REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

La función zeta de Riemann

DISCURSO

LEIDO EN EL ACTO DE SU RECEPCION

POR EL

EXCMO. SR. D. ENRIQUE LINES ESCARDO

Y

CONTESTACION

DEL

EXCMO. SR. D. ALBERTO DOU MASDEXEXAS

EL DIA 15 DE DICIEMBRE DE 1982

MADRID
DOMICILIO DE LA ACADEMIA:
VALVERDE, 22.—TELEFONO 221-25-29
1982

ISBN: 84-600-2890-9

Depósito Legal: M. 39.871-1982

TALLERES GRÁFICOS VDA. DE C. BERMEJO - SANTA ENGRACIA, 122 - MADRID-3

DISCURSO

DEL

EXCMO. SR. D. ENRIQUE LINES ESCARDO

TEMA:

LA FUNCION ZETA DE RIEMANN

Excmo. Sr. Presidente,
Excmos. Sres. Académicos,
Señoras y Señores:

Mis primeras palabras en este acto, han de ser de sincera y afectuosa gratitud, por la alta e inmerecida distinción que me habéis otorgado, Señores Académicos, al designarme para ocupar un lugar entre vosotros.

Se algo de la responsabilidad y dedicación que conlleva el acceso a esta Real Academia, y conozco bien la competencia, acierto y discreción con que vosotros la servís. Tal vez, por esto, la forma más real y convincente de mi agradecimiento sea el compromiso de servir a la Institución con el entusiasmo de que vosotros dais ejemplo.

La mención y justo elogio de los maestros que fueron portadores de una medalla, en el acto de recepción de un nuevo académico, al que se le hace depositario de ella, no tiene sentido estricto en este acto, por tratarse de una medalla de nueva creación. Sin embargo me dolería el no haber recordado algunos de mis maestros, hace años desaparecidos, que fueron miembros muy distinguidos de esta Real Academia y figuras señeras de la Universidad española. Tengo presente al austero catedrático D. Miguel Vegas Puebla-Collado en uno de sus últimos cursos de Doctorado, y a D. José G. Alvarez Ude en cuyas clases la agudeza de su razonar geométrico se revestía de un sutil humor. Con D. Julio Rey Pastor se vivía una Matemática, que no era ciencia impuesta, sino encontrada; y de D. Francisco Navarro Borrás todavía perdura el recuerdo de la viveza y relieve de sus magistrales lecciones. También extiendo este tributo de admiración y afecto a los compañeros en las tareas docentes profesores D. Ricardo San Juan Llosá y D. Germán Ancochea Quevedo. Los dos dieron lo mejor de sí mismos en su magisterio universitario, en el que creían, y prestigiaron a la Academia de manera ejemplar.

Finalmente, también me gusta llamar maestro a D. Antonio Torroja y Miret, pues lo fue para todos por su talante universitario, y para mí en particular por su afectuoso ejemplo.

Ciertamente está lleno de responsabilidad tomar el relevo en un puesto de la Academia, simbolizado por la imposición de la medalla, que antes portaron miembros ilustres; pero tal vez sea más comprometido el encargo de comenzar una singladura, cuando la Academia hace depositario a un científico de una nueva medalla. Se trata de abrir un nuevo camino. Ante esta situación sólo me queda repetir: «Muchas gracias», por la confianza que depositáis en mí; y pedir a Dios que me ayude a llevar la medalla con dignidad, y a no defraudar en este nuevo quehacer científico y humano.

El tema que va a ser objeto de mi disertación es *La función zeta de Riemann*. Se trata de un tema clásico, ya que Riemann introduce su función en una breve memoria, de sólo ocho páginas, publicada en 1875 [1], en la que se ocupa de una cuestión con antecedentes en la matemática griega. Se refiere a cuántos son los números primos menores que un número dado. El trabajo de Riemann presenta el interés de ser uno de los primeros en el que de manera sistemática se emplean métodos funcionales en el estudio de la Teoría de números.

No me fue difícil la elección de este tema para el discurso de ingreso en esta Academia, pues en él se manifiesta la potencia de los métodos del Análisis, que han sido mi instrumento favorito durante mi carrera universitaria, y por otra parte se aplican en uno de los campos de mi predilección y en el que de forma temprana se despertó mi curiosidad matemática. Ya se sabe que en todos los discursos de ingreso se trasluce un fondo autobiográfico.

Las proposiciones de la Teoría de números clásica tienen el atractivo de que sus formulaciones son tan breves y diáfanas que están al alcance de cualquier estudiante de enseñanza media. Las proposiciones no se ocupan ordinariamente con propiedades curiosas de un número en un caso concreto, sino que sus afirmaciones se refieren a conjuntos no finitos de números, por lo que sólo son comprobables en casos particulares. El *paso al infinito* las adorna de una trascendencia e inaccesibilidad, que las hace distintas de las certezas experimentales del mundo físico. La primera impresión del infinito matemático es, pues, perturbadora.

Mis primeras vivencias en este campo las tuve al escuchar de mi padre algunas de las proposiciones de la Teoría de números. Tal vez fuera la llamada conjetura de Goldbach: *Todo número par mayor que 4 es suma de dos números primos*. Seguramente que crecería mi admiración al saber que la proporción *todavía* no había sido demostrada.

He dicho que el tema de mi disertación es «La función zeta de Riemann», sin embargo no es mi deseo hacer un detallado estudio monográfico sobre una función que no pierde actualidad después de 125 años de su descubrimiento. Aunque el tema, como en la composición musical, está presente y mantiene el hilo del discurso, el sentido de éste, es una reflexión sobre la esencia, desarrollo, evolución y sentido del pensamiento matemático, y sobre los protagonistas, descubridores unos del hecho matemático, y otros creadores de su expresión.

Siento que no podré dar satisfacción a los teóricos de la Cultura y de la Filosofía que desde tiempos lejanos, vienen disputando sobre el quehacer de los matemáticos, y la situación de la Matemática en la constelación de los saberes; pero me daría por satisfecho si consiguiera una aproximación al problema, a través de uno de los procesos más fascinantes en la evolución del pensamiento científico.

Efectivamente, este tema sobre el ser y devenir de la Matemática no sólo interesa a los historiadores de la Cultura, sino que es ocupación frecuente, y a veces preocupación, en la reflexión de los hombres cultos, entre los que no excluyo a los mismos matemáticos.

Conversaba con un notable universitario sobre temas generales referentes al pensamiento científico, y la conversación derivó hacia estas cuestiones. Sus palabras, casi literalmente, fueron las siguientes: La Matemática que hacéis, ¿es un arte?, ¿es un lenguaje?, y en todo caso, ¿es una ciencia útil? Otras muchas preguntas pudiera haberme formulado.

No trataba el amigo que le diera respuesta a sus preguntas, pues bien sabía que no tenían contestación matemática. Mis réplicas sólo planteaban nuevas cuestiones.

Sin embargo aquellas preguntas tan directas, fueron motivo de lecturas y reflexiones, y también ocasión para admirar el buen juicio del que las formulara.

Aunque fuera oportuna una justificación de esa Matemática, no la haré de momento, pues las razones que se exponen, en estos casos, dejan de serlo por su carácter subjetivo. Mejor es volver al hilo de nuestro tema.

Los números primos y los compuestos en Pitágoras

Los griegos crearon su propia civilización y cultura, la más impresionante de todas y de mayor influencia en el desarrollo de la cultura occidental. La cultura griega fue decisiva en la fundamentación de la Matemática como la entendemos hoy día [2].

El centro jónico de Mileto, en donde Pitágoras de Samos (585 c.-500 c. a. C.) asistió a la escuela de Thales (640 c.-546 c. a. C.), se dispersó después de que los persas conquistaran el país. En la emigración Pitágoras fundó su propia escuela en Crotona en la Italia meridional, y los sofistas se concentraron principalmente en Atenas. La escuela más celebrada en esta ciudad era la Academia de Platón, en donde Aristóteles fue estudiante. La influencia que la Academia tuvo en el pensamiento griego no tiene paralelismo, con ninguna otra corriente cultural.

Después de este rápido apunte, y dejando de lado las reglas ascéticas y religiosas que informaban la vida de los pitagóricos, me interesa recordar uno de sus principios, tal vez el primero, de la ciencia y filosofía pitagóricas: *El número es la esencia de todas las cosas* [3]. Seguramente reconocieron en el número una inmaterialidad e intemporalidad que por otra parte eran medida y proporción. No es extraño que uno de los motivos por los que llegaron a tal principio, fue la observación de que los intervalos musicales pueden expresarse por determinadas razones entre números naturales. Así pasaron de la Música, que es un bello arte, a la Matemática.

Tenía, pues, gran interés el estudiar el carácter simple o compuesto de los números, por lo que Pitágoras y sus discípulos ya clasificaban los números naturales en primos y compuestos.

Los primos, cuyos únicos divisores son ellos mismos y la unidad son importantes porque *son los indivisibles*, los números primeros, a partir de los que pueden ser construidos todos los demás números, por multiplicación, obteniéndose los compuestos.

A pesar de la simplicidad de su definición, que se remonta a unos 600 años a. C., lo sorprendente es que se conoce muy poco sobre los números primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, ..., etc., y su conjunto. Sabemos que son la base de la Aritmética y Algebra modernas, pero muy poco de su distribución. Seguramente que es el campo de la Matemática donde hay más conjeturas no demostradas.

La proposición 20 del libro IX de Euclides

Alrededor de 300 años antes de C. ocurrió un suceso de importancia singular, no sólo en la historia de la Matemática, sino en la de la Cultura en general. La aparición de los *Elementos* de Euclides transformó la Matemática en una *ciencia deductiva.*

Se trata de una colección de trece libros [4], que se conoce en realidad a través de traducciones, reconstrucciones o comentarios, en la que sólo los volúmenes VII, VIII y IX se dedican a la Aritmética. Aún en estos libros prevalece una inspiración geométrica y un aroma gráfico de acuerdo con el espíritu de la obra. Así, los números los representa por segmentos, lo que explica que para indicar que un número es divisible por otro se dice que el primer número es medible por el segundo.

En el libro VII se encuentra la noción de número primo, así como las de mínimo común múltiplo y máximo común divisor, dando un procedimiento para su cálculo (Algoritmo de Euclides).

También en el mismo libro se estudian las proposiciones básicas de la teoría de la divisibilidad.

En el libro IX hay una proporción *diferente* ya que no se refiere a propiedades de los números primos sino a cuantos hay.

La proposición 20 del libro IX reza así:

«*Hay más números primos que en cualquier multitud dada de números primos.*»

La palabra *multitud* es clave en el enunciado. Al dar una colección se sobreentiende la finitud en sentido coloquial.

El enunciado de la proposición 20 es de una finura extraordinaria, por lo que sugiere, en un texto ingenuo. Se trata de dos conceptos básicos de pura matemática conjuntista: *el conjunto de todos* los números primos, y la *infinitud matemática actual* de dicho conjunto.

La demostración que da Euclides es la que se ha conservado a lo largo de los siglos y que consiste en el desarrollo de la siguiente idea: Si al producto de un número finito de primos se le suma una unidad, o es primo el número resultante, o tiene un divisor primo; y en ambos casos distinto de todos los primos dados.

Considero interesante transcribir la demostración según el texto griego (salvo ligeros cambios de notación), en la que dentro de un estilo verbal está presente la pureza del razonamiento deductivo [5].

«Dados los números primos OA, OB y OC, sea OD el menor número que esté medido por ellos, y agrégesele la unidad DZ. Entonces OZ es un número primo o no lo es. Si lo es, se tienen los números primos OA, OB, OC y OZ, que son más que los OA, OB y OC. Si OZ no es primo estará medido por algún número primo OH, que no es ninguno de los OA, OB o OC, pues si fuera uno de éstos mediría a OD, y por tanto a la diferencia DZ, que es la unidad, lo cual es absurdo. Luego OH no es ninguno de los números OA, OB u OC, y como por hipótesis es primo, la multitud OA, OB, OC y OH tiene más números primos que la dada.

Como destacó Pascal, veinte siglos después: Euclides no sólo poseía el espíritu geométrico que lo ha inmortalizado, sino una finura de espíritu que, de contar con un *simbolismo adecuado,* le hubiera permitido adelantarse a los aritméticos del siglo XVI, como se adelantó a los geómetras.

Los métodos analíticos en la Teoría de números

La demostración euleriana de la proposición 20

El conocimiento de las leyes que rigen la distribución de los números primos, no experimenta ningún avance hasta principios del siglo XVIII, en el que Euler vuelve a demostrar que existen infinitos números primos, y de *manera más complicada* de como lo hiciera Euclides.

Esta aparente paradoja pone de manifiesto que en Matemáticas la importancia de un resultado queda palidecida, a veces, por el método seguido para alcanzarlo. La demostración euleriana está tan llena de significado que no debemos omitirla.

«Si hubiera solamente un número finito de primos: $p_1, p_2, \ldots, p_r$, teniendo en cuenta que todo entero se descompone en producto de factores primos de manera única, se tendría:

$$\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)^{-1}=\prod_{i=1}^{r}\left(1+\frac{1}{p_i}+\frac{1}{p_i^2}+\ldots\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,.$$

La divergencia de la serie armónica pone de manifiesto que el primer miembro de la igualdad, no puede ser un producto de un número finito de factores.»

Trabajos de Euler

La demostración anterior, es la circunstancia por la que se da noticia de la entrada de los métodos analíticos en la teoría de números; pero es evidente que la huella de Euler, el matemático del siglo XVIII, fue más profunda e iluminadora.

Todavía no se había sosegado el mundo matemático, después del descubrimiento del Cálculo diferencial, uno de los logros más importantes de la cultura occidental, y ya dio comienzo al maravilloso abuso del empleo de los métodos diferenciales.

Antes de conseguir la justificación adecuada de unos métodos, que permiten el *estudio de lo variable*, frente a la concepción griega de una Matemática estática, los resultados que se obtienen (el siglo XVIII es testigo) son espectaculares.

Leonhard Euler (1707-1783) es el llamado a ser testimonio de este momento estelar de la Ciencia. Nace cerca de Basilea, hijo de un pastor protestante, y tras seguir cursos de Teología, su interés por la Matemática le lleva a su estudio, cerca de Johannes Bernoulli, publicando sus primeros trabajos a los 18 años.

Disputado su magisterio entre San Petersburgo y Berlín, no hubo rama de la Matemática y de la Física en la que no quedara marcada su impronta.

Al final de su vida pudo considerar como discípulos a todos los matemáticos de Europa, que tanto le admiraban por su ciencia como por la nobleza de su carácter.

Entre los 74 volúmenes que ocupan las obras completas de Euler, hay contribuciones muy importantes a la Teoría de números, y en particular aparece la que en el siglo siguiente se denominaría «*función zeta*». El estudio que se hace de esta función se refiere a los valores reales, conforme al desarrollo de la Matemática en aquel momento [6].

Anticipándonos a la notación introducida por Ricmann escribamos:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

El cálculo de $\zeta(2)$ aparece propuesto en el texto «Novae Quadrature Arithmeticae» de Pietro Mengoli (1625-1686), profesor de Mecánica en Bolonia, y Euler da, por vez primera, el resultado correcto:

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Calcula asimismo el valor de $\zeta(s)$ para los enteros positivos pares:

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1} B_{2n} (2\pi)^{2n}}{2(2n)!}, \qquad n \geq 1,$$

en donde B_{2n} es un número racional. Estos números llamados de Bernoulli, están determinados por su función generatriz:

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n.$$

En 1737 en su trabajo titulado «Variae Observationes circa series infinitas», Euler da resultados importantes referentes a la distribución de los números primos, usando productos infinitos; entre otros, la llamada «*fórmula del producto de Euler*»:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \qquad s > 1,$$

en donde el producto del segundo miembro se extiende a todos los primos p, siendo s real [7].

Establece también las fórmulas asintóticas, para $n \longrightarrow \infty$:

$$\sum_{p<n} \frac{1}{p} \sim \log \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{y} \quad \sum_{p<n} \frac{1}{p} \sim \log(\log n),$$

en las que con la p se designan los números primos. En estas fórmulas aparece por primera vez una *relación entre los números primos y la función logarítmica*, que es de importancia decisiva, como se verá posteriormente.

Con métodos no siempre «ortodoxos» Euler sigue calculando sobre la función zeta llegando a conjeturar la fórmula [7]

$$\zeta(1-s) = \pi^{-s} 2^{1-s} \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2} \zeta(s),$$

que es la famosa ecuación funcional establecida por Riemann en 1859. En opinión de A. Weil, a Riemann le eran familiares los trabajos de Euler.

La justificación de los cálculos de Euler, ha sido un buen motor impulsor para la depuración de las técnicas del Análisis (estudio de las convergencias absoluta, uniforme, etc., aproximaciones asintóticas, productos infinitos, criterios de sumación, entre otros).

En nuestros días, muchas de las «verdades evidentes» para Euler se justifican mediante recursos de Análisis no estándar [8].

El teorema del número primo

El problema principal de Teoría de números, con intervención de los métodos analíticos, fue el estudio de la función $\pi(x)$, que para cada real x indica el número de primos menores o iguales que x.

Es interesante dar alguna noticia de la historia de este problema.

Vista la irregularidad con que aparecen los primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ... en la serie de los números naturales y que progresivamente se va aclarando, se presentaba la duda legítima de si la función $\pi(x)$ se podría expresar o al menos aproximar por funciones conocidas. A finales del siglo XVIII, Gauss y Legendre se ocuparon de la cuestión siguiendo vías distintas.

