REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

Origen y evolución de la integración vectorial

DISCURSO

LEIDO EN EL ACTO DE SU RECEPCION

POR EL

EXCMO. SR. D. PEDRO JIMENEZ GUERRA

Y

CONTESTACION

DEL

EXCMO. SR. D. BALTASAR
RODRIGUEZ-SALINAS PALERO

EL DIA 6 DE FEBRERO DE 1991

MADRID
DOMICILIO DE LA ACADEMIA:
VALVERDE, 22 — TELEFONO 521 25 29
1991

ORIGEN Y EVOLUCION DE LA INTEGRACION VECTORIAL

POR

PEDRO JIMENEZ GUERRA

Excmo. Sr. Presidente

Excmos. Srs. Académicos

Señoras y Señores

Deseo que mis primeras palabras sean de profundo y sincero agradecimiento hacia esta ilustre Corporación , por el alto e inmerecido honor que me ha otorgado al elegirme para formar parte de ella. Justicia es que reconozca la desproporción existente entre este honor y la pequeñez de mis posibles méritos, lo que me obliga, aún más si cabe, a corresponder a esta elección con una mayor entrega y dedicación a la Academia. No he de negar que me siento abrumado por la gran responsabilidad que esta distinción conlleva y que aceptó con la confianza puesta en la Divina Providencia, sabiendo que contaré siempre con el asesoramiento y la dirección inestimables, de los ilustres miembros de esta Real Academia, entre los que se encuentran varios de mis maestros, algunos muy próximos a mi como el Profesor D. Baltasar Rodríguez-Salinas, quien me encaminó por los senderos de la investigación y la docencia , y ha guiado mis pasos durante años, a lo largo de mi andadura científica. A todos ellos, mi agradecimiento lleno de admiración y respetuoso cariño.

La medalla que tan generosamente se me concede ostentar, posee para mi un significado especial, ya que en ella vengo a suceder a D. Enrique Linés Escardó, que fué su primer titular, y con quien me une una entrañable amistad.

El Profesor Linés nace en Logroño el 8 de Noviembrede 1.914, heredando de su padre D.Enrique Linés Nogueras , el entusiasmo por las Matemáticas. Comienza en Barcelona los estudios de Ciencias Exactas, licenciándose posteriormente en Madrid, donde a mediados de 1.940 presenta su tesis doctoral sobre "El método de la función arbitraria en el Cálculo de Probabilidades",apadrinada por D. Tomás Rodríguez-Bachiller. A partir de esta época y hasta el año 1.945, desempeña la secretaría de la Real Sociedad Matemática Española, de la que posteriormente sería presidente durante los años 1.970-1.976. Después de ejercer como profesor docente-huesped en la Universidad de Jena (Alemania), donde amplía estudios, es nombrado, en Julio de 1.945, Catedrático de Análisis Matemático 1° y 2° de la Universidad de Zaragoza, pasando a ocupar en Enero de 1.946 la Cátedra de Análisis Matemático y Teoría de Números de la Universidad de Barcelona, en la que profesó durante casi veinticinco años.

Por su ponderación, sensatez y discrecreción, fué llamado para desempeñar varios cargos relevantes, destacando los de Secretario General de la Universidad de Barcelona, Director del Departamento de Teoría de Funciones de la Facultad de Matemáticas de dicha universidad, Presidente de la Comisión Local Fullbright de Barcelona, miembro de la Comisión Promotora de la Universidad Autónoma de esta ciudad y Jefe de la Sección de Matemática Aplicada del

Seminario Matemático de Barcelona, adscrito al Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Fué uno de los fundadores (en el año 1.948) de la revista "Collectanea Mathematica", publicada por el citado seminario, siendo desde su fundación miembro de su comité de redacción y director de la misma durante los años 1.969 y 1.970.

En abril de 1.970, obtiene por concurso de traslado, la Cátedra de Análisis Matemático II de la Universidad Complutense de Madrid, integrándose en el entonces denominado Departamento de Teoría de Funciones, donde a partir de Octubre de 1.973, tuve la oportunidad de tratar asiduamente al Profesor Enrique Linés, lo que poco a poco fué dando paso a una sincera amistad que se acrecentó grandemente a partir de mi incorporación, en Diciembre de 1.980, al Departamento de Matemáticas Fundamentales de la Universidad Nacional de Educación a Distancia, que desde sus orígenes había dirigido el Profesor Linés y en cuya dirección tuve el honor de sucederle tras su jubilación.

En Enero de 1.981, D. Enrique Linés es nombrado Catedrático de Análisis Matemático II de la U.N.E.D. y desde este momento hasta su fallecimiento tuve el inmenso placer de tratarle habitualmente, de compartir con él tareas e ilusiones, de conversar durante largas horas disfrutando de sus comentarios y recuerdos, de su fino sentido del humor, de su elegancia y de la profundidad de sus pensamientos.

Además de su labor investigadora, en la que destacan entre otros, trabajos sobre la "medida media en un conjunto lineal no acotado","la frecuencia de los puntos de una red que están sobre una franja interior a otra", "problemas de coincidencias", "funcionales analíticos", "los productos funcionales relativisticamente invariantes", etc., quisiera destacar su dilatada y fructífera labor docente, fruto de la cual son varios discípulos, algunos de ellos actuales catedráticos de universidad, y excelentes tratados de Análisis Matemático, que siguen siendo, hoy en dia, libros de texto en la U.N.E.D. y en otras universidades. Todo ello pone de manifiesto la gran capacidad de trabajo que le acompañó hasta el final de su vida y que es una de las muchas cualidades que adornaron a este hombre, entusiasmado por la belleza de las Matemáticas, por Fermat y la Teoría de los Números, en el que siempre pude apreciar una fe católica firme y reflexiva. El tiempo destila los recuerdos y en los nuestros, él permanecerá siempre.

En Septiembre de 1.988, D. Enrique Linés debía haber presidido el tribunal calificador de una tesis doctoral, que continuaba el estudio sobre cuestiones referentes a integración vectorial, desarrollado en dos tesis anteriores, realizadas también bajo nuestra dirección, y cuyos tribunales calificadores presidió. Por ello, aparte de por su interés intrínseco, hemos elegido la Integración Vectorial como tema para esta disertación, lo que nos permitirá tratar acerca de cuestiones, que en su día, comentamos con el Profesor Linés Escardó.

El desarrollo experimentado por el Análisis Funcional a comienzos de este siglo, y más en particular por la Teoría de los Espacios de Banach, tuvo una influencia decisiva en el estudio de las medidas vectoriales, que a su vez ha redundado en un mayor conocimiento de estos espacios, ya que ciertas cuestiones como la teoría de isomorfismos entre espacios de Banach, la teoría de bases, el concepto de convexidad uniforme y el interés por las compacidades débil y débil-*, así como otros aspectos de la estructura, tanto topológica como geométrica, de los espacios de Banach, deben su origen al estudio de las medidas vectoriales, existiendo en todo caso una estrecha relación entre las propiedades de los espacios de Banach y las de las medidas en ellos valoradas.

Gran parte del trabajo desarrollado en espacios de Banach durante los años treinta, se debió al interés por extender resultados conocidos para funciones escalares, al caso de funciones con valores en estos espacios, ocurriendo un fenómeno similar en el campo de la teoría de la medida, extendiéndose el concepto de integral al caso de que las funciones que se integran, las medidas respecto a las cuales se integra o ambas, sean vectoriales. Dentro de este proceso evolutivo, un primer paso lo constituye la extensión de la integral de Riemann para funciones de variable real con valores en espacios de Banach, establecida por L. M. Graves en 1.927, mediante un procedimiento muy sencillo que recuerda íntegramente al de la integración de Riemann de funciones escalares. También resulta conceptualmente sencilla la extensión de la integral de Riemann-Stieljes al caso vectorial realizada por G. Vanderlijn en 1.941.

En cuanto a la extensión de la integral de Lebesgue al caso de funciones valoradas en espacios de Banach, encontramos un primer antecedente en un trabajo de T.H. Hildebrant del año 1.927, en el que se pone de manifiesto la posibilidad de extender al caso de funciones valoradas en espacios de Banach, el método empleado por F. Riesz en 1.919 para construir la integral de Lebesgue. No obstante, la primera extensión propiamente dicha fué desarrollada en el año 1.933 por S. Bochner, de quien recibe el nombre, encontrándose también en un trabajo de N. Dunford de 1.935 y en otro de N. Dunford y J.T. Schwartz de 1.938, lo que ha motivado que en ocasiones se la denomine también como "integral de Dunford-Schwartz" o "primera integral de Dunford". Esta integral es una abstracción de la integral de Lebesgue, hasta tal punto que algunas veces se ha llegado a insinuar que se puede obtener a partir de la de Lebesgue con sólo cambiar el signo de valor absoluto por el de norma, lo que constituye un tremendo error, como prueba, por ejemplo, el fracaso del teorema clásico de Radon-Nikodym para medidas con valores en espacios de Banach, que tiene su base en algunos de los resultados más atrayentes de las teorías de la medida vectorial y de los espacios de Banach.

Por otra parte, hay que señalar, que no se puede conseguir una integral tipo Bochner para funciones que sean sólamente débilmente medibles, ni para aquellas funciones f tales que la función $\|f\|$ no sea integrable, lo que conduce de manera natural a una nueva integral, denominada habitualmente "integral de Pettis", en la que se integran funciones débilmente medibles, lógicamente, mediante el uso de elementos del espacio dual. Esta integral fué introducida por B.J. Pettis en 1.938, existiendo un precedente de la misma en la integral estudiada por N. Dunford en el año 1.936 por lo que a veces recibe el nombre de "segunda integral de Dunford". La integral de Pettis ha tenido un desarrollo mucho más lento que la de Bochner, habiéndose asistido en estos últimos años a una profundización en su conocimiento, lo que ha puesto de manifiesto la potencia y utilidad de sus métodos.

En los años cuarenta, al finalizar la Segunda Guerra Mundial, se asiste al despertar de un gran interés, dentro del Análisis Funcional, por los espacios localmente convexos, que lógicamente debía tener una fructífera influencia en el desarrollo de la teoría de la integración. Así, en el año 1.940, R.S. Phillips define una integral de funciones valoradas en espacios localmente convexos con respecto a medidas escalares, que contiene a las integrales de Birkhoff (1.935) y Gelfand-Pettis (1.938). Posteriormente, varios autores han hecho aportaciones en esta línea, como por ejemplo G.H. Chi (1.976), D. Gillian (1.977), Rodríguez-Salinas (1.979) y C. Blondia (1.981), entre otros, debiéndose destacar la existencia de propiedades, bien conocidas en el caso de espacios de Banach, que no mantienen su validez al considerar funciones con valores en espacios localmente convexos (casi-completos), como ponen de manifiesto los trabajos de C. Blondia (1.987), Mª E. Ballvé (1.989), Mª E. Ballvé y J.L. de Maria (1.989), así como los realizados por nosotros en colaboración con el Profesor Rodríguez-Salinas en 1.988. Entre estas propiedades, se encuentran las referentes a la completitud y a la dualidad de los espacios L^p $(1 \leq p < +\infty)$ y el hecho de que no toda medida de variación acotada valorada en un espacio localmente convexo casi-completo que sea continua con respecto a una medida no negativa y finita μ, y cuyo conjunto de promedios sea localmente pequeño,tenga derivada de Radon-Nikodym con respecto a dicha medida μ, propiedad que está íintimamente relacionada con la casi-completitud de los correspondientes espacios L^p.

La evolución del concepto de integral de funciones vectoriales con respecto a medidas escalares, no se detiene aquí, existiendo otras extensiones, como por ejemplo, la integral de funciones valoradas en espacios bornológicos convexos completos introducida en 1.979 por F. Bombal, en base al marcado caracter bornológico de gran parte de las demostraciones de los teoremas de tipo Radon-Nikodym en espacios localmente convexos, y la integral de funciones valoradas en espacios de convergencia, desarrollada recientemente por nosotros en colaboración con María E. Ballvé.

En cuanto a la integración de funciones escalares con respecto a medidas vectoriales, citemos a título de ejemplo, los trabajos de N. Dunford y T. Schwartz del año 1.958, para medidas valoradas en espacios de Banach y los de I. Kluvánek y C. Knowles (1.976), para medidas con valores en espacios localmente convexos. Posteriormente otros autores como Ph. Turpin e I. Labuda han tratado el caso de medidas valoradas en espacios vectoriales topológicos no necesariamente localmente convexos. Al comentar más adelante la integración de funciones vectoriales con respecto a medidas también vectoriales, volveremos a tener oportunidad de comentar algunas cuestiones más, relativas a los casos anteriores, poniéndose de manifiesto una vez más, la gran labor de síntesis que desarrolla la integración vectorial bilineal, lo que constituye a nuestro juicio, una de sus numerosas ventajas.

La primera integración de funciones vectoriales con respecto a medidas también vectoriales, de que tenemos conocimiento, se debe a M. Gowurin, quien en 1.936 desarrolla una integral bilineal de tipo Riemann, limitándose casi exclusivamente al caso de funciones acotadas. Dos años más tarde S. Bochner y A.E. Taylor definen y emplean otra integral similar a la de Gowurin, también de tipo Riemann, con objeto de representar cierta clase de operadores. Señalemos que la representación de operadores vectoriales constituye uno de los grandes campos de aplicación de la teoría de la integración vectorial bilineal, a la que conduce de manera natural, constituyendo, al menos en los comienzos, uno de los motivos que más han impulsado el desarrollo de la teoría, como tendremos ocasión de constatar en repetidas ocasiones.

