas soluciones singulares, quedara en suspenso esperando influencias de orden superior y condiciones del orden moral, allí donde las condiciones del orden material son insuficientes para los nuevos rumbos dinámicos del sistema.

Ahora bien: según Mr. Boussinesq, los seres vivos en general, y el hombre en esfera más alta, no son otra cosa dentro del orden mecánico, que estas *soluciones singulares* de las ecuaciones generales del movimiento.

Sin discutir dicha solución, que es bella, que es grandiosa, y que yo sostengo que es profunda, debe advertirse que, en efecto, las combinaciones químicas á medida que pasan del mundo inorgánico á los orgánismos vivos, tienden á pasar del equilibrio estable á sistemas más y más instables, llegando sobre todo en el sistema nervioso á convertirse en algo semejante á las mezclas explosivas: acumulación de energías potenciales que lo mismo pueden estallar hoy que mañana, y cuya combinación se determina por energías mínimas que parten de los centros en que al parecer reside la espontaneidad biológica. ¿Tales hechos, no es verdad que coinciden punto por punto con la teoría de las soluciones singulares de Boussinesq? Y, si todavía se niega esta coincidencia absoluta, ¿no hay al menos una coincidencia análoga, á la que existe entre el círculo y un polígono regular inscrito de innumerables lados?

He citado este ejemplo, que me atreveré á llamar curiosísimo, como prueba notable de que, aun prescindiendo de toda aplicación numérica, aun sin salir del estudio de las leyes abstractas, esta tendencia de nuestro compañero á infundir el método matemático en las ciencias morales y políticas, es una tendencia legítima, puede ser grandemente provechosa, y cuenta con partidarios ilustres y numerosos predecesores, muchos de cuyos nombres habéis oído en la Memoria del Sr. Bosch.

Pero no sólo estudian las matemáticas el número y el cálculo numérico, ó la cantidad abstracta y la ley que en éste ó aquel caso determina sus variaciones, sino también la agrupación y el orden de las cantidades y su posición respectiva: de donde brotan nuevas aplicaciones de las ciencias matemáticas, que el Sr. Bosch señala con gran acierto y demuestra con ejemplos interesantes. No presentaré yo ninguno nuevo, y sólo diré que, bajo este concepto considerados, los problemas morales, sociológicos y aun jurídicos, no son en manera alguna inaccesibles á la Geometría y al Análisis.

Al fin y al cabo nadie ignora que hay una Geometría de posición; todo el mundo sabe que existe un cálculo combinatorio en que se prescinde del concepto de magnitud, y en que los seres se despojan de su materia para trocarse en entidades ó para espiritualizarse, según la teoría pitagórica, hasta convertirse en un *número;* números y entidades que se agrupan, que se ordenan, que se cruzan, dibujando en el pensamiento las grandes combinaciones de lo *sucesivo* y de lo *simultáneo.* Y caminando en este orden de ideas ¿quién me dice á mí, ni quién puede asegurarme, que no se verán sorprendidos cualquier día, pongo por caso los jurisconsultos, con una Geometría del Derecho?

Hoy se debate apasionadamente en los parlamentos sobre unos ú otros derechos políticos; choca el derecho contra el derecho con estruendo formidable en las fronteras; con ensañamiento y terquedad en los tribunales de justicia; y, sin embargo, quizá llegue un día en que, aplicando la Geometría á los problemas jurídicos, se simbolicen por esferas dilatadas, y dilatables en el espacio, los derechos de una y otra clase, y en que el matemático estudie tranquila y reposadamente cómo se limitan y cómo deben limitarse unas á otras estas simbólicas esferas, ya en los conflictos entre particulares, ya en el choque de una nación con otra, ya en las luchas del derecho individual con el Estado, ya en cualquiera de los arduos problemas de la Sociología. Y no me causaría asombro, que en el momento más inesperado penetrase por el campo de los hombres de ley, que es en ocasiones campo de Agramante, un nuevo Espinosa de la Jurisprudencia con una novísima Geometría del derecho, dividida en lemas, teoremas, escolios y conclusiones, y adornada con la severa vestidura del cálculo matemático.

Pero dejando aparte estas fantasías á que por complacer á mi nuevo compañero, y algo también por dar gusto á mis propios instintos, me lanzo, debo recorrer más rápidamente que hasta aquí el camino que me resta para poner término á mi difícil aunque agradable tarea.

Por tres portillos, y pase la comparación, hemos visto que pueden penetrar las matemáticas en las ciencias morales y políticas: por la ley numérica, por la teoría de las funciones y por los conceptos de orden y combinación; pero aún queda un nuevo punto de ataque, y valga la palabra, á la moderna invasión matemática.

