

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

Espacio, Tiempo, Materia

DISCURSO

LEIDO EN EL ACTO DE SU RECEPCION

POR EL

EXCMO. SR. D. FRANCISCO J. YNDURÁIN MUÑOZ

Y

CONTESTACION

DEL

EXCMO. SR. D. ALBERTO GALINDO TIXAIRE

EL DIA 29 DE MAYO DE 1996



MADRID

DOMICILIO DE LA ACADEMIA:

VALVERDE, 22 — TELEFONO 521 25 29

1996

Reproducido por Realigraf, S. A.
Pedro Tezano, 26 - 28039 Madrid
Dep. Legal M-16023-1996

Espacio, Tiempo, Materia

Francisco J. Ynduráin Muñoz

Discurso de ingreso a la Real Academia de Ciencias

Madrid, Diciembre, 1993
(Revisado Julio, 1995)

-ESPACIO, TIEMPO, MATERIA-

Vanidad de la Sabiduría

Me volví a mirar a la sabiduría, a la estulticia, a la necedad, porque, ¿qué hará el hombre que viene en pos del rey? Lo que ya se ha hecho. Y vi que la sabiduría sobrepuja a la ignorancia cuanto la luz a las tinieblas. El sabio tiene ojos en la frente y el necio anda en tinieblas. Vi también que una misma es la suerte de ambos.

Eclesiastés, 2: 12 - 14.

Excmo. Sr. Presidente, *Excmos.* Sres. Académicos, Señoras, Señores

Vengo a esta Academia a ocupar la medalla 22; y es la mía, como toda incorporación a esta institución, motivo a la vez de alegría y tristeza: lo segundo porque tal incorporación es sólo posible por una desaparición previa. En mi caso, la de un pionero de una de las ciencias y técnicas modernas en España, el profesor García Santesmases.

No llegué a conocerle personalmente, salvo una coincidencia en el claustro de la Universidad Complutense en mi fugaz paso por ella, ni tuvieron sus intereses profesionales comunidad con los míos. Ello no implica desconocimiento por mi parte: pocas personas en la España científica podían ignorar su personalidad, y contribuciones. No sólo por su calidad sino por algo tal vez más importante a saber: su proyección de futuro. Estuvo, efectivamente, el Profesor García Santesmases entre los primerísimos en interesarse por el cálculo automático y en introducirlo en España. Y ello en una época, los primeros años cincuenta, en que el número de ordenadores en funcionamiento en nuestro país era infinitésimo. Tanto desde su cátedra en la Facultad, como en el CSIC (en donde dirigió el Instituto de Electricidad y Automática) impulsó D. José García Santesmases la entonces nueva ciencia de la informática. Cabe preguntarse lo que hubiera ocurrido en nuestro país si las Administraciones españolas de la época, miopes ante lo que consideraban poco más que una curiosidad, hubieran impulsado la informática, en particular en conexión con los países más desarrollados. Aspectos ambos, la importancia de la informática, como la de la dimensión universal de la ciencia, en los que insistió siempre mi ilustre predecesor en esta medalla.

No es difícil encontrar, entre las personas que ostentaron la medalla 22 (como por supuesto cualquier medalla de esa Academia), y aparte del Profesor García Santesmases, personas de gran valía humana y científica. Séame permitido, sin embargo, singularizar a otro de mis antecesores debido a la relación, breve pero para mí muy significativa, que tuvo con mi persona.

En el verano de 1956/57 se organizaron en la Universidad Internacional Menéndez Pelayo, en el palacio de la Magdalena en Santander, unas jornadas científicas consistentes en conferencias dirigidas a un auditorio no experto. Entre los participantes *senior* en dichas jornadas, además de algunos de los ilustres académicos que nos acompañan, se encontraba D. Miguel Catalán.

No he guardado en la memoria la conferencia oficial que dictó el Profesor Catalán; pero sí recuerdo que ante las preguntas insistentes de la audiencia (entre la que me encontraba yo, supliendo con entusiasmo mi ignorancia) accedí a participar en un coloquio informal:

coloquio que tuvo lugar sentados sobre la hierba a la sombra de unos pinos y que versó sobre la física de partículas elementales. Aunque el profesor Catalán confesó no ser experto en la especialidad, no cabe duda que la seguía con atención y comprensión profundas. Aún hoy recuerdo su explicación de la existencia de antimateria; a la vez rigurosa y accesible y todavía la mejor que conozco. "Imaginaros (nos dijo más o menos el profesor Catalán) que el vacío es una masa homogénea gris. En ella flotan unas bolas negras, la materia; y unos huecos blancos, la antimateria. Al juntarse se aniquilan en la masa gris".

La segunda vez que me encontré con la huella del Profesor Catalán (la huella, porque desgraciadamente él había muerto poco después del coloquio de Santander) fue al estudiar física cuántica. El libro clásico de espectroscopía atómica ha sido durante mucho tiempo (y sigue siéndolo hoy) el de E.U. Condon y G.H. Shortley.* En la introducción a este libro se resalta la importancia que el descubrimiento de los multipletes, realizado por Catalán, tuvo para el desarrollo de dicha ciencia.

La tercera vez que ha aparecido en mi vida científica la persona de D. Miguel Catalán ha sido cuando he sido nominado para esta Academia. Al recibir el anuario de la misma y buscar, con la natural curiosidad, las personas que habían ostentado la medalla que ahora a mí me toca, hallé, entre otros nombres ilustres, el del Profesor Catalán, que había sido elegido poco tiempo antes de la mencionada charla de Santander.

No es difícil para mí encontrar en esta Academia personas a las que agradecer su ayuda e influencia en mi carrera científica. Están aquí algunos de quienes han sido mis profesores cuando estudiaba la licenciatura en Matemáticas en la Universidad de Zaragoza; también se encuentran científicos que, sin haber sido mis profesores, me han prestado su apoyo y consejos; incluso una persona, Alberto Galindo, que fue mi director de tesis y que ha sido siempre uno de mis guías. No tanto por colaboración directa (nuestros intereses han divergido, al hacerse los suyos más formales y los míos fenomenológicos) sino con la guía más valiosa, que es su ejemplo persistente de búsqueda de la más alta calidad científica. Junto a todo esto, una ayuda, tal vez menor en importancia real, pero para mí de alto valor simbólico, fue la dirección que me marcó la charla del Profesor Catalán. Es sin duda un caso de justicia poética, el que mi disertación verse en buena parte sobre un tema y unas cuestiones que se suscitaron ya en el coloquio de La Magdalena. Y es también apropiado que, en los Profesores Catalán y García Santesmases, se recuerde a una generación de científicos los cuales, en circunstancias extraordinariamente difíciles, hicieron posible el transmitirnos a quienes entonces éramos nuevas generaciones, la llama de la investigación científica - con criterios de excelencia.

* *The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge (1ª Ed., 1935; 8ª Impresión, 1967)

1. INTRODUCCIÓN

Entre los años 1918 y 1928, Hermann Weyl escribió dos de los libros más influyentes en la física (y las matemáticas) de la primera mitad del siglo: *Raum, Zeit, Materie* (Berlín, 1918) y *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (2ª edición de 1931, Leipzig). Los títulos y contenidos de ambos reflejaban los avances espectaculares de la física en los primeros veinte años de nuestro siglo, específicamente en comprender el espacio, el tiempo y la materia que forman la trilogía del título del primero de dichos libros: avances que habían hecho posible el desplazar estas tres categorías del nebuloso terreno de la metafísica al de la ciencia positiva. Weyl, que además de un gran matemático y físico era una persona de alto nivel cultural y profundos intereses filosóficos, no era ajeno a este carácter fundamental que tenía la construcción de teorías del espacio-tiempo (la relatividad) y de la dinámica de la materia (la mecánica cuántica). Como escribe en el prólogo de *Raum, Zeit, Materie*, “Mit der Einsteinsche Relativitätstheorie hat das menlichen Denken über den Kosmos eine neue Stufe erklommen”. Efectivamente, es difícil exagerar la revolución en el pensamiento humano que la relatividad y la mecánica cuántica implicaban: como botón de muestra mencionaré el siguiente ejemplo.

La filosofía Kantiana, a través de la obra del propio Kant y de sus epígonos (que van desde Fichte y Hegel hasta Marx) fue sin duda la dominante en la Europa del siglo XIX. Piedra angular de dicha filosofía es la noción de categorías, entre las que ocupan un lugar central el espacio y el tiempo. Según Kant, el espacio y el tiempo no tienen realidad objetiva; son estructuras propias de la mente humana (“categorías”) que ésta emplea para ordenar el universo material. Por supuesto, tal concepción se derrumba cuando la relatividad conlleva una determinación experimental de la estructura del espaciotiempo; y, en particular, la relatividad general implica que dicha estructura es no-Euclídea, es decir, *distinta* de la que la mente humana considera como natural.

A setenta años de los libros de Weyl tanto la relatividad como la mecánica cuántica han superado todas las pruebas experimentales a las que se les ha sometido. Y esto hasta el punto de que muchos físicos están convencidos de que tales esquemas son realmente descripciones de la estructura última de la naturaleza: a pesar de que no están exentas de problemas, una escuela de pensamiento considera a estas dificultades meramente técnicas -no fundamentales. Aunque algunos de estos problemas los discutiremos más adelante, voy a indicar ya dos de ellos. En primer lugar, mencionamos que no existe aún hoy una formulación de la relatividad *general* compatible con la mecánica cuántica: a pesar de que en los años setenta se completó la descripción de todas las interacciones, excepto la gravitatoria, por teorías consistentes con la relatividad restringida y la mecánica cuántica. Algunas de las modernas especulaciones en física de partículas elementales se deben, precisamente, a un intento de extender esta consistencia de la relatividad *restringida* a la *general* y por ende a la interacción gravitatoria.

La segunda cuestión es tal vez filosófica más bien que física, y es el conocido problema de la medida en mecánica cuántica. Su solución, probablemente, requerirá el abandonar o bien la lógica Aristotélica, o la noción de que nuestro *universo* es único. Sobre ambos problemas volveremos más adelante.

2. EL PARADIGMA ACTUAL, Y MÁS ALLÁ. LAS INTERACCIONES FUNDAMENTALES

La relatividad y la mecánica cuántica (espacio, tiempo y materia) describen el marco en el que actúan las distintas interacciones que operan en el universo; un problema distinto es el de la naturaleza de dichas interacciones. Para obtener una imagen del universo no basta con saber que cualquier interacción debe ser invariante relativista, y debe obedecer las leyes de la mecánica cuántica: es necesario determinar qué interacciones específicas utiliza la naturaleza, y cómo actúan.

El problema está lejos de ser trivial. La estructura de las fuerzas más familiares, las electromagnéticas, se determinó bastante pronto; ya en 1929 Dirac realizó los primeros cálculos de interacción de la radiación con la materia, y en los años 40 – 50, gracias a los trabajos de, entre otros, Schwinger y Feynman, se construyó una teoría (electrodinámica cuántica) perfectamente compatible con los principios básicos de la relatividad y la mecánica cuántica y con una capacidad predictiva impresionante. No es este el lugar de presentar una lista de los tests de precisión de la electrodinámica cuántica, que la hacen (y de lejos) la teoría más exacta que conocemos; pero mencionaré un ejemplo. El electrón y su antipartícula, el positrón, forman un estado ligado, llamado positronio. La energía total de este estado (que acaba por aniquilarse en radiación) es de aproximadamente 1 Millón de electrón-voltios. La energía del positronio no es, sin embargo, única: distintos estados que difieren en el momento angular, excitación radial o espín tienen distintas energías. En particular, los estados con momento angular cero y espín total 1 ó cero difieren en energía. Esta diferencia Δ es mínima en comparación con la del sistema total. El cálculo teórico predice

$$\Delta(\text{teor}) = 203404.5 \pm 10 \text{ MHz} = 84122 \pm 4 \times 10^{-8} \text{ eV}$$

y el resultado experimental es

$$\Delta(\text{exp}) = 203389.1 \pm 74 \text{ MHz} = 84115 \pm 30 \times 10^{-8} \text{ eV}.$$

El impresionante acuerdo de un efecto tan minúsculo (nueve órdenes de magnitud) indica el detalle a que hemos llegado en nuestra comprensión de las interacciones electromagnéticas.