La primera teoría de integración bilineal de tipo Lebesgue fué definida por G.B. Price en 1.940, siguiendo las líneas de la integral de Birkhoff. En la integral de Price, se integran funciones valoradas en un espacio de Banach X , con respecto a una medida que toma valores en el espacio Y de los endomorfismos continuos de X, imponiendo la condición, posteriormente denominada axioma de Price, de que para cada conjunto medible E se verifique que $\mu(E)$ es un isomorfismo si $\mu(E)$ es distinto de cero y que en caso contrario, $\mu(F)$ es cero para todo subconjunto medible F de E. Dos años más tarde, M. Day desarrolla una integral en la situación anterior, para funciones acotadas, considerando en el espacio Y la topología fuerte en vez de la topología de la convergencia uniforme y probando entre otras cuestiones, un teorema de la convergencia acotada y la permutabilidad de la integral y los operadores lineales y continuos del espacio. En el año 1.944, C.E. Rickart define una integral bilineal, del tipo de la desarrollada cuatro años antes por R.S. Phillips para medidas escalares,que permite la integración de multifunciones en el contexto de los es-espacios localmente convexos, obteniendo como caso particular una integral bilineal que incluye a las definidas por M. Gowurin y G.B. Price.

En 1.953 S. Karlin introduce una integral vectorial bilineal motivado por problemas de optimización y en 1.956 aparece el conocido artículo de R. G. Bartle titulado "A general bilinear vector integral", en el que se desarrolla la integral que lleva su nombre y que ha sido durante años un punto de refencia obligado para los estudiosos de la materia. La integral de Bartle posee gran parte de las propiedades de la integral de Lebesgue, verificando en particular los teoremas de convergencia de Vitali y de la convergencia acotada, pudiéndose probar incluso un teorema de la convergencia dominada, aunque no se pueda extender a este contexto en toda su generalidad, el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. Las funciones consideradas en la integral de Bartle, toman valores en un espacio de Banach X, integrándose con respecto a medidas valoradas a su vez, en otro espacio de Banach Y, y definidas en una σ-álgebra (o álgebra, en el caso finitamente aditivo) Σ de partes del conjunto Ω de definición de dichas funciones, construyéndose la integral mediante el empleo de una aplicación bilineal y continua de XxY en un tercer espacio de Banach Z, en el que toman valores las integrales así definidas. Este planteamiento puede reducirse al caso, en apariencia menos general, de que el espacio Y anteriormente mencionado sea el espacio de las aplicaciones lineales y continuas de X en Z , dotado de la topología de la convergencia uniforme, y la aplicación bilineal considerada de XxY en Z sea la evaluación.

Como el mismo Bartle señala en su trabajo, se trata de una extensión de la integral de Lebesgue por partida doble, de una parte por el caracter vectorial bilineal de la misma y de otra por reemplazar el requerimiento habitual de la aditividad numerable por la aditividad finita, ya que en efecto considera ambos casos. El caso contablemente aditivo tiene un planteamiento lógicamente más sencillo y en el se supone que Σ es una σ-álgebra de partes de Ω y que la medida m verifica la *-propiedad, es decir, que la semivariación de la medida es μ-continua, para alguna medida no negativa y finita μ, lo que ocurre trivialmente al tratarse de medidas de variación acotada, e implica según un teorema de S. Saks (1.933), que la medida sea de semivariación acotada. En estas condiciones se dice que una función $f:\Omega \rightarrow X$ es *-integrable cuando existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples (las funciones simples y su integral se construyen de manera habitual) que converge a la función f en medida y tal que para cada conjunto medible E, la sucesión $(\int_E f_n \, dm)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Si los tres espacios considerados X, Y y Z coinciden con el cuerpo de los números reales, entonces la *-integral se reduce a la integral de Lebesgue y en el caso de que X y Z coincidan e Y sea el cuerpo de los números reales, contiene estrictamente a la integral de Bochner siendo a su vez, menos general que las integrales de Birkhoff, Gelfand-Pettis y Phillips.

En lo referente a la integración de funciones escalares con respecto a medidas vectoriales, la integral de Bartle incluye, en el caso de espacios de Banach,a la integral desarrollada en 1.947 por A. Alexiewicz para funciones acotadas y medidas valoradas en F-espacios, siguiendo un método similar al empleado por G. Fichtenholz y L. Kantorovitch en 1.934. Así mismo, la integral de Bartle contiene a la desarrollada por él en colaboración con N. Dunford y J. Schwartz en el año 1.955. En el caso de funciones y medidas vectoriales, debemos señalar que la integral de Bartle contiene a la de Gowurin, y salvo en algunos aspectos, también a la dada por M. Day.

Desde 1.970 a 1.986, I. Dobrakov desarrolla una teoría de integración vectorial bilineal de tipo Lebesgue, que permite integrar funciones valoradas en un espacio de Banach X con respecto a medidas definidas en un δ-anillo $\mathbf{A}_0$ de partes del conjunto de definición de dichas funciones y que toman valores en el espacio L(X,Y), de las aplicaciones lineales y continuas de X en otro espacio de Banach Y, dotado de la topología fuerte.

Las funciones medibles se definen como aquellas que son límite puntual de una sucesión de funciones $\mathbf{A}$-simples, siendo $\mathbf{A}$ la clase de los conjuntos pertenecientes al δ-anillo $\mathbf{A}_0$, que tienen semivariación finita, y se consideran como funciones integrables a aquellas funciones medibles, que son límite en casi todo punto de una sucesión de funciones $\mathbf{A}$-simples, cuyas integrales son uniformemente contablemente aditivas en el σ-anillo generada por la clase $\mathbf{A}$. La familia de las funciones integrables así obtenidas, resulta ser el menor conjunto de funciones que contiene a las funciones simples y para el cual se verifica el teorema de permutabilidad entre el límite (en casi todo punto) y la integral. Por otra parte, para todo elemento y del espacio dual del espacio Y, se cumple que las funciones integrables anteriormente definidas, lo son también con respecto a la medida valorada en el espacio dual del espacio X, obtenida por composición a partir de la medida inicial y del vector y', pudiéndose probar, mediante la generalización del teorema de Orlicz obtenida por C. Bessaga y A. Pelczynski en el año 1.958, un resultado recíproco del anterior para funciones medibles, si el espacio de Banach Y considerado no contiene una copia de c_0, lo que ocurre por ejemplo si se trata de un espacio de Banach débilmente completo.

Esta integral coincide con las de Lebesgue y Bochner, en sus respectivos contextos, y es estrictamente más general que el caso contable de la integral de Bartle, incluso si se considera en el espacio L(X,Y) la topología de la convergencia uniforme, coincidiendo con ella si la medida está definida en una σ-álgebra y es de semivariación continua, condición esta última que se verifica automáticamente, por ejemplo, en el caso de que el espacio de Banach Y sea débilmente completo. La integral de Dobrakov presenta además otras ventajas adicionales sobre la integral de Bartle, como por ejemplo, el verificarse en ella la permutabilidad entre límite e integral, que en general no se cumple en la integral definida por R. G. Bartle.

Los trabajos del Profesor Dobrakov, han dado como resultado una completa teoría de integración vectorial bilineal en espacios de Banach, que incluye un exhaustivo estudio de los espacio L^p, un teorema del valor medio, obtenido en colaboración con P. Morales en 1.985 utilizando la estructura de convexidad introducida por G.B. Price en 1.940, teoremas de cambio de variables y de tipo Fubini, así como interesantes aplicaciones al estudio del producto tensorial de medidas valoradas en espacios de Banach y a la representación de una amplia gama de operadores sobre el espacio $c_o(\Omega,X)$, de las aplicaciones continuas X-valoradas definidas en un espacio localmente compacto separado Ω, que tienden a cero en el infinito, dotado con la norma usual. Algunos de estos teoremas de representación, han sido posteriormente extendidos por H. Volkmer y H. Weber en un trabajo de 1.984 acerca de la representación de operadores "regulares" sobre el espacio de las aplicaciones continuas X-valoradas definidas en un espacio topológico arbitrario.

La construcción de los espacios L^p efectuada por I. Dobrakov, difiere bastante, salvo cuando el espacio Y es débilmente completo, de la construcción clásica realizada en las integrales de Lebesgue y Bochner, ya que el espacio L^p que define, no coincide en general con el espacio de las clases de equivalencia de las funciones medibles con L_p-norma finita, sino con el de las clases de aquellas funciones m-medibles cuya L_p-norma sea continua. I. Dobrakov prueba un teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, similar al clásico, obteniendo resultados semejantes a los habituales en lo concerniente a la completitud y la separabilidad de estos espacios, así como a ciertos subespacios distinguidos de los mismos.

A partir del año 1.986, I. Dobrakov desarrolla una teoría de integración multilineal en espacios de Banach, que extiende a la anterior y permite probar teoremas de representación de operadores multilineales y obtener de manera sencilla, sin el empleo de medidas gaussianas, la integral de Feynman, de gran utilidad en Física Cuántica. El desarrollo de esta teoría, que continúa la línea comenzada en 1.915 por Fréchet en su trabajo "Sobre las funciones bilineales" y seguida entre otros por M. Morse y W. Trausve (1.949-56), K. Ylinen (1.978), I. Kluvánek (1.981), M.M. Rao y B. Chang (1.983-87) y A. K. Katsaras (1.985), prosigue en la actualidad y esperamos que en los próximos años se consolide como tal.

Uno de los campos en los que la integración vectorial bilineal encuentra una mayor aplicación, lo constituyen la integración estocástica y la resolución de ecuaciones estocásticas, que como es bien sabido, presentan una gran utilidad en diversas cuestiones tanto de la Física como de la Economía. En el año 1.982, C. Barnett, R.F. Streater e I.F. Wilde pusieron de manifiesto que las integrales estocásticas no conmutativas no pueden obtenerse mediante la integral de Bartle, lo que llevó a C. Barnet e I.F. Wilde a introducir en 1.984 la noción de "integral retardada", siguiendo un proceso similar al seguido por R.G. Bartle, con cuya integral coincide en algún caso particular. Las medidas consideradas en la integración retardada, están definidas en un álgebra de intervalos acotados de $\mathbb{R}^+$, no siendo necesariamente continua la aplicación bilineal utilizada en su definición, consiguiendo de esta manera, contener a la integral de Itô-Clifford y a diversos tipos de integrales estocásticas. En relación con la integración multilineal, señalemos que en el año 1.989, R. G. Blei desarrolló una integración estocástica en sentido de Lebesgue-Stieljes en un contexto general de teoría de la medida multilineal, utilizando básicamente la desigüaldad y el teorema de factorización de Grothendieck, previamente adaptados al contexto de la teoría de la medida, en su trabajo de 1.988 "Sobre la teoría de la medida multilineal y el teorema de factorización de Grothendieck".

Por otra parte, con objeto de obtener teoremas de representación espectral, P. Masani define en 1.970 una integral bilineal de funciones valoradas en espacios de Hilbert separables, con respecto a medidas valoradas en espacios de operadores, definidos en los espacios de Hilbert correspondientes, y en 1.973 A.S. Halevo desarrolla una integral bilineal de tipo Riemann para medidas valoradas en ciertos espacios de operadores, consiguiendo de esta forma aplicar técnicas de teoría de la decisión a sistemas cuánticos. Con este mismo motivo S.K. Mitter y S.K. Young definen en 1.984 una teoría de integración bilineal en la que las funciones están definidas en un espacio localmente compacto, que es la situación que corrientemente presentan las variables físicas en mecánica cuántica, y la medida, que se supone regular, toma valores en el cono positivo del espacio de los operadores lineales y continuos, autoadjuntos de un espacio de Hilbert. Esta teoría presenta la originalidad de no exigir que la medida tenga semivariación acotada sino simplemente semivariación escalar finita, lo que permite su aplicación a problemas de optimización en sistemas cuánticos. Por otra parte, las funciones que integra toman valores en el espacio dual del espacio de los operadores compactos autoadjuntos del correspondiente espacio de Hilbert, y su integral se define a partir de las funciones simples, mediante un sencillo proceso de extensión.

Dentro del proceso evolutivo de desarrollo de la integración bilineal, el paso de los espacios normados a los espacios localmente convexos se realiza de manera paulatina, existiendo un período intermedio en el que las teorías involucran a ambos tipos de espacios. Así en 1.981, C.Débiève desarrolla una teoría de integración de funciones valoradas en un espacio normado X con respecto a una medida m definida en un δ-anillo de partes de un conjunto Ω y que toma valores en el espacio L(X,Y), de las aplicaciones lineales y continuas del espacio normado X en un espacio localmente convexo separado y completo Y, dotado de la topología de la convergencia uniforme. En este contexto, una función $f:\Omega \rightarrow X$ se dice que es m-integrable si existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples que converge a f en casi todo punto y tal que

$$\lim_{n\rightarrow\infty} \int_{\Omega} \|f_n - f\| \, d\,|y'm| = 0,$$

uniformemente en $y'\in V^0$, para cada entorno de cero V en el espacio Y. Si se denota por $\mathfrak{L}(m)$ al espacio de las funciones m-integrables anteriores, entonces

$$N_V(f) = \sup_{y' \in V^o} \int_\Omega \|f\| \, d\,|y'm| \qquad (f \in \mathfrak{L}(m))$$

define, al recorrer V una base de entornos de cero en el espacio Y, una familia de seminormas que dota al espacio $\mathfrak{L}(m)$ de una topología localmente convexa, para la cual las funciones simples constituyen un subespacio denso y el espacio $\mathfrak{L}(m)$ es completo en el caso de que X sea un espacio de Banach e Y sea un espacio de Fréchet.