El método de Gauss se puede calificar de «experimental», pues construyó «a mano» una tabla de números primos hasta tres millones, calculando cuántos primos aparecían al agrupar los enteros de mil en mil, y los tantos por ciento correspondientes.

A partir de estos resultados deduce que la «densidad» con que aparecen los primos en la serie natural es $1/\log x$; lo que con lenguaje algo más preciso se puede escribir:

$$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

Por otra parte Legendre, alrededor de 1800, publica en su «Théorie des Nombres [9] una fórmula empírica para la densidad, que coincide con la anterior. Como justificación Legendre expone la plausibilidad de su fórmula frente a otras de decrecimiento potencial.

A pesar de la debilidad de estos argumentos, la llamada *«fórmula de Legendre»* tuvo éxito en el mundo matemático, siendo mencionada por los grandes: Abel, Dirichlet y Chebyshev entre otros, en el período 1800-1850.

Conocida la equivalencia asintótica:

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t} \sim \frac{x}{\log x}, \quad \text{para} \quad x \to \infty,$$

la conjetura Gauss-Legendre también se puede escribir en la forma:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \quad \text{o} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1,$$

cuyo enunciado, con la imprecisión del estilo coloquial, es una de las proposiciones más sugestivas de la Matemática: *El número de primos menores que* x *es aproximadamente igual a* x/*log* x *para* x *suficientemente grande.*

El error relativo de la aproximación tiende a 0 cuando x crece indefinidamente.

x	Número de primos < x	$x/\log x$	Error relativo
10^3	168	144,8	0,160
10^6	78.498	72.382	0,084
10^9	50.847.478	48.254.942	0,054

En 1850 esta proposición era una conjetura. Algunos pensaban que no sería posible dar una demostración rigurosa, pero 46 años después la conjetura pasó a ser un teorema.

Es justo mencionar que en 1848 el matemático ruso P. L. Chebyshev (1821-1894), profesor en la Universidad de Petrogrado, obtuvo el resultado parcial [10]:

$$0{,}922 < \frac{\pi(x)}{x/\log x} < 1{,}105,$$

sin conseguir probar la existencia del límite.

El Análisis complejo en la Teoría de números

La memoria fundamental de Riemann

En el tomo de la revista de la Academia de Berlín del año 1859, págs. 671-680, se encuentra una memoria titulada «*Sobre el número de primos menores que una magnitud dada*» [10], original del recién nombrado académico Bernhard Riemann. Esta memoria, de sólo 8 páginas, se ocupa efectivamente de la célebre conjetura de Gauss-Legendre. Su estilo es el típico de Riemann, una exposición terriblemente esquemática con demostraciones llenas de lagunas, y además es su único trabajo dedicado a Teoría de números.

Sin embargo, en casi todo lo hecho posteriormente sobre números primos aparece la influencia de los métodos y resultados de este trabajo.

El «curriculum» de Bernhard Riemann es la historia de la vida nada fácil de un genio. Al final de sus «Obras completas» [11], que es un solo volumen de 506 páginas, publicado 10 años después de su muerte, hay una biografía emocionada escrita por Dedekind. Al leerla con admiración y respeto voy recogiendo algunas notas para conseguir un contacto más personal con uno de los matemáticos de ideas más originales y penetrantes, muchas de las cuales tardaron en ser asimiladas más de medio siglo.

Bernhard Riemann (1826-1866) nace en Breselenz no lejos de Göttinga, hijo de un pastor protestante, y muere a los 39 años en Selasca, en las orillas italianas del Lago Mayor donde esperaba recobrar la salud perdida hacía tiempo.

En la personalidad de Riemann se refleja el ambiente de una familia tradicional y religiosa, no holgada de medios, a la que siempre estuvo muy unido. Educado por su padre hasta los 13 años, pasa después al gimnasio, cuyo director reconoce su capacidad para las

Matemáticas, y le recomienda la lectura directa de los grandes maestros, y entre ellos a Euler y Legendre.

En 1846 se matricula en Göttinga como estudiante de Teología, y después, con permiso de su padre, pasa a Matemáticas asistiendo a las lecciones de Gauss, ya en declive, Weber y otros. El año siguiente se traslada a Berlín en donde permanece dos años, y después vuelve a Göttinga. En Berlín estudia Teoría de números, Cálculo integral y Ecuaciones en derivadas parciales con Dirichlet; Algebra y Mecánica analítica con Jacobi, y con Einsenstein Funciones elípticas.

Lejeune Dirichlet sucede a Gauss en Göttinga a la muerte de éste en 1855. Cuatro años después fallece Dirichlet, y Riemann es nombrado profesor ordinario.

Pocos días después de su acceso a ordinario en Göttinga, la Academia de Ciencias de Berlín le recibe como miembro de la misma, en la rama de Física y Matemáticas, y Riemann envía para su publicación la célebre memoria antes mencionada.

Me he extendido más de lo que pensara en lo que algunos historiadores de la Ciencia denominan, con ligereza, «anécdota humana», pero no me pesa. Muchas veces, más interés que los resultados, tiene el camino seguido para alcanzarlos, y siempre es el hombre quien recorre los caminos. Además Riemann antes de recorrerlos los ideó, lo que confirma que la primera cualidad del buen matemático ha de ser la imaginación.

Definición de la función zeta en la memoria de Riemann

Punto de partida de la investigación de Riemann, es la ya conocida «fórmula del producto de Euler».

$$\sum_n \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

en la que n recorre todos los números naturales 1, 2, 3, 4, ..., y p los primos 2, 3, 5, 7, ... Pero la novedad decisiva que se introduce es considerar *s como variable compleja*, y definir la función:

$$\zeta(s) = \sum_n \frac{1}{n^s},$$

para todos los valores de s, para los que convergen los dos miembros de la fórmula de Euler, es decir para $\mathcal{R}(s) > 1$. En este punto se introduce la nomenclatura de la función ζ.

Siendo Riemann uno de los fundadores de la Teoría de funciones de variable compleja, era de esperar que considerara s como variable compleja; sin embargo, ya en el marco de estas funciones, avanzo hasta el final, extendiendo el dominio de definición de ζ a todo el plano complejo, excepto en el punto $s = 1$, en el que la función tiene un polo.

Es intereeante observar que Riemann no habla de prolongación analítica de la función $\Sigma\, n^{-s}$ definida en el semiplano $\mathcal{R}(s) > 1$, sino que habla de encontrar una fórmula para la función que sea válida *para todo* s del plano complejo. Una prolongación por cadenas de discos, a la manera de Weierstrass, no es del gusto de Riemann, para el que las funciones de variable compleja han de ser tratadas globalmente, y la mejor forma es por sus representaciones integrales.

Efectivamente, en su memoria obtiene la representación de la función ζ por la siguiente fórmula:

$$2 \operatorname{sen}(\pi s)\, \Gamma(s)\, \zeta(s) = i \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^{s-1}}{e^x - 1}\, dx,$$

en donde la integral se calcula a lo largo del camino que parte de $+\infty$ siguiendo una paralela al eje x próxima a este eje, da vuelta alrededor del origen en sentido directo, y vuelve a $+\infty$ paralelamente al mismo eje x.

Esta igualdad le permite considerar la función ζ *para todo* s, obteniendo así una *función meromorfa con un único polo en* $s = 1$.

Conseguida una definición adecuada para la función ζ, Riemann pasa a demostrar la ecuación funcional intuida por Euler, con los métodos de la teoría de residuos. Los resultados no sólo confirman la validez de la ecuación funcional en el caso real, sino que permiten la caracterización de ζ en el caso complejo. La ecuación obtenida:

$$\zeta(s) = \Gamma(1-s)\,(2\pi)^{s-1}\, 2 \operatorname{sen}\left(\frac{s\pi}{2}\right) \zeta(1-s),$$

también se puede escribir

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \pi^{-\frac{1-s}{2}} \zeta(1-s)$$

en la que resalta *la invariancia del primer miembro al sustituir* s *por* 1 — s.

En esta forma, aparece claramente que el contenido matemático de la ecuación funcional de la función ζ es la propiedad de invariancia. Riemann lo confirma dando una segunda demostración de la misma, basada en la ecuación funcional de la función theta de Jacobi.

Como la función ζ tiene un polo en $s = 1$, de la propiedad de invariancia resulta que el primer miembro de la igualdad anterior es una función que tiene dos polos en los puntos $s = 1$ y $s = 0$; por eso es conveniente, como se hace en la memoria, introducir la nueva función ξ definida por

$$\xi(s) = s(s-1)\,\pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s),$$

para la que la propiedad de invariancia es simplemente

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

Además *la función* ξ *es entera,* pues la función no tiene singularidades en el semiplano $\mathcal{R}(s) \geqslant 1/2$, y por la propiedad de invariancia, ξ tampoco tendrá singularidades en el semiplano $\mathcal{R}(s) \leqslant 1/2$.

Los ceros de la función zeta. Hipótesis de Riemann

Una vez introducida la función ξ, interesa su representación como producto infinito, de forma semejante a la descomposición factorial de un polinomio. Es pues obligado el conocimiento de los valores que anulan a la función, para construir formalmente el producto infinito y poder estudiar su convergencia.

Como la función ξ es entera, y Γ es una función meromorfa con polos en los puntos $0, -1, -2, \ldots$, de la definición de ξ resulta que la función ζ ha de tener ceros en todos los puntos $s = -2n$ con $n \in \mathrm{N}$, y además $\zeta(s) \neq 0$ en todo punto del semiplano $\mathcal{R}(s) < 0$. Por otra parte, de la fórmula del producto de Euler, resulta $\zeta(s) \neq 0$ para todo punto del semiplano $\mathcal{R}(s) > 1$. En consecuencia, *los únicos ceros de la función* ζ aparte de los triviales, deben encontrarse en la franja $0 \leqslant \mathcal{R}(s) \leqslant 1$, llamada *banda crítica.*

Además, la ecuación funcional simétrica, nos dice que tales ceros se encontraron simétricamente situados con respecto a la recta $\mathcal{R}(s) = 1/2$.

El desarrollo de la función ξ en producto infinito está tratado en la memoria de Riemann de manera sorprendente. Se sigue con dificultad la línea del razonamiento, y las conclusiones son oscura consecuencia de las premisas. Sin duda ésta es la parte más difícil del trabajo de Riemann, cuyos métodos y resultados, sin embargo, quedaron confirmados años más tarde por los estudios de von Mangoldt, Hadamard, de la Vallée Poussin entre otros.

En la memoria hay tres afirmaciones relativas a los ceros de la función zeta, aunque la última está moderada con el adverbio «probablemente».

La primera asegura que el número de ceros de ζ, *cuya parte imaginaria se halla comprendida entre* 0 *y* T, es aproximadamente

$$\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi},$$

con un «error relativo» del orden de $\dfrac{1}{T}$. Hasta 1905 no consiguió von Mangoldt una demostración correcta del aserto [12].

La segunda afirmación de Riemann es todavía más desconcertante, pues asegura que el número de dichos ceros situados *en la recta* $\mathcal{R}(s) = 1/2$ es aproximadamente el dado por la expresión anterior. De esta afirmación imprecisa no se da demostración, ni se indica el sentido de la forma de aproximación; y nadie desde entonces hasta hoy ha sido capaz de demostrar el aserto. Las tentativas de demostración han sido numerosas y los resultados parciales. Son notables los siguientes: Hardy en 1914 demuestra que

$$\xi\left(\frac{1}{2}+it\right)=0$$

tiene infinitas raíces reales [13]; Hardy y Littlewood en 1921, que el número de raíces reales entre 0 y T es por lo menos $K\,T$, donde K es una constante positiva [14]; Selberg en 1942, que el número es por lo menos $K\,T\log T$ [15]; y Bohr y Landau en 1914, que el número de raíces de $\xi\left(\dfrac{1}{2}+i\,t\right)=0$, para las cuales es

$$\{0\leq\mathcal{R}(t)\leq T,\ -\varepsilon\leq\mathcal{Y}(t)\leq\varepsilon\},$$

es igual a la expresión dada por Riemann con un error relativo que tiende a 0 cuando T tiende a infinito [16].

Riemann, inmediatamente después de la segunda afirmación, indica que es muy probable que *todos los ceros no triviales de la función* ζ *estén situados en la recta* $\mathcal{R}(s) = 1/2$. Esta afirmación es la llamada «*hipótesis de Riemann*».

En 1900, Hilbert situó el problema de demostrar o contradecir la hipótesis de Riemann en la lista de las más importantes con que debían enfrentarse los matemáticos del siglo XX [17]. Ahora, a fines del siglo, el resultado teórico más avanzado es el de Levinson en 1974, según el cual, al menos una *tercera parte de los ceros de la función* ζ *están situados en la recta* $\mathcal{R}(s) = 1/2$ [18].

Usando un computador los matemáticos Rosser, Schoenfeld y Yohe, de la Universidad de Wisconsin, han probado que los tres primeros millones de ceros de la función ζ están en la recta mencionada [19]. Ultimamente R. P. Brent ha confirmado la hipótesis para los $8{,}1 \times 10^7$ primeros ceros, lo que es una noticia, pero evidentemente no una demostración.

El reto sigue en pie. Una demostración de la hipótesis originaría inmediatamente un progreso acusado en muchos de los problemas referentes a los números primos. El conocido especialista de Teoría de números, E. Landau, dedica un capítulo entero de su tratado [20] a la hipótesis de Riemann, presentando multitud de importantes proposiciones que serían consencuencia de la famosa hipótesis.

Los papeles póstumos de Riemann

El estudio de los manuscritos por Siegel

La hipótesis de Riemann preocupaba al mundo matemático y aparecía como un resultado terriblemente difícil y a la vez deseado. Ya se ha indicado que Hilbert se hizo eco de esta situación incluyéndola en la «lista oficial» de los grandes problemas.

Un natural excepticismo sobre las razones que movieron a Riemann a formular sus proposiciones, en parte mitigado por las demostraciones posteriores que las confirmaban, se extendía y no es extraño que Hardy escribiera en 1915 que Riemann «no podía probar» las proposiciones referentes a la función zeta [21], o que Landau calificara en 1908 de meras conjeturas a dichas proposiciones [20].

Este era el ambiente cuando en 1932 C. L. Siegel publicaba un estudio sobre trabajos relativos a la función zeta y a la Teoría analítica de números [22], encontrados en los manuscritos de Riemann archivados en la Universidad de Göttinga. Se trataba de un suceso de importancia singular en el estudio de la función zeta, y no sólo por contener nuevos resultados fundamentales, sino porque constituían testimonios de la profundidad y pericia de Riemann en sus investigaciones, y una lección a los investigadores sobre su «manera de hacer».

El que lea este trabajo de Siegel, juzgará como ligeras las afirmaciones que valoraban, en menos, descubrimientos en un momento estelar de la historia de la Matemática.

Entre los temas que recoge Siegel hay dos de especial interés. En unos, se da una nueva forma integral de la función ζ por medio de la *fórmula de Rieman-Siegel*:

$$\frac{2\xi(s)}{s(s-1)} = F(s) + \overline{F(1-\bar{s})},$$

donde F está definida por:

$$F(s) = \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}} \int_{\lambda} \frac{e^{-i\pi x^2} x^{-s}}{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}}\, dx,$$

siendo λ un segmento de pendiente -1 que atraviesa el eje real entre 0 y 1 [23].

Aunque se hayan preferido las otras representaciones integrales de la función ζ, Siegel afirma que Riemann en lecciones no publicadas, deduce la teoría de transformación de las funciones theta del estudio de una integral que generaliza la que aparece en F.

El método del puerto para la aproximación de integrales

El otro tema presenta más interés y sorpresa, pues se ocupa de la determinación de los ceros de la función zeta, que manifiestamente está en conexión inmediata con la famosa hipótesis. Por otra parte los métodos seguidos para la determinación de las aproximaciones asintóticas tenían y tienen el carácter de una verdadera creación.

Al realizar la simple idea de aproximar los ceros de la función zeta, hallando los de una función adecuada que la aproxime, se presentan los difíciles problemas de los métodos asintóticos.

Es frecuente que la función que aproxima asintóticamente a una definida por una integral, conste de dos partes: la *parte finita*, suma de una o varias funciones, y el *resto* en el que aparece alguna integral del tipo de la considerada pero de menor orden de magnitud.

La tentación de cargar el peso de la aproximación sobre la parte finita, transformándola en serie, no suele llevar a buen fin, pues ordinariamente se trata de un desarrollo divergente. Mejor es buscar, entre las secciones finitas del desarrollo la más próxima a la función, y estudiar en consecuencia la magnitud del resto. La utilización de series divergentes en la aproximación de funciones, ya presente en los trabajos de Euler, Stieltjes, Poincaré entre otros, y que fue tema muy del agrado de nuestro nunca olvidado R. San Juan, todavía no ha encontrado un tratamiento satisfactorio de suficiente generalidad.

El problema de elegir la sección finita de mejor aproximación, requiere el estudio del resto y al aproximarlo se replantea el problema original, pero en condiciones más favorables.

En el caso de la función zeta, y en otros análogos, se trata de aproximar una integral definida en el campo complejo; y se busca por deformación del camino de integración, que su valor quede concentrado en una pequeña parte del mismo, en el entorno de un punto, y así poder aplicar métodos locales.