Las interacciones débiles y las interacciones fuertes tardaron más tiempo en ser descifradas. Hubo que esperar a los años 71 – 73 en los que se produjeron la demostración por 't Hooft de la renormalizabilidad del modelo de Glashow-Weinberg-Salam, y el descubrimiento de la propiedad de libertad asintótica (Gross, Wilczek y Politzer), para obtener teorías consistentes con la relatividad y mecánica cuántica de estas interacciones; teorías que, además, han superado con éxito todas las confrontaciones experimentales realizadas hasta la fecha. Como ilustración de este acuerdo teoría-experiencia, mencionaré, al igual que para el caso electromagnético, un ejemplo para cada interacción.

En el caso de las interacciones fuertes, que involucran en particular a quarks, tomamos una situación parecida a la del positronio. Los quarks de tipo b y su antipartícula forman estados ligados, llamados bottomio, cuyas energías son de unos diezmil MeV. Como en el caso electromagnético, los detalles de las energías dependen de los espines y momentos

angulares. En particular, la diferencia de energía entre los estados con número cuántico principal z , y momento orbital 1 y cero es de (experimentalmente)

$$\Delta = 123 \text{ MeV.}$$

Teóricamente se obtiene

$$\Delta(\text{teor}) = 162 \pm 38 \text{ MeV.}$$

Este acuerdo, un efecto del orden de milésimas de la energía total es tal vez, a pesar de ser mucho menos preciso que en el caso electromagnético, más impresionante. En efecto, el cálculo teórico es tan complicado que sólo ha sido completado muy recientemente. El motivo es que al nivel de exactitud requerido por el experimento es obligatorio tener en cuenta no sólo efectos relativistas, y efectos cuánticos de orden elevado, sino incluso la estructura del propio vacío. La medida experimental es también muy difícil y ha sido realizada en los años ochenta.

Con respecto a las interacciones débiles, mencionaré que los espléndidos experimentos de LEP (1990 – 93) han determinado la anchura Γ (indefinición en energía) de la partícula Z con una gran exactitud:

$$\Gamma(\text{exp}) = 2.487 \pm 0.010 \text{ GeV.}$$

Pues bien, esta cantidad se conocía ya con casi la misma precisión a través de cálculos teóricos realizados en la década de los 70: varios años antes de que se *descubriera* la partícula Z , predicha con todas sus propiedades por la teoría, y con más de quince años de anticipación a los experimentos de LEP citados.

El modelo estándar, y sus problemas

Imagino que lo dicho hasta ahora habrá dejado la impresión, correcta, de que contamos con una teoría coherente y extraordinariamente exitosa de las interacciones que operan en el microcosmos. En efecto, el modelo (“modelo estándar”) que incorpora las teorías de campos cuánticos de interacciones fuertes, electromagnéticas y débiles ha superado todas las confrontaciones con la evidencia experimental: desde las energías más pequeñas hasta el TeV largo que se alcanza en el laboratorio Fermilab de Illinois; desde la precisión de las medidas de masas de estados ligados o de momentos magnéticos, a baja energía, hasta las fabulosas del acelerador LEP en el CERN (Ginebra), realizadas a casi 100 GeV, y alguna de las cuales ya hemos citado. En lo que queda de esta exposición yo consideraré el modelo estándar como establecido experimentalmente; pero, para no dar la falsa impresión de que tal modelo está libre de sospecha, presentaré ahora una lista de los (a mi juicio) más sobresalientes problemas de cada una de las tres interacciones que lo constituyen.

Interacciones fuertes. ¿Por qué los quarks tienen espín $1/2$ (y no 0, ó 1)? ¿Por qué tienen tres colores (y no 6, 8, ó 27)? ¿Por qué hay seis especies de quark? ¿Qué pasa con la violación fuerte de CP?

Interacciones electromagnéticas. El fotón es la única partícula intermediaria que no interacciona consigo misma. Hay indicaciones serias de que la teoría falla a energías muy

altas (esto lo volveremos a discutir más adelante). ¿Por qué todas las cargas son múltiplos enteros de $1/3$ de la del protón?

Interacciones débiles. La teoría que describe estas interacciones es muy peculiar. Es la única teoría en la que la invariancia gauge está rota, y las partículas intermedias tienen masa. El mecanismo por el que adquieren masa es altamente sospechoso: consiste en suponer que el vacío está lleno (!) de un campo que únicamente interactúa con las partículas con masa. Esto no sólo recuerda al éter, sino que presenta problemas similares a los de éste; en particular una constante cosmológica inaceptable. Por otra parte, la partícula correspondiente a dicho campo es la única que aún no se ha encontrado. Finalmente, las masas de las partículas (de origen electrodébil en el modelo estándar) tienen valores que parecen escogidos al azar, variando en más de cinco órdenes de magnitud. El esquema de masas es tan enrevesado que se le podría aplicar el comentario que hizo Alfonso X *El Sabio* cuando le explicaron la teoría de los epiciclos para el movimiento de los astros: "Si Dios me hubiese consultado cuando la creación, le habría recomendado algo más sencillo".

Más allá del modelo estándar. Las teorías de cuerdas

A pesar de los problemas que acabamos de mencionar, los éxitos del modelo estándar son tales que pocos físicos competentes dudan de que la solución de sus dificultades involucrará una teoría que *contenga* al modelo estándar. Por ejemplo, algunos de los problemas de éste se solucionan en las llamadas teorías de gran unificación en las que las tres interacciones del modelo resultan ser tres aspectos de una sola interacción unificada.

El problema, o si se prefiere la carencia más importante del modelo estándar, es lo que no *trata*. El modelo estándar describe interacciones de partículas sin dimensiones, que se mueven en el espacio y el tiempo: pero no dice nada acerca de este espacio y este tiempo. Tampoco dice nada de la *materia* que interactúa: ni por qué es lo que experimentalmente encontramos, ni de dónde viene, ni por qué hay la cantidad que hay. Podemos decir que, con respecto al espacio, el tiempo y la materia, el modelo estándar de las interacciones fundamentales no aporta apenas nada, y la visión que tenemos de las tres "categorías" es casi la misma que en la época en que Weyl escribió sus libros.

Nótese que he dicho *casi*. La razón es que, aunque no hay *teorías físicas* (esto es, modelos autoconsistentes validados por pruebas experimentales) sí que hay *especulaciones*, sugeridas (más que demostradas) por hechos experimentales, en las que el espacio, el tiempo y la materia son deducidos de estructuras más fundamentales. En particular, la más popular de estas especulaciones, las teorías de cuerdas, que discutiré brevemente, tienen implicaciones importantes sobre (entre otras cuestiones) la dimensión del espaciotiempo. Y aunque este no es el lugar, ni yo la persona, para presentar una descripción detallada de las teorías de cuerdas sí es pertinente indicar algunas de sus ideas básicas.

Las teorías relativistas de campos cuánticos, en las que se basa el modelo estándar, describen las interacciones de partículas puntuales, esto es, sin dimensiones. En las teorías de cuerdas se supone, por el contrario, que los objetos primordiales tienen dimensiones de longitud, y son de hecho como cuerdas vibrantes. La mecánica cuántica indica que las vibraciones de tales objetos están cuantizadas de forma discreta, y la teoría de cuerdas

-ESPACIO, TIEMPO, MATERIA-

identifica dichas vibraciones como las partículas que conocemos. Con una analogía poética (y un tanto cursi) podríamos comparar el cosmos con un violín, y a sus distintas notas con las partículas: el *La* tal vez sería un electrón, el *Mi* quizás un quark, y al *Fa* podríamos interpretarlo como el fotón.

Nadie ha demostrado la existencia de teorías de cuerdas autoconsistentes, ni se ha comprobado rigurosamente que contienen al modelo estándar en un límite apropiado. Pero hay, sin embargo, indicaciones (cuán serias depende de a quién se pregunte) de que efectivamente, en tales teorías cabe no sólo al modelo estándar: además (y esto es probablemente lo más atractivo de las teorías de cuerdas) las indicaciones apuntan a que éstas contienen a la gravitación.

El siguiente aspecto atractivo de las teorías de cuerdas, y el que más nos va a interesar aquí, es que tales construcciones sólo son compatibles con la relatividad y la mecánica cuántica si el espacio-tiempo tiene una dimensión específica *. Concretamente, las cuerdas cuántico-relativistas sólo pueden existir en un espacio de 26 dimensiones, si las cuerdas vibran únicamente con modos bosónicos, o en uno de 10 si se admiten modos bosónicos y fermiónicos.

Aparentemente, lo dicho sobre el número de dimensiones del espaciotiempo, obviamente excesivo, debería ser suficiente para rechazar las teorías de cuerdas: sin embargo, esto no es así. Los físicos que trabajan en estas teorías esperan que en ellas se dé un mecanismo como el descrito por Kaluza y Klein en un modelo sencillo, en el que las dimensiones superfluas se enrollan sobre sí mismas con un radio tan pequeño que es indetectable con los aparatos de que disponemos hoy en día.

Esta meta está, sin embargo, bastante lejos aún: y eso en el caso de que el camino a través de teorías de cuerdas y el mecanismo de Kaluza-Klein fuese el correcto. Por este motivo, y por mi ignorancia al respecto, no voy a dedicar mi esfuerzo aquí a explicar la justificación teórica de las implicaciones de modelos, de cuerdas u otro tipo, sobre la estructura del espacio, del tiempo o de la materia. Más bien, voy a intentar describir algunas de las cosas que *experimentalmente* sabemos con respecto a estas tres categorías. Serán las *preguntas*, más bien que las respuestas, las que estarán inspiradas por las especulaciones teóricas más allá del modelo estándar.

Por supuesto, tampoco los temas y las cuestiones que voy a tratar son los únicos: ni siquiera los más importantes. Los he escogido por la razón obvia de ser con los que estoy más familiarizado, sea por haber trabajado sobre ellos, sea por haberme interesado especialmente.

* No está claro que esto sea una consecuencia rigurosa de la estructura de cuerdas. En efecto, recientes investigaciones apuntan a que se pueden construir teorías de cuerdas en *cualquiera* dimensión con tal de modificar apropiadamente la acción de partida.

3. ESPACIO

Como ya se ha dicho, en las teorías de cuerdas o, más generalmente, en los modelos de tipo Kaluza-Klein se comienza en un espacio con muchas dimensiones, que posteriormente se reducen a las tres que nos son familiares (voy en este capítulo a suponer que el tiempo es único). Una pregunta relevante a este respecto es, precisamente, con cuánta seguridad podemos afirmar que la dimensión del espacio es tres.

Aparentemente, esta pregunta es infantil. No es difícil demostrar matemáticamente que un espacio lineal de dimensión finita tiene que tener una dimensión entera. Cualquier chico que se escapa del jardín del colegio saltando la tapia sabe que hay más de dos dimensiones; y todo el que haya comprobado que de una habitación sólo se sale abriendo la puerta (o una ventana) certifica que no hay cuatro.

Sin embargo las cosas no son tan simples. Una teoría que contenga la gravitación y la mecánica cuántica tiene por fuerza que contemplar fluctuaciones incluso de la estructura del espacio. Hay indicaciones serias de que estas fluctuaciones implican conexiones múltiples en este espacio (los "wormholes" de Wheeler) que adquiriría así una estructura altamente compleja que Hawking ha descrito con el gráfico término de "espuma". El espacio, por tanto, no es lineal sino que se parece más bien a un fractal: y es bien sabido que los fractales tienen en general dimensiones no enteras. El problema que nos debemos plantear es, por tanto, el siguiente: si denotamos por $3 + \epsilon$ a la dimensión (de Hausdorff, si queremos ser matemáticamente precisos) del espacio, ¿qué límites pone el experimento al valor de ϵ ?

Las cotas que pueden obtenerse son de varios tipos. Las hay de cortas distancias y de largas distancias; las hay electromagnéticas y gravitatorias. Entre las últimas hay incluso una cota que permite determinar la dimensión del espacio en una región a más de diezmil años luz de nuestro sistema solar.

Cotas sobre dimensiones extra no-compactas

Como hemos mencionado anteriormente, el modelo estándar de las interacciones fundamentales describe la naturaleza con gran exactitud: es de suponer que este acuerdo sería alterado si cambiamos la dimensión del espacio. En particular, las correcciones radiativas involucran integrales extendidas a todo el espacio-tiempo, y que dependen de la dimensión del mismo. Suponiendo que, en promedio, la "espuma" espacio-temporal es homogénea, las modificaciones pueden calcularse fácilmente a primer orden en el parámetro ϵ . Así, el momento magnético del electrón (conocido experimental y teóricamente con nueve decimales) cambiaría en una cantidad

$$\epsilon\alpha(\log\pi + \gamma_E)/4\pi$$

con γ_E la constante de Euler y α la de estructura fina; lo que, dado el acuerdo de teoría y experimento, implica que ϵ es menor que 10^{-6} . Con gran precisión, la dimensión del espacio resulta ser el familiar número tres.