Comparando esta integral, cuando Y es un espacio de Banach, con la integral definida por I. Dobrakov, se observa que ambas coinciden en algunas situaciones particulares, como por ejemplo en el caso de que el espacio X sea de dimensión finita, no siendo comparables en general, presentando cada una ventajas sobre la otra en ciertos aspectos, debiéndose destacar que la clase de las funciones integrables según Dobrakov es en general más amplia que la obtenida (en estas condiciones) en la integral de Débiève. En el caso de que la semivariación de la medida m sea continua (en el vacio), el espacio de las funciones integrables según C. Débiève coincide (siendo Y un espacio de Banach) con el espacio $L^1(m)$ definido por I. Dobrakov.

En el mismo contexto de la teoría de integración anterior, cabe destacar la integral, de tipo Pettis, definida en 1.984 por S.K. Roy y N.D. Chakraborty, que incluye estrictamente a la introducida por C. Débievè y permite obtener teoremas de representación de operadores débilmente compactos Y-valorados, definidos en el espacio $C(\Omega,X)$, de las aplicaciones continuas de un espacio topológico compacto separado Ω en X, dotado con la topología definida por la norma del supremo. Esta teoría considera en el espacio L(X,Y) la topología de la convergencia simple y define a las funciones integrables $f:\Omega \rightarrow X$ como aquellas que lo son con respecto a la medida y m, en sentido de Bartle, para todo elemento y perteneciente al espacio Y' dual del espacio Y, y verifican que para cada subconjunto E de Ω que tenga intersección medible con todo elemento del δ-anillo de definición de la medida, existe un vector y_E del espacio Y tal que la igualdad

$$y'(y_E) = \int_E f \, d(y'm)$$

se cumple para todo $y' \in Y'$. Esta integral puede mejorarse sustancialmente, por una parte utilizando en su definición la integral de Dobrakov en vez de la de Bartle y por otra, considerando espacios localmente convexos X, más generales que los espacios de Banach.

El mismo año en que aparece la integral de C. Débievè, H. Volkmer y H. Weber establecen una integral vectorial bilineal, muy general, en la que tanto las funciones como las integrales toman ya valores en espacios localmente convexos. Para ello se parte de un subespacio S del espacio $\mathfrak{F}(\Omega,X)$ de las aplicaciones de un conjunto Ω en un espacio localmente convexo X, dotado de una adecuada topología de espacio localmente convexo, definida a partir de una determinada familia de super-normas, y de una aplicación lineal y continua i_o de S en otro espacio localmente convexo separado Y, denominando funciones integrables a aquellas que pertenecen a la adherencia de S en $\mathfrak{F}(\Omega,X)$ e integral a la extensión lineal y continua de i_o (que evidentemente existe y es única). Este método, que como vemos se basa en el empleo de un principio topológico muy sencillo, ha sido empleado por diferentes autores en orden a construir diferentes tipos de integrales, entre otros, por M. H. Stone (1.949), para funciones y medidas escalares, N. Bourbaki (1.965) para funciones vectoriales y medidas escalares en espacios localmente compactos y por J. Brooks y N. Dinculeanu (1.976) para funciones e integrales valoradas en espacios de Banach. Mediante una adecuada selección de los espacios que intervienen, así como de la aplicación i_o (que se suele construir de manera estándar) y de la familia de super-normas utilizada en la definición de la topología del espacio $\mathfrak{F}(\Omega,X)$, a partir de la integral definida por H. Volkmer y H. Weber, se pueden obtener de manera sencilla y rápida, las integrales de Bochner, Pettis, Kluvánek-Knowles y Brooks-Dinculeanu, así como la segunda integral de Dunford-Schwartz y las integrales que aparecen en el capítulo sexto de la conocida obra de N. Bourbaki sobre integración. Por otra parte, F. W. Schäfke probó en 1.977 que la primera integral de Dunford-Schwartz para contenidos (como ya se ha hecho constar anteriormente, esta integral para medidas coincide con la de Bochner) se puede obtener mediante un proceso similar utilizando super-normas no necesariamente positivamente homogéneas. Como se puede apreciar, entre las importantes integrales que se obtienen a partir de la integral de Volkmer-Weber, hay varias que no se han obtenido originalmente mediante el principio de extensión continua utilizado en la anterior.

Siguiendo ya en el contexto de los espacios localmente convexos y con objeto de estudiar la existencia del producto tensorial de medidas valoradas en estos espacios, R. Rao Chivukula y A.S. Sastry definen en 1.983 una integral tipo Bartle, cuyos métodos están muy cerca de los empleados en el caso de los espacios de Banach. Esta integral, que extiende a la de Bartle, considera tres espacios localmente convexos X, Y y Z, de los que Z se supone además separado y completo, una aplicación bilineal y continua de XxY en Z y una medida m contablemente aditiva, definida en una σ-álgebra Σ de partes de un conjunto Ω,que toma valores en el espacio Y. Al igual que en el caso contable de la integral de Bartle, se supone que la medida m verifica la *-propiedad, que en este caso consiste en imponer, para cada seminorma continua r del espacio Z, la existencia de una medida finita no negativa υ_r definida en Σ, tal que la (B,r)-semivariación de la medida m sea υ_r-continua para todo subconjunto no vacio B de X, acotado, equilibrado y convexo. De esta forma, se dice que una función $f:\Omega \longrightarrow X$ es m-integrable si existen un subconjunto no vacio B de X, absolutamente convexo y acotado, y una sucesión de funciones simples $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $f(\Omega) \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n(\Omega)) \subseteq X_B$

(siguiendo la notación usual de Grothendieck, X_B denota el subespacio de X generado por B y q_B representa el funcional de Minkowsky del conjunto B en X_B), $(q_B(f_n-f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero en casi todo punto (m-c.t.p.) y, para cada $\varepsilon>0$ y cada seminorma continua r en Z, existe $\delta>0$ tal que

$$r(\int_E f_n \, dm) \leq \varepsilon$$

se cumple para todo $n\in\mathbb{N}$ y todo $E\in\Sigma$ con $\|m\|_{B,r}(E)\leq\delta$.

Continuando los trabajos de R. Rao y A.S. Sastry, nuestro discípulo R. Bravo probó tres años más tarde, en su tesis doctoral, un teorema del valor medio para esta integral y un teorema de convergencia de Vitali en el caso particular de que el espacio Z fuese de Fréchet, desarrollando para la misma una teoría de los espacios L^p. Posteriormente, C. Escribano ha realizado en su tesis doctoral, bajo nuestra dirección, un estudio de los correspondientes espacios de Orlicz. Por otra parte, mediante el uso de esta integral, hemos obtenido en 1.985, en colaboración con el también discípulo nuestro A. Balbás, teoremas de representación de operadores valorados en espacios localmente convexos y definidos en ciertos espacios de funciones continuas con valores también en espacios lovcalmente convexos y definidas en espacios topológicos localmente compactos separados.

El caracter marcadamente bornológico de la integral anterior, junto con los resultados que hemos obtenido al estudiar la dualidad de los espacios L^p de funciones con valores en espacios vectoriales topológicos localmente convexos (en integraciones con respecto a medidas escalares), ha ido haciendo a nuestro juicio, cada vez más patente la necesidad y utilidad de desarrollar una teoría de integración vectorial bilineal en el contexto de los espacios bornológicos, lo que hicimos en 1.989 en colaboración con Mª E. Ballvé. Esta teoría engloba a la de R. Rao y A. S. Sastry, anteriormente mencionada, y en el caso particular de que la medida respecto a la que se integra, sea una medida no negativa y finita, las funciones integrables que aparecen coinciden con las funciones bornológicas Bochner-integrables definidas por F. Bombal en 1.981. El uso de esta integral nos ha permitido obtener teoremas de representación de operadores lineales acotados y estudiar la existencia del producto tensorial de las medidas bornológicas.

Así como al pasar a la integración de funciones valoradas en espacios localmente convexos (con respecto a medidas escalares), no se trasladan automáticamente algunas propiedades clásicas de los espacios L^p para la integral de Bochner (de funciones valoradas en espacios de Banach), como las referentes a la dualidad y la completitud de estos espacios, creemos debe resaltarse el hecho de que en el caso de los espacios L^p bornológicos, estudiados por nuestra discípula Mª E. Ballvé en el año 1.989, se sigue conservando la propiedad referente a la completitud, obteniéndose un resultado, en lo tocante a la dualidad, que recuerda más al que se verifica en el contexto de los espacios localmente convexos, lo que pone de manifiesto una vez más, el conocido caracter "intermedio" de los espacios bornólogicos convexos frente a los espacios de Banach y los localmente convexos en general.

En el año 1.979, aparece publicada en la Revista de esta Real Academia, una teoría de integración, desarrollada por el Profesor Rodríguez-Salinas, para funciones valoradas en espacios localmente convexos casi-completos con respecto a medidas finitas no negativas, que extendió tres años más tarde, al caso de medidas infinitas. B. Rodríguez-Salinas define las funciones u-simples como aquellas que son límite uniforme de una sucesión de funciones simples, lo que permite extender inmediatamente a esta clase de funciones, la integral definida de manera estándar para las funciones simples, pasando posteriormente a considerar como funciones medibles a aquellas para las que se puede encontrar un subconjunto medible del espacio (de definición de las funciones en cuestión) cuyo complementario tenga medida arbitrariamente pequeña y tal que la restricción de la función a dicho subconjunto sea una función u-simple. De esta forma, se definen las funciones integrables como aquellas que son medibles e integrables Pettis. En el caso de que el espacio de medida considerado sea estrictamente localizable, las funciones absolutamente integrables (e.d., aquellas cuya composición con toda seminorma continua del espacio, sea integrable) que son límite uniforme de una red de funciones integrables (según Rodríguez-Salinas), coinciden con las funciones integrables Grothendieck.

El desarrollo de esta integral efectuado por Rodríguez-Salinas incluye un completo estudio del teorema y de la Propiedad de Radon-Nikodym. Posteriormente Mª E. Ballvé (1.989) y C. Escribano (1.990) han elaborado sendas teorías, para la integral de Rodríguez-Salinas, de los espacios L^p y de Orlicz, respectivamente, probando Mª E. Ballvé en colaboración con J.L. de María en 1.989, que el dual de un espacio $L^p(E)$ ($1<p<+\infty$), es la unión, cuando u recorre una familia generante de seminormas del espacio E, de los espacios $L^q(E_u)$, con $p^{-1}+q^{-1}=1$, siempre que el dual del espacio $E_u=E/u^{-1}(\{0\})$ tenga la propiedad de Radon-Nikodym, para toda seminorma continua u. Al contrario de lo que sucede en el caso de espacios de Banach, la casi-completitud del espacio no implica en general la casi-completitud del espacio L^p correspondiente, salvo en el caso de espacios de Fréchet. En 1.989, B. Rodríguez-Salinas estableció, en colaboración con nosotros, condiciones necesarias y suficientes para asegurar la casi-completitud de los espacios L^p siendo $1\leq p<+\infty$, habiendo estudiado posteriormente Mª E. Ballvé el caso $p=+\infty$. Unos resultados similares, para espacios de Orlicz, se obtienen en la tesis doctoral de C. Escribano, leida en 1.990.

Utilizando las técnicas de Rodríguez-Salinas, S. Rodríguez Salazar desarrolla en su tesis doctoral, leida el año 1.985, una integral vectorial bilineal del tipo de la definida por I. Dobrokov , en la que las funciones toman valores en un espacio localmente convexo separado X y la medida m respecto a la que se integra está definida en una σ-álgebra de partes del conjunto Ω de definición de dichas funciones, y valorada en el espacio L(X,Y) de las aplicaciones lineales y continuas de X en un segundo espacio localmente convexo, separado y completo Y, dotado de la topología de la convergencia puntual. Las medidas consideradas son contablemente aditivas y verifican la *-propiedad, que se define de manera natural a partir de la correspondiente propiedad utilizada por R.G. Bartle, siendo por tanto, del tipo de la utilizada por R. Rao y A.S. Sastry.

En esta teoría, se consideran como funciones u-simples a aquellas que son límite uniforme de una red de funciones simples y se dice que una función $f:\Omega$ X es medible si para cada $\varepsilon>0$ y cada par de seminormas continuas p,r en X e Y respectivamente, tales que la medida m sea de (p,r)-semivariación acotada, se puede encontrar un conjunto $A\in\Sigma$ tal que $\|m\|_{p,r}(\Omega\text{-}A)\leq\varepsilon$ y $f\cdot\chi_A$ es una función u-simple, siendo $\|m\|_{p,r}$ la (p,r)-semivariación de la medida m. De esta forma, se definen las funciones integrables como aquellas funciones medibles que tienen (p,r)-semivariación continua, para todo par (p,r) de seminormas del tipo anterior.

En la tesis de S. Rodríguez Salazar se establecen un teorema de la convergencia dominada y un teorema del valor medio para esta integral y posteriormente, nuestra discípula M^{a} E. Ballvé ha desarrollado una completa teoría de los espacios L^p, probando entre otras cuestiones, que si la medida verifica la **-propiedad, el espacio de medida control está contablemente generado y el espacio X es separable, entonces lo es el espacio L^p $(1 \leq p < +\infty)$ y que en el caso de ser X un espacio de Banach e Y un espacio de Fréchet, el correspondiente espacio L^p $(1 \leq p \leq +\infty)$, es así mismo un espacio de Fréchet.

