

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

EL GENIO ESPAÑOL A TRAVÉS
DE LA HISTORIA, DESDE EL PUNTO
DE VISTA MATEMÁTICO

DISCURSO

LEÍDO EN LA SOLEMNE SESIÓN INAUGURAL DEL CURSO
ACADÉMICO DE 1926-27

POR EL SEÑOR

D. CECILIO JIMÉNEZ RUEDA

EL DÍA 10 DE NOVIEMBRE DE 1926



M A D R I D

IMPRENTA ZOILA ASCASÍBAR Y C.^a

Martín de los Heros. 63

1926

SEÑORES:



BIEN quisiera que esta disertación fuera tan amena, fácil e interesante como piden estos actos, tanto más en carácter cuanto mejor realizan aquel precepto de Horacio de instruir deleitando.

También debiera ser tejida con formas y conceptos recientes espigados en el campo abstracto y elevado de la Matemática pura.

Mas como a pocos es dado el poder de armonizar ambas cosas, sobre todo desde que esos conceptos, de abstracción en abstracción, se han alejado tanto del pensar corriente en la vida, voy a cumplir el honroso encargo de llevar la voz de la Academia en esta solemnidad no con un discurso, sino con algunas reflexiones, dedicadas a nuestra juventud, que me ha sugerido una excursión por los dominios de la historia, estudiando el genio español en relación con la Matemática.

De paso rechazaremos la leyenda que contra nuestro modo de ser se ha forjado fuera, precisaremos nuestros defectos, y echaremos al surco algunas semillas de aliento para esta clase de especulaciones.

I

España ni antes ni ahora ha tenido ni tiene ciencia desinteresada. Hay aquí un misterio de raza que conviene dilucidar.—MENÉNDEZ PELAYO (1).

SABIDO es que los pueblos tienen cualidades específicas que reconocen como causas la raza, el suelo, el clima, la tradición, las virtudes domésticas y las leyes de su desarrollo orgánico.

Pero no es menos cierto que esas características dependen también de otras muchas circunstancias menos constantes, como la influencia del tono de cada momento histórico, los entronques o convivencias con otros pueblos, las guerras, las constituciones políticas, los estados económicos y los cambios de todo género debidos al progreso.

El olvidar estas últimas causas al atribuir a un pueblo determinado ciertos caracteres con un sentido absoluto o general expone a incurrir en grandes injusticias, como las que cometen con España algunos extranjeros, o a que hagamos nosotros mismos afirmaciones extremadas y a veces contradictorias.

Por eso es la Historia algo vivo que progresa y se perfecciona con el continuo aquilatar de la verdad de lo pretérito.

(1) Menéndez Pelayo: *La Ciencia Española*, tomo I, págs. 159 y 161 (nota).

Esto sin contar con la extraordinaria complejidad de los fenómenos sociales y con que en los pueblos, como en los individuos, hay casi siempre energías ocultas capaces de domar las tendencias atávicas y de producir una autoeducación cuando un núcleo selecto de sus individuos se lo propone.

Nos será útil también recordar que lo ideal es muchas veces lo contrario de lo físico, real o verdadero, como producto de la fantasía; y otras significa las ideas filosóficas madres del ser y del conocer, con diversos grados en su contenido. La idealidad en el primer sentido es propia de soñadores, poetas o quijotes; en el segundo es savia vivificante del árbol de la ciencia y la fuerza de su eterna juventud.

Asimismo vemos que lo práctico es con frecuencia aplicación de una doctrina y consiguiente destreza adquirida en su ejercicio, y otras, instinto y aptitud para el medro personal.

De ambos modos el espíritu práctico puede atesorar; pero es el primero, asociado a la fuerte voluntad para el trabajo, el coadyuvador de todo progreso.

Lo ideal y lo práctico, como cotos del espíritu y de la materia, son los dos polos entre que se ha movido siempre la humanidad, inclinándose unas veces a un lado y otras al otro, y moviéndose algunas en ambas regiones, bien armonizadas y con perfecto equilibrio.

Cuando esto último tiene lugar, los pueblos que lo realizan alcanzan esos máximos de civilización que iluminan con sus destellos varios siglos de la historia; v. g., los griegos en la antigüedad; los alemanes en nuestro tiempo.

Para algunos españoles, Ricardo León, por ejemplo, la raza española en sus orígenes es poco imaginativa y sentimental: hasta en sus mayores locuras se advierte un fondo de crudo positivismo; y cuando llegó al apogeo de su robusta vida aun seguía fiel a su sentido práctico, ya que todas las ciencias de aplicación florecieron entonces, menos la Metafísica y las Matemáticas, que son especula-

ciones desinteresadas y de puro lujo intelectual. Pero luego admite que el Cristianismo golpeó las peñas milenarias y abrió las fuentes de las aguas vivas, despertando la actividad de los espíritus (1).

“Y si alguno preguntase, dice Menéndez Pelayo, cómo pecando los españoles de abuso y exceso de espíritu positivo hemos dado en nuestra historia y damos cada día tantos pasos en falso, contestaré que uno de los modos más inciertos de acertar en la práctica es volver las espaldas a la teoría.”

En cambio, para Juderías, nuestra decadencia de los siglos XVII y XVIII vino por no perseguir en nuestras guerras más ideales que las cosas del espíritu, por una falta extraordinaria de sentido práctico y por un consiguiente desconocimiento de la realidad de las cosas (2).

No sería difícil conciliar opiniones tan contradictorias como las del primero y último de estos ilustres pensadores cotejándolas con la del segundo; máxime si las referimos a dos períodos distintos de la historia de España; v. g., a tiempos anteriores y posteriores, respectivamente, al siglo XVI.

Al terminar éste, nuestra ya comenzada ruina moral y económica se acentúa y precipita; con la primera se perdieron o enfriaron los ideales del siglo precedente, a saber: los estudios filosóficos en su aspecto teológico, único sostén de las Matemáticas de entonces, y las expansiones geográficas; y con la segunda, la voluntad y el hábito de las gallardas acciones: que mal se avienen con la pobreza, la asiduidad y elegancia del obrar.

Sólo tocante a la defensa del suelo patrio amenazado se irguió luego varias veces nuestro pueblo en sublimes improvisaciones, que, si nada le enseñaron respecto a previsión y buena práctica de la vida, unidas a su posición geográfica le aseguraron para siempre su permanencia nacional. Pero lo mantuvieron alejado de Europa en esos

(1) R. León: *La Escuela de los Sofistas* (ed. de 1925), págs. 103, 106 y 108.

(2) Julián Juderías: *La Leyenda Negra y la Verdad histórica* (1914), pág. 217.

siglos en que tan enorme impulso recibieron todas las ciencias, y señaladamente las Matemáticas y la Física.

Estos y otros mil sucesos prueban que son más exactas o están más acordes con la realidad la primera y segunda de las afirmaciones expuestas. En ellas se basan defectos de nuestra raza que es noble reconocer para tratar de enmendarlos por todos los medios posibles.

Tales son: la falta de curiosidad y de entusiasmo por los abstractos principios de las ciencias físico-matemáticas y naturales, herencia tal vez del espíritu práctico del pueblo romano, con el cual nos identificamos más que otros, y la inconstancia de la voluntad para el trabajo asiduo y metódico unida al individualismo exagerado, origen de nuestro frecuente indiferentismo patrio y poca cohesión, contagio quizá de ocho siglos de convivencia con los árabes.

Consecuencia de todo esto fué el poco apego a escribir—como si los extraños tuviesen la obligación de inquirir nuestros hechos y producciones—, lo cual ha entregado muchas al juicio ajeno sin defensa y ha dejado otras en el olvido; “que siempre fuimos pródigos en hazañas y cortos en escribirlas” (1).

Otro hecho, repetido constantemente a través de la historia, ha exteriorizado mayormente, confirmándolo, nuestro defecto: el escásimo valor, rayano a veces en el menosprecio, dado a las especulaciones matemáticas y, consiguientemente, físicoquímicas. Hecho que ha motivado frecuentemente quejas y movido generosos impulsos para contrarrestarlo.

Entre 1550 y 1866 pueden citarse, entre otros, al alemán Marco Auriel, naturalizado en Valencia, que escribe un *Algebra*, por la gran falta que en estos reinos había de ella; a Pedro Simón Abril, que se queja a Felipe II de falta de matemáticos, con afrenta de la nación y perjuicio de la república; a Herrera, que decidió al rey a crear la Academia de Matemáticas, la cual empezó bien, dirigida

(1) Menéndez Pelayo: *La Ciencia Española*, parte I, pág. 313.

por un portugués en la parte científica, y acabó mal en 1624, con aumento del atraso anterior.

Al bachiller Pérez de Moya, verdadero apóstol de la causa matemática; a Feyjoo, que se lamenta de que sean tan forasteras las Matemáticas en España, que aun entre los eruditos hay pocos que entiendan las voces facultativas; a Torres Villarroel, que halló en Salamanca este desgraciado estudio sin reputación ni séquito.

A Navarrete, quien juzga se tuvieron siempre aquí las Matemáticas como un estudio abstracto de pocas o muy remotas aplicaciones, y a Echegaray, finalmente, que sienta que nada nos deben las Matemáticas, ya que no hay nombre alguno que podamos pronunciar sin esfuerzo.

Y no es por cortedad de inteligencia o ineptitud para el estudio de esas ciencias, sino sencillamente porque no nos interesaban, y menos desde que dieron sus primeros avances sin nuestro concurso; porque las miramos siempre desde fuera de ellas, como juegos del espíritu, sin transcendencia, cuando no como cosas de magia. Nuestra actividad era requerida en otras direcciones.

Y como las ciencias físicomatemáticas han sido, desde el renacimiento, las indicadoras de los grados de progreso y civilización de los pueblos, ha dado nuestro desafecto a ellas visos de razón y de justicia a la leyenda contra España. Por eso, aunque la razón de esa leyenda es otra, interesa combatirla juntamente con nuestro desvío de unas ciencias que tienen en su objeto, entre otras, las leyes del tiempo, del espacio y de la forma, así como las del número y del orden; es decir, de casi todo lo que significa industria y comercio, poder y riqueza.

La inquina producida por las luchas políticas y religiosas en nuestros vastos dominios y fuera de ellos aumentó hasta la hipóbole nuestros defectos en todas partes, sin tener en cuenta que también tuvimos grandes virtudes; y así hemos llegado a ser para

algunos extranjeros, no prácticos ni idealistas, sino sencillamente incapaces de cultura y de libertad y eternamente inútiles.

La característica del español, para no pocos es la crueldad alimentada por el fanatismo religioso (1); para Dumas, el Africa empieza en los Pirineos; y fué siniestro destino de España, según Draper, destruir dos civilizaciones, la oriental y la occidental, hallando en la ruina de ambas su propia ruina (2).

Para otros, finalmente, fuimos y seguimos siendo el eterno modelo de todas las negligencias.

En su historia de las Matemáticas afirma Libri que tan pronto como los romanos aparecen en la escena del mundo cogen la ciencia personificada por Arquímedes y la ahogan; así, dondequiera que ellos dominan, la ciencia desaparece. Etruria, España y Cartago dan fe de ello (3). Y he aquí otra vez a España y Africa unidas en el mismo desdén. Porque eso de la Toscana, patria de Libri, parece ahí, más que una queja por su destierro, una nota para que el lector aprecie su imparcialidad.

No obstante, ese juicio es tan apasionado como los otros.

