REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

Recientes aspectos del Análisis Funcional

DISCURSO

LEIDO EN EL ACTO DE SU RECEPCION

POR EL

EXCMO. SR. D. MANUEL VALDIVIA UREÑA

Y

CONTESTACION

DEL

EXCMO. SR. D. GERMAN ANCOCHEA QUEVEDO

EL DIA 20 DE ABRIL DE 1977

MADRID
Domicilio de la Academia:
VALVERDE, 22.—TELEFONO 221-25-29
1977

Depósito Legal M. 13.805.-1977

TALLERES GRÁFICOS VDA. DE C. BERMEJO - J. GARCÍA MORATO, 122 - MADRID

DISCURSO

DEL

EXCMO. SR. D. MANUEL VALDIVIA UREÑA

TEMA

RECIENTES ASPECTOS DEL ANALISIS FUNCIONAL

Excmo. Sr. Presidente.
Excmos. Sres. Académicos.
Sras., Sres.:

Quiero expresar ante todo mi más profundo agradecimiento, señores Académicos, por el gran honor que me habéis concedido al designarme para ocupar un puesto en esta Real Academia. Soy consciente de la enorme responsabilidad que he contraído al aceptar distinción tan elevada, por lo que pondré todo mi entusiasmo y capacidad al servicio de esta insigne Corporación.

Vengo a ocupar la vacante del ilustre Profesor D. Francisco Navarro Borrás, que ostentaba la Medalla núm. 32.

Don Francisco Navarro Borrás nació en Reus en el año 1905. Realizó los estudios de Bachillerato en dicha ciudad, finalizándolos con la calificación de Sobresaliente y Premio Extraordinario. En el año 1924 termina brillantemente en la Universidad de Zaragoza la licenciatura de Ciencias Químicas y dos años más tarde, en la Universidad de Barcelona, se licencia en Ciencias Exactas, obteniendo en ambos grados Premio Extraordinario. En el año 1929 se doctora en Ciencias Exactas, en la Universidad de Madrid, también con Premio Extraordinario.

Después de haber ocupado en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Barcelona el puesto de Profesor Auxiliar de Geometría Analítica y Ecuaciones Diferenciales, gana brillantemente, por oposición, en el año 1930, la Cátedra de Mecánica Racional de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid. Un año más tarde obtiene el título de Arquitecto de la Escuela Superior de San Fernando, de Madrid.

En el curso 1931-32, pensionado en Alemania, trabaja con los eminentes Profesores: Hamel, Von Mises, Schrödinger y Hammerstein.

En 1933 consigue, por concurso, una cátedra en la Escuela Superior de Aerotecnia, de Madrid (Cuatro Vientos), en donde tuvo a su cargo la asignatura de Mecánica Racional. También en el mismo año, es nombrado Profesor agregado de la Escuela Superior de Arquitectura, de Madrid, encargándose de las asignaturas de Mecánica Racional, Cálculo Integral y Topografía.

A partir de 1939 desempeña los cargos de Arquitecto del Ministerio de Justicia, Consejero Nacional de Educación (1941) y Arquitecto Jefe de la Oficina Técnica para Construcción de Escuelas del Ministerio (1941).

En el año 1942 fue Decano de la Facultad de Ciencias, de Madrid y, desde el año 1942 al 1946, Director del Instituto «Jorge Juan» de Matemáticas.

El Profesor Navarro Borrás publicó valiosos trabajos científicos y didácticos e impartió interesantísimos cursos monográficos sobre Análisis Matemático, Mecánica elástica, Mecánica de Fluidos y, en especial, sobre Ecuaciones Integrales lineales y no lineales, de las que tenía un amplio y profundo conocimiento, así como de las ecuaciones integrales singulares y de las ecuaciones íntegro-diferenciales.

Finalmente, quiero poner de manifiesto las grandes dotes que tuvo el Profesor Navarro Borrás para la docencia. Fue un Profesor brillantísimo, de gran agudeza mental, que tenía la virtud de exponer con tal claridad sus lecciones, que los conceptos más difíciles de la Mecánica parecían fáciles explicados por él.

* * *

Pasamos ahora a desarrollar el tema que hemos elegido para esta ocasión y que se centra, fundamentalmente, en ciertos problemas y desarrollos del Análisis Funcional, incluyendo cuestiones abiertas en las cuales se trabaja actualmente.

La teoría clásica de los espacios de Banach descansa sobre cuatro teoremas básicos: el teorema de Hahn-Banach, el teorema de Banach-Steinhauss, el teorema de la aplicación abierta y el teorema de la gráfica cerrada. En la teoría de los espacios localmente convexos, el teorema de Hahn-Banach tiene una extensión satisfactoria. No sucede lo mismo con el teorema de Banach-Steinhauss, el cual es solamente válido para la clase de los espacios tonelados, introducida por Bourbaki. Con respecto a los teoremas de la aplicación abierta y de la gráfica cerrada nos ocuparemos, en lo que sigue, más detalladamente, y expondremos otros problemas ligados íntimamente con ellos.

El teorema clásico de la aplicación abierta afirma que si H y K son dos espacios de Banach y f es una aplicación lineal y continua de H sobre K, entonces f es abierta, es decir f transforma cada subconjunto abierto de H en un subconjunto abierto de K.

Si P y Q son dos conjuntos cualesquiera y g es una aplicación de P en Q, la gráfica de g es el subconjunto de los pares $(x, f(x))$ del producto cartesiano P × Q, cuando x varía en P.

El teorema clásico de la gráfica cerrada puede enunciarse de la siguiente forma: Si g es una aplicación lineal entre los espacios de Banach P y Q, de manera que la gráfica de g sea cerrada en el producto topológico P × Q, entonces g es continua.

Puede demostrarse que los dos teoremas anteriores son equivalentes en la categoría de los espacios de Banach, pero no sucede así si se utiliza la categoría de los espacios localmente convexos.

En el año 1950, en un trabajo conjunto de J. Dieudonné y L. Schwartz, publicado en los Anales del Instituto Fourier, introducen dichos autores, inspirados por la teoría de las distribuciones, los espacios (L F) estrictos y estudian muchas de sus propiedades, utilizando como modelos los espacios de sucesiones de Köthe. Se pone de manifiesto en este artículo que el teorema de la aplicación abierta es cierto cuando el espacio de partida P, así como el espacio de llegada Q, para la aplicación lineal, suprayectiva y continua g de P en Q, son espacios (L F) estrictos.

Sirva como nota curiosa que, al final del trabajo citado anteriormente, figuran diez cuestiones abiertas, que no son fáciles de ningún modo, con las que se inició en la investigación el célebre matemático Alexander Grothendieck, dando respuesta a todas ellas en un plazo muy breve, lo cual sirvió también para que se fijaran en él Dieudonné y Schwartz.

En el mismo año 1950, el Profesor Köthe generaliza el teorema de la aplicación abierta para espacios (L F) no necesariamente estrictos.

Un paso más en esta dirección lo da Grothendieck en su famosa tesis doctoral de 1954, que trata sobre productos tensoriales topológicos y espacios nucleares, en donde demuestra que si P es un espacio ultrabornológico, es decir, un límite inductivo de espacios de

Banach, Q es un espacio (L F) y g es una aplicación lineal de P en Q, cuya gráfica es cerrada en P por Q, entonces g es continua. Dicho matemático, guiado por el deseo de obtener un teorema de gráfica cerrada que incluyera en la clase de espacios de llegada al espacio $\mathcal{D}'$ de las distribuciones, conjeturó que su enunciado era cierto para una clase de espacios de llegada, que contenía los espacios de Banach y era estable para las siguientes operaciones: productos numerables, sumas directas numerables, cocientes separados y subespacios lineales cerrados.

La primera contribución a la solución del problema de Grothendieck se debe a Slowikowski, en el año 1961. Más tarde, en el año 1966, el matemático ruso D. A. Raikov introduce una clase de espacios localmente convexos, que, aunque se manejan con dificultad, resuelven totalmente y de una forma positiva la conjetura de Grothendieck.

Otra solución al problema de Grothendieck fue dada en 1967 por M. De Wilde, mediante la introducción de los espacios con redes de tipo $\mathcal{C}$. La ventaja de la teoría de De Wilde sobre la de Raikov reside, fundamentalmente, en dos hechos: 1.º Los espacios definidos por De Wilde son fáciles de manejar y, en general, no es difícil comprobar si un espacio tiene una red de tipo $\mathcal{C}$. 2.º No es necesario exigir que la aplicación lineal tenga su gráfica cerrada; basta con que sea sucesionalmente cerrada. Es evidente que, desde el punto de vista práctico, resulta más cómodo utilizar sucesiones que filtros.

En un espacio localmente convexo E, una red es una familia

$$\mathcal{M} = \{C(n_1, n_2, \ldots, n_k)\}$$

de subconjuntos de E, donde $k, n_1, n_2, \ldots, n_k$ varían en el conjunto de los números enteros positivos, de manera que se verifica:

$$E = \cup \{C(n_1) : n_1 = 1, 2, \ldots\},$$
$$C(n_1) = \cup \{C(n_1, n_2) : n_2 = 1, 2, \ldots\}, \ldots,$$
$$C(n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}) = \cup \{C(n_1, n_2, \ldots, n_k) : n_k = 1, 2, \ldots\}.$$

Una red $\mathcal{M} = \{C(n_1, n_2, \ldots, n_k)\}$ es de tipo $\mathcal{C}$ si, para cada sucesión $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ existe una sucesión

$$(\rho_k)_{k=1}^{\infty}, \ \rho_k > 0, \ k = 1, 2, \ldots,$$

tal que si

$$0 \leqslant \lambda_k \leqslant \rho_k, \ x_k \in C(n_1, n_2, \ldots, n_k), \ k = 1, 2, \ldots :,$$

la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$$

converge en E.

El teorema de la gráfica cerrada de De Wilde dice: si g es una aplicación lineal de un espacio ultrabornológico E en un espacio localmente convexo F que tiene una red de tipo $\mathcal{C}$, de manera que la gráfica de g es sucesionalmente cerrada en E $\times$ F, entonces g es continua.

El correspondiente teorema de la aplicación abierta se puede enunciar de la siguiente forma: sea E un espacio que tiene una red de tipo $\mathcal{C}$. Si g es una aplicación lineal de E sobre un espacio ultrabornológico F, de manera que la gráfica de g es sucesionalmente cerrada, entonces g es una aplicación abierta.

A continuación vamos a decir algunas palabras acerca del teorema de la gráfica boreliana de L. Schwartz, publicado en 1966. Recordemos que una aplicación g de un espacio topológico E en un espacio topológico F tiene gráfica boreliana si su gráfica es un conjunto de Borel en el producto topológico E $\times$ F. Puesto que cada conjunto cerrado de E $\times$ F es un conjunto de Borel, si g tiene su gráfica cerrada, entonces dicha gráfica es boreliana.

Se dice que un espacio topológico separado es susliniano si es imagen continua de un espacio métrico completo separable. Es inmediato que la imagen continua de un espacio susliniano es susliniano y, en particular, el cociente de un espacio susliniano por una relación de equivalencia, si es separado, es susliniano. El producto numerable de espacios suslinianos es susliniano, así como la unión numerable de subespacios suslinianos de un espacio topológico de Hausdorff. También es susliniano todo subespacio boreliano de un espacio susliniano. Los espacios usuales del Análisis Matemático son ultrabornológicos y suslinianos, en particular los espacios $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{O}_M$, $\mathcal{O}'_M$, $\mathcal{O}_C$ y $\mathcal{O}'_C$.

El teorema de la gráfica boreliana de L. Schwartz se enuncia así. Sea E un espacio ultrabornológico. Sea F un espacio localmente convexo susliniano. Toda aplicación lineal g de E en F, cuya gráfica en $E \times F$ sea boreliana, es continua.

La demostración que da L. Schwartz de su teorema se basa en la teoría de la medida, y en especial en las dos propiedades siguientes: a) Sean X e Y dos espacios topológicos suslinianos. Sea f una aplicación de X en Y de gráfica boreliana. Entonces, para cada conjunto de Borel B de Y, la imagen recíproca de B por f es medible para toda medida de Radon sobre X. b) Sea E un espacio ultrabornológico. Sea F un espacio localmente convexo arbitrario. Entonces, toda aplicación lineal g de E en F, universalmente medible-Borel, es continua (Donady).