Este *método llamado del puerto o del descenso rápido*, que fue redescubierto por J. P. W. Debye en 1910, en el estudio de aproximaciones asintóticas de las funciones de Bessel [24], es uno de los métodos efectivos que con cierta generalidad es aplicable a la determinación de aproximaciones asintóticas de funciones definidas por integrales definidas.

Al leer, en la elaboración de Siegel, el texto de Riemann, se tiene la impresión de estar leyendo un escrito actual. Para obtener un desarrollo asintótico de la función zeta, se parte de la representación integral primeramente considerada:

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x},$$

con el camino de integración acostumbrado alrededor del origen. De esta integral se segrega una parte finita, bien sea desarrollando $(e^{x} - 1)^{-1}$ como progresión hasta N términos, o bien sustituyendo el camino de integración por otro C, compuesto por una circunferencia de centro el origen y radio entre N y $N + 1$, y el acostumbrado corte a lo largo del eje positivo desde la circunferencia a $+ \infty$.

Así se obtiene:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} n^{-s} + \Gamma(1-s)(2\pi)^{s-1} 2 \operatorname{sen} \frac{\pi s}{2} \sum_{n=1}^{N} n^{-(1-s)} +$$
$$+ \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{C} \frac{(-x)^s e^{-Nx}}{e^x - 1} \frac{dx}{x},$$

que se puede escribir en forma más simétrica usando las propiedades de la función Γ.

Como el caso más interesante en el estudio de los ceros de la función zeta, se presenta para $s = 1/2 + i\,t$, t real, haciendo esta sustitución en la fórmula anterior, y después de algunas transformaciones se obtiene

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + i\,t\right) = e^{-i\theta(t)} Z(t)$$

donde

$$\theta(t) = \mathcal{Y}\left(\log \Gamma\left(\frac{1}{4}\,\frac{i\,t}{2}\right)\right) - \frac{t}{2} \log \pi$$

y

$$Z(t) = \sum_{n=1}^{N} n^{-\frac{1}{2}} 2 \cos[\theta(t) - t \log n] +$$
$$+ \frac{e^{-i\theta(t)} e^{-t\pi/2}}{(2\pi)^{1/2} (2\pi)^{it} e^{-i\pi/4} (1 - i\,e^{-i\pi})} \int_{C_N} \frac{(-x)^{-(1/2)+it} e^{-Nx}}{e^x - 1} dx$$

Cuando $N \longrightarrow \infty$, la suma de N términos que aparece en la expresión de Z se transforma en una serie que es divergente, aunque sus términos vayan decreciendo.

Obtenida la fórmula de $\zeta\left(\frac{1}{2} + i\,t\right)$, se observa que para la determinación de los ceros de la función zeta situados en la recta $\mathcal{R}(s) = 1/2$, tiene especial interés el estudio de $Z(t)$ que es una función real para valores reales de t. La aproximación finita de Z equivale a la del término integral de la fórmula, que se designa por R.

Con este objeto, Riemann introduce la técnica citada, y que posteriormente se denominó método del puerto, y obtiene la aproximación:

$$R \sim (-1)^{N-1} \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{4}} \frac{\cos 2\pi \left(p^2 - p - \frac{1}{16}\right)}{\cos 2\pi p},$$

donde p es la diferencia entre $(t/2\pi)^{1/2}$ y su parte entera.

Estas aproximaciones han sido la base de una técnica precisa para la determinación de los ceros de la función zeta situados en la recta de la hipótesis riemanniana.

Como ya se ha dicho, en el Centro de Investigaciones Matemáticas de Madison en Wisconsin, hay tres bobinas de cinta magnética que almacenan tres millones y medio de ternas de números estrechamente vinculados con los valores de Z y las aproximaciones de R. Salvo error, estas cintas prueban la existencia de tres millones y medio de ceros de la función zeta situados donde Riemann los vio: «es ist sehr wahrscheinlich, dass alle Wurzeln von $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = 0$ reell sind», según el texto de la célebre memoria.

El estilo directo de Riemann

Técnicas en el teorema del número primo

Hemos de dejar, de momento, el estudio de la famosa hipótesis y de las tentativas de Riemann, de las que dan fe sus escritos póstumos, para volver al problema del que se ocupa en su singular memoria.

El papel de la función zeta en la memoria de Riemann es instrumental, ya que el problema que se estudia es el de la frecuencia con que aparecen los números primos en la serie natural. Este carácter instrumental responde al sano principio de que el objetivo principal de la investigación es el descubrimiento científico, y es subsidiario el estudio del instrumento. Sin embargo, ocurre a veces con estos instrumentos, construidos con ideas como material básico, que sus características configuran de tal manera los descubrimientos científicos, que sólo son expresables por medio de ellos. (Recuérdese la introducción de los «números ideales» como instrumento de factorización, y el concepto de ideal como característico de una era en el Algebra). No fue éste el caso de la función zeta, cuando la introdujo Riemann, pues el problema de la distribución de los números primos es de los que H. Poincaré sitúa en primera división, «porque se proponen por sí mismos», y no como otros propuestos por los mismos que los resuelven y que sitúa en divisiones inferiores.

Riemann fue el primero en observar la conexión que existe entre la distribución de los ceros de la función zeta y la de los números primos, y lo más sorprendente son las técnicas que emplea para poner de manifiesto tal conexión, pues son las que después de medio siglo se justificarían como notables teorías.

Para establecer que la frecuencia con que aparecen los números primos en la sucesión natural es asintóticamente equivalente a $1/\log x$, para valores grandes de x, Riemann emplea los siguientes recursos:

a) *Teorema de J. Hadamard* [25] de representación de una función entera como producto infinito (1893).

b) Expresión del logaritmo de la función zeta por una *integral de tipo Stieltjes* [26] (1894), en la que la función de distribución es monótona y escalonada.

c) Inversión de la integral de Riemann-Stieltjes anterior, y que dada la forma que presenta suele denominarse *inversión de Mellin* [27] (1900).

Riemann emplea estas técnicas de forma rigurosa y sin indecisiones ni arbitrariedades, aunque alguna justificación sea insuficiente. Creo muy interesante seguir este desarrollo más de cerca.

Una vez introducida la función ζ, de la que se ha hecho mención anteriormente, y determinados sus ceros ρ, se tiene el *desarrollo de Hadamard* en producto infinito de la función ξ:

$$\xi(s) = \xi(0) \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right)$$

cuya convergencia resulta de un estudio sobre la densidad con que aparecen los ceros de la función zeta. De esta fórmula se hará uso posteriormente.

Para establecer la relación entre los ceros de la función zeta y la distribución de los números primos, vuelve Riemann a la expresión euleriana de la función ζ:

$$\zeta(s) = \prod_p \left(\frac{1}{1 - p^{-s}} \right) \quad \text{o} \quad \log \zeta(s) = \sum_p \sum_n \frac{1}{n} p^{-ns}$$

Para $\mathscr{R}(s) > 1$. Esta serie doble es la que se expresa en forma de *integral del tipo Stieltjes*, escribiendo:

$$\log \zeta(s) = \int_0^\infty x^{-s} \, d\, J(x), \qquad \text{para} \qquad \mathrm{R}(s) > 1,$$

donde la función J es creciente y escalonada [28], con saltos en los números primos o sus potencias exclusivamente, siendo el salto igual a $1/n$ para $x = p^n$; con más precisión,

$$J(x) = \frac{1}{2} \left[\sum_{p^n < x} \frac{1}{n} + \sum_{p^n \leq x} \frac{1}{n} \right].$$

El conocimiento de la función J proporciona una información valiosa que permite detectar la aparición de los números primos al recorrer la sucesión de los naturales, por lo que es natural tratar de invertir la integral, para *expresar J por medio de la famosa función ζ*.

Riemann era un maestro en el análisis de Fourier, y son de sobra conocidas sus contribuciones en este campo, por lo que no tuvo dificultad en realizar la *inversión*, hoy *llamada de Mellin*, obteniendo de forma rigurosa

$$\mathrm{J}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \log \zeta(s)\, x^s \frac{ds}{s}, \qquad (a > 1),$$

que es un resultado básico de su memoria.

Para el cálculo de la integral, establece previamente un desarrollo de $\log \zeta(s)$, obteniéndolo a partir de los resultados ya conseguidos referentes a las funciones ξ y ζ, y en particular de la expresión de esta última en producto infinito:

$$\log \zeta(s) = \log \xi(0) + \sum_{\rho} \log\left(1 - \frac{s}{\rho}\right) - \log \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) +$$
$$+ \frac{s}{2} \log \pi - \log(s-1).$$

La sustitución de $\log \zeta(s)$ en la fórmula integral, previa una integración por partes, expresa $J(x)$ como suma de cinco términos, siendo el principal:

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds}\left[\frac{\log(s-1)}{s}\right] x^s \, ds, \qquad (a > 1);$$

que Riemann, con su especial habilidad en el cálculo de integrales definidas, prueba que es igual a la función logaritmo integral:

$$\mathrm{Li}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\log t} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{dt}{\log t}\right].$$

El cálculo del término que contiene las raíces ρ de la función ζ, es seguramente el más comprometido, pues requiere información sobre la situación de estas raíces. Admitiendo la posibilidad de integración término a término de la serie, previo el apareamiento usual de las raíces ρ y $1 - \rho$, supuestas ordenadas según módulos crecientes, con $\mathcal{R}(\rho) > 0$ para toda raíz, se obtiene:

$$-\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds}\left[\frac{\Sigma \log\left(1 - \frac{s}{\rho}\right)}{s}\right] x^s \, ds =$$
$$- \sum_{\mathcal{Y}(\rho) > 0} [\mathrm{Li}(x^{\rho}) + \mathrm{Li}(x^{1-\rho})].$$

Es inmediato comprobar que, en el cálculo de la integral de la función $J(x)$, el término que proviene de $s/2 \log \pi$ se anula; y el que proviene de $\xi(0)$ es:

$$-\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds}\left(\frac{\log \xi(0)}{s}\right) x^s \, ds = \log \xi(0) = -\log 2.$$

Finalmente, calcula Riemann el término restante por integración término a término de $\log \Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)$, expresado como serie, llegando a

$$\frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{\log x}\int_{a i-\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{d s}\left[\frac{\log \Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}{s}\right] x^{s}\, d s=\int_{x}^{\infty}\frac{d t}{t\left(t^{2}-1\right)\log t}\,.$$

Reuniendo estos resultados parciales se obtiene:

$$J(x) = \operatorname{Li}(x) - \sum_{\nu(\rho)>0}\left[\operatorname{Li}(x^{\rho})+\operatorname{Li}(x^{1-\rho})\right]+\int_{x}^{\infty}\frac{d t}{t\left(t^{2}-1\right)\log t}+\log \xi(0),$$

que sin duda es el *resultado fundamental de la memoria de Riemann*.

Una fórmula para π (x)

El objetivo de la investigación de Riemann, evidentemente no era la función $J(x)$, sino la $\pi(x)$ que para cada x da el número de los primos menores o iguales que x. Sin embargo la relación entre estas dos funciones es fácil de obtener a partir de sus definiciones:

$$J(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{1/2}) + \frac{1}{3}\pi(x^{1/3}) + \ldots + \frac{1}{n}\pi(x^{1/n}) + \ldots,$$

en donde para cada x la serie del segundo miembro es finita.

Como J es la función conocida, se deberá invertir esta fórmula para obtener π, para lo cual basta aplicar el método de Möbius, obteniéndose:

$$\pi(x) = J(x) - \frac{1}{2}J(x^{1/2}) - \frac{1}{3}J(x^{1/3}) - \frac{1}{5}J(x^{1/5}) + \frac{1}{6}J(x^{1/6}) + \\ + \ldots + \frac{\mu(n)}{n}J(x^{1/n}) + \ldots,$$

en donde $\mu(n)$ es la llamada función de Möbius, cuya complicada definición es la siguiente: $\mu(n) = 0$, si n es divisible por el cuadrado de un primo; $\mu(n) = 1$, si n es un producto de un número par de primos distintos; y $\mu(n) = -1$, si n es un producto de un número impar de primos distintos.

Definitivamente $\pi(x)$ se obtiene sustituyendo en la fórmula anterior la de Riemann para $J(x)$. La expresión de $\pi(x)$ que resulta está formada como suma de términos de tres tipos:

a) *Términos que no crecen con* x, que proceden de los dos últimos sumandos de $J(x)$.

b) *Términos que crecen con* x, *pero cuyos signos oscilan,* que proceden de los $\mathrm{Li}(x^\rho)$ en $J(x)$, y Riemann los denomina «periódicos».

c) *Términos que crecen constantemente cuando* x *crece,* que proceden de $\mathrm{Li}(x)$ en $J(x)$.

Escribiendo solamente los primeros términos del tipo c) se tiene:

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) - \frac{1}{2}\mathrm{Li}(x^{1/2}) - \frac{1}{3}\mathrm{Li}(x^{1/3}) - \frac{1}{5}\mathrm{Li}(x^{1/5}) + \frac{1}{6}\mathrm{Li}(x^{1/6}) - \ldots,$$

y cuando se consideran simplemente uno o varios de los primeros términos de este desarrollo se obtienen fórmulas empíricas que dan buenas aproximaciones de $\pi(x)$.

Si sólo se toma el primer término, se obtiene esencialmente la aproximación de Gauss:

$$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{dt}{\log t} = \mathrm{Li}(x) - \mathrm{L}i(2);$$

y si se toman dos términos

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x) - \frac{1}{2}\mathrm{Li}(x^{1/2}),$$

se obtienen aproximaciones que en muchos casos son mejores que las gaussianas.

Al considerar exclusivamente los términos del tipo c), es decir, prescindiendo de los decrecientes y de los enigmáticos términos «periódicos», conforme a la sugerencia de Riemann, se obtiene la fórmula aproximada

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n}\mathrm{Li}(x^{1/n}).$$

Analizada por Lehmer con auxilio de sus famosas tablas [29], que alcanzan hasta los diez millones, reconoce que las aproximaciones obtenidas para $\pi(x)$ son las mejores conocidas.

Reconoce el mismo Riemann el carácter indicativo de estos resultados y propone el estudio de los términos «periódicos» despreciados, para alcanzar un conocimiento más ajustado de la distribución de los números primos.

Nadie hasta el momento ha realizado este estudio, y no se tiene información alguna sobre las perturbaciones causadas por los términos «periódicos» en las estimaciones de $\pi(x)$ calculadas a partir de las aproximaciones crecientes.

La demostración del teorema del número primo

La función ψ de Chebyshev

La información contenida en la memoria de Riemann sobre la distribución de los números primos es de una riqueza extraordinaria, pues en ella aparece una fórmula para el cálculo de $\pi(x)$. Para un físico esta fórmula supondría la más perfecta descripción matemática de una realidad; no así para un matemático, pues en su deducción se han deslizado algunas, que se podrían llamar, hipótesis de trabajo referentes a la situación de los ceros de la función ζ, y en la Matemática no se admiten tal tipo de hipótesis.

Además, la fórmula encontrada es una serie que contiene infinitos términos, y no se sabe cuál es de orden superior a la suma de los restantes, con objeto de obtener una aproximación asintótica de $\pi(x)$, que es el objetivo del teorema del número primo.

De hecho, admitiendo la hipótesis de Riemann puede darse una demostración muy sencilla de este teorema; sin embargo, hubo que esperar hasta 1896 para obtener una demostración independiente de tal hipótesis.

A veces, en la historia del descubrimiento científico, una larga espera queda gratificada por un resultado al que se llega simultáneamente por distintos caminos. Así ocurrió cuando el matemático francés J. Hadamard, y el belga C. J. de la Vallée Poussin prueban independientemente el célebre teorema del número primo sin hacer uso de la hipótesis riemanniana.

Naturalmente que los dos desarrollan ideas contenidas en la célebre memoria, pero no pretenden llenar sus posibles lagunas ni menos analizar la fórmula hallada para $\pi(x)$. Su programa es más reducido, y sus técnicas tienen la habilidad de orillar algunas dificultades considerables, apartándose lo indispensable del núcleo del problema. Así a Hadamard le basta con probar *que no existe ningún cero de la función situado en el borde de la banda crítica*, y de la Vallée Poussin encuentra *una región suficientemente amplia en dicha banda que está libre de ceros de* ζ.

Aun en forma esquemática conviene conocer la línea de razonamiento de estos dos notables matemáticos. La función J de la fórmula fundamental de Riemann tiene el inconveniente de que su relación con la ζ es a través de una fórmula integral que proporciona el logaritmo de ζ, con las dificultades inherentes a la multivalencia de esta función. Más cómodo es el uso de la función ψ, ya considerada por Chebyshev [10] también escalonada y monótona creciente, que en cada potencia p^n de un número primo tiene un salto igual a $\log p$; es decir,

$$\psi(x) = \sum_{p^n < x} \log p$$

para todo $x > 0$ que no coincida con la potencia de un número primo, tomando en estos puntos el valor promedio de la forma acostumbrada.

La relación entre la función ζ y la nueva ψ, viene dada por la fórmula integral

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \int_0^\infty x^{-s}\, d\,\psi(x)$$

en la que el primer miembro es una función con polos en las raíces ρ de ζ y en los ceros $-2n$, y analítica en el resto del plano.