El resultado mencionado se debe a Zeilinger y Svozil. Las distancias involucradas son bastante pequeñas, del orden de 10^{-12} centímetros.

Un resultado mucho más restrictivo puede obtenerse utilizando las desviaciones de la ley de Coulomb, y de la de Newton, que ocurrirían si el espacio tuviese una dimensión

-ESPACIO, TIEMPO, MATERIA-

no entera. Para dimensión $n = 3 + \epsilon$, esperamos que las fuerzas gravitatorias y eléctricas sigan respectivamente las leyes

$$\frac{G_N(\epsilon)mM}{r^{2+\epsilon}}; \frac{e_1 e_2(\epsilon)}{r^{2+\epsilon}},$$

lo que intuitivamente se comprende bastante bien: el flujo (electromagnético o gravitatorio) se extiende sobre esferas con superficies de $2 + \epsilon$ dimensiones.

La modificación de la ley de Coulomb tiene consecuencias en la modificación del efecto Lamb, y proporciona una cota del orden de 10^{-8} para ϵ , que no vamos a discutir, ya que involucra interacciones, y distancias, similares a la de Zeilinger y Svozil. La modificación de la ley de Newton, sin embargo, nos da información sobre grandes distancias, e incluso sobre regiones fuera del sistema solar.

En esencia, la situación es como sigue. Cuando una partícula está sujeta a un potencial, su trayectoria no es en general cerrada. Sólo en el caso de un potencial proporcional a $1/r$, o a r^2 , vuelve la partícula exactamente a la situación de partida después de cada revolución. (En ambos casos puede comprobarse que esta propiedad se debe a la existencia de simetrías extra: $O(4)$ en el caso de un potencial $1/r$, y $SU(3)$ para el oscilador armónico.) Si la interacción es proporcional a $1/r^{1+\epsilon}$, como ocurriría si la dimensión del espacio fuese $3 + \epsilon$, la trayectoria, por ejemplo de un planeta, no sería cerrada y su perihelio efectuaría un movimiento de precesión. Movimiento de precesión que, por supuesto, se añadiría al debido a la perturbación producida por otros planetas y a la causada por efectos de relatividad general. Un sencillo cálculo nos indica que la precesión debida a dimensiones extra es de $\pi\epsilon$ (en radianes por revolución).

Para comparar con resultados observacionales hay, en primer lugar, que sustraer de éstos las contribuciones extrañas a la alteración dimensional: en segundo lugar, cambiar de las unidades naturales (radianes por revolución) en que se obtiene el resultado mencionado, a las utilizadas por los astrónomos (segundos de arco por siglo). En el sistema solar se conoce muy bien la precesión del perihelio de Mercurio,

$$(|42.11'' \pm 0.45'' - 43.03''| = 0.92'' \pm 0.45'')$$
 por siglo

y la cantidad sustraída es la contribución de la relatividad general. De aquí se sigue que ϵ tiene que ser menor que 1.7×10^{-9} .

La precesión de Venus es también bien conocida, y nos da

$$\epsilon < 4 \times 10^{-8}$$

y la de la propia Tierra nos indica

$$\epsilon < 2 \times 10^{-8}$$

Tal y como ya hemos dicho, este tipo de argumentos nos permiten encontrar resultados lejos del sistema solar. En efecto, el sistema estelar binario PSR 1913 + 16 se encuentra a unos diezmil años luz de la tierra. En este sistema, formado por un objeto invisible (tal vez

un agujero negro o una estrella de neutrones) con un compañero visible se han realizado excelentes medidas de la precesión del periastro. Se obtiene la cota

$$\epsilon < 1.5 \times 10^{-9}.$$

Dimensiones compactas

Los resultados descritos en lo que precede muestran que la dimensión del espacio es con gran precisión 3, con un error máximo de uno en mil millones. Sin embargo, todos los efectos discutidos tienen lugar a distancias relativamente grandes: millones, o miles de millones de kilómetros en el caso de la precesión del periastro, 10^{-8} cm en el caso del efecto Lamb anómalo (que no hemos discutido) o 10^{-12} cm en el caso del momento magnético del electrón: pero no dicen nada de eventuales dimensiones *compactas*. Por ejemplo, en las teorías de cuerdas con el mecanismo de Kaluza-Klein, se espera que las dimensiones extra tengan un tamaño del orden de la longitud de Planck, 10^{-32} cm. Tanto los movimientos de los planetas, como los de los electrones, son indiferentes a la posible existencia de dimensiones tan minúsculas. Las únicas consecuencias que el autor conoce de la existencia de estas dimensiones compactas son una modificación del principio de incertidumbre de Heisenberg, y la existencia, para cada partícula, de una serie de estados excitados.

El principio de incertidumbre de Heisenberg dice que

$$(\Delta x)(\Delta p) \geq \hbar,$$

con Δx la incertidumbre de la posición, y Δp la incertidumbre del impulso de una partícula. En una teoría de cuerdas tendríamos, en lugar de esto, la relación

$$(\Delta x)(\Delta p) \geq \hbar + a^2(\Delta p)^2/\hbar,$$

donde a es la longitud de la cuerda. También la masa de los estados excitados dependería de a : el estado excitado de un electrón (por ejemplo) tendría una masa de $m(e^*) \sim \hbar/ac$.

En las teorías de cuerdas se espera que a sea del orden de la longitud de Planck, unos 10^{-32} cm. Con esto, la modificación de la relación de incertidumbre es despreciable; y el valor esperado para las masas de los estados excitados resulta unas 10^{19} veces la masa del protón, incomparablemente más grande que las cotas conocidas (unas 10^3 veces la masa del protón). Por supuesto, este es uno de los problemas más graves de la teoría de cuerdas: sus predicciones están muchos órdenes de magnitud más allá de los que podemos medir, tanto ahora como en un futuro previsible.

4. TIEMPO

La existencia de dimensiones compactas (además de las 3 ± 10^{-9} no-compactas que nos son familiares) no lleva a consecuencias espectaculares. La existencia de estados excitados de gran masa de las partículas elementales, o una mínima modificación de la relación de incertidumbre no tienen gran importancia práctica: necesitaríamos experimentos extraordinariamente precisos (muchos órdenes de magnitud más que los imaginables en un futuro próximo) para detectarlo. La situación es muy distinta si hubiese varios *tiempos*, aunque sus dimensiones fuesen compactas.

La existencia de varios tiempos no sólo es posible, sino muy probablemente inevitable, en una teoría tipo cuerdas que incorpore a la gravitación. En efecto, si el tensor métrico es

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu},$$

con $\eta_{\mu\nu}$ el del espaciotiempo ordinario, y $h_{\mu\nu}$ representa fluctuaciones cuánticas, es difícil de imaginar qué mecanismo puede utilizarse para evitar que estas fluctuaciones cambien la signatura. No hay ninguna razón a priori que implique que las seis dimensiones extra que son, como mínimo, necesarias para una teoría de cuerdas autoconsistente tengan que ser todas espaciales.

La pregunta que nos vamos a hacer ahora es la siguiente: ¿qué ocurriría si además del tiempo que conocemos existieran otras dimensiones temporales? Para ser precisos, suponemos que existiera una dimensión temporal compacta extra. El tamaño de este "tiempo" compacto (que denotaremos por τ) no lo sabemos, pero esperamos que sea del orden del tiempo de Planck,

$$10^{-32} \text{cm}/c \sim 10^{-43} \text{segundos.}$$

A primera vista la existencia o no de un tiempo extra confinado en un intervalo tan pequeño debería ser irrelevante. Lo cierto es que no es así: si existen varias dimensiones de tiempo se producen violaciones de la causalidad. Por decirlo de forma literaria, la existencia de varias dimensiones de tiempo nos permiten escaparnos del presente (por las dimensiones extra) al pasado o al futuro, con las consiguientes y consecuentes paradojas acausales: cualquier lector de ciencia ficción puede imaginar muchas de ellas.

Si las dimensiones temporales extra son tan pequeñas como el tiempo de Planck, la probabilidad de que un objeto tan grande como un ser humano se cuele a través de ellas es absolutamente minúscula. Sin embargo, los protones de un núcleo, o dos quarks de un protón, sí pueden hacerlo, y entonces nos encontraríamos con que *todos* los núcleos serían intrínsecamente inestables: uno, o varios de sus protones podrían, de cuando en cuando, desaparecer yéndose a mañana, o a la semana pasada. O también podría aparecer un nuevo protón que viniese del próximo mes. En estos casos, el nuevo núcleo sería, con buena probabilidad, inestable.

Las mejores cotas sobre la inestabilidad de la materia son las establecidas por los experimentos dedicados a intentar detectar doble desintegración beta, o desintegración del protón. La cota obtenida es de unos 10^{30} años para la estabilidad de la materia. Esta cota

implica que las dimensiones temporales extra, de existir, deberían tener una duración de como máximo 10^{-44} segundos —diez veces menos que el intervalo temporal de Planck.

La manera de obtener este resultado es relativamente sencilla. La interacción electromagnética entre dos partículas se debe al intercambio de fotones entre ellas, lo que genera el potencial Coulombiano

$$\frac{e_1 e_2}{r}.$$

Si el fotón, en su camino de una partícula a otra, ha podido pasearse por los tiempos extra, el potencial que se obtiene es ligeramente distinto:

$$e_1 e_2 / r + (2e_1 e_2) / r \sum_{n=1}^{\infty} e^{-incr/\tau}.$$

El potencial extra es complejo, y por tanto implica violaciones de causalidad. Por ejemplo, en mecánica cuántica, la cantidad

$$\int d^3r |\Phi(\vec{r}, t)|^2,$$

representa la probabilidad de encontrar la partícula con función de onda Φ en algún lugar del universo en el instante t . Si la partícula está sujeta a un potencial complejo, dicha cantidad no se conserva con el tiempo: lo que puede interpretarse como indicando desaparición o creación espontánea de materia.

5. MATERIA

Según Aristóteles la materia es eterna e indestructible. Lavoisier formuló este principio de forma más científica como la ley de conservación de la materia (de hecho, Lavoisier la enunció realmente como una ley de conservación de los elementos químicos). Desde la formulación de la relatividad de Einstein sabemos que materia y energía son equivalentes, y una puede transformarse en la otra: de manera que cabe plantear el problema de la existencia de la materia, y la energía, que detectamos a nuestro alrededor.

El problema se puede desgranar en varios subproblemas. En primer lugar, la conversión de materia en energía sólo se ha constatado cuando se crean (o se aniquilan) partículas y *antipartículas*. La aniquilación de un par protón-antiprotón en energía pura, o la creación a partir de ésta de un par protón-antiprotón es algo que se realiza rutinariamente en varios laboratorios del mundo; pero nadie ha visto a un protón desaparecer en energía, o que ésta cree una sola partícula, sin su antipartícula correspondiente. ¿Es esto así porque tales procesos son imposibles, o sólo porque son improbables?

Ligado a este problema está el de la simetría partícula-antipartícula. Las leyes que rigen la naturaleza, el modelo estándar que se mencionó al principio de esta exposición, son simétricas bajo el cambio de materia en antimateria. (Para expertos diré que dicho cambio debe incluir el de "derecha" en "izquierda" y una inversión del movimiento.) Sin embargo, en el universo que nos rodea la materia domina de forma aplastante: sólo en algún raro rayo cósmico se encuentran antipartículas. Por supuesto, las partículas y antipartículas se aniquilan al encontrarse, por lo que no es sorprendente que no queden, por ejemplo en nuestro sistema solar, restos de una hipotética antimateria primigenia. Lo que sí es sorprendente es que al parecer no existen otros sistemas solares, ni otras galaxias, hechos de antimateria: la evidencia, en algunos casos aplastante, es que todos están hechos de la misma materia que nosotros, y contienen tan poca antimateria como el sistema solar. Como un ejemplo espectacular mencionaré los neutrinos provenientes de las nubes de Magallanes.