André Martineau logra liberar al teorema de Schwartz de la teoría de la medida, publicando en 1966 una prueba basada en las categorías de Baire.

El teorema de la gráfica boreliana es muy útil por lo siguiente: 1.° Puede emplearse en casi todos los espacios importantes de las aplicaciones. 2.° La definición de espacio susliniano es muy simple. 3.° No es difícil comprobar, en general, si un espacio es susliniano.

Desde el punto de vista teórico, el teorema que estamos considerando tiene un inconveniente muy claro: puesto que los espacios suslinianos son imágenes continuas de espacios métricos, completos y separables, son también separables, de aquí que no contengan a los espacios de Banach no separables y, por tanto, el teorema de Schwartz no generaliza el clásico teorema de la gráfica cerrada.

Es natural hacerse la pregunta de si, sustituyendo «gráfica boreliana» por «gráfica cerrada», la teoría de De Wilde contiene el resultado de Schwartz. Hasta ahora este problema ha permanecido abierto. Aunque se conoce el resultado parcial que asegura que todo espacio susliniano E, sucesionalmente completo, tiene una red de tipo $\mathcal{C}$, no es conocido si la propiedad sigue siendo cierta suprimiendo en E la condición de ser sucesionalmente completo.

Pasamos ahora a considerar una extensión de los espacios suslinianos que es útil en muchas cuestiones del Análisis Funcional. Se trata de los espacios K-analíticos de Choquet. En 1953, G. Choquet publica un trabajo en los Anales del Instituto Fourier, en donde desarrolla la parte esencial de la teoría de las capacidades. Dicha teoría tiene por cuadro natural los espacios K-analíticos, que pueden definirse como aquéllos espacios topológicos que son imágenes continuas de subconjuntos $K_{\sigma\delta}$ de espacios compactos. Una definición que se emplea bastante de los espacios K-analíticos, en el contexto de los espacios topológicos completamente regulares, es la siguiente: un espacio topológico completamente regular T es K-analítico si existe una aplicación g de un espacio métrico E, completo y separable, en las partes compactas de T, de manera que si x es un punto cualquiera de E y V es un entorno en T del conjunto $g(x)$, entonces $g^{-1}(V)$ es un entorno de x en E.

En 1968, en un artículo publicado en Studia Mathematica, A. Martineau amplía la teoría de Schwartz para espacios K-analíticos, obteniendo un teorema de la gráfica cerrada en el contexto de los grupos topológicos.

En la categoría de los espacios localmente convexos, el teorema de Martineau tiene mayor alcance que el teorema de Schwartz, ya que la clase de los espacios K-analíticos contiene los espacios de Banach reflexivos, con las topologías débiles, sean separables o no. Por otra parte, dicho teorema no generaliza el clásico teorema de la gráfica cerrada, puesto que existen espacios de Banach que no son K-analíticos.

Es sorprendente el siguiente teorema de Nakamura, que no exige ninguna condición de linealidad: sean E y F dos espacios topológicos completamente regulares. Sea g una aplicación de E en F, cuya gráfica sea cerrada en $E \times F$. Si E es un espacio de segunda categoría y F es K-analítico, existe un subconjunto A de primera categoría en E, de manera que la restricción de g a $E \sim A$ es continua.

La teoría de Ptak

Una aplicación lineal g de un espacio localmente convexo E sobre un espacio localmente convexo F es casi abierta si, para cada entorno absolutamente convexo U del origen en E, la clausura de $g(U)$ en F es un entorno del origen en F. Los espacios tonelados F se caracterizan por la siguiente propiedad: cada aplicación lineal g de un espacio localmente convexo arbitrario E sobre F es casi-abierta.

Un espacio localmente convexo E es un espacio de Ptak, o B-completo, si cada subespacio F del dual topológico E′ de E, que corta a cada conjunto equicontinuo A en un conjunto débilmente cerrado en A, es débilmente cerrado en E′. Si en la definición anterior se toma F débilmente denso en E, se dice que E es un espacio infra-Ptak o B_r-completo.

Es obvio que cada espacio de Ptak es un espacio infra-Ptak. No se conoce si existe algún espacio que no sea de Ptak y sea infra-Ptak.

Un teorema de Collins-Ptak afirma que un espacio localmente convexo E es completo, si cada hiperplano de E′, que corta a los conjuntos equicontinuos A en subconjuntos débilmente cerrados en A, es débilmente cerrado en E′. Como consecuencia inmediata puede afirmarse que todo espacio infra-Ptak es completo.

Cada cociente separado de un espacio de Ptak es un espacio de Ptak, de aquí que cada cociente separado de un espacio de Ptak es completo. En la búsqueda de espacios completos que no sean de Ptak puede utilizarse la propiedad anterior. De hecho los primeros ejemplos que se dieron de espacios completos, no de Ptak, tenían cocientes no completos.

En un simposium de Análisis Funcional celebrado en Silivri (Turquía), en el año 1973, presentamos un trabajo en el que demostrábamos que si E es un espacio localmente convexo bornológico, existe un espacio semi-Montel completo F, de manera que E es un cociente separado de F. Si tomamos para E un espacio normado no completo, entonces F es un espacio completo que no es de Ptak. Es fácil deducir de aquí, que los espacios completos que no son de Ptak son muy numerosos.

Las dos caracterizaciones siguientes de espacios de Ptak e infra-Ptak, respectivamente, son útiles: a) Un espacio localmente convexo E es un espacio de Ptak si, y sólo si, cada aplicación lineal y casi abierta g de E sobre un espacio localmente arbitrario F es abierta. b) Un espacio localmente convexo E es infra Ptak si, y sólo si, cada aplicación biyectiva y casi abierta g de E en un espacio localmente convexo arbitrario F es un isomorfismo topológico.

Los teoremas fundamentales de Ptak se enuncian de la siguiente forma: a) Si g es una aplicación lineal y continua de un espacio de Ptak sobre un espacio tonelado, entonces g es abierta. b) Cada aplicación lineal, biyectiva y continua de un espacio infra-Ptak en un espacio tonelado es un isomorfismo topológico.

Una vez que se publicó, en el año 1953, el teorema de la aplicación abierta de Ptak, quedó planteado el problema de averiguar si los espacios localmente convexos que se utilizan frecuentemente en las aplicaciones son espacios de Ptak. Los espacios de Fréchet y sus duales de Mackey, se demuestra fácilmente que son espacios de Ptak, pero el estudio de los espacios, introducidos por L. Schwartz, $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}'$, con las topologías fuertes, no es tan sencillo. Fue el matemático ruso D. A. Raikov quien demostró en el año 1961, que el espacio de las distribuciones $\mathcal{D}'$, con la topología fuerte, tiene un cociente separado no completo. Hubo que esperar hasta el año 1971, en que otro matemático ruso, O. G. Smoljanov, demostró que el espacio $\mathcal{D}$ tiene un cociente separado no completo.

A continuación vamos a exponer un teorema de Kelley que está relacionado con la teoría de Ptak. Sea $\mathcal{L}$ (E) la clase de todos los subconjuntos absolutamente convexos y cerrados en un espacio localmente convexo E. Se puede definir una estructura uniforme $\mathcal{U}$ sobre $\mathcal{L}$ (E) asociando con cada entorno U, absolutamente convexo, la banda

$$N_U = \{(A, B) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) : A \subset B + U,\ B \subset A + U\}$$

Se dice que el espacio E es hipercompleto si $\mathcal{L}$ (E) es completo para la estructura uniforme $\mathcal{U}$. Kelley demuestra que el espacio E es hipercompleto si, y sólo si, cada conjunto absolutamente convexo A del dual topológico E′ de E es débilmente cerrado si corta a cada subconjunto equicontinuo B de E′ en un subconjunto débilmente cerrado en B.

Dada una red en $\mathcal{L}$ (E), $\{A_i : i \in I, \geqslant\}$ se dice que es decreciente si $A_i \supset A_j$ para $i \leqslant j$. Una red es escalar si contiene ρA_i para cada $\rho > 0$ y todo $i \in I$. El espacio $\mathcal{L}$ (E) es escalarmente completo si cada red de Cauchy, decreciente y escalar, tiene un límite en $\mathcal{L}$ (E). El teorema de Kelley dice lo siguiente: un espacio localmente convexo es de Ptak si, y sólo si, $\mathcal{L}$ (E) es escalarmente completo.

El teorema de Krein-Smulian afirma que, en el dual débil de un espacio de Fréchet, todo conjunto convexo, que corta a cada subconjunto equicontinuo y cerrado en un conjunto cerrado, es cerrado. Si un espacio localmente convexo tiene la propiedad anterior, se dice que cumple la condición de Krein-Smulian. Si en la categoría de los espacios localmente convexos, representamos por $\mathcal{B}_1$ la clase de los espacios que cumplen la propiedad de Krein-Smulian, por $\mathcal{B}_2$, los hipercompletos, por $\mathcal{B}_3$, los B-completos y por $\mathcal{B}_4$, los B_r-completos, se tiene evidentemente, que

$$\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_3 \subset \mathcal{B}_4.$$

Si E es la suma directa topológica de una familia numerable de rectas, O. G. Smoljanov demuestra, en 1971, que E no pertenece a la clase $\mathscr{B}_1$, y en el año 1973, el matemático ruso E. T. Shavgulidze prueba que E está contenido en $\mathscr{B}_2$. Por tanto, se puede afirmar que la inclusión $\mathscr{B}_1 \subset \mathscr{B}_2$ es estricta. Por otra parte no se conoce si alguna de las inclusiones $\mathscr{B}_2 \subset \mathscr{B}_3$ o $\mathscr{B}_3 \subset \mathscr{B}_4$ es estricta.

Respecto a la teoría de Ptak, hemos hablado hasta ahora de conceptos relativos al teorema de la aplicación abierta. A continuación nos referiremos al teorema de la gráfica cerrada, para lo cual empezamos definiendo las aplicaciones lineales casi continuas. Una aplicación lineal g de un espacio localmente convexo E en un espacio localmente convexo F es casi continua si la clausura de g^{-1} (U) en E es un entorno del origen, para cada entorno absolutamente convexo U del origen en F.

Los espacios tonelados se pueden caracterizar por la siguiente propiedad: un espacio localmente convexo E es tonelado si, y sólo si, cada aplicación lineal g de E en un espacio localmente convexo arbitrario F es casi continua.

También los espacios infra-Ptak pueden caracterizarse mediante la utilización de las aplicaciones lineales casi continuas. Se tiene el siguiente resultado: un espacio localmente convexo F es un espacio infra-Ptak si, y sólo si, cada cada aplicación lineal g casi continua, de gráfica cerrada, de un espacio localmente convexo arbitrario E en F, es continua.

Como consecuencia de los resultados anteriores se obtiene el teorema de la gráfica cerrada, que puede enunciarse en los siguientes términos: cada aplicación lineal de un espacio tonelado E en un espacio infra Ptak F, cuya gráfica sea cerrada, es continua.

El teorema anterior se halla implícito en el trabajo de Ptak. Los matemáticos ingleses Alex P. Robertson y Wendy Robertson lo detallaron en un artículo publicado en el año 1956. A dicho resultado se le conoce como el teorema de Robertson-Robertson, injustamente, a nuestro juicio, ya que el mérito de haberlo encontrado hay que atribuírselo, sin duda alguna, al matemático checo Ptak.

Una vez que se publicó el teorema de la gráfica cerrada de Ptak, se planteó el problema de comprobar si los espacios de L. Schwartz $\mathscr{D}$ y $\mathscr{D}'$ eran infra-Ptak. Para el espacio de las distribuciones $\mathscr{D}'$ el problema citado quedó abierto hasta el año 1974, en el que, en un artículo publicado en Mathematischen Annalen, demostramos que el espacio $\mathcal{D}'$ no es infra-Ptak y que existe sobre $\mathcal{D}'$ una topología localmente convexa $\mathcal{T}$, menos fina que la fuerte, de manera que $\mathcal{D}'$, con la topología $\mathcal{T}$, es un espacio tonelado bornológico que no es ultrabornológico.