Siguiendo razonamientos de inversión análogos a los usados para determinar la función J, obtuvo H. von Mangold la siguiente fórmula:

$$\psi(n) = x - \sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho} + \sum_n \frac{x^{-2n}}{2n} + \log 2\pi, \quad \text{para} \quad x > 1,$$

Por otra parte, ya en 1850 Chebyshev probó que el teorema del número primo equivale a la proposición:

$$\psi(x) \sim x, \quad \text{para} \quad x \to \infty,$$

es decir,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\psi(x) - x}{x} = 0;$$

luego en virtud de la fórmula de von Mangold, la demostración de dicho teorema equivale a probar que es

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \left[-\sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} + \sum_{n} \frac{x^{2n}}{2n} - \log 2\pi \right] = 0,$$

o bien

$$\lim_{x \to \infty} \sum_{\rho} \frac{x^{\rho - 1}}{\rho} = 0$$

Si el límite de esta serie se pudiera calcular término a término, para que fuera nulo, bastaría que se tuviera $\mathcal{R}(\rho - 1) < 0$ para todos los ceros de la función ζ, es decir, que todos fueran interiores en la banda crítica.

Demostraciones de Hadamard y de la Vallée Poussin

Hadamard [30] y de la Vallée Poussin [31] consiguieron la demostración a partir de la función ψ, pero evitando el paso resbaladizo de tomar límite término a término, y el empleo de la fórmula de von Mangold, de la que tal vez desconfiaban. Efectivamente evitan esta fórmula y directamente obtienen sendos desarrollos, de funciones relacionadas con la ψ, a través de integraciones. Las fórmulas obtenidas son estructuralmente análogas a la de von Mangold, pero se han conseguido bordear las dificultades que ésta presentaba.
La fórmula de la Vallée Poussin es:

$$\int_0^x t^{-2} \psi(t)\, dt = \log x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho - 1}}{\rho(\rho - 1)} - \sum_{n} \frac{x^{-2n-1}}{2n(2n+1)} + \frac{1}{x} \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} + \text{const.}, \quad (x > 1);$$

y *la de Hadamard*:

$$\int_0^x t^{-1}\psi(t)\,dt = x - \sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho^2} - \sum_n \frac{x^{-2n}}{(2n)^2} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}\log x + \text{const.}, \qquad (x > 1).$$

Incluso se puede desarrollar una demostración análoga a la de estos autores [32] basada simplemente en la integración de ψ, que da lugar a la fórmula:

$$\int_0^x \psi(t)\,dt = \frac{x^2}{2} - \sum_\rho \frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} - \sum_n \frac{x^{-2n+1}}{2n(2n-1)} - x\,\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} + \\ + \text{const.}, \qquad (x > 1).$$

En cierta medida, es accesorio partir de una u otra fórmula, lo decisivo, que es el progreso real después de la fórmula de von Mangold, es la demostración de que no existen raíces ρ de la función ψ en la recta $\mathcal{R}(s) = 1$.

Probado el teorema del número primo, es decir, la equivalencia asintótica

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x), \quad \text{para} \quad x \to \infty,$$

dio comienzo a una serie de trabajos, que se ocupaban de precisar el orden de la diferencia $\pi(x) - \mathrm{Li}(x)$. Para finalizar esta información recordaremos que uno de los primeros resultados fue debido a de la Vallée Poussin, que en 1899 probó la existencia de un $c > 0$ tal que es:

$$|\pi(x) - \mathrm{Li}(x)| < \mathrm{Li}(x)\, e^{-\sqrt{c\log x}}$$

para valores suficientemente grandes de x [33].

Es justo hacer una pausa en este recorrido, en homenaje a estos dos notables matemáticos J. Hadamard (1865-1962) y Ch. de la Vallée Poussin (1866-1962), de cuyas lecciones en nuestra Universidad son testimonio sendas publicaciones muy leídas y apreciadas.

He de reconocer que me perturban algunas coincidencias en la vida de estos dos analistas: Nacen con un año de diferencia, mueren en el mismo año, casi centenarios, y prueban independientemente el teorema del número primo en el mismo año. Tal vez esto confirme la creencia extendida entre los matemáticos dedicados a la

Teoría de números, de que todo aquel que logra dar una demostración del teorema del número primo, alcanza la longevidad.

Unas palabras finales sobre este famoso teorema, que es un resultado típico de la Teoría analítica de números. Tan enrevesada es su demostración, que aun siguiéndola paso a paso hasta alcanzar un término feliz, queda siempre oscura la relación entre la presencia de los números primos y el complicado instrumento demostrativo.

Durante años se buscó una *demostración elemental,* es decir, en la que sólo se usaran propiedades básicas de los números primos. Al fin en 1948, A. Selberg y P. Erdös dieron una demostración de este tipo [34], pero resultó tan difícil de entender como la antigua. Cada paso del razonamiento se puede considerar como elemental, pero el número de pasos es tan grande y la manera de estar relacionados tan complicada, que no se consiguió la transparencia buscada. Seguramente es inevitable, y responde al «principio de conservación de las dificultades»: Un teorema duro, lo es, con independencia de como se llegue a él.

EL NÚMERO DE CLASES EN EL TEOREMA DE FERMAT

El llamado «último teorema de Fermat»

Existen mitos en el mundo de la Cultura, cuyos orígenes se descubren en problemas y teorías, afincados en una determinada ciencia, que durante períodos largos de tiempo han sido objeto de discusión. Es frecuente que la controversia haya estado acompañada por dificultades semánticas y valoraciones diferentes por estudiosos de distintas procedencias.

Precisamente este «valor añadido» a una problemática puramente científica, es inevitable en la aparición del mito, que se incorpora al quehacer cultural a través de un nombre que sugiere la presencia de algo inaccesible y a la vez deseado. Ejemplos de estas denominaciones son el «perpetuum mobile», la «cuadratura del círculo» entre otros. La existencia de estos mitos es una interesante realidad y nunca un fenómeno de regresión científica.

En el campo específico de una ciencia, en nuestro caso la Matemática, también se presentan situaciones semejantes, pero sólo accesibles a los especialistas, en los que a través del tiempo se va definiendo el carácter mítico de algunas proposiciones. Ordinariamente, se trata de conjeturas, cuya verdad está confirmada en numerosos casos particulares, pero sin demostración general, después de muchos años de tentativas. En la clasificación, ya mencionada, que hacía Poincaré de los problemas, entre los que se proponen por sí mismos, tal vez fuera oportuno desglosar los que son mitos, testigos vivos de la historia de la Matemática.

En esta disertación ya hemos tratado de la «hipótesis de Riemann», pero anterior a esta proposición es la llamada «último teorema de Fermat» cuyo simple enunciado es el siguiente:

«*No existen ternas de números enteros* x, y, z, *no nulos que verifiquen la ecuación:*

$$x^n + y^n = z^n$$

donde n $\geqslant$ 3 *es un número entero positivo.*»

La anécdota de su formulación [35] por P. S. Fermat (1601-1665), a mediados del siglo XVII; las demostraciones parciales de los grandes matemáticos Euler y Gauss ($n = 3$), Legendre y Dirichlet ($n = 5$) y Lamé y V. R. Lebesque ($n = 7$); los fracasos de otros grandes como Kummer, el mismo Lamé y Cauchy entre otros, para dar una demostración general; los premios millonarios ofrecidos a quien consiguiera el éxito; y otras muchas circunstancias como la comprobación de la certeza de la proposición para miles de valores del exponente n, conseguida en los últimos tiempos, justifican el calificativo de mítico al último teorema de Fermat.

Estos son los hechos, pero la curiosidad científica no se satisface con la simple noticia, sino que inquiere sobre los motivos de la dificultad, casi insuperable, de una demostración general.

En 1843 E. Kummer entregó un manuscrito a Dirichlet, el predecesor de Riemann en la cátedra de Göttinga, con una que creía demostración del teorema de Fermat en el caso general. Dirichlet le hizo notar que, para que la demostración fuera correcta, era necesario que en el anillo Z $[\varepsilon_p]$ de las raíces p-ésimas de la unidad, no sólo todo elemento se expresará como producto de factores irreducibles, sino que además esta descomposición tenía que ser única; hecho improbable, sobre el que tenía serias dudas.

El diagnóstico de Dirichlet es de una precisión extraordinaria. Kummer amplía el anillo Z de los números enteros al Z $[\varepsilon_p]$ adjuntando al Z una raíz primitiva p-ésima de la unidad ε_p, y para los nuevos enteros de este anillo considera una teoría de divisibilidad, análoga a la euclídea. Precisamente en esta presunta analogía está el error del manuscrito de Kummer, pues falla el teorema fundamental de la divisibilidad. La propiedad de que todo elemento entero se puede descomponer como producto de factores irreductibles, de manera única, no ocurre siempre en los anillos Z $[\varepsilon_p]$ especialmente en lo que se refiere a la unicidad. *Cuando la «factorización es única» la demostración de Kummer es correcta.*

Antes de analizar los casos de no unicidad, conviene seguir más de cerca el razonamiento de Kummer.

Es obvio que basta considerar los casos en que $n = 4$, o bien $n = p$, siendo p un entero primo impar. La demostración en el caso $n = 4$ es elemental, por el método llamado de «descenso al infinito».

Cuando p es entero primo mayor que 2, la no existencia de soluciones enteras de la ecuación

$$x^p + y^p = z^p,$$

en las que p no divide a $x\,y\,z$, se suele denominar *primer caso* del teorema de Fermat. El *segundo caso* se presenta al considerar las posibles soluciones en las que p divide a z.

El objeto de ampliar el anillo de los enteros al Z $[\varepsilon_p]$ es el de descomponer el primer miembro de la ecuación de Fermat en factores lineales, ya que puede escribirse en la forma:

$$\prod_{i=1}^{p-1} (x - \varepsilon^i_p\, y) = z^p$$

En el primer caso del teorema de Fermat se demuestra que si $i \neq j$ (mód. p), los elementos $x + \varepsilon^i_p\, y$ y $x + \varepsilon^j_p\, y$ carecen de factores comunes no triviales. Entonces, si Z $[\varepsilon_p]$ es de factorización única, deben existir elementos

$$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in Z[\varepsilon_p], \quad \beta_1 \text{ y } \beta_2 \text{ unitarios}$$

de forma que:

$$x + \varepsilon_p\, y = \beta_1\, \alpha_1^p \quad \text{y} \quad x \quad \varepsilon_p\, y = \beta_2\, \alpha_2^p;$$

y se prueba que la simultaneidad de estas dos igualdades es contradictoria.

También resulta que el elemento $1 - \varepsilon_p$, es siempre irreducible en $Z[\varepsilon_p]$, y que p admite la descomposición $p = (1 - \varepsilon_p)^{p-1}\beta$, siendo β un elemento unitario de $Z[\varepsilon_p]$.

En el segundo caso del teorema de Fermat, si $z = p^k z_0$ con $k \geqslant 1$ y z_0 no divisible por p, la ecuación puede escribirse en la forma:

$$x^p + y^p = (1 - \varepsilon_p)^{k(p-1)}\beta^p z_0^p.$$

Entonces, si $Z[\varepsilon_p]$ es de factorización única se prueba que esta igualdad es asimismo contradictoria [36].

El programa de Kummer

En esta exposición esquemática, ya se observa que la propiedad de «*factorización única*» es decisiva en las demostraciones. Kummer ya se dio cuenta que para $p = 23$, en el anillo $Z[\varepsilon_{23}]$ no podía llevarse a cabo una teoría de divisibilidad análoga a la euclídea. Todos sus esfuerzos para superar tal dificultad quedan plasmados en una serie de artículos aparecidos entre 1845 y 1847, que son la base de la actual Teoría de ideales [37]. Feliz error el de Kummer en su fallida demostración general del último teorema de Fermat.

El programa que idea Kummer para superar las dificultades de la factorización no única, en esencia, es el siguiente:

Si en el anillo A de los enteros de un cierto cuerpo de números algebraicos, la descomposición en factores primos no está definida de manera única, entonces se trata de hallar un conjunto Δ, en el que esté definida una multiplicación asociativa y conmutativa (monoide conmutativo) con factorización única, y una aplicación de A en Δ, en la que a cada $\alpha \in A$ le corresponde un elemento de Δ, que se designa por (α), de manera que se conserve la multiplicación (homomorfismo).

Para todo número $\alpha \neq 0$ de A, su imagen (α) se podrá descomponer de manera única en producto de factores primos, pero estos factores no pertenecerán al anillo dado A, sino al nuevo monoide Δ. En la unicidad de la descomposición «*al modo de Kummer*» se deberá tener presente, que algunos números primos de A, pueden tener por imágenes en Δ elementos no primos.

En los artículos citados, Kummer desarrolló su programa con éxito. Incluso, exigiendo al monoide Δ la condición de mínimo en el sentido de la inclusión, queda determinado salvo isomorfismos.

En 1927, E. Nöther daba una caracterización axiomática de los anillos en los que es válida una descomposición al modo de Kummer. Estos eran los anillos nötherianos, enteramente cerrados y tales que todo ideal primo no nulo sea maximal; es decir, los que hoy llamamos anillos de Dedekind, entre los que se encuentran los anillos de enteros de los cuerpos algébricos, y en particular los $Z[\epsilon_p]$ para cada p.

La construcción del monoide Δ se consigue por diversos métodos. Kummer propone como elementos de Δ unos «números ideales», cuya definición precisa da lugar al concepto de ideal, básico en Algebra moderna. Una realización de Δ, es el conjunto de los ideales no nulos definidos en el anillo A, en el que se considera la multiplicación de ideales de la forma acostumbrada [38].

El número de clases

La medida en que un anillo A de Dedekind es no factorial, se pone de manifiesto en la complejidad del monoide asociado que restaura la factorialidad, al modo de Kummer. Para conseguir información precisa sobre Δ, se distribuyen los elementos de Δ en clases, previa una adecuación de Δ a la técnica algebraica.

Para simplificar llamaremos divisores a los elementos de Δ, que será el monoide de los divisores de A. Por otra parte la estructura algébrica de Δ es demasiado simple, y para poder razonar con comodidad sería deseable que Δ fuera un grupo respecto de la multiplicación. Esto se consigue introduciendo los divisores fraccionarios. Si K es el cuerpo de fracciones de A, un divisor fraccionario de K es un producto finito de divisores de Δ elevados a exponentes enteros (no necesariamente positivos). El conjunto $\hat{\Delta}$ de los divisores de K, enteros o fraccionarios, en el que se opera con la multiplicación, tiene estructura de grupo, y obviamente es $\Delta \subset \hat{\Delta}$.

A cada $\xi = \alpha\beta^{-1} \in K$ con $\alpha, \beta \in A$, se le hace corresponder el divisor $(\xi) = (\alpha)(\beta)^{-1} \in \hat{\Delta}$, que se denomina divisor principal correspondiente a ξ. La aplicación $\xi \longmapsto (\xi)$ del grupo multiplicativo K^* del cuerpo K, en el grupo de divisores $\hat{\Delta}$ es un homomorfismo, que extiende el homomorfismo $\alpha \longrightarrow (\alpha)$ del grupo multiplicativo A^* del anillo A, en el monoide de divisores Δ.

De estas definiciones y propiedades resulta que el conjunto $\hat{\Delta}_0$ de todos los divisores principales, es un subgrupo de $\hat{\Delta}$.

Establecida, en sus rasgos principales, esta infraestructura algebraica, estamos en condiciones de dar la definición fundamental:

El cociente $\hat{\Delta}/\hat{\Delta}_0$ es el *grupo de las clases de divisores* de A. Su cardinal, representado por h (A) o simplemente por h, es el llamado *número de clases del anillo A*. La condición $h = 1$, cuando existe una sola clase, se presenta si, y solamente si, todos los divisores de A son principales, y es equivalente, por ser A un anillo de Dedekind, a la factorialidad de A.

En la realización de Δ, en la que sus elementos son los ideales no nulos de anillo A, los ideales fraccionarios son los A-submódulos de K finitamente generados, y los ideales principales son los de la forma ξ A, para cada $\xi \in K^*$.

El cuerpo de fracciones del anillo Z $[\varepsilon_p]$, llamado *cuerpo ciclotómico*, es el Q $[\varepsilon_p]$. En 1847, Kummer probó la finitud de h para estos cuerpos y posteriormente Dirichlet para cuerpos de números arbitrarios.

Un progreso notable en el estudio del teorema de Fermat se consiguió considerando para cada primo p el número de clases h del cuerpo Q $[\varepsilon_p]$. Kummer *demostró el teorema, para cada exponente primo* p *de la ecuación de Fermat, que no divide al correspondiente* h. [39]. A raíz de este resultado, clasificó a los números primos en regulares e irregulares: un primo $p \geqslant 3$ es *regular* si no divide a h, e *irregular* en caso contrario. Es interesante observar que los únicos irregulares menores que 100 son los primos 37, 59 y 67, para los que entonces quedó sin demostrar el teorema de Fermat.

Dos preguntas fundamentales quedaban formuladas tras estos resultados:

¿Cómo se reconoce si un número primo es regular, o no lo es? ¿Cómo se trata el caso irregular?

La contestación a la primera pregunta equivale a la determinación del número de clases de un cuerpo ciclotómico. Es sorprendente e inesperado que en la resolución de este problema, el instrumento adecuado sea la función zeta, cuya utilidad se pone de manifiesto en los momentos críticos de los grandes problemas de la Teoría de números.

Segunda generación de la función zeta

Es Dedekind el que generaliza de manera natural la función zeta de Riemann, adaptándola a los problemas de divisibilidad en los cuerpos ciclotómicos, y en general en los cuerpos K de números algébricos [40]. Si con la gótica $\mathfrak{n}$, designamos un divisor cualquiera del cuerpo K, y con N ($\mathfrak{n}$) su norma, la *función zeta de Dedekind* es:

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{n}} \frac{1}{N(\mathfrak{n})^s}, \quad (s > 1)$$

en donde $\mathfrak{n}$ recorre todos los *divisores* enteros del cuerpo K. En la realización de los divisores como ideales no nulos, los elementos $\mathfrak{n}$ son los ideales del anillo de enteros K.