El periodo áureo de la ciencia helénica (Euclides, Arquímedes, Apolonio) tiene lugar en plena decadencia política de Grecia. Y cuando en el año 150 antes de J. C. pasa fraccionada a poder de Roma, todavía emite resplandores aquella ciencia con Hiparco, Menelao, Tolomeo, Pápus, Diofanto, Heron de Alejandría, Proclus y Eutocio, que, sucesivamente, vivieron entre el año 148 antes y el 540 después de J. C., fenecido ya el Imperio de occidente.

Lo que hay es que el elevado idealismo anterior, agotado el filón en que se ejerció, fué poco a poco, desde la misma Grecia, sustitu-

(1) Max. Marie en su *Hist. des Math.* cuenta que en las luchas con España Vieta descifró una clave nuestra, que nos desconcertó, por lo cual, dice, acusamos a Francia ante Roma de tener pacto con el diablo. "Esto, añade, hizo mucho reír."

(2) *Histoire du développement intellectuel de l'Europe*, t. III, cap. XIX.

(3) Libri: *Hist. des scien. Math. en Italia*, &, t. I, pág. 186.

yéndose por un sentido más práctico y positivista de la vida, que acaba por suplantar a aquél en pleno auge romano. Y, naturalmente, las Matemáticas derivaron entonces hacia la astronomía, geodesia, agrimensura, geografía, arquitectura, etc., quedando los libros de Euclides y Arquímedes como códigos científicos de imposible superación.

Confirman esto las obras de los matemáticos antes citados, la Estereotomía de los mil soberbios monumentos de piedra, ya religiosos, ya profanos, que los romanos dejaron por todas partes, y la orden de Augusto poniendo en ejecución el proyecto de Julio César de medir la superficie del Imperio, todo lo cual requiere una buena base matemática.

Respecto a nuestro país, basta citar a Séneca, cuyo nombre es aún hoy sinónimo de sabio, y recordar su *Moral y Filosofía*, su *Geografía y Cuestiones Naturales*, en que compendió la ciencia de su siglo; su teoría del movimiento de la Tierra y su conocida profecía del descubrimiento de América, creencia muy extendida aquí en aquella época, señal de existir ya una idea avanzada del planeta (1). Basta traer a la memoria a Pomponio Melo y a los demás sabios cordobeses de principios de nuestra Era para ver que no fué España tan sumida en las tinieblas como lo fueron otros pueblos.

Después de esto, el mundo todo quedó próximamente a la misma altura.

(1) Según Moreno Espinosa, *Historia de España, Edad Media*, pág. 13, Séneca, en su *Medea*, dice:

*Vendrán, al fin, con paso perezoso
Los siglos apartados en que el hombre
Venza del mar Océano las ondas
Y encuentre, al cabo, dilatadas tierras:
Descubrirá otros pueblos; nuevos mundos,
Y no será más Tule el fin del orbe.*

Nota: Parece que Tule estuvo en las islas Shetland.

Y aun entonces podemos nosotros presentar: a San Isidoro, con sus *Etimologías*; a Alpetragio, el más original de los astrónomos árabes, que fué un renegado español, y a Gerberto o Silvestre II, discípulo del obispo de Vich, donde apenas influyó lo árabe y sí la ciencia isidoriana mejorada, uno de los introductores de la numeración arábica en Europa.

También nos pertenece la cultura arábigo-hispana, que iluminó varios siglos de la Edad Media y atrajo a su foco gentes de todas partes. Hasta este momento pesó España científicamente tanto o más que los otros pueblos europeos. Pruébalo Alfonso X con sus *Tablas* y sus *Partidas*.

Pero es forzoso confesar, aunque nos sea doloroso, que, a partir de aquí, empieza a hacerse ostensible ese defecto de nuestra raza que la aleja instintivamente de los estudios físicomatemáticos. El primer hecho que lo pone a la vista es el de la célebre Escuela de Toledo introductora de los textos árabes en Occidente, en que muchos extranjeros colaboraron traduciendo obras de filosofía, historia, astronomía, matemáticas, etc., destacándose por su laboriosidad el italiano Gerardo de Cremona, que se llevó a su país un caudal inmenso de obras, como el *Almagesto*, el *Euclides*, el *Canon* de Alfarabi y otras mil, todo lo cual vieron nuestros matemáticos indiferentes, no sacando más utilidad que las breves referencias que pasaron a algunos de sus libros.

No han faltado, sin embargo, extranjeros que, más conocedores de nuestro país, han hecho elogios, ya de la riqueza de nuestra literatura, ya de la influencia de nuestra filosofía, ya de la importancia de nuestra historia.

Y los ha habido en gran número, a causa de nuestro abandono, que nos han dado hecha nuestra propia historia, con mejor intención que acierto en ocasiones. Al padre Duchesne, por ejemplo, entre otras inexactitudes, no le parece sabio Alfonso X, cuyas céle-

bres *Tablas* y famoso *Código* desconoce, y a quien trata con bastante desconsideración (1).

Ni vanos engrimientos por los elogios ni enervantes desalientos por los vituperios deben alterar el ánimo del español, que sólo ha de pedir se lo estudie desapasionadamente, facilitando él los medios, y sólo ha de anhelar llegar a la altura científica máxima conocida en el menor tiempo posible.

Hubo, repetimos, en todo tiempo, fuera, y los hay hoy, muchos y buenos amigos de España, y, sin embargo, y a pesar de ellos, ha privado siempre en Europa el falso concepto de los otros. Y aunque se nota al presente evidente reacción contra esa leyenda, sería inocente creer que va a cesar en breve. Las armas con que se fraguaron muchos de esos dicterios las dimos en distintas ocasiones los españoles mismos, ya con nuestros abandonos, ya con nuestros propios juicios. Hemos, pues, de ser nosotros, con nuestra ciencia, trabajo y tesón, los que las recojamos y destruyamos.

Dolidos de los desdenes ajenos, tanto más sensibles cuantas más apariencias los justificaban, algunos españoles han hecho estudios serios de las causas del estado cultural español, y nuestro sabio compañero señor Cajal, en un precioso libro alentador de las energías juveniles de la raza, examina las diversas razones (térmica, oligohídrica, económica, política y religiosa) que se han dado para explicar nuestro retroceso, y llega a la conclusión de que España

(1). *Compendio de la Historia de España*, por el R. P. Duchesne; traducido al castellano, con notas críticas, por el P. Isla (1851), en el cual se lee:

"Alfonso dice, a quien llamaron sabio
Por no sé qué tintura de astrolabio,
Lejos de dominar a las estrellas,
No las mandó, que le mandaron ellas.
Y mientras mide el movimiento al cielo,
Cada paso un desbarro era en el suelo."

no es un país que haya decaído, sino un pueblo intelectualmente atrasado; es decir, cuya infancia se ha prolongado hasta nuestros días (1).

Este concepto es exacto y, además, responde al espíritu educador del libro, ya que de una caída es más difícil reponerse que de un atraso, para el que no faltan estimulantes. Pero no acusa la torcedura impuesta al normal desarrollo español por enormes fuerzas extrañas a los comienzos del renacimiento, que si sólo amenguaron otras manifestaciones del saber, lo invalidaron para las Matemáticas, manteniendo el bajo nivel de éstas, que es una de las causas eficientes de aquel atraso.

Pues siendo estas ciencias la base de toda la filosofía natural y las que dan impulso a las ciencias físicoquímicas, así como lo reciben de ellas, no hay posibilidad de adelanto allí donde se cultivan con atraso y sólo como un medio. Puede decirse sin exageración que de los pueblos que tienen siempre en depósito alguna abstracción matemática nueva pendiente de aplicación, serán tributarios los otros científica, industrial y económicamente.

Si aquel célebre Apolonio, mente geométrica no igualada hasta Steiner, cuyos clásicos teoremas no admiramos hoy bastante porque nos vienen como corolarios sencillos de los invariantes de la forma cuadrática binaria; si aquel griego ilustre, repito, no hubiera llevado tan lejos la teoría abstracta y desinteresada de las cónicas, diez y ocho siglos después no hubiera sido posible la genial concepción copernicana del sistema del mundo, ni las leyes de Kepler, ni la newtoniana de la gravitación.

Por otra parte, indicaba Houel a Laisant la situación matemática de los Estados Unidos en 1870, diciéndole: "Importan justa la cantidad de ciencia pura que necesitan para su industria."

Mas llegó Sylvester al país, y, con números, los convenció de

(1) Cajal: *Reglas y Consejos sobre Investigación Científica* (1923), cap. X.

su error. En poco tiempo las Matemáticas fueron entonces un artículo esencial de la producción nacional yanqui.

Con ello ganó tanto aquella industria, que les entró verdadera fiebre no sólo por transportar a los dominios de la práctica los resultados de la ciencia abstracta, sino por acrecentar los de ésta; como lo prueba el aumento de Sociedades matemáticas y de periódicos que se ocupan en esta disciplina (1).

Ejemplos bien distintos y elocuentes de la tesis que venimos sustentando.

En otro libro de puro entretenimiento del señor Cajal añade éste:

“Sólo resta a España un ideal accesible: fomentar por sí misma la riqueza de su suelo y crear a todo trance ciencia e industria originales para prestigio, aumento y prosperidad de la raza” (2).

Este nobilísimo empeño no puede llevarlo a cabo más que nuestra juventud estudiosa, si logra inspirarse en el amor a la ciencia y a la Patria, y inatar de una vez nuestra habitual pereza musulmana.

Y como esa originalidad, para ser castizamente española, duradera y fecunda debe enlazarse con nuestro pasado científico, por pobre que éste sea, según la máxima: *Nosce te ipsum* del famoso templo de Delfos, importa sacarlo a luz cuanto antes, esto es, a la vez que se investiga en lo nuevo.

Desgraciadamente, por lo que hace a las matemáticas puras, el bien documentado discurso de Oviedo del señor Rey Pastor y sus trabajos posteriores (3), dejan el asunto terminado con esta frase: *España no ha tenido nunca una cultura matemática moderna*; que encierra un concepto idéntico al de la de Menéndez Pelayo que sirve de lema a este trabajo.

(1) Laisant: *La Mathématique (Philosophie, enseignement)*, pág. 143.

(2) Cajal: *Charlas de Café* (1922), pág. 323.

(3) *Los Matemáticos Españoles del siglo XVI*, por J. Rey Pastor, 1926.

Y es que esa cualidad negativa está, al parecer, en la solera de la raza; y por eso ha de arrancar-también de nuestras virtudes seculares—como el alto concepto del honor y la acometividad y arrojo para las grandes empresas—el empeño de extirparla.

Pero como aun quedan por revisar nuestros cosmógrafos, navegantes, astrónomos, geodestas, artilleros, etc., botánicos, naturalistas, etc., etc., importa mucho a la causa de España el que vayamos escribiendo nosotros nuestra verdadera historia política, artística, literaria y, sobre todo, científica, desempolvando y estudiando los inapreciables documentos que guardan nuestros archivos, antiguas bibliotecas y catedrales, para que resulte seria y bien documentada.

Y urge, por último, traducir al castellano corriente y al formulismo actual, y comparar con los extraños de su época, los libros de todos nuestros antiguos hombres de ciencia, publicando las críticas con las traducciones, para que vayan siendo del dominio público y nos vayamos acostumbrando a no aceptar siempre como buenos, juicios más o menos apasionados de críticos extranjeros, y para que cuando nuestra inferioridad resalte, sea como revulsivo que estimule el amor patrio, y éste, las latentes energías de nuestro espíritu (1).