En el año 1976 hemos encontrado la solución para el espacio $\mathcal{D}$, demostrando que $\mathcal{D}$ no es un espacio infra-Ptak.

El teorema de la gráfica cerrada, de Grothendieck, admite una generalización, debida a P. Robertson y W. Robertson, en el contexto de la teoría de Ptak, y que se enuncia de la siguiente manera: sea E un límite inductivo de espacios de Baire. Sea F un límite inductivo numerable de espacios infra-Ptak. Si g es una aplicación lineal de E en F, con gráfica cerrada, entonces g es continua.

Clases maximales de espacios localmente convexos definidas por el teorema de la gráfica cerrada

Sea $\mathcal{U}$ una clase de espacios localmente convexos. Representamos por $\mathcal{C}(\mathcal{U})$ la clase de todos los espacios localmente convexos, tales que si g es una aplicación lineal cualquiera de E en F, $E \in \mathcal{U}$, $F \in \mathcal{C}(\mathcal{U})$, cuya gráfica es cerrada, entonces g es continua.

Dado un espacio localmente convexo $E[\mathcal{T}]$, la familia $\{\mathcal{T}_i : i \in I\}$ de todas las topologías sobre E, más finas que $\mathcal{T}$, tales que $E[\mathcal{T}_i]$, $i \in I$, es un espacio tonelado, es no vacía, puesto que la topología localmente convexa más fina sobre E pertenece a dicha familia. El límite inductivo $E[\mathcal{T}_a]$ de $\{E[\mathcal{T}_i] : i \in I\}$ es un espacio tonelado, de aquí que $\mathcal{T}_a$ sea la topología tonelada menos fina sobre E, que es más fina que $\mathcal{T}$. Al espacio $E[\mathcal{T}_a]$ se le llama el espacio tonelado asociado a $E[\mathcal{T}]$. Si para cada topología localmente convexa $\mathcal{V}$ sobre E, menos fina que $\mathcal{T}$, se verifica que $\mathcal{V}_a = \mathcal{T}_a$, se dice que $E[\mathcal{T}]$ es un espacio Γ_r. Los espacios Γ_r, de acuerdo con un teorema de Komura, constituyen una clase maximal de llegada, para el teorema de la gráfica cerrada, cuando los espacios de partida son los tonelados, es decir, si $\mathcal{U}$ es la clase de todos los espacios tonelados, $\mathcal{C}(\mathcal{U})$ coincide con la clase de los espacios Γ_r.

En el año 1968, en un artículo publicado en la Revista de esta Real Academia, dimos una caracterización de los espacios Γ_r, utilizando propiedades de dualidad. Dicha caracterización es la siguiente: un espacio localmente convexo E es un espacio Γ_r si, y sólo si, dado un subespacio cualquiera G del dual algebraico débil E_σ^* de E, de manera que G sea casi-completo y $G \cap E'$ sea débilmente denso en E', se tiene que G contiene E'.

Sea g una aplicación lineal de un espacio tonelado E en un espacio Γ_r F, de manera que la gráfica de g sea cerrada. Si $\mathfrak{T}$ es la topología localmente convexa más fina sobre F, entonces el dual algebraico F^* de F coincide con el dual topológico de $F[\mathfrak{T}]$. Si consideramos g como una aplicación de E en $F[\mathfrak{T}]$, su gráfica es cerrada en $E \times F[\mathfrak{T}]$, y si h es la aplicación traspuesta de g, su dominio D_h es un conjunto denso de F_σ^*.

Sea A una parte cerrada y acotada de D_h y sea $\{y'_n : n \in M\}$ una red de elementos de A, convergente en F_σ^* a y'. Para cada $y \in F$ existe un número positivo k, dependiente de y, tal que

$$|\langle y'_n, y\rangle| < k, \ \forall\, n \in M,$$

por lo que las formas lineales sobre E

$$x'_n : x \longrightarrow \langle g(x), y'_n\rangle, \ x \in E, \ n \in M,$$

forman un conjunto acotado del dual topológico débil E'_σ de E, de donde se deduce, teniendo en cuenta que E es un espacio tonelado y que la red $\{x'_n : n \in M\}$ converge puntualmente a la aplicación

$$x' : x \longrightarrow \langle g(x), y\rangle,$$

que esta última forma lineal es continua y, por tanto, $y' \in D_h$, lo que pone de manifiesto que A es cerrado en F_σ^*.

Por otra parte, si consideramos g como una aplicación de E en F, su aplicación traspuesta h_1 tiene su dominio D_h denso en el dual topológico débil F'_σ de F. Si $z' \in D_{h_1}$, la forma lineal sobre E:

$$x \longrightarrow \langle g(x), z'\rangle$$

es continua, y puesto que z pertenece también a F^*, se tiene que z' pertenece a D_h, luego $D_h \cap F' \supset D_{h_1}$, de donde se deduce que $D_h \cap F'$ es denso en F'_σ.

Por tanto, D_h es un subespacio casi-completo de F'_σ, verificándose además que $D_h \cap F'$ es denso en F'_σ, por lo que $D_h \supset F'$, de aquí que $D_{h_1} = F'$, lo que nos indica que g es continua de E en F, para las topologías débiles $\sigma(E, E')$ y $\sigma(F, F')$. Puesto que E es tonelado resulta, finalmente, que g es continua de E en F.

Es inmediato que cada espacio infra-Ptak es un espacio Γ_r, de aquí que el argumento que acabamos de exponer, ponga de manifiesto que la teoría de Ptak puede ser simplificada drásticamente.

En relación con el teorema de la aplicación abierta, se puede definir la siguiente clase de espacios: un espacio localmente convexo E es un espacio Γ, si dado un subespacio casi-completo cualquiera de E_σ^*, se tiene que $G \cap E'$ es débilmente cerrado en E'.

Para los espacios Γ se tienen estos dos teoremas: 1. Sea E un espacio Γ y sea E un espacio tonelado. Si g es una aplicación lineal del subespacio L de E sobre F, cuya gráfica es cerrada en $E \times F$, entonces g es abierta. 2. Si el espacio E no es un espacio Γ, existe un espacio tonelado F y una aplicación lineal g de E sobre F, cuya gráfica es cerrada, de manera que g no es abierta.

Obviamente, cada espacio Γ es un espacio Γ_r. No se conoce si existe algún espacio Γ_r que no sea un espacio Γ.

Los espacios Γ_r no necesitan ser completos. Por otra parte, si $E[\mathfrak{T}]$ es un espacio Γ_r, el espacio tonelado asociado $E[\mathfrak{T}_a]$ a $E[\mathfrak{T}]$ es completo y no tiene por qué ser, necesariamente, un espacio infra-Ptak.

Las ideas anteriores pueden utilizarse para definir clases maximales de llegada para el teorema de la gráfica cerrada, de la siguiente forma: sea $\mathcal{U}$ una clase de espacios localmente convexos, cuyas topologías son las de Mackey, de manera que $\mathcal{U}$ contenga los espacios de dimensiones finitas y sea estable para los límites inductivos. Entonces es posible demostrar que dos condiciones que siguen son equivalentes:

1. $F \in \mathcal{C}(\mathcal{U})$.

2. Dado un subespacio G de F^* tal que $G \cap F'$ es débilmente denso en F' y $F[\mu(F, G)]$ pertenece a $\mathcal{U}$, entonces $G \supset F'$. Si tomamos para $\mathcal{U}$ la clase de los espacios tonelados reencontramos la caracterización de los espacios Γ_r.

Si $E[\mathfrak{T}]$ es un espacio localmente convexo y $\{\mathfrak{T}_i : i \in I\}$ es la familia de todas las topologías sobre E, más finas que $\mathfrak{T}$, de manera que $E[\mathfrak{T}_i]$ pertenezca a $\mathcal{U}$, para cada i de I, es inmediato que la topología localmente convexa más fina sobre E pertenece a dicha familia. El límite inductivo $E[\mathfrak{T}_a]$ de $\{E[\mathfrak{T}_i] : i \in I\}$ es un espacio de la clase $\mathcal{U}$, tal que $\mathfrak{T}_a$ es la menos fina de las topologías que forman la familia $\{\mathcal{T}_i : i \in I\}$, A E $[\mathcal{T}_a]$ se le llama el espacio asociado de clase $\mathcal{U}$ de E $[\mathcal{T}]$.

Si la clase $\mathcal{U}$ tiene la propiedad de contener a un espacio localmente convexo E, cuando contiene algún subespacio de E, de codimensión uno, entonces si F $[\mathcal{T}]$ pertenece a $\mathcal{C}(\mathcal{U})$ y F $[\mathcal{T}_a]$ es el espacio asociado a F $[\mathcal{F}]$ de clase $\mathcal{U}$, se tiene que F $[\mathcal{T}_a]$ es completo.

En particular si $\mathcal{U}$ es la clase de espacios tonelados y E es un espacio localmente convexo que posee un subespacio tonelado de codimensión uno, entonces E es tonelado, de aquí que el espacio tonelado asociado a un espacio Γ_r sea completo.

Un espacio localmente convexo de Mackey E se dice que es dual localmente completo, si cada sucesión que converge al origen en el dual débil de E es equicontinua en E. Si F es un subespacio de la complección de E, que contiene a E, entonces cada sucesión que converge al origen en F′ $[\sigma(F', F)]$ es equicontinua en F. Por tanto, si G $[\mathcal{T}]$ pertenece a $\mathcal{C}(\mathcal{U})$, siendo $\mathcal{U}$ la clase de los espacios de Mackey dual localmente completos, se tiene que G $[\mathcal{T}_a]$ es completo.

Representemos ahora por $\mathcal{O}(\mathcal{U})$ la clase de todos los espacios localmente convexos, tales que si g es una aplicación lineal cualquiera, de un espacio E $\in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ sobre un espacio F $\in \mathcal{U}$, cuya gráfica es cerrada, g es abierta. Entonces, las dos condiciones que siguen son equivalentes:

1. E $\in \mathcal{O}(\mathcal{U})$.
2. Dado un subespacio L de E* tal que

$$(E/L^{\perp})\,[\mu\,(H/L^{\perp},\ L)] \in \mathcal{U},$$

siendo $L^{\perp}$ el subespacio de E ortogonal a L, entonces L $\cap$ E′ es débilmente cerrado en E′. Si tomamos para $\mathcal{U}$ la clase de los espacios tonelados, la clase $\mathcal{O}(\mathcal{U})$ coincide con la de los espacios Γ.

Si E $[\mathcal{T}]$ es un elemento de $\mathcal{O}(\mathcal{U})$ que no pertenece a $\mathcal{C}(\mathcal{U})$, existe en E una topología localmente convexa $\mathcal{V}$, menos fina que $\mathcal{T}$, de manera que $\mathcal{V}_a$ no coincide con $\mathcal{T}_a$. Sea J la inyección canónica de E $[\mathcal{T}]$ sobre E $[\mathcal{V}_a]$. Puesto que J es continua de E $[\mathcal{T}]$ sobre E $[\mathcal{V}]$, la gráfica de J es cerrada en E $[\mathcal{T}]$ × E $[\mathcal{V}_a]$ y, por tanto, la aplicación J es abierta, de aquí que $\mathcal{V}_a$ se identifique con $\mathcal{T}_a$, lo cual constituye una contradicción. Podemos asegurar, por consiguiente, que la clase $\mathcal{O}(\mathcal{U})$ está siempre contenida en la clase $\mathcal{C}(\mathcal{U})$.