Al comparar esta integral con la de Rao-Sastry en el caso general, lo único que se puede asegurar es que para funciones que sean integrables en ambos sentidos, sus integrales coinciden y que en el caso de tratarse de espacios de Banach y supuesto que la medida cumpla una cierta propiedad, entonces las funciones medibles en ambas teorías son las mismas y la familia de las funciones integrables según Rao y Sastry, es estrictamente más amplia que la de las funciones integrables según Rodríguez Salazar.

El uso de esta integral nos ha permitido obtener en 1.988, en colaboración con nuestro discípulo R. Bravo, diferentes teoremas de representación de operadores en el contexto de los espacios localmente convexos, así como distintas relaciones entre las propiedades de los operadores estudiados y las de sus medidas representantes. Por otra parte, con objeto de obtener condiciones necesarias y suficientes para la existencia del producto tensorial de medidas valoradas en espacios localmente convexos, nuestro discípulo F. Fernández y Fernández-Arroyo ha desarrollado en 1.987, una integral estrictamente más general que la anterior, en la que las funciones integrables toman valores en el espacio de operadores L(Z,X), siendo Z un tercer espacio localmente convexo separado. De esta forma se obtiene una integral valorada en el espacio L(Z,Y), destacando el hecho de que este espacio no es en general completo con la topología considerada de la convergencia puntual, lo que obliga a utilizar funciones ultramedibles, verificándose que las funciones medibles según Rodríguez Salazar son siempre ultramedibles si el espacio Z es de dimensión finita.

Comparando en el contexto de los espacios de Banach, las integrales de Rodríguez Salazar y de Dobrakov, se observa que la familia de las funciones integrables es estrictamente más amplia en la segunda que en la primera, pudiéndose probar, en el caso de medidas completas, que las funciones integrables según Rodríguez Salazar coinciden esencialmente con las funciones del espacio L^1 definido por I. Dobrakov. Esto ha motivado que nos hayamos planteado el desarrollo de una teoría de integración vectorial bilineal en espacios localmente convexos, partiendo de la integral de R. S. Phillips (para funciones valoradas en espacios localmente convexos y medidas escalares), que permita ampliar la clase de las funciones integrables según Rodríguez Salazar, de forma que coincida con la considerada por Dobrakov en el caso de espacios de Banach, posibilitando la interrelación y armonización de ambas teorías.

La evolución continúa ya que se trata, como acertadamente J. Diestel y J.J. Uhl han señalado, de una teoría joven y en pleno desarrollo, en la que quedan aún un elevado número de cuestiones por resolver.

En el caso de medidas escalares, el teorema de Radon-Nikodym caracteriza de manera plenamente satisfactoria a aquellas medidas diferenciables con respecto a una medida no negativa y σ-finita μ definida en una σ-álgebra de partes de un conjunto Ω, asegurando que una medida finita definida en Σ y con valores en $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, es diferenciable con respecto a μ si y sólo si es absolutamente continua con respecto a μ. Como ya hemos señalado anteriormente, se conoce desde antiguo que el resultado anterior no es cierto en general para medidas con valores en un espacio de Banach, incluso de dimensión finita.

Los primeros antecedentes del teorema de Radon-Nikodym para medidas vectoriales se encuentran en los trabajos de N. Dunford y A. P. Morse del año 1.936, en los que aparece la noción de base acotadamente completa, probándose que si "*$\mathcal{F}(\mathcal{R})$ es una función aditiva de variacion acotada, valorada en un espacio de Banach que posee una base acotadamente completa, y definida para las figuras elementales $\mathcal{R}$ contenidas en una figura fija $\mathcal{R}_0$ del espacio Euclideo n-dimensional, entonces existe su derivada $\mathcal{F}'(\mathcal{P})$ en casi todo punto $\mathcal{P}$ de $\mathcal{R}_0$, dicha derivada es sumable en sentido de Bochner y además si la función $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ es absolutamente continua, se tiene que $\mathcal{F}(\mathcal{R})=\int_{\mathcal{R}} \mathcal{F}'(\mathcal{P})\, d\mathcal{P}$*". En esta misma línea, J.A. Clarkson establece ese mismo año la noción de convexidad uniforme, probando que si "*$\mathcal{F}(\mathcal{R})$ es una función aditiva de figuras elementales, definida para las figuras contenidas en una figura $\mathcal{R}_0$ del espacio*

Euclideo n-dimensional y con valores en un espacio de Banach uniformemente convexo $\mathcal{B}$, *entonces si* $\mathcal{F}$ *es además de variación acotada en* $\mathcal{R}_0$, *se tiene que* $\mathcal{F}$ *es diferenciable en casi todo punto de* $\mathcal{R}_o$ ". Posteriormente N. Dunforrd (1.936) mejora este resultado, probando lo que en terminología actual enunciaríamos diciendo que " todo espacio de Banach uniformemente convexo tiene la propiedad de Radon-Nikodym", reconociendo ya estos resultados como de tipo de Radon-Nikodym. Tres años más tarde, aparece un trabajo de B.J. Pettis (1.939) encaminado a dilucidar " *si una determinada condición del espacio de Banach* X *es suficiente para asegurar la diferenciabilidad en casi todo punto de cada función aditiva de variación acotada, con valores en dicho espacio de Banach y definida sobre las figuras del espacio Euclideo n-dimensional* ", observando que " *en cada demostración la idea esencial consiste en probar que si el espacio* X *satisface la condición particular considerada, entonces* X *es débilmente compacto en un sentido generalizado o en otro* ". De esta forma B.J. Pettis pone ya claramente de manifiesto en 1.939, que las nociones de compacidad débil y débil-*, están íntimamente relacionadas con la diferenciación de funciones vectoriales, definidas en conjuntos de partes de los espacios Euclídeos.

En el año 1.940, N. Dunford y B.J. Pettis elaboran sus conocidos trabajos sobre representación de operadores sobre L^1 mediante integrales, transformando los resultados obtenidos por B.J. Pettis enel año anterior, en genuinos teoremas de tipo Radon-Nikodym. De esta forma N. Dunford y B.J. Pettis establecen dicho año el siguiente teorema, que puede considerarse como el primer teorema de Radon-Nikodym para medidas vectoriales: " *Sea* (Ω,Σ,μ) *un espacio de medida finita y* X *un espacio de Banach separable, entonces si* $T:L^1(\mu) \longrightarrow X$ *es un operador lineal y continuo, existe una aplicacion* $f:\Omega \longrightarrow X$, *unívocamente determinada salvo un conjunto de* μ*-medida nula, tal que ... y para toda función* $\varphi \in L^1(\mu)$ *y todo* $x \in X$ *la función* $\omega \longrightarrow <x,\varphi(w)f(\omega)>$ *es* μ*-integrable y verifica que*

$$<x,T(\varphi)> = \int_\Omega <x,\varphi f> d\mu \text{ "}$$

(o en terminología actual :" tal que para toda función $\varphi \in L^1(\mu)$ la función φf es Pettis integrable y se verifica que

$$T(\varphi) = (P) \int_\Omega \varphi f \, d\mu \text{ ").}$$

Posteriormente, R. S. Phillips prueba en 1.943, que en el caso de tratarse de operadores sobre $L^1(\mu)$ con valores en un espacio de Banach arbitrario, se puede obtener una representación integral del tipo anterior por medio de una función integrable Bochner (y no sólo integrable Pettis), si se impone la condición de que el operador en cuestión sea débilmente compacto. Señalemos que en general la representación de un operador sobre $L^1(\mu)$, mediante la integral de Bochner, proporciona una mayor información estructural sobre el operador, que la obtenida mediante otras representaciones integrales.

Es en los años 1.967 y 1.968 cuando por primera vez M.A. Rieffel y M. Métivier, de manera independiente, establecen el primer teorema general de Radon-Nikodym para la integral de Bochner, del que se pueden deducir los teoremas de Dunford-Pettis y Phillips anteriormente mencionados. Las técnicas empleadas por M. Métivier y M.A.Rieffel son diferentes, utilizando el primero técnicas de martingalas vectoriales, mientras que el segundo emplea el concepto de conjunto dentable, introducido por él y que está íntimamente relacionado con propiedades relativas a la estructura geométrica de los espacios de Banach.

El teorema de Radon-Nikodym para la integral de Bochner, puede formularse de la manera siguiente: " Sean (Ω,Σ,μ) un espacio de medida finito, X un espacio de Banach y $m:\Sigma \longrightarrow X$ una medida vectorial de variación acotada, absolutamente continua respecto de μ. Entonces, las condiciones siguientes son equivalentes:

R.N.1. Existe una función Bochner μ-integrable $f:\Omega \longrightarrow X$ tal que

$$m(A) = \int_A f \, d\mu$$

para todo $A \in \Sigma$.

R.N.2. El conjunto de promedios de la medida m es localmente relativamente compacto.

R.N.3. El conjunto de promedios de la medida m es localmente débilmente relativamente compacto.

R.N.4.El conjunto de promedios de la medida m es localmente dentable.

R.N.5 El conjunto de promedios de la medida m es localmente σ-dentable.

R.N.6. El conjunto de promedios de la medida m es localmente pequeño.

La demostración de que R.N.3 implica R.N.1 se debe a R.S.Phillips (1.943), probando M. Métivier en 1.967 la recíproca. Por su parte, M. A. Rieffel probó la equivalencia de las propiedades R.N.1, R.N.2 y R.N.4.

A partir de los trabajos de J. A. Clarkson y de N. Dunford y A. P. Morse, aparecidos en el año 1.936, se plantea de manera natural la caracterización de aquellos espacios de Banach X, para los que toda medida X-valorada, de variación acotada y absolutamente continua respecto de una medida no negativa y finita μ, sea diferenciable respecto de μ. Estos espacios se dice que poseen la propiedad de Radon-Nikodym y entre ellos se encuentran los espacios de Banach duales separables (N. Dunford-B. J. Pettis, 1.940), los espacios de Banach reflexivos (R.S. Phillips, 1.943), los espacios de Banach duales débilmente compactamente generados (C. Stegall, 1.974) y aquellos espacios de Banach tales que todo subespacio cerrado separable sea isomorfo a un subespacio de un dual separable (J.J. Uhl, 1.972).

Agrupando algunas de las condiciones necesarias y suficientes conocidas al respecto, podemos afirmar que un espacio de Banach X posee la propiedad de Radon-Nikodym si y sólo si se verifica una cualquiera de las propiedades siguientes:

P.R.N.1. Para todo espacio de medida no negativa y finita (Ω,Σ,μ), se cumple que toda martingala $(f_n,\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $L^1(\mu,\Sigma,X)$ cuyas funciones f_n estén uniformemente acotadas, converge en $L^1(\mu,\Sigma,X)$.

P.R.N.2. Para todo espacio de medida no negativa y finita (Ω,Σ,μ), se tiene que toda martingala $(f_i,\Sigma_i)_{i\in I}$ en $L^1(\mu,\Sigma,X)$ tal que las funciones f_i estén uniformemente acotadas, es convergente (en L (μ,Σ,X)).

P.R.N.3. Todo subconjunto acotado es dentable.

P.R.N.4. Todo subconjunto acotado y cerrado de X es dentable.

P.R.N.5. Todo subconjunto acotado, cerrado y convexo de X es dentable.

P.R.N.6. Todo subespacio cerrado de X posee la propiedad de Radon-Nikodym.

P.R.N.7. Todo subespacio cerrado separable de X posee la propiedad de Radon-Nikodym.

P.R.N.8. Para todo subconjunto acotado (no vacio) B de X y todo $\varepsilon>0$ existe un elemento $x_\varepsilon\in B$ que no pertenece a la envoltura convexa de $B-B_\varepsilon(x_\varepsilon)$ ($x_\varepsilon \notin co(B-B_\varepsilon(x_\varepsilon))$), siendo $B_\varepsilon(x_\varepsilon)$ la bola abierta de centro x_ε y radio ε.

Si en la expresión de la condición P.R.N.8 anterior, se hace tender ε a cero, se obtiene de manera formal que " todo subconjunto acotado (no vacio) de un espacio de Banach que posee la propiedad de Radon-Nikodym, tiene un punto extremal ", resultado que es obviamente falso en cualquier espacio de Banach. No obstante, el teorema de Krein-Milman afirma que todo subconjunto (no vacio) acotado, convexo y cerrado de un espacio de Banach reflexivo, posee un punto extremal. Además de los espacios de Banach reflexivos, existen otros muchos tipos de espacios de Banach en los que se verifica la tesis del teorema anterior, diciéndose de estos espacios que poseen la propiedad de Krein-Milman. Por otra parte, R. R. Phelps probó en el año 1.974 que un espacio de Banach posee la propiedad de Radon-Nikodym si y sólo si todo subconjunto suyo (no vacio) cerrado, convexo y acotado posee un punto fuertemente expuesto, de donde se deduce inmediatamente, que todo espacio de Banach que posee la propiedad de Radon-Nikodym, posee la propiedad de Krein-Milman (resultado que había sido probado ya dos años antes por L. Lindenstrauss), ya que todo punto fuertemente expuesto de un subconjunto acotado de un espacio de Banach, es un punto extremal de dicho conjunto. Destaquemos el hecho de que J. Diestel había conjeturado en 1.972, la equivalencia de las propiedades de Krein-Milman y de Radon-Nikodym, a la vista de que las clases de los espacios de Banach que se conocía poseían cada una de estas propiedades, eran coincidentes.