En el año 1987 explotó una supernova en las nubes de Magallanes (que son pequeñas galaxias próximas a la nuestra). Como toda explosión nuclear, esta produjo gran cantidad de neutrinos; los cuales, por viajar a la velocidad de la luz, fueron detectados por varios laboratorios terrestres coincidiendo con el flogonazo óptico. Tales neutrinos eran precisamente del tipo que podía esperarse si la supernova estaba constituida por materia (en lugar de antimateria).

Finalmente tenemos el problema de la propia existencia de la materia, o de la energía primordiales. Aquí somos más ambiciosos y no sólo nos planteamos el por qué hay materia (y no antimateria, o apenas) en nuestro universo, sino que también examinamos la existencia misma de la energía primigenia: ¿hay que postular esta existencia, como una hipótesis externa a la física, o ésta tiene algo que decir al respecto?

No es posible afirmar nada definitivo con respecto a ninguna de las preguntas que planteamos. Con respecto a las primeras podemos adelantar posibles soluciones, desgraciadamente aún no contrastadas experimentalmente; con respecto a la última tenemos que contentarnos con especulaciones.

La radiación de fondo, la asimetría materia antimateria, y la negativa del protón a desintegrarse

Uno de los descubrimientos más fundamentales de nuestro siglo fue el de la llamada "radiación de fondo" (Wilson y Penzias): esto es, que todo el espacio está lleno de una radiación electromagnética, prácticamente isotrópica, constituida por fotones de muy poca energía (correspondiente a unos 3 grados Kelvin). La cantidad de estos fotones es inmensa, mil millones de fotones por cada partícula material. El número, y las características de la radiación de fondo son lo esperable si el Universo comenzó con una gran explosión: su extraordinaria densidad sugiere que en tal comienzo el universo pudo ser energía pura, y la materia una mera fluctuación.

Para que esto sea posible es necesario que haya interacciones que conviertan energía en materia, sin necesidad de introducir antimateria: por ejemplo, que convierta dos fotones en un átomo de hidrógeno. Si no existiesen tales interacciones, en el Big Bang se hubiese producido tanta materia como antimateria, lo que, como ya se contó, es contrario a la evidencia observacional. Si, por el contrario, efectivamente existen estas interacciones, también se podrá desintegrar la materia: más pronto o más tarde, el hidrógeno, y todos los elementos materiales se desintegrarían en radiación. El estado actual del universo sería pues una pequeña asimetría transitoria entre el Big Bang y el estado final, ambos consistentes en energía (radiación) pura sin presencia de partículas.

A finales de los años setenta y principios de los ochenta parecía que el problema estaba en vías de solución. En efecto, en esa época se encontró que las llamadas teorías de gran unificación (en las que las tres interacciones del modelo estándar se unifican en una sola) predicen, efectivamente, la desintegración de la materia en radiación y por supuesto el proceso inverso; el ritmo con el que esto ocurre, 10^{29} años, estaba dentro de las posibilidades de medida experimental. Aquello lanzó una carrera en la que media docena de laboratorios trataron de encontrar sucesos en los que alguno de los protones de un núcleo de materia se desintegrare; e incluso, en 1982, parecía haber un candidato para tal tipo de procesos.

Desgraciadamente tal candidato no ha sido confirmado; y, del resultado negativo de los experimentos de desintegración del protón, hoy sabemos que el ritmo de estos procesos (si existen) es mucho más lento que lo predicho por las teorías de gran unificación: como mínimo unos 10^{33} años. De paso, estos resultados asestan un golpe de muerte a dichas teorías, por lo menos en su versión más sencilla.

¿Quiere esto decir que no es posible crear materia a partir de energía sin crear antimateria? En absoluto. Además de los mecanismos que aparecen en los diferentes modelos de gran unificación existen los que se dan en teorías de gran unificación *supersimétrica*. También hay conversión de materia en energía catalizada por monopolos magnéticos o agujeros negros o, sin salir del modelo estándar, por instantones. Desgraciadamente, es poco probable que ninguno de los correspondientes procesos sea observado en un futuro próximo: sus ritmos son demasiado lentos para ello, aunque hay una pequeña esperanza si el mecanismo de los llamados "sphalerons" (un fenómeno, no muy bien entendido, causado por instantones) funciona realmente, aunque los resultados de las investigaciones más recientes no son particularmente esperanzadores.

Energía

Sea cual sea el mecanismo, es muy probable que sea posible convertir radiación en materia (sin producir antimateria); y es también probable que sea eso exactamente lo que ocurrió al principio del universo: en el big bang, originariamente, tal vez sólo hubiese energía pura.

¿Es posible ir más allá? ¿Existe al menos como posibilidad teórica el que la propia energía se cree espontáneamente? Nótese que no me estoy refiriendo a la creación o aniquilación de energía en materia y antimateria (suceso trivial que ocurre todos los días en varios laboratorios); ni la producción de energía al desaparecer materia, sin la ayuda de antimateria, que hemos discutido en el apartado anterior: queremos considerar la creación de energía, o materia *ex nihilo*.

Ex nihil nihilo, dice el aforismo escolástico; la experiencia y el sentido común parecen darle la razón. Curiosamente, sin embargo, lo difícil no es construir teorías con creación espontánea de energía, sino todo lo contrario. Hay que ir con mucho cuidado al formular cualquier teoría que incorpore a la relatividad y a la mecánica cuántica para que no implique, inevitablemente, violaciones de causalidad y no-conservación de probabilidad y, por tanto, aparición y desaparición espontánea de materia. De hecho, el mismo modelo estándar contiene interacciones (el sector electromagnético – $U(1)$ para los expertos – y el campo de Higgs) que, si nos los tomamos literalmente, nos llevan a, precisamente, los comportamientos mencionados.

Con respecto a este problema hay dos actitudes posibles. Una es considerar que las leyes de conservación de la probabilidad y la causalidad son sacrosantas; y por tanto debemos intentar modificar nuestras teorías, en particular el modelo estándar, para que dichos principios se cumplan. La otra es pensar que lo más que podemos decir, *científicamente*, es que no se han observado experimentalmente (al menos de manera fiable) procesos de aparición y desaparición de materia o energía. Tales procesos podrían sin embargo ocurrir o a ritmos muy lentos, o a energías muy elevadas: y la tarea de un científico es poner límites experimentales a estos ritmos o energías.

Con respecto al *ritmo* a que tales procesos tienen lugar, dentro de los intervalos de energías accesibles en nuestro entorno, la mejor cota la proporcionan, como para tantos otros de los procesos extraños mencionados en lo que antecede, los experimentos dedicados a intentar medir la vida media del protón. De ellos, y como ya se dijo, resulta que cualquier proceso de creación o desaparición espontánea de energía tiene que ocurrir con una lentitud de al menos 10^{30} años.

La precisión experimental que implica tan largo periodo de tiempo es suficiente para proporcionarnos interesante información. Nuestra vieja conocida, la teoría de la electrodinámica cuántica, produciría lo que se llama un “polo de Landau” a energía menor que la de Planck si hubiese demasiadas partículas elementales con carga eléctrica. Tal polo generaría aparición y desaparición espontánea de materia a un nivel *incompatible* con la cota experimental. Para las personas con conocimientos técnicos, indicaremos que una electrodinámica supersimétrica con los cuatro dobletes de Higgs necesarios para implementar el mecanismo de Peccei-Quinn parece excluida por producir excesiva materia *ex nihilo*.

La propia teoría estándar de las interacciones débiles también llevaría a creación de

materia más allá de los límites experimentalmente aceptables, y ello a través de la partícula de Higgs, si la masa del quark t fuese muy superior a unas 180 veces la del protón. Las indicaciones experimentales existentes hasta la fecha (el descubrimiento del quark top ha sido confirmado recientemente) indican que m_t es, precisamente, unas 180 veces la masa del protón: la teoría parece consistente, pero no por un gran margen.

De todas maneras, el modelo estándar implica creación espontánea de materia, salvo que se le modifique sustancialmente. Esta creación espontánea, si ocurre, lo hace (como ya hemos dicho) a un ritmo indetectable a las energías actualmente accesibles; pero el ritmo crece con la energía y la creación espontánea ocurre copiosamente en el Big Bang. Esta, y otras razones, nos pueden llevar a especulaciones frente a las que las mencionadas hasta ahora palidecen. Aunque yo no soy, ni mucho menos, experto en el tema, voy a concluir este discurso con unas brevísimas palabras de descripción de algunos de los escenarios considerados.

Universos

El universo en que vivimos es mucho más peculiar de lo que a primera vista parece. En él la interacción gravitatoria es lo suficientemente intensa para que sistemas solares puedan formarse, pero no tanto como para que colapsen. Las interacciones débiles, si fuesen un poco más intensas, harían tan fuerte la radiactividad de muchos elementos que la vida (al menos la vida tal como la conocemos) sería imposible. De hecho, incluso sin incrementar la intensidad de las interacciones débiles, tal generación de radiactividad ocurriría si el quark de tipo d fuese un poco más pesado (o el de tipo u un poco más ligero) de lo que son en nuestro universo. Las interacciones fuertes también tienen, aparentemente, el valor preciso para que se hayan podido formar por nucleosíntesis (ya sea en el Big Bang o en supernovas) elementos tales como el oxígeno, el carbono o algunos metales esenciales para la vida; un pequeño incremento, o disminución de su intensidad impedirían la existencia de seres vivos como los que existen en la tierra, al menos los más organizados. El tamaño y la densidad del universo no se pueden variar en exceso sin obtener un universo que vuelve a contraerse (si la densidad es excesiva) antes de dar tiempo a la evolución, o cuyos componentes se separan sin llegar a formar estructuras materiales extensas (estrellas), si la densidad del universo fuese muy pequeña.

Estas casualidades no son nada comparadas con lo que ocurre si uno acepta el modelo estándar. Como M. Veltman ha mostrado, el llamado campo de Higgs genera una interacción, conocida como "constante cosmológica", que no se ha observado experimentalmente. Para resolver este problema hay que postular una constante primordial, es decir, no generada por el campo de Higgs, que cancela exactamente a aquella. Tal cancelación ha de ser fantásticamente precisa: hasta cincuenta cifras decimales.

El cúmulo de coincidencias citado parece excesivo. Por supuesto, es muy posible que lo que, en el estado actual de nuestro conocimiento sea de difícil explicación, resulte obvio cuando hayamos construido una teoría coherente que englobe al modelo estándar y a la gravitación (por ejemplo). Otra posibilidad, sin embargo, es que tales coincidencias sean reales, esto es, que efectivamente vivamos en un universo altamente improbable: algo que se hace más fácil de tragar si el universo no es único. Podemos imaginarnos que, igual que hay muchos planetas y satélites en nuestro sistema solar, pero sólo uno habitable, podría

-ESPACIO, TIEMPO, MATERIA-

haber muchos universos (probablemente infinitos) de los cuales, por supuesto, sólo en los habitables habría seres vivos capaces de preguntarse sobre el cúmulo de improbabilidades que hacen al entorno apto para su existencia. Este es el llamado *principio antrópico*. Podría pensarse que este principio está más allá de la ciencia, en el dominio de la fantasía pura, o la especulación teológica, si no hubiese las indicaciones mencionadas en lo que antecede, de que sea posible la creación espontánea, *ex nihilo*, a grandes energías. No es (al menos a priori) absurdo suponer que en un super-big-bang se crease no uno, sino muchos universos (indudablemente infinitos de ellos), cada uno con interacciones y constantes físicas distintas; incluidas algunas poco probables. Por añadidura, resulta que la existencia de muchos universos podría, tal vez, resolver algunos de los problemas epistemológicos de la mecánica cuántica.

DISCURSO DE CONTESTACION
del
EXCMO. SR. D. ALBERTO GALINDO TIXAIRE

Discurso de contestación a Francisco José Ynduráin Muñoz

Alberto Galindo Tixaire

29 de abril de 1996

Excmo. Sr. Presidente, Excmos. Sres. Académicos, Señoras, Señores:

Nuestra Corporación acoge hoy en su seno al Profesor Francisco José Ynduráin, con quien me unen amistad y recuerdos desde hace más de treinta años. Por ello mi gran satisfacción y agradecimiento a la Academia por haberme designado para contestar al nuevo académico, a quien ya desde ahora le doy la más cordial bienvenida a la casa en nombre de todos.