Aunque no se conoce si cada espacio Γ_r es un espacio Γ, es posible construir una clase $\mathcal{U}$ para la cual $\mathcal{O}(\mathcal{U})$ sea diferente de $\mathcal{C}(\mathcal{U})$. Procederemos de la siguiente forma: sea $\mathcal{D}$ el espacio vectorial, sobre el cuerpo de los números complejos, de las funciones complejas, definidas en la recta real R, que admiten derivadas de todos los órdenes y tienen soporte compacto. Suponemos que $\mathcal{D}$ está dotado de la topología localmente convexa usual. Entonces $\mathcal{D}$ es un límite inductivo estricto de espacios de Fréchet que, de acuerdo con un resultado dado por el matemático ruso Smoljanov, en 1971, tiene un cociente separado no completo. Sea $\mathcal{U}$ la clase de todos los espacios localmente convexos, tales que si $E \in \mathcal{U}$ y g es una aplicación lineal, con gráfica cerrada, de E en $\mathcal{D}$, entonces g sea continua. Esta clase $\mathcal{U}$ contiene los espacios vectoriales de dimensiones finitas y es estable para los límites inductivos. Es inmediato que el espacio $\mathcal{D}$ pertenece a $\mathcal{C}(\mathcal{U})$. Por otra parte, $\mathcal{D}$ es ultrabornológico y, por tanto, si G es un subespacio cerrado de $\mathcal{D}$ tal que $\mathcal{D}/G$ no sea completo, se tiene que $\mathcal{D}/G$ es ultrabornológico y, de acuerdo con el teorema de la gráfica boreliana de Schwartz, dicho espacio pertenece a $\mathcal{U}$. Si $\mathcal{V}$ es la topología de $\mathcal{D}/G$, es obvio que $\mathcal{V}$ coincide con $\mathcal{V}_a$ y, puesto que $\mathcal{D}/G$ no es completo resulta que $\mathcal{D}/G$ no pertenece a $\mathcal{C}(\mathcal{U})$. Si tomamos ahora una topología localmente convexa $\mathcal{W}$ sobre $\mathcal{D}/G$, menos fina que $\mathcal{V}$, de manera que $\mathcal{W}_a$ sea distinto de $\mathcal{V}$, y si g es la inyección canónica de $\mathcal{D}/G$ sobre $(\mathcal{D}/G)\,[\mathcal{W}_a]$, entonces g tiene su gráfica cerrada y no es abierta. Si φ es la aplicación canónica de $\mathcal{D}$ sobre $\mathcal{D}/G$, resulta que $g \circ \varphi$ tiene la gráfica cerrada en $\mathcal{D} \times (\mathcal{D}/G)\,[\mathcal{W}_a]$ y no es abierta, de donde se concluye que $\mathcal{D}$ no pertenece a $\mathcal{O}(\mathcal{U})$.

Conviene hacer notar que pueden existir dos clases de espacios localmente convexos, $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$, tales que $\mathcal{C}(\mathcal{U}_1)$ coincida con $\mathcal{C}(\mathcal{U}_2)$. Dada una clase $\mathcal{U}$, es interesante, a veces, determinar una clase más sencilla $\mathcal{U}_1$, de manera que $\mathcal{C}(\mathcal{U}_1)$ sea idéntica a $\mathcal{C}(\mathcal{U})$.

Si E y F son dos espacios de Banach de dimensiones infinitas, en un trabajo reciente hemos logrado demostrar que E es el límite inductivo de una familia de espacios de Banach iguales a F. Utilizando este hecho, puede comprobarse que si G es un espacio de Banach cualquiera, de dimensión infinita, $\mathcal{U}_1$ es la clase que tiene como único elemento G y $\mathcal{U}$ es la clase de todos los espacios ultrabornológicos, se puede identificar $\mathcal{C}(\mathcal{U}_1)$ con $\mathcal{C}(\mathcal{U})$.

A continuación nos vamos a ocupar de las clases maximales de espacios localmente convexos, definidas por el teorema de la gráfica cerrada, y cuyos elementos intervienen como espacios de partida en la formulación de dicho teorema.

Dada una clase $\mathcal{U}$ de espacios localmente convexos, representemos por $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ la clase de todos los espacios localmente convexos, tal que si F pertenece a $\mathcal{U}$, E pertenece a $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ y g es una aplicación lineal cualquiera de E en F, cuya gráfica sea cerrada, entonces g es continua. Si $\mathcal{U}$ está formada por los espacios de dimensiones finitas, cualquier espacio localmente convexo pertenece a $\mathcal{D}(\mathcal{U})$. Por otra parte, si $\mathcal{U}$ coincide con la clase de todos los espacios localmente convexos, la clase $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ está formada por todos los espacios localmente convexos cuya topología sea la localmente convexa más fina.

El primer resultado importante para la determinación de clases de la forma $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ se debe a Mahowald, que en **1960** demuestra que si E es un espacio localmente convexo no tonelado, existe un espacio de Banach F y una aplicación lineal g de E en F, cuya gráfica es cerrada, de manera que g no es continua.

Puesto que cada espacio de Banach es un espacio de Ptak, y cada aplicación lineal, con gráfica cerrada, de un espacio tonelado en un espacio de Ptak es continua, podemos afirmar que si $\mathcal{U}$ es la clase de todos los espacios de Banach, $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ es la clase de los espacios tonelados. Por consiguiente, los espacios tonelados forman una clase maximal de espacios de partida para el teorema de la gráfica cerrada.

Puesto que los espacios ultrabornológicos son muy importantes en las aplicaciones, es natural preguntarse si forman una clase maximal de espacios de partida para el teorema de la gráfica cerrada. En relación con la respuesta, vamos a empezar citando un teorema de Iyahen, que afirma que si F es un subespacio de codimensión uno de un espacio localmente convexo E y si h es una aplicación lineal de F en el espacio localmente convexo G, con gráfica cerrada, existe una aplicación lineal k de E en G, con gráfica cerrada, que es una extensión de h.

Recientemente, hemos demostrado que si E es un espacio de Banach de dimensión infinita, existe un hiperplano F de E que no es ultrabornológico.

Tomemos ahora una clase $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ contenga a todos los espacios ultrabornológicos. Elijamos un espacio de Banach E de $\mathfrak{D}(\mathcal{U})$, cuya dimensión sea infinita. Sea F un hiperplano no ultrabornológico de E. Si G es un espacio cualquiera de $\mathcal{U}$ y h es una aplicación lineal, con gráfica cerrada, de F en G, entonces, de acuerdo con el teorema de Iyahen, h se extiende a E en una aplicación lineal k, cuya gráfica es cerrada en E × G. Es inmediato que k es continua y, por tanto, su restricción h a F es continua, de aquí que F, que es un espacio no ultrabornológico, pertenezca a $\mathfrak{D}(\mathcal{U})$. Esto nos indica que los espacios ultrabornológicos no constituyen una clase maximal de espacios de partida para el teorema de la gráfica cerrada.

Puede obtenerse un teorema de tipo Mahowald para los espacios ultrabornológicos, debilitando la condición de gráfica cerrada, mediante la introducción del concepto de convergencia estricta de Mackey. En un espacio localmente convexo E, si A es un subconjunto absolutamente convexo cerrado y acotado, E_A es el espacio normado sobre la envoltura lineal de A, que tiene como bola unidad cerrada A. Una sucesión (x_n) en E converge a x_0 estrictamente en el sentido de Mackey si existe en E un subconjunto B compacto y absolutamente convexo, que contiene a la sucesión $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, de tal forma que la sucesión (x_n) converge a x_0 en el espacio de Banach E_A. En el caso particular en que E sea un espacio de Fréchet, toda sucesión convergente converge estrictamente en el sentido de Mackey.

Se dice que un subconjunto M de E es cerrado para la convergencia estricta de Mackey, si dada una sucesión cualquiera (x_n) en M, que converge al elemento x_0 de E para la convergencia estricta de Mackey, se tiene que x_0 pertenece a M.

Si g es una aplicación lineal de un espacio ultrabornológico E en un espacio de Fréchet F, de manera que la gráfica de g es cerrada en E × F para la convergencia estricta de Mackey, entonces g es continua. Por otra parte, si el espacio localmente convexo E no es ultrabornológico, existe una aplicación lineal g de E en un espacio de Banach F, de manera que g no es continua y su gráfica es cerrada en E × F para la convergencia estricta de Mackey.

Si la clase $\mathcal{U}$ está formada únicamente por el espacio de Banach c_0, N. J. Kalton demuestra, en 1970, que $\mathfrak{D}(\mathcal{U})$ es la clase de todos los espacios E tales que en el dual topológico débil de E, cada sucesión de Cauchy es equicontinua. También prueba dicho autor que si la clase $\mathcal{U}$ está formada por el espacio C [0, 1] de las funciones reales o complejas, definidas y continuas en $[0, 1]$, con la topología de la convergencia uniforme, entonces $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ consiste de todos los espacios localmente convexos E con la propiedad de que cada subconjunto acotado, absolutamente convexo y metrizable, del dual débil de E, es equiconjunto.

En un artículo que publicamos en Archiv Mathematik, en 1974, estudiamos nuevas clases maximales de espacios localmente convexos, definidas por el teorema de la gráfica, mediante la utilización del concepto de convergencia de Mackey. En un espacio localmente convexo E una sucesión (x_m) es de Cauchy para la convergencia de Mackey, si existe un conjunto acotado B en E, absolutamente convexo y cerrado, de manera que (x_n) es una sucesión de Cauchy en E_B. Se dice que el espacio E es localmente completo, si cada sucesión de Cauchy para la convergencia de Mackey, converge en E. Esto es equivalente a afirmar que para cada subconjunto acotado A de E, absolutamente convexo y cerrado, el espacio normado E_A es completo. Se dice que el espacio E es dual localmente completo, si su dual débil es localmente completo.

Un primer resultado de tipos Mahowald para los espacios localmente convexos, utilizando el concepto de convergencia de Mackey, es el siguiente: sea F un espacio de Banach de dimensión infinita. Si un espacio localmente convexo E no es dual localmente completo, existe una aplicación lineal g, con gráfica cerrada, de E en F, que no es débilmente continua.

Se dice que un espacio localmente F es un espacio $\wedge_r$, si cada subespacio G localmente completo del dual algebráico débil de F, que corta a E′ en un subespacio débilmente denso, contiene E′. Se tienen los siguientes teoremas: a) Sea E un espacio dual localmente completo. Sea F un espacio $\wedge_r$. Si g es una aplicación lineal de E en F, cuya gráfica es cerrada, entonces g es continua. b) Si un espacio localmente convexo F no es un espacio $\wedge_r$, existe un espacio E, dual localmente completo, y una aplicación lineal inyectiva de E sobre F, cuya gráfica es cerrada, de manera que g no es continua. c) Un espacio localmente convexo E es dual localmente completo si, y sólo si, cada aplicación lineal g de E en l^2, cuya gráfica sea cerrada, es continua.

En la primera edición del famoso libro sobre espacios vectoriales topológicos, del Profesor Köthe, se pregunta si cada espacio de Montel es completo. En el año 1964, el matemático japonés Yukio Komura responde a dicha cuestión dando un ejemplo, bastante complicado, de un espacio de Montel no completo.

En el año 1968, Amemiya y Komura, en un trabajo conjunto publicado en Mathematischen Annalen, construyen un ejemplo, mucho más simple, de espacios de Montel no completo. En dicho trabajo, encuentran el resultado que afirma que si en un espacio localmente convexo, metrizable y tonelado, existe una sucesión creciente (A_n) de subconjuntos absolutamente convexos y cerrados, cuya unión sea el espacio total, uno de los conjuntos A_n tiene interior no vacío, y como consecuencia es un entorno del origen. La propiedad anterior tiene cierta semejanza con la propiedad de Baire de los espacios métricos completos, con la diferencia de que, en este caso, la sucesión de conjuntos no tiene por qué ser creciente, ni cada uno de ellos debe de ser, necesariamente, absolutamente convexo.

El teorema de Amemiya y Komura sirve de base para la siguiente definición: un espacio localmente convexo E es Baire-convexo si dada una sucesión creciente cualquiera de subconjuntos de E, absolutamente convexos y cerrados, cuya unión sea E, uno de dichos conjuntos debe tener interior no vacío.