A pesar de que en el teorema de N. Dunford y B.J. Pettis (1.940) enunciado anteriormente y que como hemos señalado puede considerarse como el primer teorema de Radon-Nikodym para medidas vectoriales, la integral que aparece es precisamente de tipo Pettis, el estudio tanto del teorema como de la propiedad de Radon-Nikodym para esta integral, al igual que sucede en general con los restantes aspectos de la teoría de la integral de Pettis, ha sufrido un considerable retraso en el tiempo, en relación con el realizado sobre estas cuestiones, para la integral de Bochner.

En la literatura matemática de los años sesenta, encontramos varios teoremas de tipo Radon-Nikodym para la integral de Pettis, siempre motivados por problemas de representación integral de operadores lineales, destacando entre otros los de N. Dinculeanu y C. Foias (1.961), A. y C. Ionescu Tulcea (1.961) y N. Dinculeanu (1.965). No obstante, hay que esperar a la década de los setenta para encontrar un teorema de Radon-Nikodym, propiamente dicho, para la integral de Pettis, que fué probado por S. Moedano y J. Uhl en el año 1.971. Posteriormente, diversos autores han continuado esta línea de trabajo, como M. Talagrand (1.984) y K. Musial (1.985), entre otros, estudiándose también estos últimos años, la propiedad débil de Radon-Nikodym.

La extensión de los resultados anteriores, al caso de funciones con valores en espacios localmente convexos, ha originado la aparición, en las dos últimas décadas, de una abundante literatura sobre el tema, existiendo diversas caracterizaciones de los espacios localmente convexos que poseen la propiedad de Radon-Nikodym, para distintos tipos de integrales, obtenidas tanto mediante técnicas de dentabilidad de conjuntos como de convergencia de martingalas, así mismo, se han establecido diferentes teoremas de tipo Radon-Nikodym para medidas valoradas en estos espacios, utilizando básicamente los conjuntos de promedios de las medidas en cuestión. Entre los numerosos autores que han hecho aportaciones interesantes en este sentido, se encuentran nombres como los de D. Gillian (1.976), G.Y.H. Chi (1.976), E. Saab (1.976), B. Rodríguez-Salinas (1.979), L. Egghe (1.980) y C. Blondia (1.981).

Aunque a primera vista pudiera parecer que al tratar de extender el teorema de Radon-Nikodym para la integral de Bochner, anteriormente citado, al caso de medidas valoradas en espacios localmente convexos, la condición que mejor se debería adaptar a la nueva situación, sería la R.N.6, debido a la no existencia en todos los casos, de una familia contable generante de seminormas en el espacio, resulta que en general el hecho de que la medida vectorial tenga un conjunto de promedios localmente pequeño no es condición suficiente para asegurar la existencia de una densidad de la medida en las condiciones habituales.

En 1.988 hemos probado, en colaboración con el Profesor Rodríguez-Salinas, utilizando la integral definida por él en 1.979, que la clase de los espacios X, localmente convexos separados casi-completos, para los que el espacio $L^p(X)$ $(1 \leq p < +\infty)$ es casi-completo, coincide con la de aquellos espacios en los que la condición R.N.6 mantiene dicha suficiencia. Un resultado similar fué probado por C. Blondia en 1.987, para $p=1$ y la integración por seminormas introducida por él en 1.981. Continuando los estudios realizados por Rodríguez-Salinas y nosotros, Mª E. Ballvé probó, utilizando también la integral de Rodríguez-Salinas, que en el caso de que el espacio $L^{\infty}(X)$ sea casi-completo, la condición R.N.6 anterior implica, junto con las condiciones habitualmente impuestas a la medida, que esta posea una densidad.

Existen otras extensiones del teorema de Radon-Nikodym (de diferenciación respecto a medidas escalares) a situaciones más generales, como las obtenidas por Z. Arstein (1.972) para multimedidas, M. Sion (1.973) para medidas valoradas en grupos y por F. Bombal (1.981) para medidas bornológicas, entre otros.

En relación a la diferenciación de una medida vectorial con respecto a otra medida también vectorial, hay que reconocer que son escasos los resultados que sobre la materia podemos encontrar en la literatura matemática. Los primeros teoremas de este tipo aparecen en los trabajos de M. M. Rao de los años 1.963, 1.964 y 1.967, y en los de W. M. Bogdanowicz y B. Kritt, también del año 1.967.

M. M. Rao considera en sus trabajos un espacio de medida σ-finito (Ω,Σ,λ) y la clase $V(X,\lambda)$ de las medidas α definidas en Σ que toman valores en el espacio de Banach X, tales que el conjunto

$$\left\{ \frac{\alpha(A)}{\lambda(A)} : 0<\lambda(A)<+\infty \ , \ A\in\Sigma \right\} ,$$

es $\mathfrak{H}_0$-compacto y existe un número real no negativo t de forma que $\|\alpha(A)\| \leq t\lambda(A)$, se verifica para todo $A\in\Sigma$ tal que $0<\lambda(A)<+\infty$. De esta forma, prueba " que si X e Y son dos espacios de Banach, $\mu\in V(X,\lambda)$, $\upsilon\in V(Y,\lambda)$ y $\upsilon\ll\mu$ (e.d. $|\mu|(A)=0$ implica $\upsilon(A)=0$ siendo $A\in\Sigma$), entonces existe un operador $T:\Omega\to L(X,Y)$ fuertemente medible y esencialmente acotado tal que

$$\upsilon(A)= \int_A T\, d\mu$$

para todo $A\in\Sigma$ con $\lambda(A)<+\infty$ ", siendo la integral que aparece en este enunciado, una integral bilineal construida a partir de la integral de Bochner de forma que

$$\int_A T\, d\mu = \int_A T(w)f(w)\, d\lambda ,$$

donde $f:\Omega\to X$ es una función integrable Bochner tal que

$$\mu(A) = \int_A f\, d\lambda$$

para todo $A\in\Sigma$ y $Tf:\Omega\to Y$ es λ-Bochner integrable. Resalta el hecho de que mientras la integral que aparece en el teorema anterior, sí está bien definida, el operador T (cuya existencia asegura) no es necesariamente único, situación que recuerda la de los teoremas abstractos de tipo Radon-Nikodym, obtenidos por C. E. Rickart en 1.944. Por otra parte, el mismo M.M. Rao obtiene un resultado análogo al anterior, sustituyendo la condición de que la medida μ pertezca a la clase $V(X,\lambda)$, por la de que dicha medida sea de variación acotada y el espacio de Banach X sea reflexivo, resultado que le cuestiona la posibilidad de sustituir así mismo la condición de que la medida υ pertenezca a la clase $V(Y,\lambda)$, llevándole a probar el siguiente teorema: " Sean μ y υ dos medidas de variación acotada definidas en Σ y con valores respectivamente en dos espacios de Banach reflexivos X e Y. Si $\upsilon \ll \mu$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existen dos medidas vectoriales $\mu_\varepsilon : \Sigma \rightarrow X$ y $\upsilon_\varepsilon : \Sigma \rightarrow Y$, y un operador fuertemente medible T_ε, tales que $|\mu-\mu_\varepsilon|(\Omega) < \varepsilon$, $|\upsilon-\upsilon_\varepsilon|(\Omega) < \varepsilon$ y

$$\upsilon_\varepsilon(A) = \int_A T_\varepsilon \, d\mu_\varepsilon ,$$

para todo $A \in \Sigma$ ", donde $|\mu-\mu_\varepsilon|$ y $|\upsilon-\upsilon_\varepsilon|$ representan las variaciones de las medidas $\mu-\mu_\varepsilon$ y $\upsilon-\upsilon_\varepsilon$, respectivamente.

A partir de los resultados expuestos, M. M. Rao enuncia un teorema de descomposición de tipo Lebesgue-Radon-Nikodym, que manteniendo las notaciones anteriores, se puede enunciar de la manera siguiente: " Si se verifica una cualquiera de las dos condiciones siguientes: I. Las medidas μ y υ pertenecen respectivamente, a las clases $V(X,\lambda)$ y $V(Y,\lambda)$. II. X es un espacio de Banach reflexivo, la medida μ es de variación acotada y la medida υ pertenece a la clase $V(Y,\lambda)$. Entonces, existen un conjunto $A_0 \in \Sigma$ y un operador fuertemente medible y esencialmente acotado $T:\Omega \to L(X,Y)$, tales que $|\mu|(A_0)=0$ y la igualdad

$$\upsilon(A) = \int_A T\, d\mu + \upsilon(A \cap A_0),$$

se verifica para todo $A \in \Sigma$ ", donde la integral que aparece es una integral general bilineal de tipo Bochner, en el sentido anteriormente expuesto.

Si X es un espacio de Banach y P es un cono positivo de su espacio dual, se puede definir en el espacio X un orden parcial (natural) de la manera siguiente: $x_1 \leq x_2$ $(x_1,x_2 \in X)$ cuando $x'(x_1) \leq x'(x_2)$ para todo elemento $x' \in P$, lo que permite considerar ciertas cuestiones sobre "comparación" de medidas, que encuentran una gran utilidad en la teoría de la inferencia de los procesos estocásticos de variables aleatorias vectoriales. De esta forma, se plantea el problema de encontrar un conjunto medible que "maximice" a una determinada medida vectorial $\upsilon:\Sigma \to X$, con la restricción de que los valores de una segunda medida $\mu:\Sigma \to X$ se "mantengan por debajo" de un elemento fijo x_0 del espacio X, es decir, encontrar un conjunto $A_0 \in \Sigma$ tal que $\mu(A_0) \leq x_0$ y $\upsilon(A) \leq \upsilon(A_0)$ para todo conjunto medible $A \in \Sigma$ con $\mu(A)=\mu(A_0)$. Una solución a este problema la constituye el teorema de Neyman-Pearson-Grenader, establecido por M. M. Rao en 1.967, a partir de su teorema de descomposición de Lebesgue-Radon-Nikodym, y que afirma que en el contexto anterior " si las medidas μ y υ pertenecen a la clase $V(X,\lambda)$ y la medida υ es positiva (e.d. $0 \leq x'\upsilon(A)$, para todo $A \in \Sigma$ y todo $x' \in P$), entonces si para $x_0 \in X$ existe un operador K acotado en X tal que $\mu(A_K) \leq x_0$, entonces el conjunto A_K es una solución del problema anterior, siendo

$$A_K = \{ w \in \Omega : T(w)f(w) \leq g(w),\ T(w)=K \} \cup A_0,$$

donde A_0 y T son respectivamente, el conjunto y el operador cuyas existencias afirma el citado teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym, y las funciones f y g verifican que

$$\upsilon(A) = \int_A g \, d\lambda$$

y

$$\int_A T \, d\mu = \int_A T(w)f(w) \, d\lambda ,$$

para todo $A \in S$ ". Este teorema extiende al caso vectorial el teorema de V. Grenander (1.950), que a su vez es una abstracción de un resultado conocido como lema fundamental de Neyman-Pearson, en teoría de la inferencia estadística.

Entre otras aplicaciones de los teoremas de diferenciación de M. M. Rao, obtenidas por él mismo, cabe destacar un teorema de representación integral de operadores débilmente compactos con valores en espacios de Banach, definidos en el espacio de las funciones (escalares) integrables según Dunford-Schwartz, con respecto a una medida perteneciente a la clase $V(X,\lambda)$, siendo como antes, X un espacio de Banach y λ una medida no negativa σ-finita, o con respecto a una medida de variación acotada valorada en un espacio de Banach reflexivo. A M. M. Rao (1.967) se debe también un teorema de diferenciación de medidas vectoriales con respecto a medidas también vectoriales, en el que la integral bilineal que aparece es de tipo débil (o Pettis) y que constituye uno de los escasísimos resultados existentes al respecto.

Unos años más tarde, H.B. Maynard (1.972) prueba un teorema de Radon-Nikodym para la integral de Dobrakov, que extiende al teorema de Radon-Nikodym clásico y establece que una medida m valorada en un espacio de Banach X es diferenciable con respecto a una medida de variación acotada μ, que toma valores en el espacio L(X,Y) de las aplicaciones lineales y continuas de X es un segundo espacio de Bnach Y, si y sólo si la medida m es de variación acotada, absolutamente continua con respecto a μ y para cada conjunto medible $A \in \Sigma^{+}$ (e.d. de μ-variación estrictamente positiva) existen un conjunto $B \in \Sigma^{+}$ contenido en A y un subconjunto compacto K de X, tales que B está "localizado" en K, es decir tales que, para cada $\varepsilon > 0$ se puede encontrar en conjunto $C_\varepsilon \in \Sigma^{+}$ contenido en B y un vector $x_\varepsilon \in K$ de forma que $\|m(C_\varepsilon)-\mu(C_\varepsilon)x_\varepsilon\| \leq \varepsilon \ |\mu|(C_\varepsilon)$. Por otra parte, J. Diestel y J. J. Uhl probaron en 1.977 que toda medida m de variación acotada definida en una σ-álgebra Σ de partes de un conjunto Ω, que toma valores en un espacio de Banach Y que posee la propiedad de Radon-Nikodym, es diferenciable con respecto a cualquier medida μ definida en Σ y valorada en un segundo espacio de Banach X (e.d. existe una función integrable

$f:\Omega \rightarrow L(X,Y)$ tal que

$$m(A) = \int_A f \, d\mu,$$

para todo $A \in \Sigma$), siempre que $m(A)=0$ para todo conjunto medible $A \in \Sigma$ tal que la semivariación de la medida μ en A sea cero.