Para la función ζ_K es también válida la descomposición euleriana en producto infinito:

$$\zeta_K(s) = \prod_{\mathfrak{g}} \frac{1}{1 - N(\mathfrak{g})^{-s}}, \quad (s > 1)$$

donde el produto se extiende ahora a todos los *divisores primos* de K.

Por prolongación analítica se obtiene una función meromorfa en el plano complejo, con un único polo en $s = 1$, y cuyo residuo está dado por

$$\lim_{s \to 1} (s - 1)\, \zeta_K(s) = \varkappa h.$$

donde $\varkappa$ es una constante no nula específica de K y h el número de clases del cuerpo.

Si $n = r + 2t$ es el grado del cuerpo K (r y $2t$ números de isomorfismos reales y complejos de K en C), si D y R son el discriminante y regulador de K, y si w es el número de raíces de la unidad contenidas en K, la expresión de $\varkappa$ es

$$\varkappa = \frac{2^{r+t} \pi^t R}{w \sqrt{|D|}}.$$

Partiendo de esta situación, una forma de obtener h explícitamente en el caso de los cuerpos ciclotómicos es calcular, por otra vía, el residuo de la función ζ_K en el punto $s = 1$.

Se supondrá que K es el cuerpo ciclotómico m-ésimo $Q(\varepsilon)$, siendo pues, ε una raíz primitiva m-ésima de la unidad: $\varepsilon^m = 1$.

Si en la fórmula euleriana del producto, para cada número primo p se agrupan los términos que se refieren a los divisores $\mathfrak{g}$ de p, se tiene

$$\zeta_K(s) = \prod_{p} \prod_{\mathfrak{g} | p} \frac{1}{1 - N(\mathfrak{g})^{-s}}, \quad (s > 1),$$

donde el producto exterior se refiere a todos los números primos, y los productos interiores son finitos. Considerando los caracteres modulares χ, módulo m, la fórmula anterior se transforma en:

$$\zeta_K(s) = G(s) \prod_{p} \prod_{\chi} \frac{1}{1 - \chi(p) p^{-s}}, \quad (s > 1),$$

en donde $G(s)$ es el producto finito

$$G(s) = \prod_{\mathfrak{g}, p} \frac{1}{1 - N(\mathfrak{g})^{-s}}.$$

Invirtiendo el orden de los productos en la última expresión de $\zeta_K(s)$, se presenta en la nueva forma:

$$\zeta_K(s) = G(s) \prod_{\chi} L(s, \chi),$$

en la que para *cada carácter* χ, módulo m, L es la función de la variable compleja s definida por el producto infinito

$$L(s, \chi) = \prod_{p} \frac{1}{1 - \chi(p) p^{-s}}.$$

En particular, cuando se trata del carácter unidad χ_0, módulo m,

($\chi_0(p) = 1$, si m. c. d. $(p, m) = 1$; $\chi_0(p) = 0$, si m. c. d. $(p, m) > 1$), se tiene:

$$L(s\,\chi_0) = \zeta(s) \prod_{p \mid m} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

donde el segundo factor es evidentemente un producto finito.

Desglosando de la fórmula de ζ_K el factor que corresponde al carácter unidad, se tiene finalmente:

$$\zeta_K(s) = F(s)\,\zeta(s) \prod_{\chi \neq \chi_0} L(s, \chi), \qquad (s > 1),$$

donde se ha designado por $F(s)$ el producto finito

$$F(s) = \prod_{\mathfrak{g} \mid m} \frac{1}{1 - N(\mathfrak{g})^{-s}} \prod_{p \mid m} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

Las transformaciones del producto euleriano que define ζ_K han sido ocasión para la introducción de las funciones L, cuyo parentesco con la función zeta de Riemann es evidente. En particular esta relación se manifiesta en la analogía de sus propiedades.

A partir de la propiedad multiplicativa de los caracteres, preceediendo como en el caso de la función zeta, se tiene:

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \qquad (s > 1),$$

que es la *serie de Dirichlet de carácter* χ, módulo m.

Las funciones L, en principio sólo definidas en el semiplano $\mathcal{R}(s) > 1$, son prolongables analíticamente, por medio de fórmulas integrales al estilo de la de Riemann para la función zeta, y resulta que $L(s, \chi_0)$ es una función meromorfa con un único polo simple en $s = 1$, y las $L(s, \chi)$, para $\chi \neq \chi_0$, son funciones enteras [41].

A partir de la nueva expresión de ζ_K, y conocidas las propiedades de las funciones L, se obtiene como residuo de ζ_K en $s = 1$.

$$\lim_{s \to 1} (s - 1)\,\zeta_K(s) = F(1) \prod_{\chi \neq \chi_0} L(1, \chi);$$

y en consecuencia el *valor del número de clases* h *del cuerpo ciclotómico* m-*ésimo es:*

$$h = \frac{w \sqrt{|D|}}{2^{r+t} \pi^t R} F(1) \prod_{\chi \neq \chi_0} L(1, \chi).$$

Criterio de regularidad de Kummer

En el contexto del teorema de Fermat, tienen interés los valores de h, para los cuerpos ciclotómicos m-ésimos, en los que m es un número primo impar, que se designará por $p = 2q + 1$.

La determinación de los distintos valores que aparecen en la fórmula de h, relativos al cuerpo Q (ε_p), da para el número de clases:

$$h = \frac{p^{p/2}}{2^{q-1} \pi^q R} \prod_{\chi \neq \chi_0} L(1, \chi),$$

donde R es el regulador del cuerpo K. La expresión en forma finita de las series L (1, X), para los distintos caracteres $\chi \neq \chi_0$, módulo p, da la expresión definitiva de h como producto de dos números enteros

$$h = h_1 \cdot h_2;$$

en la que h_1 es el número de clases del subcuerpo real Q $(\varepsilon_p + \varepsilon_p^{-1})$, formado con todos los números reales del cuerpo Q (ε_p), y h_2 está dado por:

$$h_2 = \frac{1}{(2p)^{q-1}} \mid F(\theta) F(\theta^2) \ldots F(\theta^{p-2}) \mid .$$

donde θ es una raíz primitiva de grado $p - 1$ de la unidad.

En 1850, Kummer demostró que si $p \geqslant 3$ es un entero primo que no divide a h_2, tampoco divide a h_1, y que p divide a h_2 si, y solamente si, divide a alguno de los numeradores de los números de Bernoulli B_{2k} para $1 < 2 \leqslant p - 3$. Escribiendo $B_{2k} = P_{2k}/Q_{2k}$ en forma irreducible, se obtiene el siguiente criterio de regularidad:

Un entero primo p $\geqslant 3$ *es regular si, y solamente si, no divide a ninguno de los numeradores* $P_2, P_4, \ldots, P_{p-3}$.

El caso irregular

En 1954, Carlitz dio una demostración sencilla, basada en un teorema de von Staudt-Clausen, de la existencia de infinitos primos irregulares [42], por lo que la demostración del teorema de Fermat, quedaba abierta para infinidad de exponentes primos.

Kummer creyó haber encontrado una demostración del teorema de Fermat en los casos de los tres primeros primos irregulares 37, 59 y 67, pero en 1920 Vandiver advirtió que existían incorrecciones en la presunta demostración [43]. Sin embargo pudo corregirse y ello condujo a la publicación en 1954, por el mismo Vandiver junto con D. H. Lehmer y E. Lehmer de un criterio, o *condición suficiente para el caso irregular* [44].

Si p es un primo irregular que divide a un P_{2k}, con $2k \leqslant p - 3$, entonces se dice que el par $(p, 2k)$ es irregular.

Sea p un primo irregular, y se supone que $P = rp + 1$ es un primo que satisface $P \leqslant p^2 - p$. Sea t un entero tal que $t^r \not\equiv 1$ (mód. P). Para cada par irregular $(p, 2k)$, se forma el producto

$$N_{2k} = t^{-rd/2} \prod_{b=1}^{q} (t^{rb} - 1)^{b^{p-1-2k}},$$

en el que es

$$q = \frac{p-1}{2} \quad \text{y} \quad d = \sum_{n=1}^{q} n^{p-2k}.$$

Si para todos los pares irregulares se verifica $N^r_{2k} \not\equiv 1$ (mód. P), entonces el teorema de Fermat es válido para el exponente p.

El criterio ha sido aplicado por Johnson, para todos los primos irregulares menores que 125.000, con resultado positivo [45].

La función zeta en Geometría Algebraica

Tercera generación de la función zeta

El interés por el estudio de la Geometría algebraica sobre «cuerpos no clásicos» creció a la par que el de la teoría de congruencias superiores. Artin observaba en su tesis en 1924 [46], que las ecuaciones de congruencia en el sentido de Dedekind, podían interpretarse como ecuaciones algebraicas sobre un cuerpo finito K_q con $q = p^d$.

Ya Poincaré, en la conferencia que pronunciara en el Congreso Internacional de Matemáticas en 1908, decía que los métodos de las curvas algebraicas podían ser aplicadas al estudio de las congruencias de dos variables.

En la tesis citada, Artin estudiaba las extensiones cuadráticas del cuerpo de las funciones racionales $K_q(T)$ de una variable sobre un cuerpo finito K_q, y tomando como base los trabajos de Dedekind sobre los cuerpos de números, desarrolló una teoría adecuada de ideales, introduciendo el concepto de *función zeta, análogo al de Riemann-Dedekind*, cuya importancia en el desarrollo de la moderna Geometría algebraica ha sido decisiva.

Posteriormente F. K. Schmidt [47] observó que era posible generalizar los teoremas de Artin a cualquier extensión algebraica K de $K_q(T)$, y vio que los problemas adquirían una formulación mucho más natural si se reemplazaba la noción de ideal por la de divisor y se consideraban los resultados desde un punto de vista geométrico. F. K. Schmidt interpreta el cuerpo K como el de las funciones racionales de una curva algebraica lisa X definida sobre K_q, que supone inmersa en un espacio proyectivo $P_N(\Omega)$, siendo Ω un «dominio universal» de característica p.

Para cada entero $n \geqslant 1$, el número de puntos de X cuyas coordenadas pertenecen a la única extensión K_{q^n} de K_q, de grado n, son el número finito N_n. La función ζ de X se define por la fórmula:

$$\zeta(X \mid K_q, t) = \prod_{\mathfrak{g}} \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{g})^s}\right)^{-1} = \prod_{\mathfrak{g}} (1 - t^{\deg.\,\mathfrak{g}})^{-1} = \exp\left(\sum_{n \geq 1} \frac{N_n}{n} t^n\right),$$

donde es $t = q^{-s}$, y contiene toda la información diofántica que sobre X se puede desear.

El estudio de F. K. Schmidt de la función zeta, para curvas definidas para cuerpos finitos, inaugura el estudio de la Geometría algebraica de características p. Así F. K. Schmidt demuestra el teorema de Riemann-Roch para esta característica y prueba la *racionalidad de la función zeta*, como consecuencia del mismo.

Concretamente es

$$\zeta(X \mid K_q, s) = \frac{P(q^{-s})}{(1 - q^{-s})(1 - q^{1-s})} = \frac{P(t)}{(1 - t)(1 - q\,t)},$$

en donde

$$P(t) = \prod_{i=1}^{2g} (1 - \alpha_i t)$$

es un polinomio de grado $2g$, g = género de X, con coeficientes de Z, y cuyas raíces se permutan por $\alpha \longrightarrow q\alpha^{-1}$.

Otra vez la «hipótesis de Riemann»

Primeramente formulada por Artin en su tesis, para la nueva función zeta, conserva su enunciado original aun cuando la naturaleza analítica de la función sea completamente distinta afirmando que los ceros de la función se encuentran en la recta $\mathcal{R}(s) = 1/2$, lo que equivale a:

$$|\alpha_i| = \sqrt{q}$$

Tomando logaritmos de los dos miembros de la igualdad

$$\exp.\left(\sum_{n \geq 1} \frac{N_n}{n} t^n\right) = \prod_{i=1}^{2g} (1 - \alpha_i t)/(1 - t)(1 - qt)$$

se obtiene

$$N_n = 1 + q^n - \sum_{i=1}^{2g} \alpha_i^n,$$

que puede entenderse como la ley de distribución de los elementos primos en términos de los ceros de la función zeta.

Hasse observó que la hipótesis de Riemann es equivalente a la acotación:

$$|N_n - 1 - q^n| \leq 2g\, q^{n/2}$$

y la demostró en 1933 para todas las curvas de género uno [48]. En algunos casos particulares la había comprobado Artin anteriormente.

Al pretender extender estos resultados a curvas de género mayor que uno, Deuring [49] y Hasse [50] observaron que previamente era necesario desarrollar una teoría de correspondencias en característica p, conocida entonces para curvas definidas sobre el cuerpo de los números complejos según los métodos de la escuela italiana.

En una memoria aparecida en 1940, A. Weil [51] esbozó una demostración de la «*hipótesis de Riemann*» para una *curva cualquiera*. Las circunstancias difíciles del momento le movieron a apresurar su publicación.

Una demostración definitiva sólo llegó después que Weil elaborara sus «Foundations of algebraic Geometrie» [52], en el período transcurrido entre 1942 y 1946, en donde aparece la noción clave de «*variedad abstracta*». La demostración se consigue mediante la versión en característica p del teorema de Castelnuovo y el estudio de las propiedades de la jacobiana de una curva, considerada como variedad abstracta sobre un cuerpo finito.

Después de probar la «hipótesis de Riemann» para curvas, A. Weil en su artículo fundamental [53] en 1949, introdujo una *función zeta para variedades de dimensión superior* formulando la correspondiente hipótesis acerca de la situación de sus ceros y polos. La función zeta introducida, tiene la misma interpretación diofántica que en el caso de las curvas: informa sobre el número de soluciones que poseen los sistemas de ecuaciones algebraicas en característica p.

La «hipótesis de Riemann» en dimensión arbitraria forma parte de las llamadas «*conjeturas de Weil*», que han sido el gran motor impulsor de la Geometría algebraica en los últimos cuarenta años.

La demostración de la «hipótesis de Riemann» para variedades

Las «Foundations of Algebraic Geometry» creados por A. Weil para la demostración de la «hipótesis de Riemann» para curvas, fueron insuficientes a la hora de demostrar sus conjeturas en dimensión arbitraria. El desarrollo de una Geometría algebraica abstracta, apta para la demostración de las conjeturas, fue el programa llevado a cabo por la escuela francesa bajo la dirección de A. Grothendieck.

Las conjeturas enunciadas por Weil en 1949, *fueron probadas todas por Grothendieck* [54] *salvo la segunda,* que precisamente es la que corresponde a la «hipótesis de Riemann». Este honor estaba reservado a P. Deligne [55], quien en 1974 *logró dar su demostración,* usando todo el aparato formal creado por Grothendieck.

El estudio de las variedades en característica p, y la consiguiente demostración de las conjeturas de Weil no deben considerarse como un hecho aislado, o como un resultado exclusivo de la Geometría algebraica, sino como una forma de estudio «local» de los difíciles problemas que la Teoría de números tiene planteados.

La información que proporcionan las conjeturas de Weil se usa hoy día, vía la teoría de Iwasawa y el estudio de formas modulares, para conseguir un conocimiento más profundo de las extensiones ciclotómicas de los cuerpos de números tan estrechamente ligadas al teorema de Fermat.

Transcribimos al respecto el siguiente comentario de A. Weil que, aunque lo formuló en 1947, sigue teniendo la más completa actualidad:

«*Después de que hubiera podido perderse la esperanza de demostrar la hipótesis de Riemann por los métodos de la Teoría de funciones, hoy nos aparece bajo un nuevo aspecto que la presenta inseparable de la conjetura de Artin sobre las funciones L, siendo ambos problemas dos aspectos de una misma cuestión aritmético-algebraica, en donde el estudio de todas las extensiones ciclotómicas de un cuerpo de números dado, jugará sin duda un papel decisivo.*»

Reflexiones en torno a la génesis y desarrollo de la función zeta

Una realidad científica

Con la última cita de A. Weil cierro esta historia viva de la función zeta de Riemann, que se anunció como uno de los procesos más fascinantes de la evolución del pensamiento científico. Desde sus raíces que se pierden en las fuentes del idealismo griego, su aparición en el Análisis en la fórmula multiplicativa de Euler, y su definición en la célebre memoria de Riemann en 1859, con presencia continuada desde esa fecha hasta los últimos resultados de la escuela francesa de Geometría algebraica, permiten presentar a esta función como ejemplo de la génesis y desarrollo de una idea matemática trascendente.

Además, las sucesivas etapas de la historia de la función zeta, se encuadran en circunstancias culturales que en algunos aspectos reflejan los métodos de investigación en los centros universitarios y la valoración social de los matemáticos.

En la época euleriana, los descubrimientos sobre la función zeta fueron propiedades notables pero no organizadas. Se trataba de los hallazgos de los cultivadores del nuevo Cálculo infinitesimal en un ambiente matemático optimista.