Una sucesión creciente (k_n) de números enteros positivos se dice que tiene densidad cero si

$$\lim_{n \to 0} \frac{k_n}{n} = 0.$$

Sea E el subespacio denso del espacio de Banach l^1 que está formado por todas las sucesiones (a_n) que son elementos de l^1 y cuyas coordedenadas son nulas, salvo para un conjunto de subíndices de densidad cero. Entonces es fácil de comprobar que E es un espacio tonelado y, por tanto, que E es Baire-convexo. Por otra parte, si H_n es el hiperplano cerrado de E, formado por aquellas sucesiones, cuyas coordenadas n-ésimas son nulas, se tiene que E es la unión de la familia de los conjuntos cerrados $\{H_n : n = 1, 2, \ldots\}$, y cada uno de estos conjuntos tiene interior no vacío, de aquí que E no sea un espacio de Baire. Por tanto, en la clase de los espacios localmente convexos, la subclase de espacios de Baire es estrictamente menos amplia que la de los espacios Baire-convexos.

Los espacios Baire-convexos tienen buenas propiedades de estabilidad: 1. El cociente separado de un espacio Baire-convexo es Baire-convexo. 2. El producto de espacios Baire-convexos es Baire-convexo. 3. Cada subespacio de codimensión numerable de un espacio Baire-convexo es Baire-convexo. 4. Si la complección de un espacio tonelado E es de Baire, entonces E es Baire-convexo.

Aunque se sabe, por un teorema de Bourbaki, que el producto de espacios de Fréchet es un espacio de Baire, y, por un resultado de Oxtoby, que el producto de espacios métricos, separables y de Baire, es un espacio de Baire, no es conocido si el producto de espacios localmente convexos y de Baire es un espacio de Baire.

Wilanski y Klee conjeturan que cada hiperplano de un espacio de Banach es un espacio de Baire. Hasta ahora, los esfuerzos de los matemáticos para resolver este problema no han tenido éxito.

En relación con los espacios Baire-convexos vamos a exponer un teorema de la gráfica cerrada, debido al matemático americano S. Saxon. Sea F un espacio localmente convexo y sea (F_n) una sucesión creciente de subespacios de F, cuya unión sea F. Supongamos que en F_n existe una topología $\mathfrak{T}_n$, más fina que la inicial, de manera que $F_n [\mathfrak{T}_n]$ sea un espacio de Banach, cuya bola unidad sea B_n. Suponemos además que la inyección canónica de $F_n [\mathfrak{T}_n]$ en $F_{n+1} [\mathfrak{T}_{n+1}]$ es continua. Puesto que B_n es un conjunto acotado de $F_{n+1} [\mathfrak{T}_{n+1}]$, se puede calcular una sucesión (a_n) de números positivos, tal que, para cada número natural n, $a_n B_n$ está contenida en $a_{n+1} B_{n+1}$. Si g es una aplicación lineal, con gráfica cerrada, de un espacio Baire-convexo E en F, entonces la sucesión de subconjuntos de E, $(g^{-1} (a_n B_n))$, es creciente, su unión coincide con E, y cada uno de estos conjuntos es absolutamente convexo. Por otra parte, existe un entero positivo p tal que la clausura de $g^{-1} (a_p B_p)$ en E es un entorno del origen en E. Si E_p es la envoltura lineal de $g^{-1} (a_p B_p)$, la restricción g_p de g a E_p es una aplicación casi continua de E_p en $F_p [\mathfrak{T}_p]$ y, puesto que este último espacio es un espacio de Banach y, por tanto, es un espacio de Ptak, g_p es continua. A partir de aquí, un breve argumento muestra que g es continua.

Una forma de enunciar el teorema de Saxon es la siguiente:

sea E un espacio Baire-convexo. Sea F un espacio L B. Si g es una aplicación lineal, con gráfica cerrada, de E en F, entonces g es continua. Puede demostrarse, utilizando el teorema de Saxon, que todo espacio L B metrizable es un espacio de Banach. Puesto que existen espacios L F metrizables y no completos, podemos asegurar que en el teorema de la gráfica cerrada citado anteriormente, no se puede sustituir L B por L F.

Se dice que un espacio localmente convexo es un espacio infra-Baire si existe un espacio G de Baire, tal que E es un subespacio de G de codimensión finita. Obviamente, cada espacio infra-Baire es un espacio Baire-convexo. A continuación citamos dos resultados que hemos obtenido en relación con los espacios infra-Baire: a) Sea E la envoltura localmente convexa de la familia de espacios infra-Baire $\{E_i : i \in I\}$, y sea F la envoltura localmente convexa de la sucesión (F_n) de espacios Γ_r, tales que $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = F$. Sean L y G dos subespacios de E, tales que L es complemento algebraico de G y $L \cap E_i$ es de codimensión numerable en E_i, $i \in I$. Si u es una aplicación lineal de L en F, cuya gráfica es cerrada en $E \times F$, entonces u es continua, E es la suma topológica de L y G, y la topología de G es la topología localmente convexa más fina. b) Sea G la envoltura localmente convexa de la sucesión (E_n) de espacios Γ, tales que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Sea F la envoltura localmente convexa de la familia de espacios infra-Baire $\{F_i : i \in I\}$. Sea u una aplicación lineal del subespacio L de E en F, de manera que $u(L) \cap F_i$ es de codimensión numerable en F_i, $i \in I$. Si la gráfica de u es cerrada en $E \times F$, y G es un subespacio de F, complemento algebraico de $u(L)$, entonces u es abierta, G es un complemento topológico de $u(L)$, y la topología de G es la topología localmente convexa más fina.

Un teorema de Wendy Robertson

En 1971, Wendy Robertson, en un Coloquio de Análisis Funcional celebrado en Burdeos, da un teorema de gráfica cerrada que permite contemplar bajo un mismo punto de vista diversos resultados. Su trabajo está fundamentado sobre el método de Kelley, utilizando ciertas estructuras uniformes sobre el espacio de los subconjuntos del espacio de llegada. Vamos a indicar a continuación las ideas fundamentales sobre las cuales se basa dicho teorema.

Sean E y F dos espacios vectoriales topológicos separados cuyas topologías son ξ y η, definidas por las bases de entornos equilibrados del origen $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$, respectivamente. Sea $\mathcal{W}$ una base aditiva de filtro de partes equilibradas de F, es decir, una base de filtro tal que dado un elemento W_1 de $\mathcal{W}$ existe un elemento de W_2 de $\mathcal{W}$, de manera que $W_2 + W_2$ está contenido en W_1. Se define sobre el conjunto de todas las partes $\mathcal{F}$ de F una estructura uniforme, representada por $\dot{\zeta}$, tomando como base de bandas

$$\dot{W} = \{(A, B) : A \subset B + W,\ B \subset A + W\} \text{ para cada } W \in \mathcal{W}.$$

Cuando $\mathcal{W}$ coincide con $\mathcal{V}$ se obtiene la estructura uniforme de Hausdorff $\dot{\eta}$, derivada de la topología η, y que ha sido estudiada por Kelley para los espacios localmente convexos. Sea $\mathcal{H}$ una base de filtro sobre F de partes equilibradas, de manera que si $A \in \mathcal{H}$, existe un elemento A' en $\mathcal{H}$ que verifica $A' + A' \subset A$ y, para cada $\rho > 0$, $\rho A \in \mathcal{H}$. Se dice entonces que $\mathcal{H}$ es una red lineal.

Si g es una aplicación lineal de E en F, $g(\mathcal{U})$ es una red lineal en el conjunto $\mathcal{B}$ de las partes equilibradas de F. La aplicación g es continua si $g(\mathcal{U})$ converge a $\{0\}$ en $\dot{\eta}$. Si $g(\mathcal{U})$ es $\dot{\eta}$-convergente, su límite es

$$\cap \{\overline{g(U)} : U \in \mathcal{U}\} = \cap \{g(U) + V : U \in \mathcal{U},\ V \in \mathcal{V}\}$$

y el segundo miembro de la igualdad anterior es $\{0\}$ si, y sólo si, la gráfica de g es cerrada. Así, para probar un teorema de gráfica cerrada, basta elegir $\mathcal{W}$ de manera que

(1) Toda red lineal $\dot{\zeta}$-Cauchy en $\mathcal{B}$ sea $\dot{\eta}$-convergente.

(2) $\overline{g^{-1}(W)}$ sea un entorno del origen en E para cada $W \in \mathcal{W}$.

Se tiene el siguiente teorema: sean E y F dos espacios vectoriales topológicos. Sea g una aplicación lineal de E en F, cuya gráfica es cerrada. Sea $\mathcal{W}$ una base aditiva en F, de manera que se cumplen (1) y (2). Entonces g es continua.

Actualmente, hay tres maneras diferentes de considerar el Análisis Funcional: 1.° El Análisis Funcional Constructivo, en cuyos métodos de razonamiento se admite el axioma de elección sólo en el caso numerable, es decir, se supone que en cada sucesión de conjuntos disjuntos puede tomarse un elemento de cada uno de ellos para formar así un nuevo conjunto. Puede encontrarse una buena exposición del Análisis Funcional Constructivo en la conocida obra de Garnir, De Wilde y Schmets. 2.° El Análisis Funcional Clásico, que utiliza libremente el axioma de elección. 3.° El Análisis Funcional Solovayano, que se diferencia del Análisis Funcional Clásico en que se sustituye el axioma de elección por el axioma de Solovay.

El axioma de elección puede formularse de la siguiente forma: dada una colección $\mathcal{U}$ de conjuntos, se puede definir una aplicación φ de $\mathcal{U}$ en la unión de todos ellos, de manera que φ (A) pertenezca a A, para cada A de $\mathcal{U}$.

Otra forma equivalente a la anterior, viene dada por el lema de Zorn, que asegura que cada conjunto ordenado inductivo tiene un elemento maximal.

Aunque el axioma de elección, en su forma más general, permite probar la existencia de entes matemáticos, sin aportar un proceso de construcción de estos entes, se utiliza sin ningún escrúpulo desde el momento que Gödel prueba, en 1940, que dicho axioma no conduce a contradicción cuando se le añade el Análisis Matemático Constructivo. Sin embargo, ciertos matemáticos han puesto reparos en su utilización por obtenerse, a veces, resultados que chocan a la misma intuición ordinaria. Sirva de ejemplo la paradoja de Banach-Tarski, que dice lo siguiente: en el espacio euclídeo de dimensión tres, una esfera de radio uno, puede dividirse en un número finito de trozos, de manera que, usando solamente rotaciones y traslaciones, pueden reconstruirse con estos trozos dos esferas, cada una de ellas de radio uno.

Alguien ha dicho, no sin cierto humor, que esto parece un milagro, que recuerda a aquél que realizara Jesús de la multiplicación de los panes y los peces. Realmente, podríamos calificar la paradoja de Banach-Tarski como el milagro matemático de la multiplicación de las esferas.

Si en el espacio euclídeo tridimensión se somete a un movimiento rígido un conjunto medible Lebesgue, su medida permanece invariable, por tanto, es fácil de deducir que, en la demostración del resultado de Banach-Tarski, alguno de los trozos en los que queda dividida la esfera debe de ser no medible Lebesgue. De aquí se deduce que si se admite que cada conjunto en R^3 es medible Lebesgue, la multiplicación de las esferas no puede llevarse a efecto.

Aunque se ha intentado, frecuentemente, construir conjuntos no medibles Lebesgue, no se ha encontrado forma de hacerlo. Las dificultades aparecidas hicieron nacer la creencia de que quizá esto fuera imposible. Todas las demostraciones de la existencia de conjuntos no medibles Lebesgue no eran constructivas; en efecto, utilizaban el axioma de Zorn.

En el año 1971, Solovay aclara el anterior problema y pone de manifiesto que en el Análisis Matemático Constructivo es imposible demostrar la existencia de conjuntos no medibles Lebesgue. Entonces Solovay introduce su axioma, que puede formularse en los siguientes términos: cada función real definida en el espacio euclídeo n-dimensional es medible Lebesgue.

El resultado fundamental de Solovay, que permite usar libremente el anterior axioma, es el siguiente: se puede añadir el axioma de Solovay al Análisis Matemático Constructivo sin que por esto se llegue a ninguna contradicción.

Al Análisis Funcional que utiliza el axioma de Solovay, en vez del axioma de Zorn, se le llama Análisis Funcional Solovayano.

Es interesante notar que resultados que pueden ser ciertos en el Análisis Funcional Clásico pueden ser falsos en el Análisis Funcional Solovayano.