En el año 1.984 obtuvimos en colaboración con nuestro discípulo A. Balbás, un teorema de tipo Radon-Nikodym para la integral definida por R. Rao y A.S. Sastry en 1.983, con la restricción de que el espacio en el que toma valores la aplicación bilineal utilizada para definir la integral, fuese un espacio de Banach. Este teorema contiene al probado por H.B. Maynard (y, por consiguiente, al teorema de Radon-Nikodym clásico) y en él se utiliza un concepto de localización que extiende de manera natural al introducido por H.B. Maynard y se impone una cierta condición de acotación a la semivariación de la medida respecto a la que se diferencia, que se verifica automáticamente en el caso de que dicha medida sea de variación acotada. Posteriormente, también en colaboración con A. Balbás, hemos probado en 1.987 un teorema de Radon-Nikodym para la integral de Rao-Sastry, en el que todos los espacios que aparecen son ya localmente convexos. Para ello se introduce un nuevo tipo de localización, que en el contexto de los espacios de Banach, es equivalente al definido por H.B. Maynard, y se supone que la medida respecto a la que se diferencia, verifica la **-propiedad, lo que se cumple trivialmente si la medida es de variación acotada. En ese mismo año y para la integral de Rodríguez Salazar, en espacios localmente convexos, probamos un teorema de Radon-Nikodym de tipo local, establecimos condiciones necesarias para la diferenciación de una medida con respecto aotra que verifique la **-propiedad y enunciamos, en el caso particular de que el espacio X (en el que toman valores las funciones integrables) sea un espacio de Banach, un teorema de Radon-Nikodym, que asegura que una medida m valorada en un espacio localmente convexo separado y completo Y, es diferenciable con respecto a una medida μ que toma valores en el espacio de las aplicaciones lineales y continuas de X en Y y que verifica la **-propiedad, si y sólo si la medida m es μ-continua y está uniformemente localizada.

Los teoremas de Radon-Nikodym propiamente dichos, referentes a la diferenciación de medidas vectoriales con respecto a medidas también vectoriales (o en particular, con respecto a medidas valoradas en espacios de operadores vectoriales) que aparecen en la literatura y que básicamente son los que hemos comentado, se obtienen mediante técnicas de localización de medidas o de conjuntos. Un primer teorema de tipo Radon-Nikodym para integrales vectoriales bilineales obtenido sin utilizar técnicas de localización, lo establecimos en 1.988 en colaboración con M^{a} E. Ballvé, mediante la introducción del conjunto de promedios de una medida vectorial valorada en un espacio localmente convexo X y controlada por una medida β, que toma valores en el espacio de las aplicaciones lineales y continuas de otro espacio localmente convexo X en Y. Dicho teorema afirma que si la medida β verifica la **-propiedad y el espacio de las funciones (X-valoradas) β-integrables es completo, entonces toda medida (Y-valorada) β-controlada, cuyo conjunto de promedios sea localmente pequeño, es diferenciable con respecto a β y que esta condición es también necesarias si X es un espacio de Fréchet. En el caso de espacios de Banach, Mª E. Ballvé ha extendido en 1.989, el concepto anterior de conjunto de promedios al caso de medidas no necesariamente β-controladas, siempre que los espacios X e Y coincidan y la medida β verifique el axioma de Price, lo que ha permitido estudiar el corazón de una función vectorial con respecto a una medida también vectorial y establecer las relaciones existentes entre el conjunto de promedios de una medida definida a partir de una función β-integrable, el corazón y el rango esencial de dicha función vectorial. Todo lo cual ha posibilitado la obtención de varios criterios de medibilidad de funciones así como de un teorema del valor medio, para la integral de Dobrakov, de manera mucho más sencilla de lo habitual.

Utilizando el concepto anterior de conjunto de promedios, Mª E. Ballvé ha probado recientemente, un teorema de tipo Radon-Nikodym para la integral de Dobrakov, que asegura la diferenciabilidad de una medida α valorada en un espacio de Banach X y absolutamente continua con respecto a una medida de semivariación acotada, que toma valores en L(X,X), verifica el axioma de Price y es continua, siempre que (la medida α) tenga un cojunto de promedios localmente pequeño, condición que recuerda a la condición R.N.6, que aparece en el teorema de Radon-Nikodym clásico, para la integral de Bochner.

Como se pone de manifiesto en el trabajo de Mª E. Ballvé, al que acabamos de referirnos, los resultados anteriores admiten una extensión a espacios de Fréchet e incluso a espacios vectoriales topológicos localmente convexos más generales.

Estas técnicas de construcción de conjuntos de promedios de medidas vectoriales, con respecto a medidas valoradas en espacios de operadores, abren una nueva via para el estudio de la diferenciación de medidas en integración vectorial vectorial bilineal, que esperamos permitirá trasladar a estas integrales, gran parte de los resultados conocidos sobre estas cuestiones, para la integral de Bochner.

Por otra parte, Mª E. Ballvé ha establecido recientemente un teorema de tipo Lebesgue, sobre la diferenciación de integrales vectoriales con respecto a medidas valoradas en espacios de operadores, en el contexto de los espacios de Fréchet, que extiende al teorema correspondiente para la integral de Bochner y cuyos métodos, cabe pensar, podrían extenderse al caso de espacios vectoriales topológicos (respectivamente, bornológicos) más generales.

La propiedad de Radon-Nikodym para integrales vectoriales bilineales, fué estudiada por nosotros en el año 1.987, mediante la definición de un nuevo concepto de control de medidas vectoriales, empleando casi exclusivamente técnicas de martingalas bilineales. Esperamos que la aplicación del concepto de conjunto de promedios, anteriormente mencionada, junto con la profundización en el estudio de las martingalas bilineales, permita ampliar el conocimiento que actualmente se tiene de estas cuestiones, tanto en el caso de espacios de Banach, como en el de otros espacios vectoriales topológicos más generales.

En el año 1.954, S. Kakutani propone un contraejemplo a una conjetura sobre operadores espectrales, que puede considerarse como el primer paso hacia el estudio del producto tensorial de medidas vectoriales, que como es bien sabido, no existe en general incluso cuando se trata de medidas valoradas en un mismo espacio de Hilbert real y la aplicación bilineal empleada en su definición, es el producto escalar correspondiente. Sin embargo, J.E. Huneycutt estableció en 1.972, la existencia del producto tensorial de dos medidas de variación acotada, valoradas en espacios normados, respecto a cualquier aplicación bilineal y continua definida en el producto de dichos espacios, que toma valores en un espacio de Banach, consiguiendo representar la medida producto mediante una integral bilineal (de tipo Bochner), y probar un teorema de tipo Fubini para esta integral, en el caso de que una de las medidas tenga rango separable.

Si las medidas consideradas no son de variación acotada, aparecen serias dificultades en relación con la integrabilidad de la medida de las secciones y la medibilidad de las integrales parciales, lo que ha motivado la consideración por parte de algunos autores, de productos tensoriales de medidas vectoriales, valorados en el producto tensorial inductivo o proyectivo (complementado) de los espacios en los que toman valores las medidas de partida. Así, M. Duchon e I. Kluvánek (1.967) han demostrado la existencia del producto tensorial inductivo de dos medidas valoradas en espacios localmente convexos, sin restricción alguna sobre las medidas y M. Duchon (1.969) ha probado un resultado del mismo tipo, para el producto tensorial proyectivo, bajo ciertas condiciones de continuidad o de control de las medidas. Posteriormente, C. Schwartz (1.975) ha extendido el teorema de M. Duchon al caso de productos de medidas valoradas en espacios localmente convexos, construidos mediante aplicaciones bilineales continuas, lo que ha permitido establecer la existencia en todos los casos, del producto tensorial de dos medidas valoradas en espacios localmente convexos separados, cuando la aplicación bilineal utilizada en su definición, es de tipo integral. En el año 1.983, R. Rao y A.S. Sastry, utilizando la integral bilineal definida por ellos, anteriormente mencionada, generalizan y unifican la mayor parte de los resultados sobre la existencia y la representación integral del producto tensorial de dos medidas vectoriales, a los que nos acabamos de referir.

Como ya hemos señalado anteriormente, I. Dobrakov ha obtenido mediante la integral por él definida, diversas condiciones necesarias y suficientes acerca de la existencia y la representación integral del producto tensorial de medidas valoradas en espacios de operadores, así como diferentes teoremas de tipo Fubini para ciertas clases de funciones, ofreciendo un completo análisis de los diferentes problemas planteados al respecto, todo ello en el contexto de los espacios de Banach. Gran parte de estos resultados han sido extendidos al caso de los espacios localmente convexos en la tesis doctoral de F.J. Fernández y Fernández-Arroyo (1.987), realizada bajo nuestra dirección, en la que también se prueban teoremas de tipo Fubini para la integral de Rao-Sastry y se estudia la convolución de medidas valoradas en espacios localmente convexos, definidas en la σ-álgebra de Borel de un semigrupo topológico. Por otra parte, en el año 1.989 hemos probado en colaboración con Mª E. Ballvé, la existencia del producto tensorial de dos medidas bornológicas (en el contexto de los espacios bornológicos convexos separados) siempre que el rango de una de ellas sea un acotado de la bornología y la otra verifique la **-propiedad, obteniendo una representación integral (bilineal bornológica) de dicho producto.

Aparte de las aportaciones de la teoría de la integración vectorial bilineal a cuestiones como la representación de operadores, el estudio de la existencia del producto tensorial y de la diferenciación de medidas vectoriales, la integración estocástica, los problemas de optimización y de momentos, la mejora de los métodos empleados en mecánica cuántica y en teoría de la comunicación y la clarificación de la relación existente entre ambas teorías, así como de sus muchas otras apliciones y ventajas, pensamos que el interés de los numerosos problemas por resolver que aún plantea, hacen necesario un mayor abundamiento en el estudio de la misma.

El comprobar como el trabajo y el esfuerzo humanos contribuyen al desarrollo de nuevas teorías y al perfeccionamiento de otras ya existentes, produce siempre una profunda sensación de satisfacción y estímulo, sabiendo que la importancia de nuestro obrar no se mide por el esplendor o la grandeza humana de la obra en sí considerada, ya que el producto de cualquier acción humana es, en sí mismo, insignificante ante el que ha creado el Universo. El puede hacerlo infinitamente mejor. Sin embargo, el amor con que se realiza y por el que se realiza la acción de la criatura humana libre es algo propio y exclusivo de ella. Es la respuesta a la solicitud divina. Es lo único valioso que puede ofrecer, porque es, ni más ni menos, la entrega de sí mismo en cada obra. Esta es la acción del Espírutu Santo en nosotros, hacer que en cada momento estemos en disposición de entrega generosa a los demás. A El pido confiadamente, que infunda en mi una actitud de servicio constante en mi trabajo en la Academia y en general en todos los instantes de mi vida.

Muchas gracias.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Ballvé, M^{a} E. : *Espacios* L^{p} *de funciones vectoriales*. Tesis Doctoral. U.N.E.D., 1.988.

Barnett, C. y I.F. Wilde: *Belated integrals*. J. Func. Anal.,66 (1.986), 283-307.

Bartle, R.G.: *A general bilinear vector integral*. Studia Math. 15 (1.956), 337-352.

Bombal, F.: *El teorema de Radon-Nikodym en espacios de Banach. Espacios con la propiedad de Radon-Nikodym*. Univ. Complutense, Madrid, 1.977.

Bravo, R.: *Tópicos en integración vectorial bilineal*. Tesis Doctoral, U.N.E.D., 1.986.

Déviève, C.: *Integration of vecrtor valued functions with respect to vector valued measures*. Rev. Roum. Math. P. et Appl., 26 (1.981), 943-957.

Diestel, J. y J.J. Uhl : *Vector measures*. Math. Surceys, t. 15, Amer. Math. Soc., Providence R.I., 1.977.

Dobrakov, I. : *On integration in Banach spaces* I,II,...,XI. Czech. Math.J., 20, 21, 29, 30, 35, 37, 38, 40 (1.970, 71, 79, 80, 85, 87, 88, 90).

Escribano, C. : *Espacios de Orlicz de funciones vectoriales*. Tesis Doctoral, U.N.E.D., 1.990.

Fernández, F.J. : *Producto de medidas valoradas en espacios* *localmente convexos*. Tesis Doctoral, U.N.E.D., 1.987.

Hildebrandt, T.H. : *Integration in abstract spaces*. Bull. Amer. Math. Soc., 59 (1.953), 111-139.

Jiménez Guerra, P.: *Derivación de medidas e integración vectorial bilineal*. Rev. R. Acad. Ci. Madrid, 82 (1.988), 115-128.

---------------- y B. Rodríguez-Salinas : *On the completeness of* L^{α} *for locally convex spaces*. Arch. Math., 52 (1.989), 82-91.

Kluvanek, I. : *Applications of vector measures*. Contemporary Math., Proc. of the conference on "Integration, topology and geometry in linear spaces". Amer. Math. Soc., t. 2, 101-134.

Kopp, P.E. : *Martingales and stochastic integrals*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1.984.

Maynard, H.B. : *A Radon-Nikodym theorem for operator valued measures*. Trans. Amer. Math. Soc., 173 (1.972), 449-463.

Rao, M.M.: *Abstract Lebesgue-Radon-Nikodym theorems*. Ann. Mat. P. Appl., 76 (1.967), 107-131.

Rao Chivukula, R. y A. S. Sastry : *Product vector measures via Bartle integrals*. J. Math. Anal., 96 (1.983), 180-195.

Rodríguez Salazar, S. : *Integración general en espacios localmente convexos*. Tesis Doctoral. Univ. Complutense, 1.985.