Las Matemáticas no son en el fondo más que un gran simbolismo de prodigiosa potencia: son, respecto á la lógica ordinaria, lo que la máquina de vapor es con relación á la primitiva palanca. La lógica ordinaria procede lenta y penosamente á lo largo de una serie lineal de silogismos aristotélicos: las matemáticas constituyen un organismo enorme, un poderoso motor de múltiples dimensiones, que llega con rapidez, á veces de un solo salto, á las más remotas consecuencias; que penetra en las más ocultas profundidades; que desentraña los más recónditos senos de las premisas establecidas. Las matemáticas, bajo este punto de vista consideradas, no son más que un *aparato lógico* de alta presión que exprime con potencia gigantesca cuantos problemas á ellas se someten. Pero si las ciencias todas, lo mismo la Economía política, que la Política; así la Moral como el Derecho; tanto la Sociología como la misma Estética, parten de hechos, de axiomas y de leyes empíricas, que en último resultado se someten para su construcción definitiva al método lógico, ¿cómo podrá negarse que la ciencia matemática, que es la lógica suprema, perfecta, infalible en cuanto lo sea la razón humana, y poderosa por añadidura; cómo podrá negarse, repito, que está llamada á ejercer una influencia transcendental en todos los conocimientos humanos?

Esto afirma el Sr. Bosch, y esto, á mi entender, es indiscutible. Donde las matemáticas imperan, lo he dicho antes, imperan la verdad y el saber exacto: donde no, dominarán en todo caso hechos ciertos y leyes empíricas, fundamentales aquéllos y de gran importancia éstas, pero que no son todavía la alta expresión de la ciencia. Y, en cambio, donde ni dominan las matemáticas ni se hace sentir su influencia, siquiera sea lejana, todo será duda, fluctuación, hipótesis que se forjan, hipótesis que se deshacen, y, cuando más, la Retórica caldeada por la pasión ó el ingenio, escamoteando sin discernimiento errores y verdades.

Hasta tal punto son las matemáticas una especialísima lógica, que desde los tiempos de Leibnitz, se han hecho esfuerzos, no siempre estériles, para someter la lógica ordinaria al algoritmo matemático; y basta para demostrarlo citar los trabajos del mismo Leibnitz, del inmortal Hamilton, de Cayley, de Boole, de Grassmann y de Schvoeder; limitándome, para abreviar la lista, á los nombres más ilustres.

Ya hay quien reduce las operaciones lógicas del entendimiento á ecuaciones matemáticas, y con ellas opera, y sobre ellas desarrolla sus cálculos, establece sus incógnitas, efectúa sus eliminaciones, y entregando sus premisas á la maquinaria matemática, hace funcionar sus ruedas y sus palancas hasta que arrojan con inflexible rigor las más remotas y ocultas consecuencias: algo así como aquel intento á la vez extraño y grandioso de Raimundo Lulio, en su *Ars generalis sive magna,* en el que, combinando los nombres de las ideas abstractas según procedimientos mecánicos, pretendía demostrar la exactitud de todas las proposiciones que á tal mecanismo se sometiesen y descubrir á la vez nuevos y recónditos misterios.

Por donde yo veo una comprobación más de la honda verdad que encierra la Memoria que acabais de oir, y una prueba evidentísima de que no se trata en ella de ilusiones amorosas del que por su amor á la ciencia predilecta la ve en todas partes; sino, bien al contrario, de una aspiración noble hacia algo que tendrá realidad plena en un porvenir más ó menos remoto.

Pero, antes de terminar mi trabajo, séame permitida una aclaración.

Posible es, aun aplicando los métodos matemáticos á cualquier ciencia, llegar á resultados absurdos ó perderse en empresas estériles. El método matemático no es un amuleto maravilloso, que por sí sólo saque algo de la nada, que realice lo imposible, que descubra misterios metafísicos jamás descubiertos y que dé genio al que no lo tiene y adivinación á los que no nacieron profetas.

El método matemático es un *método*, un procedimiento, un simbolismo de soberana potencia; pero simbolismo, al fin, que necesita, como todo método lógico, aplicarse á algo para que funcione: aplicarse, digo, á hechos, á leyes empíricas, á conceptos, á axiomas, á relaciones entre cantidades, á hipótesis si se quiere, que también á las hipótesis se aplica. Así como toda máquina necesita trabajar sobre una primera materia, sea ésta, fibra vegetal, haz de trigo, madera, hierro, terrón de hulla ó pedazo desprendido de filones metalíferos, así las matemáticas necesitan una primera materia á la que puedan aplicar sus procedimientos deductivos.