Desde el momento en que Solovay publica su trabajo queda abierta una vía muy amplia para la investigación. Dicha vía consiste en fundamentar y desarrollar todo el Análisis Funcional Solovayano.

En esta dirección se han conseguido ya algunos resultados interesantes, aunque, como es lógico, dado que son pocos los años dedicados a esta investigación, está casi todo por hacer.

Vamos a empezar haciendo algunas consideraciones sobre la existencia de funcionales lineales no continuas, y después hablaremos sobre el teorema de la gráfica cerrada.

Si en el intervalo real compacto $[0, 1]$ consideramos el espacio vectorial E, sobre el cuerpo de los números reales, cuyos elementos son las restricciones de los polinomios reales a dicho intervalo, el espacio E tiene una base algebraica numerable

$$P_0(x),\ P_1(x),\ \ldots,\ P_n(x),\ \ldots,$$

de manera que $P_n(x)$ es la restricción del monomio x^n al intervalo $[0, 1]$. Si $P(x)$ pertenece a E, tomamos como norma en E

$$\| P(x) \| = \sup \{| P(x) | : x \in [0, 1]\}.$$

Podemos construir ahora una forma lineal f en E, poniendo:

$$f(P_n(x)) = n$$

y definiendo, por linealidad, el valor de f en los restantes polinomios. Puesto que

$$\| P_n(x) \| = \sup \{\| x^n \| : x \in [0, 1]\} = 1,$$

se tiene que f es una forma lineal sobre el espacio normado E, que no está acotada en el conjunto acotado

$$\{P_1(x),\ P_2(x),\ \ldots,\ P_n(x),\ \ldots\},$$

de aquí que dicha forma lineal no sea continua.

El anterior ejemplo pone de manifiesto que en el Análisis Funcional Solovayano hay espacios normados sobre los cuales se pueden definir formas lineales no continuas. Por otra parte, es sorprendente el hecho de que sobre cualquier espacio de Fréchet y, en particular sobre cada espacio de Banach, cada forma lineal sea continua. Puede afirmarse más aún: sobre cada espacio de Fréchet, cada semi-norma es continua. El resultado anterior, que utiliza para su prueba la medida de Haar, se debe al matemático danés Christensen.

Si F es un espacio de Fréchet definido por la sucesión creciente de semi-normas (p_n), y p es una semi-norma no continua sobre F, existe una sucesión (x_n) en F tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n(x_n) < \infty \quad \text{y} \quad \lim_{n \to \infty} p(x_n) = +\infty.$$

Consideremos ahora el conjunto de Cantor $\mathcal{C}$, en la recta real R, definido por todos los números reales cuya forma decimal es

$$0' a_1 a_2 \dots a_n \dots,$$

en donde a_n toma los valores uno o cero, $n = 1, 2, \dots$

Se define sobre $\mathcal{C}$ una operación $*$, de manera que si

$$\begin{aligned} \alpha &= 0' a_1 a_2 \dots a_n \dots \\ \beta &= 0' b_1 b_2 \dots b_n \dots \\ \gamma &= 0' c_1 c_2 \dots c_n \dots \end{aligned}$$

γ es igual a $\alpha * \beta$ si, y sólo si,

$$c_n = a_n + b_n$$

si a_n o b_n es igual a cero, y $c_n = 0$, si $a_n = 1$ y $b_n = 1$. La operación anterior es asociativa y commutativa. Tiene elemento neutro: el **0′ 00 … 0 …** Y el opuesto de α es el mismo α. Por tanto, $\mathcal{C}$, con dicha operación, es un grupo conmutativo.

Si en el subconjunto $\mathcal{C}$ de R, la sucesión (α_n) converge a α y la sucesión (β_n) converge a β, es inmediato que $\alpha_n * \beta_n$ converge a $\alpha * \beta$. Por otra parte, si δ_n es el inverso de α_n, en el grupo $\mathcal{C}$, la sucesión (δ_n) converge en R al inverso en $\mathcal{C}$ de α. Esto nos indica que, con la métrica euclídea, $\mathcal{C}$ es un grupo topológico.

Dada una sucesión (α_n) de elementos de $\mathcal{C}$ y un número natural cualquiera m, se tiene que

$$\sum_{n=m}^{\infty} p_m(\alpha_n x_n) = \sum_{n=m}^{\infty} \alpha_n p_m(x_n) \leqslant \sum_{n=m}^{\infty} p_n(x_n) < \infty$$

por lo que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$$

es convergente.

Consideremos los conjuntos

$$\mathcal{C}_m = \{\alpha \in \mathcal{C} : p\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right) \leqslant m\},\ m = 1, 2, \dots$$

Se tiene entonces que

$$\mathcal{C} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{C}_m.$$

Construimos ahora una medida de Haar positiva μ en $\mathcal{C}$, de manera que $\mu(\mathcal{C}) = 1$. Puesto que, por el axioma de Solovay, los conjuntos $\mathcal{C}_m$ son medibles, existe un entero positivo m_0 tal que $\mu(\mathcal{C}_{m_0}) > 0$, de donde se deduce que podemos hallar un número positivo ε, tal que

$$\mathcal{C}_{m_0}^{-1} * \mathcal{C}_{m_0} = \{\alpha * \beta : \alpha \in \mathcal{C}_{m_0}^{-1}, \ \beta \in \mathcal{C}_{m_0}\} \supset \{x \in \mathcal{C} : |x| \leqslant \varepsilon\}.$$

El elemento e_k de $\mathcal{C}$, que tiene todas sus cifras iguales a cero, salvo la que ocupa el lugar k, pertenece a $\mathcal{C}_{m_0}^{-1} * \mathcal{C}_{m_0}$ a partir de un cierto valor k_0. Podemos hallar, pues, dos elementos $\alpha^{(k)}$ y $\beta^{(k)}$ en $\mathcal{C}_{m_0}$ tales que

$$e_k = \alpha^{(k)} * \beta^{(k)},$$

lo cual indica que

$$\alpha^{(k)} - \beta^{(k)} = \pm e_k.$$

Por tanto,

$$\pm x_k = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(k)} x_n - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_m^{(k)} x_n,$$

de aquí que

$$p(x_k) \leqslant p\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(k)} x_k\right) + p\left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{(k)} x_n\right) \leqslant 2\, m_0, \text{ para } k \geqslant k_0,$$

lo cual es una contradicción. Podemos afirmar, por consiguiente, que p es una semi-norma continua.

Es interesante insistir sobre el hecho de que, en el Análisis Funcional Clásico, si F es un espacio de Banach de dimensión infinita, posee una base de Hamel $\{x_i : i \in \mathrm{I}\}$, tal que $\| x_i \| = 1$, para cada i de I. Si extraemos una sucesión (x_{i_n}) de la base de Hamel y definimos una forma lineal g sobre F, de manera que $g(x_{i_n})$ sea igual a n y $g(x_i)$ sea cero, para i distinto de i_n, $n = 1, 2, \ldots$, entonces g es una forma lineal no continua sobre F, resultado que está en contradicción con lo que acabamos de obtener anteriormente para el Análisis Funcional Solovayano.

Si E es un espacio localmente convexo y B es un subconjunto de E, compacto y absolutamente convexo, cada semi-norma p sobre E se restringe sobre el espacio de Banach E_B en una semi-norma. Por el teorema de Christensen, dicha restricción es continua. Por tanto, si E es un espacio ultrabornológico, cada semi-norma sobre E es continua.

Supongamos ahora que tenemos una aplicación lineal cualquiera g de un espacio ultrabornológico E en un espacio localmente convexo F. Si V es un entorno del origen en F, cerrado y absolutamente convexo, su imagen inversa g^{-1} (V) es un subconjunto de E, absolutamente convexo y algebraicamente cerrado. Su calibrador p es una semi-norma, y puesto que E es ultrabornológico, dicha semi-norma es continua. Dado que g^{-1} (V) coincide con el conjunto de los puntos x de E, tales que $p(x) \leqslant 1$, resulta que g^{-1} (V) es un entorno del origen en E, de aquí que g sea continua.

El hecho de que cada aplicación lineal de un espacio ultrabornológico E en un espacio localmente convexo F sea continua, es realmente sorprendente, y pone de manifiesto que, dentro del Análisis Funcional Solovayano, el teorema de la gráfica cerrada es completamente superfluo.

Termino estas palabras agradeciendo la atención que me han prestado. Nada más. Muchas gracias.

BIBLIOGRAFÍA

1. AMEMIYA, I. y KOMURA, Y.: *Über nicht-vollständige Montelräume.* «Math. Annalen», 177, 273-277 (1968).
2. BANACH, S.: *Théorie des opérations linéaires.* Monografie Mathematyczne, 1, «Polskie Towarzystwo Matematyczne», Warszawa, 1932.
3. BANACH, S. y TARSKI, A.: *Sur la descomposition des ensembles de points en parties respectivement congruents.* «Fund. Math.», 6, 244-277 (1924).
4. CHRISTENSEN, J. P. R.: *Borel structure in groups and semigroups.* «Math. Scand.», 28, 124-128 (1971).

5. De Wilde, M.: *Réseaux dans les espaces linéaires à semi-normes.* «Mémoires Soc. Roy. Sc. de Liège», 18, núm. 2, 1969.
6. Dieudonné, J. y Schwartz, L.: *La dualité dans les espaces (F) et (L F).* «Annales Inst. Fourier», 1, 61-101, Grenoble, 1949.
7. Garnir, H. G., De Wilde, M. y Schmets, J.: *Analyse fonctionnelle (Théorie constructive des espaces linéaires a semi-normes).* I. «Mathematische Reihe», 36, Birkhäuser Verlag. Bassel und Stuttgart, 1968.
8. Grothendieck, A.: *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.* «Mémoires of the American Math. Soc.», 16, Providence, 1955.
9. Kelley, J. L.: *Hypercomplete linear topological spaces.* «Michigan Math. J.», 5, 235-246 (1958).
10. Köthe, G.: *Über zwei Sätze von Banach.* «Math. Zeitschrift», 53, 203-209 (1950).
11. Köthe, G.: *Topologische lineaire Räume.* I. «Die Grundleren des Mathematischen Wissenschaften», 107, Springer, Berlin, 1960.
12. Komura, Y.: *On linear topological spaces.* Kumamoto, «J. Science», Series A, 5, núm. 3, 148-157 (1963).
13. Martineau, A.: *Sur des théorèmes de S. Banach et L. Schwartz concernant le graphe fermé.* «Studia Math.», 30, 43-51 (1968).
14. Ptak, V.: *Completeness and the open mapping theorem.* «Bull. Soc. Math. France», 86, 41-74 (1958).
15. Raikov, D. A.: *Double closed-graph theorem for topological linear spaces.* «Siberian Math. Journal», 7, 2, 287-300 (1966).
16. Robertson, W.: *Sur le théorème du graphe fermé.* Colloque Anal. Fonctionn., 1971, Bordeaux, «Bull. Soc. Math. France», Mémoire 31-32, 343-350 (1972).
17. Schwartz, L.: *Sur le théorème du graphe fermé.* «C. R. Acad. Sci. Paris», 263, 602-605 (1966).
18. Slowikowski, W.: *Quotient spaces and the open map theorem.* «Bull. Am. Math. Soc.», 67, 5, 498-500 (1961).
19. Solovay, R.: *A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue-measurable.* «Annales of Math.», 92, 1-56 (1970).
20. Valdivia, M.: *El teorema general de la gráfica cerrada en los espacios vectoriales topológicos localmente convexos.* «Rev. Acad. Ciencias», 62, 544-551 (1968).
21. Valdivia, M.: *Sobre el teorema de la gráfica cerrada.* «Collectanea Mathematica», Vol. XXII, Fasc. 1.º, 1-24 (1971).
22. Valdivia, M.: *Mackey convergence and the closed graph theorem.* «Archiv der Mathematik», Vol. XXV, Birkhäuser-Verlag, Bassel und Stuttgart, 1974.