Rodríguz-Salinas, B.: *Integración de funciones con valores en un espacio localmente convexo*. Rev. R. Acad. Ci. Madrid, 73 (1.979), 361-387.

------------------ : *La propiedad de Radon-Nikodym, σ-dentabilidad y martingales en espacios localmente convexos*.

Rev.R. Ci. Madrid, 74 (1.980), 65-89.

-----------------: *In Memoriam, D. Enrique Linés Escardo:* Rev. R. Ci. Madrid, 82 (1.988), 365-369.

Roy, S.K. y N.B. Chakraborty : *Integration of vector-valued functions with respect to on operator-valued measure.* Czech. Math. J., 36 (1.986), 198-209.

Volkmer, H. y H. Weber : *A unified treatments of vector integration.* Comm. Math. Univ. Sancti Pauli, 31 (1.982), 33-48.

-------------- y --------- : *A new approach to integral representation of linear operators.* Boll. U.M.I., 3 (1.984), 171-197.

DISCURSO DE CONTESTACION

DEL

EXCMO. SR. D. BALTASAR RODRIGUEZ-SALINAS PALERO

Excmo. Sr. Presidente.

Excmos. Sres. Académicos.

Señoras y Señores.

Agradezco profundamente a la Academia el honor que me ha dispensado, gratísimo para mí, de recibir en su nombre al que desde hoy va a ser nuestro compañero en esta corporación: el Profesor Jiménez Guerra.

Varios son los motivos que contribuyen a hacer jubilosa mi tarea. El principal, desde luego, es por ser Jiménez Guerra uno de mis discípulos predilectos. Efectivamente, he tenido yo la fortuna de contar con un número crecido de buenos discípulos y, justamente, uno de ellos es Jiménez Guerra. Creo que puedo todavía llamarles discípulos, ellos me lo dispensarán, aunque hayan remontado el vuelo a cimas más altas.

Desde el primer momento que le traté se me hizo patente el entusiasmo, laboriosidad y profunda inteligencia de Jiménez Guerra, especialmente en todas las cuestiones que le planteé. Mi atención tuvo pronta contestación y él se incorporó a mi equipo de tal modo que, entre todos mis discípulos, es el que más de cerca ha seguido mis investigaciones en la teoría de la medida.

Sucede Jiménez Guerra a D. Enrique Linés Escardó de grato recuerdo en esta Casa por sus condiciones naturales y su alto prestigio de buen profesor. Al incorporarse Jiménez Guerra a la U.N.E.D. estableció una estrecha relación con el Prof. Linés, que supo combinar con la que le unía a mi. Por esa relación parecía muy indicado él para ocupar el sillón que dejaba vacante Linés con su defunción.

Nació Jiménez Guerra en Madrid, en 1.951. Cursó la licenciatura en Matemáticas en la Universidad Complutense de Madrid, donde alcanzó brillantes calificaciones. En 1.973 finalizó la licenciatura con la calificación de sobresaliente y dos años más tarde, en 1.975, se doctoró en Ciencias Matemáticas con la calificación de sobresaliente "cum laude" por la Universidad Complutense. Un año más tarde se licenció, en 1.976, en C.C. Empresariales por I.C.A.D.E..

Inmediatamente, después del Doctorado, ganó brillantemente las oposiciones de Profesor Agregado de Matemáticas de Instituto (1.976), Catedrático de Matemáticas de Instituto (1.976), Profesor Adjunto de Matemáticas I de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense (1.978), Profesor Agregado de Análisis Matemático II de la Facultad de Ciencias de la U.N.E.D. (1.980), desde donde pasó a Catedrático de Análisis Matemático de la misma Universidad (1.983).

Es Académico Correspondiente de esta Real Academia de Ciencias desde 1.987 y referente de Mathematical Reviews y de Zentralblatt für Mathematik. También ha hecho informes de trabajos de investigación para Collectanea Mathematica, para la Revista Matemática de Universidad Complutense de Madrid y para la Revista de esta Academia.

Sucedió a D. Enrique Linés como Director del Departamento de Matemáticas Fundamentales de la U.N.E.D.en el período 1.984-1.986.

Ha sido invitado para dar conferencias o seminarios en las Universidades: Paul Savatier de Toulouse, Trinity College de la Universidad de Dublín, Universidad de Indiana, Universidad de Paris VI, Universidad de Paris XI, Universidad de Nápoles, Universidad de Poznan, Universidad de Bratislava, Universidad de Praga, Universidad de Riverside (California), etc..

Ha asistido a numerosos Congresos nacionales y extranjeros (Burdeos, Luxemburgo, Braga, Coimbra, Berkeley, Capri, etc.).

La labor investigadora de Jiménez Guerra abarca varias líneas de investigación que enunciamos a continuación

- Extensión de funciones (teoremas de tipo Hahn-Banach): 1, 3, 9, 10 (ver páginas finales).
- Regularidad de medidas. Medidas de Radon de tipo ($\mathscr{H}$): 4, 5, 8, 16, 17.
- Espacios de Radon: 2.
- Operadores en espacios de medidas: 20.
- Convergencias en espacios de medidas: 6, 7, 11, 19.
- Medidas cilíndricas: 12.
- Medidas arquimedianas y Propiedad de Darboux: 14, 18.

- Medidas valoradas en grupos y semigrupos: 15, 21.

- Integración vectorial, derivación de medidas, espacios L^p, representación de operadores, integración bilineal, integración bornológica, límites proyectivos y productos tensoriales de medidas vectoriales: 22 al 27, 29 y del 31 al 45.

Jiménez Guerra ha colaborado en revistas matemáticas internacionales de gran prestigio. Tarea que sigue a ritmo verdaderamente vertiginoso. De entre estas revistas destacamos las siguientes: Comptes Rendus de l'Academie des Sciences de Paris, Lectures notes in Mathematics, Proceedings of the Royal Irish Academy, Matematische Narichten, Nagoya Mathematical Journal, Czechoslovak Mathematical Journal, Mathematica Japonica, Archiv der Mathematik, Simon Stevin, etc.. Y no olvidamos las revistas españolas como nuestra revista, donde ha publicado ocho trabajos, Collectanea Mathematica, Revista Matemática Hispano-Americana y Revista Matemática de la Universidad Complutense de Madrid. También ha publicado dos memorias en esta Real Academia.

Por otra parte, la recensión de estos trabajos va apareciendo en las páginas de *Mathematical Reviews* y *Zentralblatt fur Mathematik* y a ellas nos remitimos para mayor conocimiento de la labor realizada por el Prof. Jiménez Guerra.

Paso ahora a comentar, en forma breve, la magnífica lección que sobre origen y evolución de la integración vectorial, ha desarrollado el nuevo Académico. Por su alto grado de especialización, no todos habrán podido seguir su exposición, pero se debe comprender que en estos actos se quiere exponer algo original y las preocupaciones que invaden al Recipiendario. Esto no ocurre sólamente con los Académicos de Ciencias Exactas sino también con los miembros de otras Secciones. Así, por ejemplo, las exposiciones de los Académicos de Químicas no son, en general bien seguidas, por los de Ciencias Exactas. La cosa se comprende si se observa que la formación matemática de los químicos es superior a la formación en Ciencias Químicas de los matemáticos. Entre matemáticos y físicos había una mayor compenetración porque en los planes antiguos de enseñanza los matemáticos estudiaban bastante física y los profesores de matemáticas de los físicos eran matemáticos, cosa que ahora desgraciadamente no ocurre. Así en la actualidad los matemáticos conocen superficialmente la Física y los físicos desconocen los problemas de la Matemática Pura en su propia salsa. La especialización es buena y necesaria, pero la experiencia prueba que si se exagera es mostruosa y contraria a la Ciencia.

Ante la imposibilidad de comentar todos los aspectos tratados en la exposición de Jiménez Guerra voy a limitarme a las aplicaciones. Para ello, en primer lugar, voy a dar una idea sencilla de las cuestiones consideradas, cosa que a mi juicio no produce desdoro porque en ellas está el germen de todo.

Desde la recta real la Matemática ha pasado a estudiar los espacios $\mathbb{R}^n$ de dos, tres y n dimensiones. De aquí se ha pasado a los espacios de Hilbert de infinitas dimensiones y después a los espacios de Banach, espacios localmente convexos, etc.. Dichos espacios tienen dos estructuras importantes para las aplicaciones, una algebraica como espacios vectoriales y otra topológica con objeto de hacer posible las aproximaciones. Obsérvese que el cálculo y la aproximación son el fundamento de todas las ciencias naturales.

Por otra parte, ocurre que en muchos problemas conviene estudiar las funciones en bloque, no de una manera individual, y eso se realiza de una manera sencilla, intuitiva y cómoda considerando los espacios funcionales que, precisamente, tienen una estructura topológica y vectorial. Uno de ellos es el conjunto $C(\Omega)$ de las funciones reales continuas definidas sobre un subconjunto compacto o abierto Ω de $\mathbb{R}^n$. En el primer caso este conjunto es un espacio vectorial normado y completo, esto es, un espacio de Banach. La derivación de las funciones continuas no es siempre posible dentro del conjunto de dichas funciones, pero sí si se consideran otros elementos como las distribuciones de Schwartz. Pero, justamente, para ello se deben condiderar los espacios localmente convexos formados por las funciones indefinidamente derivables sobre un abierto de $\mathbb{R}^n$ y por las mismas distribuciones. Una consecuencia del empleo de las distribuciones es la posibilidad de utilizar rigurosamente la δ de Dirac y sus derivadas.

Algunos menosprecian las generalizaciones y, en algunos casos, puede haber razón para ello, pero se debe reconocer que las generalizaciones son muchas veces necesarias para resolver los problemas planteados en una teoría. La Matemática no se puede comprender sin esta orientación a la generalización, aunque los abusos desacrediten ello en algunos casos aislados. Los buenos matemáticos no han desdeñado las generalizaciones y la experiencia prueba no sólo su utilidad para resolver muchos problemas sino también en la ampliación y desarrollo de la Matemática.

La integral más sencilla es de la forma $\int_a^b f(x)\,dx$, pero en ella hay condensada una serie de sucesivas generalizaciones sobre las funciones f(x) empleadas. Las más importantes debidas a Cauchy, Riemann y Lebesgue: Con la integral de Cauchy se pueden integrar las funciones continuas y con la integral de Lebesgue los espacios construidos son completos al ser convergentes en ellos las sucesiones de Cauchy.

Con Stieltjes aparece la integral $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ donde $\alpha(x)$ es una función no decreciente o de variación acotada. Ella encuentra numerosas aplicaciones y, en particular en el Cálculo de Probabilidades cuando $\alpha(x)$ es una función de distribuición F(x). Una particularidad que tiene esta integral es que con ella quedan incluidas las series. Otras integrales, las integrales dobles y múltiples, encuentran su generalización en las integrales $\int_A f(x)d\mu(x)$ extendidas sobre un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ y donde μ es una medida sobre A, que puede ser un "área", un "volumen" o una "masa". Estas integrales encuentran aplicación en la expresión del centro de gravedad y de los momentos de inercia y son susceptibles de nuevas generalizaciones exigidas por las mismas aplicaciones. Así se pasó a considerar integrales definidas para funciones medibles y para medidas abstractas definidas sobre un conjunto arbitrario A.

Otra generalización importante de las integrales múltiples se encuentra en la integración sobre una variedad. Resulta que si se efectúa un cambio de variables en una integral doble $\iint f(x,y)dxdy$, al efectuar el producto $dxdy = (x_u\ du + x_v\ dv)(y_u\ du + y_v\ dv)$ en la forma acostumbrada, se llega a un disparate. En efecto, para que el resultado sea correcto, se debe escribir $dudu = dvdv = 0$ y $dudv = -dvdu$. Entonces se debe utilizar un producto exterior y no un producto ordinario. Así, utilizando las cartas, se puede definir la integral sobre una variedad de una manera intrínseca.

Entre las integrales sobre una variedad ocupan un lugar importante las integrales curvilíneas de una función analítica compleja. Una propiedad importante ocurre y es que cuando se deforma de manera continua el camino, permaneciendo fijos sus extremos, la integral no varía. En la Física ocurre una cosa análoga con el trabajo realizado por una fuerza en un campo conservativo y, en general, en un campo vectorial donde el rotacional o la divergencia es igual a cero. Pero estas propiedades admiten generalización, pues, existen integrales sobre una variedad de $\mathbb{R}^n$ que son invariantes cuando ésta se deforma de manera continua en un conjunto abierto, permaneciendo fijo su contorno. Por ello se comprende el interés que tiene el estudio de la homotopía y de la homología para tratar estas cuestiones.

La integral de Stieltjes, ya citada, $\int f(x)\ d\alpha(x)$ o $\int f(x)\ d\mu(x)$ se refieren a funciones escalares y ambas son bilineales por ser lineales respecto de f, α o μ. Pero no podemos quedarnos aquí porque las mismas aplicaciones han exigido otras generalizaciones.

Hasta ahora hemos hablado solamente de integrales de funciones escalares, pero las expresiones $x = \int_{t_o}^{t} v\ dt$ y $v = \int_{t_o}^{t} a\ dt$ del vector posición x mediante el vector velocidad v y de éste mediante el vector aceleración a, nos llevan a considerar la integración de funciones vectoriales. Estas funciones vectoriales se refieren a espacios de dimensión finita, pero la cosa no termina aquí porque el problema de la representación espectral de un operador autoadjunto $T:H \rightarrow H$ sobre un espacio de Hilbert H, tan importante en la Mecánica Cuántica, nos lleva a considerar una integral del tipo Stieltjes

$$T = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\ dE(\lambda)\ ,$$

donde la función $\alpha = E$ es un operador y, por tanto, un vector, mejor dicho una función vectorial.