El período más brillante de la función zeta es la era de las universidades germanas, en las que la jerarquía de la cultura transcendía a los docentes. En sus seminarios se investigaba y se aprendía a investigar en un mundo de ideas, que al diferenciarlas y ordenarlas se convierten en realidad científica. Sea disculpado el matemático si intercala un elogio a estas universidades, en las que ha residido nuestra ciencia durante muchos años. A principios del siglo XIX los estudiantes de Matemáticas de todo el mundo, recibían el mismo consejo: «Haz tu maleta, y llévala tú mismo a Göttinga».

La ciencia francesa estuvo presente en la historia de la función zeta durante esta época con algunas individualidades geniales, que demostraron el «espíritu de fineza» que diría Pascal. En el declive de la universidad alemana a mediados de este siglo, aparece la creatividad francesa en toda su potencia, cuando consigue integrar en un equipo a brillantes individualidades. La influencia de este grupo reformador, investigador y creador, ha sido decisiva durante los años pasados, que corresponden en espíritu a la tercera generación de la función zeta.

Sin duda esta historia es la de un hecho cultural europeo de especial significado. Sorprende y admira que la investigación sobre una teoría matemática haya sido el vínculo invisible que ha reunido a numerosas mentes privilegiadas, a través de siglo y medio, para un trabajo en común. A través de generaciones se persigue un progreso continuado en el conocimiento. No se trata, pues, de un progreso evaluable por un aumento de comodidades, sino de un progreso efectivo del hombre, en su cualidad superior de ser inteligente.

Dice el gran especialista de Teoría de números, G. Hardy, que «el matemático es un constructor de configuraciones con ideas», lo que según el pensamiento platónico, sería el argumento decisivo para afirmar la realidad de estas configuraciones. Sin embargo, para asegurar esta realidad tal vez bastara observar que son causa de un progreso real del hombre en su trayectoria de superación continuada.

No creo que nadie dude de la identidad de la Matemática como ciencia, y seguramente una de las primeras en el mundo de la Cultura, la llamada «cultura invisible», y dejo pasar la posible sombra de escepticismo cuando se considera la crisis de sus fundamentos. Me detengo, pues, ante el matemático en su taller intelectual, es decir, cuando descubre o inventa un nuevo concepto, proposición o teoría, o simplemente frente a la realidad matemática.

Se discute si el quehacer del matemático es el *descubrimiento* o la *invención*, y la discusión se suele avivar al incluir un leve matiz, preguntando si las verdades matemáticas son descubiertas o inventadas. En efecto, la palabra «verdad» no admite compromiso, pero en Matemáticas, a través de lógicas más o menos formalizadas, las verdades suelen tener el sentido de proposiciones lógicamente consistentes con unos postulados de un sistema inicial. Sin embargo ningún matemático serio aceptaría como esencia de la Matemática una pura tantología.

La disputa entre descubrimiento y la invención, es la de dos concepciones filosóficas en contraste. Una, el idealismo platónico, según el cual la Matemática tiene cierta existencia objetiva, y el hombre descubre trozos de su realidad, no menos firme que la física. La otra concepción, de la que se encuentra noticia en Aristóteles, sitúa el origen de la Matemática en el poder organizador de la mente humana, y es en esencia kantiana.

Los argumentos en favor de una y otra tesis están respaldados por los más notables matemáticos y físicos. No puedo por menos de citar un comentario muy fino de Einstein, cuando fue interrogado: «Me di cuenta que había *inventado* el concepto de espacio-tiempo relativístico, después de haberlo hecho; pero cuando realizaba mi trabajo notaba que *descubría* un aspecto de la realidad».

La distinción entre descubrimiento e invención tiene un carácter muy subjetivo y hasta se podría decir que emocional. Por otra parte, hace ya tiempo que circula en los ambientes universitarios la frase «hacer Matemáticas», que aleja la controversia, porque ya decía Goethe: «Cuando no se sabe lo que es una cosa, se le da nombre y basta».

En el proceso de «hacer Matemáticas» se superponen las intuiciones a distintos niveles de abstracción, con la labor artesanal de precisar sus formulaciones, y la técnica de formalizarlas como eslabones de una cadena lógica. La lógica da solidez a la construcción matemática, pero es más una servidumbre que un estímulo creador. *La creación matemática no tiene su origen en la frialdad de un juego lógico, sino en intuiciones,* que no son regalo de una inactividad expectante, sino fruto de una reflexión comprometida, en un determinado contexto. Podríamos decir que se trata de una *intuición activa.* Ya decía Lebesque, que «la intuición es tanto más penetrante cuanto mayor sea el conocimiento de Matemáticas».

Las propiedades de la función zeta, las expone Riemann, en su célebre memoria, con la precisión de quien contempla una realidad, pero sus demostraciones tienen una sorprendente concisión, y a veces son simples esbozos. En efecto, tales propiedades son resultado de intuiciones activas que van descubriendo una realidad en el contexto de los descubrimientos de otros grandes matemáticos, y de las posibilidades de una teoría de variable compleja recién estrenada. Las adecuaciones de la función zeta, según Dedekind, Artin y Weil al estudio de los cuerpos de números, curvas y variedades algébricas, no son fruto de un juego lógico, sino réplicas a intuiciones en un contexto de abstracción superior al de Riemann.

No ya el análisis de las grandes creaciones, sino la simple experiencia personal de cualquier matemático, atestigua que los descubrimientos no son el eslabón final de un encadenamiento lógico. Las creaciones tienen un sentido que precede a toda formalización, y aún antes de ésta, la intuición las reviste de una realidad presencial.

No está muy alejado el sentido de la creación matemática del de la artística, y muchos matemáticos así lo reconocen. Poincaré, Hardy y Halmos por citar algunos, han escrito apasionadamente sobre este tema. Hardy llega a afirmar que sólo «la belleza y la seriedad» sirven para valorar la creación matemática.

Tal vez estas consideraciones me ayuden a contestar a la pregunta sobre la presencia del factor artístico en la creación matemática, que formulé al principio; y aún podría agregar otras razones en favor de esta tesis, que creo más objetivas, ya que se refieren al contenido y a la realización de una creación matemática. Es opinión general que los conceptos matemáticos tienen una pureza y transparencia de gemas intelectuales, y también se reconoce que la Matemática pertenece a las «obras bien hechas» que elogiara Eugenio d'Ors. Sin duda, estos dos argumentos no literarios permiten apoyar la afirmación de que la Matemática *también es arte.*

El binomio intuición-lógica

Volviendo al hilo de nuestra reflexión sobre el trabajo del matemático, me doy cuenta de que he puesto especial énfasis al destacar el papel que juega la intuición en la creación matemática, por lo que seguramente queda desdibujado el papel de la Lógica. En ningún caso se trata de situar la intuición frente a la Lógica, pues sin un equilibrio entre los dos términos del binomio intuición-lógica no existe Ciencia. Si la intuición es el maestro y la Lógica el sirviente, el sirviente siempre tiene algún poder sobre el maestro: frena la intuición desmandada. Con un donaire precisa H. Weyl esta situación: «La Lógica es la higiene que precisa el matemático para mantener sus ideas sanas y vigorosas». Como decíamos, la Lógica es una servidumbre que tiene la Matemática, de la que no se puede liberar, pues interviene en momentos esenciales de la creación matemática, y está presente en todos los razonamientos; es decir, *la Lógica pertenece al método matemático.* Es cierto que la idea de un razonamiento matemático, modelo de rigor, certidumbre y universalidad, más que una realidad es una ilusión deseada. La crisis de fundamentos, los problemas de consistencia y completitud, las insuficiencias de las escuelas conjuntistas, intuicionistas, formalistas, etc., los interrogantes abiertos por los teoremas de Gödel y otros, son motivos de real inquietud y han oscurecido la imagen que se tenía de la Matemática como ciencia del razonamiento inapelable.

Probablemente esta situación se presenta cuando el análisis lógico sobrepasa las fronteras alcanzadas por la creación matemática, que es trabajo de síntesis, originándose una situación de desequilibrio.

Sin embargo la presencia de estas crisis, que descubren en las ciencias su dimensión humana, no interrumpe el progreso científico. La Matemática sigue creciendo y sus resultados y métodos se presentan increíblemente efectivos. No hay duda de que las proposiciones requieren demostraciones adecuadas y con ellas entran a formar un cuerpo de doctrina; pero copletando la idea antes expuesta, podemos afirmar que *el sentido de rigor* en las demostraciones *depende del contexto matemático-lógico del momento.* La Matemática crece en una serie de avances, en los que manda la intuición. Después se consolidan paso a paso a través de las correcciones de inadvertencias y errores, hasta que las demostraciones alcanzan el nivel de rigor del momento. Por esto algún matemático asegura que no hay demostraciones finales, es decir, definitivas.

A. N. Whitehead, el compañero de B. Russell en la redacción de los *Principia Mathematica,* refiriéndose a la Lógica dice: «Se trata de un instrumento soberbio, pero su uso requiere un fondo de sentido común».

En el estudio realizado sobre la función zeta, a través de las distintas épocas, se percibe claramente la adecuación del lenguaje y técnicas de demostración a la situación del pensamiento matemático del momento. La flexibilidad del razonamiento de los tiempos eulerianos es totalmente distinta de los planteamientos asépticos a lo Bourbaki, pero en toda ocasión se reconoce un buen sentido de rigor, que no deja la menor duda de la validez de las demostraciones. Este buen sentido no se adquiere por un entrenamiento diferenciado en técnicas lógicas, sino en el ejercicio de «hacer Matemáticas» serias.

Es posible que junto a las intuiciones primeras de espacio y número, estén presentes los principios lógicos que codificó Aristóteles; y seguramente en el equilibrio del binomio intuición-lógica está la clave del buen trabajo del matemático en su taller de ideas.

Un perfil humano

Antes de terminar estas consideraciones sobre la identidad de la Matemática, génesis de sus conceptos, certidumbre de las proposiciones, etc., sugeridas por las reflexiones sobre el tema de esta disertación, parece oportuno hablar de los matemáticos. Precisamente la teoría de la función zeta muestra de una forma clara e incisiva el papel jugado por algunos grandes de la Matemática. Claro que la historia de una teoría no es la de sus autores, pero ya dijo Goethe que «la historia de una ciencia es la misma ciencia», y si es la Matemática, imprime carácter a los que la cultivan.

A medida que iba evocando las vidas de aquellos maestros en las universidades europeas: Göttinga, Berlín, Jena, Lovaina, París, un sentimiento de admiración crecía hacia esa rara especie de científicos, tantas veces extraños en su sociedad, que son los verdaderos matemáticos.

Efectivamente las interpretaciones del matemático, como hombre de ciencia, son siempre varias e incompletas. Para unos, practican la más intelectual de las artes creativas; para otros, son descubridores de configuradores de ideas, cuya consistencia está asegurada por la Lógica; y muchos se preguntan si no estarán llegando a una situación límite cuando el descubrimiento matemático se valora por no ser contradictorio. Sin embargo, todos reconocen en la Matemática una utilidad de sus estructuras lógicas, y precisión en el lenguaje, estrictamente unidos a la evolución de las Ciencias de la Naturaleza, y que mueven al físico E. Wigner a hablar del «poder irrazonable de la Matemática».

Pero estas apreciaciones y distingos, más propios de un espectador que de un actor, no son motor que impulse el progreso científico real. El matemático en su trabajo no cultiva una duda hamletiana sobre el ser o no ser de sus creaciones. El que con seriedad investiga sobre una teoría científica, ha de creer en su trabajo, y tener el convencimiento de que su aportación personal puede suponer un progreso efectivo en el conocimiento de algún aspecto del mundo sensible o del universo de las ideas. Si alcanza el éxito, ilusionado, siente la necesidad de compartir el hallazgo.

El ejemplo de los matemáticos de la «saga de la función zeta» es aleccionador. Ellos creen en su trabajo, y se sienten arrastrados a una investigación, algunos durante años, en la que son actores en el descubrimiento. La razón última de este comportamiento habrá que buscarla en el convencimiento personal de la existencia de una verdad-matemática, aunque sea discutida su naturaleza y expresión. Los matemáticos son los llamados al ejercicio de profundizar en el conocimiento de esa verdad, y transmitirlo a los demás. Hay unas sencillas palabras del citado H. Hardy en su libro «Autojustificación de un matemático» en las que resume su vida: «He añadido algo al caudal de conocimientos de la humanidad y he ayudado a otros para que hicieran lo mismo».

Al reflexionar sobre estas ideas, en particular en lo referente a los matemáticos en su labor científica, se presentan con claridad dos aspectos que merecen un comentario más explícito:

Al decir que el matemático ha de *creer* en su trabajo, se le pide que sea auténtico frente a sí mismo; y al decir que el matemático ha de *compartir* sus descubrimientos, se le pide que sea auténtico frente a los demás.

La primera cualidad es la honestidad del investigador y la segunda cualidad es la generosidad del profesor. Las dos configuran el perfil humano del matemático.

No dudo que en teóricos de otros campos del conocimiento también se manifiestan estas notas que perfilan su personalidad, y yo los he conocido en esta Academia. No obstante, creo que cuanto más alejadas se encuentren las intuiciones sensibles del campo de interés del investigador, más sincera ha de ser su adhesión a un trabajo, que esencialmente será ejercicio de ingenio y reflexión.

Post scriptum

Aunque exactamente no se sabe la procedencia, se atribuye a Gauss la siguiente cita: «La Matemática es la reina de las Ciencias, y la Teoría de números la reina de las Matemáticas». Realmente que es algo desmedido el elogio, en particular en lo referente a la Teoría de números. Pero hay algo de cierto, pues no se puede negar que en esta Teoría resplandecen más que en otras, las *buenas* cualidades que tradicionalmente se atribuyen a la Matemática: la simplicidad de los conceptos fundamentales, la belleza de las proposiciones serias, el rigor de sus razonamientos, la intemporalidad de sus verdades, etc., y yo añadiría el fuerte poder de seducción que tiene para el curioso que principia su estudio.

Sin embargo, esta brillante situación de la Teoría de números entre las ramas de la Matemática, no se corresponde con la consideración que tiene en el cuadro de nuestros estudios universitarios, pues sólo en algunas universidades se profesa como disciplina voluntaria.

Recuerdo que en nuestros años mozos, en los capítulos introductorios al Análisis del texto del gran matemático riojano Rey Pastor, se estudiaban fundamentos de la Teoría de números que constituían una entrada fascinante en los estudios facultativos de Matemáticas. Los estudiantes de aquellas promociones conocíamos las teorías básicas de la divisibilidad, congruencias, ecuaciones diofánticas, etc., y por lo menos sabíamos que los números enteros no sólo sirven para construir los racionales.

Reformas de planes en busca de organigramas didácticamente más coherentes, barrieron capítulos de información algo dispersa, pero que frecuentemente ayudaba a despertar el sentido creativo de los estudiantes. En muchas universidades desaparecieron las enseñanzas de Teoría de números, y sólo en algunas quedaron en el último curso como asignatura optativa.

Yo tuve la suerte de poder impartir esta enseñanza durante varios años en la Universidad de Barcelona, donde se creó un pequeño, pero selecto, grupo de estudiosos de esta materia. Entre ellos quiero distinguir a doña G. Pascual Xufre, que después de mi marcha continuó la docencia con gran competencia; y a uno de los más activos miembros del grupo doña P. Bayer Isant, actualmente catedrático de Teoría de números en la Universidad Central de Barcelona, y durante varios años profesora de la misma disciplina en la Universidad de Regensburg.

Cuando la Teoría de números vuelve a interesar en el mundo matemático, espero que las universidades españolas le encuentren un lugar de preferencia en sus planes de estudio e investigación. Se trata de una teoría difícil de grandes matemáticos, pero por esto vale la pena dedicarse a ella. He dicho.

Bibliografía

[1] Riemann, B., *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebener Grösse*. «Monatsber der Bertiner Akad.», páginas 671-680, 1859.

[2] Kline, M., *Mathematical thought from ancient to modern times*. Oxford, Univ. Press, 1972.

[3] Neste, W., *Griechische Geistesgeschichte* (Von Homer bis Lukian). Stuttgart, A. Kröner, 1944.

[4] Heath, T. L., *The thirteen books of Euclid's Elements*. 3 v. New York, Dover Publications, Inc., 1956.

[5] Heath, T. L., *The thirteen books of Euclid's Elements*. V. II, pág. 412.

[6] Euler, L., Opera 14, págs. 216-244. Trabajo publicado, 1737.

[7] Euler, L., Opera 15, págs. 70-90. Trabajo publicado, 1768.

[8] Ayoub, R., *Euler and the zeta function*. «Amer. Math. Month.», 81, págs. 1067-1086, 1974.

[9] Legendre, A. M., *Théorie des nombres*. Reimpresión de Librairie Sci. Tech. A. Blanchard. París, 1955.

[10] Chebyshev, P. L., *Oeuvres I*. Sur le nombres premiers, páginas 51-70.

[11] Riemann, B., *Gesammelte Math. Werke*. B. G. Teubner. Leipzig, 1876.

[12] VON MANGOLDT, T., *Zur Verteilung der Nullstellen der Riemannschen Funktion* $\zeta(t)$. «Math. Ann.», 60, págs. 1-19, 1905.

[13] HARDY, G. H., *Sur les Zeros de la fonction* $\zeta(s)$ *de Riemann*. «C. R. Acad. Sci. Paris», 158, págs. 1012-1014, 1914. También en «Collected Papers».

[14] HARDY, G. H. and LITTLEWOOD, J. E., *The zeros of Riemann's zeta funcion on the critical line*. «Math. Z.», 10, págs. 283-317, 1921.