1. *Sucesiones de aplicaciones continuas, absolutamente continuas y sumables con diversos tipos de convergencia.* «Rev. Real Acad. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales», de Madrid, T. LVIII, cuad. 4.°, 1963.
2. *Algunos criterios de convergencia en la teoría de la integración.* «Rev. Real Acad. de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales», de Madrid, T. LIX, cuad. 2.°, 1965.
3. *Desarrollos asintóticos y familias compactas de funciones holomorfas.* «Rev. Real Acad. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales», de Madrid, T. LIX, cuad. 3.°, 1965.
4. *El teorema general de la aplicación abierta en los espacios vectoriales topológicos localmente convexos.* «Rev. Real Academia Ciencias Exactas, Físicas y Naturales», de Madrid, T. LXII, cuad. 3.°, 1968.
5. *El teorema general de la gráfica cerrada en los espacios vectoriales topológicos localmente convexos.* «Rev. Real Acad. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales», de Madrid, T. LXII, cuaderno 3.°, 1968.
6. *Sobre la completitud en los espacios vectoriales topológicos localmente convexos.* «Collectanea Mathematica», Vol. XX, Fasc. 3, 1969.
7. *Convergencia casi-aproximativa.* Publ. del Seminario «García Galdeano», de Zaragoza, núm. 10, 1969.
8. *Aplicaciones lineales fuertemente casi-abiertas.* «Rev. Real Acad. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales», de Madrid, T. LXIII, cuad. 1.°, 1969.
9. *Sobre los conjuntos acotados en los espacios vectoriales topológicos cocientes.* «Rev. Real Acad. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales», de Madrid, T. LXIII, cuad. 1.°, 1969.
10. *Sobre los conjuntos compactos en los espacios (D F).* «Collectanea Mathematica», Vol. XXI, Fasc. 2, 1970.
11. *Sobre ciertos espacios tonelados.* «Actas de la IX Reunión de Matemáticos Españoles», 1970.
12. *Sobre el teorema de la gráfica cerrada.* «Collectanea Mathematica», Vol. XXII, Fasc. 1, 1971.
13. *Sobre el teorema de la aplicación abierta.* «Actas de la X Reunión de Matemáticos Españoles», 1971.
14. *A hereditary property in locally convex spaces.* «Annales de l'Institut Fourier», T. XXI, Fasc. Grenoble, 1971.
15. *On D F-spaces.* «Mathematische Annalen». Band 191. Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1971.
16. *On final topologies.* «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Band 251. Berlin-New York, 1971.
17. *Absolutely convex sets in barrelled spaces.* «Annales de l'Institut Fourier», T. XXI, Fasc. 2, Grenoble, 1971.

18. *A class of bornological barrelled spaces which are not ultra-bornological.* «Mathematische Annalen», Band 194, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1971.
19. *On subspaces of countable codimension of a locally convex spaces.* «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Band 256, Berlin-New York, 1972.
20. *On non reflexive spaces.* «Manuscripta Mathematica», Band 7, München, Springer, 1972.
21. *Some examples on quasi-barrelled spaces.* «Annales de l'Institut Fourier», T. XXII, Fasc. 2, Grenoble, 1972.
22. *On non-bornological barrelled spaces.* «Annales de l'Institut Fourier», T. XXII, Fasc. 2, Grenoble, 1972.
23. *Some criteria for weak compactness.* «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Band 255, Berlin-New York, 1972.
24. *On bounded sets which generate Banach spaces.* «Archiv der Math.», Vol. XXIII, Bassel und Stuttgart, Birkhäuser, 1972.
25. *On weak compactness.* «Studia Math.», T. XLIX. Polska Akad. Nauk. Warszawa-Wroclaw, 1973.
26. *A note on locally convex spaces.* «Mathematische Annalen», Band 201, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.
27. *Some results on bornological barrelled spaces. Proceeding of the Symposium of Functional Analysis.* «Math. Research Inst.», Istambul (Silivri), 1973.
28. *Sobre los espacios vectoriales topológicos de dimensiones finitas.* «Collectanea Mathematica», Vol. XXIV, Fasc. 1, 1973.
29. *Un teorema de inmersión en espacios tonelados que no son bornológicos.* «Collectanea Mathematica», Vol. XXIV, Fasc. 1, 1973.
30. *Some properties of the bornological spaces.* «IIeme Coll. d'Analyse Fonctionn.», Bordeaux, 1972.
31. *On a class of quasi-barrelled spaces.* «Mathematische Annalen», Band 202, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1973.
32. *A class of quasi-barrelled (D F)-spaces which are not bornological.* «Mathematische Zeitschrift», Band 136, Springer, 1974.
33. *Quotients of complete locally convex spaces.* «Manuscripta Matematica», Band 14, München, Springer, 1974.
34. *The space of distributions $\mathfrak{D}'(\Omega)$ is not B_r-complete.* «Mathematische Annalen», Band 211, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1974.
35. *On countable strict inductive limits.* «Manuscripta Mathematika», Band 11, München, Springer, 1974.
36. *On certain topologies on a vector space.* «Manuscripta Mathematika», Band 14, München, Springer, 1974.
37. *On Mackey spaces.* «Duke Mathematical Journal», Vol. 41, núm. 4, 1974.
38. *A note on quasi-barrelled spaces.* «Archiv der Mathematik», Vol. XXVI, Bassel und Stuttgart, Birkhäuser, 1975.

39. *Mackey convergence and the closed graph theorem.* «Archiv der Math.», Bassel und Stuttgart, Birkhäuser, 1975.
40. *Some characterizations of ultrabornological spaces.* «Annales de l'Institut Fourier», Tome XXIV, Fasc. 3, Grenoble, 1975.
41. *On inductive limits of a Banach spaces.* «Manuscripta Mathematica», Vol. 15, München, Springer, 1975.
42. *A class of precompact sets in Banach spaces.* «Journal für die Reine und Angewandte Mathematik», Band 276, Berlin-New York, 1975.
43. *Some properties in countable inductive limits.* «Archiv der Mathematik», Vol. XXVI, Bassel und Stuttgart, Birkhäuser, 1975.
44. *On quasi-completeness and sequential completeness in locally convex spaces.* «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Band 276, Berlin-New York, 1975.
45. *Algunos teoremas de inmersión en espacios topológicos separables.* «Rev. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales», de Madrid (Homenaje al Profesor Lora), 1975.
46. *On countable locally convex direct sums.* «Archiv. der Mathematik», Vol. XXVI, Fasc. 4, Bassel und Stuttgart, Birkhäuser, 1975.
47. *On B_r-completeness.* «Annales de l'Institut Fourier», T. XXV, Fasc. 2, Grenoble, 1975.
48. *Algunos resultados sobre completitud en espacios localmente convexos.* «Collectanea Mathematica», Vol. XXVI, Fasc. 2.°, 1975.
49. *On metrizable locally convex spaces.* «Archiv der Mathematik», Vol. XXVII, Fasc. 1, Bassel und Stuttgart, Birkhäuser, 1976.
50. *Sucesiones de conjuntos convexos en los espacios vectoriales topológicos.* «Rev. Matemática Hispano-Americana», 4.ª Serie, T. XXVI, núms. 2-3, Madrid, 1976.
51. *Some news results on weak compactness.* «Journal of Functionnal Analysis», Vol. 24, núm. 1, New York and London, Academic Press, 1977.

TESIS DOCTORALES DIRIGIDAS POR EL PROFESOR VALDIVIA

1. *Desarrollos asintóticos y familias compactas de funciones holomorfas con valores vectoriales*. Tesis de D. M. López Pellicer. Calificada con Sobresaliente «cum laude», 1969.
2. *La teoría de la dualidad en los espacios vectoriales topológicos localmente convexos*. Tesis de D. A. Marquina Vila. Calificada con Sobresaliente «cum laude», 1973.
3. *Sobre ciertas clases de espacios semi-tonelados*. Tesis de D. P. Pérez Carreras. Calificada con Sobresaliente «cum laude», 1973.
4. *Resultados en dos nuevas clases de espacios localmente convexos*. Tesis de D. J. Motos Izquierdo. Calificada con Sobresaliente «cum laude».
5. *Sobre dualidad en ciertas clases de espacios localmente convexos*. Tesis de D. J. Lloréns Sánchez. Calificada con Sobresaliente «cum laude», 1974.
6. *Propiedades de los espacios de sucesiones: ρ-dualidad y espacios casi-perfectos*. Tesis de D. J. Antonino Andreu. Calificada con Sobresaliente «cum laude», 1974.
7. *Estudio de ciertas topologías definidas sobre espacios vectoriales*. Tesis de D. M. Suárez Fernández. Calificada con Sobresaliente «cum laude», 1975.
8. *Sobre ciertos subanillos de funciones continuas*. Tesis de D. C. Martínez Carracedo. Calificada con Sobresaliente «cum laude».
9. *Anillos de funciones continuas y realcompactación*. Tesis de D. M. Sanz Alix. Calificada con Sobresaliente «cum laude», 1975.
10. *Compacidad débil en espacios localmente convexos*. Tesis de D. V. Montesinos Santalucía. Calificada con Sobresaliente «cum laude», 1976.
11. *Algunos problemas topológicos en espacios completamente regulares*. Tesis de D. J. Blasco Olcina. Calificada con Sobresaliente «cum laude», 1976.

DISCURSO DE CONTESTACION

DEL

EXCMO. SR. D. GERMAN ANCOCHEA QUEVEDO

Excmo. Sr. Presidente.
Sres. Académicos.
Señoras y Señores:

Es para mí hoy día de profunda satisfacción al recibir, en nombre de nuestra Academia, a un matemático de méritos tan relevantes como merecido es su renombre en el mundo actual de nuestra ciencia. Me enorgullezco de contarme entre los primeros que, en nuestro país, supieron justipreciar el valor de su saber y preveer la importancia que su brillante quehacer había de adquirir en breve espacio de tiempo. Mi mérito es mayor si se tiene en cuenta, de una parte, que mi juicio y previsión datan de antes de haber tenido el placer de conocer personalmente a Valdivia y, de otra, que su campo de trabajo no es precisamente aquel en que mis limitados conocimientos operan con mayor soltura.

Antes de entrar en materia, quiero expresar mis más sinceras gracias a nuestro Presidente y a la Academia por haberme encomendado esta entrañable tarea.

* * *

Es costumbre, aunque no norma imperativa, que, en estas circunstancias, el que recibe haga una glosa del discurso del recipiendario. Labor siempre difícil y, en el caso presente, más bien imposible. Ante la profunda y densa lección de Valdivia, nada de lo que yo pudiera añadir, en espacio de tiempo forzosamente reducido, podría servir para facilitar de modo apreciable la comprensión de tanto saber como en ella se encierra. Ya sería ardua labor poder guiar al auditorio a través de la enmarañada selva de su terminología. Inútil pensar en la posibilidad de dar, en pocas palabras, idea de lo que es un espacio bornológico o tonelado o infra Ptak, incluso hablando a matemáticos profesionales. Ni aun con la esperanza de satisfacer nuestro patriótico orgullo, sabiendo que al final aparecen unos espacios de Valdivia que, aun sin necesidad de penetrar hondamente en su significado, son algo nuestro porque son de Valdivia.

Renunciando pues a una glosa detallada, queda, en el caso presente, la estricta obligación de señalar el hecho de que, aunque la ejemplar modestia de nuestro nuevo colega no lo haya puesto suficientemente de relieve, en la mayor parte sino en todos los resultados importantes que perfilan el estado actual del Análisis funcional, estado que él nos ha descrito con profundo conocimiento aunque, digámoslo también, con abundantes tecnicismos por desgracia imposibles de soslayar, la contribución de Valdivia ha sido y es de capital significación.

* * *

Paso ahora a considerar algunos hitos esenciales de su magnífico curriculum. Nace Valdivia, en 1928, en Martos. Hace sus estudios de bachillerato en su ciudad natal, obteniendo brillantes calificaciones en todas las asignaturas, sin que aparezca visible una predilección marcada por las matemáticas.