Obstáculos no han de faltar seguramente a tamaña empresa; y no serán los de menos monta el actual desconocimiento del latín y la escasez de diccionarios bibliográficos extensos de cada rama del saber.

Pero dado el brío con que ha empezado la primera etapa de esta clase de trabajos, a saber: la publicación de listas bibliográficas y monografías, y dado el arsenal de las bibliotecas generales, corpo-

(1) Precisa asimismo, y éste es trabajo empezado ya con acierto por nuestros historiadores, dar al mercado libros de historia comparada, como *La Leyenda Negra y la Verdad histórica* de Juderías, corto, sencillo y muy documentado, en donde se señala el momento histórico en que se inició nuestro descrédito, los escritos que lo engendraron, las causas que lo extendieron, y donde se hace el cotejo con la nuestra de la intolerancia religiosa y política que existía al mismo tiempo en los países que ostentan el cetro de los dominios del saber.

rativas, regionales y particulares, si además se pone ingenio, decisión y fe no se hará esperar mucho el fruto de nuestros desvelos.

A mediados del siglo pasado empezaron a sentirse las anteriores necesidades, cuando nos apercibimos de la enorme distancia a que nos encontrábamos de la ciencia europea. No es, pues, extraño que al examinar el valor de nuestra herencia surgiera un choque entre las dos opuestas tendencias del pensamiento español. Así, mientras los krausistas niegan que valga poco ni mucho, los vivistas afirman su relativa importancia.

En la historia de la filosofía sienta el señor Revilla, imitando a Guizot, puede suprimirse, sin menoscabo del resto, la parte relativa a España, “pues la ciencia española—añadió luego en otro artículo—es un mito”.

“Por falta de libertad—sostuvo el señor Azcárate—puede ahogarse casi por completo la actividad científica de una raza, como ha sucedido en España durante tres siglos.”

“¿Es sostenible—dice el señor Perojo—que hayamos tenido filosofía española en el sentido de haber formado escuela, es decir, un sistema con unidad que haya sido seguido por otros? No; si ha habido algunos filósofos, han sido voces aisladas, sin consecuencias ni enlace con el proceso general de la cultura europea.”

A esto contestaron los Sres. Laverde y Menéndez Pelayo presentando tres tipos de filosofía española: el lulismo, el suarismo y el

Entre los medios que se han indicado para fundamentar vínculos de afecto entre los pueblos de nuestra raza, ninguno tan práctico como el propuesto por D. F. de la Riva: La inmediata revisión de los textos históricos que se estudian en la América española, plagados de errores y de conceptos amargos de saliente injusticia para el nombre y prestigios españoles.

Estas ideas van teniendo aceptación en muchas partes: así la Comisión Internacional de Cooperación Intelectual ha aprobado la proposición de D. Julio Casares relativa a rectificar en los libros escolares los errores que son gérmenes de incompreensión u odio entre las naciones.

El problema está afortunadamente en buenas manos, y todo parece encauzado a los fines propuestos; pero hace falta, en nuestra modesta opinión, más personal idóneo dedicado a ellos y más publicidad.

vivismo, con un caudal enorme de proposiciones filosóficas contenidas en los mismos y de autores y libros que los siguieron. En ellas se ve cómo en el vivismo tienen sus raíces el baconismo y el cartesianismo, hasta con su *cogito, ergo sum* este último, base del discurso del Método, y piedra angular de todo el sistema cartesiano (1).

Sólo hay, además de un siglo, entre Vives y Descartes, la particularidad de ser antiguos los conocimientos matemáticos de aquél y estar éste en posesión de los últimos adelantos de estas ciencias y de la Física, a las que pudo, por eso, enriquecer con tantas y tan felices ideas nuevas, y dar a luz la *Geometría Analítica*, chispa de un incendio, como tlice Gino Loria, capaz de iluminar el universo entero:

“Del cual la fama aun en el mundo dura,
y ya será, como el impulso, eterna” (2).

Conforme con las ideas antes apuntadas de una revisión científica, los datos y argumentos del Sr. Menéndez Pelayo dejan la sensación de que merece la pena de tomarse ese trabajo, y más aun el de emprender un estudio crítico serio de la aportación de nuestros filósofos y científicos de los siglos pasados, en todos los ramos del saber.

¿Quién no conoce esa polémica, sea por el natural interés del tema, o ya por el muy humano de las disputas de escuela, rayanas a veces con las sátiras y agudezas de las cuestiones personales? ¿Quién ignora que el fruto de la discusión, por parte de las derechas, fué la eruditísima obra: *La Ciencia Española*, de Menéndez Pelayo, en la que hay catalogados, con ligeros apuntamientos, entre el siglo I y el XVIII unos 250 autores, con cerca de mil obras, sólo de matemáticos, astrónomos y físicos, y otras tantas de ciencias naturales?

(1) Menéndez Pelayo: *La Ciencia Española* (1915-1918), t. I, II, III.

(2) Gino Loria: *Il Passato ed il Presente delle Teor. Geom.*, 1896, pág. 14.

Esto modificó un poco a favor de la ciencia española algunos juicios. Y Dusolier, que, según Cajal, siguió con interés la disputa, condensó después su juicio afirmando que hay, en efecto, una ciencia y una filosofía españolas; pero que todo el talento de Menéndez Pelayo no basta a probar que esa ciencia y filosofía tengan mucha importancia (1).

Ya es algo que no se pueda decir con fundamento que la ciencia española en general es un mito, ni que se pueda borrar España de la historia del progreso sin que se note, tanto más cuanto que en el solo hecho del descubrimiento de América, que afirmó la unidad geográfica del globo, dejaron huellas ideables en la historia de la ciencia los astrónomos que determinaron las coordenadas de sus más importantes puntos; los marinos que la circundaron, los geógrafos que la describieron, los botánicos que clasificaron sus miles de plantas nuevas y analizaron sus virtudes, dejando sus nombres en multitud de familias (mutisiáceas, queriáceas, etc.), y todo esto en lucha heroica contra las inclemencias de todo género de una naturaleza bravia.

En Matemáticas y Física es, como venimos viendo, muy probable el juicio de Dusolier; pero importa precisarlo.

A nuestro despego secular por las especulaciones matemáticas puras se le podrá poner tanto más eficaz remedio cuanto mejor sea conocido.

Por eso vamos a tomar el período de la historia de España en que tuvimos un evidente valer científico comparable con el de otros pueblos, incluso en Matemáticas, y a dar a conocer aquí algunos casos concretos de aquellos de nuestros hombres que más se distinguieron en estas materias.

Entre los años de 1520 y 1567 figuró un dominico español llamado Juan de Ortega, que, como algunos religiosos de esa época,

(1) *Aperçu historique sur la Médecine en Espagne*. Cita de Cajal en sus *Reglas y Consejos sob. Instr.*, pág. 242.

cultivó con fruto las Matemáticas. Dejó, entre otros, un libro de reglas y modos de contar y un tratado sutilísimo de Aritmética y Geometría, del que hubo varias ediciones desde 1534 hasta 1563, cuatro años antes de su muerte.

Gonzalo del Busto y Juan Lagarto añadieron en las últimas, reglas de quebrados, figuras geométricas y ejemplos de Arte mayor.

Sabido es desde Fermat que la ecuación de Pell $x^2 - ky^2 = 1$, en que k es un entero no cuadrado, tiene muchas soluciones enteras; y que a fines del siglo XVIII fué Lagrange quien dió de ella una solución general.

Consiste ésta en desarrollar $\sqrt{k}$ en fracción continua ordinaria, naturalmente periódica, y, si es $\frac{P_n}{Q_n}$ la reducida correspondiente al penúltimo cociente incompleto del primer período, en tomar para valores de x los numeradores, y para y , los denominadores de las reducidas de lugar tn , en que t es 1, 2, 3... cuando n es par, y 2, 4, 6... cuando impar.

Es decir, que son soluciones de esas ecuaciones los términos de ciertos quebrados, que son valores aproximados de raíces cuadradas irracionales.

Pues bien, el dominico Hortega trae en el libro antes citado, según ha descubierto el Sr. Rey Pastor, distintos números que la satisfacen. Y contra la afirmación de Cantor de que esos valores salen por el método antiguo de Heron, nuestro ilustre compañero, partiendo de las fracciones continuas de Bombelli, por las propiedades de los continuantes, obtiene la reducida dos-enésima en función de la enésima y la fórmula de recurrencia de la aproximación de las raíces cuadradas, que lleva el nombre de Heron.

En otro artículo examina las condiciones para que los términos de una reducida simplificada de Bombelli, u otro quebrado, satisfagan a la ecuación de Pell, y da la solución de ésta.

En las fórmulas que va estableciendo tienen su fundamento, entre otras, las dos siguientes irrefutables conclusiones:

a) Las aproximaciones heronianas no satisfacen a la ecuación de Pell, salvo en los casos excepcionales arriba estudiados, mientras que las de Hortega la satisfacen sistemáticamente, excepto dos, en que no llega hasta la solución, sin duda porque resultarían números de seis u ocho cifras.

Esto es, los valores heronianos no son aproximaciones óptimas; los de Hortega, sí.

b) Puesto que los valores de Hortega son reducidas ordinarias especiales de $\sqrt{k}$, y los dos valores excepcionales son reducidas intercalares, puede asegurarse que el dominico español estaba en posesión de un método equivalente al de desarrollar $\sqrt{k}$ en fracción continua ordinaria (1).

Sea este método inventado o tomado de autores árabes, esa aplicación sistemática del recurso y esa segura afinación en los resultados revelan una inteligencia nada vulgar. Pero es dudoso que no fuera expresable por una fórmula algébrica, por una regla de enunciado general o en forma de teorema.

Los espíritus verdaderamente matemáticos tienden siempre a la generalización; se elevan pronto a la región de los principios; sienten impulsos de hacer entrar en una ley todos aquellos hechos de filiación común, y en esto consiste el idealismo fecundo.

Juan de Hortega se da, en cambio, por satisfecho, como espíritu práctico, con la obtención, no desprovista de ingenio, de unos cuantos números. Y esto habiendo estado en Italia en unos tiempos como los de Tartaglia, Cardan y del Ferro, precursores de Vieta e iniciadores de la teoría de ecuaciones, en los que se conocía ya el uso algébrico de las letras, con que hizo sus primeros balbuceos el renacimiento matemático italiano.

Nota característica de esta época fueron los desafíos a proble-

(1) Rey Pastor: *Revista Matemática Hispano-Americana*, t. VII, págs. 53 y 142.

mas, con el consiguiente secreto mientras subsistían las cuestiones, de las reglas y leyes que cada uno descubría; pero de donde salieron, al fin, la fórmula de Cardan para las ecuaciones de tercer grado y la de Ferrari para las de cuarto. Evidentemente faltó a Hortega el ideal matemático.

Contemporáneo de éste fué Martínez Guijarro, más conocido por Martínez Siliceo, profesor de fama en París y después en Salamanca, preceptor del Príncipe de Asturias (Felipe II luego) y, finalmente, arzobispo de Toledo. Escribió en 1514 una *Aritmética Teóricopráctica* y editó después la *Aritmética y Astronomía* de Suisset, profesor en Oxford.