Como es habitual, empezaré por presentar al recipiendario, para pasar más tarde a exponer algunas reflexiones motivadas por la lectura de su discurso.

encomium

Una mañana de la primavera de 1962 conocí al Profesor Francisco José Ynduráin. Vino a verme un joven alto, desgarbado y sumamente despierto (a pesar de que no era ni mediodía) a mi lugar de trabajo, la antigua Junta de Energía Nuclear. Le atraía la física teórica, y en Zaragoza (en cuya Universidad estaba concluyendo la licenciatura) le habían sugerido que yo podía orientarle. Acababa a la sazón de regresar de Nueva York, donde había trabajado en matemáticas y en teoría cuántica de campos bajo la supervisión del Profesor Kurt Friedrichs en el actual *Courant Institute of Mathematical Sciences*, y en el otoño me iba a Suiza para pasar un par de años en el CERN¹. No fue ésto óbice alguno; Ynduráin cogió también sus alforjas y se vino detrás. Así es como empezó una relación profesional y personal

¹Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire, Ginebra.

entre nosotros que ha pervivido, latente largos tiempos, pero siempre cálida y afectiva, hasta el presente.

Nació Ynduráin en Benavente (Zamora), y se crió en el seno de una ilustrísima familia, que ha enriquecido a la Universidad con cuatro catedráticos: el padre, Don Francisco Ynduráin Hernández, insigne catedrático de Lengua y Literatura Españolas, figura imponente por su sabiduría, caballerosidad y presencia, y los tres hijos, encabezados por nuestro joven académico. Estudió F.J. Ynduráin matemáticas y física en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza, con los máximos honores. Bajo mi dirección se doctoró a los 24 años de edad con una memoria titulada *Definición de hamiltonianos y renormalización*, que marcaría su encuentro con la teoría de campos cuánticos a la que tantas contribuciones importantes habría de dar. Mientras estuve de catedrático de física matemática en Zaragoza colaboró en mi docencia como profesor adjunto. En 1968 ganó por oposición una agregaduría de física teórica en la Universidad Complutense, para ascender al año siguiente por concurso a una cátedra en Zaragoza, puesto que desempeñaría hasta que en 1971 se incorporó a su puesto actual de catedrático de física teórica en la recién estrenada Universidad Autónoma de Madrid.

Su labor investigadora es muy fecunda. Inicióla en 1963 con un primer trabajo sobre paraestadísticas², del que soy coautor. Recuerdo, como si fuera ayer mismo, nuestras animadas discusiones, salpicadas de aragonesismos y de apuestas, que por su condición de estudiante sin muchos recursos, no iban más allá de algún paquete de tabaco. Porque ahí donde se le ve, el flamante académico fue siempre algo echado para adelante, y menudo era también el contrario (que modestamente está hablándoos), como para aguantar críticas o pareceres opuestos.

Terminada su tesis doctoral, siguió completando su formación avanzada en la Universidad de Nueva York durante un par de años. Allí se interesó por los teoremas de alta energía y por las propiedades analíticas de las amplitudes de difusión, campo éste en el que en los años siguientes se iba a distinguir internacionalmente a través de sus importantes resultados sobre cotas absolutas, recogidos con autoridad en su puesta a punto³ de 1972 en la conocida revista trimestral *Reviews of Modern Physics*.

Hacia 1976 su interés investigador cambia de rumbo, atraído por la pujanza de las teorías *gauge* y del modelo estándar electrodébil. Ya no abandonará este campo, al que irá añadiendo la atención por el sector cromodinámico, los esquemas supersimétricos, y los modelos de gran unificación. Colo-

²A. Galindo, F.J. Ynduráin, *On parastatistics*, Nuovo Cimento **30**, 1040-1047 (1963).

³F.J. Ynduráin, *Rigorous constraints, bounds and relations for scattering amplitudes*, Rev. Mod. Phys. **44**, 645-667 (1972).

fón de sus notables contribuciones en estos temas y muestra de su dominio es el libro QUANTUM CHROMODYNAMICS. AN INTRODUCTION TO THE THEORY OF QUARKS AND GLUONS. de Springer-Verlag (1983), traducido al ruso⁴, y que tras una década ha visto una segunda edición más completa y muy mejorada con el título THE THEORY OF QUARKS AND GLUON INTERACTIONS. (Springer-Verlag 1993).

Por último, su preocupación por la docencia le ha movido a escribir un par de meritorios textos sobre mecánica cuántica, primero uno no-relativista, y luego otro relativista e introductorio a la teoría de campos cuánticos, que también va a aparecer en inglés próximamente.

El Prof. Ynduráin ha sido invitado por numerosas Universidades y Centros de Investigación, donde ha pronunciado conferencias, ha dado seminarios, ha impartido cursos, y ha realizado fructífera investigación. Destacan por la frecuencia e intensidad de interacción la Universidad de Michigan y el CERN.

Sus méritos y buen juicio para la gestión científica y docente le han llevado a puestos importantes de responsabilidad, que empiezan en un decanato, pasan por un vicerrectorado de investigación, y se subliman en su nombramiento como miembro del Consejo de Universidades, a propuesta del Senado, durante dos períodos consecutivos, y como miembro del Comité de Política Científica del CERN.

Ha organizado algunos seminarios internacionales sobre física de partículas, y ha formado parte de numerosos comités encargados de la organización de conferencias, también internacionales, sobre física de altas energías. Ha sido miembro fundador de la Sociedad Europea de Física.

Finalmente, varias distinciones honoríficas adornan su trayectoria; aparte del Premio de esta Academia en 1990 y su elección como Académico de la misma en 1992, el Prof. Ynduráin es *Caballero Oficial de la Orden al Mérito* de la República Italiana (1986), *Huésped Distinguido* de la Universidad de La Plata (1994), y *Miembro de la Academia Europæa* (1995).

Todo ello no es sino el justo reconocimiento a la gran valía del nuevo académico. Detrás quedan largos años de esfuerzo y de visión de futuro, cristalizados en uno de los departamentos de Física Teórica más dinámicos y excelentes del país, sobre el que se yergue, protectora y legítimamente orgullosa, la larga sombra de FJY.

A la vacante que viene a ocupar F.J. Ynduráin unieron sus nombres otros ilustres científicos; unos, como Miguel A. Catalán y José García Santesmases, ya han sido recordados por él, y a otros, como Francisco de Paula Rojas y Blas

⁴Ф. Индурайн, КВАНТОВАЯ ХРОМОДИНАМИКА. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ КВАРКОВ И ГЛЮОНОВ, "Мир", Москва 1986.

Cabrera, voy a acudir yo para resaltar cómo estos muros son mudos testigos de la vitalidad de la ciencia. Un siglo nos separa de Rojas. Repasando su discurso de ingreso en esta corporación⁵, leo:

La existencia del éter no necesita mis pruebas: se impone al físico con tan irresistible fuerza, que solamente negando la ciencia se puede negar el éter.

Y en la contestación que al mismo hiciera José Echegaray, cuando ni se había descubierto el electrón, ni producido las dos grandes conmociones epistémicas de nuestro siglo (la relatividad y los *quanta*), podemos identificar el pensamiento científico de su tiempo:

Esta es la tendencia de todas las hipótesis modernas: reducir los fenómenos de la Física y los fenómenos de la Química á puros y elementales problemas de Mecánica, condensando la variedad infinita del mundo inorgánico, porque sólo del mundo inorgánico nos ocupamos aquí, en las dos fórmulas primarias de la Mecánica: la del equilibrio y la del movimiento.

Será de nuevo el infatigable Echegaray quien dará en 1910 la bienvenida a esta misma medalla a otro joven e insigne físico: Blas Cabrera y Felipe⁶ Como tema científico, Cabrera discutió *el éter y sus relaciones con la materia en reposo*, inclinándose por el abandono de cualquier modelo mecánico del éter en favor de los meros campos eléctrico y magnético sujetos a las ecuaciones de Maxwell, *que si lo dicen todo á la inteligencia, nada sugieren á la imaginación*. Defendió Cabrera en su discurso la existencia del éter como un medio al que, más que con una estructura material, había que verlo como el origen mismo de la estructura de la materia. Una visión ésta que contrastaba, me temo, con la de Echegaray.

Dos décadas más tarde, y desde esa extrema humildad que rezuma en muchos de sus escritos⁷, Blas Cabrera ensalzó el erudito discurso de ingreso

⁵DISCURSOS LEÍDOS ANTE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES EN LA RECEPCIÓN PÚBLICA DEL SR. D. FRANCISCO DE PAULA ROJAS EL DÍA 21 DE ENERO DE 1894, Imprenta de Luis Aguado, Madrid 1894.

⁶DISCURSOS LEÍDOS ANTE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES EN LA RECEPCIÓN PÚBLICA DEL SR. D. BLAS CABRERA Y FELIPE EL DÍA 17 DE ABRIL DE 1910, Establecimiento Tipográfico y Editorial, Madrid 1910.

⁷MOMENTO ACTUAL DE LA FÍSICA, Imprenta de Estanislao Maestre, Madrid 1921. Discurso leído en la solemne sesión inaugural del curso académico de 1921-22 de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales por el Ilmo. Sr. D. Blas Cabrera el día 13 de noviembre de 1921.

de Julio Palacios sobre el *principio de indeterminación* como eje director⁸, para concluir cerrando filas con aquella minoría que sin negar los éxitos de la mecánica cuántica no consiguen resignarse a su completitud:

O nos resignamos con nuestra ignorancia, o ponemos toda la esperanza en una interpretación más satisfactoria que aún no atisbamos. En vena de descubrirlos la escasa fortaleza de mi espíritu, os diré que espero suene esa hora.

Y hoy, en las postrimerías del siglo, Ynduráin nos ha hablado con toda familiaridad de antimateria, del modelo estándar de las interacciones fundamentales, de dimensiones espaciales extra (compactas o no), de nuevos tiempos “enrollados”, de la bariogénesis, y de multiuniversos. Todos estos conceptos han surgido al calor del espectacular desarrollo de la física actual, afianzada más que nunca en los principios cuánticos. Para Weinberg⁹,

quantum mechanics may survive not merely as an approximation to a deeper truth ... but as a precisely valid feature of the final theory,

aunque tiene que reconocer, con otros muchos, que

I admit to some discomfort in working all my life in a theoretical framework that no one fully understands.

Pues, en efecto, persisten zonas de oscuridad en torno a esa “semi”-realidad esquiva y misteriosa de los quanta, que llevan a Ynduráin a terminar su discurso diciendo:

... la existencia de muchos universos podría, tal vez, resolver algunos de los problemas epistemológicos de la mecánica cuántica.

¡Grande lo fiáis, amigo Paco! ¿No bastará con un sólo universo para tal empeño?

ubi materia, ibi geometria

El nuevo académico nos ha brindado un excelente discurso, combinación equilibrada de altura científica, autoridad en la materia, y sencillez expositiva.

⁸DISCURSO LEÍDO EN EL ACTO DE SU RECEPCIÓN EN LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES POR DON JULIO PALACIOS MARTÍNEZ Y CONTESTACIÓN DEL EXCMO. SR. D. BLAS CABRERA FELIPE EL DÍA 8 DE ABRIL DE 1932, Est. Tip. de A. Medina, Toledo 1932.

⁹S. Weinberg, DREAMS OF A FINAL THEORY, Pantheon, New York 1992.

En él nos ha recordado la frase inicial del prólogo de la primera edición del famoso libro ESPACIO, TIEMPO, MATERIA¹⁰ de Hermann Weyl, fruto de un curso dictado por este ilustre matemático en el verano de 1917 en la *Eidgenössische Technische Hochschule* zuriquesa, y cuyo título inspira el del discurso del nuevo académico:

Mit der Einsteinschen Relativitätstheorie hat das menschliche Denken über den Kosmos eine neue Stufe erklommen;

un libro que conoció cinco ediciones en cinco años, y que, como escribirían Chevalley y André Weil cuarenta años después¹¹,

profitant de la vogue extraordinaire du sujet jusque parmi les profanes, répand le nom de Weyl bien au-delà du monde des mathématiciens où sa réputation n'était plus à faire;

un libro, en fin, cuyas tercera y cuarta ediciones (en 1920 y 1921) incorporaron material nuevo, de la importancia del concepto de transporte paralelo infinitesimal de Levi-Civita, o de la *Eichinvarianz*¹² como forma de deducir de la geometría tanto la gravitación como el electromagnetismo, o de la observación de la deflexión de la luz en el campo gravitatorio del Sol en la cantidad predicha por la gravitación einsteiniana.¹³

Todo el libro de Weyl es un himno a la geometría como fuente soberana para describir la realidad¹⁴; y al final, nos recuerda que

Ein paar Grundakkorde jener Harmonie der Sphären sind in unser Ohr gefallen, von der Pythagoras und Kepler träumten.