Inicia en Madrid sus estudios superiores como alumno de la Facultad de Derecho. Los motivos de su elección no son de tipo vocacional, están más bien forzados por imperativos de orden económico. No llega, sin embargo, a concluir el primer curso. Abandona lo que podríamos llamar sus veleidades jurídicas y se dedica intensamente a la preparación para el ingreso en la Escuela Superior de Ingenieros Agrónomos. En su nueva inclinación influye de modo decisivo un hecho accidental: algunos compañeros de alojamiento en Madrid preparan el ingreso en dicha Escuela; Valdivia observa el hecho a primera vista paradójico de que, con sólo sus conocimientos matemáticos adquiridos durante el bachillerato, es capaz de resolver los problemas que se resisten a sus compañeros, veteranos de varios años de preparación. Decide probar sus fuerzas en esa dirección y pronto realiza con éxito las pruebas de ingreso. Una vez en la Escuela, simultanea ¡necesidad obliga! las tareas de estudiante con las de profesor en la Academia Claret, en la que antes había hecho su preparación para Agrónomos. Explica entonces matemáticas, genética y físico-química, tanto en la Academia Claret como en numerosas clases particulares. Debido a la abrumadora labor de enseñante, sus estudios en la Escuela no presentan nada especialmente destacable. Es, sin embargo, en esta época cuando sus preferencias por las matemáticas comienzan a señalarse.

Al terminar la carrera de Ingeniero Agrónomo (1959), obtiene una beca en Investigaciones agronómicas y, al mismo tiempo, es nombrado Profesor Adjunto de Matemáticas en su Escuela. Consciente ya de su vocación matemática, aprueba, con trabajo de forzado, en dos años las asignaturas de la licenciatura en Ciencias matemáticas en la Universidad Complutense (1961). De su paso meteórico por nuestra Facultad, como alumno libre, he recogido hace pocos días de boca de uno de sus compañeros ocasionales, hoy distinguido Profesor en una Universidad canadiense, un detalle que refleja y haría presagiar la facultad de síntesis y la facilidad creadora que han sido características de la labor posterior de nuestro nuevo compañero. En vísperas de un examen decía Valdivia: de las asignaturas no me interesa estudiar más que las ideas fundamentales, las demostraciones de los teoremas que se presenten ya me encargaré yo de elaborarlas en cada caso.

En 1961 alcanza el Grado de Doctor Ingeniero Agrónomo.

* * *

Licenciado en matemáticas, nuestro compañero Maravall lo pone en contacto personal con Ricardo San Juan, quien, desde el primer momento, aprecia las extraordinarias dotes de Valdivia y con brusca sinceridad, descuidando ingenuamente el evidente trasfondo económico, le reprocha el tiempo dilapidado en estudios y trabajos no matemáticos. Bajo la dirección de San Juan elabora su tesis doctoral, que leída en 1963 obtuvo la calificación de Sobresaliente ¡sin laude!, sobre cuestiones de límites de funciones absolutamente continuas con distintos tipos de convergencia. Tema que, el mismo San Juan, consideraba un poco al margen de las corrientes de interés vigentes entonces en matemáticas. Por fidelidad a San Juan, quien gustaba comentar con Valdivia sus resultados a medida que aquél los iba obteniendo, continuó algún tiempo en la misma dirección y fruto de sus trabajos en dichos dominios fueron tres artículos publicados en nuestra Revista (1963-65).

En 1965 obtiene, en brillantes oposiciones y con el número uno, una cátedra de Análisis matemático en la Universidad de Valencia. A fines de 1967 se produce un cambio esencial de rumbo en las investigaciones matemáticas de Valdivia, que había de situarlo en el camino, seguido desde entonces, a lo largo del cual ha cosechado los brillantes y numerosos resultados que le han dado justo renombre en el mundo matemático. El viraje se produce, o al menos coincide, con el estudio del libro de Schaefer: *Topological vector spaces*. Su nueva afición resulta patente si se considera que, entre los trabajos publicados siguiendo la dirección marcada por San Juan y los que corresponden a sus actuales preferencias transcurren tres años (1965-68) vacíos en la producción publicada por Valdivia, estiaje insólito que no ha vuelto a repetirse desde entonces.

* * *

Los espacios vectoriales topológicos aparecen como una generalización de los espacios vectoriales euclidianos de dimensión finita y tienen sus raíces en el estudio de problemas de Análisis funcional; por ejemplo de la equivalencia de la solución de una ecuación integral con la de un sistema de infinitas ecuaciones lineales. La generalización resulta en primer lugar de la consideración de espacios de dimensión infinita, lo que da lugar a hechos nuevos sin salir del campo puramente algebraico, ya que, en dicho caso, el dual algebraico del espacio es de dimensión mayor que la de éste. Y es así como se presenta de manera natural la exigencia de una topología que permita restringir la definición del dual algebraico a la de un dual topológico en el que se consideren únicamente las formas lineales que son continuas respecto de una topología adecuada. En el caso de dimensión finita, todas las topologías interesantes son equivalentes y todas las formas lineales son continuas respecto de esas topologías. La adecuación de la topología viene regida por la necesidad de poder disponer de un número suficiente pero no excesivo de formas lineales continuas. Los morfismos entre espacios vectoriales topológicos son las aplicaciones lineales continuas y, además, abiertas en la imagen. Es un problema importante entonces el siguiente; dada una aplicación lineal z de un espacio E en otro F, poder determinar si z es continua. Para espacios esparables, una condición necesaria es que la gráfica de z en $E \times F$ sea cerrada. El primer trabajo de Valdivia en su nueva orientación no puede ser más prometedor; publicado en nuestra Revista en 1968, en él se determina la clase más general de espacios para los cuales dicha condición necesaria es también suficiente. Resultado que contradecía una conjetura emitida por Schaefer en su libro. Este resultado sobre la gráfica cerrada es conocido hoy como teorema de Adash-Komura-Valdivia (¡orden alfabético!).

Centrado su interés en los espacios vectoriales topológicos, entre 1968 y 1971 publica diez trabajos en los que, junto a otros resultados de importancia, resuelve problemas planteados en dicha teoría enunciados, en particular, en el célebre curso de Grothendieck de Sao Paulo (1954) y en los tomos correspondientes de Bourbaki (1955).

En 1969 obtiene la cátedra de Matemáticas I de la Escuela Superior de Ingenieros Agrónomos de Valencia, Cátedra cuyas enseñanzas simultanea con las de Análisis de la Universidad durante algunos años.

* * *

Durante la Reunión de Matemáticos españoles celebrada en La Laguna en diciembre de 1970, tuve ocasión de presentar a Valdivia al Profesor Dieudonné, llegado para pronunciar la conferencia de clausura de la Reunión. Si bien este primer contacto no tuvo consecuencias inmediatas, ya que dificultades idiomáticas impidieron un cambio satisfactorio de ideas, de él resultó, de modo más o menos directo, el comienzo de las publicaciones de Valdivia en revistas matemáticas internacionales del mayor prestigio. Tarea ésta que continuó y continúa desde entonces a un ritmo verdaderamente vertiginoso. De entre esas revistas destacamos, indicando el número de publicaciones de Valdivia en cada una de ellas, las siguientes: *Journal de Crelle* (4), *Annales de l'Institut Fourier* (6), *Mathematische Annalen* (4), *Duke Mathematical Journal* (1), *Mathematische Zeitschrift* (1), *Studia Mathematica* (1), *Manuscripta Mathematica* (5), *Archiv der Mathematik* (5).

No es fácil explicar, sin entrar en detalles técnicos de difícil comprensión, la calidad de la contribución de Valdivia contenida en estas publicaciones. Destacaremos cuatro resultados de los más importantes. Uno de ellos, al que ha de referirse forzosamente todo el que trabaje en la teoría de espacios convexos, se enuncia así: todo subespacio de codimensión numerable de un espacio tonelado es tonelado. El teorema había sido establecido por Dieudonné para el caso de codimensión finita, posteriormente ha sido generalizado por De Wilde y por otros distinguidos especialistas de la teoría. De importancia también es el siguiente resultado: una propiedad de un espacio vectorial topológico se dice hereditaria respecto de un conjunto de subespacios de él cuando éstos gozan también de dicha propiedad. Valdivia prueba que, para varias clases de espacios de gran interés, la propiedad de definición no es heredada por los subespacios de codimensión numerable. En 1954, Grothendieck planteaba la cuestión: ¿es bornológico todo espacio (D F) tonelado? En 1964 Komura dio una respuesta en la que Valdivia señaló un error en 1972, recientemente, en 1974, Valdivia dio la respuesta correcta, que es negativa. Finalmente, otra cuestión de gran importancia cuya solución se hizo esperar más de veinte años era la de saber si el espacio de las distribuciones $\mathcal{D}'$, con la topología fuerte, y el espacio $\mathcal{D}$ son B_r-completos; en 1974 y en otro trabajo hoy en prensa, Valdivia prueba que, en ambos casos, la respuesta es negativa.

* * *

El virtuosismo de Valdivia para resolver problemas difíciles de Análisis funcional linda con la perfección y su merecida fama en este sentido es universal. Sirva de ejemplo la siguiente anécdota: en una Reunión celebrada en Silivri (Turquía), con motivo de la inauguración del Instituto de Matemáticas, el conocido especialista en espacios de Banach, Profesor Alexander Pelczynski, planteó en su conferencia un problema, a su juicio de gran dificultad. Luego dirigiéndose al público dijo: este sería un buen problema para el Profesor Valdivia.

Es sabido que el mayor interés del Análisis funcional estriba, como lo prueban su origen y su historia, en suministrar teoremas de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones en derivadas parciales. Esto es obvio para la teoría lineal, cuyo desarrollo ha sido considerable. Sin embargo, no se han obtenido grandes progresos en lo relativo a los más simples problemas no lineales. En todo caso, el Análisis funcional aparece como un instrumento de gran eficacia y de interés intrínseco por la belleza de sus resultados. Teniendo esto presente, séame permitido, sin embargo, expresar un voto que, de ser cumplido, sería para mí fuente de sincera y cordial satisfacción. Desearía que Valdivia, cuyos motivos de complacencia por los éxitos que ha cosechado en Análisis funcional son más que sobrados, volviera, ¡sin dejar este dominio!, su vista hacia las cuestiones matemáticas que lo originaron y que esperan todavía solución.

Tengo la convicción profunda de que, con sus condiciones excepcionales, pronto alcanzaría en la nueva tarea la fama que hasta ahora le ha sonreído en el campo de los espacios vectoriales topológicos.

* * *

Nos queda, last but no least, hablar de Valdivia como maestro. También en esta faceta aparece como persona de valer extraordinario. En la Universidad de Valencia ha sabido reunir a su alrededor un grupo de jóvenes inteligentes y con gran interés por las matemáticas, formando una escuela envidiable de Análisis funcional. El entusiasmo de Valdivia es comunicativo y sus alumnos le siguen con fe y con admiración ilimitada. Fruto fehaciente de su labor en este aspecto son las once Tesis dirigidas por él en una Facultad cuya sección de matemáticas es de creación relativamente reciente. Todas esas Tesis han sido calificadas de Sobresaliente «cum laude».

Enunciemos rápidamente algunos de sus méritos no reseñados en lo que precede.

Ha sido miembro corresponsal de esta Academia desde 1973.

Consultante (referee) para la publicación o no en Revistas internacionales de prestigio, en temas de su especialidad.

Referente del Zentralblatt für Mathematik y de la Mathematical Reviews.

Personalmente invitado, ha dado conferencias en las Universidades de Burdeos, Lieja, Bonn y Estambul; así como en el conocido Instituto de Oberwolfach.

Ha sido consultado varias veces a propósito de promociones de rango de profesores en Universidades americanas.

Día fasto el de hoy para nuestra Academia. La llegada de Valdivia con su sólido bagaje científico y el ímpetu juvenil de su entusiasmo por las matemáticas, auguran una colaboración fecunda en las tareas de esta Casa. Los que hemos espigado en sus trabajos sabemos de la fina labor de orfebre que le adorna, del equilibrio de su imaginación a la hora de considerar generalizaciones, ni excesivas ni escasas, lo justo para poder atacar los problemas que precisan de nuevos puntos de vista o de nuevos instrumentos de trabajo; labor en suma de artista y no debemos olvidar que la matemática antes que ciencia es un arte.