Basta relacionar ambas ideas para que surjan las integrales

$$\int_{\Omega} f(x)\ dm(x)$$

donde f es una función vectorial y m es una medida vectorial sobre un conjunto Ω tales que está definido un producto bilineal sobre los espacios vectoriales de los valores de f y de m. Una integral de tipo análogo aparece ya en la Física cuando se expresa el trabajo como integral curvilínea $\int Fdx$ del producto escalar de la fuerza F y de la diferencial del vector posición x.

La aplicación T que asigna a la función f la integral

$$\int_\Omega f(x)\, dm(x)$$

es lineal y continua para ciertas topologías, esto es, es un operador. Pero lo más importante o, al menos, lo más sugestivo es que vale el recíproco para ciertos operadores lineales T, es decir, que existe una medida vectorial m tal que

$$Tf = \int_\Omega f(x)\, dm(x).$$

La teoría tiene un importante precedente en el teorema de Riesz para los funcionales positivos sobre el espacio de las funciones reales continuas definidas en un espacio compacto o localmente compacto.

Hay un concepto de derivación utilizado en la Física que ha tenido un desarrollo importante en la Matemática. Me refiero al concepto de densidad. Para definirlo se calcula el cociente de la masa contenida en una bola de centro x y de radio r y del volumen de la misma bola, y se hace tender r a cero. Naturalmente, este límite puede no existir y además puede ocurrir que la integral de la densidad respecto del volumen puede no ser igual a la masa. Este problema de diferenciación de medidas encuentra una primera generalización cuando se calcula la derivada de una medida respecto de la medida de Lebesgue, que viene a ser el volumen, pero el método, debido a Vitali, se puede extender de una forma general definiendo la densidad de la medida m respecto de μ por la propiedad de que

$$m(A) = \int_A f \, d\mu$$

para todo conjunto medible A, esto es, perteneciente al dominio de μ. Para ello una condición necesaria es inmediata: que $m(A)=0$ cuando $\mu(A)=0$, lo cual se expresa diciendo que la medida m sea absolutamente continua respecto de μ o, brevemente, que sea μ-continua. Otra condición necesaria consiste en que m sea de variación acotada y ambas son suficientes para medidas escalares, pero para medidas vectoriales, en general, no, dando así lugar a una importante teoría sobre los teoremas y propiedades de Radon-Nikodym.

Las anteriores consideraciones ponen de manifiesto que las leyes de la naturaleza se adaptan maravillosamente a las leyes matemáticas de caracter lineal. Por ello se puede decir expresivamente que la "linealidad" invade a toda la naturaleza. ¡Cuánta poesía hay en la naturaleza, pero también cuánta matemática hay en ella!.

El hombre puede tener pensamientos muy abstractos y elevados, pero su forma de vida le lleva a no separarse demasiado de la naturaleza. No obstante, si no percibe las aplicaciones de su pensamiento, él pierde mucho, incluso en profundidad. Esto se puede decir en el caso particular de los matemáticos, que aunque hablan regularmente en "prosa", deben saber que hablan en prosa cuando corresponda. El matemático tiene también que observar de una manera penetrante de modo que de cosas casi imperceptibles pueda llegar a conclusiones profundas. En ello hay algo o mucho de poesía y arte acompañados del rigor.

Se da la circustancia que los matemáticos que han hecho las mayores contribuciones a la Matemática Aplicada no han sido, generalmente, los especialistas en tal materia sino grandes matemáticos puros como Arquimedes, Newton, Euler y otros. La cosa se explica fácilmente porque tales matemáticos conocían profundamente la matemática y así disponían de recursos capaces de abordar muchos de los dificiles problemas de la Matemática Aplicada. Pero estos matemáticos no se prodigan demasiado y han de pasar muchos siglos hasta que aparezca otro de esa categoría. Las contribuciones matemáticas importantes encuentran siempre aplicaciones importantes. Un ejemplo lo tenemos con las investigaciones de Riemann en Geometría Diferencial que han encontrado aplicación en la Teoría de la Relatividad General.

Siguiendo la marcha que nos hemos trazado, vamos a subrayar brevemente las principales aplicaciones de la integración bilineal en otro plano más técnico y abstracto, algunas han sido ya citadas por Jiménez Guerra en su discurso. Ellas son:

1. Representación de operadores vectoriales.

2. Teoremas de representación espectral.

3. Establecimiento de la existencia y representación de la medida producto tensorial de medidas vectoriales.

4. Diferenciación de medidas vectoriales respecto de medidas también vectoriales.

5. Resolución de problemas de momentos en su versión vectorial.

6. Resolución de problemas de optimización en su versión vectorial (en particular, problemas vectoriales de transporte de masas).

7. "Comparación" de medidas vectoriales, cuestión de gran utilidad en la teoría de la inferencia estadística de los procesos estocásticos vectoriales.

8. Contribución a la mejora de los métodos empleados en Mecánica Cuántica y en Teoría de la Comunicación, así como a la clarificación de la relación existente entre ambas teorías.

9. Aplicación a la integración estocástica y a la resolución de ecuaciones estocásticas.

10. Según afirma Kluvánek, Jauch probó empleando la integral (bilineal) de Bartle que las teorías de "scattering", "stationary" y "time-dependent", consideradas en Mecánica Cuántica, son equiva-

lentes. También según Kluvánek, la integración bilineal tiene una utilidad en algunos problemas de la "realizability theory" del ti tipo a la que encuentra en la "scattering theory".

11. Obtención de la integral de Feynman de manera sencilla y directa (sin la utilización de medidas gaussianas).

La semblanza de nuestro nuevo compañero quedaría incompleta si no destacara con enfasis su labor como profesor, y sobre todo, su extraordinaria capacidad para iniciar y orientar en la investigación matemática a sus discípulos. En efecto, en la actualidad hay un numeroso grupo de jóvenes que trabajan intensamente bajo la dirección del también joven profesor Jiménez Guerra.

Al daros hoy nuestra más cordial bienvenida, querido Pedro, quiero acompañarla de nuestra enhorabuena por lo que este acto significa de reconocimiento de vuestros méritos científicos y de las magníficas condiciones que os adornan. Quiero también dar la enhorabuena a nuestra Academia que, al recibiros en su seno, cuenta con una personalidad joven de infatigable laboriosidad que augura una fecunda colaboración en las tareas de esta Casa.

PUBLICACIONES DEL PROFESOR JIMENEZ GUERRA

1. *Sur une généralisation du théorème de Hahn-Banach*. C. R. Acad. Sc. Paris, 278 (1.974), A-1.087-1.088.
2. *Espacios de Radon de tipo* ($\mathcal{H}$). Rev. R. Acad. Ci. Madrid, 69 (1.975), 761-774. (En colaboración con B. Rodríguez-Salinas).
3. *Sobre la extensión de funciones aditivas en semigrupos preordenados*. Rev. Mat. Hispano-Amer., 37 (1.977), 155-165.
4. *Stability of tensor product of Radon measures of type* ($\mathcal{H}$). Lectures Notes in Math., 645 (1.977), 97-108.
5. *Compactness in the space of Radon measures of type* ($\mathcal{H}$). Proc. R. Irish Acad., 78 (1.978), 199-216.
6. *Convergencia para redes de límites proyectivos de medidas de Radon*. Collect. Math., 29 (1.978), 11-20.
7. *Sobre la convergencia de medidas*. Rev. R. Acad. Ci. Madrid, 72 (1.978), 610-612.
8. *Medidas de Radon de tipo* ($\mathcal{H}$) *en espacios topológicos arbitrarios*. Memorias de la R. Acad. Ci. Madrid, tomo 10, 1.979. (En colaboración con B. Rodríguez-Salinas). Consta de los siguientes capítulos : I. *Conceptos fundamentales*. II. *Medidas exterio-*

res de Borel. III. *Medidas exteriores topológicas.* IV. *Medidas exteriores topológicas inducidas por un contenido.* V. *Conjuntos medibles* VI. *Medidas exteriores esenciales.* VII. *Medidas de Radon.* VIII. *Medida imagen.* IX. *Producto de una medida por una función. Producto tensorial de medidas.* X. *Límite proyectivo de medidas.*

9. *Generalizaciones del teorema de Hahn-Banach para semimódulos preordenados.* Memorias de la R. Acad. Ci. Madrid, tomo 12, 1.979. Consta de los siguientes capítulos: I. *Extensión de funciones aditivas en semigrupos preordenados.* II. *Estudio de funciones auxiliares.* III. *Generalización sobre semimódulos preordenados del teorema de Hanh-Banach.*

10. *Sur l'extension des fonctions additives continues sur semigroupes topologiques preordonnés.* Math. Nachr., 91 (1.979), 127-133.

11. *Criterios de convergencia de redes de medidas de conjuntos Riemann-integrables.* Rev.R.Acad. Ci. Madrid, 74 (1.980), 933-938.

12. *Un criterio de correspondencia entre las medidas cilíndricas y las medidas de Radon de tipo* ($\mathcal{H}$). Rev. R. Acad. Ci. Madrid, 74 (1.980), 111-115.

13. *Algebra* I. U.N.E.D., primera edición en 1.980, segunda en 1.982, tercera en 1.984 y cuarta en 1.990.

14. *Sur la propiété de Darboux.* Ann. Sc. Math. Québec, 5 (1.981), 45-57. (En colaboración con M. Soler).

15. *Propiedades de convexidad para medidas valoradas en semigrupos.* Actas VIII Jornadas Luso-Espanholas de Mat.,Coimbra, 3 (1.981), 163-167.

16. *Strictly localizable measures.* Nag. Math.J., 85 (1.982), 81-86, (En colaboración con B. Rodríguez-Salinas).

18. *Mesures archimediènnes et ϑ-propiété de Darboux.* Actualités Math., Gauthier-Villars, Paris, (1.982), 383-386. (En colaboración con J. Fernández Novoa).

19. *Estabilidad de la convergencia débil de medidas.* Collect. Math., 34 (1.983), 207-220. (En colaboración con J. Fernändez Novoa).

20. *Operateurs dans les espaces de mesures.* Ann. Sc. Math. Québec, 7 (1.983), 95-101. (En colaboración con J. Fernández-Novoa).

21. *On the range of semigroup valued measures.*Collect. Math., 35 (1.984), 71-83.

22. *Un teorema de Radon-Nikodym para integrales bilineales.* Rev. R. Acad. Ci. Madrid, 78 (1.984), 217-220. (En colaboración con A. Balbás).

23. *An Egorov's theorem for vector functions.* Bull. Austral. Math. Soc., 31 (1.985), 451-462. (En colaboración con J.L. de María).

24. *Algunas propiedades de $\mathcal{L}^{\alpha}$ para funciones valoradas en espacios localmente convexos.* Actas XII Jornadas Luso-Espanholas de Mat., Braga, 3 (1.987), 375-379.

25. *Representation of operators by bilinear integrals.*Czech. Math. J., 37 (1.987), 551-558. (En colaboración con A. Balbás).

26. *A Radon-Nikodym theorem for a bilinear vector integral in*

locally convex spaces. Math. Japonica, 32 (1.987), 863-870. (En colaboración con A. Balbás).

27. *Derivación de medidas e integración vectorial bilineal.* Rev. R. Acad. Ci. Madrid, 82 (1.988), 115-128.

28. *Leibnitz.* Historia de la Matemática en los siglos XVII y XVIII, R. Acad. Ci. Madrid, 1.988, pp. 61-74.

29. *On the completeness of* L^{α} *for locally convex spaces.* Arch. der Math., 52 (1.989), 82-91.(En colaboración con B. Rodríguez-Salinas).

30. *Leibnitz y los orígenes del Cálculo.* Cor Unum., 208 (1.989), 180-193.

31. *Integración bilineal bornológica.* Rev. R. Acad. Ci. Madrid, 83 (1.989), 35-47. (En colaboración con Mª E. Ballvé).

32. *Operators and* L^{α} *spaces.* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, 38 (1.990), 171-178. (En colaboración con Mª E. Ballvé).

33. *On the Radon-Nikodym theorem for operator valued measures.* Simon Stevin, 64 (1.990), 141-155. (En colaboración con Mª E. Ballvé).

34. *On the Prokhorov's theorem for vector measures.* Comm. Math. Univ. Sancti Pauli, 39 (1.990), 127-139. (En colaboración con F. J. Fernández).

35. *Projective limits of vector measures.* Rev. Mat. Univ. Complutense, 3 (1.990). (En colaboración con F.J. Fernández).

36. *On the Radon-Nikodym property for operator valued measures.* Apaparecerá en Math.Hungarica. (En colaboración con F. J. Fernán-

dez).

37. *Linear operators and vector integrals.* Aparecerá en Math. Japonica. (En colaboración con R. Bravo).

TRABAJOS INEDITOS Y EN PREPARACION

38. *On the integration in convergence spaces.* (En colaboración con Mª E. Ballvé).

39. *Fubini theorems for bornological measures.* (En colaboración con Mª E. Ballvé).

40. *On the Sazonov and Minlos theorems for vector valued measures.* (En colaboración con F. J. Fernández).

41. *A general solution for the mass transfer problem.* (En colaboración con A. Balbás).

42. *On the inifinite product of vector measures.* (En colaboración con F.J. Fernández).

43. *A Pettis bilinear vector integration.*

44. *On the Radon-Nikodym property in vector bilinear integrations.*

45. *Vector and stochastic integrals.* (En colaboración con I. Dobrakov).