De suerte que el método matemático será responsable del encadenamiento lógico de las proposiciones y de la exactitud lógica de las consecuencias: no de las consecuencias mismas. Si los hechos, si las hipótesis, si las leyes empíricas, en suma, si las premisas son falsas, las Matemáticas llegarán impasibles, si la palabra es permitida, á las más absurdas consecuencias; y no hay que enojarse con ellas, sino con el mal aconsejado que les dió el *absurdo* y *la falsedad* como primera materia de su trabajo lógico.

Si á un laminador se le da cobre, no arrojará *hierro* laminado; si se lanza la locomotora por una vía que conduzca al abismo, al abismo irá: la máquina hizo cuanto pudo: marchar velozmente.

Y esto sucede hoy mismo en todas las aplicaciones de las matemáticas á la Física, á la Química, á la Astronomía, á todas las ciencias en que el método matemático domina ó influye, sin que nadie con razón las culpe cuando se llega á consecuencias inaceptables por ser opuestas á la realidad experimental.

¿Se admite, por ejemplo, en la Óptica la teoría de la emisión y bajo este concepto se plantea matemáticamente el problema? Pues el cálculo dará todas las consecuencias que, *á ser cierta la hipótesis,* deberían verificarse en el seno de los fenómenos naturales. ¿Es que estas consecuencias no se verifican? ¿Es que resultan incompatibles con los hechos? En tal caso, la hipótesis es la que se desecha, que la teoría matemática tan firme y valedera es al fin como era al principio.

¿Se admite, por el contrario, la teoría de las ondulaciones? Pues el cálculo opera de nuevo, comprueba hechos, anuncia fenómenos, se adelanta á la experiencia, explora el horizonte, y de este modo llega á crear la ciencia admirable de Fresnel y Cauchy.

¿Se admite, como hipótesis fundamental, que el calor es una substancia? Carnot aplicará inmediatamente el cálculo á tal hipótesis y echará las bases de una Termodinámica, en gran parte falsa, que Mr. Bertrand, en una obra notabilísima ha desarrollado como estudio histórico, hasta llegar á sus últimas consecuencias; y como algunas de estas consecuencias son opuestas á la realidad, la hipótesis se viene á tierra, sin que quede en pie mas que el llamado *segundo principio* de la Termodinámica. Y, modificada la hipótesis, de nuevo se confió al análisis matemático la elaboración de la nueva ciencia, sin que el primer fracaso desacreditase en poco ni en mucho al severo é inflexible constructor de todo gran edificio lógico.

Porque nótese que, bajo este punto de vista considerado, el método matemático es el auxiliar más poderoso de los modernos *procedimientos positivos;* nadie como él desentraña las consecuencias de varias premisas, luego nadie como él puede ponerlas á prueba: es el crisol en que todo se depura: descubre las armonías, descubre las discordancias, hace resaltar lo contradictorio por oculto que esté, y en punto á hipótesis, que son y han sido y serán inevitables en la ciencia, digan lo que quieran gentes que sólo ven la superficie de los hechos, no hay procedimiento como el procedimiento matemático para aquilatarlas, constituyendo de este modo una especie de *experimentación racional* de orden superior.

Ya comprendéis que el campo es vastísimo, y que, si en él me engolfara, este discurso tendría mucha más extensión de la que debe tener en ley de justicia y hasta en ley de cortesía. Permitidme, pues, que aquí ponga término á mi trabajo, saludando de nuevo á nuestro digno compañero, cuyo talento, que todos reconocen; cuyo saber, que sobradamente conociais al elegirle, pero que una vez más se ha hecho patente; cuya actividad que á todas partes llega, así á las ciencias positivas como á las ciencias morales y políticas; cuya brillante carrera, que hace presagiar en lo futuro mayores triunfos; y cuyo entusiasmo por las ciencias matemáticas, que bien se revela en el notabilísimo discurso que os ha presentado, le hacen merecedor de ocupar el puesto que ya ocupa en este centro académico.

Siga con el mismo entusiasmo que hasta aquí el señor Bosch, que en estos tiempos modernos, de agitación nerviosa y de apasionadas luchas, la ciencia pura es en cierto modo lo que el solitario claustro en la Edad Media: el supremo refugio de los que, fatigados del combate diario, buscan consuelo de las impurezas de la realidad en los goces desinteresados de las grandes verdades.

Revuélvanse los intereses, bramen las pasiones, afile sus uñas el desengaño, traigan palideces las tristezas: ante un teorema inquebrantable de Geometría se estrella impotente el oleaje humano; y la hermosura de las grandes teorías despierta la fe en la verdad; y los horizontes siempre abiertos y esplendorosos de la ciencia, son estímulo permanente para el pensamiento.

El amor por la ciencia es el amor por la verdad: amor que nunca acaba; que, cuanto más se sacia, más apetece; y cuanto más consigue, más anhela, porque en su fondo palpita lo infinito como fuente inagotable.