¹⁰H. Weyl, RAUM-ZEIT-MATERIE. VORLESUNGEN ÜBER ALLGEMEINE RELATIVITÄTS-THEORIE, Springer Verlag, Berlin 1918.

¹¹C. Chevalley, A. Weil, *Hermann Weyl (1885-1955)*, Extrait de L'Enseignement Mathématique, tome III, fasc. 3 (1957).

¹²Invariancia de contraste, de calibración, de tara, de patrón, de aforo, de *gauge*, de fase.

¹³Su aproximación al *Raumproblem* fue el tema central en los cursos que sobre el análisis matemático del problema del espacio dictó en Barcelona y Madrid, en marzo de 1922, invitado por el Consejo de Pedagogía de la *Mancomunitat de Catalunya* a través del Prof. Esteban Terradas, académico corresponsal a la sazón. Weyl, en su búsqueda de condiciones sencillas que caracterizaran localmente la estructura geométrica de la gravitación y del electromagnetismo, llegó a sus famosos resultados sobre representaciones de grupos de Lie compactos y la teoría de invariantes algebraicos.

¹⁴Años después, posiblemente influido por el fracaso de su teoría de unificación, confesará Weyl que *en física hace falta un tipo de imaginación distinta de la del matemático.*

geometría y física

Los físicos han visto de siempre en la geometría el vehículo natural de comunicación científica, como testimonia el poético pasaje de Galileo¹⁵ en que el pisano (tal vez inspirado en Grosseteste) alaba a la geometría como lenguaje del universo:

La filosofia è scritta in questo grandissimo libro, che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'Universo), ma non si può intendere, se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto.

Los propios matemáticos reconocen el papel singular de la geometría frente a otras ramas de la matemática. La geometría apropiada para describir el espacio-tiempo es asunto experimental; por el momento, la aritmética parece inmutable. Por eso, Gauss escribía:

Según mi convicción más profunda la teoría del espacio tiene un lugar en nuestro conocimiento a priori completamente distinto del ocupado por la aritmética pura. Del conocimiento del primero falta doquiera el convencimiento completo de necesidad (también de verdad absoluta) que caracteriza al de la segunda; y con toda humildad hemos de añadir que si bien el número no es más que un producto de nuestra mente, el espacio posee una realidad fuera de ella cuyas leyes somos incapaces de prescribir por completo a priori.¹⁶

Y Poincaré¹⁷ remachaba:

Dès lors, que doit-on penser de cette question: La géométrie euclidienne est-elle vraie? Elle n'a aucun sens. Autant demander si le système métrique est vrai et les anciennes mesures fausses; si les coordonnées cartésiennes sont vraies et les coordonnées polaires fausses. Une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre; elle peut seulement être plus commode. Or la géométrie

¹⁵G. Galilei, IL SAGGIATORE, Accademia dei Lincei, Giovanni Mascardi, Roma 1623.

¹⁶K.F. Gauss, Carta a Bessel, 1830.

¹⁷H. Poincaré, L'SCIENCE ET L'HYPOTHÈSE, Flammarion, Paris 1938.

euclidienne est et restera la plus commode: 1. Parce qu'elle est la plus simple; ... 2. Parce qu'elle s'accorde assez bien avec les propriétés des solides naturels, ...

Al final de su histórica *Habilitationvorlesung*, Riemann¹⁸ afirmaba proféticamente en 1854:

Es muss also entweder das dem Raume zu Grunde liegende Wirkliche eine discrete Mannifaltigkeit bilden, oder der Grund des Massverhältnisse ausserhalb, in darauf wirkenden bildenden Kräften, gesucht werden. ... Es führt dies hinüber in das Gebiet einer andern Wissenschaft, in das Gebiet der Physik, welches wohl die Natur der heutigen Veraulassung nicht zu betreten erlaubt.

De ahí que Einstein escribiera, refiriéndose a Riemann:

...llegó por medio de especulación matemática pura a la idea de la inseparabilidad de la Geometría y la Física, pensamiento éste que setenta años más tarde se hizo real con la teoría general de la relatividad, en virtud de la cual Geometría y Teoría de la Gravitación se funden en una sola unidad.¹⁹

Sólo el genio de Riemann, solitario e incomprendido, se había abierto camino a mediados del siglo pasado hacia un nuevo concepto del espacio, en el cual se despojaba a éste de su rigidez, y se admitía la posibilidad de que participara en los procesos físicos.²⁰

Una rápida ojeada a los índices de contenidos de las revistas de física teórica indica el asombroso grado de matematización con que se expresan las ideas físicas más avanzadas del momento. Lejos queda la década de los treinta, en que, al decir de Res Jost, *las matemáticas exigidas a un físico teórico quedaban reducidas a un conocimiento rudimentario de los alfabetos latino y griego*.

Veinte años después imperaría el análisis (álgebras de operadores, funciones analíticas, distribuciones) como medio de trabajo para la teoría de campos cuánticos, y desde los sesenta hasta el presente la geometría (diferencial, algebraica, aritmética) ha ido adueñándose de la escena; primero,

¹⁸G.F.B. Riemann, ÜBER DIE HYPOTHESEN, WELCHE DER GEOMETRIE ZU GRUNDE LIEGEN, 1854.

¹⁹A. Einstein, *Geometría no euclídea y física*, Rev. Mat. Hisp.-Amer. 1, 72-76, 1926.

²⁰A. Einstein, MEIN WELTBILD, Querido Verlag, Amsterdam 1933.

con las simetrías globales aproximadas²¹, más tarde con las teorías de campos Yang-Mills²² o teorías *gauge* no-abelianas, su invarianza bajo cambios de fase²³ (o de *gauge*) y la ruptura espontánea de simetrías (en física de partículas), y con los teoremas de singularidad de Penrose y Hawking (en relatividad general), luego con las supersimetrías, anomalías, y teoremas del índice, más tarde con las teorías de cuerdas y de campos topológicos, y por fin, con la geometría no-conmutativa (que, irónicamente, devuelve al análisis su importancia).

Lo cierto es que día a día el refinado lenguaje matemático de la física teórica parece alejar del físico medio (y por supuesto del ciudadano culto) la comprensión de los campos de vanguardia, y aumenta la edad a la que los investigadores pueden contribuir a ellos de modo efectivo. Decía Dirac²⁴: *a physical law must possess mathematical beauty*. Para la mayoría siguen siendo la sencillez y naturalidad ingredientes básicos de la belleza a secas. Pero ambos conceptos son muy relativos; los expertos en teoría de los números consideran la solución al *Último Teorema* de Fermat dada por Andrew Wiles²⁵ como simple y natural corolario a su demostración de la conjetura de Shimura-Taniyama para una amplia clase de curvas elípticas conteniendo a las semiestables, y el común de los mortales hubiera preferido una demostración que no sobrepasara en mucho los márgenes del libro de Diofanto. Presto a admitir con Dirac²⁶ que

God is a mathematician of a very high order, and He used very advanced mathematics in constructing the universe,

a veces pienso que tal vez “se le fue algo la mano”.

²¹Aún recuerdo cuando tuve que explicarle a Abdus Salam en Trieste, en el verano de 1962, detalles de los trabajos de Dynkin sobre grupos de Lie simples; hoy forma parte ésto del *curriculum* ordinario de nuestros jóvenes físicos teóricos.

²²C.N. Yang, R. Mills, *Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance*, Phys. Rev. **96**, 191–195 (1954).

²³T.T. Wu, C.N. Yang, *Concept of nonintegrable phasefactors and global formulation of gauge fields*, Phys. Rev. **D12**, 3845–3857 (1975); C.N. Yang, *Geometry and physics*, en *TO FULFILL A VISION*, Ed. Y. Ne’eman, Addison-Wesley, Reading 1981.

²⁴R. Corby Hovis, Helge Kragh, en *P.A.M. Dirac and the beauty of physics*, Scientific American, May 1993.

²⁵A. Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat’s Last Theorem*, Ann. of Math. **141**, 443–551 (1995); R.L. Taylor, A. Wiles, *Ring theoretic properties of certain Hecke algebras*, Ann. of Math. **141**, 553–572 (1995).

²⁶P.A.M. Dirac, *The evolution of the physicist’s picture of Nature*, Scientific American, May 1963.

física y geometría

Hoy en día pocas dudas podemos albergar sobre la “permeación” de la geometría en la física. El apotegma kepleriano *ubi materia, ibi geometria* encontró su más vívida expresión en las ecuaciones de Einstein para el campo gravitatorio. Pasará a la historia de la ciencia el período actual como uno de máximo contacto entre matemática y física. Si bien los logros más recientes en campos tan formales como la teoría de variedades abelianas, geometría aritmética, etc. son inmediatamente transportados por los físicos a sus desarrollos en teoría de cuerdas, en sistemas integrables, etc, no es menos cierto que la intuición física inyecta perspectivas nuevas en esos campos abstrusos, haciendo real su fertilización cruzada.²⁷

Varios ejemplos destacaron en la pasada década: el descubrimiento de estructuras exóticas para \mathbf{R}^4 , el hallazgo de invariantes polinómicos para nudos y para 4-variedades, y la resolución del problema de Riemann-Schottky. A las primeras llegó el famoso topologista Michael Freedman²⁸ gracias a los resultados de un analista, Simon K. Donaldson²⁹, sobre soluciones autoduales (instantones) de campos físicos clásicos de Yang-Mills. La dimensión 4 difiere así dramáticamente de las restantes, pero nadie sabe muy bien qué repercusiones pueda tener para la física la diversidad de cálculos diferenciales distintos asociados a las nuevas variedades $\mathbf{R}^4_{\text{exótico}}$.³⁰

La teoría de campos también ha revolucionado³¹ la topología diferencial de variedades de baja dimensión. Ha proporcionado, por un lado, una importante interpretación y generalización de los invariantes polinómicos de Vaughan Jones³² para nudos y enlaces a través de una teoría de campos

²⁷El matemático Sir Michael Atiyah escribía hace un par de años: *What we are now witnessing on the geometry/physics frontier is, in my opinion, one of the most refreshing events in the mathematics of the 20th century. The ramifications are vast and the ultimate nature and scope of what is being developed can barely be glimpsed. It might well come to dominate the mathematics of the 21st century.* (Bull. Amer. Math. Soc. **30**, 179 (1994)).

²⁸M.H. Friedman, *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Diff. Geom. **17**, 357–454 (1982).

²⁹S.K. Donaldson, *An application of gauge theory to four dimensional topology*, J. Diff. Geom. **18**, 279–315 (1983).

³⁰En combinación con la versión de Connes-Lott del modelo estándar, se ha sugerido cómo el uso de una estructura diferencial exótica en una de las dos copias de Minkowski podría producir geoméricamente confinamiento de partículas con interacciones fuertes (J. Ślaskowski, *Exotic smoothness, noncommutative geometry and particle physics*, hep-th/9411151). Y puestos ya en ello, cabría especular también sobre posibles consecuencias cosmológicas del hecho de que cualquier $\mathbf{R}^4_{\text{exótico}}$ o “falso” \mathbf{R}^4 alberga compactos que no pueden meterse en una esfera S^3 suavemente inmersa.

³¹M. Atiyah, *THE GEOMETRY AND PHYSICS OF KNOTS*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1990.

³²V.F.R. Jones, *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials*,

cuánticos topológicos en dimensión $2+1$, con la acción de Chern-Simons como generatriz. Por otro lado, los aspectos geométricos de las teorías de Yang-Mills han inspirado la obtención de importantes y nuevos invariantes topológicos de 4-variedades (polinomios de Donaldson)³³ y visualizar³⁴ estos resultados como versión “torcida” de la teoría Yang-Mills supersimétrica extendida $N = 2$. Otro tanto ha ocurrido con los invariantes de Floer³⁵ y la topología diferencial de 3-variedades.