D. Ventura Reyes Prosper vió en la biblioteca del Cabildo catedral de Toledo el manuscrito original de la *Aritmética* de Siliceo. Más tarde, queriendo hacer una nota biográfica del mismo, logró hojear un compendio que guardan en la referida biblioteca y otro ejemplar de la obra extensa que hay en el Colegio de Doncellas de la misma capital, fundado por dicho arzobispo. Pero en esta edición había puesto el editor, al final, la siguiente nota: "Lo que sigue de los comentarios de Siliceo es más sutil que útil, esto es, más propio para artificios de sofistas que para el estudio de la filosofía; y así, lo hemos omitido deliberadamente nosotros."

Entonces quiso recurrir de nuevo Reyes al manuscrito del Cabildo; pero no hubo medio de encontrarlo, por haber fallecido el canónigo bibliotecario que lo había antes facilitado (1). Advierte el Sr. Reyes que esa nota se puso en vida de Siliceo; probablemente lo fué también con su consentimiento. El editor, no teniendo por qué atender a otra cosa que a los latidos de la opinión que había de adquirir el libro, refleja bien en ella el espíritu matemático de la época, al que no entusiasman, por lo visto, las sublimidades de esas ciencias; pero el autor no revela mejor tendencia dejando mutilar su obra quizá en aquello que más vigiliás le costó.

(1) Reyes Prosper: *Revista de la Sociedad Mat. Esp.*, tomo I, pág. 153.

Muy pocos años antes había alcanzado fama mundial Pedro Sánchez Ciruelo con sus dos *Aritméticas*, práctica y especulativa, su *Geometría* especulativa y un *Curso de las cuatro Artes matemáticas liberales*. También explicó Ciruelo en París, como tantos otros, y vino, al fin, a profesar en Salamanca, en cuya Universidad había hecho sus primeros estudios.

Atribúyele el Sr. Lorente y Pérez la aproximación, por agregación de ceros al resto, de la extracción de raíces; la construcción de los polígonos estrellados, como resultado de unir puntos de la división isotómica de la circunferencia, y el haber extendido a todos éstos la regla de la suma de sus ángulos que dió Campano para el pentágono (1).

Sigue Ciruelo a los ya anticuados Bravardino, Sacrobosco, Nemorario, etc., y desconoce, como Silíceo, las obras de los renacentistas italianos, que iban entonces a la cabeza del progreso.

Aunque inteligencias de primer orden, no debe de extrañar esta ignorancia si se tiene en cuenta que eran teólogos ante todo. Que si cultivaron las Matemáticas fué como ciencias útiles a la filosofía. Que si fueron a París y no a Italia fué por lo caídas que estaban entonces las Matemáticas en la Sorbona, y esta circunstancia, para personas de origen modesto, era un recurso: enseñar una facultad y aprender otra.

Pues de aquélla, como dice el propio Ciruelo, recibían el alimento del cuerpo, y de ésta, el del alma, con lo cual podían vivir y sustentarse ambas partes del hombre.

Todos a su vuelta a España explicaron Teología porque estas cátedras estaban mejor dotadas que las de Matemáticas, sumando así razones materiales a su natural idealismo, que, de ser otro, hubiera tendido a levantar unas ciencias de todos abandonadas.

Debemos, no obstante, a la escuela a que estos hombres perte-

(1) Lorente y Pérez: *Biografía y Análisis de las obras mat. de P. Sánchez Ciruelo*.

necieron el habernos transmitido la ciencia antigua y parte de la árabe, librando a ambas de las ruinas que la Edad Media sembró por todas partes.

Finalizada esta centuria sobresale tan sólo Hugo de Omerique con su *Geometría* y promesa de una aplicación sistemática, probablemente sin coordenadas, del Algebra a la Geometría, pues los demás: Gianini, Zaragoza, Tosca, Rodríguez, Corrachan, Bails, etc., aunque algo andan, es tan despacio, que van cada vez más rezagados del saber europeo, y nuestras Matemáticas quedan en un estado lamentable hasta mediados del siglo precedente.

“La conciencia en Torres Villarroel de la miseria intelectual de España por los años de 1750 a 1760—dice F. de Onís—no le viene por comparación con la cultura extranjera, que no conoce, sino del contacto mismo con las realidades nacionales.” Por eso aquella cátedra de Matemáticas, de que habla, que estuvo treinta años sin maestro y ciento cincuenta sin enseñanza, y aquel concurso de temas que presidió y del que no se encontró memoria en los anales de la escuela (1), prueban mejor que nada el criminal estado a que estas enseñanzas habían llegado.

(1) Clásicos Castellanos: *Vida T. Villarroel*, pág. 91.

II

Los partidarios de poca matemática para el ingeniero citan a Inglaterra precisamente cuando los ingleses, reconociendo su error, lo han ido subsanando a costa de sacrificios.—MARQUÉS DE ECHANDÍA (1).

No se explica bien sólo por desafecto la extremada atonía de los estudios matemáticos en España desde el siglo XVII. Otras causas tan hondas debieron superponérsele.

Quizá el imperialismo que extirpó nuestros tipos legendarios a lo Pedro Crespo, el centralismo exótico y exagerado, las guerras con Francia y con Inglaterra, en Flandes, Italia y Africa; guerras contra la Reforma y por nuestra independencia—que si cada pueblo tuvo a la vez su guerra, nosotros tuvimos las de todos y las nuestras, muchas veces simultáneas—; la gestación de las naciones americanas y los desaciertos políticos fueron labrando el marasmo moral y económico en que caímos, bastante a producir un estado intelectual insensible a todo género de estímulos.

Y cuidado que no eran flojos los que de fuera venían, pues se atravesó el período más activo, luminoso y fecundo del renacimiento científico, en el que los descubrimientos más asombrosos, las hi-

(1) El Marqués de Echandía: Prólogo a su traducción de las *Matemáticas Prácticas* de John Perry.

pótesis más atrevidas, las teorías físicas más fecundas y las filosóficas más elevadas se suceden con tal rapidez, hundiéndose unas ideas y surgiendo otras a cual más portentosa y esplendente, y en torbellino tal, que no parece sino que al mundo se le acaba el tiempo y quiere desquitarse en pocos años de los diez y siete siglos precedentes de obscuridad y barbarie.

Venían las Matemáticas, y aun siguieron mucho tiempo por entonces, al servicio de las ciencias físiconaturales, a las cuales se los prestaron inapreciables con la ley de la gravitación, la equivalencia mecánica del calor y otras; pero de las que sacaron ellas también ideas abstractas del más alto valor, como la compenetración completa del Algebra y la Geometría, iniciada por Descartes; la idea de la diferencial, que coloca al relativo conocer de la inteligencia humana casi a la altura de lo absoluto, y con las que, sigilosa y tenazmente, fueron preparando su transformación en ciencia única y completamente idealizada.

Entre aquellos servicios de las Matemáticas hay algunos que, aunque de menos trascendencia filosófica, fueron extraordinariamente llamativos por las circunstancias que los rodearon.

¿Quién no recuerda la lucha de Bouvard con las fórmulas de Laplace de las perturbaciones causadas por Júpiter y Saturno, al confeccionar las tablas de Urano en *La Connaissance des Temps*? ¿Quién podía sospechar la razón de que tablas tan escrupulosamente calculadas acusaran al poco tiempo nuevos desacuerdos con recientes observaciones?

La fama de hábil de que gozaba Le Verrier llevóle a entender en esta cuestión. Corrigió las tablas de Bouvard; y como quedaran aún residuos inadmisibles, abordó resueltamente el problema de la existencia de un planeta exterior causante de aquellos desacuerdos. ¿Pero cómo plantear matemáticamente un problema sin datos? La empírica y sólo aproximada serie de Bode, en la hipótesis de que

fuera prolongable, dió un valor dudoso de la distancia media al Sol del supuesto planeta.

Con este dato, utilizando la fórmula de las perturbaciones de la longitud de Urano, y mediante tantas ecuaciones como observaciones fueron necesarias, ligó la excentricidad, la masa y las longitudes de época y del perihelio del nuevo astro con las cuatro correcciones que había que hacer en los elementos de Urano. Penosos tanteos con el método de los mínimos cuadrados en los valores de la longitud de la época y un derroche de cálculos condujeron, al fin, al conocimiento de los elementos de la órbita y a la posición que debía tener el planeta desconocido en 1.º de enero de 1847.

Se comunicaron los resultados al astrónomo Galle, de Berlín, que disponía del mejor anteojo, y éste halló a Neptuno a 52' de la posición asignada por Le Verrier el 23 de septiembre de 1846.

El hecho tuvo una resonancia extraordinaria en el mundo científico, y aun en el vulgo. ¡No era para menos el descubrir un planeta desde la mesa del sabio con el instrumento inocente de unas cuantas ecuaciones!

Eran las leyes de Kepler y la de Newton, su síntesis, devolviendo a la Astronomía práctica el débito contraído con ésta por tantas observaciones como fueron precisas, desde Ticho-Brahe, para formularlas.

Permitidme que insista con otro ejemplo que, no por muy conocido, es menos interesante, y no del todo inoportuno mientras subsistan en nuestro país en mayoría abrumadora esos espíritus positivistas para quienes las Matemáticas siguen siendo, como antaño, juegos de ingenio más propios de cabalistas y desocupados que de verdaderos filósofos.

Se trata ahora de una concepción geométrica sutilísima. De una superficie abstracta que debe, además, su existencia a una hipótesis. Me refiero a la superficie de las ondas que entra en juego cada vez que una vibración luminosa penetra en un cristal birrefringente de

dos ejes. Esta superficie de cuarto orden es la envolvente, como sabéis, de las ondas planas, que parten a un tiempo de un punto en todas direcciones, consideradas un segundo después.

Su ecuación sale, entre otros modos, llevando sobre la normal a cada plano de onda, trazado por el centro del elipsoide de Fresnel, los semiejes de la elipse sección, y considerando el lugar de sus extremos. Tiene dos hojas cerradas, una interior a la otra; cuatro puntos cónicos, con infinitos planos tangentes en cada uno, situados en los ejes ópticos del cristal, por los que se pasa de una de aquellas hojas a la otra; cuatro planos tangentes singulares que la tocan según circunferencias, y finalmente, tiene por secciones en el plano de las XZ el círculo $x^2 + z^2 = b^2$ y la elipse $\frac{x^2}{c^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$, que se cortan sobre los puntos cónicos antes mencionados.

Si varios rayos, pensó Hamilton, se propagasen en el interior del cristal siguiendo uno de sus ejes, irían con igual velocidad y se polarizarían en planos normales a cada una de las generatrices del cono del haz de planos tangentes; y, según la construcción de Huygens, al emerger tendrían que formar un cono con el vértice en el punto de emergencia. Recíprocamente, si se hiciera caer sobre el cristal un cono de rayos luminosos con las circunstancias de aquél, al pasar al interior, todos sus rayos coincidirían en la dirección del eje; y tales hechos, que no pasaban aún de la categoría de idea, fueron designados después con la frase de *refracción cónica exterior*.

Decidido Hamilton, como buen matemático, a apurar el tema, encontró asimismo que si un rayo u onda plana se propagara en el cristal paralelamente a uno de los planos tangentes singulares, no tendría plano de polarización determinado; y si la construcción de Huygens para hallar el rayo interior refractado condujera a trazar a la superficie de las ondas un plano tangente singular, puesto que éste la toca en todos los puntos de una circunferencia, por todos ellos pasarían los rayos refractados y formarían una superficie cónica de

base circular; y este fenómeno se denominó después *refracción cónica interior*.