[15] SELBERG, A., *On the zeros of Riemann's zeta function*. SKR. Norske Vid. Akad. Oslo, 10, 1942.

[16] BOHR, H. und LANDAU, E., *Ein Satz über Dirichletsche Reihen mit Anwendung*. «Rend. Circ. Mat. Palermo», 37, páginas 269-272, 1914.

[17] HILBERT, D., *Problèmes futures des Mathématiques*. «C. R. 2nd. Congr. Int. Math. Paris», pág. 85, 1902. También en «Bull. Am. Math. Soc.», 8, págs. 437-445, 478-479.

[18] LEVINSON, N., *More than one third of zeros Riemann's zeta function are on* $R(s) = 1/2$. «Advances Math.», 1974, págs. 383-436.

[19] ROSSER, J. B., YOHE, J. M. and SHOENFELD, L., *Rigorous computation and the zeros of the Riemann zeta function*. «Cong. Proc. Int. Federation Information Process», 1968, págs. 70-76.

[20] LANDAU, E., *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*. Leipzig. Teubner, 1909. Reimpreso por Chelsea, 1953.

[21] HARDY, G. H., *Prime numbers*. «Brit. Ass. Rep.», 1915, páginas 350-354.

[22] SIEGEL, C. L., *Über Riemanns Nachlass zur analytischen Zahlentheorie*. «Gesammelte Abhandlungen», vol. 1. Springer, Berlin y New York, 1966.

[23] EDWARDS, H. M., *Riemann's Zeta Function*. Academic Press, New York y London, 1974, págs. 166 y ss.

[24] DEBYE, P. J. W., *Näherungsformeln für die Zylinderfunktionen* ... «Math. Ann.», 67, 1909, págs. 535-558.

[25] HADAMARD, J., *Étude sur les Propiétés des Fonctions Entières et en Particulier d'une Fonction Considéré par Riemann*. «J. Math. Pures Appl.» (4), 9, págs. 171-215, 1893.

[26] STIELTJES, T. J., *Recherches sur les fractions continues*. «Ann. Fac. Sci. de Toulouse», 8, J, págs. 1-122; y 9, 1895, A, págs. 1-47.

[27] MELLIN, H., *Eine Formel für den Logarithmus transcendenter Funktionen von endlichem Geshlecht*. «Acta Soc. Sci. Fenn.», 29, 1900.

[28] EDWARDS, H. M., Obra citada. En la página 22 y siguientes emplea esta notación.

[29] LEHMER, D. N., *List of prime numbers from 1 to 10.006.271.* Publ. No. 163. Carnegie Inst. of Washington. Hafner New York, 1956.

[30] HADAMARD, J., *Sur la distribution des zeros de la fonction* $\zeta(s)$ *et ses consequences arithmétiques.* «Bull. Soc. Math. France», 24, págs. 199-220, 1896. (También en «Oeuvres»).

[31] DE LA VALLÉE POUSSIN, C. J., *Recherches analytiques sur la theorie des nombres.* «Ann. Soc. Sci. Bruxelles» (1), 202, págs. 183-256, 1896.

[32] EDWARDS, H. M., Obra citada, pág. 72.

[33] DE LA VALLÉE POUSSIN, C. J., *Sur la fonction* $\zeta(s)$ *de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs a une limite donnée.* «Mém. Courronnés et Autres Mém. Publ. Acad. Roy. Sci. des Lettres Beaux-Ars Belg.», 59, 1899-1900.

[35] APÓSTOL, T. M., *Introducción a la Teoría analítica de números.* Edit. Reverté, págs. 124 y ss., 1980.

[35] FERMAT, P. DE, *Oeuvres,* 4 vol. Gauthier-Villars, 1891-1912. El enunciado se escribió como nota marginal en la traducción de la obra de Diofanto. Una edición muy cuidada de esta obra fue hecha en Leipzig en 1895 por P. Tannery.

[36] BOREVITCH, Z. I. SHAFAREVITCH, I. R., *Thérie des Nombres.* Gauthier-Villars, págs. 178 y ss., 1967.

[37] KUMMER, E. E., *Collected Papers.* Vol. I. Ed. por A. Weil. Springer, 1975.

[38] BOREVITCH, Z. I. y SHAFAREVITCH, I. R., Obras citada, páginas 234 y ss.

[39] BOREVITCH, Z. I. y SHAFAREVITCH, I. R., Obra citada, páginas 247 y ss.

[40] BOREVITCH, Z. I. y SHAFAREVITCH, I. R., Obra citada, página 344 y ss. También DEDEKIND, R., *Gesammelte math. Werke.* Braunschweig, 1932.

[41] APÓSTOL, T. M., Obra citada, págs. 309-329.

[42] CARLITZ, L., *Note on irregular primes.* «Proc. Amer. Math. Soc.», 5, págs. 329-331, 1954.

[43] VANDIVER, H. S., *On Kummer's memoir of 1857 concerning Fermat's Last Theorem.* «Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.», págs. 266-269, 1920.

[44] VANDIVER, H. S., LEHMER, D. H. y LEHMER, E., *An Application of highspeed computing to Fermat's Last Theorem.* «Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.», págs. 25-33, 1954.

[45] JOHNSOON, W., *Irregular Primes and Cyclotomic Invariants.* «Math. Compt.», 19, págs. 113-120, 1975.

[46] ARTIN, E., *Quadratische Körper im Gebiet der höheren Kongruenzen I, II* (Thesis). «Math. Z.», 19, págs. 153-246, 1924. También «Coll. Papers», págs. 1-294.

[47] SCHMIDT, F. K., *Analytische Zahlentheorie in Körpern der Characteristik* p. «Math. Z.», 33, págs. 1-32, 1931.

[48] HASSE, H., *Beweis des Analogons des Riemannschen Vermutung für die Artinschen und F. K. Schmidtschen Kongruenz - zetafunktionen in gewissen elliptischen Fällen.* «Ges. d. Wiss. Nacht. Math. Phs. Klasse», Heft 3, páginas 253-262, 1933.
[49] DEURING, M., *Aritmetische Theorie der Korrespondenzen algebraischen Funktionenkörpers, I.* «J. Reine Angew. Math.», 177, págs. 161-191, 1937.
[50] HASSE, H., *Zur Theorie der abstrakten eliptischen Funktionenköper, I, II, III.* «J. Reine Angew. Math.», 175, 1936.
[51] WEIL, A., *Collected papers vol. I.* Springer, 1979, páginas 257-259.
[52] WEIL, A., *Foundations of Algebraic Geometry.* «Am. Math. Soc.», vol. XXIX, 1946 (2.ª edición, 1962).
[53] WEIL, A., *Collected papers,* vol. I, págs. 399-410.
[54] GROTHENDIECK, A., *Elements de Géometrie Algébrique* (EGA). 12 volúmenes publicados en colaboración de DIEUDONNÉ. «Publ. Math. IHES», 1960-1964.
[55] DELIGNÉ, P., *La conjetura de Weil I.* «Publ. Math. IHES», 43, págs. 273-307, 1974.

DISCURSO DE CONTESTACION

DEL

EXCMO. SR. D. ALBERTO DOU MASDEXEXAS

Excmo. Sr. Presidente,
Excmos. Sres. Académicos,
Señoras, señores:

Al contestar a vuestro discurso en nombre de la Academia, cúmpleme ante todo daros una cordial bienvenida y expresar la satisfacción de esta Corporación por contaros entre sus miembros.

Siguiendo una laudable costumbre tengo que exponer el *curriculum vitae* del recipiendario con el fin de presentarlo al público y a la sociedad.

Enrique Linés Escardó nació en Logroño en el seno de una tradicional familia numerosa. De su padre, aragonés y matemático, heredó entusiasmo y tesón en el estudio de la Matemática, y de su madre catalana el buen sentido que le ha acompañado en el ejercicio de cargos de responsabilidad y dirección.

Después de realizar sus estudios secundarios en Logroño y Barcelona empezó los universitarios de Ciencias Exactas en esta última ciudad. En su Facultad asistió a las lecciones de Análisis que impartía D. José María Orts y Aracil, catedrático ejemplar a cuyo entusiasmo contagioso se deben muchas de las vocaciones analistas de los que se formaron en aquella Facultad. En la Universidad Central terminó la Licenciatura, después de haber asistido a los cursos de los Rodríguez Bachiller, Navarro Borrás, Alvarez Ude, Fernández Baños y otros, que justificaban la fama del excelente profesorado de la Facultad madrileña.

Aunque la afición e interés del estudiante Linés se centraba en el Análisis, debió causarle un fuerte impacto el estudio del Cálculo de Probabilidades y Estadística matemática, que entonces era novedad en los planes de estudio, y cautivaba a los jóvenes ya fuera por su aspecto probabilístico, próximo al Análisis, o por el carácter estadístico, cuyos métodos parecían alejados del riguroso logicismo.

En efecto, sus primeras preocupaciones y trabajos se refieren al Cálculo de Probabilidades, en el que todavía no se habían impuesto los métodos de la Teoría de la medida, y daban a su estudio el atractivo de algo que se está descubriendo.

Pasados los años dolorosos de la contienda española, se doctora el profesor Linés con una tesis sobre «El método de la función arbitraria en el Cálculo de Probabilidades».

Desde entonces se incorpora a la labor docente, tanto en España como en el extranjero, que ha sido y es, junto con el estudio e investigación la dedicación de su vida. Pasó por los grados previos del profesorado universitario, hasta alcanzar a mediados de la década de los cuarenta la Cátedra de Análisis Matemático en la Universidad de Zaragoza, de la que posteriormente pasó a Barcelona. Aquí en Barcelona conocí como alumno a Linés, por primera vez, o mejor le reconocí, pues nos habíamos visto en Madrid al principio de los años cuarenta. Aunque no asistí a sus clases de Análisis Matemático 1.° y 2.°, pues tuvo la bondad de convalidármelas por mis previos estudios, sí me consta positivamente, por alguno de sus alumnos aventajados, el entusiasmo que despertó gracias a la alta calidad de su enseñanza. Recuerdo el impacto duradero que me causó su curso de Doctorado (1950-51) sobre los Funcionales analíticos de Fantappié al que asistí con mucho interés y redacté uno de mis primeros trabajos a nivel de iniciación a la investigación matemática. A principios de los 70 se trasladó a Madrid a la Cátedra de la misma denominación en la Complutense y finalmente en la U. N. E. D. Desde su cátedra ha encauzado con extraordinario éxito las vocaciones matemáticas de numerosos universitarios, actualmente profesores en distintas Universidades y otros Centros docentes del país.

Antes de acceder a la cátedra en España, ejerció como Docente (invitado) en la Universidad de «Friedrich-Schiller» de la ciudad alemana de Jena, durante tres semestres, y participó en los seminarios de los profesores R. Koening, Deuring, Damkohler, F. K. Schmidt entre otros.

Durante el curso 51-52 permaneció el profesor Linés en la Universidad de Maryland tomando parte en los trabajos del «Institute for Applied Mathematics», en relación con los profesores Weinstein, Díaz, Zarantonello, Payne, Weinberger y otros, dando distintas conferencias sobre «Aplicación de la Teoría de los funcionales analíticos».

En la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Barcelona, como profesor extraordinario de la Cátedra «Paulino Castells» desarrolló cursos desde el año 57 al 63 sobre temas de Análisis Matemático Superior en sus aspectos de aplicación.

Por invitación de Universidades y Centros Técnicos Superiores de Venezuela, impartió tres cursos de postgrado entre los años 72 y 74, destinados a profesores de nivel superior, sobre Teoría de la medida e integración y Técnicas del Análisis complejo y del Análisis funcional.

Es notable la labor docente del profesor Linés en el campo de la Teoría de números, durante su estancia en la Facultad barcelonesa, de la que él mismo ya se ha hecho eco. Aparte de las lecciones ordinarias para alumnos del último ciclo, en el Seminario correspondiente se despertaron firmes vocaciones, que han dado continuidad al estudio de esta noble rama de la Matemática en nuestro país.

La dedicación a la Universidad tiene sus servidumbres, pues con frecuencia obligan al empleo de energías y tiempo en tareas, no docentes en sí, pero que posibilitan la vida de la Institución. Seguramente por ese buen sentido al que hemos hecho referencia, el profesor Linés se vio implicado en tales trabajos. Durante diez años fue Secretario General de la Universidad y perteneció a la Comisión promotora de la Universidad Autónoma en la capital catalana durante los primeros años de su organización y funcionamiento. Presidió, durante varios años la Comisión local Fullbrigth en Barcelona; y bajo los auspicios de esta Fundación, fue invitado durante el otoño del 67, a realizar un viaje de estudios por distintas Universidades de EE. UU. Asistió a distintos seminarios en Universidades de Filadelfia y Luisiana, en Minneapolis como profesor invitado, y objeto de especial invitación en el Instituto Tecnológico de California, con motivo del aniversario de su fundación. Durante este viaje pudo estudiar la organización y problemática de las Universidades de aquel país.

En la Facultad de Matemáticas de Barcelona fue Jefe del Departamento de Teoría de funciones, y también jefe de la Sección de Matemática Aplicada del Seminario de Barcelona adscrito al C. S. I. C. Fue uno de los fundadores de la revista «Collectanea Mathematica» en el año 48, publicada por dicho Seminario. Desde su fundación, miembro de su Comité de redacción y Director de la misma en el bienio 69-70.

Desde la fundación de la U. N. E. D. en Madrid es Director del Departamento de Matemática Fundamental, habiendo organizado sus estudios y preparado textos y material para la enseñanza en dicho Centro.

Pertenece a la Real Sociedad Matemática Española, de la que fue Presidente en el período 1974-78.

En el C. S. I. C. fue Consejero Adjunto del Patronato Alfonso X el Sabio y actualmente es Jefe del Departamento de Matemática Aplicada del Instituto «Jorge Juan». Fue Académico electo de la Real de Ciencias de Barcelona y actualmente Académico correspondiente de la misma.

* * *

Linés se interesó al principio de su carrera por los temas del Cálculo de Probabilidades y fruto de ello fue su tesis referente a una cuestión que había preocupado a Poincaré y de la que trataba en su «Calcul des Probabilitès». Se trata de explicar el origen de los fenómenos aleatorios. El método de la función arbitraria corresponde a un esquema en el que pequeñas diferencias en las causas originan grandes diferencias en los efectos, y del cual un ejemplo típico es el juego de ruleta. La introducción de las técnicas de medida en la Teoría de la probabilidad restó interés a la cuestión del origen del azar, y los estudios de esta índole se desplazaron a otras áreas de la Matemática. Sin embargo, en aquel momento, las aportaciones del profesor Linés tenían interesante originalidad. Aparte de dar un tratamiento riguroso al método clásico, propone generalizaciones sustanciales que estudia en casos particulares, y por métodos directos da la solución exacta de algunos problemas de tipo ergódico.

Cuestiones de Análisis relacionadas con estos problemas las trata en trabajos sobre «La medida media de conjuntos no acotados». También con técnicas directas estudia la frecuencia de puntos de redes situados en determinadas zonas del espacio.

A esta época pertenecen algunos trabajos sobre «Problemas de coincidencias». M. Fréchet en los *Exposés d'Analyse Générale* (Act. Sc. et Ind. 942) menciona detallada y repetidamente (incluso con una referencia en el índice) el caso estudiado por Linés, que resume en una nota.

Por aquellas fechas se ocupa Linés del estudio de las funciones casi-periódicas, relacionándolas con la resolución de problemas ergódicos concretos. Fruto de este interés fue un extenso trabajo titulado «Aplicaciones de la teoría de redes regulares al estudio de las funciones casi-periódicas» que fue premiado por el C. S. I. C. en un concurso nacional. Partiendo de nuevas demostraciones de los teoremas de aproximaciones diofánticas de Kronecker, se hace un estudio de funciones generalizadas casi-periódicas, con exponentes característicos pertenecientes a un módulo de números de base finita.

En relación con estos trabajos se expone un «Método de cálculo efectivo de aproximaciones diofánticas para sistemas reducidos de tipo lineal», por medio de fracciones continuas.

En el campo de las funciones casi-periódicas Linés tiene otros trabajos que generalizan estas funciones en un sentido asintótico a la manera de Fréchet, o bien cuando la variable toma valores discretos. Basándose en estas ideas se escribió una tesis doctoral.

Ya Catedrático de Análisis matemático en la Universidad de Barcelona, a raíz de la estancia en España del matemático L. Fantappié, se interesa vivamente por la teoría de los «Funcionales analíticos», publicando una amplia memoria en la que se aplican aquellas técnicas a problemas de ecuaciones en derivadas parciales, titulada «Resolución en forma finita del problema de Cauchy sobre una hipersuperficie cualquiera en la ecuación de ondas, con cualquier número de variables, y en otras notables de tipo hiperbólico». A partir del cálculo de los funcionales por medio de sus indicatrices proyectivas, obtiene las soluciones en forma finita, es decir, por medio de integraciones sobre dominios e hipersuperficies, del problema de Cauchy, de las ecuaciones citadas. Parece que son las primeras soluciones obtenidas con esta máxima generalidad. No menos interés tienen las soluciones para las ecuaciones de los telegrafistas, y otras hiperbólicas de órdenes 4 y 2 k, así como en las ecuaciones de propagación de las ondas en medios cristalinos uniáxicos. Obtenidas las soluciones en forma finita estudia su validez en el campo real que es el que físicamente tiene más interés. En esta extensa memoria se pone de manifiesto la utilidad práctica de los métodos funcionales en el estudio de problemas concretos.