Es obligado señalar la gran importancia que en la teoría de nudos y trenzas ha tenido la afamada ecuación de Yang-Baxter³⁶, que se ha convertido en útil principal en la búsqueda de modelos discretos completamente integrables y sobre todo en el desarrollo de la teoría de grupos cuánticos y álgebras de Hopf. Figura central y silenciosa en toda esta apasionante historia es Chen Ning Yang³⁷. Todos saben que ganó con Tsung Dao Lee el premio Nobel de Física en 1957 por la predicción³⁸ de la violación de la paridad en la interacciones débiles; pero quizás tengan impacto igualmente perdurable y profundo sobre la ciencia sus resultados ligados a los binomios Yang-Mills y Yang-Baxter: propuesta del mecanismo *gauge* local no-abeliano como transmisor de interacciones y hallazgo de las virtudes mágicas de la ecuación Yang-Baxter.

El problema aludido de Riemann-Schottky consiste en la caracterización de las matrices de períodos de superficies de Riemann de género g . Novikov había conjeturado la solución, y Takahiro Shiota la ha probado (módulo cierta hipótesis técnica)³⁹; en esa caracterización intervienen ciertas funciones θ de Riemann que satisfacen las llamadas ecuaciones tipo K-P, acrónimo de Kadomtsev-Petviashvili⁴⁰, autores de una ecuación que rige el compor-

Ann. of Math. **126**, 335–388 (1987).

³³S.K. Donaldson, *Polynomial invariants for smooth four-manifolds*, Topology **29**, 257–315 (1990); S.K. Donaldson, P.B. Kronheimer, *THE GEOMETRY OF FOUR-MANIFOLDS*, Clarendon Press, Oxford 1990.

³⁴E. Witten, *Topological quantum field theory*, Comm. Math. Phys. **117**, 353–386(1988).

³⁵A. Floer, *An instanton invariant for three-manifolds*, Comm. Math. Phys. **118**, 215–240 (1989)

³⁶C.N. Yang, *Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction*, Phys. Rev. Lett. **19**, 1312-1315 (1967); R.J. Baxter, *Partition function of the eight vertex lattice model*, Ann. Phys. (N.Y.) **70**, 193-228 (1972).

³⁷CHEN NING YANG. *A GREAT PHYSICIST OF THE TWENTIETH CENTURY*, Eds. C.S. Liu, S.-T. Yau, International Press, Boston 1995.

³⁸T.D. Lee, C.N. Yang, *Question of parity conservation in weak interactions*, Phys. Rev. **104**, 254–258 (1956).

³⁹T. Shiota, *Characterization of Jacobian varieties in terms of soliton equations*, Invent. Math. **83**, 333–382 (1986).

⁴⁰B.B. Kadomtsev, V.I. Petviashvili, *On the stability of solitary waves in weakly dis-*

tamiento de ondas en aguas poco profundas y que es de las pocas conocidas que presentan solitones bidimensionales.

Este final de siglo también trajo un magnífico presente, de momento y sin duda para los geómetras, y según los más optimistas, para la física. Se trata de la *dualidad* en teoría de campos y de cuerdas, y muy especialmente, las ecuaciones de Seiberg-Witten⁴¹. La dualidad torna físicamente equivalentes modelos aparentemente muy distintos, intercambiando estructuras elementales (los quanta de las fluctuaciones de los campos) por estructuras compuestas (solitones o excitaciones colectivas) y transformando situaciones en que los objetos interactúan con gran intensidad y de forma generalmente no-abeliana en otras con objetos duales débil y abelianamente acoplados.

La dualidad es tan vieja como el electromagnetismo: las ecuaciones clásicas de Maxwell sin fuentes son invariantes bajo el intercambio de los campos eléctrico y magnético. Para mantener esta simetría con fuentes, es preciso contar con monopolos magnéticos; la consistencia entonces de la cuantización de la teoría requiere que se satisfaga la célebre relación de Dirac⁴² $q_e q_m \in 2\pi\hbar\mathbb{Z}$ entre cualquier par de cargas eléctrica y magnética existentes. La dualidad E-M con fuentes se completa mediante el intercambio $q_e \leftrightarrow q_m = 2\pi\hbar/q_e$, y por tanto conecta regímenes de acoplo intenso con otros débiles. Algo análogo ocurre en ciertos retículos de *spin's*, como el de Ising bidimensional, que presenta una simetría bajo intercambio dual $\beta \leftrightarrow \beta^* := -\frac{1}{2} \log \text{th } \beta$ de temperaturas altas y bajas, con la temperatura crítica $\beta_c = \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2})$ como punto fijo de esa dualidad⁴³.

Si bien la naturaleza no se digna mostrar monopolos de Dirac, sí parece haber monopolos regulares en las teorías *gauge* no-abelianas con simetrías espontáneamente rotas⁴⁴. Aunque falta una demostración completa, abundan los argumentos⁴⁵ a favor de una dualidad exacta en una teoría Yang-

persive media, Sov. Phys. Dokl. **15**, 539–541 (1970).

⁴¹N. Seiberg, *Naturalness versus supersymmetric non-renormalization theorems*, Phys. Lett. **B318**, 469–475 (1993); N. Seiberg, E. Witten, *Electric-magnetic duality, monopole condensation, and confinement in $N = 2$ supersymmetric Yang-Mills theory*, Nucl. Phys. **B426**, 19–52 (1994); Nucl. Phys. **B430**, 485–486 (1994); E. Witten, *Monopoles and 4-manifolds*, Math. Res. Lett. **1**, 769–796 (1994).

⁴²P.A.M. Dirac, *Quantized singularities in the electromagnetic field*, Proc. Roy. Soc., **A33**, 60–72, (1931).

⁴³J.M. Drouffe, C. Itzykson, QUANTUM FIELD THEORY AND STATISTICAL MECHANICS, Cambridge U. Press 1990.

⁴⁴G. 't Hooft, *Magnetic monopoles in unified gauge theories*, Nucl. Phys. **B79**, 276–284 (1974); A.M. Polyakov, *Particle spectrum in quantum field theory*, JETP Lett. **20**, 194–195 (1974).

⁴⁵D. Olive, *Exact electromagnetic duality*, hep-th/9508089, Swansea preprint SWAT/94-95/81.

Mills SU(2) supersimétrica extendida $N = 4$, expresable como simetría bajo la acción del grupo modular $SL(2, \mathbf{Z})/Z(SL(2, \mathbf{Z}))$ sobre el retículo de cargas $q_0(\mathbf{Z} + \tau\mathbf{Z})$, $\text{Im } \tau > 0$.

Para $N = 2$ la dualidad deja de ser exacta para la teoría microscópica SU(2), aunque sobrevive en la teoría efectiva abeliana a baja energía que describe el sistema tras la rotura espontánea $SU(2) \rightarrow U(1)$ obligada por un valor esperado no-nulo $\langle \phi \rangle$ en vacío de un campo Higgs complejo ϕ del supermultiplete $N = 2$. La estructura del espacio de *moduli* cuánticos (vacíos del modelo disequivalentes *gauge*) es clásica para grandes valores del parámetro complejo $u := \langle \text{tr } \phi^2 \rangle$ que etiqueta los *moduli*, esto es, en el límite de acoplo débil, y con dos puntos singulares ($u = \pm 1$ en unidades convenientes) en el otro límite de acoplo fuerte. Uno de estos puntos representa una excitación colectiva, un monopolo, de masa nula; el otro punto está asociado a un *dión* (estructura dotada de cargas tanto eléctrica como magnética) de masa nula. Escribiendo $\langle \phi_3 \rangle =: a$, hay una dualidad $a(u) \leftrightarrow a^*(u)$ asociada al grupo modular sobre el retículo de períodos de la curva elíptica de género 1 de ecuación $y^2 = (x - u)(x^2 - 1)$.

Dotando de masa ligera a uno de los gluinos y al escalar, la supersimetría $N = 2$ se rompe a $N = 1$, y se produce una condensación de monopolos y diones. Se especula⁴⁶ sobre si este fenómeno podría conducir por dualidad a la explicación del confinamiento del color en QCD, del mismo modo que la condensación de pares de Cooper en superconductividad arrastra consigo el confinamiento de los tubos de flujo magnético característico del efecto Meissner.

La dualidad también ha dejado ricos dividendos en la teoría de cuerdas, proporcionando conexiones insospechadas entre los cinco tipos de cuerdas más viables y entre las decenas de millares de formas distintas de descender desde las diez dimensiones en que “viven” las cuerdas hasta las cuatro familiares. Ha tenido lugar una explosión de dualidades (entre cuerdas, agujeros negros cargados extremales, burbujas en dimensión 11, y p -branas⁴⁷), que han unificado hasta tal punto los distintos modelos de cuerdas y sus reducciones dimensionales que de nuevo se escuchan cantos de sirena proclamando que la *teoría del todo* o la *teoría final*⁴⁸ está al caer.

Mencionábamos antes la probada importancia que para la geometría pura y dura, y concretamente para la topología de variedades 4-dimensionales, han tenido los resultados de Seiberg y Witten. Conducen, en efecto, a unos invariantes topológico-diferenciales que permiten, por ejemplo, distinguir entre

⁴⁶G. Veneziano, *Summary*, preprint CERN-TH/95-332, SUSY-95 International Workshop on Supersymmetry and Unification of Fundamental Interactions.

⁴⁷Membranas de dimensión p .

⁴⁸S. Weinberg, *loc. cit.*

4-variedades compactas homeomorfas no-difeomorfas, y probar con bastante generalidad diversas conjeturas⁴⁹. Y todo ello sin un esfuerzo excesivo, gracias a la enorme simplificación que ha aportado la dualidad, al permitir pasar de “contar instantones” en la teoría de Donaldson con un grupo de *gauge* G no-abeliano, a “contar el número de soluciones de una ecuación no-lineal” con un grupo de *gauge* abeliano (dual del toro maximal de G).

Los matemáticos no van a tener más remedio que volver su mirada a la física y familiarizarse con las teorías de campos y cuerdas, poniendo de paso rigor allí donde hay exceso de intuición física. Y en justa reciprocidad, los físicos deberán estar mucho más cercanos a los matemáticos, siguiendo atentamente sus desarrollos y preparándose, quién sabe si para un mundo *adèlico*, con una dualidad mucho más profunda que la antes citada, una fascinante complementariedad entre dos imágenes del mundo: *real* \longleftrightarrow *aritmética*.⁵⁰

un espacio-tiempo sin sucesos

limitaciones cuánticas y gravitacionales

Desde que las divergencias asomaron por la electrodinámica cuántica, los grandes padres de la física moderna buscaron en la gravitación un posible bálsamo curador. La conjunción del principio de indeterminación y de la distorsión gravitacional de los conos de luz podría tener un efecto difuminador de la localidad, posiblemente capaz de atenuar la virulencia de las singularidades en las distribuciones fundamentales.

Otro aspecto relevante de esta influencia guarda relación con la propia naturaleza del espacio-tiempo como agregado de puntos. Hace un año hablaba desde este mismo estrado de la limitación cuántica a la precisión de los relojes. A nadie sorprenderá que el discurso alcance también al espacio, y que ambos, espacio y tiempo, abandonen sigilosamente la escena para aparecer sólo cuando se les llame. El argumento va así⁵¹: Supongamos un suceso de duración

⁴⁹Como la conjetura de Thom, que afirma que en cada clase de homología de superficies en 4-variedades las curvas complejas minimizan el género; se ha demostrado para variedades Kähler con $b^+ > 1$, siendo b^+ el número de formas armónicas autoduales linealmente independientes.

⁵⁰Yu. I. Manin, *Reflections on arithmetical physics*, en CONFORMAL INVARIANCE AND STRING THEORY, p. 293–303, Eds. P. Dita, V. Georgescu, Academic Press, New York 1989.

⁵¹S. Doplicher, K. Fredenhagen, J.E. Roberts: *The quantum structure of space-time at the Planck scale and quantum fields*, preprint, Dipartimento di Matematica “Guido Castelnuovo”, Roma I, Marzo 1994.

J. Fröhlich: *The non-commutative geometry of two-dimensional supersymmetric field theory*, ETH-Hönggerberg preprint, Zürich, 1994.

Δt ; necesariamente va vinculado a un estado cuántico cuya energía presenta (en unidades naturales $\hbar = c = 1$) una indeterminación $\Delta E \gtrsim 1/\Delta t$. Si el sistema cuya desintegración es la responsable de que “veamos” el suceso, ocupa una región de diámetro d , esta dimensión debe satisfacer $\Delta E/d \lesssim \ell_{\text{Planck}}^{-2}$ si queremos evitar que dicho sistema se meta dentro de su radio Schwarzschild escondiéndose de nosotros. Por tanto

$$d \Delta t \gtrsim \ell_{\text{Planck}}^2$$

La posibilidad de evaporación Hawking exige modificar el argumento anterior, pero no consigue remediar el problema, manteniéndose la limitación precedente.