Estas futuras refracciones, acusadas por el análisis matemático de las singularidades de la superficie de las ondas, esto es, descubiertas con fórmulas analíticas e ideales figuras geométricas antes de que ojo humano alguno hubiera logrado ver, y que quizá la sola experimentación no hubiera dado jamás, por lo delicado de las circunstancias en que se producen, fueron poco más tarde, a indicaciones de Hamilton, comprobadas experimentalmente por Lloyd en un cristal grande de aragonito en el que se habían tallado dos caras normales a la bisectriz del ángulo de los ejes.

Con ser esto tan sorprendente, lo es mucho más que el ángulo de incidencia, y la abertura de los conos de refracción calculados por Hamilton y los dados por el experimento sólo difirieran en unos pocos minutos. Muchos más y variadísimos fenómenos se podrían aducir en que lo abstracto de las Matemáticas ha contribuido a su total esclarecimiento. En las corrientes producidas por la descarga de un condensador, en el amortiguamiento de los galvanómetros, en el movimiento vibratorio armónico amortiguado y en todos aquellos casos en que la ecuación diferencial del movimiento es lineal trinomía de segundo orden, y sin término independiente.

¿No son las raíces *imaginarias* de su ecuación característica, es decir, lo más sutil de la abstracción, las que han evidenciado la existencia de las oscilaciones y sus circunstancias? ¿No es el espacio geométricamente ultimado de cuatro dimensiones el que ha utilizado Minkowski en la teoría física de la relatividad, con sólo suponer el tiempo, antigua y obligada variable independiente, una coordenada como las otras? ¿Qué más? Aun a conceptos al parecer incapaces de aplicación práctica se les ha encontrado empleo. En m cuerpos A, B, C..., cuyas fórmulas contienen unos mismos n elementos químicos, con exponentes $a_1, a_2, a_3...$ en A, $b_1, b_2, b_3...$ en B, $c_1, c_2, c_3...$ en C, etc. (de los que puede haber algunos nulos), en vez de la

regla de las fases de Gibbs, sacó Volterra que el número de los elementos independientes viene dado por la *característica* de la matriz de todos los exponentes, etc.

Convencidos los grandes matemáticos de principios del siglo pasado de que cuanto más abstractas las teorías matemáticas más trascendentales son sus aplicaciones al conocimiento de la Naturaleza y aun a las eternas cuestiones de la filosofía, rompieron definitivamente con aquella servidumbre y, remontando el vuelo de sus portentosas inteligencias a las regiones de lo ideal, sin otro cuidado que evitar las contradicciones lógicas, han llegado a crear teorías tan admirables como la de los conjuntos, la de las funciones de variable compleja, la de los grupos, etc.

En ellas, si no una belleza comparable a la de una ecuación, como sintió Bossut ante los valientes versos de Racine en *Fedra*, hay bellezas de otro orden más elevado capaces de excitar la admiración de quien llega a comprenderlas y de mitigar las ansias de infinito que siempre torturaron al pobre espíritu humano. ¿Qué objetivo más digno y valioso puede tomar la Ciencia que el de satisfacer y recrear la inteligencia con las más elevadas verdades del orden abstracto y trascendental?

Tantos y tan fecundos han sido los recursos sucesivamente puestos en juego para esa obra, que su solo enunciado no cabría en estas reflexiones: la indistinción verbal entre *número* relativo y *punto*, en los conjuntos concretos, con la que se llega a poder considerar n números reales como un punto en un espacio de n dimensiones, fundiendo la Aritmética con la Geometría; las aplicaciones de estos conjuntos a la teoría de funciones de variable real y de variable compleja, a la integración y a las series trigonométricas, etc., y el haberse, con todo ello, logrado una aproximación, casi una identificación, entre el continuo aritmético y el geométrico, creando la rama de la Geometría llamada *Análisis situs*, la de las dilataciones continuas, irregulares o no, son las que más honor hacen a la inteligencia humana.

Las singularidades paradójicas que la teoría de conjuntos ha revelado, entre las cuales no es la menos sorprendente la de que los conjuntos continuos de puntos de una, de dos o de más dimensiones, tienen todos una misma potencia, es decir, son coordinables, han vuelto a los matemáticos más circunspectos, como dice Zoretti (1), enseñándoles a desconfiar de la intuición del espacio y a recurrir a la noción de número en todo conflicto sobre estas cuestiones.

Las correspondencias geométricas de todas clases, por otra parte: proyectivas, birracionales, etc.; las consiguientes transformaciones analíticas de las funciones y tantos otros recursos han hecho accionar unas ramas de la Ciencia sobre otras y llevar conceptos nuevos sobre ramas al parecer acabadas, abriendo nuevas vías al progreso.

Las Matemáticas puras, según Félix Klein, progresan a medida que los problemas conocidos son profundizados en detalle con métodos nuevos. Y a medida que comprendemos mejor los antiguos problemas, los nuevos se nos presentan solos.

Así, Riemann, mirando siempre la ecuación $u + iv = f(x + iy)$, como una representación del plano (xy) sobre el (uv) , demuestra que esta representación es conforme, es decir, que conserva los ángulos, y sienta su célebre teorema de que existe siempre una función f por medio de la cual un dominio cualquiera simplemente conexo del plano (xy) es representable sobre otro dominio dado simplemente conexo del plano (uv) . Actúa con estos conceptos sobre las funciones conocidas entonces de una variable; hace con ello las propiedades de éstas más amplias y comprensivas, y pone al descubierto, como él dice, una armonía y una regularidad que antes no acusaban.

Y considerando, viceversa, las u y las v , en virtud de ciertas funciones diferenciales, como potenciales relativos a las variables x , y ,

(1) *Encyclopedie des Sciences Mathematiques*, t. II, vol. I, fasc. 2.

aplicales los teoremas fundamentales de la teoría del potencial, y esto le conduce a una buena parte de sus notables desarrollos.

Luego inventa su clásica superficie de muchas hojas recubriendo el plano, soldadas unas a otras por los puntos de ramificación, la cual le sirve para la representación de las funciones multiformes, como antes el plano unido sirvió para las uniformes.

Paralelamente a estos trabajos van los de Veierstrass, que estudia las mismas funciones, aunque sólo desde el punto de vista analítico, sin auxilios geométricos ni físicos. La abundante doctrina acumulada por ambos geniales matemáticos da el sello de modernidad a toda cuestión en que intervienen.

Pero la profundidad de los pensamientos de estos grandes maestros, lo abstruso y difícil de sus teorías, la tendencia de la enseñanza universitaria en Europa a introducir desde el principio todos los refinamientos y puntos delicados de las matemáticas abstractas modernas y cierto recrudescimiento del espíritu utilitarista en el mundo a fines del siglo pasado, todo se conjuró para dejar de llevar primero a los matemáticos eminentes como profesores a las escuelas politécnicas, y acabar después por hacer decrecer el entusiasmo por estas disciplinas.

Muchos jóvenes se apartaron de la Matemática pura, y esta moda amenazó con producir un rompimiento entre la ciencia matemática abstracta y sus aplicaciones científicas y técnicas.

En España, con un ambiente tan propicio, prendió pronto esta nueva orientación, y al renacimiento matemático de mediados del siglo siguió un descenso bastante perceptible, aunque no, por fortuna, de mucha duración.

El verbo elocuente, insinuante y persuasivo de Félix Klein y su clarividencia en todos los problemas matemáticos, llevó a todas partes, y señaladamente a las Sociedades de Física y Naturales, el convencimiento de lo funesto que sería aquella ruptura y de su impro-

cedencia, ya que en el campo de la Física estaban precisamente las ideas inspiradoras de los más sutiles pensamientos de Riemann.

Señaló las bases de una reforma pedagógica general que llevaría al alumno, lo antes posible, al conocimiento y práctica de los más universales métodos matemáticos, al manejo rápido de toda clase de fórmulas, a la utilización de miles recursos (numéricos, geométricos, mecánicos, gráficos, etc.) de los más variados grados de precisión, sin auxilio de la memoria, y que dotaría en tiempo oportuno del caudal de conocimientos indispensables, a los unos, para dirigirse bien pertrechados a sus escuelas técnicas, y a los otros, a los que siguen las Matemáticas como ideal, para poder estudiar con fruto desde el principio las obras magistrales.

Las Universidades alemanas, por su parte, secundaron este movimiento reformista y lo ayudaron eficazmente, formando colecciones muy variadas de modelos matemáticos como los de Wiener y Treutlein, en que hay elementos ordinarios y de retroceso en el infinito de las líneas alabeadas, poliedros estrellados y superficies notables, etc., creando cursos de dibujo y estableciendo bibliotecas bien servidas y otros recursos, con el fin de desarmar la hostilidad que se había producido allí, como en otras partes, contra las excesivas abstracciones de la enseñanza universitaria.

Esta actuación se copió luego en otros países, y, a la vez que la dualidad pedagógica, va infiltrando en el común sentir que no debe de haber una profunda separación de concepto entre ciencia especulativa y ciencia práctica, y que es una equivocación lamentable prescindir de la primera mientras se ensalza y favorece a la segunda.

Hoy se ha abierto ya paso en todas partes aquella doble modalidad de la pedagogía matemática; y aunque deje aún algo que desear entre nosotros, por falta absoluta en los alumnos de base general y aun de idea previa alguna experimental en que apoyarla, por uno u otro medio la necesidad tendrá que acabar, al fin, por eliminar esta deficiencia.

Diferimos además de los otros núcleos de civilización, conforme con nuestro secular sentido práctico de la vida, en que mientras en ninguna parte se pregunta ya para qué sirve ninguna teoría matemática, por abstracta que sea, aquí lo seguimos preguntando. Y mientras en todas partes, a la bifurcación de los estudios matemáticos, queda, aunque pequeño, un núcleo importante de jóvenes que sigue la carrera de las Matemáticas puras, aquí ese núcleo se va reduciendo tanto que casi alcanza las proporciones de lo infinitesimal.

Nuestros jóvenes, aun teniendo aptitudes para este orden de estudios, toman otras direcciones, sea por miras económicas, por excesiva modestia, porque aún sientan la atracción irreflexiva de la ciencia práctica o porque sobrevivan en ellos los prejuicios ancestrales de las serias dificultades de lo abstracto.

Y como si algún insignificante servicio pueden prestar estas reflexiones, dirigidas como van a la juventud que acaba de llegar a la Universidad, sería contribuyendo a desbaratar aquellos prejuicios, no creemos esté muy fuera de propósito el terminarlas con algunas en que se vea que a la mayoría de los conceptos matemáticos que más se apartan del común pensar se llega con relativa facilidad, pasando por los sucesivos peldaños de una escala suave, que siempre hay, que conduce a ellos.

Sería temerario pensar hacerlo con todos los conceptos que se hallan en ese caso. Vamos a intentarlo con uno de los más abstractos, sobre el que quizá más se ha fantaseado. Nos referimos al espacio de n dimensiones, y singularmente al de cuatro.

La idea de uno de estos espacios es, desde luego, de origen analítico, y constituye un caso de inducción de menos a más, por simple analogía. Lo cual no quiere decir que no se pueda abordar hoy por la vía de la Geometría sintética.

Espacio de una dimensión es toda sucesión de elementos de cualquier naturaleza a cada uno de los cuales precede inmediatamente uno y sigue otro solamente, v. g., los puntos de una recta,

los rayos de un haz, la sucesión de los números reales. Los de dos dimensiones son sucesiones análogas de espacios de una dimensión, como el plano; y los de tres, toda sucesión parecida de espacios de dos, como el en que nos movemos, y así sucesivamente.