Publica después en una revista italiana la memoria «Sobre los productos funcionales relativísticamente invariantes», que dentro del área de la Teoría de los funcionales, respondía al deseo de construir instrumentos de cálculo en el esquema relativístico.

Posteriormente ocupan el interés del profesor Linés temas relacionados con los fundamentos y entre los trabajos publicados citamos: «Esquemas lógicos de cálculo», «Sobre la estructura del conjunto de los números naturales» y «Estructuras lineales y su orientación», estos últimos en *Coll. Math.*

En esta reseña sólo nos hemos detenido en los trabajos que hemos considerado más representativos para situar la actividad del nuevo Académico; pero reconociendo que una de las notas más características de su personalidad es la preocupación docente, creemos que es significativa la publicación en estos últimos años de dos voluminosos tratados: *Análisis II (Cálculo en espacios normados. Teoría de la medida e integración)* y *Análisis IV (Análisis complejo)*, aparte de los *Principios de Análisis Matemático* de próxima aparición.

Por otra parte ha dirigido las versiones españolas de numerosas obras de reconocidos especialistas extranjeros.

* * *

1. Siguiendo la misma laudable costumbre, a la que me he referido al comienzo de mis palabras, paso a comentar brevemente el discurso del recipiendario.

Vaya por delante que su lectura me ha fascinado. Nuestro nuevo compañero, tomando como hilo conductor la historia de la función zeta de Riemann, no solamente nos ha ilustrado acerca de uno de los más bellos episodios de la historia de las Matemáticas que comienza en los *Elementos* de Euclides y sigue vivo hasta nuestros días, sino que, además, nos ha dado una lección espléndida de lo que son las Matemáticas, las Matemáticas multimilenarias, las Matemáticas de siempre. En particular llama la atención, cómo partiendo de formulaciones tan comprensibles y al parecer tan elementales, muy pronto, casi de repente nos damos cuenta de que tocamos misterio y desde muy cerca.

2. Mi comentario va a ceñirse a las *Reflexiones* con las que el autor termina su discurso. Aunque mis consideraciones participan de todas las que él hace a lo largo de este capítulo final y en último término se identifican sustancialmente con ellas, mi comentario quiere ser de una manera muy concreta una explicación y confirmación de aquel dejar «pasar la posible sombra de escepticismo» de que habla Linés al comienzo de su sección sobre la creación matemática.

2.1. Ahora está de moda hacer patente y poner de relieve esta «sombra». Esta «sombra de escepticismo» viene provocada principal y recientemente, en este presente siglo, por la proliferación de paradojas, de las cuales no se acaba de dar una explicación completamente adecuada. Un origen algo más remoto de esta oscuridad hay que situarlo en los rápidos avances del Análisis matemático a partir del siglo XVII y en el descubrimiento de las geometrías no euclídeas; e incluso en el descubrimiento de las manchas del sol que acaban con la brillantez de las teorías aristotélicas.

Pero es sobre todo en este siglo, en el que por diversas razones que enumera Linés: «La crisis de los fundamentos, los problemas de consistencia y completitud, las insuficiencias de las escuelas conjuntistas, intuicionistas, formalistas, etc., y los interrogantes abiertos por los teoremas de Gödel y otros», se empaña la trasparencia del razonamiento matemático. Como razones más concretas podemos citar además de las paradojas ya clásicas, el postulado de selección de Zermelo; la crítica de Brouwer (1923): «Una teoría errónea, aunque no se la coja en contradicción no por eso deja de ser errónea; ni más ni menos que una acción criminal aunque no sea condenada en juicio no por eso deja de ser criminal»; el axioma (generalizado) del continuo; y el hecho de que varios matemáticos como G. H. Hardy, H. Weyl, R. L. Wilder, y numerosos filósofos rebajen el valor probativo de las demostraciones matemáticas. Más aún, no es raro hoy día oir hablar o leer sobre descubrimientos devastadores, desastres intelectuales, calamidades irremediables que convierten en proposiciones peligrosamente dudosas las que antes eran consideradas como verdades incontrovertibles.

Desde luego que hay muchos matemáticos que, como nuestro nuevo compañero, dejan pasar esta posible sombra de escepticismo, y algunos llegan a afirmar la validez incondicional e incluso la verdad inmutable de las proposiciones matemáticas; así por ejemplo J Dieudonnè y los Bourbakistas, K. Gödel y el mismo G. H. Hardy.

2.2. La disparidad de juicios que manifiestan los matemáticos cuando hablan de la certeza de sus teoremas o del valor probativo de sus demostraciones, se hace también patente en otros aspectos. Obviamente no es éste el lugar de una exposición sistemática y documentada de las disparidades que muestran los matemáticos cuando analizan su disciplina, pero permitidme enumerar algunas.

Linés trata explícitamente en su discurso la opción entre descubrimiento o invención de los teoremas, alternativa que se refiere a la ontología de los entes matemáticos. Parece claro que aquí hay una disparidad de apreciación. Creo que son frases corrientes, por ejemplo, las siguientes: que Gauss *descubrió* las geometrías rimanianas, que Lebesgue *creó* o *inventó* la teoría de la medida, que Dedekind *creó* los números reales, etc. En particular este último es muy explícito en carta a H. Weber: «con todo yo aconsejaría que por número real... se entendiera algo nuevo que el espíritu crea. Somos de naturaleza divina y sin ninguna duda poseemos fuerza creadora no sólo en cosas materiales (ferrocarriles, telégrafos), sino muy especialmente en cosas espirituales» (24-1-1888).

Asimismo, el recipiendario se ocupa explícitamente del binomio intuición-lógica, que tan importante papel juega en la explicación del quehacer investigador propio del matemático; e ilustra apelando también aquí a la historia de la función zeta, los diversos modos según los cuales se ha entendido y aplicado este binomio.

2.3. Todavía cabe mencionar la importante disparidad que se da entre los matemáticos, cuando quieren dar criterios que permitan valorar los resultados, juzgar de su calidad, decidir cuáles son las buenas matemáticas. Y obsérvese que para orientar la investigación matemática hay que tener en cuenta tales criterios.

Creo que hay cierto consenso en considerar el juego de la generalización, la especialización inútil y la abstracción por sí misma como una calamidad actual. Ahora bien, unos para ponderar la buena calidad del quehacer matemático hablan de rigor, pureza, forma, arte y estética. Así G. G. J. Jacobi en carta (1830) a A. M. Legendre escribe que el único objetivo de la ciencia es el honor del espíritu humano y por tanto un teorema de Teoría de Números es tan precioso como un resultado acerca del sistema planetario. Estos matemáticos temen que se les pueda llamar ingenieros o físicos o incluso matemáticos aplicados. Pero corren el peligro de que queden aislados en una torre de marfil. Por otro lado otros, creo que actualmente la mayoría de los mejores matemáticos, estiman que el criterio primario para valorar positivamente un resultado matemático es su instrumentabilidad para el servicio de otras ciencias. Para éstos, por tanto, el criterio supremo de calidad se encuentra en un control que ejerce la Naturaleza, de modo que las teorías y teoremas matemáticos resulten aplicables al mundo exterior.

3. Los fundamentos de las Matemáticas son hoy día muy diversos. Por otra parte los fundamentos determinan la metodología de las Matemáticas, entendida como aquella parte de la epistemología

que se ocupa de la validez o corrección del discurso matemático en cuanto formalmente deductivo. Consecuentemente se habla hoy de diversas Matemáticas, siendo las más importantes las intuicionistas y las formalistas. Todavía dentro de estas últimas especialmente (puesto que también dentro de las intuicionistas) se distinguen a su vez varias Matemáticas, según el conjunto de axiomas que se presuponga, por ejemplo según se admita o no el axioma de selección o el axioma (generalizado) del continuo. Sin duda que esta diversidad de Matemáticas es causa de alguna de las disparidades de las que hemos mencionado en la sección 2 anterior.

Con todo, me parece que para juzgar del sentido de las mencionadas disparidades o para poder decidir sobre la verdad o falsedad de sus afirmaciones, juega un papel mucho más relevante el hecho de que actualmente bajo el mismo nombre de Matemáticas se entienden dos disciplinas extraordinariamente distintas. La razón de esta distinción está en la diversa naturaleza de los objetos a los que se supone que se refieren las proposiciones y teoremas matemáticos. Es una razón profunda pues afecta también a su epistemología, ya que los objetos referidos son elementos esenciales para la determinación de la verdad o falsedad de las proposiciones. A estas dos disciplinas las llamaremos Matemáticas formales y Matemáticas clásicas. Las primeras se refieren a entes ideales, que pueden ser entidades de un tercer mundo (platonismo) o entidades mentales que se suponen previamente construidas (intuicionismo); mientras que las segundas se refieren a las cosas del mundo exterior que se supone independiente de la mente humana.

3.11. Las Matemáticas tradicionales, es decir las que se han hecho desde Platón hasta el siglo XIX, deben ser consideradas como Matemáticas clásicas, pues se refieren por lo menos mediatamente, al mundo físico de las cosas exteriores, el mundo que percibimos con los sentidos y que se supone que es independiente de nuestra mente. En Platón las Matemáticas se refieren a ciertas entidades o Ideas, con existencia real, de las cuales participan las cosas del mundo físico, y por tanto ni se plantea problema alguno de su consistencia lógica ni ofrece especiales dificultades la aplicabilidad de sus teoremas al mundo físico. En Aristóteles y Santo Tomás los conceptos matemáticos se abstraen de la realidad física y los teoremas matemáticos se aplican exactamente a la realidad del mundo exterior, cuando ésta se concibe con su cantidad y se abstrae de las cualidades sensibles. Tampoco aquí pueden plantearse ni el problema de aplicabilidad ni el de la consistencia, pues el mundo físico es un modelo de las estructuras matemáticas. Las Matemáticas son la ciencia que se ocupa de la cantidad, que puede ser discreta (Aritmética) o continua (Geometría). En Kant las Matemáticas constan de juicios sintéticos «a priori» y tampoco se plantean los problemas de consistencia y aplicabilidad.

3.12. La gestación y creación de las geometrías no euclídeas (1733-1832) plantea por primera vez la aparentemente igual consistencia lógica (aunque esta consistencia sea sólo relativa y no se demuestre hasta 1871 por F. Klein) de sistemas matemáticos extraordinariamente elaborados y rigurosos que contienen proposiciones contradictorias. En la Geometría euclídea, o del ángulo recto, la suma de los ángulos de un triángulo es dos rectos, mientras que en la Geometría del ángulo agudo es menor que dos rectos. En la hipótesis, entonces tácitamente admitida y sin posible ocurrencia de duda, de que la Geometría vigente en el mundo físico era una Geometría elemental (pues nadie cuestionaba que los cuerpos se movían conservando ángulos y distancias) y que era la misma en todo el espacio físico (pues en todo él se podían mover los cuerpos), sólo una de las dos geometrías podía ser verdadera; y en cuanto tal su consistencia lógica está asegurada. Para la otra geometría se abre el problema de la consistencia; y el de su inutilidad, hasta tal punto que para Kant la geometría euclídea determina las condiciones de posibilidad objetiva, y por tanto la geometría del ángulo agudo ni siquiera es objetivamente posible.

A los mismos nuevos problemas de consistencia y aplicabilidad llevan los avances del Análisis en el siglo XVIII. Mencionemos, por ejemplo, el desarrollo del concepto de función, desde la definición analítica que explicita Euler (1748) hasta la definición de Dirichlet (1829); la introducción de los números imaginarios (o «imposibles (unmögliche)» que dirá Euler); y la aceptación de los espacios *n*-dimensionales. Es claro que estos conceptos no son abstraídos del mundo físico, por lo menos no lo son de manera obvia; y rápidamente las Matemáticas se independizan del mundo exterior e incluso de la Física, que hasta entonces había sido su soporte. ¿Qué garantías podemos tener de su consistencia y de su aplicabilidad? ¿Cómo juzgar de la consistencia y de la aplicabilidad de los transfinitos de Cantor?

3.13. A pesar de todo ello, muchos matemáticos actuales consideramos que las Matemáticas son consistentes, aunque alguna vez muy excepcionalmente podría deslizarse algún paralogismo que sería corregido, y que su aplicabilidad es fantástica y patente. Así los números naturales nos permiten hablar de las naranjas, la integral de Lebesgue nos permite hablar de la masa, la topología de la proximidad mutua entre dos puntos, etc.

Así pues, las Matemáticas clásicas son una ciencia de la Naturaleza, como la Física. Incluso pensando en características tales como rigor, necesidad, universalidad, podríamos decir que las Matemáticas son a la Física, lo que ésta es a la Biología. En principio, y desde luego en plena contradicción con lo que nos enseña su historia, para reconstruir las Matemáticas podríamos prescindir de la consideración de lo que sea la vida, no se necesita la experiencia de la masa ni de la inercia, ni siquiera la del espacio; nos podría bastar la interna experiencia del tiempo. No obstante si se hubiesen construido sin más base empírica que la experiencia temporal, es muy dudoso que fueran el instrumento de todas las ciencias, o mejor no habría ciencias formalizadas, y su utilidad no sería probablemente mayor que la que tiene la Aritmética elemental.

3.2. Las Matemáticas formales, como se desprende de lo anteriormente dicho en 3.11, también pueden considerarse sucesoras de las Matemáticas tradicionales. No en cuanto éstas se aplicaban mediatamente al mundo físico, sino en cuanto encontraban inmediatamente su verdad absoluta en las Ideas platónicas, en las sustancias concebidas con su cantidad y abstrayendo de las cualidades sensibles, o en cuanto eran la expresión de la forma de nuestra sensibilidad.

Con la desaparición de estas entidades inmediatas y el rechazo del mundo físico, quizás para conservar un rigor y exactitud pretendidamente absolutos, las Matemáticas se han convertido en una disciplina hipotético-deductiva, puramente formal, vaciada de contenido físico, pues la naturaleza de sus objetos es totalmente irrelevante, y en la que consecuentemente ha desaparecido el concepto de verdad, que ha sido sustituido por el de validez o de deducción correcta.

En este sentido las Matemáticas formales, como la Lógica tradicional, se ocupan exclusivamente del discurso deductivo y de su validez formal, es decir, teniendo en cuenta sólo la forma de las proposiciones y prescindiendo del contenido o materia de las mismas.

La Lógica tradicional es una parte de la actual Lógica matemática, y ésta a su vez es una parte de las Matemáticas formales.

Para los matemáticos clásicos entender así las Matemáticas es degradarlas y convertirlas en un juego. Con todo, no tanto resultan un juego, cuanto *el* juego, y como tal con un alto valor estético y positivo, que subyace a todos los juegos y determina las condiciones indispensables de validez para el desarrollo de cualquier ciencia.

4. Fue mi deseo mostrar que esta distinción entre Matemáticas clásicas y Matemáticas formales permite dar cuenta en buena parte de las disparidades antes mencionadas. Pero la necesaria brevedad de este discurso me impide hacerlo, aparte de que tal explicación resultará bastante obvia a quien intente elaborarla.

He dicho al principio (2) que mi comentario sería una explicación y confirmación del dejar «pasar la posible sombra de escepticismo» de que habla Linés en su discurso. Hubiese deseado especialmente mostrar que las razones concretas que cité (2.1), en particular el postulado de selección de Zermelo, la crítica de Brouwer y el axioma (generalizado) del continuo, no empañan la posición única y suprema del discurso matemático en cuanto a rigor, universalidad, consistencia y verdad se refiere. También aquí la brevedad del discurso me aconseja omitirlo.

Hay que admitir que la consistencia de las Matemáticas, incluso de las formales, lo que es decisivo también para las clásicas, no es demostrable mediante argumentos claros y convincentes, o por lo menos no lo es dentro del mismo sistema. Pero, las Matemáticas gozan de una verificación y comprobación que se extiende a más de cuatro mil años de duración.

En cuanto a su verdad es claro que la de las Matemáticas clásicas es más cierta que la de la Física. Para que una proposición de las Matemáticas clásicas sea verdadera hay que asegurarse de que las realidades a que se aplique satisfacen los axiomas pertinentes que se presuponen; y en la Física hay que suponer o demostrar previamente, además, que satisfacen las leyes que se apliquen en la deducción.

En cuanto a las Matemáticas formales, su validez es casi absoluta, por lo menos si no se suponen axiomas que incluyan en su formulación alguno de los transfinitos cantorianos superiores al $\aleph_0$. Es verdad que no se demuestra la consistencia y que hay una viva dialéctica sobre los fundamentos; y que «esta dialéctica confiere a la

Matemática un acentuado carácter de historicidad. Resulta, pues, que ni siquiera en la Matemática le es ni le será posible al hombre la posesión de una verdad absoluta», como ya expliqué (1966) en este mismo lugar.

Así pues, las Matemáticas gozan de una certeza exclusiva y suprema en el ámbito del conocimiento humano, y con sobrada razón Liniés «deja pasar la posible sombra de escepticismo». La oscuridad es inseparable de todo conocimiento humano y en particular en la Teología es esencial. No hay verdad absoluta ni siquiera en las Matemáticas, ni es necesario, pues el conocimiento no nos ha sido dado para establecer la total independencia y supremacía absolutas del hombre, sino en orden a la acción humana de salvación, y para esto es ciertamente más que suficiente y con creces.

Deseo finalmente dar de nuevo a Enrique Linés la bienvenida a esta Corporación, que se honra desde hoy de contarle entre sus miembros. He dicho.