Las implicaciones de este resultado son tremendas. El espacio-tiempo clásico, con variables espaciales y de tiempo abelianas, generadoras de un álgebra conmutativa de funciones, es insostenible, pues en él no cabrían restricciones como las expuestas sobre el “tamaño” de un suceso. Estas variables no pueden ser conmutativas; luego su álgebra de observables tampoco, y el espacio-tiempo de sucesos, como espectro de tal álgebra, se hará no-conmutativo.

Por su lado, la teoría de cuerdas apoya también esta conclusión⁵². Al sustituir estructuras puntuales por filiformes, difumina el espacio-tiempo, haciéndolo “borroso” en regiones de tamaño $\ell_{\text{cuerda}} := \sqrt{\alpha'} \approx \sqrt{2/\alpha_{\text{TGU}}}\ell_{\text{Planck}} \sim 10^{-32}$ cm, donde α' es la tensión de la cuerda. El principio de indeterminación se ve asimismo afectado; para grandes transferencias de momento, al término habitual $\Delta x_{\text{Heisenberg}} \sim 1/\Delta p$ hay que añadir otro “cordelado” $\Delta x_{\text{cuerda}} \sim \ell_{\text{cuerda}}^2 \Delta p$, que fuerza a que $\Delta x_{\text{mín}} \sim \ell_{\text{cuerda}}$.

cuando el orden importa, o la geometría no-conmutativa

La famosa relación de Heisenberg $xp - px = i\hbar$ nos hizo conscientes de que el Universo es básicamente no-abeliano. Los observables y los campos son operadores en general no-conmutativos; en particular, el campo gravitatorio descrito por el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ será un operador, y su falta de conmutatividad necesariamente afectará a la geometría del espacio-tiempo.

Consideraciones dimensionales indican que cuando escudriñemos distancias tan cortas como la longitud de Planck $\ell_{\text{Planck}} \sim 10^{-33}$ cm o lapsos de tiempos tan breves como el tiempo de Planck $\tau_{\text{Planck}} \sim 10^{-43}$ s, el régimen cuántico dominará y el espacio-tiempo será un hervidero inconexo de mini-universos. Como las miríadas de gotas de agua en la espuma que una ola

⁵²E. Witten, *Reflections on the fate of space-time*, Physics Today, April 24–30 (1996).

produce al chocar contra las rocas dejan de verse al sobrevolar la costa, también el espacio-tiempo recupera su aspecto tranquilo, “aburrido”⁵³ y suave a las energías actuales.

Pero no hace falta ir tan lejos para toparnos con la geometría no-conmutativa. En algo tan elemental como el movimiento de una carga q en un campo magnético \vec{B} surgen pares de coordenadas espaciales incompatibles. Las órbitas de Landau (proyecciones sobre un plano perpendicular al campo magnétostático uniforme \vec{B}) son círculos, cuyos centros tienen coordenadas (x_c, y_c) que no conmutan entre sí: $x_c y_c - y_c x_c = -i\hbar c/qB$.

Estos estados de Landau son importantes en la teoría del efecto Hall cuántico, entero⁵⁴ y fraccionario⁵⁵, y es así precisamente donde la geometría no-conmutativa interviene al relacionar la integralidad de la conductividad Hall σ_H con la integralidad (como carácter Chern de un módulo Fredholm) de un 2-cociclo cíclico (en el álgebra de un toro no-conmutativo T_θ^2 , θ irracional) sobre el proyector espectral hasta el nivel de Fermi.⁵⁶

A mediados de la década de los 80 el joven matemático francés Alain Connes presentaba las bases de la geometría no-conmutativa,⁵⁷ tras varios años de desarrollo propio y de preparaciones importantes de Atiyah,⁵⁸ y Brown, Douglas y Fillmore.⁵⁹ Lo cierto es que, como dice Coquereaux⁶⁰, la geometría no-conmutativa es tan antigua como la mecánica cuántica al menos, y que, como el Jourdain de Molière, hemos estado usándola sin saberlo: baste recordar el uso generalizado de álgebras de operadores (de von Neumann en mecánica cuántica, de álgebras C^* en física estadística, etc).⁶¹

⁵³J. Fröhlich: *loc. cit.*

⁵⁴K. von Klitzing, G. Dorda y M. Pepper: *New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance*. Phys. Rev. Lett. **45**, 494–497 (1980).

⁵⁵D.C. Tsui, H. Stormer y A.C. Gossard, *Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit*, Phys. Rev. Lett. **48**, 1559–1562 (1982).

⁵⁶J. Bellissard: *K-theory of C^* -algebras in solid state physics*, in STATISTICAL MECHANICS AND FIELD THEORY: MATHEMATICAL ASPECTS, pp. 99–156. Springer, Berlin 1986.

⁵⁷A. Connes: *Noncommutative differential geometry*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **62**, 257–360 (1985); INTRODUCTION À LA GÉOMÉTRIE NON COMMUTATIVE, InterEditions, Paris 1990; NON COMMUTATIVE GEOMETRY, Academic Press 1994

⁵⁸M.F. Atiyah: *K-THEORY*. Benjamin, New York (1967).

⁵⁹L.G. Brown, R.G. Douglas y P.A. Fillmore: *Extensions of C^* -algebras and K-homology*. Ann. of Math. (2) **105**, 265–324 (1977).

⁶⁰R. Coquereaux, *Non-commutative geometry: a physicist's brief survey*, preprint CPT-92/P.E. 2715, CERN-TH 6552/92.

⁶¹En su trabajo *Non-commutative geometry and string theory*, Nucl. Phys. **B268**, 253–294 (1986), donde intenta vincular la geometría de cuerdas bosónicas abiertas con la teoría de Connes, nos recuerda E. Witten que el propio von Neumann ya se refirió a

El ingrediente básico que define una geometría no-conmutativa (compacta) es un álgebra involutiva \mathcal{A} con unidad, a la que se le asocia un álgebra diferencial universal, involutiva y \mathbf{Z} -graduada, $\Omega^*(\mathcal{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega^n(\mathcal{A})$. Si \mathcal{A} es conmutativa, el espacio geométrico $X_{\mathcal{A}}$ definido por \mathcal{A} no es sino el espectro \mathcal{A} , y sus “puntos” son los caracteres de \mathcal{A} ; si \mathcal{A} es un álgebra C^* un clásico teorema de Gel’fand asegura que hay un isomorfismo canónico $\mathcal{A} \cong C(X_{\mathcal{A}})$.

Luego se añade estructura diferenciable mediante un K -ciclo para \mathcal{A} : una terna espectral (\mathcal{H}, π, D) formada por un espacio de Hilbert \mathcal{H} separable, una *-representación fiel π de \mathcal{A} en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ (álgebra de operadores lineales acotados en \mathcal{H}), y un operador de Dirac D , a saber, un operador autoadjunto en \mathcal{H} , tal que $[D, \mathcal{A}] \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$, y $e^{-\epsilon D^2} \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ (clase de traza) para todo $\epsilon > 0$.

La integral de una forma $\alpha \in \Omega^*(\mathcal{A})$ se define mediante la traza de Dixmier (coeficiente de la divergencia logarítmica de la traza): $\int \alpha := \text{tr}_{\omega}(\alpha)$.

El *cálculo cuantizado o espectral* se remata con algunos útiles riemannianos⁶². Tras definir en $\Omega_D^*(\mathcal{A}) := \pi[\Omega^*(\mathcal{A})]/\pi[\text{d ker } \pi]$ un producto interno semidefinido mediante $\langle \alpha, \beta \rangle := \int \alpha^* \beta$, se induce mediante la terna espectral una métrica canónica en el fibrado cotangente de la variedad $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ no-conmutativa descrita por \mathcal{A} y el K -ciclo (\mathcal{H}, π, D) , para luego introducir los conceptos de conexión, torsión, curvatura riemanniana, tensor de Ricci y curvatura escalar.

Desde esta óptica, se ha vuelto la mirada a la física de partículas, donde esporádicamente se alzan voces⁶³ recordando que el modelo estándar de las interacciones fuertes y electrodébiles parece demasiado feo como para ser una teoría fundamental. Sobre todo, por el papel un tanto *ad hoc* de los campos Higgs para ocultar la simetría y generar masas, manteniendo de paso la renormalizabilidad. Por eso resulta sumamente atractiva la idea de Connes y Lott⁶⁴ de “ver” los Higgs como meras componentes de la conexión entre dos hojas minkowskianas “paralelas”, en una extensión levemente no-conmutativa del espacio-tiempo ordinario⁶⁵. En este enfoque no-conmutativo del modelo estándar a nivel árbol una simple acción Yang-Mills-Dirac se basta para simular además, y de forma automática, una acción Higgs y algunos

la geometría “sin puntos” al hablar de la posible escasez de ideales interesantes en las álgebras asociativas no-conmutativas.

⁶²A.H. Chamseddine, J. Fröhlich, O. Grandjean, *The gravitational sector in the Connes-Lott formulation of the standard model*, preprint ETH-TH/95-3.

⁶³B. Iochum, D. Kastler, T. Schücker, *Riemannian and non-commutative geometry in physics*, preprint CPT-95/P.3260, hep-th/9511011.

⁶⁴A. Connes, J. Lott, *Particle models and noncommutative geometry*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **B18** 29–47 (1990).

⁶⁵Aunque el álgebra asociada $\mathcal{A} = C^{\infty}(\mathbf{R}^4, \mathbf{C} \oplus \mathbf{C})$ es conmutativa, no lo es el \mathcal{A} -bimódulo de 1-formas asociado $\Omega_D^1(\mathcal{A})$.

acoplamientos Yukawa. La distancia⁶⁶ entre las dos hojas es del orden del inverso de la escala débil; por eso no se distinguen a baja energía, viéndose su brecha a través de las interacciones de los Higgs a energías $\gtrsim 100$ GeV. La imposición de una estructura real, generalización no-conmutativa de la conjugación de carga (involución de Tomita), singulariza aún más el modelo⁶⁷.

Las aplicaciones físicas de la geometría no-conmutativa son aún escasas y poco conocidas. Es un frente de investigación ardua, para el que todavía nos falta familiaridad y un desarrollo adecuado de la intuición. Pero estoy convencido de que el futuro le reserva un papel muy importante.

Reflexiones finales

Temo que con mi entusiasmo y ejercicio “hardyano” de *experiencia melancólica*⁶⁸ haya abusado de vuestra gran paciencia. Concluyo de inmediato.

Es muy probable que algunas verdades de hoy sean mitos del mañana. No importa. La historia de la ciencia tiene un osario repleto de teorías científicas. Como escribe Grothendieck⁶⁹,

... notre science, et toute science, serait bien peu des choses, si depuis ses origines elle n'avait été nourrie des rêves et des visions de ceux qui s'y adonnent avec passion.

El progreso sólo se frena cuando flaquea la imaginación. Mientras haya seres curiosos, inteligentes y críticos que se asombren, analicen, y creen, no faltarán ni preguntas ni respuestas. Así es nuestro nuevo académico. Felicitémonos por su ingreso, que va a redundar en beneficio de las nobles tareas de esta Academia. Y al darle de nuevo la bienvenida, brindo por que su estancia en esta Corporación sea larga y feliz para todos.

He dicho.

⁶⁶En geometría no-conmutativa, la distancia geodésica $d(x, y)$ entre dos “puntos” (estados puros) x, y de \mathcal{A} se mide como $\sup\{|x(a) - y(a)| : a \in \mathcal{A}, \|[D, a]\| \leq 1\}$, y no como un ínfimo de “longitudes de arcos” entre esos dos puntos. En el caso conmutativo, ambas definiciones son equivalentes.

⁶⁷A. Connes, *Non commutative geometry and reality*, J. Math. Phys. **36** no. 11 (1995), preprint IHES/M/95/52; *Gravity coupled with matter and the foundation of non commutative geometry*, preprint hep-th/9603053.

⁶⁸A. Borel, *Mathematics: art and science*, The Mathematical Intelligencer **5**, 9–17 (1983).

⁶⁹A. Grothendieck, *Esquisse d'un programme*, preprint 1984.