Si tomamos para primeros elementos los puntos ordinarios de la Geometría corriente y admitimos que esas sucesiones tienen la potencia del continuo, es decir, son coordinables con la sucesión de los números reales y que están llenos de un flúido igualmente continuo, vehículo de las manifestaciones de la luz, de la electricidad y de la gravedad, la idea del de tres dimensiones, así formada, se aproxima lo más posible a la realidad de nuestro espacio habitual.

En el de cuatro dimensiones (y las sucesivas generalizaciones puede hacerlas cualquiera) llamaremos sencillamente *recta* al de una, *plano* al de dos, *espacio* al de tres e *hiperespacio* al de cuatro dimensiones. Basta postular para éste que hay algo fuera del espacio de tres dimensiones y que en ese algo existen puntos: idea inimaginable, porque nuestra inteligencia es impotente para imaginar nada fuera del espacio en que vivimos, pero que no es absurda ni lleva a contradicciones lógicas: en cuya hipótesis podría pensarse el espacio de cuatro dimensiones, como el conjunto de los infinitos puntos de las infinitas rectas que pasan por cada punto de nuestro espacio y por uno exterior a él, o que fueran paralelas a una recta exterior a él.

Inventaremos, por último, en cada espacio, y sometidos a sus condiciones, como nosotros al nuestro, seres inteligentes, entes lineales, planos o superiores que tengan, como los objetos que los rodean, determinados movimientos libres o condicionados, no existiendo para cada uno más mundo que el de su espacio, ni pudiendo representarse interiormente nada de lo que cae fuera del mismo. Todo esto no es más, como veis, que un ingenioso artificio para facilitar la inducción por analogía.

Con lo cual, si no podemos imaginar nada en la cuarta dimen-

sión, podremos por lo menos formar uno de esos *conceptos simbólicos*, que diría Spéncer; una asociación más o menos perfecta de cosas y de atributos que sirven a nuestra razón con tal que representen seres posibles, máxime cuando, como ocurre aquí, disponemos de dos clases de símbolos: los algébricos, que expresan relaciones perfectamente inteligibles, y los geométricos.

Las ecuaciones lineales

$a_1 x + a_2 = 0$; $a_1 x + a_2 y + a_3 = 0$, y $a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 = 0$, en que las *aes* son constantes y las *equis*, *ies* y *zedas* variables, representan, respectivamente, un punto en la recta, una recta en el plano y un plano en el espacio de tres dimensiones. Las propiedades analíticas de estas ecuaciones van tan íntimamente ligadas a su sentido geométrico, que hoy no se distinguen en el lenguaje, y otro tanto ocurre a multitud de expresiones de sus coeficientes, v. g., la expresión

$$\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2}}$$

en la recta, las dos análogas en el plano, en ejes rectangulares,

$$\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \quad \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}},$$

y las tres correspondientes en el espacio, también en ejes rectangulares,

$$\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \quad \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \quad \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},$$

son los cosenos de los ángulos que forma con los ejes la recta en que se cuenta la distancia del origen al punto, recta o plano representado por la ecuación correspondiente.

Los sistemas de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} a_1 x + a_2 = 0; \quad a_1 x + a_2 y + a_3 = 0 \\ b_2 x + b_2 y + b_3 = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 = 0 \\ b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4 = 0 \\ c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4 = 0 \end{aligned}$$

representan un punto en la recta, en el plano y en el espacio, respectivamente.

Las fracciones

$$\frac{a_1 b_1}{\sqrt{a_1^2 b_1^2}}, \quad \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)}}, \quad \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}}$$

son los cosenos de los ángulos de dos puntos, dos rectas o dos planos, en cada espacio, entendiéndose por ángulo de dos puntos el nulo o de 180° que forman sus abscisas, según caigan a un mismo lado o a distinto del origen. Y estas expresiones son invariantes en toda transformación rectangular.

$$\text{Las matrices } P = \begin{vmatrix} x & t \\ x_1 & t_1 \end{vmatrix}; \quad Q = \begin{vmatrix} x & y & t \\ x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \end{vmatrix}; \quad R = \begin{vmatrix} x & y & z & t \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t \end{vmatrix}$$

son en coordenadas puntuales homogéneas, distancia en la recta, área de triángulo en el plano, y volumen de tetraedro en el espacio multiplicados por $(t \times t_1 \times \dots)$ y por ciertos números. La P en el plano y la Q en el espacio en coordenadas absolutas son área de triángulo y volumen de tetraedro con un vértice en el origen de coordenadas, por aquellos mismos números. Igualadas a cero son ecuaciones del punto, recta o plano, según su espacio, determinados por uno, dos o tres puntos, respectivamente. Y para valores de x y z , que no las verifican, son proporcionales a las distancias de este punto a los espacios que representan, etc. En coordenadas tangenciales tienen otros significados.

Tanto P como Q y R son invariantes relativos en las transfor-

maciones homográficas, e invariantes absolutos en las transformaciones de módulo 1, como los giros, etc.

En grados superiores al primero hay más variedades de ecuaciones y de funciones en gradaciones parecidas, que, con un mismo tema analítico y el mismo significado geométrico, van pasando de un espacio al siguiente por aditamento de un término más. Bástenos citar las siguientes

$$x^2 - r^2 = 0; x^2 + y^2 - r^2 = 0; x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

que representan lugares geométricos de puntos equidistantes del origen, respectivamente, en la recta, en el plano o en el espacio. Y las

$$x x' + y y' - r^2 = 0; x x' + y y' + z z' - r^2 = 0$$

que si $x' y'$ o $x' y' z'$ son puntos del círculo o esfera anteriores, representan sus tangentes o planos tangentes; es decir, rectas o planos equidistantes también del origen, siendo, por tanto, aquéllas y éstas invariantes en toda transformación rectangular en que no se cambie de origen, etc., etc.

Por escaso espíritu matemático que se tenga, se comprende la tentación de seguir añadiendo términos a las ecuaciones y a las expresiones anteriores y a otras muchas análogas, y denominar del mismo modo los resultados en espacios hipotéticos de cada vez mayor número de dimensiones. Así nacieron estos conceptos y se lograron inmediatamente sus definiciones, v. g.:

Punto.—Dadas n variables $x, y, z, t, u, v, \dots$, todo grupo de valores particulares (reales o complejos) de estas variables se llama *elemento* o *punto* de un espacio de n dimensiones. Esos valores son las coordenadas. Se pueden considerar coordenadas homogéneas, y entonces entra una más en el grupo.

Hiperplano.—Toda ecuación lineal entre las n coordenadas de un punto variable define lo que se llama un *hiperplano* en el espacio de n dimensiones, el cual, en el de cuatro, es un espacio de tres.

Ángulo de hiperplanos.—Se llama coseno del ángulo de dos hiperplanos la expresión

$$[1] \quad \cos \omega = \frac{\sum a_i b_i}{\sqrt{\sum a_i^2 \sum b_i^2}}$$

en que i toma los valores 1, 2... n .

Y de aquí como condición de perpendicularidad que

$$\sum a_i b_i = 0,$$

y de paralelismo que

$$\sum a_i b_i = \sqrt{\sum a_i^2 \sum b_i^2}$$

que se transforma como de costumbre en proporcionalidad de los coeficientes de las variables.

Distancia.—Distancia entre dos puntos de coordenadas x, y, z, t, v , y x', y', z', t', u', v' es el valor del siguiente radical:

$$[2] \quad d = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 + \dots + (v - v')^2}$$

siendo invariantes tanto d como $\cos \omega$, en toda transformación rectangular.

Hipersuperficie.—Hipersuperficie algébrica del orden s , en un espacio de n dimensiones, es el conjunto de puntos de éste que satisfacen a una ecuación racional y entera de grado s de las coordenadas del punto. Si s es 2, toma el nombre de hipercuádrica.

Hiperesfera es aquella hipersuperficie cuya ecuación es de la forma

$$\sum x^2 + \sum a x - r^2 = 0$$

en que pueden faltar los términos de primer grado. Y del mismo modo se definen todos los demás términos geométricos.

Como se ve, los espacios así introducidos y los conceptos en ellos

definidos no son más que entes analíticos o numéricos con denominaciones geométricas.

La importancia de esta nomenclatura salta a la vista con sólo observar que las propiedades analíticas van unidas a las geométricas del ente que les da nombre, v. g., la invariancia de las expresiones [1] y [2] en Analítica ordinaria se hace evidente en cuanto se piensa que representan un coseno y una distancia en ejes rectangulares, y en que ni aquél ni ésta tienen por qué variar al referirlos a otros ejes rectangulares. Y lo mismo puede decirse de los que expresan un área determinada o cualquier propiedad independiente de los ejes. En esas mismas fórmulas generalizadas, el nombre sirvió desde un principio para recordar por analogía sus propiedades analíticas. Pero requeríase una demostración de esas propiedades, puesto que el ente geométrico era sólo una ficción para ayudar a la memoria. Estas demostraciones siguieron de ordinario el modelo de inducción de Bernoulli: si tal teorema es cierto en todos los espacios, hasta el de $(n - 1)$ dimensiones, lo es también en el de n .

Así, todas las propiedades ciertas en los espacios de una, dos y tres dimensiones quedan generalizadas a una especie cualquiera. Las mismas verdades que necesitó postular la existencia de los primeros se postulan para los siguientes, con lo cual cada espacio supone el siguiente. Pero en la mayoría de los casos esas demostraciones requirieron que se tradujeran bien los detalles de las miles dependencias nuevas en que aquellos entes podían encontrarse, no sospechadas antes, y hasta que se admitieran otros postulados. Este es el modo cómo se ensanchó el campo de la investigación en unas proporciones verdaderamente inconcebibles.

Importa, pues, tener en cuenta, al hacer aquellas generalizaciones, multitud de circunstancias que introduce cada dimensión que se añade. En todas aquellas cuestiones que afectan a la métrica, consideraría el ser lineal, en el punto, una longitud infinitesimal; el superficial, en la recta, una latitud, y nosotros, en el plano, un grue-

so infinitesimales. Del mismo modo un ser superior vería nuestro espacio con una profundidad infinitesimal en el sentido de la cuarta dimensión.

El primero no piensa en nada perpendicular. El segundo ve una sola perpendicular a una recta en un punto, de las cuales vemos nosotros infinitas fuera de su plano. Esto nos conduce a pensar que, aunque nosotros no vemos más que una sola perpendicular a cada plano en un punto, pueda un ser que piense en cuatro dimensiones ver infinitas, si las sitúa fuera del espacio de tres dimensiones.

El ser plano no concibe una perpendicular a todos los rayos de un haz de su plano, porque esa perpendicular cae fuera del mismo. Nosotros no imaginamos una perpendicular a todas las rectas y planos de una radiación de nuestro universo; pero estamos obligados a admitirla, situándola fuera de él. Una recta así, igualmente inclinada respecto de los elementos de una radiación propia, no es ningún contrasentido desde que todos esos elementos no se alzan nada unos sobre los otros, en el sentido de la cuarta dimensión.

Y así como un rectángulo queda fijo en un plano en cuanto se fija un lado—pero puede girar en el espacio de tres dimensiones alrededor de él—, así un cubo queda fijo en el espacio de tres dimensiones en cuanto se fija una de sus caras, pero puede girar alrededor de ella en el hiperespacio, etc., etc.

Aunque esta gimnasia intelectual no hiciera otra cosa que embarazar a nuestra razón del hábito de tomar como axiomas absolutos muchas verdades que no lo son, tendría en Matemáticas una importancia capital. Pues en aquellas abstracciones en que no se quiere queden más que conceptos bien definidos y los eternos principios del razonamiento, estorban todas esas verdades que, presentes constantemente a nuestro espíritu y familiarizados con ellas desde la infancia, llegamos a tomar inconscientemente como axiomas.

Sentado esto, no es absurdo referir los puntos de un hiperespacio a un sistema de cuatro ejes cuadrirrectangulares. Y entonces,

cuatro ecuaciones lineales con cuatro variables x, y, z, t , $A=0$, $B=0$, $C=0$, $D=0$, cuyo determinante principal sea de cuarto grado, determinan un punto del hiperespacio. Tres ecuaciones lineales con cuatro variables $A=0$, $B=0$, $C=0$, cuyo determinante principal sea de tercer grado, determinan una recta. En efecto: llamando $-\Delta_1, \Delta_2, -\Delta_3, \Delta_4$, a las matrices resultantes de quitar en la del sistema los coeficientes de las x , de las y , de las z o de las t , y con acentos las mismas en que se han reemplazado los de t por los términos independientes, las expresiones de las tres primeras en función de t son:

$$\frac{x}{-\Delta_1} = \frac{t - \frac{\Delta'_1}{\Delta_1}}{\Delta_4}; \quad \frac{y}{\Delta_2} = \frac{t - \frac{\Delta'_2}{\Delta_2}}{\Delta_4}; \quad \frac{z}{-\Delta_3} = \frac{t - \frac{\Delta'_3}{\Delta_3}}{\Delta_4}$$

Sustituyendo en ellas las variables por las coordenadas x', y', z', t' de un punto del lugar, y restándolas de las mismas ordenadamente, se tiene:

$$\frac{x - x'}{-\Delta_1} = \frac{y - y'}{\Delta_2} = \frac{z - z'}{-\Delta_3} = \frac{t - t'}{\Delta_4}$$

que es una propiedad exclusiva de la recta, la de que las proyecciones ortogonales de uno de sus segmentos sobre cualquier número de ejes son proporcionales a sus cosenos directores; y éstos son a su vez proporcionales a $-\Delta_1, \Delta_2, -\Delta_3, \Delta_4$. Así, dos rectas distintas cuyos determinantes relativos a las mismas variables son proporcionales, son paralelas.

En términos geométricos puede decirse que tres hiperplanos de un espacio de cuatro dimensiones tienen en general una recta común.

Dos ecuaciones lineales con cuatro variables cuyo determinante principal sea de segundo grado determinan un plano.

Pues esas ecuaciones con otra $K=0$, de parámetros disponibles, representan una recta por cada grupo de parámetros que tomemos;

y estas rectas, teniendo cada dos un punto común, sin pasar todas por un mismo punto, están todas en un plano.

Dos espacios de tres dimensiones en uno de cuatro se cortan, pues, siempre según un plano. Análogamente: Dos planos distintos ($A = O$, $B = O$,) y ($C = O$, $D = O$,) tienen en general un solo punto común: el que dan sus cuatro ecuaciones. Si una ecuación de cada plano son equivalentes, tienen una recta común. También tienen una recta común un hiperplano y un plano no situado en él.

En general, n ecuaciones lineales con n variables y determinante no nulo en un espacio de n dimensiones, dan un punto; $(n - 1)$, una recta; $(n - 2)$, un plano; $(n - 3)$, un espacio de tres, y $(n - k)$, un espacio subalterno de k dimensiones.

Y para que en un espacio de n , dos subalternos de p y q dimensiones se corten, es condición precisa que sea $p + q \geq n$; y el lugar entonces, en que se cortarán será a lo menos un espacio de s dimensiones, si $p + q = n - s$.

Las cuestiones de paralelismo, perpendicularidad, distancias, ángulos, etc., constituyen la métrica de los hiperespacios, y no caben ya en estas generalidades que vamos exponiendo. Sólo diremos que si en dos espacios subalternos de dimensiones p y q , siendo $p < q$, hay s hiperplanos independientes en el primero, paralelos a otros s del segundo, dichos espacios subalternos tienen un paralelismo del orden s . Y si $s = p$, entonces se dicen simplemente paralelos.

Por eso, dos planos en el espacio de cuatro dimensiones necesitan tener los coeficientes de las mismas variables en sus respectivas primeras ecuaciones proporcionales, y también en las otras dos, para ser paralelos en general. Si sólo se verifica la primera proporcionalidad, tienen un paralelismo de primer orden.

De perpendicularidad traeremos aquí sólo la noción de proyección para servirnos de ella en los poliedros.

Proyección de un punto $Q (x_1, y_1, z_1, t_1)$ sobre una recta, plano, espacio, etc., es un punto $P (x', y', z', t')$ de estas variedades, cuya

distancia a aquél sea un mínimo. Así la proyección de Q sobre un hiperplano $A=O$ del espacio de cuatro dimensiones será el punto P cuyas coordenadas satisfagan a las dos siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} [1] \quad & (x_1 - x')^2 + (y_1 - y')^2 + (z_1 - z')^2 + (t_1 - t')^2 = \text{mínimo.} \\ [2] \quad & A' = a x' + b y' + c z' + d t' + e = 0. \end{aligned}$$

Las igualaciones a cero de sus diferenciales expresarán la condición de mínimo y la de que el incremento diferencial no saque al punto P del hiperplano $A=O$, y se tendrá:

$$\begin{aligned} (x_1 - x') dx' + (y_1 - y') dy' + (z_1 - z') dz' + (t_1 - t') dt' &= 0 \\ a dx' + b dy' + c dz' + d dt' &= 0. \end{aligned}$$

Y como estas ecuaciones son idénticas en dx' , dy' , dz' , dt' , se tendrá:

$$[3] \quad \frac{x_1 - x'}{a} = \frac{y_1 - y'}{b} = \frac{z_1 - z'}{c} = \frac{t_1 - t'}{d}$$

Y estas tres ecuaciones con la [2] determinan las coordenadas x' , y' , z' , t' del punto P.

Mas si se deja este punto fijo y se hacen variables x_1 , y_1 , z_1 , t_1 , las ecuaciones [3] son evidentemente las de la recta perpendicular al hiperplano $A=O$, en el punto P de éste.

Si se tratara de proyección sobre un plano ($A=O$, $B=O$), con idénticas consideraciones saldrían dos series de razones iguales, análogas a las [3]; una con los coeficientes de $A=O$, y otra con los de $B=O$; y llamando λ y μ a las razones de proporcionalidad, despejando en cada serie los mismos numeradores y sumándolos se tiene:

$$\begin{aligned} x_1 - x' &= \lambda a + \mu a_1 \\ y_1 - y' &= \lambda b + \mu b_1 \\ z_1 - z' &= \lambda c + \mu c_1 \\ t_1 - t' &= \lambda d + \mu d_1 \end{aligned}$$

Eliminando entre éstas, λ y μ , salen dos ecuaciones en x' , y' , z' , t' , que, con las dos del plano dado en las mismas variables, permiten

hallar éstas, y, por tanto, el punto P pedido. Análogamente se halla la proyección sobre una recta.

Sigue siendo, como se ve, puramente analítico el espíritu que informa estos razonamientos; pero la facilidad y evidencia que en ellos se observa la deben al concepto geométrico que encierran.

Por eso ha habido interés en llevar ese concepto bajo mil formas (curvas, superficies, tangentes, planos tangentes, polos y polares, transformaciones proyectivas, etc.) a todos los puntos del análisis. Al mismo tiempo se ha dejado influenciar la Geometría por las ideas del hiperespacio, y ha llegado, entre otras cosas, a pensar en poliedros de cuatro y más dimensiones, y hasta logrado construir figuras que representan las proyecciones de esos cuerpos en nuestro espacio de tres dimensiones.

Hay una colección de Brill que tiene en yeso las proyecciones de los seis poliedroides regulares de cuatro dimensiones, y hay otras, construídas con hilos, de las que posee una la Facultad de Ciencias de Zaragoza.

Por poliedroide de cuatro dimensiones entenderemos todo recinto de dicho espacio, limitado en todos sentidos por poliedros ordinarios o *celdas*. Cada dos contiguas de estas celdas están en hiperplanos distintos y tienen una cara común. Del mismo modo que el poliedro está limitado por polígonos, de los cuales cada dos contiguos están en planos distintos y tienen un lado común, y, como el polígono, lo está por segmentos rectilíneos, de los cuales cada dos contiguos están en rectas distintas y tienen un punto común.

Y esta escala: punto, segmento, polígono, poliedro y poliedroide, es por donde hay que subir para formar los conceptos simbólicos de esas figuras.

Son, pues, elementos del poliedroide: los vértices, las aristas, las caras y las celdas, que tienen respectivamente, cero, una, dos y tres dimensiones. Estos elementos forman luego entre sí los ángulos rec-

tilíneos, los diedros, los ángulos poliedros y los anguloides tetradimensionales del poliedroide.

Los poliedroides toman su nombre del número de celdas.

Cuando todos sus elementos de la misma naturaleza son iguales se dicen regulares, y tienen entonces un centro que equidista de todos sus vértices, de todas sus aristas, de todas sus caras y de todas sus celdas.

Según Stringhan, las gradaciones posibles para ir del segmento al poliedroide son tres: la tetraédrica, la cúbica y la octaédrica.

Por la primera se va del segmento al triángulo equilátero, de éste al tetraedro regular y de éste al *pentaedroide* levantando la perpendicular en su centro a cada figura de la serie en el espacio inmediato superior, tomando en ella un punto que diste la arista de cada vértice, y uniéndolo con éstos.

Por la segunda se pasa del segmento al cuadrado, de éste al cubo, y de éste al *octaedroide*, haciendo sufrir una traslación, de magnitud igual a la arista, a cada figura de éstas, en sentido normal a ella, y en el espacio inmediato superior.

Y por la tercera, se va del segmento al cuadrado, de éste al octaedro regular, y de éste al *hexadecaedroide*, trazando la perpendicular en su centro a cada figura de la serie en el espacio inmediato superior, tomando en ella dos puntos simétricos respecto a la figura, cuyas distancias a los vértices sean la arista, y uniéndolos con éstos. Y como estas sucesiones son prolongables, hay en todo espacio, por lo menos, esas tres clases de poliedroides.

Puede seguirse otro plan, que consiste en formar con los cinco poliedros regulares ordinarios, anguloides tetradimensionales regulares alrededor de cada uno de sus vértices. Entre los seis posibles obtenidos, figuran los tres poliedroides anteriores y otros tres nuevos.

Si designamos con $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, \dots, e_{n-1}$ los números de elementos de dimensiones cero, una, dos, tres, etc., que tiene un poliedroide de n dimensiones, la fórmula que liga a todos esos números, según

Stringham, es bien sencilla y bien simétrica, pues se reduce a

$$1 - e_0 + e_1 - e_2 + e_3 - \dots (-1)^{n-1} = 0,$$

La cual se convierte en:

$$1 - e_0 + e_1 - 1 = 0, \text{ o sea } e_0 = e_1$$

en los polígonos ordinarios;

$$1 - e_0 + e_1 - e_2 + 1 = 0, \text{ o sea } e_0 + e_2 = e_1 + 2$$

que es la fórmula de Euler relativa a los poliedros eulerianos;

$$1 - e_0 + e_1 - e_2 + e_3 - 1 = 0, \text{ o sea } e_0 + e_2 = e_1 + e_3;$$

la cual nos dice que en los poliedroides de cuatro dimensiones es igual la suma de los números de vértices y caras a la de los aristas y celdas. Y así sucesivamente.

Toda generalización que llega a las más sutiles regiones de lo abstracto hace tomar, como dijimos y vemos ahora, a las fórmulas y a las ecuaciones, unas estructuras facilísimas, por las notables simetrías que pone al descubierto. ¿Quién había de sospechar que la antisimétrica ecuación de Euler relativa a los poliedros era un caso particular de ecuación tan sencilla como la de Stringham?

Para situar estos poliedroides en el espacio de cuatro dimensiones y obtener sus proyecciones en nuestro espacio, úsase con preferencia al método analítico.

El pentaedroide, por ejemplo, se ha traído a nuestra mente suponiendo levantada al tetraedro regular $A B C D$ de arista a una perpendicular en su centro, situada en el hiperespacio; tomando sobre ella un punto E , tal que $EA = EB = EC = ED = a$, y uniéndolo con A, B, C, D .

Tiene, pues, cinco vértices, 10 aristas, 10 caras triangulares y cinco celdas tetraédricas, a lo cual debe su nombre.

Para manipular en ejes tetrarrectangulares del hiperespacio, que

ni imaginar sabemos, tomemos un cubo. Sea su centro O el origen de coordenadas, y sus ejes cuaternarios los de las x , las y y las z ; baste saber respecto del eje de las t , que sigue una dirección normal a los otros tres en el hiperespacio.

Situemos el tetraedro de modo que su vértice A caiga en el del cubo de coordenadas positivas; y los otros tres, en los extremos de las diagonales de caras del cubo que parten de A. Las coordenadas t de estos cuatro puntos son nulas por estar en un hiperplano coordenado.

Siendo a la arista del tetraedro, la del cubo será $= \frac{a}{\sqrt{2}}$ y las x , y , z de los vértices del tetraedro, la mitad de ese número en valor absoluto, con los signos correspondientes. De las coordenadas de E, son nulas las x , y , z , por estar dicho punto en el cuarto eje coordenado; su coordenada t se saca de la expresión de su distancia a A, que queda reducida (pág. 41) a

$$a^2 = t^2 + \frac{3a^2}{8};$$

y, por tanto,

$$t = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Las coordenadas de los puntos A, B, C, D determinan la ecuación del hiperplano en que está el tetraedro; y con esa ecuación y las coordenadas de E, por el método explicado antes, se halla la proyección E' de dicho punto, que con las A, B, C, D son los vértices de la proyección del pentaedroide en nuestro espacio. Después pueden obtenerse sin dificultad las proyecciones de ABCDE' sobre las caras del cubo.

No habiéndonos propuesto más que hacer ver la posibilidad de obtener estas proyecciones, no entramos en el análisis de los otros poliedroides, ni en el examen de las colocaciones del pentaedroide para obtener sus mejores proyecciones.

Sólo nos permitimos llamar la atención sobre los muchos e ingeniosos recursos que tienen las Matemáticas para abordar cuestiones que no sólo no están al alcance de la mano, sino que están fuera de los dominios de nuestra imaginación.

Y, aunque no hemos hecho más que esbozar unas nociones del hiperespacio, habráse podido notar el ancho campo que tal idea abre a la especulación matemática y la multitud de temas que pone al descubierto en qué ejercitar la sagacidad de nuestros jóvenes aficionados a estas disciplinas.

Pues con ser eso tanto, aun contiene más tan peregrino concepto.

Basta que en vez de los puntos ordinarios de la geometría tomemos rectas por elementos, las cuales, teniendo cuatro parámetros en sus ecuaciones, se determinan por cuatro números o coordenadas, para que el propio espacio en que nos movemos se haya convertido en un espacio de cuatro dimensiones.

Este espacio no es lineal, sino cuadrático. Sus espacios subalternos de una, dos o tres dimensiones, son respectivamente las superficies regladas, las congruencias y los complejos de rectas, según que las coordenadas de la generatriz sean funciones de uno, de dos o de tres de los parámetros arbitrarios.

Usanse además, entre otras, como coordenadas de este espacio las de Plücker, que son las seis matrices cuadradas que da la rectangular: $\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ x' & y' & z' & t' \end{vmatrix}$ de las coordenadas homogéneas de los puntos A y B.

Estas matrices no varían cuando A o B recorren su recta; son proporcionales a los momentos de AB respecto de las seis aristas del tetraedro de referencia, y dan un suma algebraica de productos de cada dos complementarias, idénticamente nula. Por esta identidad son cinco las independientes; y sus razones a una de ellas quedan en cuatro como antes.

Por transformación lineal logró Klein que esa suma de produc-

tos se transformara en $\Sigma x_i^2 = 0$; que es la ecuación de una cuádrica en coordenadas homogéneas en un espacio de cinco dimensiones; correspondiéndose así biunívocamente los puntos de esa cuádrica y sus propiedades, con las rectas de nuestro espacio y las suyas, etc.

Basta, asimismo, que en vez de puntos tomemos esferas, para que también nuestro espacio aparezca de cuatro dimensiones. Todas las esferas de radio fijo r , cuyos centros son todos los puntos del espacio habitual, formarán un hiperplano o variedad de esferas de tres dimensiones. Y haciendo ahora crecer el radio r desde cero a infinito en todas ellas, se tendrá la variedad de esferas en la cuarta dimensión, las cuales serán todas las del universo habitual.

Si tomamos la ecuación corriente de la esfera bajo la forma

$$a(x^2 + y^2 + z^2) - 2lx - 2my - 2nz + p = 0,$$

serán coordenadas de su centro, como sabemos, los números

$$\frac{l}{a}, \quad \frac{m}{a}, \quad \frac{n}{a},$$

y su radio $\frac{r}{a}$ vendrá dado por: $r^2 = l^2 + m^2 + n^2 - ap$.

Pueden, pues tomarse como coordenadas homogéneas de una esfera los cinco números l, m, n, p, a .

Estas, como las que dan cada esfera en función de los primeros miembros de las ecuaciones de cinco esferas fundamentales, se dicen coordenadas *pentaesféricas*, y sirven para establecer la geometría elemental del espacio de esferas, cuyo grupo característico es el de las transformaciones que dejan invariante la ecuación

$$l^2 + m^2 + n^2 - ap = 0.$$

Hay otro modo de considerar un espacio de esferas, que consiste en tomar también el radio como variable, y con las seis coordena-

das homogéneas l, m, n, p, r, a examinar todas las transformaciones que dejan invariante

$$l^2 + m^2 + n^2 - ap - r^2 = 0.$$

Tal es la Geometría de Sophus Lie, o de las transformaciones de contacto.

Con sólo recursos de la Geometría sintética logra el Sr. Rey Pastor pasar del plano reglado, con una cónica invariante, al espacio con una cuádrica alabeada, estableciendo correspondencia biunívoca entre las rectas del plano y los planos tangentes a la cuádrica, para pasar luego al espacio de cuatro dimensiones, y de aquí a la Geometría de Lis (1).

Y para terminar: las ecuaciones que ligan a las seis coordenadas homogéneas de la recta, en el espacio reglado, y las que ligan a las seis de la esfera en el espacio de las esferas, establecen multitud de motivos de comparación interesantes entre las geometrías de uno y otro espacio, que se prestan a la investigación de verdades nuevas.

Si se toman para elementos de un espacio cuádricas, el nuestro aparecería como de nueve dimensiones, puesto que la cuádrica tiene nueve parámetros, y así sucesivamente. Por consiguiente, las interpretaciones de las ecuaciones con un número de variables son muchas y muy variadas; y el horizonte que desde estas generalizaciones se descubre es infinito.

No es, pues, imposible el prepararse bien en una de esas ramas de la Geometría para producir ciencia española. Si es cierto que hace falta para ello buena inteligencia, no lo es menos que basta muchas veces, junto a alguna perspicacia, una gran voluntad y una gran asiduidad en el trabajo para lograrlo.

No puede negarse tampoco que en lo que va de siglo hemos adelantado en todos los órdenes, incluso en las ciencias matemáticas.

Prueba esto que aunque nuestras predisposiciones naturales y

(1) R. Pastor: *Fundamentos de la Geom. Proy. Superior*, págs. 39 y 40.

hereditarias subsisten aún, no poco se van corrigiendo; y, sobre todo, es forzoso convencerse de que no tienen la irremediabilidad fatal que pudiera creerse cuando se examina su tenaz persistencia a través de la historia.

De que aun quedan resabios de otras épocas, naturalmente con el marchamo de los tiempos modernos, son señales multitud de pequenezes, que cada una apenas si merece citarse, pero que todas juntas tienen un valor no despreciable. Y cuenta que si algunas subsisten es por el tesón de las medianías que las lograron y por la indolencia de los demás.

He aquí algunas que han acudido a los puntos de la pluma al correr de ésta. La vida efímera y subsiguiente fracaso de siete u ocho revistas de Matemática pura, que desde 1890, y sucesivamente, personas beneméritas han tratado de aclimatar; en contraste con 14 revistas francesas y 18 alemanas que anuncia una sola librería.

La voluntariedad de las reválidas, que ha alejado casi totalmente a nuestra juventud de grados y licenciaturas.

La ficción que supone, por imposibilidad metafísica, los miles de exámenes terminados en menos de un mes, por un solo tribunal.

La consiguiente arribada a la Universidad de contingentes excesivos, con preparación deficientísima o nula.

Los vicios de constitución de altas entidades directoras, que han permitido a veces se pueda llegar a ellas por meras relaciones políticas o apariencias doctorales, pero sin base para encauzar los graves problemas que a la enseñanza atañen.

De aquí el tomar los juzgadores de oposiciones del mismo plano en que están los que van a ser juzgados.

Y de esto, a su vez, la persistencia en textos y programas de cosas que el progreso ha mandado retirar, y la falta de otras de evidente utilidad, etc.

Cierto que nuestra Universidad, aunque muy mejorada, no ha alcanzado todavía el grado de esplendor relativo con que otras ve-

ces se ufaná; pero es que con frecuencia se olvida que la componen el cuerpo docente y el elemento discente; y que nada se ha hecho aún para que éste llegue con el bagaje científico que el presente ha evidenciado ser indispensable, ni para que actúe eficazmente en la obra universitaria.

A pesar de todo esto, quien ha asistido al resurgir científico español durante los últimos treinta años, y ha visto paso a paso el caminar sereno y siempre en firme de nuestras avanzadas científicas, no puede menos de tener una gran fe en los altos destinos de España.

Los anhelos de gloria son un estímulo noble para la investigación general y la matemática en particular; pero si además mueve a nuestra juventud al amor a la Patria; si siente calor en el rostro cada vez que un extranjero nos eche en cara que no tenemos nombres en el santoral de la ciencia; si llega al convencimiento de que el pasear por el mundo un apellido nuestro unido a un descubrimiento científico, puede hacer hoy por el prestigio español y por el respeto a nuestra nación tanto como los cañones y demás alardes de fuerza, y estos sentimientos le prestan abnegación, y mantienen la tensión requerida para dar vida a alguna idea nueva, pronto, entonces, figurará España dignamente al lado de las más cultas naciones en la noble empresa de arrancar sus secretos y sus leyes a la pródiga Naturaleza.